



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Corso di Laurea in Astronomia

**Evoluzione e formazione dinamica
di binarie di buchi neri**

Relatore:

Prof.ssa Paola Marigo

Co-relatori:

Dott.ssa Michela Mapelli

Dott. Mario Pasquato

Laureanda:

Erica Greco

14 Dicembre 2017

Anno Accademico 2016-2017

14 Dicembre 2017

Indice

1	Onde gravitazionali e binarie di buchi neri	1
1.1	Introduzione	1
2	Formazione di binarie di buchi neri in ammassi stellari	5
2.1	Caratteristiche delle binarie	5
2.2	Ambienti dinamicamente attivi	7
2.3	Incontri a tre corpi	8
2.3.1	Entità degli scambi energetici	10
2.3.2	Focalizzazione gravitazionale, sezione d'urto e tasso di collisione	12
2.4	Gli scambi dinamici	15
3	Evoluzione di binarie di buchi neri in ammassi stellari	17
3.1	L'hardening dinamico	17
3.1.1	Tasso di hardening	18
3.2	Evoluzione del semiasse maggiore	20
3.3	Espulsioni dinamiche	21
4	Simulazioni e analisi dei dati	25
4.1	Elaborazione dei dati	25
4.2	Risultati	27
	Conclusioni	31

Appendice	33
Bibliografia	39

Abstract

La scoperta delle onde gravitazionali da parte degli interferometri LIGO nel 2015 ha confermato l'esistenza delle binarie di buchi neri. Come si formano e come evolvono queste binarie rimane tuttora una domanda aperta.

Nella mia tesi discuto lo scenario di formazione dinamica delle binarie di buchi neri in ammassi stellari.

Presento inoltre l'analisi di un set di simulazioni numeriche a N-corpi in cui le binarie di buchi neri si formano dinamicamente. La mia analisi si concentra infine sulla frazione di binarie che ricevono un *kick* dinamico e che vengono espulse dall'ammasso stellare nel corso della loro evoluzione.

Capitolo 1

Onde gravitazionali e binarie di buchi neri

1.1 Introduzione

L'osservazione delle onde gravitazionali (GW, *Gravitational Waves*) non solo ha permesso di confermare alcune importanti previsioni della relatività generale formulata da Einstein circa un secolo fa, ma rappresenta un potente strumento per comprendere meglio l'Universo e gli oggetti che lo popolano. La misura del segnale gravitazionale GW150914 effettuata il 14 settembre 2015 dai rilevatori LIGO fornisce la prima prova osservativa dell'esistenza delle Binarie di Buchi Neri (BHB, *Black Hole Binaries*).

Il fenomeno di coalescenza, con proprietà tali da essere osservato nell'Universo locale, ha coinvolto due buchi neri di massa pari a 29 e 36 volte quella solare dando origine ad un unico Buco Nero (BH, *Black Hole*) di circa $62 M_{\odot}$. Le $3 M_{\odot}$ mancanti al totale della somma equivalgono all'energia emessa durante il processo di fusione dei due buchi neri, sotto forma di onde gravitazionali. L'evento si è verificato ad una distanza di luminosità compresa tra 230 e 570 Mpc che corrisponde ad un redshift compreso tra 0.05 e 0.12 e ad un'età dell'Universo di circa 12.2-13.1 Gyr all'istante del *merger* [26].

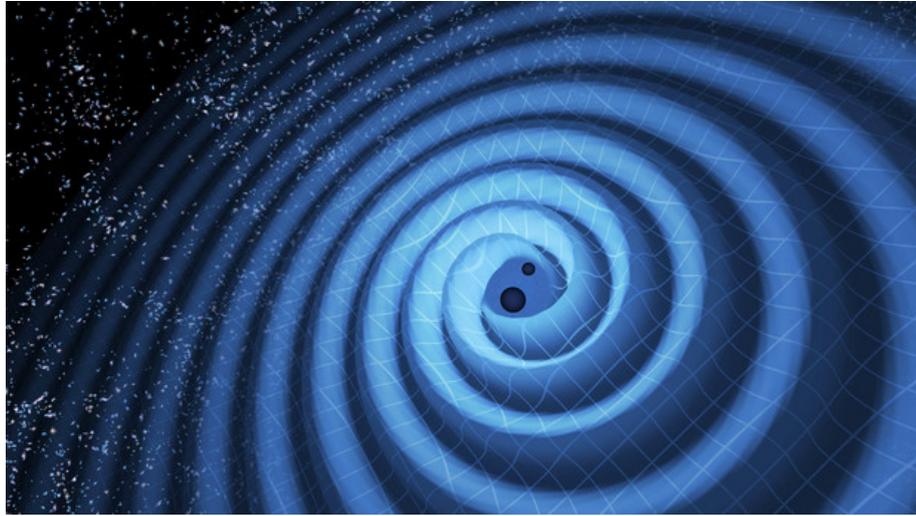


Figura 1.1: Questa illustrazione mostra la fusione di due buchi neri e le onde gravitazionali che si increspano verso l'esterno mentre i buchi neri si muovono a spirale l'uno verso l'altro. Image credit: LIGO/T. Pyle.

Attualmente vengono presi in considerazione due possibili scenari di formazione per una binaria di BH: quello relativo a sistemi binari isolati, cioè non influenzati dinamicamente da stelle circostanti, e quello che riguarda sistemi binari formati in ambienti stellari densi.

Questo lavoro di tesi si concentra sul caso di formazione ed evoluzione di una binaria di buchi neri in ammasso stellare, ovvero sullo scenario dinamico.

Negli ambienti ad alta densità, i BH interagiscono dinamicamente formando binarie che spesso vengono eiettate dall'ammasso. Le interazioni mantengono gli oggetti più pesanti nei sistemi binari e tendono ad espellere quelli più leggeri, producendo binarie 'pesanti' e portando il rapporto delle masse delle componenti vicino all'unità [12].

Sono di particolare importanza gli scambi dinamici in incontri a *tre corpi* che coinvolgono un singolo BH con una binaria, la quale può contenere uno o due buchi neri. Tali meccanismi verranno analizzati in maniera più approfondita

nel corso del lavoro di tesi.

Dal confronto dei modelli di formazione di BHB in ammassi stellari densi con GW150914 si evince che è lecito supporre che la binaria che ha dato luogo alla coalescenza si sia formata in un ammasso, a condizione che esso fosse caratterizzato da una metallicità inferiore a $1/2 Z_{\odot}$ e che il *merger* si sia verificato all'esterno del *cluster*, in seguito all'eiezione dinamica.

Inoltre nell'articolo sulle implicazioni astrofisiche pubblicata dalla collaborazione LIGO/Virgo in seguito alla prima osservazione gravitazionale [17], si conclude che è possibile determinare i vincoli per il tasso di *merger* confrontando quello dedotto dall'osservazione del segnale con i valori predetti dai modelli attuali. Risultano accettabili i modelli che danno un tasso di *merger* superiore a $1 \text{ Gpc}^{-3} \text{ yr}^{-1}$ [17].

Tra il 2015 e il 2017, gli interferometri LIGO/Virgo, hanno osservato cinque fenomeni di coalescenza di binarie di buchi neri (GW150914 [1], GW151226 [2], GW170104 [4], GW170608 [5] e GW170814 [30]), più un sesto segnale non confermato (LVT151012 [3]), dando il via ad un nuovo e ancora inesplorato campo di ricerca astrofisica, che è l'astrofisica gravitazionale.

Le *detection* mostrano che alcune binarie di BH sono in grado di coalescere entro il tempo di Hubble e, inoltre, tre su cinque *merger* di BHB rilevati finora, (GW150914, GW170104 e GW170814), hanno ospitato BH di massa superiore a $20 M_{\odot}$.

Quest'ultimo risultato è sorprendente sotto molti aspetti. Innanzitutto, gli unici BH per i quali abbiamo una misura della massa (circa una dozzina di BH in binarie *X-ray*), hanno una massa inferiore a $20 M_{\odot}$. In secondo luogo, la maggior parte dei codici di sintesi di popolazione non prevedeva l'esistenza di BH con massa $m_{BH} > 30 M_{\odot}$. Pertanto, queste prime osservazioni hanno spinto la comunità astrofisica a rivedere profondamente i modelli di formazione ed evoluzione dei buchi neri, e certamente, l'espansione del catalogo di BHB fornirà ulteriori approfondimenti dal momento che sarà possibile determinare vincoli più stretti sui modelli attuali [22].

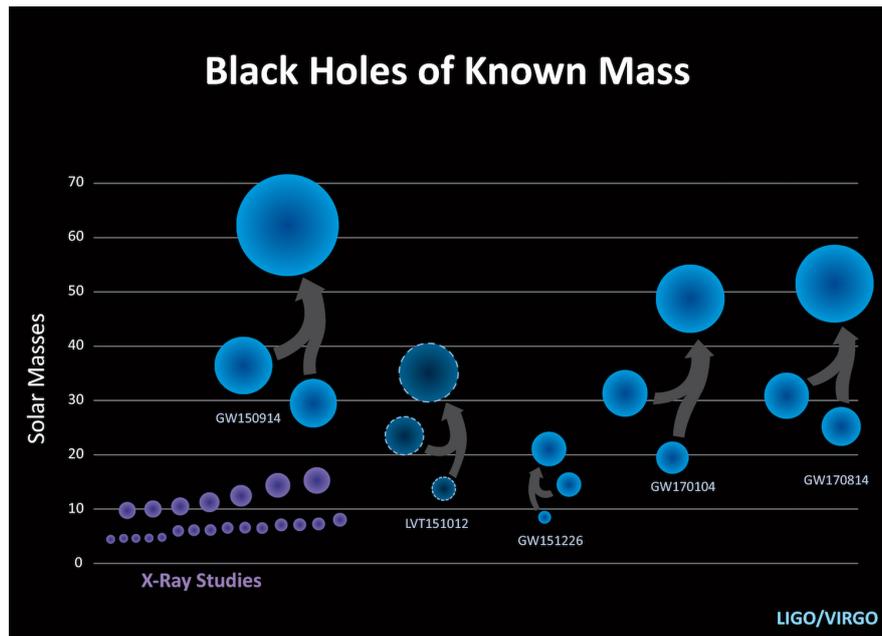


Figura 1.2: I rilevatori LIGO e Virgo hanno osservato una nuova popolazione di BH con masse maggiori di quelle misurate in precedenza con osservazioni *X-ray* (in viola). In figura sono mostrati i tre rilevamenti confermati da LIGO (GW150914, GW151226, GW170104) in blu brillante, il rilevamento non confermato (LVT151012), con contorni tratteggiati, ed il quarto rilevamento confermato (GW170814) osservato da Virgo e da entrambi i rilevatori LIGO. Image credit: LIGO / Caltech / Sonoma State (Aurore Simonnet).

Capitolo 2

Formazione di binarie di buchi neri in ammassi stellari

In questo Capitolo vengono descritte le caratteristiche fondamentali delle binarie ed i processi che portano alla formazione di tali sistemi negli ammassi stellari.

La probabilità di formare sistemi binari attraverso meccanismi dinamici è fortemente influenzata dall'ambiente circostante, quindi si considerano gli ammassi globulari come sede di interazione a tre corpi.

Ci si sofferma sugli incontri binaria-stella singola, in particolare sul meccanismo di *scambio dinamico* per le binarie di buchi neri [21].

2.1 Caratteristiche delle binarie

All'interno di un ammasso, una binaria può formarsi secondo diversi meccanismi.

Il primo è quello in cui rientrano le *binarie primordiali*, ossia stelle che nascono legate gravitazionalmente dal collasso e dalla frammentazione di una nube di gas.

Il secondo caso riguarda la formazione della binaria per cattura mareale.

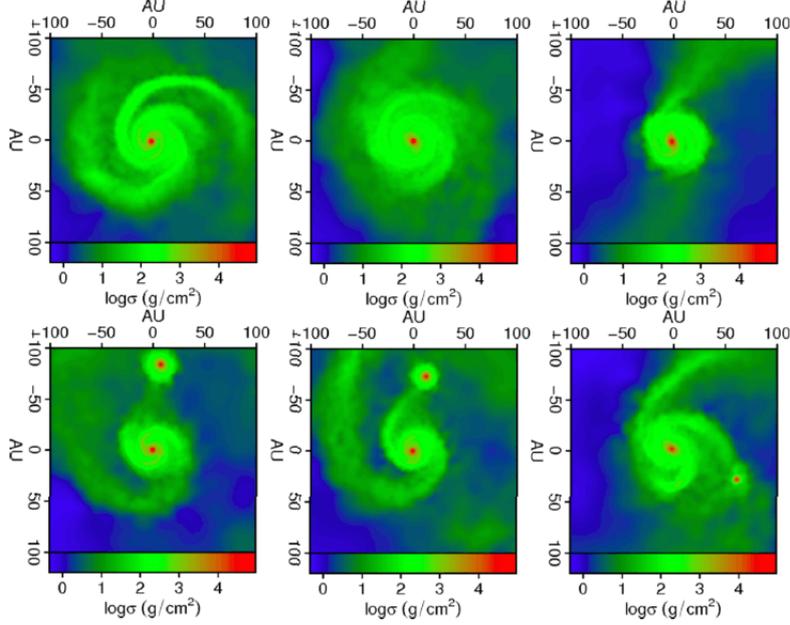


Figura 2.1: Simulazione effettuata da Hayfield et al. di una singola stella e di una binaria formatesi da una nube molecolare [11].

Infatti, quando due stelle si trovano molto vicine, le perturbazioni mareali producono accelerazioni della materia stellare rispetto al centro di massa delle stelle. Le due stelle si catturano l'un l'altra se

$$\Delta E_{T1} + \Delta E_{T2} \geq \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (2.1)$$

ove ΔE_{T1} ed ΔE_{T2} rappresentano rispettivamente l'energia interna guadagnata da ciascuna stella durante il processo di cattura mareale e $\frac{1}{2} \mu v^2$ è l'energia cinetica iniziale del moto relativo delle due stelle.

Infine, l'ultimo meccanismo è quello che sarà discusso in maniera più approfondita: l'*interazione a tre corpi*. Nel sistema iniziale, sia l'energia totale che quella delle tre possibili coppie, è positiva. Durante l'incontro gravitazionale, una delle tre stelle può sottrarre al sistema una grande quantità di energia, in modo tale che il sistema finale abbia energia negativa. Tale sistema finale è

costituito dalle altre due stelle che formano un sistema binario.

L'energia di legame di una binaria è pari a

$$E_b = \frac{Gm_1m_2}{2a} \quad (2.2)$$

ove m_1 ed m_2 sono le masse delle componenti ed a è il semiasse maggiore dell'orbita.

Si definisce binaria stretta (*hard*) una binaria la cui energia di legame è maggiore dell'energia cinetica media di una stella dell'ammasso:

$$\frac{Gm_1m_2}{2a} \geq \frac{1}{2}\langle m \rangle \sigma^2 \quad (2.3)$$

in cui $\langle m \rangle$ è la massa media delle stelle dell'ammasso e σ è la loro dispersione di velocità.

Viceversa, una binaria larga (*soft*), ha energia di legame minore dell'energia cinetica media delle stelle dell'ammasso globulare.

Generalmente le interazioni a tre corpi danno origine a binarie larghe, di cui la maggior parte viene distrutta, mentre le rimanenti possono stringersi per formare binarie strette.

Le binarie formate per cattura mareale invece, sono, nella maggior parte dei casi, sistemi molto stretti.

2.2 Ambienti dinamicamente attivi

I processi di interazione dinamica sono importanti per l'evoluzione delle binarie solo se esse si trovano in ambienti densi ($\geq 10^3$ stelle pc^{-3}), ad esempio negli ammassi stellari.

Inoltre la maggior parte delle stelle massicce (che sono i progenitori dei BH) si formano in tali ambienti, in particolare nella zona centrale dell'ammasso [18], [33], [34], [28].

La maggior parte degli studi sulla formazione dinamica dei sistemi binari di BH si concentrano sugli ammassi globulari, sistemi stellari vecchi (~ 12 Gyr),

molto massicci ($>10^4 M_{\odot}$) e densi ($>10^4 M_{\odot}pc^{-3}$), sito di intensi processi dinamici.

Il *core* di un ammasso globulare è caratterizzato da elevati valori di densità [29] e dunque frequenti interazioni a tre corpi.



Figura 2.2: L'immagine presa dal Telescopio Spaziale Hubble mostra l'ammasso globulare 47 Tucanae (NGC 104). Image credit: NASA, ESA, and the Hubble Heritage.

2.3 Incontri a tre corpi

Si definisce *pericentro* (p) della stella di campo la distanza di massimo avvicinamento tra essa ed il centro di massa della binaria.

Gli incontri tra binaria e stella singola vengono classificati in base al numero di interazioni tra la binaria e la stella di campo. Si parla di interazione rapida

(*prompt interaction*) se si verifica un solo passaggio della stella di campo al pericentro oppure di interazione risonante (*resonant interaction*) se la stella di campo effettua più passaggi al pericentro.

Tali interazioni possono dar luogo ai seguenti risultati:

- *flyby*: lo stato finale del sistema sarà uguale a quello iniziale;
- *scambio*: nel sistema finale, la stella di campo farà parte della binaria, mentre una delle componenti della binaria del sistema iniziale fuggerà all'infinito;
- *ionizzazione*: il sistema finale sarà costituito dalle tre stelle singole;
- *coalescenza (merging)*: le stelle della binaria si fondono in un unico oggetto e la stella di campo può o rimanere legata a tale oggetto o fuggire all'infinito;
- *sistema triplo*: nel sistema finale due delle tre stelle si troveranno su orbite più strette della terza, costituendo una sorta di sistema binario con una terza stella satellite. Tale sistema prende il nome di sistema triplo gerarchico.

Se nelle interazioni binaria-stella singola l'autogravità delle stelle di campo risulta essere trascurabile rispetto alle forze in gioco durante lo *scattering*, allora si possono trascurare le interazioni gravitazionali tra le stelle dell'ammasso e quindi considerare i tre corpi come un sistema isolato.

Tale condizione è verificata quando sia la massa di ciascuna stella di campo (m_*) sia la massa totale di stelle di campo contenute in una sfera di raggio pari al semiasse maggiore della binaria, sono molto minori della massa totale della binaria:

- $m_* \ll m_1 + m_2$
- $\frac{4}{3}\pi a^3 n m_* \ll m_1 + m_2$

in cui n è la densità di stelle [13].

Le binarie hanno un serbatoio di energia, la loro energia interna:

$$E_{int} = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} \quad (2.4)$$

dove $\mu = m_1 m_2 / (m_1+m_2)$ è la massa ridotta della binaria, v è la velocità relativa tra le due componenti della binaria ed r è la loro distanza. Dalla relazione kepleriana si ha $E_{int} = -E_b$.

L'energia interna di una binaria può essere scambiata con altre stelle solo se essa subisce un incontro ravvicinato con una stella, in modo tale che i suoi parametri orbitali siano perturbati dalla stella di campo. Una stella singola ed una binaria possono dar luogo ad un incontro a tre corpi se la loro distanza reciproca è dell'ordine della separazione orbitale della binaria. Gli incontri a tre corpi hanno importanti effetti sulle binarie di BH, come gli *scambi*, l'*hardening* e le *espulsioni*.

2.3.1 Entità degli scambi energetici

Discutiamo l'entità degli scambi energetici durante le interazioni gravitazionali considerando i risultati ottenuti dalle simulazioni effettuate da *Hills* [13].

Gli incontri gravitazionali presi in considerazione riguardano un campione di 20000 *scattering* che coinvolgono binarie *hard* in cui la distanza di massimo avvicinamento p è dell'ordine della separazione orbitale a , ovvero gli unici in cui si verificano trasferimenti energetici significativi. Inoltre, in tutti gli incontri, la massa della stella di campo m_* risulta trascurabile rispetto alla massa della binaria.

L'entità dello scambio energetico medio per singolo *scattering* risulta:

$$\frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} \propto \frac{m_*}{m_1 + m_2} \quad (2.5)$$

Hills definisce il *parametro di energia post-incontro* C come:

$$C = \frac{m_1 + m_2}{2m_*} \frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} \quad (2.6)$$

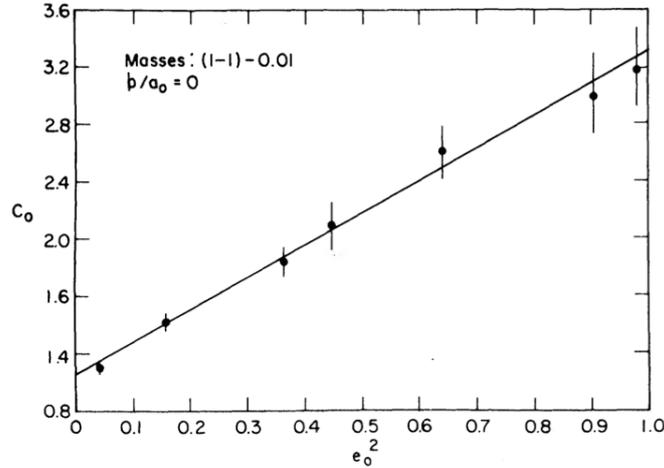


Figura 2.3: Dipendenza del parametro energetico C dall'eccentricità orbitale, fissati $b=0$ ed $m_1/m_2=1$. Grafico riprodotto da Hills [13].

in cui $\langle \Delta E_b \rangle$ è la variazione media dell'energia di legame della binaria per un singolo incontro ed E_b è l'energia di legame iniziale.

Il fattore C è dell'ordine dell'unità, tuttavia Hills studia la sua dipendenza dall'eccentricità orbitale e , dal rapporto delle masse della binaria m_1/m_2 e dal parametro di impatto b .

Si definisce *parametro d'impatto* la componente del vettore separazione iniziale tra la stella di campo ed il centro di massa della binaria che è ortogonale alla velocità iniziale della stella di campo.

Per quanto riguarda l'eccentricità orbitale si osserva un lieve aumento di C al crescere di tale parametro. In particolare, considerando $m_1/m_2 \simeq 1$ e $b=0$, per il valore $e=0.7$, tipico delle binarie, si ottiene che $C \simeq 2$ (Figura 2.3). Con l'aumentare del rapporto delle masse, fissati e e b pari a 0, C inizialmente cresce fino a raggiungere un valore massimo ($C \simeq 2$) e per alti valori di m_1/m_2 , esso decresce lentamente (Figura 2.4).

Il parametro di impatto risulta essere il fattore più importante nell'alterazione del parametro C , infatti l'entità del trasferimento di energia diminuisce

drasticamente all'aumentare di b (Figura 2.5). Si può assumere, in prima approssimazione che un incontro gravitazionale determina un importante trasferimento di energia solo se la distanza di massimo avvicinamento tra la stella di campo e il centro di massa della binaria è dell'ordine di grandezza del semiasse maggiore della binaria.

Alla luce di ciò, l'espressione di riferimento scelta per lo scambio energetico medio è data da:

$$\frac{\langle \Delta E_b \rangle}{E_b} = \xi \frac{m_*}{m_1 + m_2} \quad (2.7)$$

ove $\xi \equiv 2C$ è dell'ordine di 0.2-1, poiché C mediato su un campione di *scattering* effettuati con un opportuno range di parametri di impatto, è inferiore a 1-3.

2.3.2 Focalizzazione gravitazionale, sezione d'urto e tasso di collisione

Prima di sviluppare i fondamentali passaggi evolutivi delle binarie di buchi neri negli ammassi, ci si sofferma sugli aspetti fondamentali delle interazioni coinvolgenti le binarie.

La *focalizzazione gravitazionale* è la variazione della traiettoria della stella di campo causata dall'attrazione gravitazionale della binaria (o dalla componente più massiccia di essa).

Essa riduce la distanza del pericentro rispetto al parametro di impatto (massimo avvicinamento misurato lungo la traiettoria imperturbata).

Dalla conservazione dell'energia e del momento angolare, si può scrivere l'espressione del pericentro in funzione del parametro di impatto:

$$p = \frac{Gm_T}{v_\infty^2} \left(\sqrt{1 + b^2 \left(\frac{v_\infty^2}{Gm_T} \right)^2} - 1 \right) \quad (2.8)$$

ove $m_T = m_1 + m_2 + m_*$.

Se in una interazione si ha un trasferimento di energia significativo, la distanza di massimo avvicinamento p tra il centro di massa della binaria e la stella di campo è inferiore a poche separazioni orbitali. Se l'effetto di focalizzazione

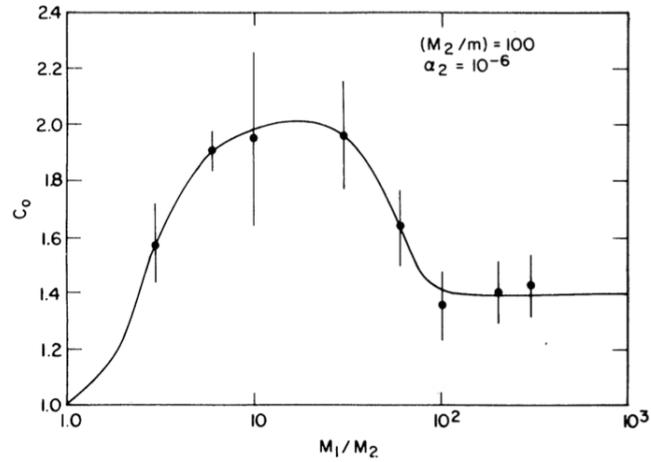


Figura 2.4: Andamento, tratto da Hills [13], del parametro di energia post-incontro C in funzione del rapporto tra le masse delle componenti della binaria, m_1/m_2 , fissati $e=0$ e $b=0$.

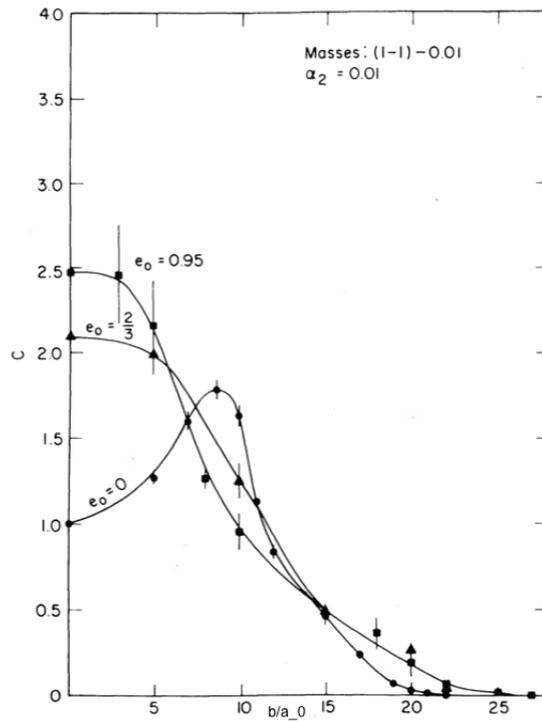


Figura 2.5: Andamento del parametro energetico C in funzione del parametro di impatto b espresso in unità del semiasse maggiore iniziale a_0 . Fissato $m_1/m_2=1$, si riportano gli andamenti per $e=0$, $2/3$ e 0.95 riprodotti da Hills [13].

è dominante, ovvero per $v_\infty^2 \ll \frac{Gm_T}{b}$, si ha $p \simeq b^2 \frac{v_\infty^2}{2Gm_T}$ e anche incontri con parametro di impatto molto grande, presentano un basso valore di p e quindi consentono scambi di energia significativi [21].

La *sezione d'urto* è definita come l'area del cerchio con centro coincidente nel centro di massa della binaria e raggio pari al massimo valore del parametro di impatto per cui lo scambio energetico è apprezzabilmente non nullo:

$$\sigma_{coll} = \pi b_{max}^2 \quad (2.9)$$

Nel caso di focalizzazione gravitazionale dominante si può sostituire $b_{max}^2 = \frac{2Gm_T}{v_\infty^2} p$, e considerando p dell'ordine della separazione orbitale a , si ricava l'espressione della sezione d'urto:

$$\sigma_{coll} = \frac{2\pi a Gm_T}{v_\infty^2} \quad (2.10)$$

Spesso si utilizzano altre espressioni per la sezione d'urto riconducibili a questa, ad esempio [8]:

$$\sigma_{coll} = k(q_1, q_2) \pi a^2 \left(1 + \frac{v_c}{v_\infty}\right)^2 \quad (2.11)$$

ove $v_c = \frac{Gm_T}{b}$ è la velocità critica, ossia la velocità minima che la stella di campo deve avere all'infinito per ionizzare la binaria; $k(q_1, q_2)$ è un parametro che si ricava dalle simulazioni e $q_1 \equiv m_2/m_1$ e $q_2 \equiv m_*/m_1$. Per $v_\infty^2 \ll v_c^2$ si ottiene l'espressione 2.10:

$$\sigma_{coll} = k(q_1, q_2) \pi a^2 \left(\frac{v_c}{v_\infty}\right)^2 \quad (2.12)$$

E infine, si può ricavare il *tasso di collisioni*, cioè il numero di interazioni per unità di tempo:

$$R_{coll} = n \sigma_{coll} v_\infty \quad (2.13)$$

ove n è la densità di stelle. Sostituendo σ_{coll} , si ottiene:

$$R_{coll} = \frac{2\pi Gm_T n a}{v_\infty} \quad (2.14)$$

2.4 Gli scambi dinamici

Il meccanismo di *scambio* è quello che riveste il ruolo più importante per quanto riguarda la formazione dinamica di binarie di buchi neri.

Si può verificare quando il pericentro è piccolo rispetto al semiasse maggiore iniziale della binaria (a_0), per cui si può avere un significativo trasferimento di energia.

Nel caso di trasferimento di energia dalla binaria alla stella di campo, se quest'ultima ha massa confrontabile con una delle componenti della binaria, si può verificare uno *scambio rapido*. Al termine dell'interazione, la stella che non fa più parte della binaria fugge all'infinito con velocità finale superiore alla velocità iniziale della stella di campo.

Se invece, si ha un trasferimento di energia cinetica dalla stella di campo alla binaria, può verificarsi uno scambio al termine del quale la stella che rimane fuori dalla binaria fugge all'infinito con velocità finale inferiore rispetto a quella iniziale della stella di campo.

Pertanto, a seguito di uno scambio rapido, un buco nero segregato nel core di un ammasso stellare può interagire con una binaria e rimpiazzare la componente meno massiva nel sistema (Figura 2.6).

In particolare, i singoli BH formano binarie preferibilmente con gli altri BH [16] e quelli nati in binaria con una stella leggera, la scambiano con una componente di massa maggiore, preferibilmente con un altro BH.

Questo vuol dire che è molto probabile che si formino numerose binarie di BH nel core, le quali assumono un ruolo fondamentale nell'evoluzione dinamica di un ammasso globulare. Una differenza molto importante tra i BH isolati e quelli che si trovano all'interno di un ammasso sta proprio nel fatto che un BH che si forma come un singolo oggetto di campo ha basse probabilità di diventare membro di un sistema binario, mentre un singolo BH nel *core* di un ammasso stellare ha buone probabilità di diventare una componente di una binaria tramite scambi dinamici.

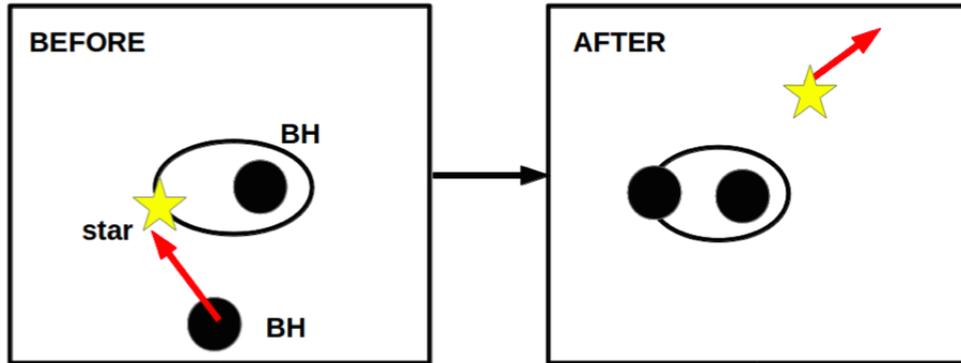


Figura 2.6: Una binaria composta da un BH e una stella di piccola massa subisce uno scambio con un BH: ciò porta alla formazione di una binaria di buchi neri. Figura di Mapelli M. [22].

Inoltre, le binarie di BH formate attraverso meccanismi di scambio si differenziano da quelle di campo perchè (si veda ad esempio [35]):

- quelle formate da scambi sono mediamente più massicce di quelle isolate, perché gli oggetti *incoming* massicci hanno maggiori probabilità di acquisire compagni;
- gli scambi determinano la formazione di binarie di BH con orbite molto eccentriche;
- poiché gli scambi tendono a rendere casuali gli spin, le binarie di BH nate dagli scambi probabilmente hanno spin disallineati.

Capitolo 3

Evoluzione di binarie di buchi neri in ammassi stellari

In questo Capitolo vengono discussi gli aspetti fondamentali riguardanti l'evoluzione dinamica delle binarie di buchi neri negli ammassi stellari.

In primo luogo si descrive il processo di *hardening dinamico* per cui una binaria stretta diviene sempre più stretta, in seguito agli incontri gravitazionali. Vengono discusse brevemente le conseguenze delle interazioni a tre corpi di oggetti compatti, ovvero le *espulsioni dinamiche*.

3.1 L'hardening dinamico

Negli incontri in cui sono coinvolti i sistemi binari, hanno luogo scambi tra energia interna della binaria ed energia cinetica della stella di campo.

Se una parte dell'energia interna della binaria E_{int} viene convertita in energia cinetica della stella di campo e del centro di massa della binaria, si ha un aumento dell'energia di legame della binaria E_b ed un conseguente restringimento dell'orbita di essa. Invece la stella di campo si allontana con un'energia cinetica, e quindi con velocità, superiore a quella iniziale.

Se invece, parte dell'energia cinetica della stella di campo va ad accrescere

l'energia interna E_{int} della binaria, l'energia di legame E_b diminuisce, dunque la binaria allarga la propria orbita e la stella di campo si allontana con una velocità inferiore a quella iniziale.

Generalmente accade che binarie larghe che subiscono uno *scattering* con una stella di campo diventano sempre più larghe.

La situazione opposta si verifica per le binarie strette: interagendo con una stella di campo danno luogo a binarie più strette, poiché l'energia di legame viene accresciuta durante l'interazione (ovvero la binaria perde energia interna poichè $E_b = -E_{int}$). Questo processo è chiamato *hardening dinamico*. In altre parole si ha che:

$$E_{int} + E_{CM} + E_* = E'_{int} + E'_{CM} + E'_* \quad (3.1)$$

ossia, l'energia totale prima e dopo l'interazione si conserva, ove E_{CM} è l'energia del centro di massa della binaria ed E_* è l'energia della stella di campo. Se una parte dell'energia interna di una binaria *hard* viene trasformata in energia del centro di massa e in energia cinetica della stella di campo durante gli incontri a tre corpi, la binaria tende a diventare più legate, restringendo il semiasse maggiore dell'orbita (Legge di Heggie [12]).

Si suppone che la maggior parte delle binarie di BH sia costituita da binarie strette, perché i BH sono tra i corpi più massicci degli ammassi stellari. Pertanto, è lecito supporre che le binarie di BH diventino sempre più legate come conseguenza degli incontri a tre corpi. Il processo di *hardening* può essere efficace per rendere una binaria di BH sufficientemente stretta da poter entrare nel regime in cui l'emissione di onde gravitazionali è efficiente.

3.1.1 Tasso di hardening

Mantenendo invariati le masse delle componenti di una binaria *hard* ed i parametri di densità ρ_* e dispersione σ_* delle stelle di campo, si nota che la variazione nel tempo dell'energia di legame, $\frac{dE_b}{dt}$ rimane costante:

$$\frac{dE_b}{dt} = 2\pi\xi \frac{G\rho_*}{\sigma_*} \frac{Gm_1m_2}{2} \quad (3.2)$$

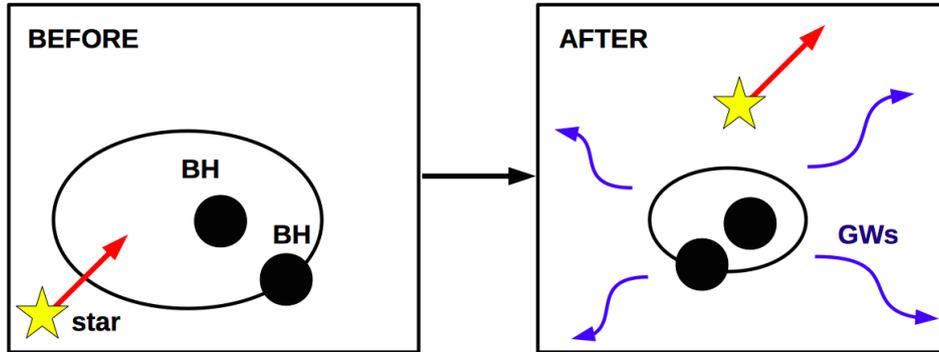


Figura 3.1: Incontro tra una binaria di BH ed una stella di campo in cui si verifica un aumento dell'energia di legame E_b della binaria e quindi, la riduzione del semiasse maggiore della sua orbita. La binaria diventa abbastanza stretta da poter entrare nel regime in cui l'emissione di onde gravitazionali è efficiente. Figura di Mapelli M. [23].

Il variare di E_b in maniera costante fisicamente indica che una binaria *hard* aumenta la propria *hardness* con un tasso costante. Per stimare l'*hardness* di una binaria, si può utilizzare il parametro $\frac{d}{dt} \frac{1}{a}$ invece di $\frac{dE_b}{dt}$. Tale parametro, chiamato *tasso di hardening*, viene espresso in funzione della costante adimensionale $H=2\pi \xi$:

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{a} = H \left(\frac{G\rho_*}{\sigma_*} \right) \quad (3.3)$$

Poiché $\frac{d}{dt} \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \frac{da}{dt}$, si ottiene che

$$\frac{da}{dt} = -2\pi\xi \frac{G\rho_*}{\sigma_*} a^2 \quad (3.4)$$

$\frac{da}{dt}$, in modulo, decresce al diminuire di a . Dunque, la separazione orbitale di una binaria *hard* si riduce sempre più lentamente [21].

3.2 Evoluzione del semiasse maggiore

Riportiamo le definizioni dei tempi scala di *collisione*, di *hardening* e di *merging*, che serviranno per stimare analiticamente l'evoluzione del semiasse maggiore di una binaria di BH influenzata da incontri a tre corpi e dall'emissione di onde gravitazionali.

- Il *tempo di collisione* t_{coll} è definito come il tempo necessario perché si verifichi una collisione:

$$t_{coll} = \frac{v_\infty}{2\pi G m_T n a} \quad (3.5)$$

- il *tempo di hardening* t_h è il tempo di riduzione del semiasse maggiore di una binaria hard per espulsione delle stelle di campo:

$$t_h = \left| \frac{a}{\dot{a}} \right| = \frac{\sigma_*}{G \rho_* H} \frac{1}{a} \quad (3.6)$$

- il *tempo di merging* t_{gw} è il tempo scala necessario ad una binaria per coalescere per emissione di onde gravitazionali:

$$t_{gw} = \frac{5}{256} \frac{c^5 a^4 (1 - e^2)^{7/2}}{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)} \quad (3.7)$$

Si stima per l'evoluzione del semiasse maggiore di una binaria di BH [7]:

$$\frac{da}{dt} = -2\pi\xi \frac{G\rho}{\sigma} a^2 - \frac{64}{5} \frac{G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{c^5 (1 - e^2)^{7/2}} a^{-3} \quad (3.8)$$

Il primo membro del termine di destra spiega l'effetto dell'*hardening* a tre corpi sul semiasse maggiore in cui si ha un andamento di proporzionalità $\frac{da}{dt} \propto a^2$ (che deriva dalla sezione d'urto σ_{coll}), indicando che per binarie più larghe, l'*hardening* è più efficace.

Il secondo membro del termine di destra è l'approssimazione al primo ordine del calcolo di Peters [25] ed è legato alla perdita di energia dovuta all'emissione di onde gravitazionali. La proporzionalità $\frac{da}{dt} \propto a^{-3}$ indica che l'emissione di

onde gravitazionali diventa efficiente solo quando i due BH sono molto vicini tra loro.

Generalmente tutte le binarie di BH evolvono secondo i seguenti passaggi:

- una prima fase in cui l'*hardening* dovuto agli incontri a tre corpi domina l'evoluzione della binaria;
- una seconda fase in cui il semiasse maggiore si stabilizza perché gli incontri a tre corpi diventano meno efficienti sulla riduzione del semiasse a , tuttavia la binaria è ancora troppo larga perché l'emissione di onde gravitazionali diventi efficiente;
- l'ultima fase in cui il semiasse maggiore diminuisce perché la binaria entra nel regime di emissione di onde gravitazionali.

3.3 Espulsioni dinamiche

In un ammasso globulare costituito da N stelle, se tutte le stelle con massa superiore a $25 M_{\odot}$ dessero origine a BH e se rappresentassero lo 0.05% dell'intera popolazione (IMF suggerita da Scalo, 1968), si formerebbero $\sim 5 \cdot 10^{-4} N$ buchi neri con massa iniziale $m_{BH} \sim 6-18 M_{\odot}$. Questo significa che entro il raggio a metà massa tipico di un ammasso globulare, ci sarebbero 500 buchi neri [21].

Tuttavia, tali oggetti potranno essere espulsi dall'ammasso secondo almeno tre diversi processi:

- espulsioni dinamiche;
- *kick* natale subito durante la fase di Supernova (SN) [14] [9];
- *kick* dovuto all'emissione di onde gravitazionali [19] [6] [10].

Il *kick* dovuto all'emissione di onde gravitazionali si verifica quando una binaria di BH coalesce acquisendo una velocità di rinculo molto elevata, fino a

migliaia di km s^{-1} e di solito dell'ordine di centinaia di km s^{-1} .

Si ritiene che una quantità inferiore al 10% dei buchi neri venga espulsa a causa del *kick* natale, mentre i BH rimanenti che si trovano in binarie *hard* continuano a stringersi in seguito alle interazioni a tre corpi. Come descritto nel precedente paragrafo, durante gli incontri, una parte dell'energia interna E_{int} della binaria viene ceduta, sotto forma di energia cinetica, alle stelle di campo e al centro di massa della binaria. Di conseguenza la binaria assume una velocità di rinculo dell'ordine di pochi km s^{-1} , ma può arrivare anche a diverse centinaia di km s^{-1} .

Quando la binaria è sufficientemente legata, essa tende a coalescere per emissione di onde gravitazionali, su un tempo scala pari al tempo di merger (espressione 3.7). Imponendo che quest'ultimo sia inferiore al tempo di Hubble, si ottiene il valore del semiasse maggiore per cui la binaria coalesce entro il tempo di Hubble (t_H):

$$a_{gw t_H} = \left(\frac{256 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 (1 - e^2)^{7/2}} t_H \right)^{1/4} \quad (3.9)$$

Sostituendo l'espressione nella formula dell'energia di legame E_b , si trova il valore minimo di E_b per cui la binaria può coalescere [24]:

$$E_{bin,gw} = \frac{G m_1 m_2}{2} \left(\frac{256 G^3 m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{5 c^5 (1 - e^2)^{7/2}} t_H \right)^{-1/4} \quad (3.10)$$

L'energia cinetica minima $K_{cin,escape}$ che il centro di massa della binaria deve acquistare per essere espulsa dal *core* dell'ammasso è pari a:

$$K_{cin,escape} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 \quad (3.11)$$

Poiché la velocità di fuga, v_f , da un ammasso globulare è $\sim 30 \text{ km s}^{-1}$ e la velocità di fuga da un giovane ammasso o da un ammasso aperto è ancora più bassa, sia la binaria che l'oggetto *incoming* possono essere espulsi dall'ammasso stellare originario. Se ciò accade, essi diventano oggetti dell'alone ove la densità di stelle è molto più bassa, per cui la probabilità che si verifichino

degli *scattering* diminuisce, riducendo la possibilità di coalescere.

Una frazione dell'energia interna della binaria viene ceduta in parte al centro di massa e in parte all'oggetto *incoming*, quindi dalla conservazione dell'energia segue:

$$\Delta E_{bin} = \frac{1}{2} m_* v_{r,*}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{r,bin}^2 \quad (3.12)$$

in cui m_* è la massa della stella (o del BH) di campo e $v_{r,*}$ e $v_{r,bin}$ sono le velocità di rinculo acquisite rispettivamente dalla stella di campo e dalla binaria.

Dalla conservazione della quantità di moto si ottiene:

$$m_* v_{r,*} + (m_1 + m_2) v_{r,bin} = 0 \quad (3.13)$$

Ricordiamo la relazione

$$\langle \Delta E \rangle = \xi \frac{m_*}{m_1 + m_2} E_{bin} \quad (3.14)$$

Sostituendola nell'espressione di $K_{cin,escape}$ insieme alle relazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto, si ottiene l'espressione dell'energia di legame minima affinché il *kick* eietti la binaria dal *core*:

$$E_{bin,ej} = \frac{1}{2\xi} (m_1 + m_2 + m_*) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_*} \right)^2 v_f^2 \quad (3.15)$$

Se $E_{bin,ej} > E_{bin,gw}$ la binaria può coalescere prima di essere eiettata dal *core*, mentre se, viceversa, $E_{bin,ej} < E_{bin,gw}$ la binaria sarà espulsa prima di poter coalescere.

Capitolo 4

Simulazioni e analisi dei dati

In questo Capitolo presento la mia analisi originale di un set di simulazioni numeriche a N-corpi di 200 ammassi stellari giovani in cui le binarie di buchi neri si formano dinamicamente [36].

In particolare l'analisi si concentra sulla frazione di BH singoli e di binarie di BH che ricevono un *kick* dinamico e che vengono espulsi dall'ammasso stellare nel corso della propria evoluzione.

4.1 Elaborazione dei dati

Nell'analisi sono state considerate 200 simulazioni a N-corpi di ammassi stellari giovani. Esse sono state eseguite da una versione aggiornata del software STARLAB [27] che tiene conto di:

- formule analitiche per l'evoluzione stellare in funzione della massa e della metallicità stellare [15];
- dipendenza dei venti stellari dalla metallicità per stelle di sequenza principale [32] e stelle evolute [31];
- possibilità che si formino BH massicci per collasso diretto [20].

Ogni ammasso stellare è costituito inizialmente da 5500 stelle di cui 1000 si trovano in sistemi binari, dunque abbiamo inizialmente un numero di binarie pari a 500.

Essi seguono un profilo di King con potenziale adimensionale centrale $W_0=5$. Inoltre gli ammassi hanno una metallicità iniziale $Z=0.01 Z_\odot$ e sono caratterizzati da una densità centrale $\rho_C \sim 2 \cdot 10^3 M_\odot pc^{-3}$ e da una massa totale pari a $M_{TOT} \sim 3 \cdot 4 \cdot 10^3 M_\odot$. La funzione di massa iniziale (IMF, *Initial Mass function*) scelta è quella di Kroupa estesa tra 0.1 e 150 M_\odot [36].

I risultati delle simulazioni sono stati analizzati attraverso tre programmi Python: `continue_loop.py` e `find_escapecm_loop.py` già esistenti [Mapelli 2017, comunicazione privata] e `MM_dist_loop.py` da me creato per l'analisi. Il primo script seleziona solo i dati delle simulazioni relativi a un tempo trascorso di 10^8 anni in quanto esso è un tempo al quale l'ammasso potrebbe realisticamente dissolversi.

Il secondo script estrae per ciascuna tipologia di oggetto i valori di massa, componenti della posizione e della velocità e distingue tra corpi singoli e sistemi binari.

Lo script `MM_dist_loop.py` (riportato in Appendice) considera quindi solo i dati inerenti a BH singoli ed in binaria e calcola le distanze dei loro centri di massa dal centro di densità del proprio ammasso. Il BH o il sistema binario è considerato espulso dall'ammasso in seguito ad un *kick* dinamico quando la sua distanza dal centro di densità del *cluster* diviene >10 pc.

Lo script stampa quindi il numero totale di buchi neri che vengono espulsi e ne calcola la frazione che rappresentano rispetto al totale distinguendo tra buchi neri singoli e in binaria.

Infine vengono confrontati i grafici delle distribuzioni di massa dei buchi neri espulsi separatamente per i buchi neri singoli o binari (Figure 4.1).

4.2 Risultati

Dalle simulazioni si ottiene che il numero totale di BH espulsi e trattenuti è pari rispettivamente a $N_{BH,out}=820$ e $N_{BH,in}=764$. Quindi la percentuale di buchi neri espulsi rispetto al totale è circa del 52%.

Per quanto riguarda i buchi neri in binaria si ottiene $N_{BHB,out}=96$ per le binarie espulse e $N_{BHB,in}=105$ per quelle trattenute. Pertanto la percentuale di binarie espulse rispetto al numero totale di binarie è pari al 48%.

Questi dati sono riportati in Tabella 4.1 insieme ai valori di massa media, mediana e deviazione standard per i buchi neri espulsi e trattenuti, singoli ed in binaria.

Gli elevati valori degli scarti quadratici medi sono dovuti alla piccola quantità di buchi neri che hanno massa molto grande, in particolare molto più grande della media.

	espulsi	$\langle m_{in} \rangle (M_{\odot})$	$\langle m_{out} \rangle (M_{\odot})$	$m_{mediana,in} (M_{\odot})$	$m_{mediana,out} (M_{\odot})$
BH	52%	24.3	12.5	9.2	6.8
BHB	48%	13.5	16.4	9.8	13.2

	$dev.st_{in} (M_{\odot})$	$dev.st_{out} (M_{\odot})$
BH	32.1	16.9
BHB	14.3	12.5

Tabella 4.1: Tabella riassuntiva dei risultati dell'analisi delle simulazioni. I pedici *in* e *out* si riferiscono rispettivamente agli oggetti trattenuti ed espulsi.

Nelle Figure 4.1 vengono mostrati i plot delle distribuzioni di massa dei buchi neri singoli ed in binaria separatamente. In particolare confronto per entrambi i casi le distribuzioni di massa relative ai buchi neri espulsi con quelle del rispettivo totale.

Dai risultati ottenuti attraverso questo studio iniziale si può notare in primo

luogo che entro un tempo di 10^8 anni, sia per i BH singoli che per i binari, una frazione pari circa alla metà del numero di oggetti viene espulsa dagli ammassi. Inoltre, in entrambi i casi, non sono solo gli oggetti più leggeri ad essere espulsi.

Infine le distribuzioni di massa si presentano alquanto asimmetriche e questo è confermato dal fatto che i valori di massa media e mediana si discostano molto fra loro.

Al fine di ottenere una statistica migliore sarà certamente necessario estendere il set di simulazioni ad un numero maggiore e quindi poter fare previsioni sulle caratteristiche delle popolazioni di buchi neri che si possono trovare negli ammassi e nel campo.

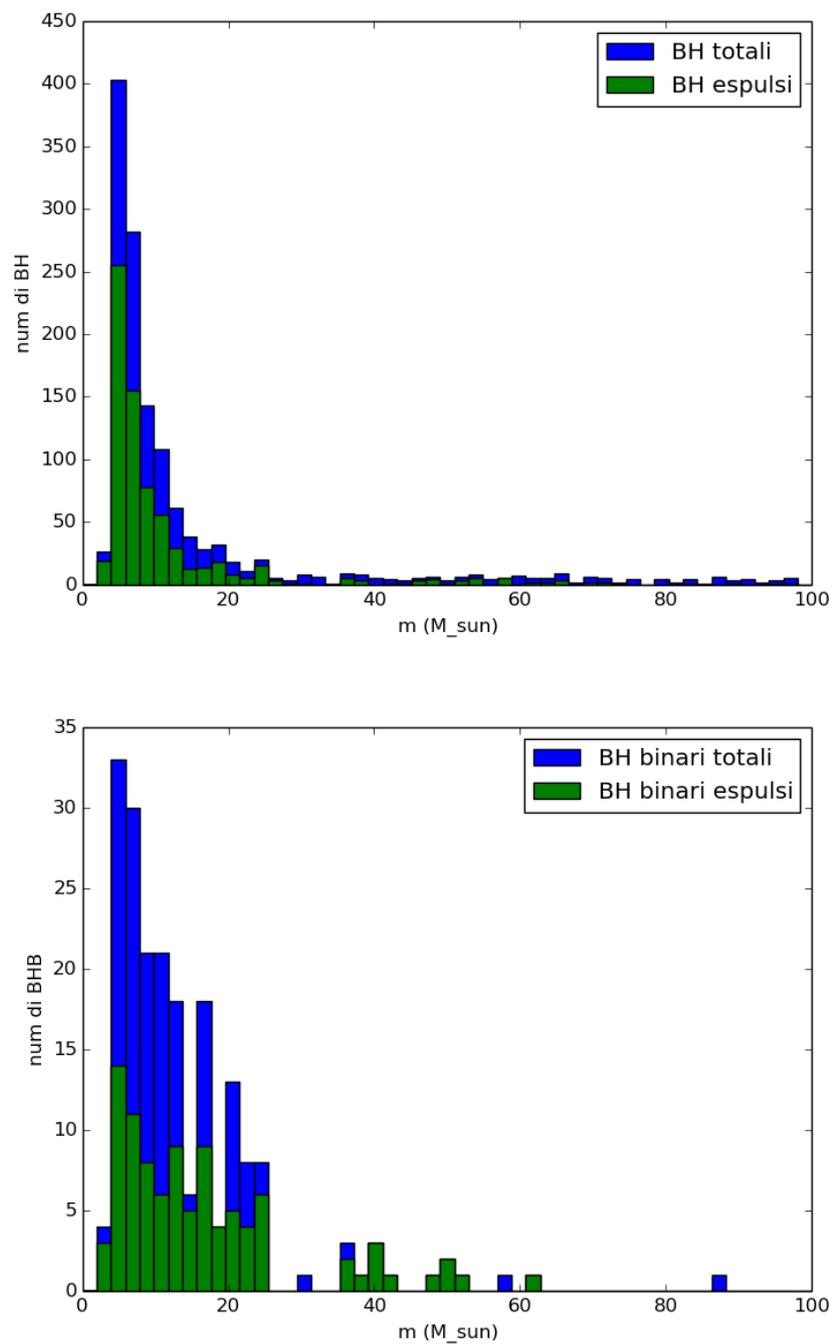


Figura 4.1: Grafici delle distribuzioni di massa dei buchi neri singoli (*in alto*) e di quelli in binaria (*in basso*). In entrambi i casi sono messe a confronto le distribuzioni di massa dei buchi neri espulsi (*verde*) con quelle del totale (*blu*).

Conclusioni

Le osservazioni delle onde gravitazionali da parte degli interferometri LIGO/Virgo tra il 2015 e il 2017 hanno confermato l'esistenza delle binarie di buchi neri.

Nella mia tesi ho discusso lo scenario di formazione dinamica delle binarie di buchi neri in ambienti dinamicamente densi, gli ammassi stellari.

A partire dalla descrizione degli incontri a tre corpi ho esaminato in particolare gli scambi dinamici che sono i meccanismi in cui sono principalmente coinvolte le binarie di buchi neri. Durante questo tipo di interazione uno dei membri della binaria viene sostituito da un oggetto di campo più massiccio.

Se una binaria di BH subisce un certo numero di incontri a tre corpi durante la sua vita, ci aspettiamo, inoltre, che il suo semiasse maggiore si ridurrà come effetto degli incontri. Questo processo è chiamato *hardening* dinamico.

Durante gli incontri a tre corpi una frazione dell'energia interna di una binaria stretta può essere trasformata in energia cinetica dell'oggetto di campo e del centro di massa della binaria. Di conseguenza l'oggetto di campo e la binaria acquisiscono una velocità di rinculo e quindi un *kick* dinamico che può causare l'espulsione di tali oggetti dall'ammasso.

Infine, ho presentato la mia analisi originale di 200 simulazioni numeriche a N-corpi in cui le binarie di buchi neri si formano dinamicamente. Essa si è concentrata sulla frazione di binarie che hanno ricevuto un *kick* dinamico e che sono state espulse dall'ammasso stellare entro un tempo di 10^8 anni.

Dai risultati ottenuti si conclude in primo luogo che, entro il tempo conside-

rato, sono state espulse dall'ammasso circa la metà delle binarie di buchi neri e quindi che siamo ancora in grado di osservare negli ammassi onde gravitazionali emesse per coalescenza.

In secondo luogo, dai grafici delle distribuzioni di massa (Figure 4.1), si osserva che ad essere espulsi dall'ammasso non sono solo gli oggetti più leggeri.

Per quanto riguarda gli sviluppi futuri del lavoro sarà sicuramente necessario ampliare il campione di simulazioni, in parte già esistenti, per ottenere una statistica più solida. Questo ci permetterà di fare previsioni sulle caratteristiche delle popolazioni di buchi neri e buchi neri in binaria in termini di massa e frazione di binarie espulse.

Appendice

Riporto il codice `MM_dist_loop.py` utilizzato per il calcolo della frazione di buchi neri singoli ed in binaria espulsi entro un tempo di 10^8 anni. Lo script è stato scritto in Python 2.7.6 utilizzando i moduli `numpy` (<http://www.numpy.org>) e `matplotlib` (<https://matplotlib.org>).

```
import re                #importing modules
import numpy as np
import math
import matplotlib.pyplot as plt
import os
out_lista=[]            #initialising empty lists #BH expelled
in_lista=[]             #BH not expelled
m_out_lista=[]         #masses of expelled BHs
m_in_lista=[]          #masses of not expelled BHs
mbin_out_lista=[]     #masses of expelled BHBs (added by MM)
mbin_in_lista=[]      #masses of not expelled BHBs (added by MM)
b_out_lista=[]        #BHB expelled
b_in_lista=[]         #BHB not expelled
out_tot=0.0
in_tot=0.0
b_out_tot=0.0
```

```
b_in_tot=0.0
for j in range(1,201):      #iterating operations for all simulations
    BH1=str('BH_posvelmasstype_new_cineca'+str(j)+
            '_bin_N5000_frac01_W5_Z001.txtot_400')
    if(os.path.isfile(BH1)):
        identifier=re.compile('\,',')      #identificating BHBs
        f1=BH1
        f = open(f1)
        conta=0.0
        b_lista=[]          #initialising empty lists of all BHs and BHBs
        for s in f:
            binaria=identifier.search(s)   #counting BHBs
            if(binaria!=None):
                conta=conta+1
                b_lista.append(1)          #BHB=1
            else:
                b_lista.append(0)         #BH=0
        print 'Num di binarie='+str(conta)
        BH=np.genfromtxt('BH_posvelmasstype_new_cineca'+str(j)+
            '_bin_N5000_frac01_W5_Z001.txtot_400', skip_header=1,
            usecols=(1,2,3,4))
        x=BH[:,1]
        y=BH[:,2]
        z=BH[:,3]
        m=BH[:,0]
        dmax=10.0
        out_=0.0
        in_=0.0
        bin_out=0.0
        bin_in=0.0
```

```
for i in range(len(x)):      #calculating distances
    d=math.sqrt(x[i]**2+y[i]**2+z[i]**2)
    massa=m[i]
    print'dist='+str(d)
    if d>dmax:
        out_=out_+1
        out_lista.append(1.0)
        if b_lista[i] == 0:
            m_out=massa
            m_out_lista.append(m_out)
            print 'm BH esp='+str(m_out)
        if b_lista[i] == 1:
            bin_out=bin_out+1
            b_out_lista.append(1)
            mbin_out_lista.append(massa)
            print 'bin_out='+str(bin_out)
    else:
        in_=in_+1
        in_lista.append(1)
        if b_lista[i] == 0:
            m_in=massa
            m_in_lista.append(m_in)
            print 'm BH non esp='+str(m_in)
        if b_lista[i]== 1:
            bin_in=bin_in+1
            b_in_lista.append(1)
            mbin_in_lista.append(massa)
            print 'bin_in='+str(bin_in)
#end for
out_tot=out_tot+out_
```

```

        in_tot=in_tot+in_
        b_out_tot=b_out_tot+bin_out
        b_in_tot=b_in_tot+bin_in
        print 'BH_out='+str(out_)
        print 'BH_in='+str(in_)
    #end if
#end for j in range(1,201):
print 'num tot BH espulsi='+str(out_tot)

print 'num tot BH non espulsi='+str(in_tot)
print 'num tot binarie espulse='+str(b_out_tot)
print 'num tot binarie non espulse='+str(b_in_tot)
print 'frazione di BH espulsi wrt totali='+
str(float(out_tot)/float(out_tot+in_tot))           #MM added this print
print 'frazione di binarie espulse wrt totali='+
str(float(b_out_tot)/float(b_out_tot+b_in_tot))     #MM added this print

bin_size=2.0
min=0.0
max=100.0
N = (max-min)/bin_size+1

x1=np.array((m_in_lista))           #masses of BHs not expelled array
x2=np.array((m_out_lista))         #masses of BHs expelled array
media_in=np.mean(x1)
media_out=np.mean(x2)
dev_st_in=np.std(x1)
dev_st_out=np.std(x2)
print '<m>_in='+str(media_in)
print '<m>_out='+str(media_out)

```

```
print 'dev_st_in='+str(dev_st_in)
print 'dev_st_out='+str(dev_st_out)
mediana_in=np.median(x1)
mediana_out=np.median(x2)
print 'mediana_in='+str(mediana_in)
print 'mediana_out='+str(mediana_out)
min_in=np.min(x1)
max_in=np.max(x1)
print 'min_in='+str(min_in)
print 'max_in='+str(max_in)
min_out=np.min(x2)
max_out=np.max(x2)
print 'min_out='+str(min_out)
print 'max_out='+str(max_out)
x1=np.append(x1,x2)                                     #masses of all BHs array (added by MP)

h2=plt.hist(x2, bins=N,range=(min,max), label='BH espulsi', color='g')
h1=plt.hist(x1, bins=N,range=(min,max), label='BH non espulsi', color='b')
plt.xlabel('m (M_sun)')
plt.ylabel('num di BH')
plt.legend()
plt.show()

x1=np.array((mbin_in_lista))                           #masses of BHBs not expelled array
x2=np.array((mbin_out_lista))                          #masses of BHBs expelled array
dev_st_bin_in=np.std(x1)
dev_st_bin_out=np.std(x2)
print '<m>_binin='+str(mediabin_in)
print '<m>_binout='+str(mediabin_out)
```

```
print 'dev_st_bin_in='+str(dev_st_bin_in)
print 'dev_st_bin_out='+str(dev_st_bin_out)
medianabin_in=np.median(x1)
medianabin_out=np.median(x2)
print 'medianabin_in='+str(medianabin_in)
print 'medianabin_out='+str(medianabin_out)
minbin_in=np.min(x1)
maxbin_in=np.max(x1)
print 'minbin_in='+str(minbin_in)
print 'maxbin_in='+str(maxbin_in)
minbin_out=np.min(x2)
maxbin_out=np.max(x2)
print 'minbin_out='+str(minbin_out)
print 'maxbin_out='+str(maxbin_out)
x1=np.append(x1,x2)                                     #masses of all BHBs array

h1=plt.hist(x1, bins=N, range=(min,max), label='BH binari non espulsi',
color='b')
h2=plt.hist(x2, bins=N, range=(min,max), label='BH binari espulsi',
color='g')
plt.xlabel('m (M_sun)')
plt.ylabel('num di BH')
plt.legend()
plt.show()
```

Bibliografia

- [1] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Physical Review Letters, 116, 061102.
- [2] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Physical Review Letters, 116, 241103.
- [3] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2016, Physical Review X, 6, 041015.
- [4] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2017, Physical Review Letters, 118, 221101.
- [5] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., et al. 2017, Physical Review Letters.
- [6] Campanelli, M., Lousto, C., Zlochower, Y., & Merritt, D. 2007, Astrophysical JournalLetter, 659, L5.
- [7] Colpi, M., Mapelli, M., & Possenti, A. 2003, Astrophysical Journal, 599,1260.
- [8] Davies, Melvyn, B., 2002, ASP: Stellar Exotica Prodiced from Stellar Encounters, 265.
- [9] Fryer, C. L., Belczynski, K., Wiktorowicz, G., et al. 2012, Astrophysical Journal, 749, 91.

-
- [10] Gonzalez, J. A., Sperhake, U., Bruggmann, B., Hannam, M., & Husa, S., 2007, *Physical Review Letters*, 98, 091101.
- [11] Hayfield et al., 2011, *MNRAS*, 2011, 417, 1839.
- [12] Heggie, D.C. 1975, *MNRAS*, 173, 729.
- [13] Hills, J.G., 1983, *AJ*, 88, 1269.
- [14] Hobbs, G., Lorimer, D. R., Lyne, A. G., & Kramer, M. 2005, *MNRAS*, 360, 974.
- [15] Hurley J. R., Pols O. R., Tout C. A., 2000, *MNRAS*, 315, 543.
- [16] Kulkarni, S.R., Hut, P., & McMillan, S., 1993, *Natur*, 364, 421.
- [17] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, *Astrophysical implication of the binary black-hole merger GW150914*, 2015.
- [18] Lada, C. J., & Lada, E. A. 2003, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41, 57.
- [19] Lousto, C.O., & Zlochower, Y., 2009, *Physical Review Documents*, 79, 064018.
- [20] Mapelli M., Colpi M., Zampieri L., 2009, *MNRAS*, 395L, 71.
- [21] Mapelli, M., *Four-body interactions in globular clusters: the case of the millisecond pulsar PSR J1911-5958A*, cap.2-3, 2003.
- [22] Mapelli, M., *Astrophysics of stellar black holes*, 2017.
- [23] Mapelli, M., *Lecture V*, URL: <http://web.pd.astro.it/mapelli/2017dynamics5.pdf>.
- [24] Miller, M.C., & Hamilton, D.P., 2002, *ApJ*, 576, 894.
- [25] Peters, P. C. 1964, *Physical Review*, 136, 1224.

-
- [26] Planck Collaboration, Ade, P.A.R, Aghanim, N., et al. 2015, ArXiv e-prints, arXiv: 1502.01589.
- [27] Portegies Zwart S. F., McMillan S. L. W., Hut P., Makino J., 2001, MNRAS, 321, 199.
- [28] Portegies Zwart, S. F., McMillan, S. L. W., & Gieles, M. 2010, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 48, 431.
- [29] Spritzer, Lyman, Jr., 1969, ApJ, 158,139.
- [30] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, Abbott, B. P., et al. 2017, arXiv:1709.09660.
- [31] Vink J. S., de Koter A., 2005, A&A, 442, 587.
- [32] Vink J. S., de Koter A., Lamers H. J. G. L. M. , 2001, A&A, 369, 574.
- [33] Weidner, C., & Kroupa, P. 2006, MNRAS, 365, 1333.
- [34] Weidner, C., Kroupa, P., & Bonnell, I. A. D. 2010, MNRAS, 401, 275.
- [35] Ziosi, B. M., Mapelli, M., Branchesi, M., & Tormen, G., 2014, MNRAS, 441, 3703.
- [36] B. M., Ziosi, M., Mapelli, M., Branchesi, G., Tormen, 2014, MNRAS 441, 3703–3717.

