

Università degli Studi di Padova
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA

**CONTROLLO DEL POSIZIONAMENTO
DELLA TESTINA DI LETTURA/SCRITTURA
DI UN HARD DISK**

Relatore: Prof.ssa Maria Elena Valcher

Laureanda: Irene Zorzan
N. di matricola: 610769 – INF

Anno Accademico 2011-2012

Padova, 28 settembre 2012

Un sincero ringraziamento alla Professoressa Maria Elena Valcher per l'entusiasmo e la passione con cui ha tenuto, insieme al Professor Mauro Bisiacco, il corso più bello della Triennale, per la costante disponibilità nei confronti miei e di tutti i suoi studenti, per aver reso gratificante e ricca di soddisfazioni la stesura di questo elaborato. Grazie.

Irene Zorzan

*C'è una forza motrice più forte del vapore,
dell'elettricità e dell'energia atomica: la volontà.*

[Albert Einstein]

Indice

Introduzione	9
1 Descrizione del sistema	11
1.1 Modello ingresso/uscita.....	12
1.2 Modello di stato.....	13
2 Analisi del sistema in catena aperta	15
2.1 Funzione di trasferimento.....	15
2.2 Stabilità e modi elementari.....	16
2.3 Risposta al gradino	16
2.4 Diagrammi di Bode	17
2.5 Diagramma di Nyquist	19
3 Specifiche di controllo e sistema retroazionato	20
3.1 Specifiche nel dominio del tempo	20
3.2 Sistema retroazionato	21
3.3 Specifiche nel dominio della frequenza	22
3.3.1 Margine di fase e pulsazione di taglio	22
3.3.2 Sensibilità al disturbo	24
4 Progetto del controllore	25
4.1 Considerazioni preliminari	25
4.2 Progetto analitico del controllore	25
4.2.1 Controllore di tipo I	26
4.2.2 Controllore di tipo PI.....	29
4.2.3 Controllore con rete anticipatrice	31
4.3 Progetto del controllore tramite SISO Design Tool	33
4.3.1 L'ambiente di lavoro SISO Tool	33
4.3.2 Controllo mediante il luogo delle radici	35
4.3.3 Controllo in frequenza	38
4.4 Confronto finale.....	40

5 Sensibilità alle variazioni parametriche	41
A Codice Matlab	43
B Sovraelongazione e tempo di assestamento per un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati	46
Bibliografia.....	49

Introduzione

Scopo di questa trattazione è applicare le conoscenze acquisite nel corso di Controlli Automatici per analizzare un sistema fisico, il servomeccanismo di posizionamento di un hard disk, e progettare un adeguato sistema di controllo.

Nella prima parte vengono presentati il modello ingresso/uscita e il modello di stato che descrivono il sistema meccanico preso in considerazione e viene condotta un'analisi del sistema in catena aperta. Nella seconda parte, una volta definite le specifiche di controllo nel dominio del tempo e nel dominio della frequenza, si passa alla sintesi del compensatore: si procede prima per via analitica, progettando un controllore di tipo I, uno di tipo PI e una rete anticipatrice con le tecniche apprese durante il corso di Controlli Automatici, e successivamente si utilizza l'interfaccia grafica SISO Design Tool per ottimizzare le prestazioni precedentemente ottenute. Infine, viene studiata la sensibilità del sistema alle variazioni parametriche.

Nel corso del lavoro si è cercato costantemente di affiancare alle nozioni teoriche apprese in aula l'utilizzo del programma di calcolo Matlab, sia in fase di analisi e verifica delle prestazioni sia in fase di progetto.

Capitolo 1

Descrizione del sistema



Figura 1.1: interno di un hard disk; in alto a destra: particolare della testina di lettura/scrittura

Un hard disk è un dispositivo di memoria di massa costituito fondamentalmente da uno o più dischi in alluminio o vetro, un motore attuatore e un braccio meccanico alla cui estremità sono situate delle testine di lettura/scrittura. I dischi, sui quali vengono memorizzati i dati, sono rivestiti di materiale ferromagnetico e ruotano ad una velocità che può raggiungere anche i 15000 giri al minuto. L'aria mossa dalla rotazione tiene sollevate le testine (due per ogni disco, una per lato), le quali durante il funzionamento “volano” alla distanza di poche decine di nanometri dalla superficie del disco per eseguire le operazioni di lettura e scrittura. Il posizionamento delle testine è controllato dal braccio meccanico e dal motore attuatore, costituito da un avvolgimento di resistenza R e induttanza L , situato alla base del braccio. Tale avvolgimento produce, se percorso da una corrente i , un campo magnetico che interagendo con dei magneti fissi genera la forza che sposta il braccio.



Figura 1.2: avvolgimento alla base del braccio meccanico

1.1 Modello ingresso/uscita

Facendo riferimento allo schema della figura sottostante introduciamo le equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema.

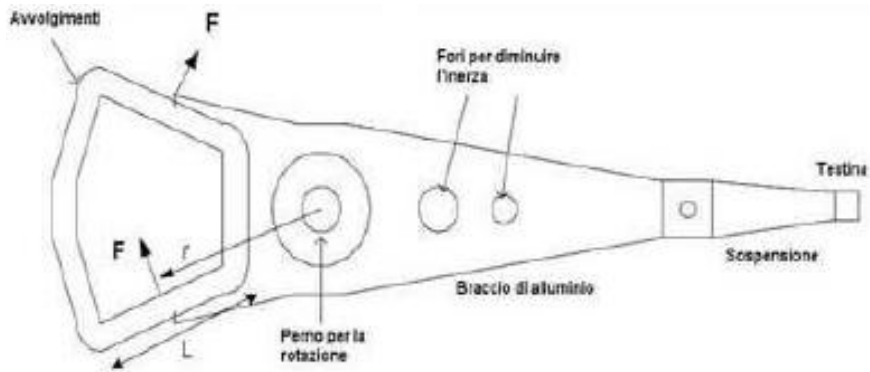


Figura 1.3: schema del braccio meccanico

Trattandosi di un fenomeno rotazionale è necessario utilizzare la legge dei momenti, secondo la quale la derivata rispetto al tempo del momento angolare coincide con il momento di tutte le forze applicate. Indicando con θ la posizione angolare della testina, il moto del braccio è determinato allora dalla equazione dinamica di equilibrio tra:

- la coppia motrice $\tau_m = K_i i$;
- la coppia resistente $\tau_r = C \frac{d\theta}{dt}$, dovuta ai cuscinetti che compongono lo snodo sul perno attorno al quale ruota il braccio;
- la coppia d'inerzia proporzionale all'accelerazione angolare secondo un fattore J (momento d'inerzia);
- il momento della forza elastica esercitata dal cavo flessibile che collega il braccio all'elettronica e agisce da molla di costante K_e .

Per quanto riguarda i segni dei vari termini, assunto come positivo il verso indotto dalla forza elettromotrice (ad esempio quello indicato dalla forza F in Figura 1.3), è sufficiente notare come la forza d'attrito dovuta ai cuscinetti, la forza elastica del cavo e la forza d'inerzia agiscono in senso contrario ad essa, opponendosi al movimento del braccio.

L'equazione differenziale che descrive il movimento del braccio risulta quindi:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \tau_r + K_e \theta = \tau_m$$

da cui possiamo esplicitare l'espressione della corrente che scorre nell'avvolgimento:

$$i = \frac{J}{K_i} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{K_i} \frac{d\theta}{dt} + \frac{K_e}{K_i} \theta \quad (1.1)$$

Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni al circuito equivalente del motore attuatore, rappresentato dalla serie di una resistenza R e di una induttanza L , è necessario tener conto:

- della caduta di tensione ai capi della resistenza $v_R = Ri$;
- della caduta di tensione ai capi dell'induttanza $v_L = L \frac{di}{dt}$;
- della tensione contro-elettromotrice provocata dalla rotazione delle spire del circuito nel campo generato dai magneti permanenti, $v_e = K_{fem} \dot{\theta}$;
- della tensione di alimentazione dell'avvolgimento v_s .

La dinamica delle variabili elettriche è descritta quindi dalla equazione differenziale:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + v_e = v_s \quad (1.2)$$

Derivando l'espressione (1.1) risulta:

$$\frac{di}{dt} = \frac{J}{K_i} \frac{d^3\theta}{dt^3} + \frac{C}{K_i} \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{K_e}{K_i} \frac{d\theta}{dt} \quad (1.3)$$

Infine sostituendo le (1.1) e (1.3) nella (1.2) si ottiene il seguente modello I/O a tempo continuo, lineare, tempo-invariante e causale:

$$\frac{LJ}{K_i} \frac{d^3\theta}{dt^3} + \left(\frac{LC}{K_i} + \frac{RJ}{K_i} \right) \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{LK_e}{K_i} + \frac{RC}{K_i} + K_{fem} \right) \frac{d\theta}{dt} + \frac{RK_e}{K_i} \theta = v_s \quad (1.4)$$

1.2 Modello di stato

E' possibile pervenire ad un modello di stato equivalente al modello I/O appena derivato introducendo opportune variabili ausiliarie. In particolare, indicando con $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T = [\theta \ \dot{\theta} \ i]^T$ le variabili di stato del sistema e con $u = v_s$ l'ingresso del sistema, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K_e}{J} x_1 - \frac{C}{J} x_2 + \frac{K_i}{J} x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{K_{fem}}{L} x_2 - \frac{R}{L} x_3 + \frac{u}{L} \end{cases}$$

che in forma matriciale diviene:

$$\dot{x} = Fx + Gu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_e}{J} & -\frac{C}{J} & \frac{K_i}{J} \\ 0 & -\frac{K_{fem}}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la posizione angolare x_1 della testina, si ottiene:

$$y = Hx = [1 \ 0 \ 0]x$$

Per determinare il punto di equilibrio x_{eq} del sistema in corrispondenza all'ingresso costante $u = \bar{v}_s$ imponiamo $\dot{x}_{eq} = 0$:

$$\begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = -\frac{K_e}{J}x_1 + \frac{K_i}{J}x_3 \\ 0 = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{u}{L} \end{cases}$$

e otteniamo così:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} x_{1eq} \\ x_{2eq} \\ x_{3eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \dot{\bar{\theta}} \\ \bar{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K_i}{K_e R} \bar{V}_s \\ 0 \\ \frac{\bar{V}_s}{R} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Tale espressione mette in relazione la posizione angolare di equilibrio della testina e i valori a regime della tensione di alimentazione dell'avvolgimento del motore e della corrente che in esso scorre.

Capitolo 2

Analisi del sistema in catena aperta

In questo capitolo ci dedicheremo allo studio del sistema in catena aperta. Per far ciò utilizzeremo per i parametri fisici precedentemente introdotti i valori riportati nella tabella sottostante.

Tutti i grafici riportati nel presente capitolo e nei successivi sono stati ottenuti tramite il programma di calcolo Matlab. Si rimanda all'Appendice A per la sequenza completa dei comandi utilizzati.

Resistenza	$R = 20 \Omega$
Induttanza	$L = 4 \cdot 10^{-3} H$
Costante di coppia motrice	$K_i = 10^4 N \cdot m/A$
Costante di coppia resistente	$C = 0.03 V \cdot m \cdot s/rad$
Momento d'inerzia	$J = 4 \cdot 10^{-5} Kg \cdot m^2/rad$
Costante elastica	$K_e = 800 N \cdot m/rad$
Costante di forza contro-elettromotrice	$K_{fem} = 10^{-3} V \cdot s/rad$

Tabella 2. 1: valori dei parametri fisici e relative unità di misura

2.1 Funzione di trasferimento

A partire dal modello ingresso/uscita (1.4) è immediato calcolare la funzione di trasferimento del sistema, che lega l'evoluzione forzata e l'ingresso nel dominio delle trasformate di Laplace:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_s(s)} = \frac{1}{\frac{LJ}{K_i} s^3 + \left(\frac{JR}{K_i} + \frac{LC}{K_i}\right) s^2 + \left(\frac{RC}{K_i} + \frac{LK_e}{K_i} + K_{fem}\right) s + \frac{RK_e}{K_i}}$$

ovvero:

$$G(s) = \frac{K_i}{LJs^3 + (JR + LC)s^2 + (RC + LK_e + K_{fem}K_i)s + RK_e}$$

Sostituendo i valori numerici la funzione di trasferimento in catena aperta diventa:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{10^4}{16 \cdot 10^{-8} s^3 + 9.2 \cdot 10^{-4} s^2 + 13.8s + 16 \cdot 10^3} = \\ &= 6.25 \cdot 10^{10} \cdot \frac{1}{s^3 + 5750s^2 + 86.25 \cdot 10^8 s + 10^{11}} \end{aligned}$$

2.2 Stabilità e modi elementari

Per studiare la stabilità del sistema applichiamo il criterio di Routh-Hurwitz al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento:

$$p(s) = LJs^3 + (JR + LC)s^2 + (RC + LK_e + K_{fem}K_i)s + RK_e$$

La tabella di Routh risulta:

Riga 3	LJ	$RC + LK_e + K_{fem}K_i$
Riga 2	$JR + LC$	RK_e
Riga 1	h_1	
Riga 0	k_1	

dove i valori di h_1 e k_1 sono:

$$h_1 = -\frac{1}{JR + LC} \det \begin{bmatrix} LJ & RC + LK_e + K_{fem}K_i \\ JR + LC & RK_e \end{bmatrix}$$

$$= \frac{(JR + LC)(RC + K_{fem}K_i) + L^2K_eC}{JR + LC} > 0$$

$$k_1 = K_eR > 0$$

Poiché le grandezze fisiche caratterizzanti il sistema sono positive, il procedimento di costruzione della tabella può essere portato a compimento e tutti i coefficienti che compaiono nella prima colonna della tabella sono non nulli e del medesimo segno (positivo). Ne consegue, per il criterio di Routh, che $p(s)$ è polinomio di Hurwitz, ovvero ha tutti gli zeri nel semipiano sinistro aperto. Il sistema allora risulta essere asintoticamente stabile e quindi BIBO stabile.

Utilizzando il comando *roots* di Matlab troviamo infatti che le radici di $p(s)$ sono:

$$\lambda_1 = -2255.1 + j8693.3$$

$$\lambda_2 = -2255.1 - j8693.3$$

$$\lambda_3 = -1239.8$$

La coppia di radici complesse coniugate a parte reale negativa genera modi oscillatori smorzati, mentre la radice reale negativa genera un modo esponenziale decrescente.

2.3 Risposta al gradino

Riportiamo di seguito la risposta al gradino del sistema, ottenuta con il comando *step* di Matlab.

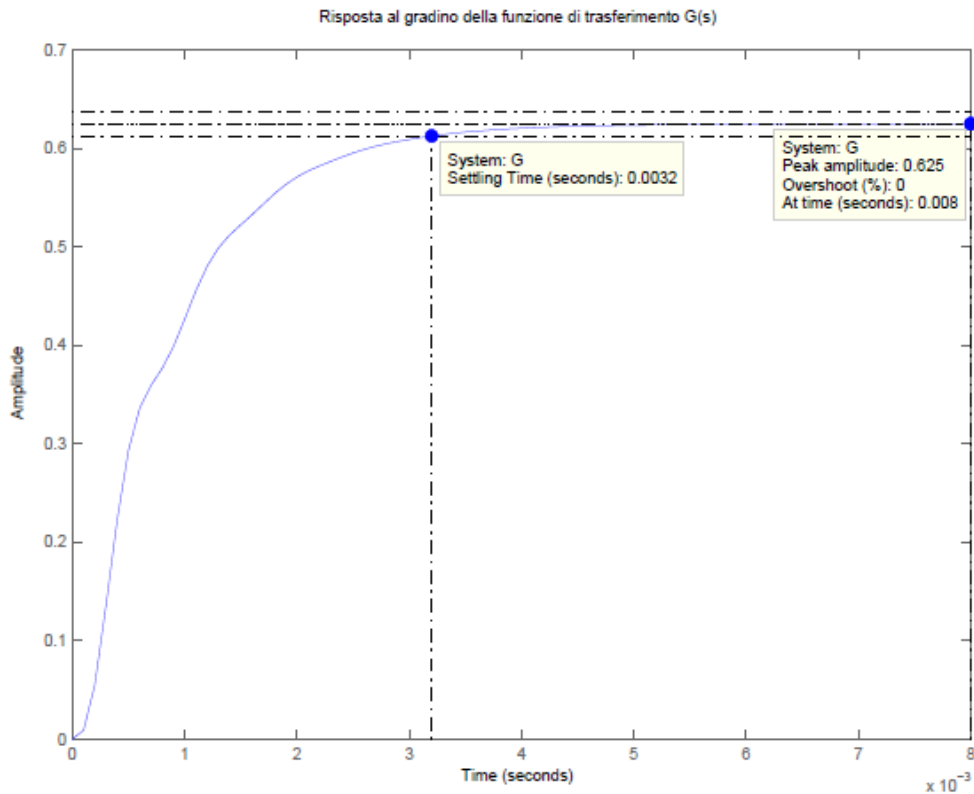


Figura 2.1: risposta al gradino del sistema in catena aperta

Possiamo notare come la prontezza del sistema sia buona dato che la risposta al gradino presenta una sovralongazione nulla e un tempo di assestamento al 2% di appena 3.2ms. Tuttavia, essendo $G(0) \neq 0$, l'errore di regime permanente è finito ma non nullo e pari a:

$$e_{rp} = 1 - G(0) = 0.375$$

2.4 Diagrammi di Bode

Per quanto riguarda i diagrammi di Bode di $G(s)$, notiamo come la coppia di poli complessi coniugati aventi pulsazione naturale $\omega_n \cong 8981\text{rad/s}$ e smorzamento $\xi \cong 0.251 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ generi un picco di risonanza alla pulsazione $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \cong 8396\text{rad/s}$ di ampiezza $M_{r,\text{dB}} = 20 \log(2|\xi|\sqrt{1 - \xi^2}) \cong -6.3\text{ dB}$.

Riportiamo di seguito i diagrammi di Bode reali e asintotici della funzione di trasferimento in catena aperta $G(s)$ ottenuti con il comando *bodeasin* di Matlab.

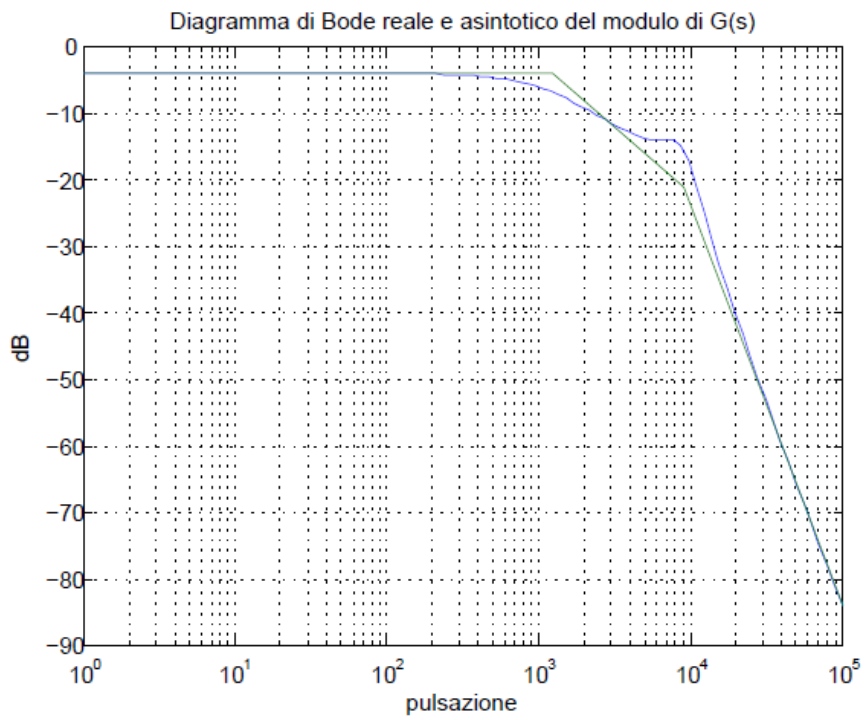


Figura 2.2: diagramma di Bode delle ampiezze di $G(s)$

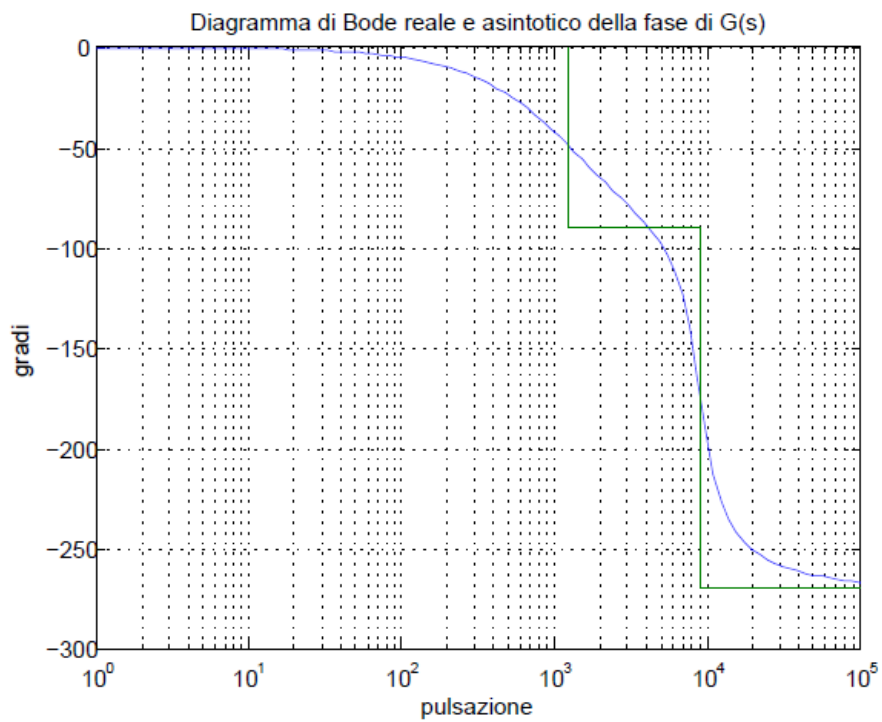


Figura 2.3: diagramma di Bode delle fasi di $G(s)$

2.5 Diagramma di Nyquist

Passiamo infine al diagramma di Nyquist di $G(s)$, riportato in figura anche per frequenze negative e ottenuto con il comando *nyquist* di Matlab.

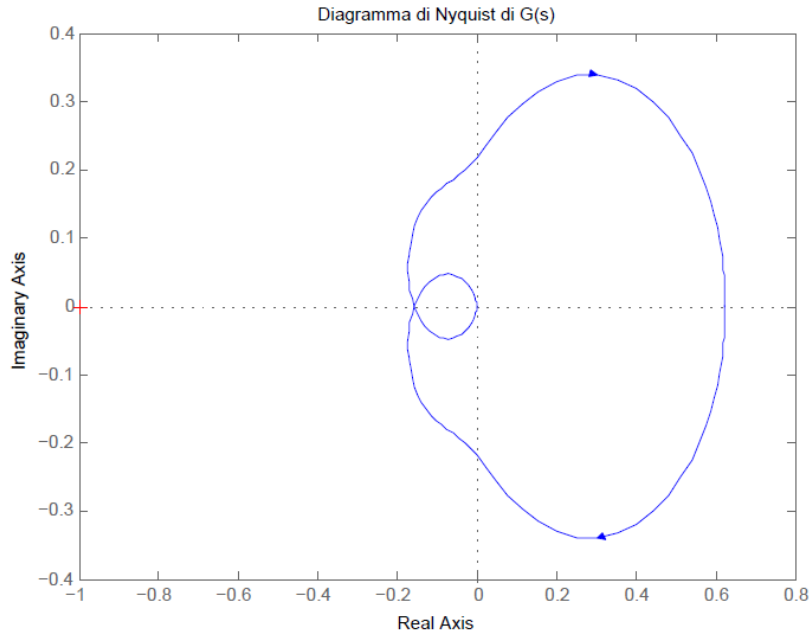


Figura 2.4: diagramma di Nyquist di $G(s)$

Poiché il diagramma di Bode delle ampiezze si trova interamente al di sotto dell'asse delle ascisse, il diagramma di Nyquist è interamente contenuto all'interno della circonferenza unitaria e non compie pertanto alcun giro attorno al punto critico $-1 + j0$. Inoltre, essendo il sistema in catena aperta BIBO stabile, il Criterio ridotto di Nyquist assicura che anche il sistema ottenuto per retroazione unitaria negativa sia BIBO stabile.

Capitolo 3

Specifiche di controllo e sistema retroazionato

Precisione e prontezza di risposta dell'attuatore sono caratteristiche fondamentali per poter garantire le alte prestazioni normalmente richieste ad un hard disk. Per leggere o scrivere un dato la testina deve posizionarsi sulla traccia corretta del disco e, vista la densità delle tracce sul piatto, è necessario che tale operazione avvenga in modo molto accurato. Inoltre, quanto più la testina è veloce a posizionarsi, tanto più veloce è il disco a leggere/scrivere dati. E' facile comprendere come uno spostamento della testina dal centro della traccia richiesta possa essere causa di malfunzionamenti, così come una testina eccessivamente lenta nel posizionamento possa portare a tempi di accesso ai dati inaccettabili. Altrettanto importante è la sensibilità del sistema ai disturbi, che possono provocare spostamenti impreveduti e non controllabili della testina.

Poniamoci allora in un caso semplificato e supponiamo di voler portare la posizione angolare θ della testina al valore di equilibrio $\bar{\theta} = \frac{\pi}{4}$, a partire da condizioni iniziali nulle (ciò corrisponde, senza perdita di generalità, ad un hard disk inizialmente spento).

Utilizzando l'espressione del punto di equilibrio (1.5), determiniamo il valore che la tensione di alimentazione deve assumere affinché la posizione angolare di equilibrio sia quella richiesta:

$$\bar{V}_s = R \frac{K_e}{K_i} \bar{\theta} = 1.257V$$

In tal modo nell'avvolgimento del motore scorrerà una corrente pari a:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_s}{R} = 62.85mA$$

3.1 Specifiche nel dominio del tempo

Per garantire il corretto funzionamento dell'hard disk richiediamo che il sistema soddisfi le seguenti specifiche:

- errore di regime permanente nullo per l'inseguimento a segnali costanti;
- sovraelongazione S non superiore al 10%;
- tempo di assestamento al 2% T_a non superiore a 5ms.

Assumiamo infine che sulla tensione v_s utilizzata come ingresso di controllo agisca un disturbo additivo a bassa frequenza del tipo $d_v(t) = A_v \sin(\omega_v t) V$, con

$\omega_v \leq 314 \text{ rad/s}$ e $A_v = 85 \text{ mV}$. Si deve garantire che l'effetto sull'uscita θ sia inferiore a $\pm 0.02 \text{ rad}$.

3.2 Sistema retroazionato

Per soddisfare le specifiche che ci siamo fissati ricorriamo ad uno schema di controllo in retroazione, ovvero ad uno schema in cui l'azione di controllo tiene conto dell'evoluzione in corso della variabile da controllare, in questo caso la posizione angolare θ della testina.

Lo schema a blocchi è il seguente:

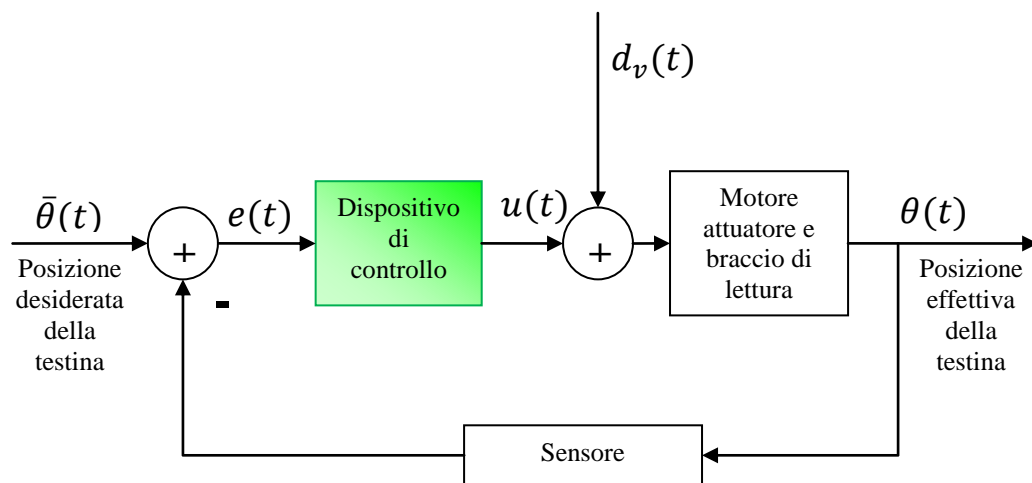


Figura 3.1: schema di controllo in retroazione

Assumeremo che il blocco sensore abbia funzione di trasferimento $H(s) = 1$ in modo da fare riferimento ad uno schema di controllo in retroazione unitaria negativa e progetteremo un opportuno compensatore $C(s)$ (in verde in Figura 3.1) in grado di garantire la stabilità BIBO del risultante sistema retroazionato e il soddisfacimento delle specifiche.

Per rendere più agevole il progetto del compensatore si è soliti approssimare la funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso con una funzione di trasferimento con un solo polo dominante o con due poli dominanti. Nella pratica infatti accade spesso che un sistema, anche di ordine elevato, quando controllato opportunamente presenti comportamenti dinamici simili a quelli di sistemi del primo o del secondo ordine. In generale l'approssimazione con un sistema del secondo ordine risulta più precisa, anche se ovviamente l'accuratezza dell'approssimazione dipende dalla collocazione dei poli nel piano complesso: tanto più è verificata la relazione $\Re(p_{1,2}) \gg \Re(p_i)$, dove $p_{1,2}$ sono i poli dominanti del sistema e p_i sono i rimanenti poli, tanto migliore risulterà l'approssimazione. Nel nostro caso inoltre è il carattere oscillatorio della risposta al gradino a suggerire una approssimazione con un sistema del secondo ordine con

poli complessi coniugati. Nel seguito del capitolo faremo dunque riferimento al sistema ad anello chiuso come ad un sistema con funzione di trasferimento:

$$W_{cl}(s) = \frac{1}{1 + 2 \frac{\xi_{cl}}{\omega_{cl}} s + \frac{s^2}{\omega_{cl}^2}} \quad (3.1)$$

Si noti che abbiamo indicato con ξ_{cl} e ω_{cl} lo smorzamento e la pulsazione naturale dei poli complessi della funzione di trasferimento che approssima il sistema ad anello chiuso, mentre abbiamo indicato con ξ e ω_n i medesimi parametri dei poli complessi del processo $G(s)$.

3.3 Specifiche nel dominio della frequenza

Vediamo ora come la scelta di approssimare il sistema in catena chiusa con un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati ci permetta di tradurre le specifiche assegnate nel dominio del tempo in requisiti nel dominio della frequenza per il sistema in catena aperta, facilmente verificabili dall'osservazione dei diagrammi di Bode.

3.3.1 Margine di fase e pulsazione di taglio

Se si escludono casi patologici¹, considerazioni qualitative ed approssimate consentono di identificare per una funzione di trasferimento in catena aperta che induca nel risultante sistema retroazionato dei poli complessi coniugati le seguenti relazioni:

- la pulsazione di taglio ω_T è un buon “indicatore” della banda passante ad anello chiuso;
- un margine di fase M_f sufficientemente elevato corrisponde a valori non troppo piccoli dello smorzamento dei poli del sistema retroazionato.

Sappiamo inoltre come sia necessario incrementare la banda passante per ottenere sistemi rapidi, mentre sia necessario escludere la presenza di poli complessi con fattore di smorzamento troppo piccolo per garantire buone risposte transitorie.

Ci aspettiamo quindi di dover agire nel seguente modo:

¹ Si tratta di casi patologici in cui il margine di fase diventa un parametro poco significativo e le relazioni qualitative sopra esposte perdono di validità. Ciò accade quando il diagramma di Nyquist entra nel cerchio unitario sufficientemente lontano dal punto critico, ma poi vi si avvicina notevolmente per pulsazioni più elevate di quella di attraversamento. In modo equivalente potremmo dire che il fenomeno si verifica quando il diagramma di Bode presenta in prossimità della pulsazione di taglio un picco di risonanza che porta il diagramma, dopo aver tagliato l'asse delle ascisse, ad avvicinarsi nuovamente. Si noti come nel caso in esame la presenza nella funzione di trasferimento $G(s)$ di un picco di risonanza, seppur di ampiezza piuttosto ridotta, non ci consenta di escludere a priori il verificarsi di tale fenomeno indesiderato. Sarà allora necessario in fase di progetto prestare attenzione e costruire un compensatore $C(s)$ in modo da evitare che il picco di risonanza si avvicini troppo all'asse delle ascisse.

- aumentare la pulsazione di taglio per diminuire il tempo di salita (ed eventualmente il tempo di assestamento);
- aumentare il margine di fase per diminuire contemporaneamente la sovraelongazione e il tempo di assestamento.

Nonostante l'importanza fondamentale di queste relazioni qualitative, per progettare il compensatore abbiamo bisogno di trovare per la pulsazione di taglio ω_T e per il margine di fase M_f dei valori numerici veri e propri, da intendersi non come validi in assoluto, bensì come puramente indicativi e di massima. Per far ciò utilizzeremo formule delle quali non forniamo qui la derivazione matematica. Si è scelto infatti di non appesantire la trattazione con calcoli inutilmente lunghi e laboriosi e di riportare invece tali approfondimenti nell'Appendice B.

Dato il sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati (3.1), valgono per la sovraelongazione e per il tempo di assestamento al 2% le seguenti relazioni approssimate:

$$S = e^{-\pi \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}}} 100\% \quad (3.2)$$

$$T_a = -\frac{\ln \sqrt{1-\xi_{cl}^2} + \ln 0.02}{\xi_{cl} \omega_{cl}} \quad (3.3)$$

L'espressione (3.2) ci permette di determinare per lo smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso un valore pari almeno a:

$$\xi_{cl} = \sqrt{\frac{\ln^2 S}{\pi^2 + \ln^2 S}} \cong 0.6$$

Utilizzando l'espressione (3.3) e il valore dello smorzamento appena trovato è possibile ricavare il valore della pulsazione naturale dei poli complessi coniugati:

$$\omega_{cl} = \frac{4}{\xi_{cl} T_a} \cong 1333 \text{ rad/s}$$

Poiché per un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati la pulsazione naturale coincide approssimativamente con la banda passante, per quanto detto in precedenza, il vincolo sulla pulsazione di taglio del sistema in catena aperta risulta essere:

$$\omega_T(CG) \cong B_p(W_{cl}) \cong \omega_{cl} \cong 1333 \text{ rad/s}$$

Infine, per determinare il margine di fase della funzione di trasferimento in catena aperta è sufficiente utilizzare la relazione che lega quest'ultimo allo smorzamento dei poli dominanti del sistema in anello chiuso:

$$\xi_{cl} = \sin\left(\frac{M_f(CG)}{2}\right)$$

che impone un margine di fase pari almeno a:

$$M_f(CG) \cong 2 \sin^{-1}(\xi_{cl}) = 73.74^\circ$$

Sottolineiamo come le relazioni utilizzate siano basate su una serie di ipotesi semplificative che, nella pratica, possono non essere esattamente verificate. I valori ottenuti per la pulsazione di taglio e per il margine di fase, così come quelli

per la pulsazione naturale ω_{cl} e per lo smorzamento ξ_{cl} , sono quindi approssimativi e forniscono solamente un'indicazione di primo tentativo. D'altra parte ciò rientra appieno nella filosofia della sintesi per tentativi, che non ha alcuna pretesa di rigore ma mira unicamente a dare delle indicazioni di massima, utili nella maggior parte dei casi pratici.

3.3.2 Sensibilità al disturbo

Passiamo adesso al problema della reiezione dei disturbi, cercando anche in questo caso di tradurre la specifica assegnata nel dominio del tempo in una specifica nel dominio della frequenza.

Poiché il sistema è lineare, per il principio di sovrapposizione degli effetti l'uscita $y(t) = \theta(t)$ si può scomporre come:

$$y(t) = y_r(t) + y_d(t)$$

dove $y_r(t)$ è la risposta del sistema in corrispondenza a $r(t)$ in assenza di disturbo additivo e $y_d(t)$ è la risposta del sistema in corrispondenza a $d_v(t)$ con $r(t)$ nullo.

La relazione tra le trasformate di Laplace del disturbo di attenuazione $d_v(t)$ e dell'uscita del sistema $y_d(t)$ è:

$$Y_d(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)} D_v(s) = \bar{G}(s) D_v(s)$$

Poiché il disturbo $d_v(t)$ è un segnale sinusoidale, applicando il teorema della risposta armonica risulta:

$$y_d(t) = |\bar{G}(j\omega)| A_v \sin(\omega_v t + \arg \bar{G}(j\omega))$$

Garantire che l'effetto sull'uscita θ sia inferiore a ± 0.02 rad equivale a richiedere che, per pulsazioni $\omega < 314$ rad/s, si abbia:

$$|y_d(t)| < 0.02$$

Facendo riferimento al caso peggiore consideriamo $|\sin(\omega_v t + \arg \bar{G}(j\omega))| = 1$ e $|G(j\omega)| = 0.625$, pari all'amplificazione massima nell'intervallo di frequenze considerato. La specifica richiede dunque che sia soddisfatta la relazione:

$$|y_d(t)|_{dB} = \left| \frac{0.085 G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} < \left| \frac{0.085 \cdot 0.625}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} \right|_{dB} < -34 \text{ dB}$$

ovvero:

$$|1 + C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} \cong |C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} > 8.5 \text{ dB} \quad \text{per } \omega < 314 \text{ rad/s}$$

Ora che abbiamo tradotto tutti gli obiettivi di progetto in vincoli nel dominio della frequenza per il sistema in catena aperta possiamo procedere con il progetto del compensatore vero e proprio.

Capitolo 4

Progetto del controllore

In questo capitolo entriamo nella vera e propria fase di sintesi del compensatore: adottando sempre le tecniche della sintesi per tentativi procederemo prima per via analitica, sfruttando le proprietà di zeri e poli per intervenire nel diagramma di Bode del processo da controllare, e poi tramite SISO Design Tool, un'interfaccia grafica di Matlab per la progettazione dei sistemi di controllo.

4.1 Considerazioni preliminari

Premettiamo un paio di osservazioni riguardanti la BIBO stabilità e il tipo del sistema in catena chiusa valide per tutti i compensatori che andremo a progettare. Requisito imprescindibile di ogni sistema di controllo è la stabilità BIBO del risultante sistema retroazionato: senza di essa non avrebbe nemmeno senso parlare di errore a regime, sovraelongazione e tempo di assestamento. A tale proposito ci viene in aiuto il criterio di Bode: se la funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ non ha poli a parte reale positiva e il suo guadagno di Bode $K_B(C)K_B(G)$ è positivo, allora il conseguimento di un margine di fase positivo è condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema retroazionato sia BIBO stabile. Poiché nel seguito ci atterremo sempre ai suddetti accorgimenti per il compensatore $C(s)$ (ovvero poli stabili e guadagno di Bode $K_B(C)$ positivo), il soddisfacimento della specifica sul margine di fase assicurerà automaticamente il conseguimento della stabilità BIBO del sistema retroazionato.

Per quanto riguarda il tipo del sistema in anello chiuso le specifiche che ci siamo fissati impongono che questo sia di tipo (almeno) 1 per poter inseguire con errore di regime permanente nullo segnali costanti in ingresso. E' allora necessario che nella funzione di trasferimento in catena aperta $C(s)G(s)$ sia presente almeno un polo nell'origine e pertanto tutti i compensatori progettati saranno del tipo:

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \tilde{C}(s)$$

Ciò è sufficiente a garantire il raggiungimento del livello di precisione richiesto, mentre sarà la forma assunta da $\tilde{C}(s)$ a determinare se e in quale misura anche le restanti specifiche saranno soddisfatte.

4.2 Progetto analitico del controllore

In questa prima fase partiamo dall'osservazione del diagramma di Bode del processo da controllare per sintetizzare dei compensatori, complicandone via via

la struttura e verificando tramite alcune simulazioni Matlab il raggiungimento degli obiettivi di progetto. Si rimanda nuovamente all'Appendice A per la sequenza completa dei comandi Matlab utilizzati.

4.2.1 Controllore di tipo I

Come primo tentativo consideriamo un compensatore che esibisca una struttura la più semplice possibile. Si tratta di un controllore di tipo I (puramente integrale), descritto dalla seguente funzione di trasferimento:

$$C_I(s) = \frac{K_i}{s}$$

Non avendo nessuna specifica sull'errore di regime permanente alla rampa lineare, abbiamo la massima libertà nella scelta della costante K_i , purché positiva per quanto detto in precedenza. Scegliamo allora due valori significativi:

- $K_1 = 3071$, valore che garantisce per la pulsazione di taglio del sistema in catena aperta un valore molto prossimo a quello desiderato²;
- $K_2 = 1377$, corrispondente al minimo valore necessario per ottenere una riduzione degli effetti dei disturbi soddisfacente³.

Riportiamo nelle Figure 4.1 e 4.2 il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in catena aperta, la risposta al gradino e la risposta al disturbo del sistema retroazionato utilizzando i due compensatori:

$$C_I^1(s) = \frac{3071}{s}$$

$$C_I^2(s) = \frac{1377}{s}$$

Come si evince dalle figure le prestazioni ottenute con il compensatore $C_I^1(s)$, buone per quanto riguarda la sensibilità al disturbo, risultano decisamente insoddisfacenti nella fase transitoria della risposta al gradino. Nel caso del controllore $C_I^2(s)$ invece l'aumento del margine di fase, passato da un valore di 39° a circa 56° , determina un netto miglioramento sia della sovralongazione, che raggiunge ora l'11.2%, sia del tempo di assestamento, pari adesso a $5.72ms$. Tale miglioramento non rende comunque il sistema in grado di soddisfare le specifiche. D'altra parte l'aumentato effetto del disturbo sull'uscita non ci consente di scegliere per la costante K_i valori inferiori a K_2 e siamo quindi portati a concludere che un compensatore di tipo I non sia sufficiente a raggiungere gli obiettivi di progetto.

² Tale valore è stato ottenuto come soluzione dell'equazione: $|C_I(j\omega_T)G(j\omega_T)|_{dB} = 0dB$

³ Tale valore è stato ottenuto come soluzione dell'equazione: $|C_I(j\omega_v)G(j\omega_v)|_{dB} = 8.5dB$

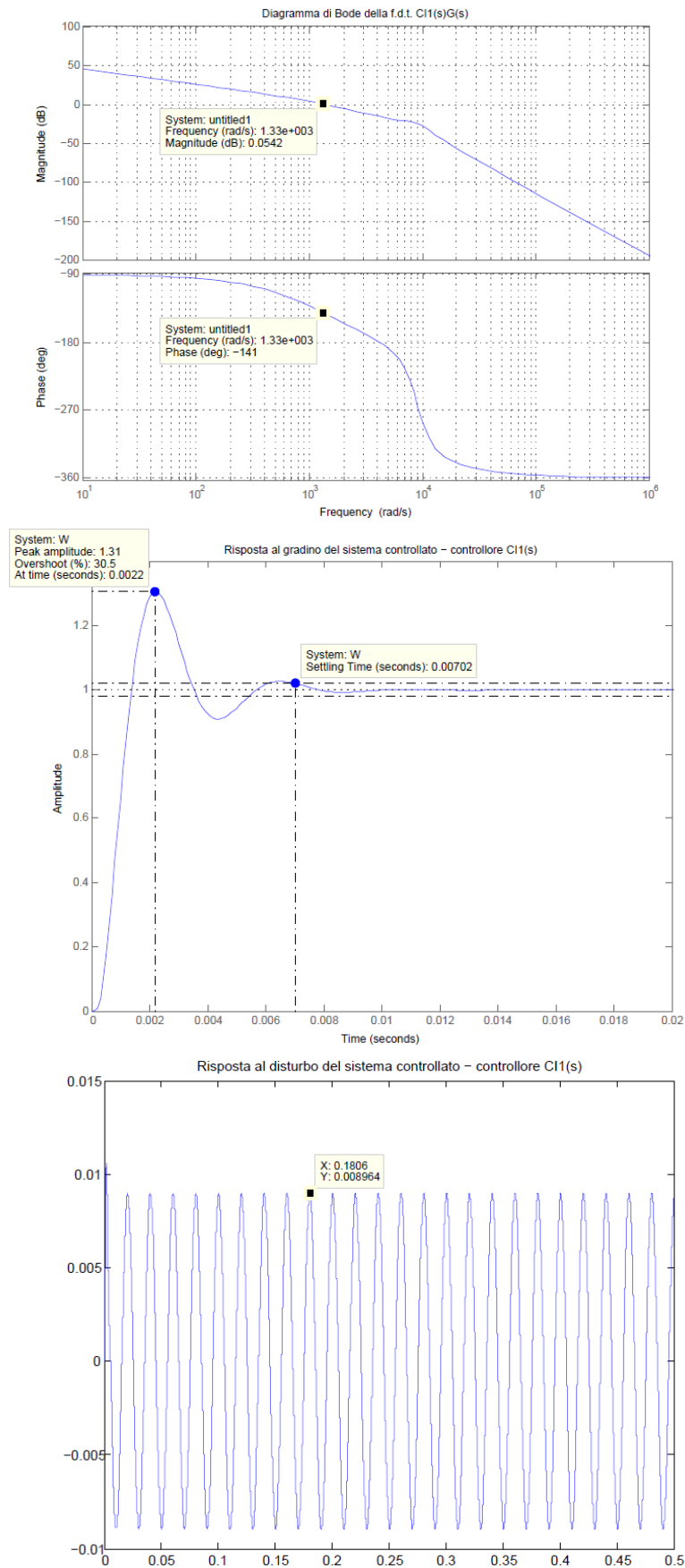


Figura 4.1: controllore $C_1^1(s)$: diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

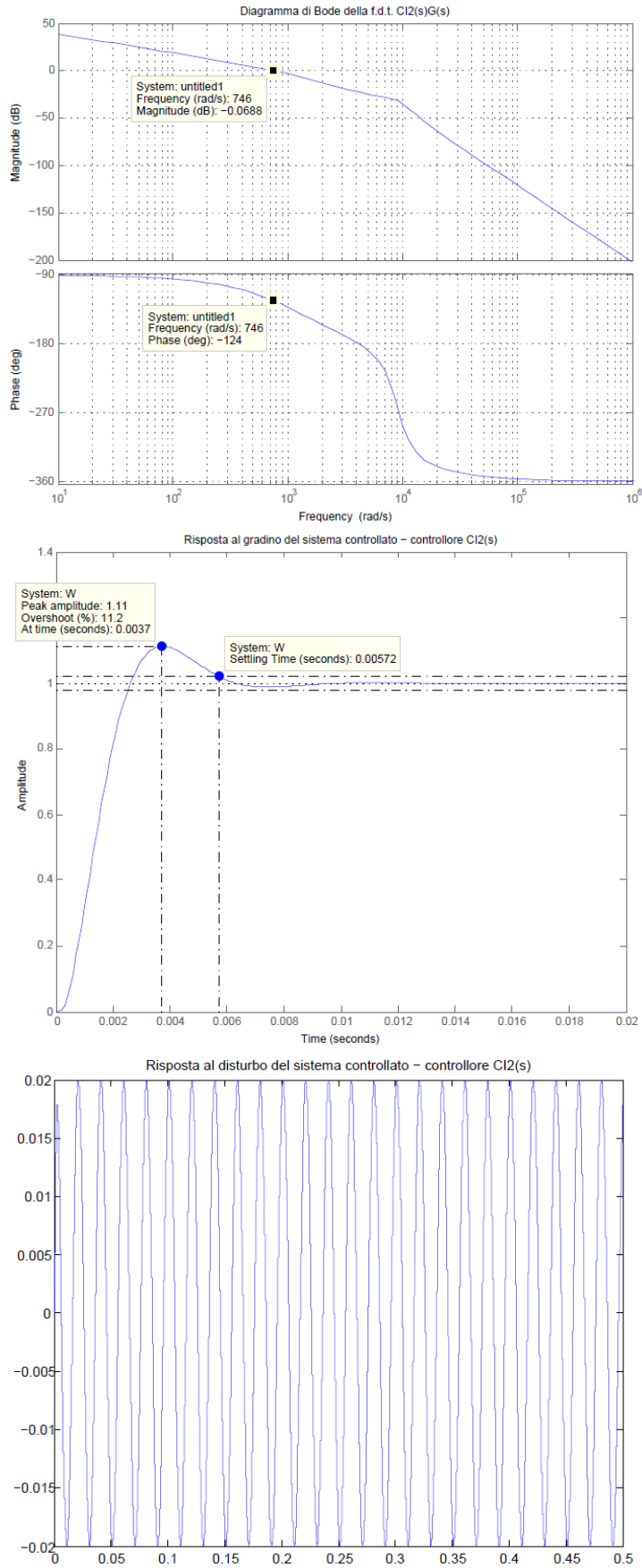


Figura 4.2: controllore $C_1^2(s)$: diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

4.2.2 Controllore di tipo PI

Complichiamo leggermente la struttura del controllore e proviamo a progettare un compensatore di tipo PI (proporzionale integrativo):

$$C_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

che può essere riscritto in modo equivalente come:

$$C_{PI}(s) = \frac{K_i}{s} (1 + \tau s)$$

A differenza del caso precedente la presenza dello zero ci consente di aumentare il margine di fase pur mantenendo sufficientemente elevati la pulsazione di taglio e il modulo di $C(s)G(s)$ nella banda di frequenze in cui agisce il disturbo.

Scegliamo allora per la costante di Bode K_i il valore precedentemente ricavato per soddisfare la specifica sulla pulsazione di taglio e, per migliorare il margine di fase, poniamo $\tau = \frac{1}{|\lambda_3|} = 80.658 \cdot 10^{-5}$ in modo da indurre una cancellazione zero-polo con $G(s)$. Abbiamo così ottenuto il compensatore:

$$C_{PI}(s) = \frac{K_1}{s} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_3|} s \right) = \frac{3071}{s} (1 + 80.658 \cdot 10^{-5} s)$$

Analizziamo le prestazioni del risultante sistema retroazionato servendoci delle simulazioni Matlab riportate in Figura 4.3:

- il tempo di assestamento è pari a 2.33ms;
- la sovraelongazione è pari a 0.401%;
- l'effetto del disturbo sull'uscita è pari a ± 0.0083 rad.

Il compensatore $C_{PI}(s)$ garantisce quindi il soddisfacimento di tutte le specifiche di progetto.

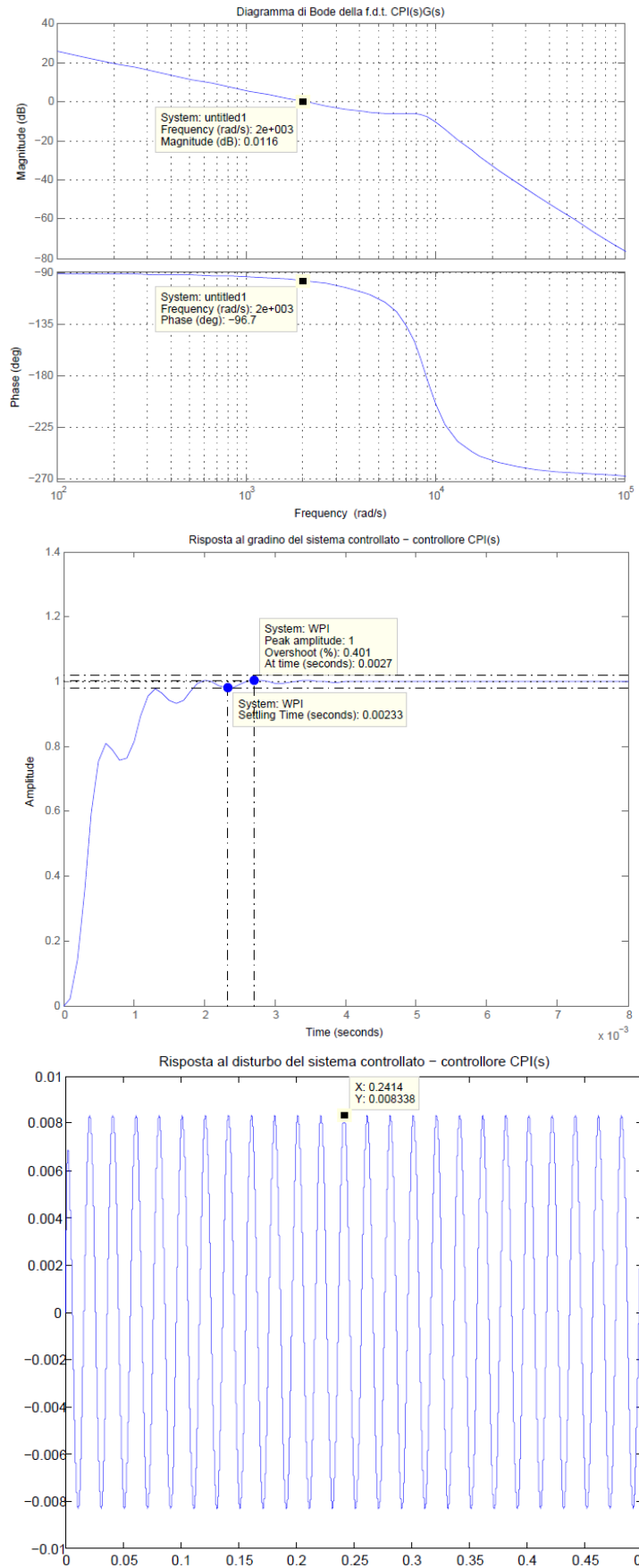


Figura 4.3: controllore $C_{PI}(s)$: diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

4.2.3 Controllore con rete anticipatrice

In alternativa al controllore di tipo PI progettiamo una rete anticipatrice che consenta di sollevare il diagramma di Bode delle ampiezze in modo da ottenere la pulsazione di taglio desiderata. Dal diagramma di Bode di $\tilde{G}(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$ si vede come sia necessario sollevare il modulo di circa 70dB e quindi distanziare zero e polo della rete anticipatrice di circa 3.5 decadi. Anche in questo caso inoltre è necessario introdurre un ulteriore zero per aumentare il margine di fase. Il compensatore finale risulta allora:

$$C_{ant}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(1 + 10^{3.5}s)}{(1 + s)} \cdot (1 + 80.658 \cdot 10^{-5}s)$$

Come evidente dalla Figura 4.4, utilizzando tale compensatore si ottengono prestazioni analoghe a quelle ottenute con il compensatore di tipo PI precedentemente progettato. Tuttavia, a parità di prestazioni, è da preferirsi proprio il controllore di tipo PI in quanto presenta una struttura più semplice.

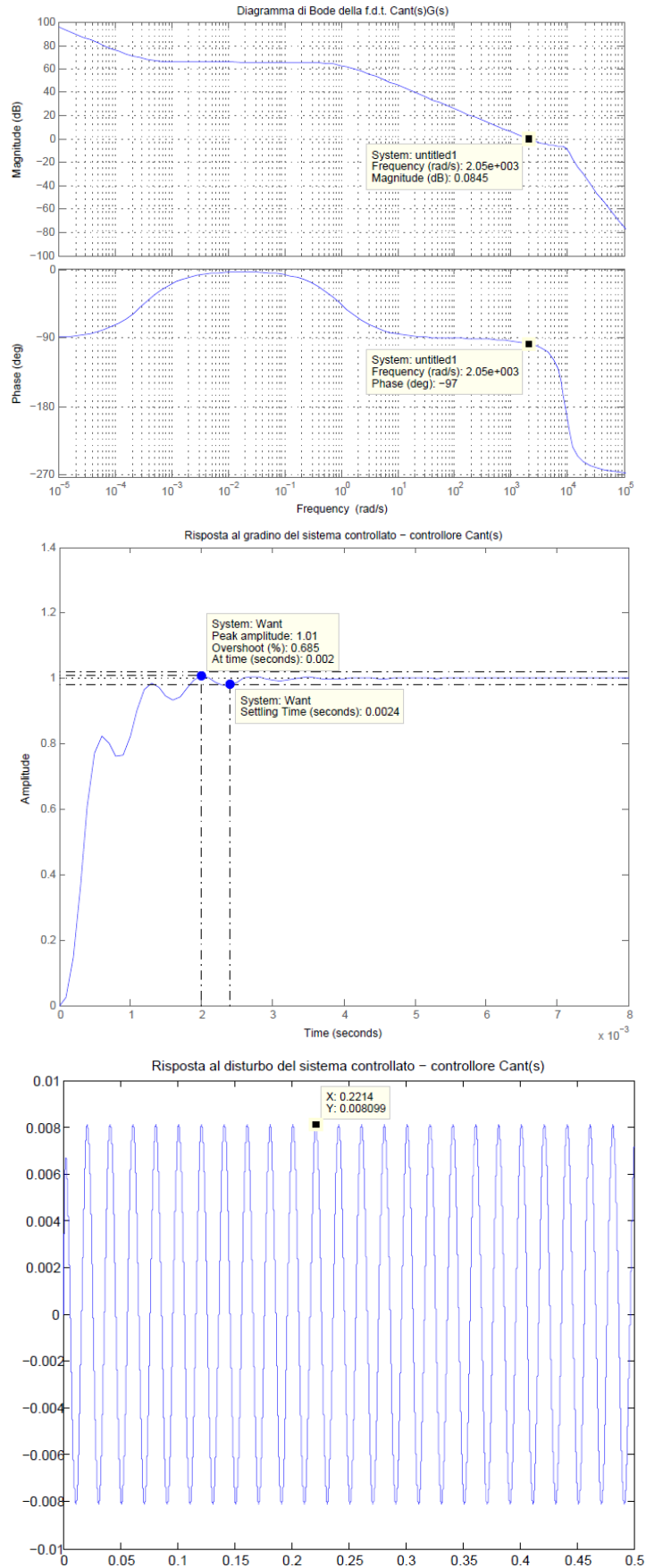


Figura 4.4: controllore $C_{ant}(s)$: diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

4.3 Progetto del controllore tramite SISO Design Tool

Scopo di questa seconda parte è ottimizzare le prestazioni precedentemente ottenute ricorrendo all'interfaccia grafica SISO Design Tool. Essa consente, una volta definita la funzione di trasferimento del processo da controllare, di intervenire in maniera interattiva direttamente sul diagramma di Bode e sul luogo delle radici del sistema in catena aperta facendo variare il guadagno statico e aggiungendo zeri e poli a piacere. Il software consente inoltre di verificare il comportamento del sistema a ciclo chiuso aggiornando automaticamente i diagrammi relativi alla risposta impulsiva e alla risposta indiciale. Si capisce allora come il progetto del compensatore risulti notevolmente facilitato.

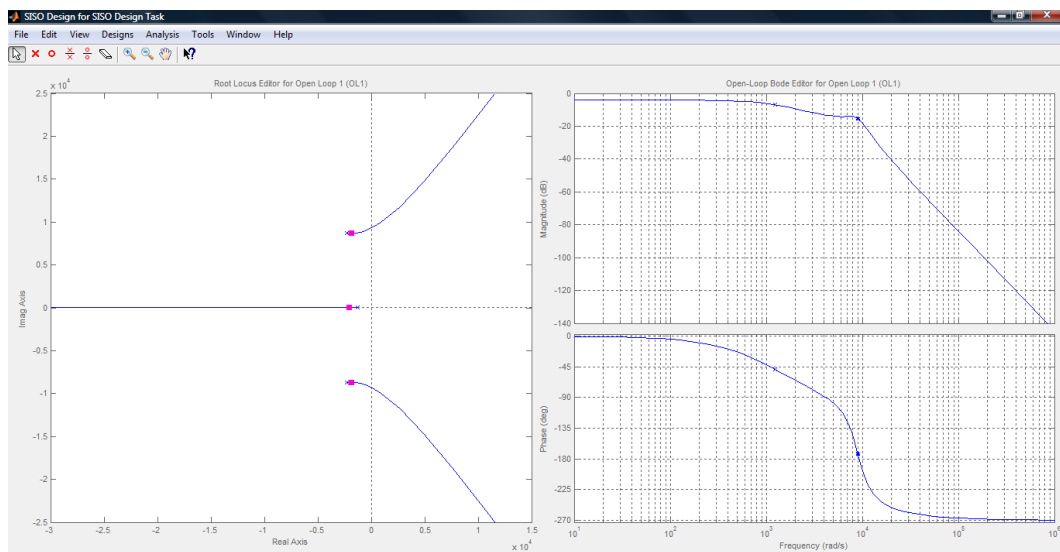


Figura 4.5: interfaccia grafica di SISO Tool dopo aver definito la funzione di trasferimento $G(s)$

4.3.1 L'ambiente di lavoro SISO Tool

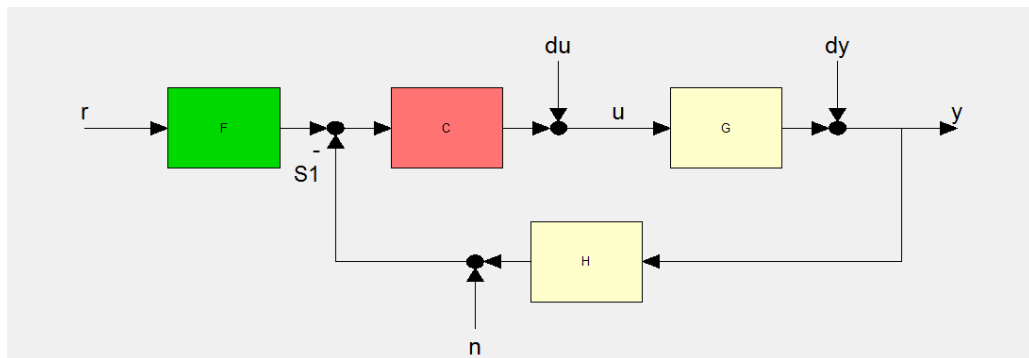


Figura 4.6: architettura di controllo predefinita in SISO Tool

Vogliamo adesso illustrare brevemente l'ambiente di lavoro SISO Tool, limitandoci a quanto strettamente necessario per il successivo progetto del compensatore.

L'architettura di controllo predefinita è riportata in Figura 4.6: come si può notare, una volta posto $F(s) = H(s) = 1$ e $n = dy = 0$, essa è perfettamente analoga allo schema a blocchi presentato nel Capitolo 3 (si veda la Figura 3.1).

Per agevolare la sintesi del compensatore, SISO Tool consente di visualizzare alcuni vincoli di progetto sia nel diagramma di Bode sia nel piano complesso contenente il luogo delle radici. Scegliamo allora di impostare il vincolo derivante dalla specifica sulla reiezione del disturbo (ovvero $|C(j\omega)G(j\omega)|_{dB} > 8.5dB$ per $\omega < 314rad/s$) e quelli relativi allo smorzamento e alla pulsazione naturale dei poli dominanti del sistema in anello chiuso.⁴ Una volta aggiunto l'integratore nell'espressione del controllore, il risultato è la schermata riportata in Figura 4.7: partiremo da qui per progettare il nostro compensatore.

Per verificare che il sistema retroazionato soddisfi le specifiche sulla sovralongazione e sul tempo di assestamento è invece sufficiente visualizzare la risposta al gradino del sistema a ciclo chiuso da r a y . Un discorso a parte va fatto per quanto riguarda la capacità del sistema di attenuare il disturbo in ingresso: poiché SISO Tool non consente di impostare degli ingressi di tipo sinusoidale, conviene definire un nuovo anello di retroazione da u a y , esportare nel Workspace la relativa funzione di trasferimento e impostare nell'interfaccia grafica LTI Viewer una opportuna simulazione lineare.

⁴ A rigore impostare il vincolo sulla pulsazione naturale dei poli dominanti o quello sul tempo di assestamento non risulta equivalente: il primo si traduce in una semiellisse, mentre il secondo in una linea retta verticale. Tale differenza, che nel nostro caso risulta poco rilevante, è conseguenza del fatto che Matlab utilizza un'approssimazione al primo ordine per tradurre la specifica sul tempo di assestamento. Al contrario, impostare il vincolo sullo smorzamento dei poli dominanti o quello sulla sovralongazione risulta chiaramente equivalente.

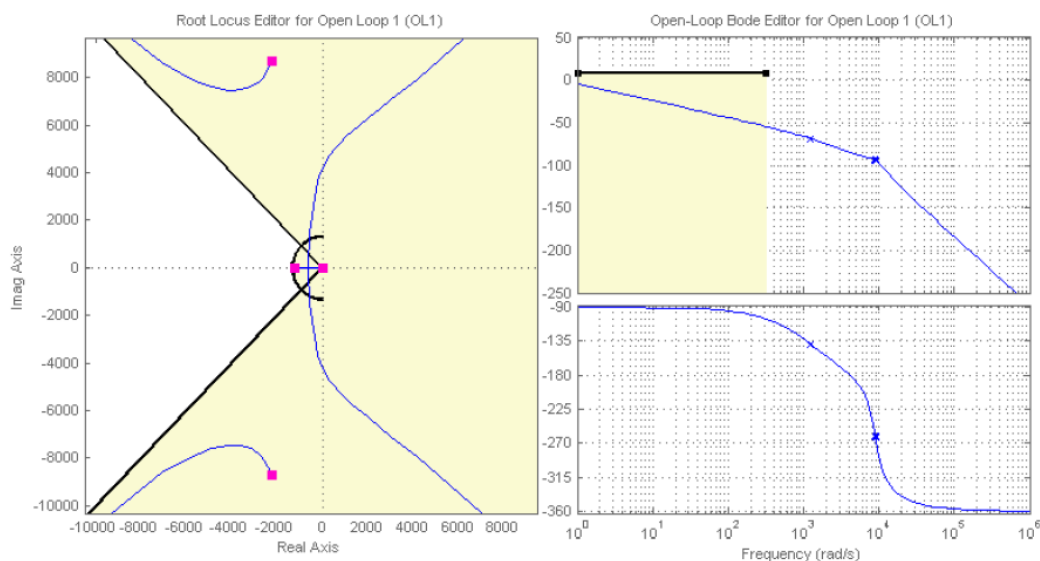


Figura 4.7: impostazione delle specifiche di progetto nel piano complesso contenente il luogo delle radici e nel diagramma di Bode di $\tilde{G}(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$

4.3.2 Controllo mediante il luogo delle radici

Il progetto di un compensatore mediante il luogo delle radici richiede di ragionare in modo leggermente diverso da quanto visto finora: identificati i poli dominanti del sistema ad anello chiuso, dobbiamo cercare di fare in modo che questi siano contenuti all'interno di specifiche regioni del piano complesso (le aree bianche in Figura 4.7) per un determinato valore del guadagno. Ovviamente sarà necessario controllare sul diagramma di Bode il soddisfacimento della specifica sul disturbo e tener conto, a seconda della bontà dell'approssimazione per poli dominanti, della collocazione nel piano complesso dei rimanenti poli del sistema chiuso in retroazione.

Proviamo innanzitutto a soddisfare le specifiche dinamiche agendo solo sul guadagno statico: ciò corrisponde, come fatto in precedenza, a cercare un controllore di tipo I. Come evidente dalla Figura 4.7 e come confermato da qualche tentativo, non esiste nessun valore del guadagno, e dunque nessun controllore di tipo I, che consenta di soddisfare tutte le specifiche (si tratta della medesima conclusione cui eravamo giunti nel paragrafo precedente per via analitica).

Inseriamo allora una coppia di zeri complessi coniugati per attrarre i due rami del luogo delle radici che sconfinano nella regione di instabilità. Con qualche tentativo troviamo il compensatore:

$$C_1(s) = 4069.1 \cdot \frac{(1 + 0.00079s + (0.00044s)^2)}{s(1 + 10^{-7}s)}$$

dove è stato aggiunto un polo reale stabile in alta frequenza per garantire la fisica realizzabilità. Come evidente dalla Figura 4.8 il compensatore $C_1(s)$ garantisce buone prestazioni e il soddisfacimento di tutte le specifiche di progetto:

- il tempo di assestamento è pari a $1.83ms$;
- la sovralongazione è pari a 1.78% ;
- l'effetto del disturbo sull'uscita è pari a $\pm 0.0064rad$.

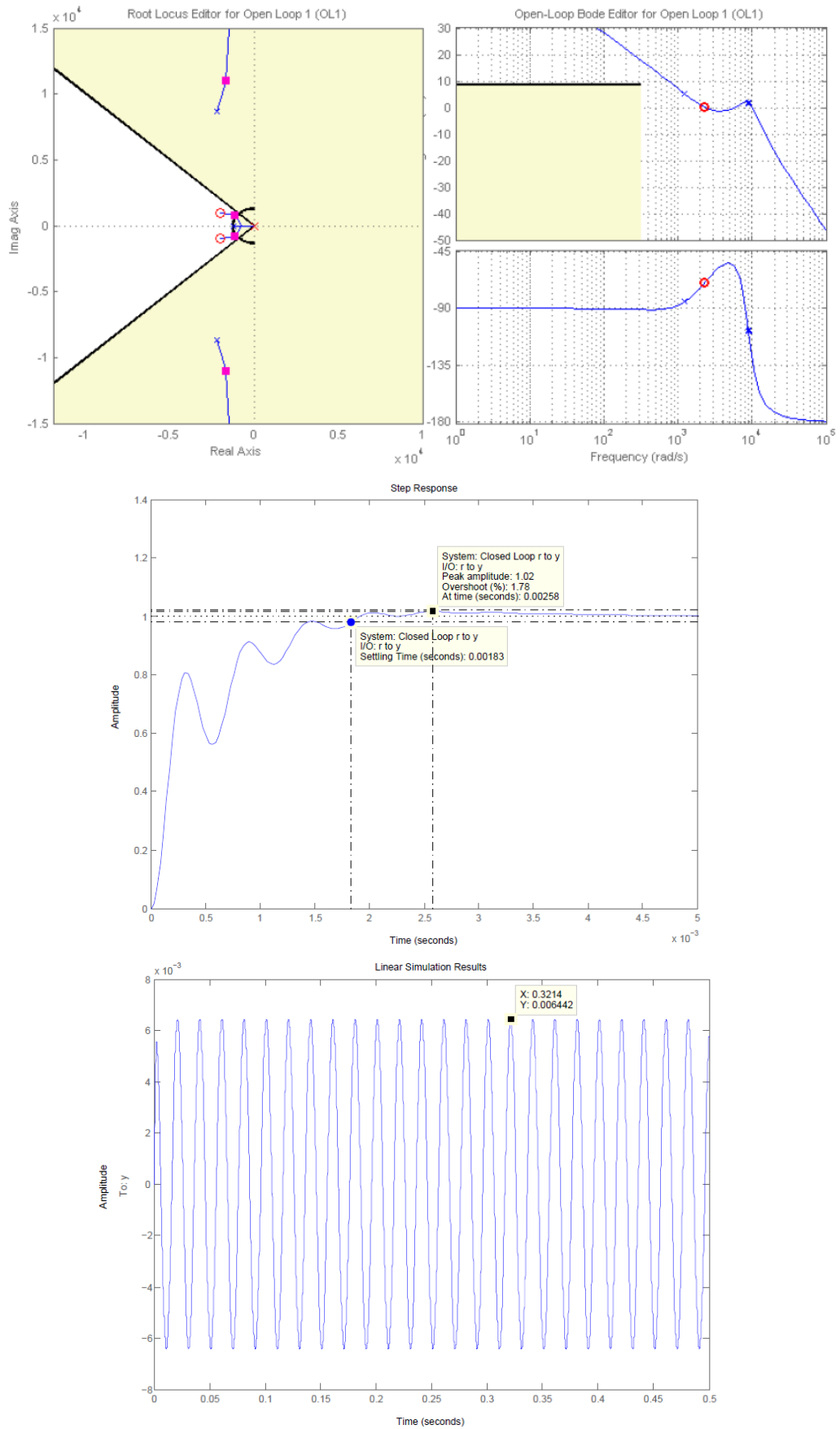


Figura 4.8: controllore $C_1(s)$: luogo delle radici e diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

4.3.3 Controllo in frequenza

Per finire torniamo al controllo nel dominio della frequenza e inseriamo uno zero reale stabile nel diagramma di Bode di $\tilde{G}(s) = \frac{1}{s} \cdot G(s)$.

Dopo qualche tentativo si vede che la presenza di un unico zero non porta a sostanziali miglioramenti rispetto al controllore di tipo PI precedentemente trovato: riusciamo infatti a migliorare solamente la sovraelongazione o il tempo di assestamento, ma non entrambi.

Proviamo allora ad inserire due zeri reali stabili: posizioniamo il primo in modo da indurre una quasi-cancellazione zero-polo con $G(s)$ e il secondo in prossimità del picco di risonanza, così da poter aumentare il guadagno senza che il picco si avvicini troppo all'asse delle ascisse. Otteniamo il compensatore:

$$C_2(s) = 3531.7 \cdot \frac{(1 + 0.00013s)(1 + 0.00084s)}{s(1 + 10^{-7}s)}$$

dove nuovamente è stato aggiunto un polo reale stabile in alta frequenza per rendere il controllore fisicamente realizzabile. Le simulazioni di Figura 4.9 dimostrano come tale compensatore consenta di ottenere buone prestazioni:

- tempo di assestamento pari a $2.12ms$;
- sovraelongazione nulla;
- effetto del disturbo sull'uscita pari a $\pm 0.0072rad$.

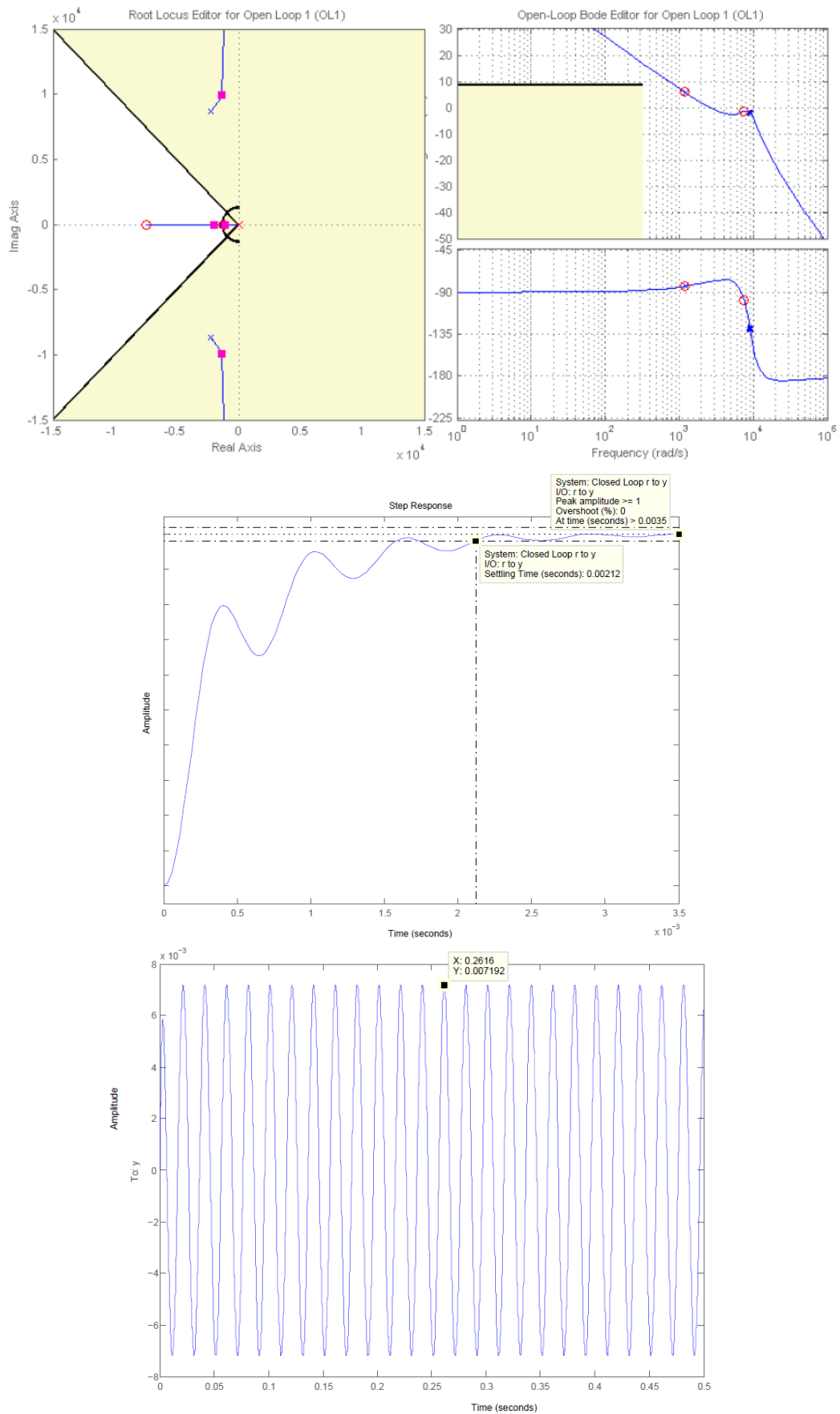


Figura 4.9: controllore $C_2(s)$: luogo delle radici e diagramma di Bode della fdt in catena aperta, risposta al gradino e risposta al disturbo del sistema retroazionato

4.4 Confronto finale

La Tabella 4.1 riassume le prestazioni dei diversi controllori progettati nel corso del capitolo. Come ci aspettavamo, l'utilizzo di SISO Tool ha permesso di ottenere compensatori più performanti: in particolare $C_2(s)$ offre nel complesso il miglior compromesso tra tutte le specifiche di progetto.

Da notare comunque come il controllore $C_{PI}(s)$ rappresenti una valida alternativa in quanto il calo delle prestazioni è compensato dalla semplicità della struttura.

	Controllore	Tempo di assestamento	Sovraelongazione	Effetto del disturbo sull'uscita
Progetto analitico	$C_{PI}(s)$	2.33ms	0.401%	$\pm 0.0083\text{rad}$
	$C_{ant}(s)$	2.4ms	0.685%	$\pm 0.0081\text{rad}$
SISO Tool	$C_1(s)$	1.83ms	1.78%	$\pm 0.0064\text{rad}$
	$C_2(s)$	2.12ms	0%	$\pm 0.0072\text{rad}$

Tabella 4.1: prestazioni dei diversi compensatori progettati. Per ogni colonna è messo in evidenza il miglior risultato ottenuto. Sono stati omessi i compensatori $C_1^1(s)$ e $C_1^2(s)$ in quanto non consentono il soddisfacimento delle specifiche.

Capitolo 5

Sensibilità alle variazioni parametriche

Un elemento importante per valutare le prestazioni di un sistema BIBO stabile è la sensibilità alle variazioni parametriche: nella pratica infatti i parametri fisici, oltre ad essere noti con un certo grado di incertezza, possono modificare il loro valore in conseguenza di variazioni delle condizioni operative o dell'usura stessa del dispositivo. L'obiettivo che ci poniamo adesso è quindi studiare la robustezza della stabilità e delle prestazioni dinamiche del sistema controllato mediante il compensatore $C_2(s)$ progettato nel precedente capitolo.

Ponendoci in un caso semplificato, assumiamo che la costante elastica K_e sia, tra tutti i parametri presenti nel modello del sistema, quella che potrebbe essere soggetta a maggiore variazione rispetto al valore stimato. Scriviamo innanzitutto il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso $p_{cl}(s)$ in funzione di K_e . Dopo alcuni passaggi si trova:

$$p_{cl}(s) = d_F(s) + K_e n_F(s)$$

dove:

$$d_F(s) = 16 \cdot 10^{-15} s^5 + 16.0092 \cdot 10^{-8} s^4 + 9.2106 \cdot 10^{-4} s^3 + 14.449 s^2 + 34257.49 s + 10^4 \cdot 3531.7$$

e

$$n_F(s) = 4 \cdot 10^{-10} s^3 + 4.002 \cdot 10^{-3} s^2 + 20s$$

Determinare gli zeri del polinomio $p_{cl}(s)$ al variare di K_e equivale allora a studiare il luogo positivo delle radici della funzione di trasferimento ausiliaria

$F(s) = \frac{n_F(s)}{d_F(s)}$, riportato in Figura 5.1.

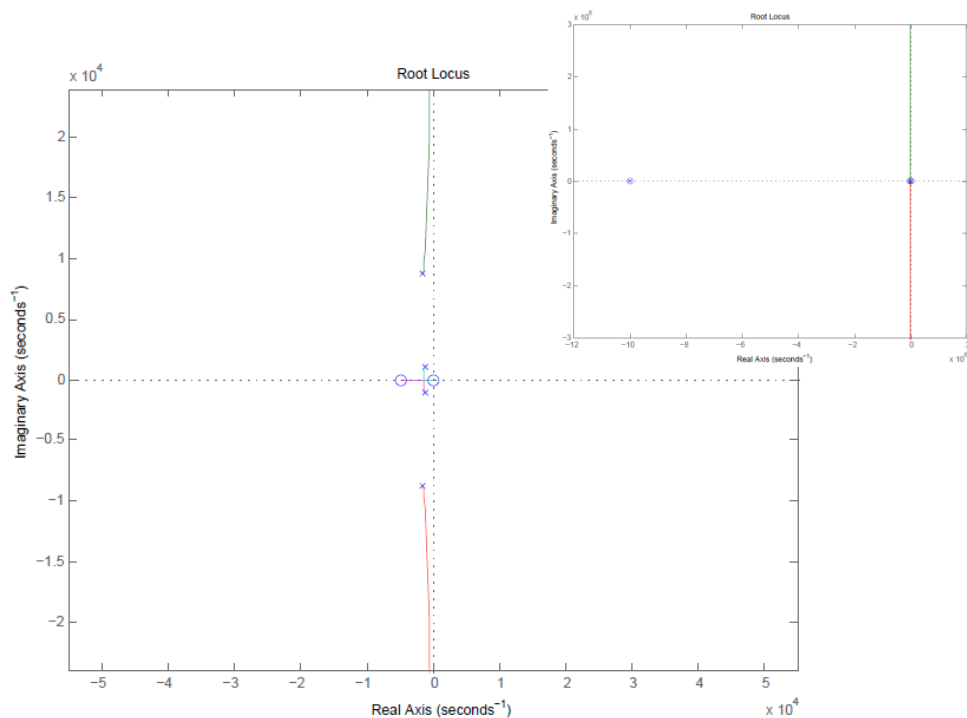


Figura 5.1: luogo positivo delle radici della fdt ausiliaria $F(s)$ (in alto a destra) e ingrandimento della zona di interesse

Dalla figura risulta evidente come il sistema chiuso in retroazione conservi la asintotica stabilità per qualsiasi valore positivo della costante elastica K_e .

Non ci resta allora che andare a vedere se lievi variazioni del parametro possano pregiudicare il soddisfacimento delle specifiche di progetto. I risultati di alcune simulazioni Matlab raccolti nella Tabella 5.1 dimostrano come, nonostante un generale peggioramento delle prestazioni, anche in caso di variazioni di $\pm 50\%$ sia le specifiche sul transitorio della risposta al gradino sia quella sulla reiezione del disturbo vengano comunque rispettate. Si tratta di un intervallo di variazioni piuttosto ampio, difficilmente superato nei casi pratici, e ciò ci consente di dire che il compensatore $C_2(s)$ rende il risultante sistema retroazionato poco sensibile alle variazioni del parametro K_e .

Variazione percentuale	Valore K_e	Tempo di assestamento	Sovraelongazione	Effetto del disturbo sull'uscita
-50%	400N · m/rad	2.64ms	7.04%	± 0.0074 rad
-30%	560N · m/rad	2.44ms	3.64%	± 0.0073 rad
-10%	720N · m/rad	2.08ms	0.77%	± 0.0072 rad
-	800N · m/rad	2.12ms	0%	± 0.0072 rad
+10%	880N · m/rad	2.68ms	0%	± 0.0072 rad
+30%	1040N · m/rad	3.25ms	0%	± 0.0071 rad
+50%	1200N · m/rad	3.78ms	0%	± 0.007 rad

Tabella 5.1: conseguenze di alcune variazioni del parametro K_e sulle prestazioni del sistema controllato mediante il compensatore $C_2(s)$

Appendice A

Codice Matlab

Si riporta di seguito l'intero codice Matlab sviluppato nel corso dei vari capitoli per visualizzare i diagrammi di Bode e Nyquist ed effettuare le necessarie simulazioni.

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% testinaHardDisk.m %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all

% ----- CAPITOLO 2 -----

% Definizione dei parametri fisici:
R=20;
L=4e-3;
Kfem=1e-3;
J=4e-5;
C=0.03;
Ki=1e+4;
Ke=800;

% fdt in catena aperta G(s):
numG=[Ki];denG=[L*J J*R+L*C R*C+L*Ke+Kfem*Ki R*Ke];
G=tf(numG,denG);

% poli della fdt G(s):
poliG=roots(denG);

% risposta al gradino del sistema in catena aperta:
t=(0:0.0001:0.008);
figure
step(G,t)
title('Risposta al gradino della funzione di trasferimento G(s)')

% diagramma di Bode delle ampiezze di G(s):
bodeasin(numG,denG,1,100000,'mod')
grid on
title('Diagramma di Bode reale e asintotico di G(s)')

% diagramma di Bode delle fasi di G(s):
bodeasin(numG,denG,1,100000,'arg')
grid on
title('Diagramma di Bode reale e asintotico della fase di G(s)')

% diagramma di Nyquist di G(s):
figure
nyquist(G)
title('Diagramma di Nyquist di G(s)')
```

```

% ----- CAPITOLO 4 -----

% Controllore CI1(s):
numCI1=[3071];
denCI1=[1 0];
CI1=tf(numCI1,denCI1);

figure
bode(CI1*G)
grid on
title('Diagramma di Bode della f.d.t. CI1(s)G(s)')

W=feedback(CI1*G,1);

t=(0:0.0001:0.02);
figure
step(W,t)
title('Risposta al gradino del sistema controllato - controllore
CI1(s)')

Gd=G/(1+CI1*G);

t=(0:0.00001:0.5);
dv=85e-3*sin(314*t);
yd=lsim(Gd,dv,t);
figure
plot(t,yd)
title('Risposta al disturbo del sistema controllato - controllore
CI1(s)')

% Controllore CI2(s):
numCI2=[1377];
denCI2=[1 0];
CI2=tf(numCI2,denCI2);

% Controllore CPI(s):
zPI=[-1239.8];
pPI=[0];
kPI=[3071*1/1239.8];
CPI=zpk(zPI,pPI,kPI);
CPI=tf(CPI);

% Controllore Cant(s):
zAnt=[-0.316e-3 -1239.8];
pAnt=[0 -1];
kAnt=[3.162e+3/1239.8];
Cant=zpk(zAnt,pAnt,kAnt);
Cant=tf(Cant);

% ----- CAPITOLO 5 -----

% fdt ausiliaria F(s):
numF=[4e-10 4.002e-3 20 0];
denF=[16e-15 16.0092e-8 9.2106e-4 14.449 3.425749e+4 3531.7e+4];

```

```

F=tf(numF,denF);

figure
rlocus(F)

% Simulazioni per lo studio della sensibilità alle variazioni
parametriche:
Ke=800; % valore nominale del parametro
%Ke=400;
%Ke=560;
%Ke=720;
%Ke=880;
%Ke=1040;
%Ke=1200;

% controllore C2(s):
zC2=[-1/0.00013 -1/0.00084];
pC2=[0 -10e+7];
kC2=3531.7*0.00013*0.00084*10e+7;
C2=zpk(zC2,pC2,kC2);
C2=tf(C2);

W=feedback(C2*G,1);

t=(0:0.0001:0.008);
figure
step(W,t)
title('Risposta al gradino del sistema controllato - controllore
C2(s)')

Gd=G/(1+C2*G);

t=(0:0.00001:0.5);
dv=85e-3*sin(314*t);
yd=lsim(Gd,dv,t);
figure
plot(t,yd)
title('Risposta al disturbo del sistema controllato - controllore
C2(s)')

```

Appendice B

Sovraelongazione e tempo di assestamento per un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati

Scopo di questa Appendice è mettere in relazione, per un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati, la sovraelongazione e il tempo di assestamento al 2% con lo smorzamento e la pulsazione naturale dei poli.

Sia dato un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati e funzione trasferimento:

$$W_{cl}(s) = \frac{1}{1 + 2 \frac{\xi_{cl}}{\omega_{cl}} s + \frac{s^2}{\omega_{cl}^2}}$$

Vogliamo determinare la relazione approssimata che lega la sovraelongazione S e lo smorzamento ξ_{cl} dei poli complessi.

Determiniamo innanzitutto la trasformata di Laplace della risposta al gradino unitario $W_{-1}(s)$:

$$W_{-1}(s) = \frac{W_{cl}(s)}{s} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{1 + 2 \frac{\xi_{cl}}{\omega_{cl}} s + \frac{s^2}{\omega_{cl}^2}}$$

Il coefficiente A può essere determinato come:

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} s W_{-1}(s) = W_{cl}(0) = 1$$

Per la parte restante della risposta al gradino abbiamo invece:

$$\begin{aligned} \frac{W_{cl}(s)}{s} - \frac{A}{s} &= \frac{1}{s \left(1 + 2 \frac{\xi_{cl}}{\omega_{cl}} s + \frac{s^2}{\omega_{cl}^2} \right)} - \frac{1}{s} = - \frac{2\xi_{cl}\omega_{cl} + s}{s^2 + 2\xi_{cl}\omega_{cl}s + \omega_{cl}^2} = \\ &= - \frac{s + \xi_{cl}\omega_{cl}}{(s + \xi_{cl}\omega_{cl})^2 + \omega_{cl}^2(1 - \xi_{cl}^2)} - \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1 - \xi_{cl}^2}} \frac{\omega_{cl}\sqrt{1 - \xi_{cl}^2}}{(s + \xi_{cl}\omega_{cl})^2 + \omega_{cl}^2(1 - \xi_{cl}^2)} \end{aligned}$$

La trasformata di Laplace della risposta al gradino risulta dunque:

$$\begin{aligned} W_{-1}(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s + \xi_{cl}\omega_{cl}}{(s + \xi_{cl}\omega_{cl})^2 + \omega_{cl}^2(1 - \xi_{cl}^2)} \\ &\quad - \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1 - \xi_{cl}^2}} \frac{\omega_{cl}\sqrt{1 - \xi_{cl}^2}}{(s + \xi_{cl}\omega_{cl})^2 + \omega_{cl}^2(1 - \xi_{cl}^2)} \end{aligned}$$

Antitrasformando troviamo la risposta al gradino unitario del sistema con funzione di trasferimento $W_{cl}(s)$:

$$w_{-1}(t) = 1 - e^{-\xi_{cl}\omega_{cl}t} \left[\cos\left(\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}t\right) + \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}} \sin\left(\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}t\right) \right]$$

per $t > 0$, la cui derivata prima rispetto al tempo risulta, dopo alcuni passaggi:

$$\frac{dw_{-1}(t)}{dt} = \frac{\omega_{cl}}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}} e^{-\xi_{cl}\omega_{cl}t} \sin\left(\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}t\right)$$

Il primo istante in cui $\frac{dw_{-1}(t)}{dt}$ si annulla è:

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}}$$

Possiamo ragionevolmente ipotizzare che tale istante coincida con l'istante in cui la risposta al gradino $w_{-1}(t)$ assuma il valore massimo (cioè si scosti maggiormente dal valore finale):

$$w_{-1}^{MAX} = w_{-1}(t_1) = 1 + e^{-\pi \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}}}$$

La sovraelongazione risulta quindi:

$$S = \frac{w_{-1}^{MAX} - w_{-1}(+\infty)}{w_{-1}(+\infty)} 100\% = e^{-\pi \frac{\xi_{cl}}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}}} 100\%$$

Determiniamo adesso la relazione tra il tempo di assestamento al 2% T_a e la pulsazione naturale ω_{cl} dei poli.

Riscriviamo la risposta al gradino trovata in precedenza nel modo seguente per un opportuno angolo ϕ :

$$\begin{aligned} w_{-1}(t) &= 1 - e^{-\xi_{cl}\omega_{cl}t} \frac{1}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}} \cos\left(\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}t + \phi\right) \\ &= 1 - \bar{y}_{tr}(t) \cos\left(\omega_{cl}\sqrt{1-\xi_{cl}^2}t + \phi\right) = 1 - y_{tr}(t) \end{aligned}$$

La funzione $y_{tr}(t)$ oscilla quindi tra $\pm \bar{y}_{tr}(t)$, funzioni che rappresentano l'involuppo del termine oscillante ad ampiezza variabile. Ne consegue che, in prima approssimazione, è ragionevole pensare che la risposta al gradino $w_{-1}(t)$ si assesti definitivamente all'interno della fascia:

$$0.98w_{-1}(+\infty) \leq w_{-1}(t) \leq 1.02w_{-1}(+\infty)$$

ovvero da un certo istante in poi valga:

$$-0.02 \leq y_{tr}(t) \leq 0.02$$

non appena si verifica, ad un certo istante, la condizione:

$$\bar{y}_{tr}(t) = 0.02$$

Possiamo quindi ricavare una stima approssimata del tempo di assestamento al 2% risolvendo l'equazione nell'indeterminata T_a :

$$\bar{y}_{tr}(T_a) = e^{-\xi_{cl}\omega_{cl}T_a} \frac{1}{\sqrt{1-\xi_{cl}^2}} = 0.02$$

la cui soluzione è:

$$T_a = - \frac{\ln \sqrt{1 - \xi_{cl}^2} + \ln 0.02}{\xi_{cl} \omega_{cl}}$$

Le formule cui siamo giunti non rivestono in realtà particolare importanza nella teoria dei Controlli Automatici e le ipotesi semplificative formulate possono non essere verificate nei casi pratici. Osserviamo ad esempio come nel caso analizzato nel presente lavoro l'assunzione di calcolare la sovraelongazione nel primo istante in cui la derivata della risposta al gradino si annulla risulti raramente verificata (a seconda dei diversi controllori progettati). Tuttavia ciò non costituisce un problema, dal momento che i compensatori progettati garantiscono il soddisfacimento delle specifiche di progetto: l'utilità di queste formule è fornire dei valori approssimati, soggetti poi agli aggiustamenti e alle verifiche successive che caratterizzano la sintesi per tentativi.

Bibliografia

Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, Controlli Automatici, Libreria Progetto, Padova 2008

Mariagrazia Dotoli, Maria Pia Fanti, MATLAB Guida al laboratorio di automatica, Città Studi Edizioni, Torino 2008

Dispensa del corso di Fondamenti di Automatica del Prof. Antonio Bicchi, Università di Pisa, reperibile al sito: <http://www.centropiaggio.unipi.it>

<http://www.mathworks.it>

Non ti arrendere mai

*Non ti arrendere mai,
neanche quando la fatica si fa sentire,
neanche quando il tuo piede inciampa,
neanche quando i tuoi occhi bruciano,
neanche quando i tuoi sforzi sono ignorati,
neanche quando la delusione ti avvilita,
neanche quando l'errore ti scoraggia,
neanche quando il tradimento ti ferisce,
neanche quando il successo ti abbandona,
neanche quando l'ingratitudine ti sgomenta,
neanche quando l'incomprensione ti circonda,
neanche quando la noia ti atterra,
neanche quando tutto ha l'aria del niente,
neanche quando il peso dei peccati ti schiaccia.
Invoca il tuo Dio, stringi i pugni, sorridi... e ricomincia!*