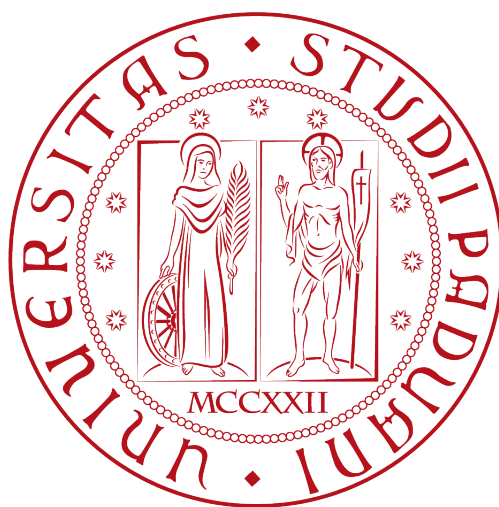


Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di laurea in Fisica

Fusione nucleare del sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ ad energie inferiori alla barriera Coulombiana



Relatore: Prof.ssa Giovanna Montagnoli

Correlatore: Prof. Alberto Stefanini

Laureanda: Monica Pagliaroli

Anno Accademico 2014/2015

Indice

1	Introduzione	3
2	Modello unidimensionale per le reazioni di fusione	5
2.1	Il potenziale di interazione	5
2.1.1	Il potenziale Coulombiano	5
2.1.2	Il potenziale nucleare	6
2.1.3	La barriera Coulombiana	7
2.2	La sezione d'urto di fusione	7
2.2.1	Deduzione teorica generale	8
2.2.2	Formula di Wong	8
3	Funzione di eccitazione sperimentale e stima di Wong a confronto	10
4	Effetto della struttura nucleare	12
4.1	La struttura nel caso $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$	14
5	Il modello a canali accoppiati	15
5.1	Idea di base	15
5.2	Il CCFULL	17
6	Confronto tra le sezioni d'urto sperimentali e le previsioni teoriche.	18
6.1	Canali di accoppiamento	18
6.2	Potenziale nucleare e barriera coulombiana	19
6.3	Analisi dei dati	20
6.4	Valutazione del risultato finale	23
7	Confronto tra $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ e $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$	25
7.1	Le funzioni di eccitazione sperimentali	26
7.2	La derivata logaritmica e il fattore S	26
7.3	Conclusioni	28

A	Le equazioni a canali accoppiati	29
A.1	L'approssimazione isocentrifuga	30
A.2	Accoppiamento vibrazionale	30
A.3	Accoppiamento rotazionale	31
A.4	Accoppiamento di ordine qualsiasi	32

Capitolo 1

Introduzione

L'argomento centrale di questa tesi è lo studio delle reazioni nucleari di fusione tra ioni pesanti ad energie attorno alla barriera Coulombiana.

La fusione è il processo attraverso il quale due nuclei separati si combinano per formare un nucleo composto. Tale reazione può avvenire classicamente solo se la loro energia cinetica nel riferimento del centro di massa supera la cosiddetta barriera Coulombiana, risultato della sovrapposizione tra il potenziale Coulombiano repulsivo a lungo raggio e quello nucleare attrattivo a corto raggio. Tuttavia quantisticamente esiste una probabilità non nulla che tale barriera possa essere attraversata anche quando essa è più alta dell'energia a disposizione del sistema. Ciò è dovuto all'effetto tunnel, che permette la penetrazione in una regione classicamente proibita e che riveste un ruolo fondamentale proprio nelle reazioni di fusione nucleare.

L'approccio tradizionale consiste nel considerare la penetrazione di una barriera di potenziale unidimensionale, con un singolo canale di reazione entrante costituito dal moto relativo dei nuclei collidenti. Approssimando la barriera di potenziale con una parabola si può ottenere in approssimazione semiclassica (sostituendo una somma sui diversi momenti angolari con un integrale) la sezione d'urto di fusione prevista per la penetrazione quantistica di una barriera di potenziale unidimensionale. Tuttavia si verifica che per reazioni tra nuclei pesanti vi è una significativa discrepanza tra le previsioni teoriche e le sezioni d'urto misurate sperimentalmente: si osserva che queste ultime possono essere superiori alle prime di circa 3 ordini di grandezza per energie attorno e inferiori all'altezza della barriera, per cui in realtà la probabilità di penetrazione è di gran lunga superiore rispetto a quello che ci si aspetta dall'effetto tunnel standard unidimensionale (fenomeno cosiddetto dell'*enhancement*), in definitiva inadatto a descrivere tali sistemi.

In effetti i due nuclei interagenti hanno una loro struttura interna e in fase di avvicinamento vi è una probabilità non nulla che possano essere popolati stati di tipo vibrazionale o rotazionale, o che addirittura avvenga uno scambio di nucleoni tra essi (sempre se energeticamente possibile). Tutti questi

canali di reazione, che costituiscono gradi di libertà intrinseci del sistema, vanno ad accoppiarsi al moto relativo.

Il modello, detto a canali accoppiati, è in grado di spiegare l'*enhancement* producendo risultati teorici in accordo con i dati sperimentali per numerosi sistemi in cui sono coinvolti nuclei pesanti (si veda ad esempio il caso $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$ nella Ref. [1]). Tuttavia negli ultimi anni si è osservato che per energie molto inferiori alla barriera Coulombiana si ha un crollo delle sezioni d'urto sperimentali rispetto a quelle previste dal modello a canali accoppiati, che invece continua a dare risultati compatibili ai dati per energie maggiori. Tale fenomeno, noto come *hindrance*, è probabilmente dovuto alla conoscenza imperfetta del potenziale ione-ione all'interno della barriera, ma la sua natura deve ancora essere pienamente compresa.

In questa tesi è stato analizzato il sistema

$$^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$$

di cui si avevano a disposizione le sezioni d'urto sperimentali misurate di recente presso i Laboratori Nazionali di Legnaro [2]. Queste sono state confrontate:

- con le stime derivanti dal modello a canali accoppiati, valutate dall'apposito programma CCFULL [3] che risolve numericamente le equazioni descriventi il modello stesso (le cosiddette equazioni “a canali accoppiati”);
- con i risultati sperimentali del sistema simile $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$, il quale mostra il fenomeno della *hindrance*.

Grazie a questo studio è possibile applicare ad un caso specifico il modello a canali accoppiati e riscontrarne la validità o meno, analizzando i fenomeni fisici in esame dell'*enhancement* e della *hindrance*, e permettendo di sondare la forma del potenziale nucleare a piccole distanze.

Capitolo 2

Modello unidimensionale per le reazioni di fusione

2.1 Il potenziale di interazione

Nel momento in cui due nuclei interagiscono sono soggetti ad un potenziale complessivo risultato di diversi contributi. Nelle reazioni di fusione tra ioni pesanti si utilizza in genere un modello unidimensionale in cui il potenziale tra proiettile e bersaglio è funzione della sola distanza relativa r tra essi. In questo modo il potenziale di interazione ione-ione si esprime come

$$V(r) = V_N(r) + V_C(r)$$

dove $V_N(r)$ è il potenziale dovuto alle forze di interazione nucleare a corto raggio, e $V_C(r)$ è il potenziale Coulombiano dovuto alla carica dei due nuclei interagenti.

2.1.1 Il potenziale Coulombiano

Il potenziale dovuto alla repulsione Coulombiana tra le distribuzioni di carica dei rispettivi nuclei è dato dall'espressione:

$$V_C(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{8\pi\epsilon_0 R_0^3} (3R_0^2 - r^2) \quad \text{se } r < R_0$$

$$V_C(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{se } r \geq R_0$$

dove:

- Z_P e Z_T sono i numeri atomici rispettivamente dei nuclei proiettile e bersaglio;
- e è la carica elementare;
- r è la distanza relativa tra i nuclei;

- R_0 è la distanza alla quale i due nuclei iniziano a “sovrapporsi”, sostanzialmente la somma dei due raggi nucleari parametrizzata come $R_0 = r_0(A_P^{1/3} + A_T^{1/3})$, con $r_0 \simeq 1.2 fm$ e $A_{P,T}$ numeri di massa dei nuclei proiettile e bersaglio.

Si noti che per $r < R_0$ si ha il potenziale di una sfera uniformemente carica di raggio R_0 , mentre per $r \geq R_0$ si ha il potenziale repulsivo con andamento $\propto 1/r$.

2.1.2 Il potenziale nucleare

Tale potenziale è quello dovuto alle forze di interazione a corto raggio tra i nucleoni dei due nuclei interagenti. In prima approssimazione lo si può immaginare come una buca di potenziale, ma una formulazione più corretta è fornita dalla parametrizzazione di Woods-Saxon

$$V_N = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0}{a}}}$$

dove:

- V_0 è il valore del minimo del potenziale e dà una stima della “profondità” della buca;
- R_0 è un parametro radiale analogo a quello del paragrafo precedente a meno di piccole correzioni, che indica la posizione del minimo;
- a è detta diffusività (*diffuseness*) e dà una stima dell’andamento del potenziale nella regione superficiale.

Tali parametri vengono ricavati sperimentalmente dallo studio di reazioni di scattering elastico tra ioni pesanti, effettuando il fit con i dati sperimentali attraverso il metodo dei minimi quadrati. Nel caso $^{48}Ti + ^{58}Fe$ in esame si sono utilizzate le stime ricavate dalla parametrizzazione di Akyüz-Winter [4], che sfruttando un procedimento analogo fornisce le seguenti formule empiriche:

$$R_{1,2} = (1.20A_{1,2}^{1/3} - 0.09) fm^{-1}; \quad R_0 = R_1 + R_2$$

$$1/a = 1.17 \left(1 + 0.53 \left(A_1^{-1/3} + A_2^{-1/3} \right) \right) fm^{-1}$$

$$\gamma = 0.95 \left(1 - 1.8 \frac{N_1 - Z_1}{A_1} \frac{N_2 - Z_2}{A_2} \right)$$

$$V_0 = 16\pi\gamma a \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} MeV$$

dove i pedici 1,2 identificano i due nuclei.

2.1.3 La barriera Coulombiana

I due contributi Coulombiano e nucleare, nel momento in cui vanno a sommarsi, producono un effetto complessivo sintetizzabile in una “barriera” di potenziale, con una certa altezza V_b nota come “barriera Coulombiana”: essa deve essere superata affinché si possa penetrare nella regione attrattiva del potenziale e la reazione di fusione possa avvenire. L’effetto descritto è chiaramente visibile nella figura 2.1 [5]: R_b e V_b rappresentano posizione e altezza della barriera, mentre R_{touch} rappresenta la distanza alla quale i due nuclei cominciano a sovrapporsi significativamente. Dal potenziale nucleare ricavato con le formule di Akyüz-Winther è possibile conoscere anche i parametri relativi alla barriera coulombiana.

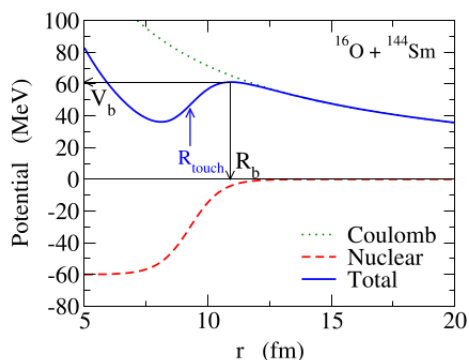


Figura 2.1: Barriera Coulombiana per $^{16}\text{O} + ^{144}\text{Sm}$.

2.2 La sezione d’urto di fusione

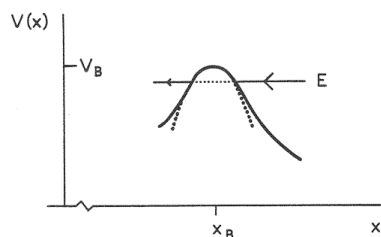


Figura 2.2: Effetto tunnel: un pacchetto d’onda incidente con energia $E_{CM} < V_b$ attraversa la barriera Coulombiana

La sezione d’urto rappresenta una stima della probabilità che la reazione di fusione avvenga. Essa è strettamente collegata al coefficiente di trasmissione della funzione d’onda incidente sulla barriera di potenziale, a sua volta funzione dell’energia: se infatti l’energia E_{CM} (nel riferimento del centro di massa) del sistema è maggiore dell’altezza della barriera V_b , la fusione è possibile anche classicamente; se invece $E_{CM} < V_b$ la fusione può avvenire solo grazie all’effetto tunnel quantistico, e con le dovute approssimazioni è possibile calcolarne le sezioni d’urto. Scopo di questa sezione è ricavarne un’espressione che permetta di costruire la cosiddetta funzione di

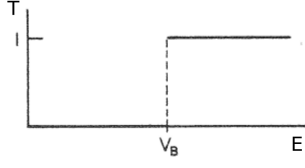


Figura 2.3: Coefficiente di trasmissione classico in funzione dell'energia: si tratta di una funzione “a gradino”.

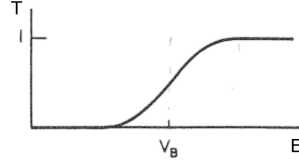


Figura 2.4: Coefficiente di trasmissione quantistico in funzione dell'energia: il “gradino” viene smussato, producendo una probabilità non nulla di penetrare la barriera per energie inferiori a V_b .

eccitazione, ovvero di mettere in relazione le sezioni d'urto con l'energia a disposizione del sistema.

2.2.1 Deduzione teorica generale

Sia il moto relativo tra i due nuclei caratterizzato dalla sovrapposizione di molte onde parziali ad ognuna delle quali è associato un valore di l , numero quantico orbitale (si trascura lo spin intrinseco). Si considera la descrizione del sistema in coordinate sferiche nel riferimento del centro di massa, attraverso l'equazione di Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - E \right] u_l(r) = 0 \quad (2.1)$$

Questa corrisponde all'equazione radiale per un sistema quantistico sottoposto a un potenziale centrale nel riferimento del centro di massa (con μ massa ridotta). Per risolvere l'equazione di Schrödinger occorrono condizioni al contorno per le funzioni d'onda dei canali entranti e uscenti. Al posto delle usuali condizioni di regolarità imposte all'origine, per le reazioni tra ioni pesanti si utilizza spesso la IWBC (Incoming Wave Boundary Condition) che corrisponde al caso di forte assorbimento nella regione interna alla barriera, e dunque di riflessione nulla del flusso entrante. Si ottiene così la seguente espressione per la sezione d'urto di fusione:

$$\sigma_{fus} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) P_l(E) \quad (2.2)$$

dove $P_l(E) = 1 - |S_l|^2 = |T_l|^2$ è la penetrabilità dell'onda l -esima, che coincide con il modulo quadro del relativo coefficiente di trasmissione T_l , e $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$ è il numero d'onda associato all'energia E .

2.2.2 Formula di Wong

L'espressione (2.2) tuttavia non è di semplice utilizzo pratico a causa della necessità di dover conoscere a priori tutti i P_l . Si deve a Wong una formula analitica della sezione d'urto [5], ricavata approssimando la forma della

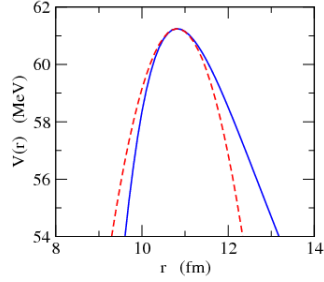


Figura 2.5: Approssimazione parabolica (in rosso) della barriera di potenziale per il sistema $^{16}\text{O} + ^{144}\text{Sm}$ [5].

barriera Coulombiana con una parabola:

$$V(r) \sim V_b - \frac{1}{2}\mu\Omega^2(r - R_b)^2 \quad (2.3)$$

In questo modo il coefficiente di trasmissione assume la seguente espressione analitica (formula di Hill-Wheeler [1]):

$$T(E) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{E - V_b}{\epsilon}}} \quad (2.4)$$

che è essenzialmente una funzione di Fermi, dove il parametro $\epsilon = \frac{\hbar}{2\pi}\Omega = \frac{\hbar}{2\pi}\sqrt{\frac{-V''(R_b)}{\mu}}$ è una misura della curvatura della parabola e quindi dello “spessore” della barriera. In generale l’espressione di P_l dipende dal momento angolare; tuttavia, assumendo che sia la curvatura $\hbar\Omega$ della barriera Coulombiana sia la sua posizione R_b siano indipendenti da l , la dipendenza dal momento angolare può essere approssimata in termini di uno shift di energia del canale in ingresso, inserito nell’espressione di P per $l = 0$ (cioè utilizzando quella per l’onda s):

$$P_l(E) = P_{l=0}\left(E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_b^2}\right) \quad (2.5)$$

In presenza di molte onde parziali la sommatoria su l nella formula generale (2.2) può essere sostituita da un integrale:

$$\sigma_{fus}(E) = \frac{\pi}{k^2} \int_0^\infty dl(2l+1)P_l(E) \quad (2.6)$$

A questo punto, sostituendo la (2.4) valutata in $E - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu R_b^2}$ nella (2.6), è possibile calcolare analiticamente l’integrale ottenendo la cosiddetta formula di Wong per la sezione d’urto di fusione:

$$\sigma_{fus}(E) = \frac{\epsilon\pi}{E} R_b^2 \ln \left[1 + e^{-\frac{V_b - E}{\epsilon}} \right] \quad (2.7)$$

Essa fornisce la relazione tra la sezione d’urto e l’energia del fascio incidente, e dunque costituisce la funzione di eccitazione cercata: permette così di calcolare le sezioni d’urto previste dall’effetto tunnel unidimensionale e di confrontarle con quelle misurate sperimentalmente.

Capitolo 3

Funzione di eccitazione sperimentale e stima di Wong a confronto

Si hanno ora a disposizione gli elementi necessari per un confronto tra il modello teorico finora costruito e i dati sperimentali riguardanti il sistema in esame: $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$. Essi sono la funzione di eccitazione prevista dalla formula di Wong e le sezioni d'urto di fusione misurate sperimentalmente presso i Laboratori Nazionali di Legnaro dell'INFN (PD). Il range di energie in cui è stato misurato il comportamento del sistema è di circa $60\text{MeV} - 85\text{MeV}$, attorno al valore della barriera Coulombiana $V_b = 73.3\text{MeV}$ ricavato a partire dai parametri di Akyüz-Winter [4], e si sono considerati i loro valori nel riferimento del centro di massa. Si riporta dunque in Fig. 3.1 il grafico delle funzioni di eccitazione teorica e sperimentale, dove le sezioni d'urto sono espresse in mb ed è stata adottata la scala logaritmica per l'asse delle ordinate (così come in tutti i grafici simili che seguono). Si osserva che il modello teorico di Wong basato sull'effetto tunnel unidimensionale sottostima fortemente le sezioni d'urto effettivamente misurate per energie inferiori e attorno alla barriera Coulombiana, mentre il comportamento appare uniformarsi ad energie superiori: si tratta del cosiddetto *enhancement* delle sezioni d'urto sperimentali rispetto alle previsioni teoriche standard per $E_{CM} < V_b$. Ad esempio per $E \simeq 70\text{MeV}$ il divario è di circa tre ordini di grandezza, dato che mette in evidenza l'inadeguatezza di tale modello per lo studio delle reazioni di fusione per simili sistemi. Si tratta infatti di reazioni di fusione tra ioni pesanti, il cui comportamento osservato nel sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ è stato riscontrato in altri sistemi simili, quali per esempio $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ [6], $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$ [1], $^{16}\text{O} + ^{154}\text{Sm}$ [5]; di quest'ultimo caso si riporta il grafico della funzione di eccitazione in Fig.3.2. Si verifica invece che per reazioni tra ioni leggeri l'effetto tunnel unidimensionale offre una descrizione in accordo con i dati sperimentali, come si osserva in Fig.3.2 per $^{14}\text{N} + ^{12}\text{C}$ [5].

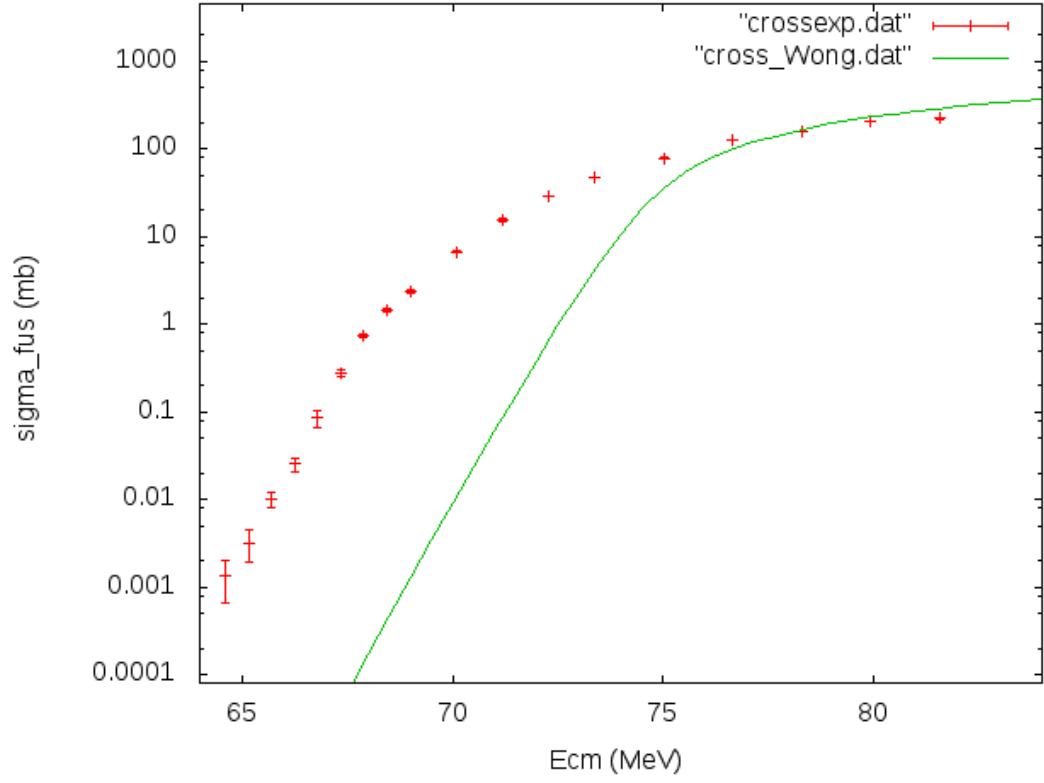


Figura 3.1: Funzione di eccitazione teorica secondo il modello di Wong a confronto con le sezioni d'urto sperimentali per il sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$.

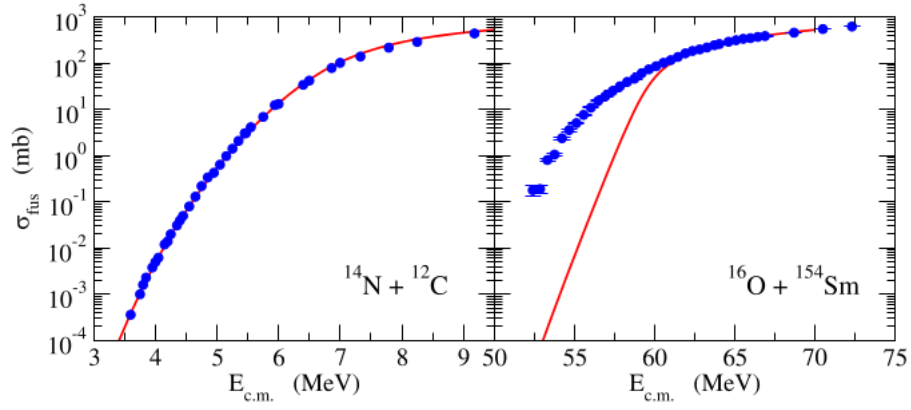


Figura 3.2: Sistemi a confronto: a sinistra il caso della fusione tra nuclei leggeri $^{14}\text{N} + ^{12}\text{C}$, per i quali il modello di Wong offre una descrizione adeguata; a destra il caso di $^{16}\text{O} + ^{154}\text{Sm}$, per il quale vi è la sottostima delle reali sezioni d'urto ad energie inferiori alla barriera.

Capitolo 4

Effetto della struttura nucleare

E' necessaria un'analisi più accurata per comprendere le reali cause del fenomeno dell'*enhancement* osservato in molti sistemi di ioni pesanti. Una delle prime evidenze sperimentali fu lo studio delle reazioni di fusione tra vari isotopi del nichel effettuato negli anni '80 [1]. Le sezioni d'urto sperimentali sono evidentemente maggiori rispetto a quelle attese dal modello unidimensionale di alcuni ordini di grandezza (Fig.4.1), ma andando a confrontare le funzioni di eccitazione dei tre sistemi presi in considerazione, tutti con isotopi dello stesso elemento ($Z = 28$), si notano delle differenze relative interessanti (Fig.4.2): mentre la pendenza delle curve sembra omogenea per i sistemi simmetrici $^{64}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ e $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$, avviene invece che la pendenza della funzione di eccitazione per il sistema $^{58}\text{Ni} + ^{64}\text{Ni}$ al di sotto della barriera Coulombiana è più piccola. Un comportamento analogo lo si può osservare nello studio delle reazioni di fusione tra ossigeno e vari isotopi del samario [5]. Come si può vedere in Fig.4.3, per rimuovere la dipendenza delle sezioni d'urto dalle diverse dimensioni dei sistemi confrontati, esse sono state normalizzate dividendole per πR_b^2 , con R_b che individua la posizione della barriera Coulombiana; sono inoltre state rappresentate in funzione dell'energia nel riferimento del centro di massa in relazione all'altezza della barriera per ciascun sistema, cioè in funzione di $E_{CM} - V_b$. Ciò che si nota è l'*enhancement* rispetto alla stima teorica di Wong, ma le pendenze delle funzioni di eccitazione sperimentali dei vari sistemi sono diverse a seconda dell'isotopo di samario utilizzato. Abbiamo quindi evidenze sperimentali che le sezioni d'urto di fusione sotto barriera sono determinate da ulteriori gradi di libertà del sistema che influenzano la dinamica della reazione. Per comprendere meglio questo fenomeno occorre analizzare in dettaglio la struttura dei sistemi in questione. Osservando in Fig.4.4 gli spettri sperimentali dei tre isotopi del samario utilizzati [5], si nota che:

- ^{144}Sm è caratterizzato dallo stato 2^+ a maggiore energia e da una forte

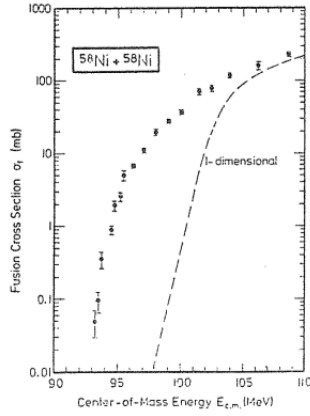


Figura 4.1: Funzione di eccitazione sperimentale e teorica prevista da Wong a confronto per $^{58}\text{Ni} + ^{58}\text{Ni}$.

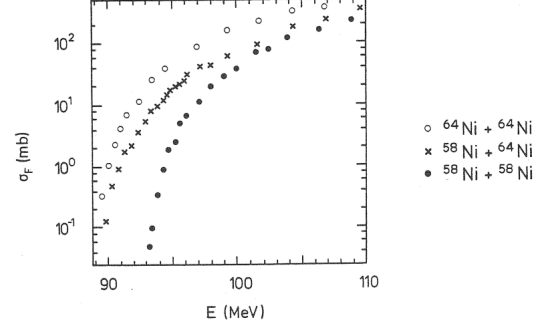


Figura 4.2: Funzioni di eccitazione sperimentali per vari isotopo del nichel.

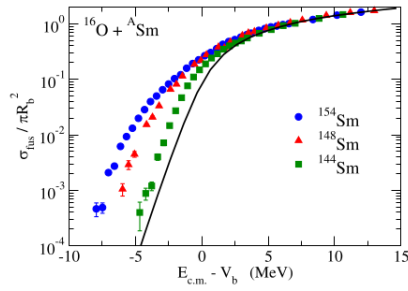


Figura 4.3: Funzioni di eccitazione sperimentali per vari isotopi del samario, assieme a quella teorica di Wong rappresentata dalla linea nera continua.

vibrazione di ottupolo, ed è un nucleo essenzialmente sferico perchè vicino alla chiusura di una sub-shell ($Z = 64$, $N = 82$);

- ^{148}Sm presenta una vibrazione di quadrupolo ed è un nucleo di transizione;
- ^{154}Sm è un nucleo deformato con la banda rotazionale sullo stato fondamentale.

I livelli eccitati appena descritti, diversi tra i vari isotopi a seconda della loro struttura nucleare, vanno ad influenzare la dinamica della fusione accoppiandosi al moto relativo e aumentando le sezioni d'urto. Sono teoricamente presenti anche stati di eccitazione non collettivi che possono influenzare la funzione di eccitazione, ma l'accoppiamento di essi allo stato fondamentale è in genere molto debole e dunque gli effetti sono trascurabili [5]. Quindi i canali di reazione che si accoppiano al principale, e dunque i gradi di libertà interni del sistema che influenzano complessivamente la reazione, sono caratteristici della struttura dei nuclei collidenti. Gli stati eccitati dipendono da isotopo ad isotopo, e variando essi cambia di conseguenza la dinamica effettiva della reazione.

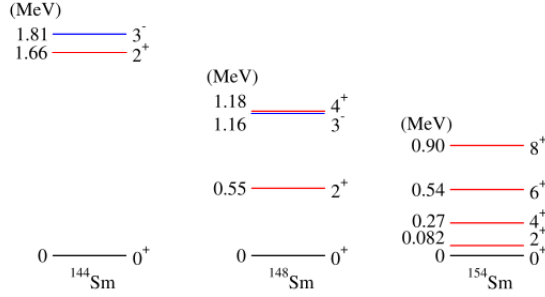


Figura 4.4: Primi stati eccitati di ^{144}Sm , ^{148}Sm , ^{154}Sm .

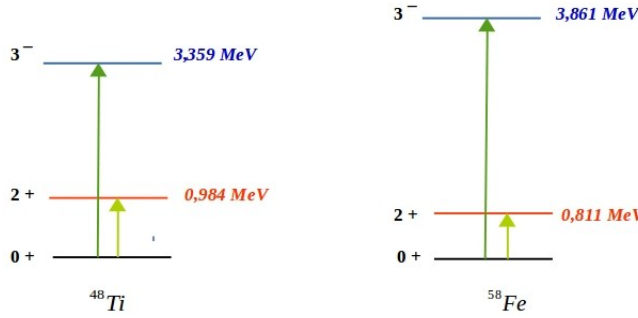


Figura 4.5: Primi stati eccitati di ^{48}Ti e ^{58}Fe .

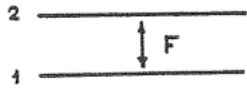
4.1 La struttura nel caso $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$

Al caso esaminato in questa tesi, costituito dal sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$, si applicano le osservazioni generali del precedente paragrafo. La funzione di eccitazione sperimentale è sottostimata dalla previsione teorica, come mostrato nel capitolo 3, poichè con il modello dell'effetto tunnel unidimensionale e con la stima di Wong non si tiene conto dei vari modi di eccitazione che possono accoppiarsi al canale di ingresso. Gli stati che potrebbero influenzare il meccanismo di formazione del nucleo composto sono indicati in Fig.4.5. Il nucleo proiettile ^{48}Ti presenta un primo livello eccitato 2^+ al quale si associa una vibrazione quadrupolare ed una transizione di tipo $E2$, e un secondo livello energetico 3^- che costituisce un modo vibrazionale di ottupolo con una probabilità di transizione $B(E3) \uparrow$. Il nucleo bersaglio ^{58}Fe presenta anch'esso due livelli eccitati con caratteristiche simili: il primo, 2^+ , a cui si associa sempre una vibrazione quadrupolare ed una transizione di tipo $E2$; il secondo, 3^- , a cui è associata invece una transizione di tipo $E3$ e quindi una vibrazione ottupolare. Non è inoltre da escludere che si possa verificare il trasferimento di una coppia di nucleoni (neutroni) durante la reazione, essendo il Q -valore di questo canale di reazione positivo. A questo punto bisogna trovare un modo efficace per tenere conto di tutti i canali di reazione che possono influenzare le sezioni d'urto di fusione. E' necessario lo sviluppo di un modello adeguato che tenga conto dei vari accoppiamenti: si tratta del modello a canali accoppiati.

Capitolo 5

Il modello a canali accoppiati

5.1 Idea di base



Per capire cosa effettivamente succeda durante la reazione nel momento in cui intervengono altri canali oltre a quello di ingresso, partiamo dal considerare il caso più semplice in cui il moto relativo tra i due nuclei interagisce con un canale rappresentato da uno stato eccitato inelastico con Q-valore $\ll E$ attraverso una forza di accoppiamento F . Le equazioni accoppiate nella loro forma più semplice sono:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \chi_1 = F(x) \chi_2 \quad , \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \chi_2 = F(x) \chi_1$$

dove $\chi_{1,2}$ sono le autofunzioni del moto relativo dei canali 1 e 2. Introducendo le nuove funzioni d'onda $\chi_+ = \chi_1 + \chi_2$ e $\chi_- = \chi_1 - \chi_2$ si ottengono le corrispondenti equazioni disaccoppiate:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + F(x) - E \right] \chi_- = 0 \quad , \quad \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - F(x) - E \right] \chi_+ = 0$$

In questo modo il coefficiente di trasmissione complessivo può essere espresso

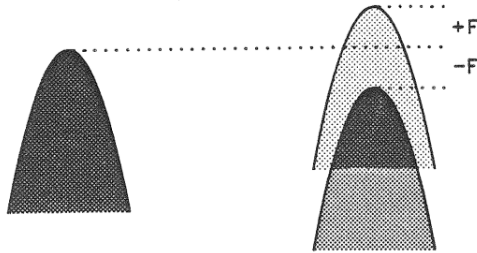


Figura 5.1: Divisione della barriera di potenziale in due (“split”) in caso di accoppiamento di due canali di reazione.

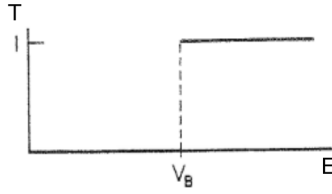


Figura 5.2: Funzione di trasmissione T classica per un singolo canale di reazione.

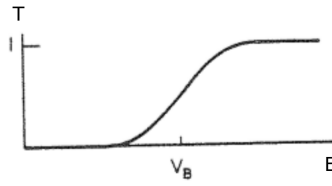


Figura 5.4: Funzione di trasmissione T quantistica per un singolo canale di reazione.

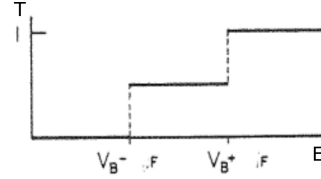


Figura 5.3: T classica per due canali accoppiati: vi sono due funzioni a gradino, che assumono il valore non nullo alle energie $V_B - F$ e $V_B + F$.

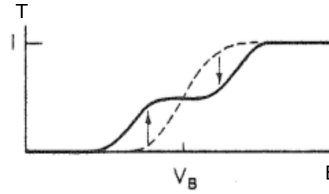


Figura 5.5: T quantistica per due canali accoppiati: split in due, e aumento per $E < V_B$.

come:

$$T(E) = T_1 + T_2 = \frac{T_+(E) + T_-(E)}{2}$$

dove $T_{+,-}$ sono i coefficienti di trasmissione relativi ai canali disaccoppiati $+$, $-$, che possono essere calcolati con la procedura standard prevista per l'effetto tunnel unidimensionale. Questo risultato ha una interpretazione semplice in termini della barriera di potenziale. Come si può vedere in Fig.5.1, mentre in assenza di accoppiamento il flusso entrante deve interagire con un'unica barriera Coulombiana, nel momento in cui interviene l'accoppiamento ad un secondo canale di reazione è come se essa si dividesse in due barriere di altezza differente, ad ognuna delle quali corrispondono i coefficienti T_+ e T_- : lo split in altezza è della quantità F , in eccesso o in difetto rispetto all'altezza originaria. Ciò si traduce in un corrispondente split della funzione di trasmissione originaria T in due: da un punto di vista puramente classico si otterrebbero due funzioni a gradino (Fig.5.3), ma con le correzioni quantistiche esse si smussano ottenendo il risultato mostrato in Fig.5.5. L'effetto dell'accoppiamento è l'aumento effettivo della penetrabilità ad energie inferiori alla barriera V_B (ed una diminuzione corrispondente per $E > V_B$ come conseguenza dello split). Questa è l'idea di base che bisogna estendere ad un numero superiore di canali di reazione che possono intervenire, nelle loro varie tipologie. Da un punto di vista formale in meccanica quantistica è possibile tenere conto dell'influenza di vari canali di reazione attraverso il cosiddetto modello "a canali accoppiati", che conduce alle relative "equazioni accoppiate" descritte in appendice.

5.2 IL CCFULL

Per risolvere le equazioni a canali accoppiati in un caso generale esiste un programma in linguaggio Fortran 77 chiamato CCFULL che permette di considerare accoppiamenti di qualsiasi ordine. Non utilizza la cosiddetta linear coupling approximation, e adotta invece l'approssimazione isocentrifuga per ridurre le dimensioni delle equazioni come si usa di solito per reazioni di fusione tra nuclei pesanti (vedi appendice).

Viene utilizzata la IWBC (Incoming Wave Boundary Condition) nella regione interna alla barriera Coulombiana, e le equazioni accoppiate vengono risolte con un particolare metodo numerico di Numerov, con gli elementi della matrice nucleare determinati tramite diagonalizzazione; infine viene calcolato un coefficiente di trasmissione (o penetrabilità) per ogni onda parziale.

Il programma CCFULL utilizza un potenziale ione-ione di tipo Woods-Saxon, e i dettagli del formalismo e degli schemi adottati per gli accoppiamenti di tipo vibrazionale e rotazionale sono riportati in appendice. Inoltre si può considerare un canale di trasferimento di coppie di nucleoni, conoscendo il Q-valore della reazione e il fattore f_t che misura la forza di accoppiamento, in modo che: $F_{trans}(r) = F_t \frac{dV_N^{(0)}}{dr}$.

Il programma è ottimizzato per sistemi in cui vi sono pochi canali di reazione che presentano un forte accoppiamento con lo stato fondamentale, e per i quali il trasferimento di nucleoni ha minore importanza rispetto ai canali anelastici. I parametri necessari per l'input vengono descritti in dettaglio per il caso specifico in esame nel capitolo successivo.

Capitolo 6

Confronto tra le sezioni d'urto sperimentali e le previsioni teoriche.

Riportiamo qui di seguito i parametri caratteristici del sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ che costituiranno l'input per il CCFULL.

Proiettile ^{48}Ti ,	A_P	48	Bersaglio ^{58}Fe :	A_T	58
	Z_P	22		Z_T	26
	r_P (fm)	1.2		r_T (fm)	1.2

dove $A_{P,T}$ indica il numero di massa, $Z_{P,T}$ il numero atomico, e $r_{P,T}$ è un parametro radiale utilizzato nell'Hamiltoniana di accoppiamento [3].

6.1 Canali di accoppiamento

Stati eccitati dei nuclei. Si considerano qui i possibili accoppiamenti a modi di eccitazione dei nuclei proiettile e bersaglio che possano significativamente influenzare le sezioni d'urto. Nelle tabelle che seguono E indica l'energia di eccitazione, β il parametro di deformazione, λ la multipolarità, e la dicitura #fononi indica il numero di fononi coinvolti. β è stato calcolato a partire dai valori sperimentali delle probabilità di transizione in unità di Weisskopf $B(E\lambda)_{W.u.}$ attraverso la relazione $\beta_\lambda = \frac{\sqrt{4\pi(2\lambda+1)B(E\lambda)_{W.u.}}}{Z(3+\lambda)}$ [7]. Per il proiettile ^{48}Ti :

- Il primo modo di eccitazione è di tipo $E2$ tra i livelli 0^+ e 2^+ . L'accoppiamento è di tipo vibrazionale con i seguenti parametri:

E (MeV)	β	λ	#fononi
0.984	0.28	2	1

- Il secondo modo di eccitazione è di tipo $E3$ tra i livelli 0^+ e 3^- . L'accoppiamento è di tipo vibrazionale con i seguenti parametri:

E (MeV)	β	λ	#fononi
3.359	0.19	3	1

Per il bersaglio ^{58}Fe :

- Il primo modo di eccitazione è di tipo $E2$ tra i livelli 0^+ e 2^+ . L'accoppiamento è di tipo vibrazionale con i seguenti parametri:

E (MeV)	β	λ	#fononi
0.811	0.26	2	1

- Il secondo modo di eccitazione è di tipo $E3$ tra i livelli 0^+ e 3^- . L'accoppiamento è di tipo vibrazionale con i seguenti parametri:

E (MeV)	β	λ	#fononi
3.861	0.19	3	1

Ci si aspetta che le vibrazioni collettive di quadrupolo a bassa energia abbiano un'influenza dominante rispetto a quelle ottupolari sia perché si trovano ad energie più basse, sia perché sono accoppiate più fortemente al canale d'ingresso. Pertanto nel seguito si è investigato in particolare l'effetto delle vibrazioni di quadrupolo.

Trasferimento di nucleoni. E' possibile che un canale di trasferimento di una coppia di neutroni dal ferro al titanio possa influenzare la dinamica: tale reazione presenta infatti un Q-valore positivo (1.4 MeV). Tuttavia in prima istanza questo canale non verrà considerato, per valutare separatamente e progressivamente gli effetti dei vari accoppiamenti. Quando verrà incluso sarà necessario conoscere, oltre che il Q-valore, anche il fattore di forma di accoppiamento F_r ("coupling form factor") legato alla forza di accoppiamento $F_{trans}(r)$ dalla relazione $F_{trans}(r) = F_r \frac{dV_N^{(0)}}{dr}$ [3][5].

6.2 Potenziale nucleare e barriera coulombiana

I parametri del potenziale nucleare calcolati con le formule empiriche di Akyüz-Winther [4] assumono i seguenti valori:

V_0 (MeV)	r_0 (fm)	a (fm)
69.045	1.176	0.666

dove r_0 è tale che $R_0 = (r_0 A_P^{1/3} - 0.09) + (r_0 A^{1/3} - 0.09)$.

Da questi è possibile conoscere anche i parametri relativi alla barriera coulombiana, la cui altezza e posizione sono:

V_b (MeV)	R_b (fm)
73.3	10.46

Per concludere, restano da specificare:

- il *range di energie* nel riferimento del centro di massa considerato nel calcolo. Si considerano qui i seguenti valori massimi e minimi dell'energia $E_{max} - E_{min}$, e DE rappresentante il passo.

E_{min} (MeV)	E_{max} (MeV)	DE (MeV)
60.0	85.0	0.5

- i *parametri spaziali*:
- | R_{max} (fm) | DR (fm) |
|----------------|-----------|
| 30.0 | 0.05 |

dove R_{max} rappresenta la distanza massima tra i due nuclei alla quale vengono risolte le equazioni accoppiate, e DR è il passo relativo.

6.3 Analisi dei dati

Per i parametri appena descritti il CCFULL fornisce la funzione di eccitazione teorica rappresentata dalla curva verde a confronto con i dati sperimentali in Fig.6.1. Si nota che essa ha un andamento che descrive in modo corretto la dinamica del sistema per energie al di sotto della barriera coulombiana, ma sovrastima le sezioni d'urto al di sopra di essa. Bisogna dunque tener conto di altri gradi di libertà per migliorare l'accordo con i dati.

Consideriamo i modi di eccitazione vibrazionali e includiamo due fononi di vibrazione nei primi modi di eccitazione di entrambi i nuclei. Mantenendo invariati i restanti parametri, si ottiene la funzione di eccitazione teorica individuata dalla curva blu in Fig.6.1. Si nota che la pendenza globale di quest'ultima è più fedele a quella dei dati sperimentali rispetto al caso precedente. Tuttavia essa appare globalmente traslata di una certa quantità ΔE sovrastimando, soprattutto nella zona attorno alla barriera, le sezioni d'urto. Ciò suggerisce la necessità di innalzare la barriera coulombiana individuata dal parametro $V_b = 73.3 \text{ MeV}$ di tale differenza ΔE , così da ottimizzare il fit.

Per determinare una stima di ΔE sono state considerate energie nel riferimento del centro di massa attorno al valore della barriera, e si sono determinate a sezioni d'urto fissate le distanze ΔE tra i dati sperimentali e la curva teorica in blu.

σ (mb)	E_{CM}^{exp} (MeV)	E_{CM}^{th} (MeV)	ΔE (MeV)
6.66	70.1	69.2	0.9
15.3	71.2	70.2	1.0
28.9	72.3	71.2	1.1

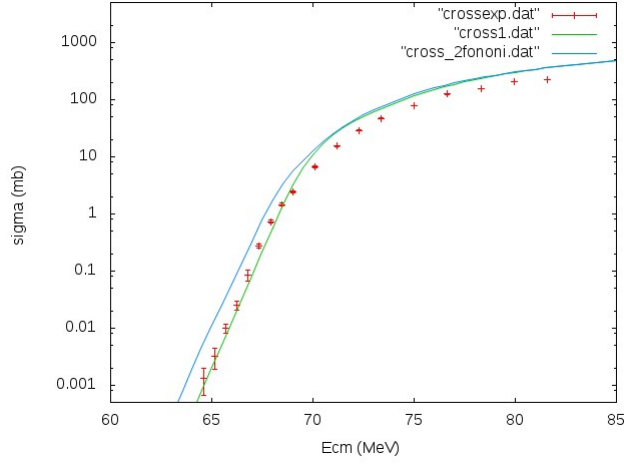


Figura 6.1: Confronto della funzione di eccitazione sperimentale con quella teorica ottenuta includendo un fonone di vibrazione (curva verde), e con quella ottenuta considerando due fononi di vibrazione (curva blu).

Ne risulta che il valore medio di tale distanza è $\Delta E = 1 \text{ MeV}$, e lo si aggiunge all'altezza della barriera coulombiana imponendo $V_b = 74.3 \text{ MeV}$. Per determinare la nuova profondità V_0 del potenziale nucleare a partire dal vincolo appena fissato è stato utilizzato un apposito programma di calcolo che fornisce $V_0 = 54.6 \text{ MeV}$, valore nettamente inferiore a quello di partenza affinché la somma del potenziale nucleare e di quello coulombiano produca una barriera più alta. Si è dunque effettuato nuovamente il calcolo delle sezioni d'urto con questi nuovi parametri, ottenendo il risultato mostrato in Fig.6.2. Seppure la curva teorica sia in accordo con i dati al di sopra della barriera, per energie inferiori si discosta significativamente da essi e presenta forti oscillazioni, segno che i parametri trovati non sono realistici e che in particolare la profondità V_0 del potenziale nucleare è decisamente troppo piccola in relazione agli altri parametri R_0 e a_0 rimasti invariati. Si rende necessaria una modifica della geometria di tale potenziale, in modo da rendere la “buca” più “profonda” e più “stretta”.

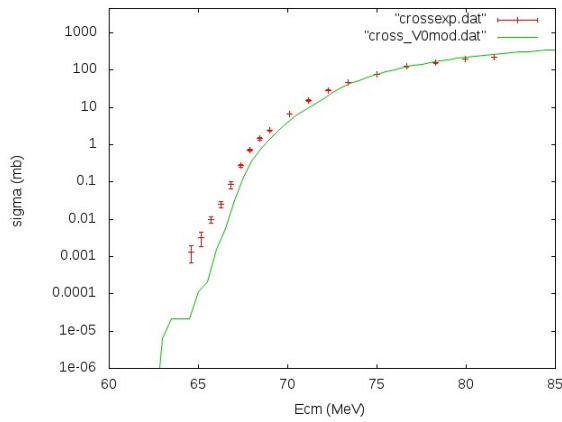


Figura 6.2: Funzione di eccitazione teorica (curva verde) ottenuta dopo aver modificato il parametro V_0 .

Imponiamo un valore inferiore di r_0 , pari a 1.14 fm . Questo comporta una ulteriore modifica di V_0 che invece aumenta considerevolmente; la diffusività rimane invariata. Seguono i nuovi parametri per il potenziale nucleare:

$V_0 \text{ (MeV)}$	$r_0 \text{ (fm)}$	$a_0 \text{ (fm)}$
82.25	1.140	0.666

Il risultato è mostrato in fig.6.3. Si osserva un notevole miglioramento del fit dei dati sperimentali con la curva teorica (in verde).

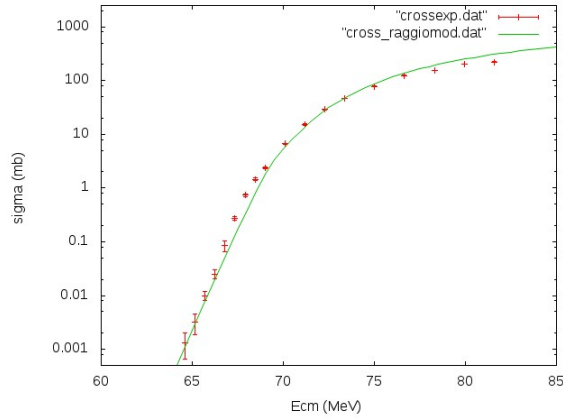


Figura 6.3: Risultato ottenuto dopo la modifica del parametro r_0 .

Per ottimizzare il risultato si può considerare anche il possibile effetto del trasferimento di due neutroni dal ^{58}Fe al ^{48}Ti , che ha un Q -valore positivo. Con una certa probabilità, quindi, una frazione dei nuclei collidenti si trasforma nel sistema $^{50}\text{Ti} + ^{56}\text{Fe}$ andando ad influenzare le stime delle sezioni d'urto. Seguono i parametri caratteristici:

# coppie nucleoni	$Q\text{-valore (MeV)}$	$F_t \text{ (fm)}$
1	1.39	0.4

dove F_t , detto “coupling form factor”, è un parametro ottenuto da una analisi di sistemi simili ($^{40}\text{Ca} + ^{48}\text{Ca}$) [8]; esso fornisce una misura dell'intensità della forza di accoppiamento. Il risultato finale è riportato in Fig.6.4, che mostra il fit migliore.

In sintesi:

- Proiettile ^{48}Ti :

A_P	48
Z_P	22
$r_P \text{ (fm)}$	1.2
- Primo modo di eccitazione: $E2$ - accoppiamento vibrazionale:

$E \text{ (MeV)}$	β	λ	#fononi
0.984	0.28	2	2

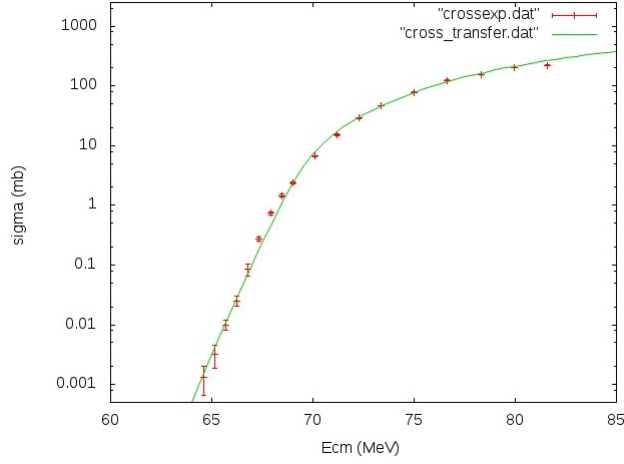


Figura 6.4: Funzione di eccitazione sperimentale a confronto con quella teorica ottenuta in ultima analisi, considerando anche il trasferimento di due neutroni dal ferro al titanio.

– Secondo modo di eccitazione: $E3$ - accoppiamento vibrazionale:

E (MeV)	β	λ	#fononi
3.359	0.19	3	1

- Bersaglio ^{58}Fe :

A_T	58
Z_T	26
r_T (fm)	1.2

– Primo modo di eccitazione: $E2$ - accoppiamento vibrazionale:

E (MeV)	β	λ	#fononi
0.811	0.26	2	2

– Secondo modo di eccitazione: $E3$ - accoppiamento vibrazionale:

E (MeV)	β	λ	#fononi
3.861	0.19	3	1

- Trasferimento di neutroni:

# coppie nucleoni	Q -valore (MeV)	F_t (fm)
1	1.39	0.4

- Potenziale nucleare:

V_0 (MeV)	r_0 (fm)	a (fm)
82.25	1.140	0.666

- Range di energie:

E_{min} (MeV)	E_{max} (MeV)	DE (MeV)
60.0	85.0	0.5

- Parametri spaziali:

R_{max} (fm)	DR (fm)
30.0	0.05

6.4 Valutazione del risultato finale

Per rendersi conto della bontà del fit che risulta dall'ultima analisi basta osservare la Fig.6.5 che mette a confronto le due curve teoriche ottenute

con e senza considerare il canale di trasferimento della coppia di neutroni. E' evidente che nel primo caso (curva blu) l'intepolazione è migliore, in particolare per energie attorno alla barriera. Per una valutazione meno qualitativa della bontà del fit, si mostra in Fig.6.6 il grafico dei rapporti tra le sezioni d'urto sperimentali e quelle previste teoricamente in funzione dell'energia. Si trova un buon risultato: l'80% dei punti dista meno di 0.1 dal valore atteso 1 di tale rapporto, per cui si ha una buona compatibilità.

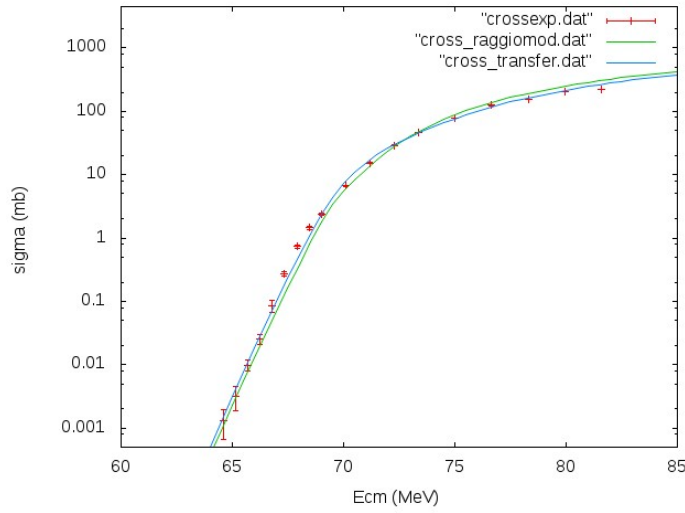


Figura 6.5: Confronto tra la funzione di eccitazione sperimentale e quelle teoriche ottenute considerando il trasferimento di due neutroni (curva blu), o meno (curva verde).

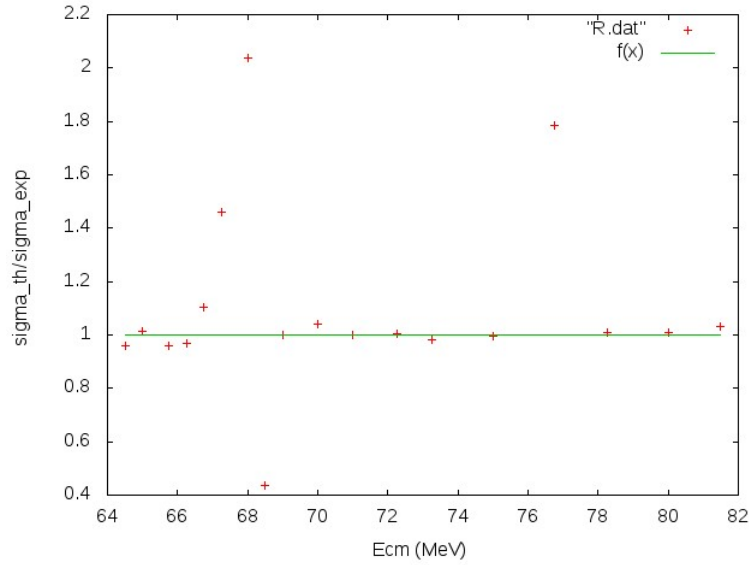


Figura 6.6: Grafico di σ_{th}/σ_{exp} in funzione dell'energia E .

Capitolo 7

Confronto tra $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ e $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$

Finora si è visto come la struttura dei nuclei coinvolti nella fusione di $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ influenzi le sezioni d'urto, trovando un buon accordo tra la descrizione teorica e l'*enhancement* osservato. Tuttavia negli ultimi anni per alcuni sistemi simili è stato osservato un altro fenomeno: quello della cosiddetta *hindrance*, ovvero della diminuzione delle sezioni d'urto misurate rispetto a quelle previste dal modello a canali accoppiati per energie molto basse rispetto alla barriera Coulombiana. Poiché per il sistema analizzato non sembrano verificarsi discrepanze rispetto alla funzione di eccitazione prevista teoricamente, possiamo concludere che nell'intervallo di energia coperto dall'esperimento la *hindrance* non viene osservata.

Il contrario avviene per il sistema simile $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ studiato di recente [6], dove invece si osserva il fenomeno per $E < V_B$. Dunque si vuole capire a cosa sia dovuta la *hindrance* e quando si manifesta in relazione alla struttura intrinseca del sistema. Si può fare ciò mettendo a confronto il sistema analizzato con $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$, scelto perché i due nuclei, pur essendo vicini a ^{48}Ti e ^{58}Fe nella carta dei nuclidi, hanno una diversa struttura nucleare a bassa energia di eccitazione come si nota in Fig.7.1. Entrambi presentano

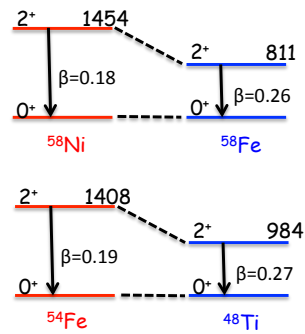


Figura 7.1: Stati eccitati dei due sistemi a confronto.

un primo livello eccitato 2^+ al quale si associa una vibrazione quadrupolare di tipo $E2$, con i valori dei parametri di deformazione β e delle energie rispetto allo stato fondamentale 0^+ riportati in figura. La differenza consiste proprio in queste ultime, essendo gli stati eccitati di ^{48}Ti e ^{58}Fe più bassi in energia rispetto a quelli di ^{54}Fe e ^{58}Ni . Questi ultimi due nuclei, infatti, hanno una shell chiusa (di neutroni e protoni rispettivamente), per cui sono rigidi. Al contrario ^{48}Ti e ^{58}Fe sono nuclei con shell aperte e le vibrazioni quadrupolari di bassa energia sono molto più forti.

7.1 Le funzioni di eccitazione sperimentali

Il primo confronto che si può effettuare è quello tra le funzioni di eccitazione misurate per i due sistemi. Già dalla figura 7.2, in cui sull'asse delle ascisse si riportano le energie nel centro di massa normalizzate a V_b (barriera Coulombiana ricavata dalle stime di Akyüz-Winter), si può vedere che la probabilità di fusione per $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ ad energie sotto barriera è maggiore rispetto a $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$.

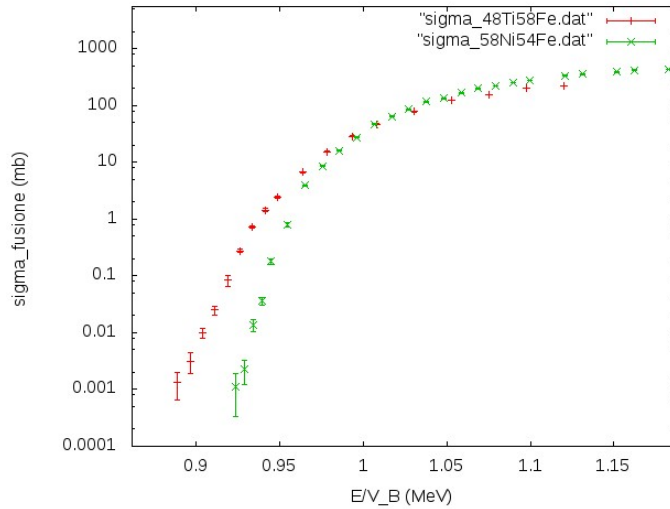


Figura 7.2: Funzioni di eccitazione sperimentali dei sistemi $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ (in rosso) e $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ (in verde) a confronto.

7.2 La derivata logaritmica e il fattore S

Un confronto meno qualitativo si può effettuare utilizzando la derivata logaritmica

$$L(E) = \frac{d[\ln(E\sigma)]}{dE} = \frac{1}{E\sigma} \frac{d(E\sigma)}{dE}$$

delle funzioni di eccitazione sperimentali pesate con le relative energie nel centro di massa. Consideriamo inoltre il fattore astrofisico

$$S(E) = E\sigma e^{2\pi\eta}$$

con $\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}$ parametro di Sommerfeld e v velocità del fascio incidente [9]. Il fattore S cresce rapidamente al diminuire dell'energia, e si può dimostrare che la sua derivata prima è in relazione con la derivata logaritmica $L(E)$, cioè:

$$\frac{dS}{dE} = S(E) \left[L(E) - \frac{\pi\eta}{E} \right] .$$

S presenta quindi un massimo quando la derivata logaritmica assume il valore

$$L_{CS}(E) = \frac{\pi\eta}{E} .$$

Nel caso in cui $L(E)$ raggiunga $L_{CS}(E)$ intersecandola, l'energia alla quale $L(E) = L_{CS}(E)$ è normalmente considerata la soglia per la *hindrance*. In corrispondenza di essa il fattore S mostrerà un massimo.

Si mostrano ora a confronto i grafici di $L(E)$ e del fattore S ricavati per i due sistemi a partire dai dati sperimentali. Nel grafico della derivata loga-

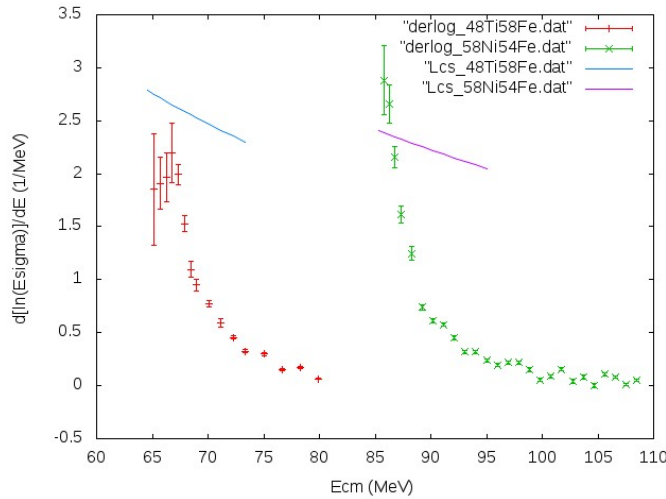


Figura 7.3: Derivata logaritmica per i due sistemi $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ (in rosso) e $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ (in verde), a confronto con L_{CS} (vedi testo).

ritmica (Fig.7.3) si nota che, mentre per il sistema $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ vi è l'intersezione con L_{CS} , per $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ questo non accade perché i punti di $L(E)$ rimangono sempre sotto L_{CS} . Queste osservazioni vengono confermate dal grafico del fattore S (Fig.7.4): mentre per $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ vi è un massimo, per $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ invece il fattore S non ne ha alcuno, per cui non vi è evidenza di *hindrance*. Dunque ci si chiede dove sia in quest'ultimo caso la *hindrance*: se la formazione di nucleo composto ha un Q-valore $Q_{fus} < 0$ come in questi casi, allora la *hindrance* si deve prima o poi ragionevolmente manifestare, per il semplice fatto che all'energia $E = -Q_{fus}$ la sezione d'urto di fusione si annulla; perciò se il fattore S di $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ cresce al diminuire dell'energia prima o poi dovrà avere un massimo, per poi decrescere fino a zero. Il problema è cercare dove tale massimo si verificherà: ci aspettiamo che sia

ad energie inferiori al range in cui sono state effettuate le misure (di molto inferiori rispetto alla barriera Coulombiana).

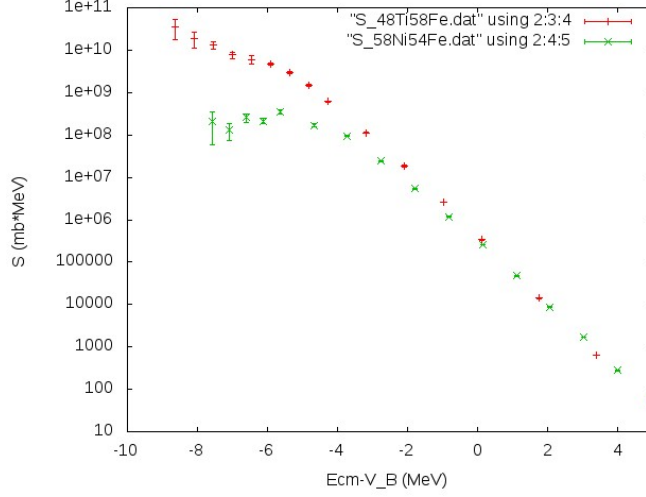


Figura 7.4: Fattore S astrofisico per i due sistemi $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ (in rosso) e $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$ (in verde).

7.3 Conclusioni

In questo lavoro di tesi è stato raggiunto l'obiettivo di verificare l'accordo dei dati sperimentali del sistema $^{48}\text{Ti} + ^{58}\text{Fe}$ con le previsioni del modello a canali accoppiati, mostrando il ruolo fondamentale della struttura dei nuclei interagenti nel loro processo di fusione. E' stata messa in evidenza l'influenza dominante delle vibrazioni collettive di quadrupolo a bassa energia nei due nuclei, così come quella meno importante degli stati di ottupolo che si trovano ad energie più elevate. L'accordo con il modello a canali accoppiati con l'uso di un potenziale di tipo Woods-Saxon indica che non si verifica il fenomeno della *hindrance* nell'intervallo di energie coperto dall'esperimento. Questa conclusione è confermata dall'analisi della derivata logaritmica della funzione di eccitazione e del fattore astrofisico S : la prima sembra infatti saturare alle energie più basse e non raggiunge L_{CS} , e di conseguenza il fattore S continua ad aumentare per energie decrescenti e non mostra alcun massimo.

In questa tesi si è anche realizzato un confronto con il sistema $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$. In questo caso, ove nuclei dalla struttura diversa (molto più rigida) sono coinvolti, le sezioni d'urto di fusione sono più piccole sotto barriera, la derivata logaritmica è più grande e si forma un massimo del fattore S . La *hindrance* è quindi chiaramente osservata nell'intervallo di energia di quell'esperimento.

Per tenere conto della *hindrance* nelle previsioni teoriche delle funzioni di eccitazione sarebbe probabilmente necessario utilizzare un potenziale ione-ione di forma diversa da quella del Woods-Saxon a piccole distanze relative.

Appendice A

Le equazioni a canali accoppiati

Si parte dal considerare un processo di collisione tra due nuclei in cui il moto relativo, parametrizzato dalla coordinata r , si accoppia ad un grado di libertà intrinseco del sistema individuato dal parametro ξ . Dette $H_0(\xi)$ e $V_{coupl}(r, \xi)$ rispettivamente l'Hamiltoniana intrinseca e di accoppiamento, si può associare al sistema l'Hamiltoniana:

$$H(r, \xi) = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r) + H_0(\xi) + V_{coupl}(r, \xi) \quad (\text{A.1})$$

A questo punto si possono effettuare le seguenti operazioni:

- espandere l'Hamiltoniana di accoppiamento in multipoli come $V_{coupl} = \sum_{\lambda>0} f_\lambda(r) Y_\lambda(r) \cdot T_\lambda(\xi)$, dove $Y_{\lambda(r)}$ sono le armoniche sferiche e $T_{\lambda(\xi)}$ tensori sferici;
- definite le funzioni d'onda per ogni canale di reazione u_n^J , con J momento angolare totale fissato assieme alla sua terza componente M e n che denota il canale n -esimo, espandere la funzione d'onda totale $\psi^J(r, \xi)$ nella base da esse costituita: $\psi^J(r, \xi) = \sum_n c_n(r, \xi) \frac{u_n^J(r)}{r}$.

In questo modo a partire dalla (A.1) si ottengono le equazioni a canali accoppiati in coordinate sferiche:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l_n(l_n + 1)}{2\mu r^2} + V(r) - E + \epsilon_n \right] u_n(r) + \sum_m V_{nm}(r) u_m(r) = 0 \quad (\text{A.2})$$

dove μ è la massa ridotta del sistema, l_n il momento angolare orbitale del canale n -esimo, E è l'energia del canale principale “in ingresso” nel riferimento del centro di massa, ϵ_n è l' n -esima autoenergia relativa alle funzioni d'onda associate ai gradi di libertà intrinseci del sistema (tali che $H_0(\xi)\varphi_n(\xi) = \epsilon_n\varphi_n(\xi)$), e V_{nm} sono gli elementi della matrice di accoppiamento. Queste

equazioni possono essere risolte applicando la IWBC già citata nella sotto-sezione (2.2.1) ottenendo i coefficienti di trasmissione T_{nm}^J , la penetrabilità della barriera Coulombiana come $P_J(E) = \sum_n |T_{nm}^J|^2$, e dunque la corrispondente sezione d'urto di fusione sarà data da $\sigma_{fus} = \frac{\pi}{k^2} \sum_J (2J+1) P_J(E)$ (Si assume che lo stato iniziale intrinseco abbia spin nullo).

A.1 L'approssimazione isocentrifuga

Il numero di equazioni a canali accoppiati come appena dedotte è tuttavia troppo elevato per un utilizzo pratico, rendendone la soluzione piuttosto ardua. Per questo si adotta spesso la cosiddetta *approssimazione isocentrifuga*, nota anche come “no-Coriolis approximation” o “rotating-frame approximation”. Essa consiste nel sostituire il momento angolare orbitale l_n di ciascun canale con il momento angolare totale J , in modo che:

$$\frac{\hbar^2 l_n(l_n + 1)}{2\mu r^2} \approx \frac{\hbar^2 J(J + 1)}{2\mu r^2} \quad (\text{A.3})$$

e assumendo così che le variazioni del momento angolare orbitale a causa dell'eccitazione dei gradi di libertà intrinseci del sistema siano trascurabili. In questo modo, sostituendo la (A.3) nella (A.2), si ottengono le equazioni ridotte, equivalenti alle originarie con un moto intrinseco avente spin zero; esse sono di numero inferiore e più semplici da risolvere. Tale approssimazione è valida per le reazioni di fusione tra ioni pesanti, per le quali è stata verificata essere attendibile [5].

A.2 Accoppiamento vibrazionale

Si vuole ora considerare l'accoppiamento del moto relativo alle vibrazioni multipolari (2^λ -polari) delle superfici dei nuclei. Esse si traducono come risaputo nel passaggio dal raggio R_T della superficie sferica rigida alla parametrizzazione

$$R(\theta, \phi) = R_T \left(1 + \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\theta, \phi) \right).$$

Per le multipolarità più basse le vibrazioni superficiali sono approssimabili a quelle di un oscillatore armonico, di cui è nota l'Hamiltoniana:

$$H_0 = \hbar\omega \left(\sum_{\mu} a_{\lambda\mu}^\dagger a_{\lambda\mu} + \frac{2\lambda + 1}{2} \right)$$

con $a_{\lambda\mu}^\dagger$ e $a_{\lambda\mu}$ operatori rispettivamente di creazione e distruzione, ai quali le coordinate superficiali $\alpha_{\lambda\mu}$ sono strettamente collegate [5]. Ora si vogliono ricavare le componenti nucleare e Coulombiana della matrice di accoppiamento. Per quanto riguarda l'interazione nucleare, essa è funzione della

distanza tra le superfici vibranti; inoltre per piccole oscillazioni tale funzione si può espandere nella base degli $\alpha_{\lambda\mu}$ e considerare solo la parte lineare:

$$V^{(N)}(r, \alpha_{\lambda\mu}) = V_N \left(r - R_T \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(r) \right) \approx V_N(r) - R_T \frac{dV_N(r)}{dr} \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(r)$$

Tale approssimazione è detta “dell'accoppiamento lineare” (*linear coupling approximation*). Per la componente Coulombiana invece si parte dal potenziale tra il proiettile sferico e il bersaglio vibrante (o viceversa) $V_C(r) = \int dr' \frac{Z_P Z_T e^2}{|r-r'|} \rho_T(r')$, per ottenere un'espressione del tipo:

$$V^{(C)}(r) = \frac{Z_P Z_T e^2}{r} + U(r)$$

dove la complicata espressione di $U(r)$ comprende la dipendenza dalle armoniche sferiche e dagli operatori di multipolo elettrico $Q_{\lambda\mu}$. In definitiva si ottiene come Hamiltoniana di accoppiamento:

$$V_{coupl}(r, \alpha_{\lambda}) = f_{\lambda}(r) \sum_{\mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(r) \quad (\text{A.4})$$

dove $f_{\lambda}(r)$ è il cosiddetto “*coupling form factor*”, proporzionale alla forza di accoppiamento. Usando l'approssimazione isocentrifuga si ottiene la seguente espressione per V_{coupl} :

$$V_{coupl} = \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} f_{\lambda}(r) \alpha_{\lambda 0} = \frac{\beta_{\lambda}}{\sqrt{4\pi}} f_{\lambda}(r) (a_{\lambda 0}^{\dagger} + a_{\lambda 0}) \quad (\text{A.5})$$

dove i β_{λ} sono i parametri di deformazione che si possono ricavare dalle stime sperimentali delle probabilità di transizione $B(E_{\lambda})$ (come si vedrà in seguito). Si possono considerare anche accoppiamenti a stati a multifononi, e calcolare di conseguenza la più complicata matrice di accoppiamento.

A.3 Accoppiamento rotazionale

Consideriamo qui il caso dell'accoppiamento alla banda rotazionale ad energia più bassa di un nucleo deformato. In generale, a seconda delle molteplicità in gioco, l'Hamiltoniana di accoppiamento assumerà nel riferimento rotante la forma:

$$V_{coupl} = \sum_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} f_{\lambda}(r) \beta_{\lambda} Y_{\lambda\mu}(\theta) \quad (\text{A.6})$$

Esplicitandola nel caso comune della deformazione di quadrupolo ($\lambda = 2$), assumerà ad esempio la forma $V_{coupl}^{\lambda=2}(r, \theta) = f_2(r) \beta_2 Y_{20}(\theta)$.

A.4 Accoppiamento di ordine qualsiasi

In generale, per studiare l'accoppiamento di qualsiasi tipo e di qualsiasi ordine, si introduce al posto del raggio nucleare R_0 che subisce la deformazione l'operatore dinamico

$$R_0 + \hat{O}.$$

Esso viene inserito nel potenziale di Woods-Saxon e ottenendo così un'espressione del tipo

$$V_N R, \hat{O} = - \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R_0-\hat{O}}{a}}}.$$

L'operatore \hat{O} si esprime in modo diverso a seconda che l'accoppiamento sia di tipo vibrazionale o rotazionale: nel primo caso si ha $\hat{O} = \frac{\beta_\lambda}{4\pi} R_T (a_{\lambda 0}^\dagger + a_{\lambda 0})$, mentre nel secondo $\beta_2 R_T Y_{20}(\theta) + \beta_4 R_T Y_{40}(\theta)$ (vedi esempio del paragrafo precedente). Partendo da queste considerazioni si può ricavare la parte nucleare dell'Hamiltoniana di accoppiamento trovando autovalori e autovettori della matrice \hat{O} , diagonalizzandola numericamente e infine valutandone i vari elementi come:

$$V_{NM}^{(N)} = \langle n | V_N(r, \hat{O}) | n \rangle - V_N(r) \delta_{n,m}.$$

La soluzione del problema può essere ottenuta numericamente, e un programma in grado di effettuare tali operazioni, che utilizza lo schema appena descritto e che è stato utilizzato in questa tesi è il cosiddetto CCFULL.

Bibliografia

- [1] C. H. Dasso (1984), *Effects of reaction channels in subbarrier fusion reactions*, Bormio Conference .
- [2] S. Szilner, A. M. Stefanini *et al.* (2013), *Fusion hindrance and quadrupole collectivity in collisions of $A \simeq 50$ nuclei (a proposal for the XTU Tandem accelerator*, INFN, Laboratori Nazionali di Legnaro, Legnaro (PD) Italy .
- [3] K. Hagino, N. Rowley, A. T. Kruppa (1999), *A program for coupled-channels calculations with all orders couplings for heavy ion fusion reactions*, Computer Physics Communication 123, 143-152 .
- [4] Aage Winther (1995), *Dissipation, polarization and fluctuation in grazing heavy-ion collisions and the boundary to the chaotic regime*, Nuclear Physics A 594, 203-245, Copenhagen (Denmark) .
- [5] K. Hagino, N. Takigawa (2012), *Subbarrier fusion reactions and many-particle quantum tunneling*, Progress of Theoretical Physics, Vol. 128, No. 6, Japan .
- [6] A. M. Stefanini, G. Montagnoli *et al.* (2010), *Near-barrier fusion and barrier distribution of $^{58}\text{Ni} + ^{54}\text{Fe}$* , Physical Review C 81, 037601 .
- [7] S. G. Steadman (1984), *Fusion reactions below the Coulomb barrier* - extracted from the *Lecture notes in physics*, Vol. 219 - , Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio .
- [8] G. Montagnoli, A. M. Stefanini *et al.* (2012), *Fusion of $^{40}\text{Ca} + ^{40}\text{Ca}$ and other $\text{Ca} + \text{Ca}$ systems near and below the barrier*, Physical Review C 85, 024607 .
- [9] B. B. Back, H Esbensen, C. L .Jiang, K, E, Rehm (2014), *Recent developments in heavy ion fusion reactions*, Reviews of Modern Physics, volume 86, Argonne, Illinois, USA .