



**UNIVERSITÀ
DI PADOVA**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Dipartimento di Matematica “Tullio Levi-Civita”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

Un modello di sopravvivenza ed estinzione in ambiente aleatorio

Relatore
Prof. Giambattista Giacomini

Laureando
Lorenzo Cattani

Correlatore
Prof. Davide Bernardi

Anno Accademico 2025/2026

Sommario

Il presente elaborato si occupa del comportamento di un sistema dinamico di metapopolazioni nella formulazione di Hanski, identificando le condizioni che producono sopravvivenza o, al contrario, estinzione. La trattazione sfrutta l'analisi spettrale delle matrici che descrivono i processi di estinzione e di migrazione e la teoria della stabilità di Lyapunov per dimostrare i risultati.

Successivamente, si introduce un elemento di incertezza nei tassi di estinzione, trattati quindi come variabili aleatorie. Modellizzando la matrice di migrazione come un'interazione di tipo campo medio, si identifica tramite il teorema dei grandi numeri il valore critico per poter osservare l'equilibrio di sopravvivenza.

Una diversa modellizzazione della matrice di migrazione, intesa come interazione locale, porta invece a un'analogia fisica con gli operatori di Anderson. In particolare, in prossimità del punto critico, l'equilibrio di sopravvivenza può essere descritto in termini delle autofunzioni dell'operatore di Anderson.

Indice

1	Introduzione	2
2	Definizioni e teoremi utili	2
3	Modello deterministico con interazione generica	4
3.1	Esistenza e unicità di un equilibrio di sopravvivenza	5
3.1.1	Unicità	5
3.1.2	Esistenza	6
3.2	Stabilità	7
3.2.1	Stabilità dell'equilibrio di estinzione	7
3.2.2	Stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza	8
3.3	Comportamento del sistema nel limite critico $R_0 \rightarrow 1^+$	10
4	Modello aleatorio con interazione di tipo campo medio	12
4.1	Variabili aleatorie e teorema dei grandi numeri	12
4.2	Identificazione della soglia critica	13
4.3	Stabilità	14
4.3.1	Stabilità dell'equilibrio di estinzione	14
4.3.2	Stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza	16
5	Modello aleatorio con interazione di tipo primi vicini	17
5.1	Operatori di Schrödinger aleatori e localizzazione di Anderson: un'analogia fisica . . .	17
5.2	Fenomeni di sopravvivenza localizzata nel limite critico	19
5.3	Sull'equilibrio di sopravvivenza vicino al punto critico	19
5.4	Simulazioni della sopravvivenza localizzata	20
6	Appendice	23
6.1	Dimostrazione del teorema di Varga	23

1 Introduzione

Verso la fine degli anni '90 si osservano due tendenze opposte nello studio della sopravvivenza delle specie animali: la biologia teoretica, che modella l'ambiente come un reticolo omogeneo in cui ai vertici ci sono gli individui; e con un approccio completamente opposto la *landscape ecology*, che al contrario tenta di studiare principalmente l'habitat, la relativa abbondanza o scarsità di cibo o il sottoclima di diversi luoghi. Entrambe queste metodologie presentano però delle limitazioni: in particolare la prima porta a conclusioni poco realistiche, mentre la seconda risulta inadatta a trattazioni matematiche ([1]). Il modello che emerge è quello delle metapopolazioni, proposto dall'ecologista finlandese Ilkka Hanski nel 1994 ([2]). Il termine metapopolazione era già stato introdotto dal biomatematico Richard Levins nel 1969 ([3]), e indica, nella formulazione di Hanski, una popolazione suddivisa in diversi sottohabitat, o siti, in cui l'ambiente non è omogeneo e ogni sito presenta condizioni più o meno favorevoli alla sopravvivenza della colonia (esempi sono la reperibilità del cibo, la dimensione del sito, la presenza più o meno forte di predatori, la propensione all'*inbreeding*,...); inoltre i siti non sono equispaziati o ugualmente connessi fra di loro, influenzando la probabilità di migrare da un sito all'altro.

Nella seguente trattazione si studierà un modello specifico proposto in *Hanski et Ovaskainen* ([4]). Chiamato n il numero di siti diversi che compongono l'habitat e p_i la probabilità che il sito i sia occupato, si modella l'evoluzione temporale di questa probabilità come:

$$\dot{p}_i = -v_i p_i + (1 - p_i) \sum_j k_{ij} p_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

v_i è il tasso di estinzione locale al sito i e rappresenta l'insospitabilità dello stesso (più è grande, più le condizioni nel sito i sono avverse alla sopravvivenza della specie). Invece k_{ij} indica il tasso di migrazione dal sito j al sito i . Chiaramente entrambe queste quantità sono non-negative. Il modello è non-lineare perché l'apporto di "migranti" dagli altri siti al sito i viene moltiplicato per $1 - p_i$; questo significa che se un sito ha grande probabilità di essere occupato c'è meno migrazione dagli altri siti, mentre se è completamente libero è più probabile la migrazione.

La teoria delle metapopolazioni è strettamente imparentata con l'epidemiologia, cioè la modellizzazione matematica della diffusione di un virus ([5]). L'idea è quella di trattare un virus come una specie animale che si propaga nella popolazione trovando sottogruppi di persone diversamente suscettibili (in analogia con i siti ostili o favorevoli) e che interagiscono fra di loro contagiandosi con probabilità diverse (similmente alla migrazione della specie); ad esempio, i lavoratori di una specifica fabbrica potrebbero avere una buona probabilità di infettare la classe scolastica dei loro figli (migrazione/trasmissione), con decorso diverso della malattia nei gruppi motivato ad esempio dall'età (estinzione/guarigione).

Nello specifico un modello matematico identico a quello dell'equazione 1 è trattato in *Fall et al.* ([6]), dove gli autori trattano un modello SIS (*Susceptible-Infected-Susceptible*, cioè un virus che non conferisce immunità). Quindi una persona suscettibile, una volta contratto il virus, diventa infetta, e una volta guarita torna suscettibile. Inoltre la popolazione totale è costante. Nel modello quindi p_i rappresenta la percentuale di infetti nel sottogruppo i , v_i il tasso di guarigione dello stesso e k_{ij} la probabilità che gli infetti in j trasmettano il virus ai suscettibili in i . L'articolo indaga sull'esistenza e sulla natura degli equilibri del sistema; una variazione della trattazione è riportata nel capitolo 3.

2 Definizioni e teoremi utili

Nel prosieguo della tesi, presi v e w vettori in $\mathbb{R}^n$, si indicherà con $v \leq w$ se $v_i \leq w_i \quad \forall i \in 1, \dots, n$, con $v < w$ se $v \leq w$ e $v \neq w$ e con $v \ll w$ se $v_i < w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ (e analogamente per $\geq$, $>$ e $\gg$).

Si forniranno ora alcuni strumenti per la trattazione matematica dei prossimi capitoli. In particolare, poiché si riscriverà l'equazione 1 in forma matriciale e vettoriale si definisce:

Definizione 2.1 (Matrici non-negative e matrici irriducibili). Una matrice $A = [a_{ij}]$ si dice non-negativa se $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$. Una matrice quadrata $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ con $n \geq 2$ si dice irriducibile se per ogni $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ esiste $i \in I$ e $j \notin I$ t.c. $A_{ij} \neq 0$.

Nel prosieguo della trattazione sarà spesso utile studiare gli autovalori delle matrici coinvolte, e quindi si parlerà spesso di:

Definizione 2.2 (Spettro di una matrice, raggio spettrale, modulo di stabilità, matrice stabile). Lo spettro $Sp(A)$ di una matrice A è l'insieme degli autovalori della matrice.

Data una matrice quadrata $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ si definisce il raggio spettrale della stessa come $\rho(A) := \max\{|\lambda| \text{ t.c. } \lambda \in Sp(A)\}$.

Data una matrice quadrata $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}$ si definisce il modulo di stabilità della stessa come $\alpha(A) := \max\{Re(\lambda) \text{ t.c. } \lambda \in Sp(A)\}$.

Una matrice $A \in M_{n \times n}$ si dice stabile se $\alpha(A) < 0$.

Il formalismo delle matrici non-negative permette di sfruttare il teorema di Perron-Frobenius.

Teorema 2.1 (Teorema di Perron-Frobenius). *Sia $A \in M_{n \times n}$ non-negativa e irriducibile. Sia $\bar{\lambda}$ l'autovalore di modulo massimo di A ($\rho(A) = |\bar{\lambda}|$), allora valgono le seguenti proposizioni:*

1. $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ e $\bar{\lambda} > 0$
2. $\bar{\lambda}$ è un autovalore semplice
3. L'autovettore corrispondente a $\bar{\lambda}$ ha tutte le entrate positive
4. L'autovettore corrispondente a $\bar{\lambda}$ è l'unico autovettore che è non-negativo

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in *Minc* ([7]). □

Le matrici non-negative sono fondamentali nello studio dei sistemi dinamici, ma spesso sono troppo restrittive per descrivere il sistema; una generalizzazione è costituita da:

Definizione 2.3 (Matrice di Metzler, decomposizione regolare). Una matrice quadrata $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ si dice di Metzler se $a_{ij} \geq 0 \forall i \neq j$, cioè le entrate della matrice sono non-negative fuori dalla diagonale.

Sia M una matrice di Metzler reale; $M = \Lambda + N$ è una decomposizione regolare se Λ è una matrice di Metzler stabile e N è una matrice non negativa.

Un altro teorema fondamentale per la seguente trattazione che permette di coniugare la decomposizione regolare alla stabilità della matrice è il teorema di Varga.

Teorema 2.2 (Teorema di Varga). *Sia M una matrice reale di Metzler e $M = \Lambda + N$ una sua decomposizione regolare. Allora M è una matrice di Metzler stabile se e solo se $\rho(-\Lambda^{-1}N) < 1$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova nell'appendice (6.1). □

Teorema 2.3. *Sia A una matrice irriducibile non-negativa. Se $\exists x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ t.c. $Ax > \lambda x$, allora $\rho(A) > \lambda$. Vale lo stesso risultato anche con $<$.*

Teorema 2.4. *Sia A una matrice irriducibile di Metzler. Se $\exists x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ t.c. $Ax > \lambda x$, allora $\alpha(A) > \lambda$. Vale lo stesso risultato anche con $<$.*

Teorema 2.5 (Teorema del punto fisso di Brouwer). *Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme convesso e compatto e sia $f : D \rightarrow D$ una funzione continua. Allora esiste almeno un punto fisso di f .*

Nella trattazione di *Fall et al.* ([6]) si studia la stabilità degli equilibri sfruttando la teoria di Lyapunov.

Definizione 2.4 (Stabilità locale, asintotica e globale asintotica). Si consideri il sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, con $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e si supponga che dato $x(0) \in D$ siano definite le soluzioni $x(t) \forall t \geq 0$. Si supponga che $\bar{x}$ sia un punto di equilibrio per il sistema, cioè $f(\bar{x}) = 0$. (A meno di traslare la variabile x si può porre $\bar{x} = 0$). Il punto di equilibrio $\bar{x} = 0$ è:

- stabile, se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ (eventualmente funzione di ϵ) t.c. dato $\|x(0)\| < \delta$, allora $\|x(t)\| < \epsilon \forall t \geq 0$
- asintotico, se è stabile e se si può scegliere δ t.c. dato $\|x(0)\| < \delta$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

- globalmente asintotico, se è stabile e se $\forall x(0) \in D$ si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

Teorema 2.6 (Teorema di Lyapunov). *Si consideri il sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, con $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sia $x = 0$ un punto di equilibrio. Se esiste un intorno $B \subseteq D$ contenente l'origine e una funzione di classe C^1 $V(x) : B \rightarrow \mathbb{R}$ t.c. $V(0) = 0$, $V(x) > 0 \forall x \in B - \{0\}$ e $\dot{V}(x) := \nabla V(x) \cdot \dot{x} = \nabla V(x) \cdot f(x) \leq 0 \forall x \in B$, allora il punto di equilibrio è stabile. Se $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in B - \{0\}$, allora il punto di equilibrio è asintotico. Se $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in B - \{0\}$, $B = D$ e $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, allora il punto di equilibrio è globalmente asintotico.*

Il teorema vale anche per funzioni $V(x) \notin C^1$, nel qual caso le condizioni sulla derivata di $V(x)$ diventano condizioni analoghe sulla derivata superiore destra direzionale nel senso di Dini lungo le traiettorie $f(x)$ del sistema, e cioè $D^+V(x) := \limsup_{h \rightarrow 0^+} (V(x + hf(x)) - V(x))/h$.

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in Khalil ([8]). □

Spesso, ed è il caso del capitolo 3, non si riesce ad avere la condizione $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in B - \{0\}$, ma si ha solamente $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in B$. Sfruttando Lyapunov non si riesce a concludere la stabilità asintotica. Si può però sfruttare il teorema di invarianza di La Salle.

Definizione 2.5 (Insieme positivamente invariante per un sistema dinamico). Si consideri il sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$. Un insieme M si dice positivamente invariante per il sistema se dato $x(0) \in M$ allora $x(t) \in M \forall t \geq 0$.

Teorema 2.7 (Teorema di invarianza di La Salle). *Si consideri il sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ con $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sia $\Omega \subseteq D$ un insieme compatto positivamente invariante per il sistema e sia $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 t.c. $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \in \Omega$. Sia inoltre $E := \{x \in \Omega : \dot{V}(x) = 0\}$ e M il più grande insieme positivamente invariante in E . Allora dato $x(0) \in \Omega$ si ha che $x(t)$ tende per $t \rightarrow \infty$ a M , cioè $\inf_{v \in M} \|x(t) - v\| \rightarrow 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in Khalil ([9]). □

Un altro modo per valutare la stabilità di un sistema è quella di andare a studiare l'equazione linearizzata e lo spettro della matrice corrispondente.

Teorema 2.8. *Sia $\dot{x} = f(x)$ con $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} = 0^n$ è un equilibrio per il sistema dinamico, allora data $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ lo jacobiano di f , cioè la matrice quadrata t.c. $A_{ij} = \partial f_i(x) / \partial x_j|_{x=0}$. Allora:*

1. se $Re(\lambda_i) < 0$ per ogni λ_i autovalore di A , allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile
2. se esiste un λ autovalore di A t.c. $Re(\lambda) > 0$, allora $\bar{x}$ è instabile

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in Khalil ([10]). □

3 Modello deterministico con interazione generica

Si può riscrivere l'equazione 1 in forma matriciale come:

$$\dot{p} = [V + (I - \text{diag}(p))K]p \quad (2)$$

dove $p = (p_1, \dots, p_n) \in [0, 1]^n$, $V = -\text{diag}(v_i)$ e $K = [k_{ij}]$.

La matrice V , detta di estinzione, è reale e diagonale, e quindi anche di Metzler; inoltre i valori sulla diagonale (e di conseguenza gli autovalori) sono tutti negativi, quindi V è anche stabile.

La matrice K viene detta matrice di migrazione, in quanto k_{ij} indica il tasso di migrazione dal sito j al sito i ; poiché questi tassi sono tutti non-negativi, si ha che K è una matrice non-negativa. Si assume inoltre che i siti formino un grafo connesso, cioè che non esistano sottoinsiemi dei siti con probabilità

nulla di migrare dall'uno all'altro; questa condizione si traduce algebricamente nell'irriducibilità della matrice K .

Si osserva che l'ipercubo $[0, 1]^n$ è invariante per il sistema. Infatti in $p_i = 0$ si ha $\dot{p}_i \geq 0$, impedendo a p_i di assumere valori negativi, mentre in $p_i = 1$ la derivata è negativa, vietando quindi valori superiori a 1. Si calcola:

$$p_i = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_i = \sum_j k_{ij} p_j \geq 0$$

e

$$p_i = 1 \quad \rightarrow \quad \dot{p}_i = -v_i \leq 0$$

Nel prosieguo si parlerà di equilibrio di sopravvivenza quando si indicherà un vettore non nullo $\bar{p}$ t.c. $[V + (I - \text{diag}(\bar{p})K)\bar{p}] = 0$. Si parlerà invece di equilibrio di estinzione per indicare il vettore nullo.

3.1 Esistenza e unicità di un equilibrio di sopravvivenza

3.1.1 Unicità

Si dimostrerà il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Se esiste un equilibrio di sopravvivenza $\bar{p} \neq 0$ allora questo equilibrio è unico e vale $p >> 0$.*

Per comodità si indicherà con $A := -V^{-1}K$. Il problema di verificare l'esistenza di un equilibrio si traduce nel problema di trovare un $p \in \mathbb{R}^n$ t.c.

$$Vp - \text{diag}(p)Kp = -Kp$$

e quindi:

$$p - \text{diag}(p)V^{-1}Kp = -V^{-1}Kp$$

$$(I + \text{diag}(Ap))p = Ap$$

$$p = (I + \text{diag}(Ap))^{-1}Ap := H(p) \quad (3)$$

dove nell'ultimo passaggio si è definito $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funzione continua t.c. $H(p) = (\text{diag}(I + A)p)^{-1}Ap$. Quindi l'esistenza di un equilibrio di sopravvivenza per il sistema si traduce nel cercare un punto fisso non nullo per la funzione $H(p)$; in componenti vale $H(p)_i = Ap_i/(1 + Ap_i)$. $H(p)$ è una funzione monotona in quanto A è non-negativa e la funzione $f(x) = x/(1 + x)$ è crescente per $x \geq 0$.

Lemma 3.1. *Se $\omega \in \mathbb{R}^n$, $\omega >> 0$ è un punto di equilibrio positivo e $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$ è un altro equilibrio, allora $\omega_i \geq \bar{p}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Sia $\xi := \max_i(\bar{p}_i/\omega_i)$. Allora $\bar{p}_i \leq \xi\omega_i \quad \forall i$ e $\exists i_0$ t.c. $\bar{p}_{i_0} = \xi\omega_{i_0}$. Si ricorda che $H(p)$ è una funzione crescente in ogni componente. Quindi:

$$\bar{p}_{i_0} = H(\bar{p})_{i_0} = \frac{(A\bar{p})_{i_0}}{1 + (A\bar{p})_{i_0}} \leq \frac{(A\xi\omega)_{i_0}}{1 + (A\xi\omega)_{i_0}} = \frac{\xi(A\omega)_{i_0}}{1 + \xi(A\omega)_{i_0}}$$

Per assurdo $\xi > 1$, cioè esiste almeno una componente di $\bar{p}$ che è maggiore della componente corrispondente di ω ; Allora:

$$\bar{p}_{i_0} < \frac{\xi(A\omega)_{i_0}}{1 + (A\omega)_{i_0}} = \xi(H(\omega))_{i_0} = \xi\omega_{i_0} = \bar{p}_{i_0}$$

trovando quindi l'assurdo. □

Lemma 3.2. *Se $\omega \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ è un punto di equilibrio di sopravvivenza (non nullo) e A è una matrice irriducibile, allora ω non ha componenti nulle e quindi $\omega >> 0$.*

Dimostrazione.

$$\omega_i = \frac{(A\omega)_i}{1 + (A\omega)_i}$$

quindi $\omega_i = 0$ se e solo se $(A\omega)_i = 0$. Sia $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ t.c. $\forall i \in I \ \omega_i > 0$; I è un insieme non vuoto perché ω è un equilibrio di sopravvivenza. Sia $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ t.c. $\forall j \in J \ \omega_j = 0$. Fisso ora $j \in J$:

$$0 = (A\omega)_j = \sum_{i \in I} A_{ji}\omega_i + \sum_{k \in J} A_{jk}\omega_k = \sum_{i \in I} A_{ji}\omega_i$$

perché $\omega_k = 0 \ \forall k \in J$. Ma poiché $A_{ji} \geq 0$ e $\omega_i > 0$ per ogni $i \in I$, $j \in J$ perché sia vera l'uguaglianza devo avere $A_{ji} = 0 \ \forall i \in I, j \in J$, che è in contraddizione con l'ipotesi di irriducibilità della matrice A . $\square$

La dimostrazione dell'unicità dell'equilibrio di sopravvivenza si conclude in maniera semplice sfruttando i due lemmi. Siano per assurdo ω_1 e ω_2 due equilibri di sopravvivenza diversi fra di loro. Per il lemma 3.2 ω_1 è un vettore positivo. Ma allora per il lemma 3.1 $(\omega_2)_i \leq (\omega_1)_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$; analogamente ottengo $(\omega_1)_i \leq (\omega_2)_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Quindi $\omega_1 = \omega_2$.

3.1.2 Esistenza

Per comodità d'ora in avanti $A = -V^{-1}K$ e $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.c. $H(p) = (\text{diag}(I + A)p)^{-1}Ap$.

Si dimostrerà ora che un equilibrio di sopravvivenza $p \neq 0$ esiste se e solo se $R_0 := \rho(-V^{-1}K) > 1$ ¹.

Se esiste un tale equilibrio si ha $\dot{p} = 0$, o equivalentemente:

$$Vp = -Kp + \text{diag}(p)Kp$$

e quindi:

$$p = -V^{-1}Kp + \text{diag}(p)V^{-1}Kp$$

(si ricorda che $\text{diag}(p)$ e V^{-1} sono matrici diagonali e quindi commutano fra di loro).

$-V^{-1} = \text{diag}(1/v_i)$, quindi è una matrice diagonale e non-negativa. $-V^{-1}K$ è non-negativa; eredita inoltre da K e dalla non-negatività di V la proprietà di irriducibilità.

$V^{-1}K$ è quindi una matrice non-positiva e irriducibile e $p \gg 0$ per il lemma 3.2; si ha quindi $\text{diag}(p)V^{-1}Kp < 0$. Si ha quindi:

$$p < -V^{-1}Kp$$

e quindi per il teorema 2.3 (con $\lambda = 1$) si ottiene $\rho(-V^{-1}K) > 1$.

Sia ora invece $R_0 > 1$. Si ricorda che $\bar{p}$ è un punto di equilibrio del sistema se e solo se è un punto fisso di H , cioè $H(\bar{p}) = \bar{p}$.

Si ricorda che $R_0 = \rho(A)$, quindi per il teorema di Perron-Frobenius (2.1) esiste un autovettore positivo $v \gg 0$ t.c. $Av = R_0v$. Poiché $R_0 > 1$ si può scegliere un $\epsilon > 0$ abbastanza piccolo t.c. $1 + \epsilon R_0 v_i \leq R_0$; quindi si ha $1 \leq R_0/(1 + \epsilon R_0 v_i)$ e moltiplicando per $\epsilon v_i > 0$ si ha:

$$\epsilon v_i \leq \frac{R_0 \epsilon v_i}{1 + R_0 \epsilon v_i} = \frac{\epsilon (Av)_i}{1 + \epsilon (Av)_i} = (H(\epsilon v))_i$$

Si calcoli invece ora

$$H(1^n)_i = \frac{\sum_j a_{ij}}{1 + \sum_j a_{ij}} \leq 1$$

Si ricorda che $H(p)$ è una funzione monotona. Allora per $\epsilon < 1/\max_i v_i$ si ha:

$$\epsilon v \leq H(\epsilon v) \leq H(1^n) \leq 1$$

¹A questo parametro determinante si è deciso di dare il nome di R_0 , analogamente ai modelli epidemiologici

Quindi H mappa l'iperparallelepipedo (convesso e compatto) $D := \{p \in \mathbb{R}^n : \epsilon v \leq p \leq 1^n\}$ in D , e quindi per il teorema del punto fisso di Brouwer esiste almeno un punto fisso di $H(p)$ in D .

Si noti che l'insieme D non comprende l'origine e quindi il punto fisso trovato è un punto di equilibrio di sopravvivenza diverso dall'equilibrio di estinzione.

3.2 Stabilità

Per dimostrare la stabilità globalmente asintotica dei vari equilibri si userà il teorema di Lyapunov e quello di La Salle.

3.2.1 Stabilità dell'equilibrio di estinzione

Si dimostrerà il seguente teorema.

Teorema 3.2. *L'equilibrio di estinzione è stabile e globalmente asintotico se e solo se $R_0 \leq 1$.*

Lemma 3.3 (Teorema di Perron-Frobenius per matrici di Metzler irriducibili). *Se M è una matrice irriducibile di Metzler, l'autovalore corrispondente ad $\alpha(M)$ è reale, semplice e il suo autovettore è positivo*

Dimostrazione. Sia $N := M + sI$ con $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ abbastanza grande da rendere N una matrice non-negativa (si ricorda che le matrici di Metzler possono essere negative solo sulla diagonale); N è anche irriducibile. Dal teorema di Perron-Frobenius si ottiene che esiste un autovalore semplice di N $\mu_m = \rho(N) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ con autovettore positivo. In generale se μ è autovalore di N si ha:

$$Re(\mu) \leq |\mu| \leq \rho(N)$$

e $\max_{\mu} Re(\mu) = \alpha(N) = \rho(N)$.

Dato che $M = N - sI$ λ è autovalore di M se e solo se vale $\lambda = \mu - s$ per qualche μ autovalore di N . Inoltre vale $Re(\lambda) \leq \rho(N) - s$ e $\alpha(M) = \rho(N) - s$, quindi l'autovettore di M corrispondente ad $\alpha(M)$ è l'autovettore di N corrispondente a $\rho(N)$ e quindi è positivo. $\square$

$V + K$ è la somma di una matrice di Metzler e di una matrice non-negativa, ed è quindi di Metzler; inoltre è somma di una matrice diagonale e di una matrice irriducibile, ed è quindi irriducibile. Si può quindi applicare il lemma 3.3.

Si ottiene che $\alpha(V + K)$ è l'autovalore maggiore di $V + K$ a cui corrisponde un autovettore completamente positivo; questo vale anche per la trasposta, dato che le matrici trasposte hanno gli stessi autovalori di quelle di partenza. Quindi si ha $(V + K)^T c = \alpha(V + K)c$ con c vettore positivo.

Si definisce ora la funzione $F(p) := \langle c|p \rangle$, dove $\langle | \rangle$ indica il prodotto scalare nella notazione di Dirac. Per le proprietà del prodotto scalare, essendo c positivo, $F(p) > 0 \quad \forall p \in]0, 1]^n$ e $F(0^n) = 0$. Si va ora a studiare il segno della derivata.

$$\begin{aligned} \dot{V}(p) &= \langle c|\dot{p} \rangle = \langle c|(V + K)p - \text{diag}(p)Kp \rangle \\ &= \langle (V + K)^T c|p \rangle + \langle c| - \text{diag}(p)Kp \rangle \end{aligned}$$

Il secondo addendo è negativo, mentre per il primo addendo si utilizza l'espressione agli autovalori appena trovata. Quindi:

$$\langle (V + K)^T c|p \rangle = \alpha(V + K) \langle c|p \rangle$$

Si tratta prima il caso $R_0 < 1$; per il teorema 2.2 questo significa che $\alpha(V + K) < 0$. Quindi per $R_0 < 1$ l'origine è globalmente stabile.

Il caso $R_0 = 1$ è invece più complesso.

Lemma 3.4. *Se $R_0 = 1$ si ha $\alpha(V + K) = 0$*

Dimostrazione. Sia l'operatore ρ che l'operatore α sono continui rispetto agli elementi delle matrici V e K ; dalle ipotesi si ha $R_0 = \rho(-V^{-1}K) = 1$.

Si definisce $M_\epsilon := -V^{-1}K - \epsilon I$. $\rho(M_\epsilon) = 1 - \epsilon < 1$, quindi per il teorema di Varga 2.2 il modulo di stabilità della matrice corrispondente è negativo. Facendo il limite per ϵ che va a zero, il raggio spettrale tende a 1. Il modulo di stabilità non può tendere ad un valore negativo, altrimenti si contraddirebbe il teorema di Varga; il valore del limite può quindi essere 0 o un numero positivo, caso quest'ultimo in contraddizione con la continuità dell'operatore α . Quindi $\alpha(V + K) = 0$. $\square$

Sia ora $R_0 = 1$. Si ha quindi

$$\dot{V}(p) \leq -\langle c | \text{diag}(p) K p \rangle \leq 0$$

Si userà il teorema di invarianza di La Salle e si dimostrerà che il più grande insieme invariante ($\mathcal{L}$) contenuto in $E = \{p \in [0, 1]^n : \dot{V}(p) = 0\} = \{p \in [0, 1]^n : \text{diag}(p) K p = 0^n\}$ contiene solo l'origine ($\mathcal{L} = \{0^n\}$).

Infatti, se $p \in \mathcal{L} \subseteq E$, allora $p_i \sum_j k_{ij} p_j = 0 \forall i$. Poiché K e p sono non-negativi, allora si deve avere $p_i k_{ij} p_j = 0 \forall i, j$. Per assurdo si assuma che p abbia almeno una componente non nulla $p_{i_0} \neq 0$. Allora $k_{i_0 j} p_j = 0 \forall j$. Dato che K è irriducibile $\exists i_1 \in \{1, \dots, n\}$ t.c. $k_{i_0 i_1} \neq 0$ e quindi $p_{i_1} = 0$.

Prendendo p come dato iniziale, per continuità $p_{i_0}(t) > 0$ per un certo tempo positivo, e poiché $\mathcal{L}$ è positivamente invariante, $p(t) \in \mathcal{L}$; quindi $p_{i_1}(t) = 0$ nello stesso periodo di tempo.

Essendo costante in questo periodo di tempo, si ha:

$$0 = \dot{p}_{i_1} = V_{i_1 i_1} p_{i_1} + (1 - p_{i_1}) \sum_j k_{i_1 j} p_j = \sum_j k_{i_1 j} p_j$$

In generale se $p_i = 0$ e $k_{ij} \neq 0$ allora $p_j = 0$ ed esiste almeno una componente nulla di p .

Sia $I_k := \{i_1, \dots, i_k\}$ l'insieme di cardinalità k t.c. $p_j = 0 \forall j \in I_k$. Si costruirà per induzione finita l'insieme I_n ; l'esistenza di questo insieme è equivalente all'esistenza di n componenti nulle di p .

Il passo base è già stato dimostrato; esiste infatti almeno una componente nulla di p .

Sia $I_k = \{i_1, \dots, i_k\}$ insieme di indici per cui $p_i = 0 \forall i \in I_k$. Quindi per la definizione di matrice irriducibile $\exists i \in I, j \notin I$ t.c. $k_{ji} \neq 0$, e quindi poiché $p_i = 0$ si ottiene $p_j = 0$; si definisce ora $i_{k+1} = j$ e $I_{k+1} = I_k \cup \{i_{k+1}\}$, dimostrando quindi il passo induttivo.

Per induzione si ottiene così l'insieme di indici $I_n = \{i_1, \dots, i_n\}$. Esistono quindi n componenti nulle di p , e quindi $p = 0^n$. Si ha quindi l'assurdo.

3.2.2 Stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza

Si è dimostrato che l'equilibrio di sopravvivenza esiste, è unico ed è positivo se e solo se $R_0 > 1$. Si dimostrerà ora il seguente teorema.

Teorema 3.3. *Se l'equilibrio di sopravvivenza esiste, allora è asintoticamente stabile su $]0, 1]^n$.*

Sia ω l'equilibrio di sopravvivenza per il sistema. Quindi

$$0 = \dot{\omega} = (V + K(1 - \text{diag}(\omega)))\omega$$

Si definisce la nuova variabile traslata $P := p - \omega$. L'equazione differenziale del sistema diventa:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \dot{p} = (V + (1 - \text{diag}(p))K)p \\ &= (V + (1 - \text{diag}(P + \omega))K)P - \text{diag}(P)K\omega + (V + (1 - \text{diag}(\omega))K)\omega \end{aligned}$$

L'ultimo termine è nullo perché ω è un equilibrio; invece nel secondo termine si sfrutta che $\text{diag}(P)K\omega = \text{diag}(K\omega)P$. Nella nuova variabile l'equazione differenziale del sistema diventa:

$$\dot{P} = [V + \text{diag}(1 - P - \omega)K - \text{diag}(K\omega)]P := B(P)P \quad (4)$$

con $B(P) := V + \text{diag}(1 - P - \omega)K - \text{diag}(K\omega)$ matrice di Metzler continua e definita sull'insieme compatto $-\omega + [0, 1]^n$. Si dimostra ora un lemma sulla stabilità.

Lemma 3.5. *Sia G un insieme aperto contenente l'origine e invariante per il sistema $\dot{x} = A(x)x$ con $A(x)$ matrice di Metzler continua. Se esiste un vettore c^T positivo tale che $c^T A(x)$ sia negativo per ogni x in $G - \{0^n\}$, allora l'origine è stabile e globalmente asintotica su G .*

Dimostrazione. Si dimostrerà che $V(x) := \sum_i c_i |x_i| = \sum_i c_i s_i x_i$ (dove $s_i := \text{sign}(x_i)$) è una funzione che rispetta le ipotesi del teorema di Lyapunov. Chiaramente $V(x)$ è positiva su G e nulla solo nell'origine. Si osserva che $V(x)$ non è di classe C^1 , quindi si sfrutterà la formulazione del teorema di Lyapunov per funzioni non derivabili. $V(x)$ non è derivabile su $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ t.c. } x_i = 0\}$ in quanto $|x|$ non è derivabile in 0. Con un abuso di notazione si indicherà con $\dot{V}(x)$ la derivata superiore destra nel senso di Dini.

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_i c_i s_i \dot{x}_i \\ &= \sum_i c_i s_i \sum_j a_{ij} x_j \\ &= \sum_i \sum_j c_i s_i a_{ij} x_j s_j \\ &= \sum_j s_j x_j \sum_i c_i s_i s_j a_{ij} \\ &\leq \sum_j s_j x_j \sum_i c_i a_{ij} \\ &= \sum_j |x_j| (c^T A)_j \end{aligned}$$

Quindi $\dot{V}(x)$ è negativa in $G - \{0^n\}$. Quindi l'origine è globalmente asintotica su G per il teorema di Lyapunov 2.6. $\square$

Si applicherà il lemma 3.5 per dimostrare il teorema 3.3. Si deve quindi cercare un vettore c che rispetti le ipotesi del teorema.

$$B(-\omega) = [V + \text{diag}(1 - (-\omega) - \omega)K - \text{diag}(K\omega)] = (V - \text{diag}(K\omega) + K)$$

e quindi $B(-\omega)\omega = 0$ poiché:

$$(V - \text{diag}(K\omega) + K)\omega = 0$$

$B(-\omega)$ è una matrice irriducibile di Metzler e $B(-\omega) = [V + \text{diag}(-K\omega)] + (K)$ è una decomposizione regolare. Infatti $[V + \text{diag}(-K\omega)] := \Lambda$ è una matrice diagonale con $\Lambda_{ii} < 0 \forall i$, ed è quindi una matrice di Metzler stabile; K è invece una matrice non-negativa.

Si calcola $\rho(-K\Lambda^{-1})$ per poter applicare il teorema di Varga 2.2. Da $B(-\omega)\omega = (\Lambda + K)\omega = 0$ si ottiene:

$$(-\Lambda^{-1}K)\omega = \omega$$

Si osserva che la matrice $-\Lambda^{-1}K$ è una matrice non-negativa e irriducibile e ω è un autovettore positivo corrispondente all'autovalore 1, quindi per il teorema di Perron-Frobenius si ottiene $\rho(-\Lambda^{-1}K) = 1$. Sfruttando il lemma 3.4 si conclude $\alpha(B(-\omega)) = 0$.

Per il teorema di Perron-Frobenius per matrici di Metzler irriducibili 3.3 si deduce che l'autovettore d corrispondente all'autovalore $\alpha(B(-\omega)) = 0$ è positivo. Questo vale anche per l'autovettore c della matrice $B(-\omega)^T$ t.c.

$$B(-\omega)^T c = 0$$

Facendo la trasposta si conclude:

$$c^T B(-\omega) = c^T (V - \text{diag}(K\omega) + K) = 0$$

poiché $B(-\omega)$ è una matrice irriducibile di Metzler con $\alpha(A(-\omega)) = 0$.

Prendendo $P + \omega$ positivo (e quindi p), si ottiene:

$$\begin{aligned} c^T B(P) &= c^T (V + \text{diag}(1 - P - \omega)K - \text{diag}(K\omega)) \\ &= c^T [V + K - \text{diag}(K\omega)] + c^T \text{diag}(-P - \omega)K \\ &= -c^T \text{diag}(P + \omega)K = -c^T \text{diag}(p)K \end{aligned}$$

cioè un vettore negativo se $P \neq -\omega$ ($p \neq 0$).

Si consideri quindi $G := -\omega +]0, 1[^n$; questo è un insieme aperto contenente l'origine e invariante per $\dot{P} = B(P)P$ e $B(P)$ è una matrice di Metzler continua in P . Poiché esiste un vettore positivo c^T t.c. $c^T B(P)$ è negativo per $P \in G$, si conclude per il teorema 3.5 che $P = 0^n$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per $P(0) \in -\omega +]0, 1[^n$. Tornando alle variabili originali $p = \omega$ è asintoticamente stabile in $]0, 1[^n$. Inoltre, poiché $[0, 1]^n$ è un insieme invariante per il sistema, ω è asintoticamente stabile in $[0, 1]^n - \{0^n\}$.

3.3 Comportamento del sistema nel limite critico $R_0 \rightarrow 1^+$

Ci si interroga ora sul comportamento del sistema vicino al punto critico, cioè per $R_0 \rightarrow 1^+$, ovvero $\alpha(V + K) \rightarrow 0^+$. Per farlo si definisce $L = V + K$ t.c. $\alpha(L) = 0$, $V_\delta := V + \delta I$ e $L_\delta := V_\delta + K$; in questo modo $\alpha(V_\delta) = \delta$ e in generale gli autovalori di L_δ sono gli autovalori di L traslati di δ e gli autovettori sono uguali. Si definiscono la norma infinito di un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ come $\|v\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$ e la norma in l^1 come $\|v\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$; chiaramente $\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$. Si dimostrano ora i seguenti teoremi:

Teorema 3.4. *Sia ω_δ equilibrio di sopravvivenza, ovvero tale che $L_\delta \omega_\delta = \text{diag}(\omega_\delta)K\omega_\delta$. Allora $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \|\omega_\delta\|_\infty = 0$.*

Dimostrazione. Si ipotizzi per assurdo che $\exists \epsilon > 0$ t.c. $\forall \delta > 0 \|\omega_\delta\|_\infty \geq \epsilon$. Si costruisce una successione $\delta_m > 0$ t.c. $\delta_m \rightarrow 0^+$; dato che $\omega_{\delta_m} \in [0, 1]^n$ compatto, per Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione di ω_{δ_m} convergente, cioè $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{\delta_{m_k}} = \omega$. Per continuità, poiché $\|\omega_{\delta_{m_k}}\|_\infty \geq \epsilon \forall k$ si ha $\|\omega\|_\infty \geq \epsilon$. Si faccia ora il limite nell'equazione di equilibrio e si sfrutti la continuità delle matrici:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_\delta \omega_{\delta_{m_k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{diag}(K\omega_{\delta_{m_k}})\omega_{\delta_{m_k}}$$

e quindi:

$$L\omega = \text{diag}(K\omega)\omega$$

Poiché nel limite $\alpha(L) = 0$, esiste solamente la soluzione di estinzione $\omega = 0^n$, che porta alla contraddizione dell'assurdo. $\square$

Teorema 3.5. *Sia ω_δ equilibrio di sopravvivenza, ovvero tale che $L_\delta \omega_\delta = \text{diag}(\omega_\delta)K\omega_\delta$. Allora ω_δ "quasi" risolve l'equazione agli autovalori $L_\delta \psi = \delta \psi$, cioè*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\|L_\delta \omega_\delta - \delta \omega_\delta\|_\infty}{\|\omega_\delta\|_\infty} = 0$$

Dimostrazione. Si ha $\|L_\delta \omega_\delta\|_\infty = \|\text{diag}(\omega_\delta)K\omega_\delta\|_\infty \leq \|\text{diag}(\omega_\delta)\|_\infty \|K\|_\infty \|\omega_\delta\|_\infty = \|K\|_\infty (\|\omega_\delta\|_\infty)^2$, dove con $\|K\|_\infty := \sup_v \|Kv\|_\infty / \|v\|_\infty$ si intende la norma operativa di K ; poiché la dimensione di K è finita la sua norma operativa è finita². Si ha quindi:

$$\frac{\|L_\delta \omega_\delta - \delta \omega_\delta\|_\infty}{\|\omega_\delta\|_\infty} \leq \frac{\|K\|_\infty (\|\omega_\delta\|_\infty)^2 + \delta \|\omega_\delta\|_\infty}{\|\omega_\delta\|_\infty} = \|K\|_\infty \|\omega_\delta\|_\infty + \delta \rightarrow 0$$

dove $\|\omega_\delta\|_\infty \rightarrow 0$ per il teorema 3.4 $\square$

²Si osserva come questa dimostrazione escluda la possibilità di eseguire il limite termodinamico $n \rightarrow \infty$, che sarà però necessario nella trattazione dei capitoli 4 e 5. Per mantenere l'impostazione teorica del presente capitolo sarà necessario fare delle ipotesi aggiuntive sulla matrice K .

Lemma 3.6. Sia $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ e come prima $\|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$. Allora vale:

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty$$

Dimostrazione. Si dimostra prima la prima disuguaglianza e poi la seconda. Sia $|v_{i_0}| = \|v\|_\infty$. Si ha:

$$\|v\|_2 = \sqrt{v_{i_0}^2 + \sum_{i \neq i_0} v_i^2} \geq \sqrt{v_{i_0}^2} = \|v\|_\infty$$

Sia ora invece:

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n v_{i_0}^2} = \sqrt{nv_{i_0}^2} = \sqrt{n} |v_{i_0}|$$

□

Teorema 3.6. L'autovettore principale ψ_1 di L , riscaldato appositamente, approssima l'equilibrio di sopravvivenza ω_δ nel limite critico, cioè per $c_1(\delta) \in \mathbb{R}$ opportuno:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{\|\omega_\delta - c_1(\delta)\psi_1\|_1}{\|\omega_\delta\|_1} = 0$$

e quindi $|\omega_{\delta,i} - c_1(\delta)\psi_{1,i}| \leq \|\omega_\delta - c_1(\delta)\psi_1\|_1 = o(\|\omega_\delta\|_1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ e quindi:

$$\omega_{\delta,i} = c_1(\delta)\psi_{1,i} + o(\|\omega_\delta\|_1)$$

.

Dimostrazione. Si dimostrerà il teorema nel caso di L_δ diagonalizzabile, ma il risultato vale anche per L_δ generici. Sia quindi $\psi_{k,i}$ con $i = 1, \dots, m(\lambda_k)$ ($m(\lambda_k)$ indica la molteplicità algebrica dell'autovale λ_k) l'autovettore normalizzato di L_δ ($\|\psi_{k,i}\|_2 = 1$) corrispondente all'autovale $\lambda_k(\delta)$. $\lambda_1(\delta) = \delta$ indica l'autovale principale di L_δ , e quindi per il teorema di Perron-Frobenius (3.3) l'autovettore principale $\lambda_1(\delta)$ è semplice. Si rappresenta quindi $\omega_\delta = c_1\psi_1 + \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}\psi_{k,i}$. Si calcola:

$$L\omega_\delta - \delta\omega_\delta = c_1(\lambda_1 - \delta)\psi_1 + \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}(\lambda_k - \delta)\psi_{k,i} = \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}(\lambda_k - \delta)\psi_{k,i}$$

Sfruttando il risultato del teorema 3.5 (L è una matrice di Metzler e gli autovalori di L_δ sono distanziati fra di loro come gli autovalori di L) si ha $|\lambda_k(\delta) - \delta| = |\lambda_k(\delta) - \lambda_1(\delta)| = |\lambda_k(0) - \lambda_1(0)| \geq \Delta > 0 \quad \forall k$, si ha:

$$\begin{aligned} \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}^2 \Delta^2 &\leq \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}^2 (\lambda_k - \delta)^2 \\ &= \left(\left\| \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}(\lambda_k - \delta)\psi_{k,i} \right\|_2 \right)^2 \\ &= (\|L\omega_\delta - \delta\omega_\delta\|_2)^2 \\ &\leq n (\|L\omega_\delta - \delta\omega_\delta\|_\infty)^2 = o(\|\omega_\delta\|_\infty) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del lemma 3.6. Si ha quindi $|c_{k,i}| = o(\|\omega_\delta\|_\infty) \quad \forall k \neq 1$. Allora

$\lim_{\delta \rightarrow 0} c_1/\|\omega_\delta\|_\infty \neq 0$; altrimenti si avrebbe $\omega_\delta = c_1\psi_1 + \sum_k \sum_{i=1}^{m(\lambda_k)} c_{k,i}\psi_{k,i} = c_1\psi_1 + o(\|\omega_\delta\|_\infty) = o(\|\omega_\delta\|_\infty)$, arrivando ad un assurdo. □

4 Modello aleatorio con interazione di tipo campo medio

Si andrà ora a studiare il sistema precedentemente descritto aggiungendo una componente aleatoria nella matrice di estinzione V che rappresenta l'incertezza nella conoscenza dei parametri di estinzione. Per poterlo trattare si ritiene necessario semplificare il modello, e nello specifico si utilizzerà l'approssimazione di campo medio per la matrice di migrazione K : si porrà quindi $k_{ij} := 1/n$. (Si osserva che questa costruzione della matrice K rende la sua norma operatoriale finita indipendentemente dalla dimensione della stessa, rispondendo all'esigenza espressa nella nota 3.3). La dimostrazione è tratta da *Maritan* ([11]). Si ridefinisce il modello sostituendo ai tassi di estinzione deterministici la somma di una parte deterministica h e di una parte aleatoria v_i . Il nuovo modello sarà pertanto:

$$\dot{p}_i = -(h + v_i)p_i + (1 - p_i) \sum_j k_{ij} p_j = -(h + v_i)p_i + (1 - p_i)m$$

dove $m := \left(\sum_{i=1}^n p_i \right) / n$ indica l'occupazione media del sistema.

La componente aleatoria $\{v_i\}_{i=\{1,\dots,n\}}$ è una successione di variabili aleatorie identicamente distribuite e indipendenti; in questo capitolo si tratterà unicamente il caso di v_i non costanti, che è già stato trattato nel capitolo precedente.

Si ritiene necessario fornire una piccola introduzione alle variabili aleatorie ed enunciare il teorema dei grandi numeri nella formulazione di Kolmogorov, fondamentale per la successiva trattazione (chiaramente non si ha né la possibilità né l'interesse di introdurre in maniera completa e autosufficiente la teoria della probabilità, ma solo di definire gli strumenti necessari allo sviluppo del presente capitolo).

4.1 Variabili aleatorie e teorema dei grandi numeri

Definizione 4.1 (σ -algebra e spazio misurabile). Dato un insieme Ω , $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si dice σ -algebra se:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. se $B \in \mathcal{A}$, allora anche $B^C \in \mathcal{A}$
3. se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ allora anche $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

$(\Omega, \mathcal{A})$ è detto spazio misurabile.

Definizione 4.2 (Misura di probabilità e spazio di probabilità). Una misura di probabilità è una funzione $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tale che

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ tale che $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$, allora $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è detto spazio di probabilità.

Definizione 4.3 (Quasi ovunque, per quasi ogni). Una proposizione vale q.o. (quasi ovunque) su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se $E = \{x \in \Omega : \text{la proposizione non vale per } x\}$ è t.c. $\mathbb{P}(E) = 0$.

Definizione 4.4 (Variabile aleatoria e legge). Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice variabile aleatoria se dato $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (dove l'insieme dei Boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ indica la σ -algebra generata dagli aperti di $\mathbb{R}$) allora $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

La legge di una variabile aleatoria X è la misura di probabilità $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ tale che $P_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B))$.

Se X, Y variabili aleatorie hanno leggi rispettivamente P_X, P_Y t.c. $P_X = P_Y$ q.o., allora si dice che X e Y sono identicamente distribuite.

Definizione 4.5 (Supporto di una variabile aleatoria). Il supporto di una variabile aleatoria X ($\text{supp}(X)$) è l'insieme dei valori che può assumere X .

Definizione 4.6 (Attesa di una variabile aleatoria e spazi $\mathbb{L}^n$). Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e una variabile aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si definisce l'attesa di X come $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP_X(\omega)$ inteso come integrale di Lebesgue; vengono ereditate le proprietà di linearità dell'integrale.

Si dice che X variabile aleatoria appartiene a $\mathbb{L}^n$ se $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$.

Definizione 4.7 (Indipendenza di σ -algebre e di variabili aleatorie). Due σ -algebre $\mathcal{A}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ su cui si definisce la stessa misura di probabilità $\mathbb{P}$ si dicono indipendenti se $\forall A \in \mathcal{A}, C \in \mathcal{C}$ si ha $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$.

Due variabili aleatorie X e Y si dicono indipendenti se $\sigma(X)$ e $\sigma(Y)$ sono indipendenti.

Definizione 4.8 (Convergenza quasi certa). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}, X$ variabili aleatorie definite su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si dice che X_n converge quasi certamente a X ($X_n \xrightarrow{q.c.} X$) se dato $E := \{x \in \Omega : X_n(x) \not\rightarrow X(x)\}$ si ha $\mathbb{P}(E) = 0$.

Teorema 4.1 (Teorema dei grandi numeri di Kolmogorov). Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ variabili aleatorie a valori reali, identicamente distribuite, in $\mathbb{L}^1$ e indipendenti definite su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sia $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Allora

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E}[X_1]$$

4.2 Identificazione della soglia critica

In questo capitolo si dimostrerà come l'esistenza di un equilibrio di sopravvivenza sia subordinato al valore di h rispetto ad una soglia critica h_c , la quale dipende solamente dalla legge della variabile aleatoria v_i e non dalla sua realizzazione. Le variabili aleatorie devono rispettare la condizione $h + v_i \geq 0$ q.c., e quindi $h \leq -\inf \text{supp}(v_i)$.

Si impone la condizione stazionaria $\dot{p}_i = 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ che porta a (l'asterisco indica che è un punto di equilibrio):

$$0 = -(h + v_i)p_i^* + (1 - p_i^*)m^*$$

dove $m^* := \left(\sum_{i=1}^n p_i^* \right) / n$. Si ha:

$$p_i^* = \frac{m^*}{m^* + h + v_i}$$

Si rende necessario porre una condizione sul supporto della variabile aleatoria v_1 ; questa deve infatti essere tale che p_i^* sia quasi certamente compreso in $[0, 1]$, e cioè che quasi certamente $0 \leq \frac{m^*}{m^* + h + v_i} \leq 1$. Ricordando che anche $m^* \in [0, 1]$ q.c., si ha che $m^* + h + v_i \geq 0$, e che quindi $\inf(\text{supp}(v_i)) > -\infty$; si definisce $C := \inf(\text{supp}(v_i))$. Si ricorda che $h \geq -C$. (Si fa osservare che C dipende solamente dalla legge di v_1 e non dalla sua realizzazione).

Se si somma da entrambi i lati su i e si divide per n si trova:

$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m^*}{m^* + h + v_i} \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E} \left[\frac{m^*}{m^* + h + v_1} \right]$$

Si osserva che esiste sempre la soluzione di estinzione $m^* = 0$, che corrisponde a $p^* = 0^n$. Si cercano ora le condizioni per l'esistenza di una soluzione di sopravvivenza nel limite termodinamico $n \rightarrow \infty$.

Si chiamerà X_i la variabile aleatoria $\frac{1}{m^* + h + v_i}$; si osserva che X_i è q.c. non-negativa. Poiché q.c. $h + v_i \geq h + C \geq 0$, si ha $X_i \leq \frac{1}{m^*}$ q.c., e poiché si stanno cercando soluzioni con $m^* > 0$, si ha $X_1 \in \mathbb{L}^1$ e si può quindi applicare il teorema dei grandi numeri (4.1):

$$1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m^* + h + v_i} \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E} \left[\frac{1}{m^* + h + v_1} \right] \quad (5)$$

Si chiami $G_h(m) := \mathbb{E} \left[\frac{1}{m + h + v_1} \right]$.

Bisogna prestare attenzione a valutare $G_h(m)$ in $m = 0$ perché poiché $h \geq -C$ e non si sono fatte ipotesi sulla coda della distribuzione di v_1 nel limite in C , si potrebbe avere $\frac{1}{v_1+h} \notin \mathbb{L}^1$ e quindi non essere definita la sua attesa in $\mathbb{R}$ (ad esempio nel caso che v_1 abbia un atomo di probabilità in C e che $h = -C$). In quest'ultimo caso si avrebbe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G_h(\epsilon) = +\infty > 1$, non comportando quindi ostacoli alla dimostrazione; è sufficiente estendere il codominio di $G_h(m) : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$G_h(m)$ è decrescente in $m \geq 0$, quindi se $G_h(0) < 1$ non potrà esistere un $m^* > 0$ t.c. $G_h(m^*) = 1$. Si denoti ora con h_c il valore critico t.c. $\mathbb{E} \left[\frac{1}{h_c+v_1} \right] = 1$. Si ha che per $h < h_c$ si ha $G_h(0) = \mathbb{E} \left[\frac{1}{h+v_1} \right] > \mathbb{E} \left[\frac{1}{h_c+v_1} \right] = 1$, e quindi esiste una soluzione di sopravvivenza. Si può mostrare che $h_c \geq -C + 1$, infatti $1 = \mathbb{E} \left[\frac{1}{h_c+v_1} \right] \geq \mathbb{E} \left[\frac{1}{h_c+C} \right] = \frac{1}{h_c+C}$.

Si verifica ora l'invertibilità di $\mathbb{E} \left[\frac{1}{m^*+h+v_1} \right] - 1$ rispetto alla variabile m^* . Per farlo si calcola la derivata della funzione $G_h(m^*) - 1$ rispetto a m^* , e se questa è non nulla si conclude per il teorema di Dini che si può avere $m^* = f(P_{v_1}, h)$ (dove con P_{v_1} si intende, con un abuso di notazione, che m^* dipende dalla legge di v_1). Si calcola quindi:

$$\frac{\partial(\mathbb{E} \left[\frac{1}{m^*+h+v_1} \right] - 1)}{\partial m^*} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial \left(\frac{1}{m^*+h+v_1} \right)}{\partial m^*} \right] = \mathbb{E} \left[-\frac{1}{(m^*+h+v_1)^2} \right] < 0$$

(l'ultima disuguaglianza vale perché $-\frac{1}{(m^*+h+v_1)^2} < 0$ q.c.).

Quindi si ottiene l'unica soluzione $m^* = f(P_{v_1}, h) > 0$, e sostituendo si ottiene:

$$p_i^* = \frac{f(P_{v_1}, h)}{f(P_{v_1}, h) + h + v_i} > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Ricapitolando si richiede che la variabile v_1 sia limitata inferiormente e, definito $C := \inf(\text{supp}(v_1))$, si ha $h \geq -C$. Inoltre:

1. $-C \leq h < h_c$, esistono un equilibrio di estinzione e un unico equilibrio di sopravvivenza
2. $h \geq h_c$, esiste un unico equilibrio di estinzione

4.3 Stabilità

4.3.1 Stabilità dell'equilibrio di estinzione

Si sfrutterà il teorema 2.8 per dimostrare la condizione per la stabilità asintotica dell'equilibrio di estinzione. Si calcola ora $J_n := \frac{\partial f_n(p)}{\partial p} |_{p=0}$ con $f_{n,i}(p) = -(h+v_i)p_i + (1-p_i) \sum_{j=1}^n \frac{p_j}{n}$. Separando i contributi diagonali da quelli non diagonali si trova:

$$J_{n,ii} = \left(-(h+v_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i + \frac{1}{n} \right)_{p=0} = -(h+v_i) + \frac{1}{n}$$

$$J_{n,ij} = \frac{1}{n} \quad \forall i \neq j$$

Si ottiene quindi $J_{n,ij} = -(v_i+h)\delta_{ij} + \frac{1}{n}$. Si calcola ora lo spettro della matrice jacobiana, e se questo è composto da autovalori con parte reale negativa, allora per il teorema 2.8 si ha la stabilità dell'equilibrio di estinzione. Si osserva che la matrice J_n si può scrivere come somma della matrice diagonale aleatoria $D_n = -\text{diag}(v_i+h)$ e della matrice che rappresenta il campo medio K_n . Si sfrutta il seguente teorema:

Teorema 4.2 (Teorema di interlacciamento di Weyl). *Siano $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ matrici reali simmetriche, e si indichino con $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$ gli autovalori ordinati di A (e analogamente per B e per $A + B$). Allora, se $i + j \geq n + 1$ si ha:*

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \geq \lambda_{i+j-n}(A + B)$$

Altrimenti, se $i + j \leq n + 1$ si ha:

$$\lambda_i(A) + \lambda_j(B) \leq \lambda_{i+j-1}(A + B)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in *Golub et Van Loan* [12] □

Si osserva che la matrice K ha rango 1 e quindi $n - 1$ autovalori nulli; infatti si ha che $n = \dim(K_n) = \text{rank}(K_n) + \dim(\ker(K_n)) = 1 + \dim(\ker(K_n))$. Inoltre l'altro autovalore è uguale a 1, infatti $K_n(1, \dots, 1)^T = (1, \dots, 1)^T$.

Sfruttando la seconda disuguaglianza del teorema di Weyl e ponendo $i = 1, \dots, n - 1, j = 1$ e ricordando che $\lambda_1(K_n) = 0$, si ha $\lambda_i(J_n) \geq \lambda_i(D_n) + \lambda_1(K_n) = \lambda_i(D_n)$. Sfruttando ora la prima disuguaglianza con $j = n - 1$ si ha $\lambda_{i+1}(J_n) \geq \lambda_i(D_n) + \lambda_{n-1}(K_n) = \lambda_i(D_n)$. Si ha quindi:

$$\lambda_1(D_n) \leq \lambda_1(J_n) \leq \lambda_2(D_n) \leq \dots \leq \lambda_{n-1}(J_n) \leq \lambda_n(D_n)$$

I primi $n - 1$ autovalori dello jacobiano sono compresi fra il minimo e il massimo degli autovalori di D_n ; poiché D_n è una matrice diagonale, i suoi autovalori sono banalmente le entrate diagonali della matrice, cioè $\lambda_i(D_n) = -(v_i + h)$. Facendo il limite termodinamico si trova che $\lambda_i(J_n) \in -h - \text{supp}(v_1) \quad \forall i \in \{1, \dots, n - 1\}$, e quindi con le condizioni imposte al capitolo precedente si ha che questi autovalori sono sempre negativi.

Si cerca ora un'espressione per l'autovalore maggiore, cioè $\lambda_n(J_n)$, che per il teorema di Weyl è tale che $\lambda_n(J_n) \geq \lambda_n(D_n)$; si tratterà qui il caso $\lambda_n(J_n) > \lambda_n(D_n)$, dato che il caso $\lambda_n(J_n) = \lambda_n(D_n)$ non fornirebbe condizioni in più a quelle già fornite. Si userà il seguente lemma:

Lemma 4.1. *Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice invertibile e $u, w \in \mathbb{R}^n$ due vettori, allora:*

$$\det(A + uw^T) = \det(A)(1 + w^T A^{-1}u)$$

Poiché $\bar{\lambda}_n := \lambda_n(J_n) > \lambda_n(D_n)$ si ha $\bar{\lambda}_n \neq -(v_i + h)$; sfruttando il lemma e denominando con $A := -\text{diag}(\bar{\lambda}_n + v_i + h)$ (si osserva che A è una matrice diagonale senza autovalori nulli ed è quindi invertibile) e con $u^T = w^T = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$. Si ha:

$$0 = \det(J_n - \bar{\lambda}_n I_n) = \det(A) \left(1 + \frac{1}{n}(1, \dots, 1)A^{-1}(1, \dots, 1)^T \right)$$

Poiché $\det(A) = \prod_{i=1}^n (-\bar{\lambda}_n - v_i - h) \neq 0$ per ipotesi, si ha che $\bar{\lambda}_n$ è un autovalore per la matrice J_n se e solo se rispetta $1 + \frac{1}{n}(1, \dots, 1)A^{-1}(1, \dots, 1)^T = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\lambda}_n + v_i + h} = 0$, e cioè se

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{\lambda}_n + v_i + h} \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E} \left[\frac{1}{\bar{\lambda}_n + v_1 + h} \right] = G_h(\bar{\lambda}_n) = 1$$

(Si è potuto applicare il teorema dei grandi numeri perché il denominatore non è mai nullo). Bisogna quindi trovare $\bar{\lambda}_n$ tale che $G_h(\bar{\lambda}_n) = 1$. Si osserva che questo problema è l'analogo dell'equazione 5, quindi in particolare si ha:

1. $-C \leq h < h_c$, esiste una soluzione positiva per $\bar{\lambda}_n$ e quindi l'equilibrio di estinzione è instabile
2. $h > h_c$, esiste una soluzione negativa per $\bar{\lambda}_n$, ed essendo quest'ultimo l'autovalore maggiore, tutto lo spettro dello jacobiano è negativo e l'equilibrio di estinzione è stabile

Il caso $h = h_c$ si trascura perché di difficile trattazione nel caso di taglia infinita.

4.3.2 Stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza

Si studierà ora la stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza, ricordando che ciò significa essere nel regime $-C \leq h < h_c$. Si prosegue in modo analogo a quanto fatto per l'equilibrio di estinzione calcolando nel limite termodinamico lo jacobiano nell'equilibrio di sopravvivenza ω_n (e cioè tale che $m^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} \neq 0$; si ricorda che $\omega_n \gg 0^n$, infatti $\omega_{n,i} = \frac{m^*}{m^* + h + v_i}$). Si calcoli quindi $\xi_n := \frac{\partial f_n(p)}{\partial p} \big|_{p=\omega_n}$ con $f_n(p)$ come sopra. Si ha quindi:

$$\xi_{n,ii} = \left(-(h + v_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_{n,i} + \frac{1 - \omega_{n,i}}{n} \right) = -(h + v_i + m^*) + \frac{h + v_i}{n(h + v_i + m^*)}$$

$$\xi_{n,ij} = \left(\frac{1 - \omega_{n,i}}{n} \right) = \frac{h + v_i}{n(h + v_i + m^*)} \quad \forall i \neq j$$

cioè si può scrivere $\xi_n = \Delta_n + A_n$ dove $\Delta_n = -\text{diag}(m^* + h + v_i)$ è una matrice diagonale quasi certamente negativa e $A_n = \left[\frac{h+v_i}{n(h+v_i+m^*)} \right]_{ij}$ è la matrice di campo medio riscalata ed è quasi certamente non-negativa e di rango 1. Si cerca di utilizzare le stesse tecniche del caso dell'equilibrio di estinzione, e cioè il teorema di Weyl per perturbazioni di rango 1. Bisogna però stare attenti perché né ξ_n né A_n sono matrici simmetriche; sarà quindi necessario trovare una matrice di cambio di base opportuna.

Si osserva che si può trattare il caso $h + v_1 > 0$ quasi certamente; infatti se $I = \{i \in \{1, \dots, n\} : h + v_i = 0\} \neq \emptyset$, si avrebbe $\xi_{n,ij} = -m^* \delta_{ij} \quad \forall i \in I$, e quindi per il teorema di Laplace sul calcolo dei determinanti si avrebbe $Sp(\xi_n) = Sp(M) \cup \{-m^*\}$, dove M è la matrice di dimensione $n - |I|$ ottenuta rimuovendo da ξ_n le colonne e le righe indicizzate da elementi di I , e che in particolare ha la stessa forma di $\xi_{n-|I|}$ ma con la condizione $h + v_j \neq 0$; inoltre l'autovalore $-m^*$ è negativo, quindi tutta l'informazione sulla stabilità dell'equilibrio è contenuta in $Sp(M)$. Si osserva anche che nel limite termodinamico M ha dimensione non nulla perché si è fatta l'ipotesi di v_1 non costante. Quindi a meno di riscaldare la matrice escludendo alcune righe e colonne, si tratterà il caso $h + v_i \neq 0$.

Si definisca per semplicità di notazione la successione di variabili aleatorie $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ con $Y_i = \frac{h+v_i}{m^*+h+v_i}$. Si definisca la matrice $S_n := \text{diag}(\sqrt{Y_i})$; si osserva che questa matrice è tale che $\tilde{A}_n := S_n^{-1} A_n S_n$ sia una matrice simmetrica (esiste l'inversa di S_n perché ci si è ristretti al caso $h + v_i \neq 0$). Infatti $\tilde{A}_{n,ij} = \frac{1}{n\sqrt{Y_i}} Y_i \sqrt{Y_j} = \frac{1}{n} \sqrt{Y_i Y_j} = \tilde{A}_{n,ji}$; $\tilde{A}_n$ è una matrice di rango 1 come A_n perché le sue righe sono multipli del vettore $(\sqrt{Y_1}, \sqrt{Y_2}, \dots, \sqrt{Y_n})$. Inoltre si ha $S_n^{-1} \Delta_n S_n = S_n^{-1} S_n \Delta_n = \Delta_n$ perché le matrici diagonali commutano, e quindi anche $\tilde{\xi}_n := S_n^{-1} \xi_n S_n$ è una matrice simmetrica.

Rimane da dimostrare che con questo cambio di base lo spettro rimane uguale.

$$\begin{aligned} \det(\tilde{\xi}_n - \lambda I_n) &= \det(S_n^{-1} \xi_n S_n - S_n^{-1} S_n \lambda I_n) = \det(S_n^{-1} (\xi_n - \lambda I_n) S_n) \\ &= \det(S_n^{-1}) \det(\xi_n - \lambda I_n) \det(S_n) = \det(\xi_n - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Si applica quindi il teorema di interlacciamento di Weyl agli autovalori della matrice $\tilde{\xi}_n = \Delta_n + \tilde{A}_n$ che sono uguali a quelli della matrice ξ_n . Si trova quindi che i primi $n - 1$ autovalori di ξ_n sono contenuti nel supporto di $-(h + v_1 + m^*)$, e sono quindi negativi. Bisogna quindi considerare l'autovalore $\bar{\lambda}_n \notin \text{supp}(-(h + v_1 + m^*))$ per fare conclusioni sulla stabilità dell'equilibrio di sopravvivenza.

Si sfrutta nuovamente il lemma 4.1 e stavolta si definisce:

$$A := -\text{diag}(\bar{\lambda}_n + v_i + h + m^*)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, \dots, 1)^T$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{h + v_1}{(h + v_1 + m^*)}, \frac{h + v_2}{(h + v_2 + m^*)}, \dots, \frac{h + v_n}{(h + v_n + m^*)} \right)^T$$

Si può quindi risolvere:

$$0 = \det(\xi_n - \bar{\lambda}_n I_n) = \det(A) \left(1 + \frac{1}{n}(1, \dots, 1)A^{-1}u \right)$$

Come prima $\det(A) \neq 0$ per ipotesi, quindi si ha $1 = -\frac{1}{n}(1, \dots, 1)A^{-1}u$, e cioè:

$$1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h + v_i}{(h + v_i + m^* + \bar{\lambda}_n)(h + v_i + m^*)} \xrightarrow{q.c.} \mathbb{E} \left[\frac{h + v_1}{(h + v_1 + m^* + \bar{\lambda}_n)(h + v_1 + m^*)} \right]$$

Si è applicato il teorema dei grandi numeri perché $\frac{h+v_i}{(h+v_i+m^*+\bar{\lambda}_n)(h+v_i+m^*)} \leq \frac{1}{(h+v_i+\bar{\lambda}_n)} \in \mathbb{L}^1$. Si definisce $H_{h,m^*}(\bar{\lambda}_n) := \mathbb{E} \left[\frac{h+v_1}{(h+v_1+m^*+\bar{\lambda}_n)(h+v_1+m^*)} \right] \leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{(h+v_1+\bar{\lambda}_n)} \right] = G_h(\bar{\lambda}_n)$. $H_{h,m^*}(\bar{\lambda}_n)$ è decrescente per $\bar{\lambda}_n \geq 0$, quindi si fa un ragionamento simile a quanto fatto nell'equazione 5 e si calcola $H_{h,m^*}(0)$, e cioè:

$$\begin{aligned} H_{h,m^*}(0) &= \mathbb{E} \left[\frac{h + v_1}{(h + v_1 + m^*)^2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{(h + v_1 + m^*) - m^*}{(h + v_1 + m^*)^2} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{(h + v_1 + m^*)} \right] - \mathbb{E} \left[\frac{m^*}{(h + v_1 + m^*)^2} \right] \\ &= G_h(m^*) - \mathbb{E} \left[\frac{m^*}{(h + v_1 + m^*)^2} \right] < G_h(m^*) = 1 \end{aligned}$$

dove nell'ultima riga si è sfruttato il fatto che il secondo addendo fosse positivo e che per ipotesi $G_h(m^*) = 1$. Si conclude che $\bar{\lambda}_n < 0$, e quindi l'equilibrio di sopravvivenza è sempre asintoticamente stabile quando esiste.

5 Modello aleatorio con interazione di tipo primi vicini

Si modella ora la matrice di migrazione in maniera più realistica. Si ipotizza che i siti, numerati da 1 a n , siano connessi solo al sito precedente e al sito successivo, e che il tasso di migrare dal sito i al sito $i + 1$ e quello al sito $i - 1$ siano uguali. Si osserva che il sito 1 e il sito n hanno un solo vicino; infatti il grafo che collega i siti dell'habitat è topologicamente una retta. Questo porta a definire la matrice di migrazione nel sistema a n siti come $(K_n)_{ij} = 1/2(\delta_{i,j-1} + \delta_{i,j+1})$, cioè una matrice con $1/2$ sulle codiagonali e nulla altrimenti. Quindi $\dot{p}_n = (V_n + (I - \text{diag}(p_n))K_n)p_n$ come prima. Si studierà il modello nel limite critico, cioè per $\alpha(V_n + K_n) \rightarrow 0^+$, e nel limite termodinamico $n \rightarrow \infty$. Nel capitolo 3.3 si è dimostrato come in questo limite l'equilibrio di sopravvivenza ω_n si approssima con l'autovettore corrispondente a $\alpha(L_n) = \alpha(V_n + K_n) = \delta$, e cioè $\omega_n \approx c\psi_1$ dove $L\psi_1 = \delta\psi_1$ con c opportuna costante. Questo modello è l'analogo dei sistemi dinamici di operatori di Schrödinger aleatori su spazi discreti.

5.1 Operatori di Schrödinger aleatori e localizzazione di Anderson: un'analogia fisica

Il formalismo degli operatori di Schrödinger aleatori è stato introdotto per modellizzare l'hamiltoniana di sistemi cristallini in cui si trascura l'interazione reciproca degli atomi del cristallo (questi atomi sono ipotizzati fermi) e in cui sono presenti delle impurità disposte casualmente (l'aleatorietà di queste impurità non è intrinseca delle stesse, ma solo del fatto che la loro posizione dipende da una molteplicità di fattori ignoti). Si fa un'ipotesi di modello *tight binding*, cioè in cui l'interazione atomo-elettrone è molto forte, e quindi l'onda dell'elettrone ha supporto discreto e può vivere solo sui siti del reticolo di dimensione d . Si costruiscono quindi le funzioni d'onda non sullo spazio di Hilbert L^2 delle funzioni quadrato-integrabili, ma sullo spazio

$$l^2 := \left\{ u : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2 < \infty \right\}$$

e cioè lo spazio delle successioni quadrato-sommabili. Si definisce la norma di queste successioni come $\|u\| := \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |u(n)|^2}$. Se si lavora con funzioni d'onda normalizzate $\|u\| = 1$ il valore $\|u(n_0)\|$ indica la probabilità che la funzione d'onda dell'elettrone si trovi nel punto n_0 del reticolo (è una generalizzazione della legge di Born). Trascurando l'interazione elettrone-elettrone (modello a particelle indipendenti), si ha che l'hamiltoniana H del sistema sarà costituita dall'opposto del laplaciano discreto H_0 , definito dalla sua azione su $u(n)$ come:

$$H_0 u(n) = - \sum_{\|m-n\|_1=1} u(m) - u(n) = 2du(n) - \sum_{\|m-n\|_1=1} u(m)$$

dove con $\|m-n\|_1 = 1$ si intende che $\sum_{i=1,\dots,d} |m_i - n_i| = 1$, cioè che m e n sono siti adiacenti sul reticolo.

La parte potenziale V dell'hamiltoniano è invece l'operatore moltiplicativo tale che $Vu(n) = V(n)u(n)$ dove $V(n)$ sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite.³ Questo modello viene chiamato modello di Anderson.

Teorema 5.1. *Lo spettro di H_0 è $Sp(H_0) = [0, 4d]$.*

Dimostrazione. Si definisce l'operatore trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ tramite la sua azione $(\mathcal{F}u)(k) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} u(n)e^{-in \cdot k} = \hat{u}(k)$ con $k \in [-\pi, \pi]^d$. Si osserva che la trasformata di Fourier dell'operatore $\hat{H}_0 := \mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}$ ha lo stesso spettro di H_0 perché $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$, e quindi $\mathcal{F}$ è un operatore unitario. Si calcola ora:

$$\begin{aligned} \widehat{H_0}u(k) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} H_0 u(n) e^{-in \cdot k} \\ &= 2d \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{-in \cdot k} u(n) - \sum_{i=1,\dots,d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} [u(n + e_i) + u(n - e_i)] e^{-in \cdot k} \\ &= \left[2d - \sum_{i=1,\dots,d} (e^{-ie_i \cdot k} + e^{ie_i \cdot k}) \right] \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} e^{-in \cdot k} u(n) \\ &= 2 \left(d - \sum_{i=1,\dots,d} \cos(k_i) \right) \hat{u}(k) := \hat{h}_0(k) \hat{u}(k) \end{aligned}$$

Si osserva che $\mathcal{F}(H_0 u)(k) = (\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u)(k) = (\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1})(k)\hat{u}(k)$, quindi $(\mathcal{F}H_0\mathcal{F}^{-1})(k) = \hat{h}_0(k)$. Di conseguenza H_0 ha lo stesso spettro dell'operatore moltiplicativo $\hat{h}_0(k)$, che al variare di k varia in maniera continua fra 0 e $4d$. $\square$

Teorema 5.2. *Lo spettro dell'operatore $H = H_0 + V$ è $Sp(H) = [0, 4d] + \text{supp}(V(1))$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si trova in Kirsch ([13]). $\square$

Si è quindi trovato lo spettro dell'operatore hamiltoniano. La ricerca teorica su questi operatori ha trovato che lo spettro si può separare in parte *pure point*, assolutamente continua e singolarmente continua. In particolare se un operatore ha spettro *pure point*, le soluzioni sono localizzate, cioè nel tempo rimangono quasi certamente in un sottoinsieme finito dei siti del reticolo dato che la funzione d'onda decade esponenzialmente nello spazio (questo fenomeno è detto localizzazione di Anderson); mentre nel caso di spettro assolutamente continuo le autofunzioni non appartengono a l^2 (sono autofunzioni nel senso generalizzato) e corrispondono fisicamente a onde che attraversano il reticolo.⁴ La ricerca

³In realtà è possibile rilassare la condizione di indipendenza nella condizione di ergodicità, ovvero la media sugli ensembles è uguale alla media temporale su tempi lunghi. Questa possibilità è particolarmente utile nello studio dei cristalli, dove spesso non si ha la condizione di indipendenza, perché ad esempio un'impurità può occupare più siti, mentre si ha che un'impurità a Milano non influenza un cristallo a Padova (l'indipendenza a lungo raggio è una condizione a metà fra l'ergodicità e l'indipendenza).

⁴Le autofunzioni nel caso di spettro singolarmente continuo hanno un'interpretazione fisica più complessa e rappresentano stati di transizione, che però non si manifestano nel nostro caso.

matematica sugli operatori di Anderson è ancora aperta: si è riuscito a dimostrare che gli operatori in dimensione 1 hanno spettro puramente *pure point* indipendentemente da quanto piccolo sia il rumore aleatorio, e le soluzioni sono quindi localizzate, mentre per dimensioni maggiori la situazione è più sfumata; si è riusciti a dimostrare ad esempio che per un modello di Anderson bidimensionale con variabili aleatorie i.i.d. con densità di probabilità limitata e a supporto compatto vicino ai bordi dello spettro questo sia *pure point*. In dimensione $d \geq 3$ si ipotizza che gli operatori abbiano anche spettro assolutamente continuo, ma non si è ancora riusciti a dimostrarlo. Questa ipotesi deriva dal fatto che il modello di Anderson rappresenta bene il mondo reale dei cristalli, dove si osserva che per rumore basso esistono i metalli, cioè cristalli in cui l'elettrone può propagarsi come un'onda monocromatica e quindi non localizzata.

5.2 Fenomeni di sopravvivenza localizzata nel limite critico

Si osserva che $K := \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ (analogamente anche le altre matrici quando si omette il pedice sono da intendersi nel limite termodinamico) è semplicemente l'operatore H_0 del modello di Anderson in dimensione 1 traslato. Infatti in $d = 1$ si ha $(H_0 u)(n) = 2u(n) - u(n+1) - u(n-1)$, la cui espressione matriciale è $(H_0)_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$. Ricordando che $K = 1/2(\delta_{i,j+1} + \delta_{i,j-1})$ si ottiene $K = -1/2(H_0 - 2I)$, e quindi $L = -1/2H_0 + I + V$. Per il teorema 5.1 si ottiene $Sp(K) = [-1, 1]$ e per il teorema 5.2 $Sp(L) = [-1 - h, 1 - h] - \text{supp}(v_1)$. Chiamato $C := \inf \text{supp}(v_1)$ come già fatto in precedenza, e $h_C := 1 - C$ si ottiene che:

1. per $h > h_C$, per q.o. realizzazione di $(v_i)_i$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per il modello con $n \geq n_0$ siti esiste solamente l'equilibrio di estinzione e questo è globalmente stabile
2. per $h < h_C$, per q.o. realizzazione di $(v_i)_i$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. per il modello con $n \geq n_0$ siti esiste un equilibrio di estinzione instabile e un unico equilibrio di sopravvivenza positivo e globalmente stabile per dati iniziali diversi da 0^n

Guidati dalle simulazioni (si veda la sezione 5.4) si osserva che per h molto vicino al punto critico la soluzione si concentra in poche regioni e, focalizzandosi su queste regioni, si osserva che la soluzione è molto vicina ad un autovettore dell'operatore di Anderson (di volume infinito). Si lavora quindi con n grande ma finito: il sistema finito ha un punto critico $h_{C,n}$ che dipende da n e dalla realizzazione di (v_i) . Si sviluppa quindi un argomento di perturbazioni per $h \rightarrow h_{C,n}^-$: per h sufficientemente vicino a $h_{C,n}$ l'evoluzione linearizzata avrà un solo autovalore positivo, con ψ_1 l'autovettore corrispondente. Si ottiene quindi $\omega \approx c\psi_1$ (si veda il teorema 3.6). Rimane da calcolare la costante c .

5.3 Sull'equilibrio di sopravvivenza vicino al punto critico

Si calcolerà ora la costante c di cui prima in un sistema a taglia finita di n siti.

Si ricorda che la matrice L è una matrice simmetrica, quindi esiste una base ortonormale $\{\psi_k\}_{k \in \{1, \dots, n\}}$ tale che $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$L\omega = c_1 L\psi_1 + \sum_{k>1} c_k L\psi_k = c_1 \delta\psi_1 + \sum_{k>1} c_k \lambda_k \psi_k$$

$$\text{diag}(\omega)K\omega = c_1^2 \text{diag}(\psi_1)K\psi_1 + o(\delta^2)$$

Eguagliando i due termini e proiettandoli su ψ_1^T si ha:

$$\delta c_1 = c_1^2 \langle \psi_1 | \text{diag}(K\psi_1) | \psi_1 \rangle + o(\delta)$$

Ricordando $L\psi_1 = V\psi_1 + K\psi_1 = \delta\psi_1$ si ha $(K\psi_1)_i = (h + v_i + \delta)\psi_{1,i} \approx (h + v_i)\psi_{1,i}$ si ottiene

$$c = \frac{\delta}{\sum_i (h + v_i)\psi_{1,i}^3} + o(\delta)$$

Nelle simulazioni può capitare che esistano più autovalori positivi, ad esempio m autovalori (m sarà più o meno grande in base a quanto il valore di h si discosta da h_C). In questo caso $c_{m+1}, \dots, c_n$ sono trascurabili rispetto a $c_1, \dots, c_m$, quindi si ha:

$$\sum_{i=1}^m c_i \lambda_i \psi_i = \sum_{i=1}^m c_i^2 \text{diag}(K \psi_i) \psi_i + o(\lambda_1^2)$$

dove si sono trascurati i termini incrociati perché gli autovettori sono fortemente localizzati. Proiettando su un ψ_i^T con $1 \leq i \leq m$ e ricordando come prima $(K \psi_i)_l \approx (h + v_l) \psi_{i,l}$ si ottiene:

$$c_i \lambda_i = c_i^2 \sum_{l=1}^n (h + v_l) \psi_{i,l}^3$$

e quindi si ottiene:

$$c_i = \frac{\lambda_i}{\sum_l (h + v_l) \psi_{i,l}^3}$$

L'ipotesi iniziale era $\omega = \sum_{i=1}^m c_i \psi_i + o(\lambda_1^2)$. Si ottiene quindi:

$$\omega \approx \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i \psi_i}{\sum_l (h + v_l) \psi_{i,l}^3} \quad (6)$$

5.4 Simulazioni della sopravvivenza localizzata

Sono state fatte delle simulazioni con un programma Root per mostrare questi fenomeni di localizzazione all'avvicinarsi al punto critico. Si è costruito un habitat costituito da 500 siti. Il dato iniziale è un vettore di occupazione che vale 0.1 in ogni sito, anche se il dato iniziale è totalmente ininfluente. Per trovare il vettore di equilibrio si è usato un algoritmo iterativo tale per cui $p_i(n) = (Kp(n-1))_i / ((Kp(n-1))_i - h - v_i)$. Si ha quindi $p(n) = H(p(n-1))$ (si veda l'equazione 3). L'algoritmo converge al valore di equilibrio del sistema. Sono state fatte 100000 iterazioni dell'algoritmo. Oltre alla condizione iniziale (in verde tratteggiato) e all'equilibrio di sopravvivenza (in nero) si sono raffigurati anche le soluzioni dell'algoritmo prese a tempi esponenziali.

Si è scelto inizialmente di modellizzare v_1 come una variabile esponenziale di parametro 1. L' h critico è uguale a $1 - \inf \text{supp}(v_1)$, quindi uguale a 1. Si osserva che ci si trova nel limite critico anche a valori sensibilmente più bassi di 1, per via del fatto che il campione ha taglia finita.

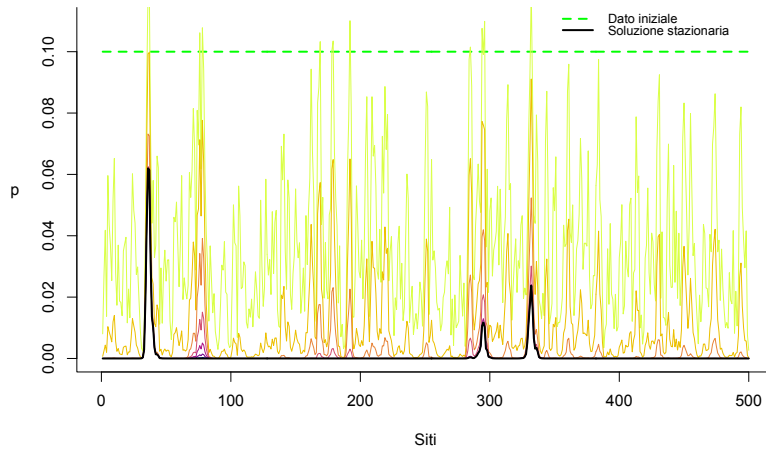
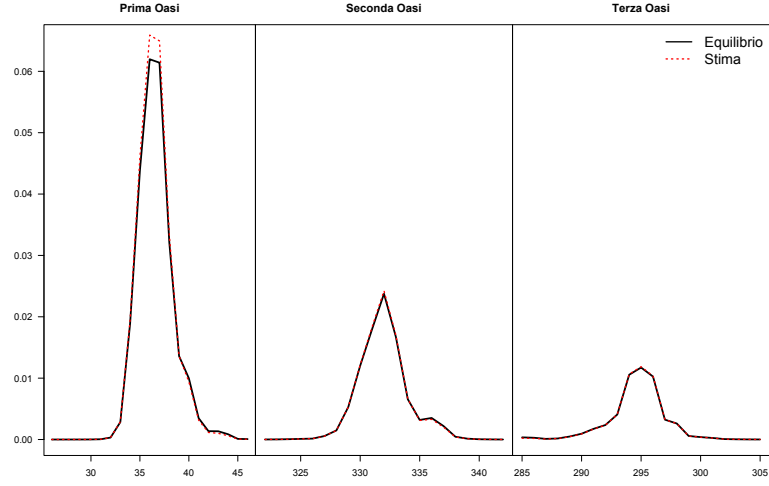


Figura 1: $v_1 \sim \text{Exp}(1)$, $h_C = 1$, $h = 0.7$

Si possono osservare tre oasi di sopravvivenza ben distinte e localizzate. Si può testare quindi la stima dell'equazione 6. Si mostra quindi il plot nella prossimità delle tre oasi che mostra accordo fra la soluzione ω e la stima $\omega_{stimata}$. Si calcola che $\|\omega\|_2 \simeq 0.114$ e $\|\omega - \omega_{stimata}\|_2 \simeq 0.006$, ottenendo quindi un errore di circa il 5%.



Si può modellizzare la variabile v_1 in un altro modo, e cioè come una variabile Bernoulliana che può assumere i valori 1 e 2 con probabilità $1/2$.

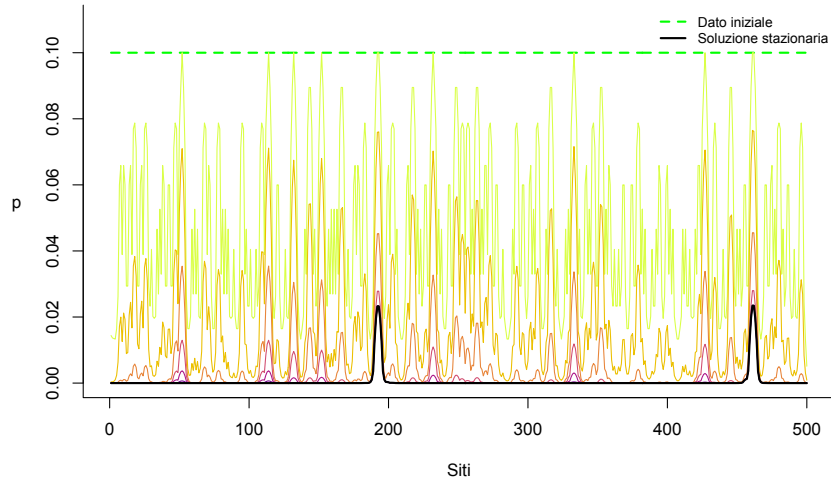


Figura 2: $v_1 \sim \text{Bern}(0.5)$, $h_C = 1$, $h = 0.9$

Per confronto, tornando a della v_i esponenziali di parametro 1, si raffigura ora l'equilibrio nel caso di interazione di tipo *mean field*. Si può osservare come anche nel limite critico l'equilibrio sia completamente delocalizzato.

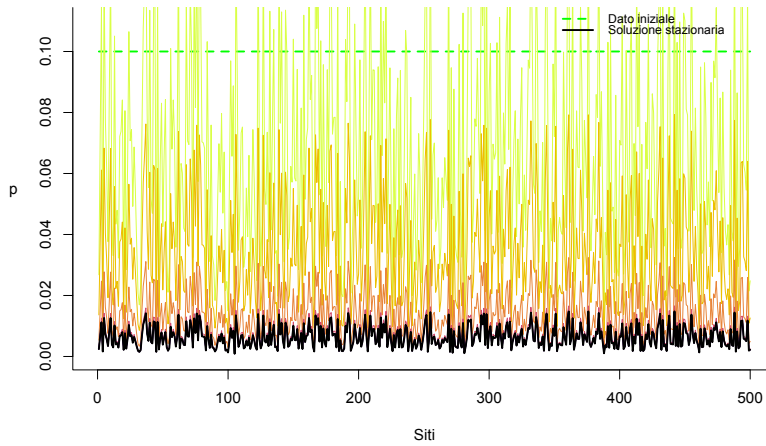


Figura 3: $v_1 \sim \text{Exp}(1)$, $h_C = 1$, $h = 0.43$

Non deve sorprendere questo fenomeno di delocalizzazione: lo spettro dell'operatore di Anderson nel caso *mean field* non è localizzato e d'altro canto, anche in questo caso, la soluzione di sopravvivenza che si osserva corrisponde precisamente all'autovettore con autovalore massimale dell'operatore di Anderson associato.

6 Appendice

6.1 Dimostrazione del teorema di Varga

L'enunciato del teorema di Varga si trova in Varga ([14]) (anche se esposto in forma leggermente diversa). Si ripropone qui di seguito la dimostrazione dell'enunciato d'interesse alla presente tesi.

Teorema 6.1. *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Se $\rho(A) < 1$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$*

Dimostrazione. Sia D la forma di Jordan della matrice A e J la matrice tale per cui $A = JDJ^{-1}$. Allora $A^n = JB^nJ^{-1}$.

Si calcoli ora il limite di B^n ; si nota come ogni blocco $k \times k$ corrispondente all'autovalore λ di A sarà composto di 0 e di potenze di λ che derivano dalla formula per il binomio di Newton, con l'esponente minore uguale a $n - k$. Poiché $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \rho(A) < 1$, quindi nel limite $B^n \rightarrow 0_{n \times n}$, e di conseguenza $A^n \rightarrow 0_{n \times n}$. $\square$

Teorema 6.2 (Espansione di Neumann). *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Se $\rho(A) < 1$ allora $I - A$ è una matrice invertibile e $(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$.*

Dimostrazione. Sia $S_m := \sum_{i=0}^m A^i$. Moltiplicando entrambi i termini per $I - A$ si ha:

$$(I - A)S_m = (I - A) \sum_{i=0}^m A^i = \sum_{i=0}^m A^i - \sum_{i=0}^{m+1} A^i = I - A^{m+1}$$

e prendendo il limite:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (I - A)S_m = \lim_{m \rightarrow \infty} I - A^{m+1} = I$$

quindi $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$ è l'inversa di $(I - A)$. $\square$

Teorema 6.3. *Una matrice di Metzler M è stabile se e solo se è invertibile e la sua inversa è non-positiva.*

Dimostrazione. Sia $M = A - sI$ con $s > 0$ abbastanza grande da rendere A una matrice reale non-negativa. Per il teorema di Perron-Frobenius (2.1) esiste un autovalore di A uguale a $\lambda_M = \rho(A) = \alpha(A)$.

Se M è stabile si ha quindi $\alpha(M) = \rho(A) - s < 0$, e quindi $\rho\left(\frac{A}{s}\right) < 1$; per il teorema 6.2 esiste l'inversa di $I - \frac{A}{s}$. Poiché $M = A - sI = -s\left(I - \frac{A}{s}\right)$ esiste anche l'inversa di M che è uguale a:

$$M^{-1} = -\frac{1}{s} \left(I - \frac{A}{s} \right)^{-1} = -\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{A}{s} \right)^i$$

e poiché A è non-negativa, M^{-1} è non-positiva.

Se ora invece esiste M^{-1} non-positiva deve esistere anche l'inversa di $I - \frac{A}{s}$ e si recupera la stabilità di M . $\square$

Teorema 6.4 (Teorema di Varga). *Sia M una matrice reale di Metzler e $M = \Lambda + N$ una sua decomposizione regolare (Λ è una matrice di Metzler stabile e N è una matrice non-negativa). Allora M è una matrice di Metzler stabile se e solo se $\rho(-\Lambda^{-1}N) < 1$.*

Dimostrazione. Si riscrive $M = \Lambda + N = \Lambda(I + \Lambda^{-1}N)$ (si ricorda che esiste l'inversa di Λ matrice di Metzler stabile per il teorema 6.3). M è invertibile se e solo se anche $I + \Lambda^{-1}N$ è invertibile, e quindi se e solo se $\rho(-\Lambda^{-1}N) < 1$.

Rimane da dimostrare la non-positività di M^{-1} per ottenere la stabilità di M e concludere la dimostrazione. Si calcola ora:

$$M^{-1} = (I + \Lambda^{-1}N)^{-1}\Lambda^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\Lambda^{-1}N)^i \Lambda^{-1}$$

M^{-1} è non-positiva perché $-\Lambda^{-1}N$ è non-negativa e Λ^{-1} è non-positiva. □

Riferimenti bibliografici

- [1] Ilkka Hanski, *Metapopulation dynamics*, Nature vol. 396, Pagine 41-49, 1998
- [2] Ilkka Hanski, *A practical model of metapopulation dynamics*, Journal of animal ecology, Pagine 151-160, 1994
- [3] Richard Levins, *Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control*, Bulletin of the ESA vol. 15, Pagine 237-240, 1969
- [4] Ilkka Hanski, Otso Ovaskainen, *The metapopulation capacity of a fragmented landscape*, Nature vol. 404, Pagine 755-758, 2000
- [5] Bryan Grenfell, John Harwood, *(Meta) population dynamics of infectious diseases* Trends in ecology & evolution vol. 12, Pagine 395-399, 1997
- [6] Abdoul Aziz Fall, Abderrahman Iggidr, Gauthier Sallet, Jean-Jules Tewa, *Epidemiological models and Lyapunov functions*, Mathematical Modelling of Natural Phenomena vol. 2, Pagine 62-83, 2007
- [7] Henryk Minc, *Nonnegative Matrices*, Sezione 1.4, Teorema 4.1
- [8] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Sezione 4.1, Teorema 4.1
- [9] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Sezione 4.2, Teorema 4.4
- [10] Hassan K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Sezione 4.3, Teorema 4.7
- [11] Amos Maritan, *Lectures Notes on Infinite Range Metacommunity Model*
- [12] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Sezione 8.2, Teorema 8.1.5
- [13] Werner Kirsch, *An Invitation to Random Schrödinger Operators*, Sezione 3.3, Teorema 3.9
- [14] Richard S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Sezione 3.3, Teorema 3.13