

**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA**  
**Dipartimento di Ingegneria Industriale**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria  
Aerospaziale

**GRID REFINEMENT ADATTATIVO APPLICATO  
ALLA TEORIA PERIDYNAMICS**

Relatore: ing. Mirco Zaccariotto

Correlatore: prof. Ugo Galvanetto

Laureando: Daniele Dipasquale

Anno Accademico 2012/2013



SOMMARIO .....	13
1 INTRODUZIONE .....	15
1.1 Una panoramica sull'Adaptive Refinement e modelli Multiscala.....	17
1.2 La teoria Bond-Based Peridynamic .....	22
1.2.1 Equazioni del moto .....	22
1.2.2 Definizione di danneggiamento.....	27
1.2.3 Implementazione numerica della bond-based peridynamic .....	31
1.2.4 Applicazione delle condizioni al contorno e “skin effect” .....	35
1.2.5 Adaptivity refinement applicato alla peridynamic .....	37
2 SVILUPPO DELL'ADAPTIVE GRID REFINEMENT E SUOI EFFETTI IN ANALISI DINAMICHE 2D .....	43
2.1 Strategia per l'implementazione dell'adaptive grid refinement .....	43
2.1.1 Criterio per l'attivazione dell'adaptive refinement .....	45
2.1.2 Modalità utilizzata per la generazione dei nuovi nodi.....	49
2.1.3 Interpolazione e aggiornamento Bond della griglia.....	55
2.2 Indagine degli effetti di un modello non uniforme/multiscala sulla soluzione di analisi dinamiche 2D .....	57
2.2.1 Problema del valore iniziale: propagazione di un'onda continua .....	58
2.2.2 Problema al contorno: propagazione di un'onda discontinua .....	69
3 APPLICAZIONE DELL'ADAPTIVE GRID REFINEMENT NELLA DINAMICA DELLA FRATTURA FRAGILE 2D.....	77
3.1 Piastra posta in trazione e pre-criccata.....	78
3.1.1 Costruzione del modello .....	79
3.1.2 Risultati delle analisi.....	80

3.1.3	Valutazioni delle prestazioni computazionali dell' algoritmo per l' adaptive refinement.....	91
3.2	Esperimento di Kalthoff-Winkler .....	92
3.2.1	Modellazione della piastra .....	93
3.2.2	Risultati dell' esperimento di Kalthoff-Winkler .....	95
3.3	Piastra con foro e cricca laterale.....	104
3.3.1	Modellazione della piastra pre-criccata con foro .....	106
3.3.2	Risultati dei tre modelli analizzati .....	107
	CONCLUSIONI .....	113
	BIBLIOGRAFIA .....	115

Figura 1: Immagine della struttura dati del quadtree nel caso di elementi quadrati. ....	19
Figura 2: Esempio d'interfaccia utilizzata nel Concurrent Multiscale Modeling. ....	20
Figura 3: Immagini riguardanti la strategia di refinement: a) refinement senza coarsening b) refinement e coarsening (Immagini tratta dall'articolo di Rabczuk [34] e di Rashid [37])......	21
Figura 4: Immagine rappresentativa dell'interazione non locale e della pairwise force function (Immagine tratta dalla tesi di dottorato di Kilic [27])......	24
Figura 5: Forma delle funzioni micromodulo inizialmente proposta da Silling (immagine tratta dall'articolo di Bobaru[21]). .....	26
Figura 6: Modello costitutivo di materiale microelastico lineare (PMB) con rottura del singolo bond (Immagine tratta dall'articolo di Silling [48])......	30
Figura 7I: Meshfree di nodi equispaziati nel caso di $m=3$ , a) immagine del volume nodale effettivo che partecipa al calcolo integrale, b) immagine dell'applicazione del fattore correttivo (Immagine tratta dalla tesi di dottorato di Kebin Yu [26])......	32
Figura 8: Immagine dell'applicazione del fattore correttivo di Kebin Yu nel caso di griglia non uniforme.....	33
Figura 9: Nodo sorgente $i$ -esimo con il proprio orizzonte sferico che interseca una superficie libera piana (immagine tratta dalla tesi di dottorato di Kebin Yu [26])......	37
Figura 10: Immagine di griglia non uniforme e multiscale.....	41
Figura 11: Flow Chart del main del tool Matlab dedicato all'analisi dinamica con integrato le funzioni per l'implementazione dell'adaptive refinement di primo livello. ....	44
Figura 12: Flow Chart della funzione "Trigger" per l'implementazione dell'adaptive refinement, sono riportati entrambi i criteri di selezione. ....	47
Figura 13: Operazione di ricerca dei nodi della griglia iniziale adiacenti al nuovo nodo generato dall'adaptive refinement. ....	48
Figura 14: Flow Chart del processo di costruzione della Lista dei "Nodi Segnalati" per l'adaptive refinement. ....	49
Figura 15: Strategia utilizzata per la generazione dei nuovi nodi. ....	51

Figura 16: Forma della regione refined generata dall'attivazione del refinement di un singolo nodo identificato dal Trigger al variare di m, a) m=3, b) m=3,5, c) m=3,7.....	52
Figura 17: Immagini relative al caso di zone refined indipendenti molto vicine che portano all'attivazione della funzione "incolla". .....	53
Figura 18: Flow Chart della funzione "GENERATORE della REGIONE REFINED", utilizzata per la generazione dei nuovi nodi e l'aggiornamento delle proprietà dei nodi refined. ....	54
Figura 19: Modalità di interpolazione adottata dalla funzione Matlab "interp2" (immagine tratta dal doc help di Matlab). ....	56
Figura 20: Contour plot del campo di spostamento iniziale (Eq. 39) imposto per generare l'onda longitudinale di forma gaussiana, con dettaglio della regione refined al centro della piastra. ....	59
Figura 21: Visualizzazione dei modelli A e B.....	60
Figura 22: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,02$ e istante $t=0,038s$ , relativa al modello A. ....	61
Figura 23: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,02$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello A. ....	62
Figura 24: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0202$ e istante $t=0,038s$ , relativa al modello A. ....	62
Figura 25: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0202$ e $t=0,044s$ , relativa al modello A. ....	62
Figura 26: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0227$ e istante $t=0,038s$ , relativa al modello A. ....	63
Figura 27: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0227$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello A. ....	63
Figura 28: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,02$ e istante $t=0,038s$ , relativa al mode.....	63
Figura 29: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,02$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello B. ....	64

Figura 30: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0202$ e istante $t=0,038s$ , relativa al modello B. ....	64
Figura 31: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0202$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello B. ....	64
Figura 32: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0227$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello B. ....	65
Figura 33: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata $y=0,0227$ e istante $t=0,044s$ , relativa al modello B. ....	65
Figura 34: Immagine della perdita di volume di alcuni nodi d'interfaccia, il colore nero evidenzia il volume perso: a) modello B, b) modello B con modifica dell'orizzonte dei nodi con maggiore perdita volumetrica.....	66
Figura 35: Confronto dei Contour plot della perdita percentuale della densità di energia potenziale tra il modello multiscala e quello con orizzonte corretto. ....	67
Figura 36: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate $x=0,034$ e $y=0,02$ , relativo al Modello A. ....	68
Figura 37: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate $x=0,034$ e $y=0,02$ , relativo al Modello B. ....	68
Figura 38: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate $x=0,034$ e $y=0,02$ , relativo al Modello B con apportata modifica dell'orizzonte. ....	69
Figura 39: Immagine dei quattro modelli di griglia utilizzati per la discretizzazione della piastra. ....	71
Figura 40: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo centrale della regione refined (coordinate $x=0,02$ e $y=0,02$ ). ....	71
Figura 41: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate $x=0,0202$ e $y=0,0165$ ). ....	70
Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo centrale della regione refined (coordinate $x=0,02$ e $y=0,02$ ). ....	72

Figura 43: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate $x=0,0202$ e $y=0,0165$ ).....	73
Figura 44: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo centrale della regione refined (coordinate $x=0,02$ e $y=0,02$ ). .....	73
Figura 45: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate $x=0,0202$ e $y=0,0165$ ). .....	73
Figura 46: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo centrale della regione refined (coordinate $x=0,02$ e $y=0,02$ ).....	74
Figura 47: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate $x=0,0202$ e $y=0,0165$ ).....	74
Figura 48: Andamento temporale dello scostamento relativo dell'energia totale del sistema dei due modelli non-uniforme/multiscala con quello uniforme/monoscala coarse.....	75
Figura 49: Andamento temporale dello scostamento relativo dell'energia totale del sistema dei due modelli non-uniforme/multiscala con quello uniforme/monoscala refined. ....	76
Figura 50: Setup della piastra pre-criccata lateralmente (Immagine tratta dall'articolo di Bobaru [21]). .....	78
Figura 51: Modello di griglia con 4000 nodi utilizzata per le analisi del modello uniforme e adaptive, con l'immagine ingrandita di come è modellata l'apice della cricca. ....	79
Figura 52: Immagini di alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento subito dal modello adaptive. ....	81
Figura 53: Immagini di alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento subito dal modello adaptive. ....	82
Figura 54: Ingrandimento dell'inizio dell'evoluzione del crack branching in due istanti di tempo, relativi al modello adaptive.....	83
Figura 55: Confronto dei bond rotti delle configurazioni finali dei tre modelli. ....	84
Figura 56: Posizione dell'apice della cricca lungo la direzione X. ....	85



Figura 57: Posizione dell'apice della cricca lungo la direzione Y. ....	86
Figura 58: Confronto degli andamenti temporali della velocità di propagazione della cricca tra il modello adaptive/multiscala e quello uniforme/monoscala a minore densità nodale. ....	87
Figura 59: Confronto degli andamenti temporali della velocità di propagazione della cricca tra il modello adaptive/multiscala e quello uniforme/monoscala a maggiore densità nodale. ....	87
Figura 60: Deformata della configurazione finale del modello di griglia uniforme (4000 nodi) con contour plot del campo di spostamenti $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.....	89
Figura 61: Deformata della configurazione finale del modello di griglia adaptive (4000/6429 nodi) con contour plot del campo di spostamenti $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5. ....	89
Figura 62: Deformata della configurazione finale del modello di griglia uniforme (16000 nodi) con contour plot del campo di spostamenti $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5. ....	90
Figura 63: Andamenti temporali dello spostamento di un nodo posizionato in prossimità della cricca iniziale della piastra.....	90
Figura 64: Setup dell'esperimento di Kalthoff-Winkler. ....	93
Figura 65: Modellazione della piastra di Kalthoff, a) modello come network dei bond, b) dettaglio di come sono modellate le cricche iniziali. ....	94
Figura 66: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5. ....	96
Figura 67: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5. ....	97
Figura 68: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5. ....	97
Figura 69: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5. ....	98

Figura 70: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.....	98
Figura 71: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.....	99
Figura 72: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.....	99
Figura 73: Percorsi di frattura predetti da, a) Kosteski , DEM b) Belytschko, XFEM with loss of hyperbolicity criterion c) Silling, bond based peridynamic con griglia uniforme (immagini tratte dall'articolo di Kosteski [27-28] e Silling [51]). .....	100
Figura 74: Immagine della pendenza delle cricche primarie, a) modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5, b) modello con materiale 18Ni1900 (Immagini ottenute dall'ingrandimento di Fig. 69 e 72).. .....	102
Figura 75: Andamento della velocità di propagazione della frattura primaria del modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5, con riportata la velocità limite di Rayleigh.....	102
Figura 76: Andamento della velocità di propagazione della frattura primaria del modello con materiale 19Ni1900, con riportata la velocità limite di Rayleigh. ....	103
Figura 77: Deformata del modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5 con contourplot del campo di spostamenti in direzione X, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5. ....	103
Figura 78: Deformata del modello con materiale 19Ni1900 con contourplot del campo di spostamenti in direzione X, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5. ....	104
Figura 79: Setup della piastra con foro e cricca laterale (immagine tratta dall'articolo di Kosteski [28]). .....	105
Figura 80: Immagine dei tre modelli utilizzati per simulare l'interazione del percorso della frattura con il foro.....	106
Figura 81: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello A. ....	108
Figura 82: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello A. ....	109

Figura 83: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello B. ....	109
Figura 84: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello B. ....	110
Figura 85: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello C. ....	110
Figura 86: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello C. ....	111
Figura 87: Deformate con relativo contour plot del campo di spostamenti lungo la direzione Y delle configurazioni finali, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 10. ....	112
Figura 88: Risultati ottenuti da Tabiei (immagine tratta dall'articolo di Tabiei [53]).	112



## SOMMARIO

Tra le nuove teorie del continuo applicate allo studio della meccanica dei solidi, si dimostra di particolare interesse la teoria recentemente proposta da dott. Silling [51]: la Bond-Based Peridynamic, questa teoria è basata su un approccio non locale e in quanto tale prevede l'interazione a distanza tra coppie di punti materiale nel dominio continuo. Questa teoria è nata assumendo implicitamente che la dimensione dell'interazione non locale rimanga costante su tutto il dominio analizzato, si capisce come l'utilizzo di una mesh uniforme e monoscala per la sua implementazione numerica richieda delle risorse computazionali eccessive per raggiungere elevati livelli di accuratezza nella soluzione. Per questo si è sviluppato un modello di grid refinement adattativo 2D che consenta di aumentare la risoluzione, intesa come aumento della densità nodale e riduzione dell'interazione non locale, solamente nelle regioni d'interesse come l'apice della cricca che si propaga nel mezzo materiale.

L'utilizzo di una griglia non uniforme /multiscala è già stato affrontato da Bobaru [7-8] in analisi sia statiche sia dinamiche 1D, in questo studio sono sviluppati gli algoritmi per l'implementazione numerica dell'adaptive refinement in analisi dinamiche 2D, adottando una strategia semplice e veloce per la generazione dei nodi che si vanno ad aggiungere a quelli presenti nella griglia iniziale; inoltre è aggiunto un criterio per l'attivazione del refinement basato sul livello di danneggiamento, oltre a quello proposto da Bobaru della densità di energia potenziale.

Sono indagati gli effetti provocati dall'utilizzo di una griglia non uniforme/multiscala sulle soluzioni riguardanti la propagazione di un'onda gaussiana e la propagazione di un'onda di tensione generata dall'applicazione a gradino di un carico di trazione, in un modello di piastra 2D.

Queste analisi evidenziano come la regione "refined" manifesti delle perdite di energia, perdite che sono comunque trascurabili da un punto di vista dell'energia totale del sistema, oltre a effetti trascurabili della riflessione di onde spurie.

Al fine di convalidare il modello di mesh adattativa qui proposto, sono studiati tre casi che rappresentano il benchmark della dinamica della frattura fragile, riuscendo a catturare le principali caratteristiche messe in evidenza da questi studi.

## 1 INTRODUZIONE

Oggi giorno lo studio di fenomeni riguardanti la dinamica della frattura fragile rimane una sfida aperta in ambito scientifico data la complessità che si cela ai meccanismi che portano a manifestare tale fenomeno (v. Ravi Chandar [38-42]).

A tale proposito sono stati sviluppati numerosi metodi numerici per riuscire a catturare tali meccanismi, questi ultimi si differenziano principalmente nella teoria su cui si basano, la teoria locale e quella non locale.

La tecnica di modellazione FEA (Finit Element Analysis) rientra nella categoria della teoria locale le cui equazioni del moto si basano nella definizione di equazioni differenziali parziali del campo di spostamenti del dominio spaziale analizzato.

Le principali difficoltà incontrate dall'utilizzo delle equazioni differenziali è che non sono definibili in corrispondenza di discontinuità del campo di spostamenti, ad esempio dovute alla presenza di vuoti o cricche nel mezzo materiale.

Queste difficoltà si sono superate, anche se non del tutto, con l'utilizzo di tecniche particolari che integrano le equazioni del moto della teoria classica con particolari equazioni, tra queste si ricorda il XFEM (eXtended Finite Element Method) (v. Belytschko [6]) che consente di trattare fenomeni quali la propagazione della cricca permettendo la suddivisione degli elementi finiti presenti nella mesh iniziale.

Il problema di queste tecniche è che richiedono modelli di danneggiamento complessi per prevedere la nucleazione della frattura e la sua propagazione, richiedendo inoltre dei metodi per il tracciamento della traiettoria seguita dalla frattura.

Inoltre l'approccio utilizzato dai metodi locali è di tipo macroscopico, con l'assenza di una lunghezza scala caratteristica del materiale analizzato.

A differenza della teoria locale i metodi che si basano sulla teoria non locale prevedono l'interazione a distanza tra punti materiale, tra questi si ricorda il metodo denominato MD (Molecular Dynamic) il quale prevede l'interazione a livello atomico/molecolare consentendo di predire fenomeni microscopici quali la dinamica della frattura come naturale conseguenza della rottura delle forze di coesione atomiche, senza l'applicazione di particolari criteri di danneggiamento.

Il problema di molti metodi non locali è rappresentato dalla eccessiva necessità di risorse derivanti da una modellazione su scala atomica/microscopica, per cui sono generalmente accoppiati con metodi locali che come tali sono molto più efficienti.

Quest'accoppiamento ha portato alla nascita dei cosiddetti modelli multiscala, questi ancora oggi soffrono di problematiche riguardanti la corretta trasmissione delle onde di tensione tra due regioni di differente lunghezza scala.

Una teoria non locale introdotta in questi ultimi anni dal Dottor Silling [51] (2000) è denominata Bond-Based Peridynamic (BBP), questa teoria è un'estensione nel continuo della MD poiché prevede l'interazione a distanza tra coppie di punti materiale in un mezzo continuo (e non discreto come la MD), la distanza di tale interazione è chiamato orizzonte ed è relazionabile alla lunghezza scala caratteristica del materiale analizzato (v. Askari [1]).

Le potenzialità derivanti da questa teoria stanno nel fatto che le equazioni del moto sono definite per mezzo di equazioni integrali piuttosto che differenziali rendendola applicabile anche in presenza di discontinuità.

La teoria BBP è nata assumendo implicitamente che l'orizzonte rimanga costante su tutto il dominio, implementandola numericamente con l'utilizzo di una griglia uniforme, una strategia di questo tipo richiederebbe elevate risorse computazionali per raggiungere delle soluzioni accurate.

Per questo Bobaru [7-8] ha pensato di applicare alla BBP la strategia denominata "adaptive refinement" che consente di aumentare la risoluzione dell'analisi, intesa come l'aumento della densità nodale e la riduzione dell'orizzonte, nelle regioni di maggiore interesse, cioè le regioni con forti gradienti di tensione e deformazione.

Gli studi di Bobaru riguardano analisi statiche 1D /2D e analisi dinamiche 1D, mentre in questo studio si è implementato l'adaptive grid refinement in analisi 2D che riguardano la propagazione dinamica di fratture fragili, portando all'attivazione automatica dell'aumento di risoluzione nella regione nella quale si manifesta la nucleazione della frattura secondo appositi criteri basati sulla densità di energia potenziale e lo stato di danneggiamento presenti nel dominio analizzato.



Per capire meglio il principio di funzionamento delle tecniche di adaptive refinement e il concetto di modello multiscala nel paragrafo 1.1 viene data una loro presentazione, mentre nel paragrafo 1.2 è riportato in dettaglio i fondamenti della teoria BBP con la trattazione degli effetti provocati dall'utilizzo di una mesh non uniforme/multiscala.

Nel capitolo 2 sono riportati in dettaglio la strategia seguita per l'implementazione dell'adaptive refinement e gli studi condotti per valutare gli effetti provocati dalla presenza di una regione non uniforme/multiscala sulla soluzione di analisi dinamiche 2D ottenute con una mesh uniforme/monoscala.

Per dimostrare l'efficacia di una modellazione adattativa della teoria BBP nel capitolo 3 sono riportati tre casi di studio che costituiscono il benchmark nel campo delle analisi della dinamica della frattura fragile.

## **1.1 Una panoramica sull'Adaptive Refinement e modelli Multiscala**

Lo sviluppo crescente della tecnologia dei computer ha consentito l'utilizzo sempre più massiccio di tecniche numeriche applicate alla meccanica dei solidi, dove il corpo è rappresentato in forma discretizzata attraverso tecniche di generazione di griglia.

Il problema è che la qualità della soluzione è fortemente influenzata dalla quantità dei nodi utilizzati nella griglia (gradi di libertà adottati), il cui aumento porta generalmente a una crescita non lineare delle risorse computazionali necessarie.

Perciò da qualche tempo si è diffusa la tecnica di modellazione, che prende il nome di "adaptive grid refinement", introdotta nelle simulazioni numeriche al fine di migliorare sia l'accuratezza della soluzione sia l'efficienza computazionale; la loro strategia si basa nel generare un aumento di densità dei nodi della griglia in quelle regioni del dominio in cui si hanno forti gradienti di tensione e deformazione, come in prossimità di una cricca che si propaga.

Nell'ambito delle analisi FEM (Finit Element Mesh) la tecnica dell'adaptive refinement è stata introdotta da Babuska e Rheinbolt [3], la cui attivazione avviene in modo automatico secondo differenti criteri basati sulla stima dell'errore dell'approssimazione

fornita dagli elementi finiti (v. ad esempio Oden [33] e Rank [36]); inoltre nell'ambito FEM si distinguono tre tipologie di adaptive refinement: il "h-adaptive" il quale attiva l'aumento di densità dei nodi, il "p-adaptive" che attiva l'incremento del grado della funzione di forma dell'elemento e il "hp-adaptive" che è una combinazione dei due precedenti.

Sempre nell'ambito FEM sono stati fatti ampi studi sull'adaptive refinement sia nell'ambito dell'analisi dinamica sia soprattutto in quella statica, evidenziando fenomeni di riflessioni spurie nella propagazione di onde elastiche che attraversano la zona d'interfaccia tra due zone con elementi finiti di differente dimensione, come dimostrano gli studi di Bazant [4-5] nel caso di analisi 1D.

Gli studi di Bazant affermano come l'entità dell'ampiezza dell'onda che è riflessa all'interfaccia è tanto maggiore quanto è maggiore la differenza della dimensione degli elementi adiacenti, inoltre questo fenomeno di riflessione spurio è rilevante soprattutto in presenza di onde con lunghezza d'onda relativamente piccola (meno di dieci volte la dimensione dell'elemento più grande) anche per piccole differenze della dimensione degli elementi adiacenti (circa il 10%).

Per tale motivo al fine di mitigare questo fenomeno di riflessioni spurie è prassi utilizzare una zona di transizione tra la regione refined e quella coarse, dove la dimensione degli elementi è fatta variare in modo graduale, come riportato negli studi di Bazant [4].

Uno dei modi più utilizzati e semplici per l'implementazione dell'adaptive refinement è ricorrere a una decomposizione ricorsiva tramite "quadtrees" per mesh 2D e "octrees" per mesh 3D, nel caso di elemento quadrilatero la struttura dati del "quadtrees" prevede la sua suddivisione in quattro elementi, ciascuno dei quali può essere suddiviso in quattro elementi e così via, secondo il livello di refinement che si vuole raggiungere, come riportato in Figura 1.

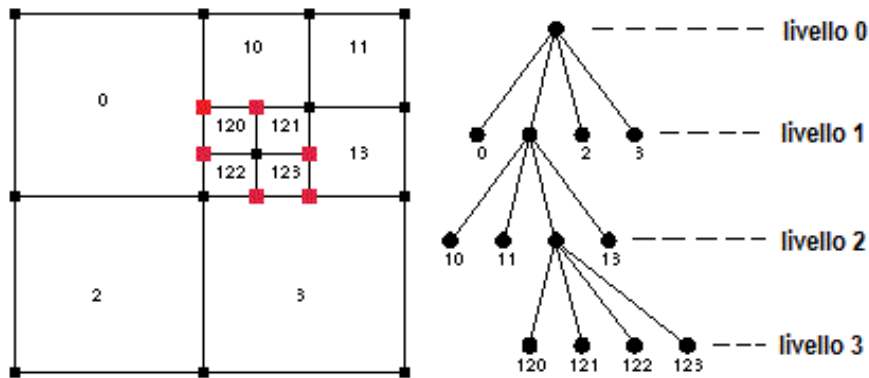


Figura 1: Immagine della struttura dati del quadtree nel caso di elementi quadrati.

La struttura dati “quadtree” è stata ampiamente utilizzata sia nell’ambito della grafica sia del processamento dell’immagine (v. Hunter [20] e Samet [43-46]), ma è stato introdotto nel FEM per la prima volta da Yerry e Shepard, oltre che ha trovato ampia diffusione anche nel metodo dei volumi finiti nell’ambito delle analisi fluidodinamiche. Questa strategia applicata al FEM presenta la problematica che tra elementi adiacenti appartenenti a differenti livelli di refinement si generano i cosiddetti “hanging node”, evidenziati in rosso in Figura 1 portando a una non-conformità della mesh nella zona del refinement; il problema è stato superato applicando complessi algoritmi e funzioni interpolatrici, anche se a discapito dell’efficienza computazionale.

Perciò per aumentare l’efficienza del processo di refinement, il numero di “hanging node” deve essere minimizzato applicando la regola che il livello di refinement tra elementi adiacenti non deve essere superiore a uno.

Come affermato da Bobaru [8], bisogna considerare che l’adaptive refinement sia un ingrediente essenziale nella modellazione multiscala dei materiali, questi ultimi sono definiti tali poiché accoppiano modelli continui con quelli discreti e generalmente caratterizzati da una differente lunghezza scala.

L’esigenza di tale accoppiamento è richiesta qualora si vogliono analizzare fenomeni che si manifestano su scala microscopica e/o atomica, ad esempio come la nucleazione e propagazione di fratture, la risposta di materiali nano compositi e l’influenza della microstruttura metallurgica sul comportamento macroscopico di metalli e leghe.

L'analisi di tali fenomeni richiede l'implementazione di modelli non locali, questi modelli sono molto dispendiosi da un punto di vista delle risorse computazionali, per cui sono accoppiati con metodi continui della teoria meccanica classica, privi di una lunghezza scala, che risultano molto più efficienti.

Si distinguono due approcci di modellazione multiscala, “Hierarchical Approach Multiscale Modeling” il quale prevede il passaggio d'informazioni in modo sequenziale dal modello discreto a quello continuo, oppure il “Concurrent Multiscale Modeling” che risolve simultaneamente entrambi i modelli attraverso un'opportuna zona di transizione, come riportato in Figura 2.

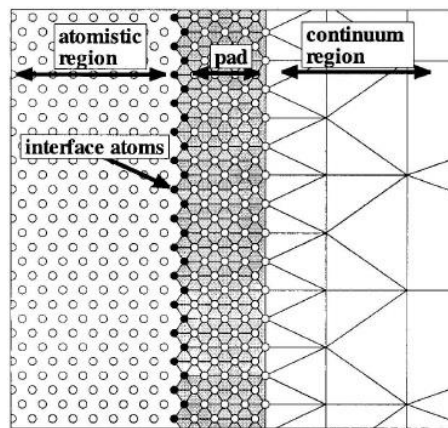


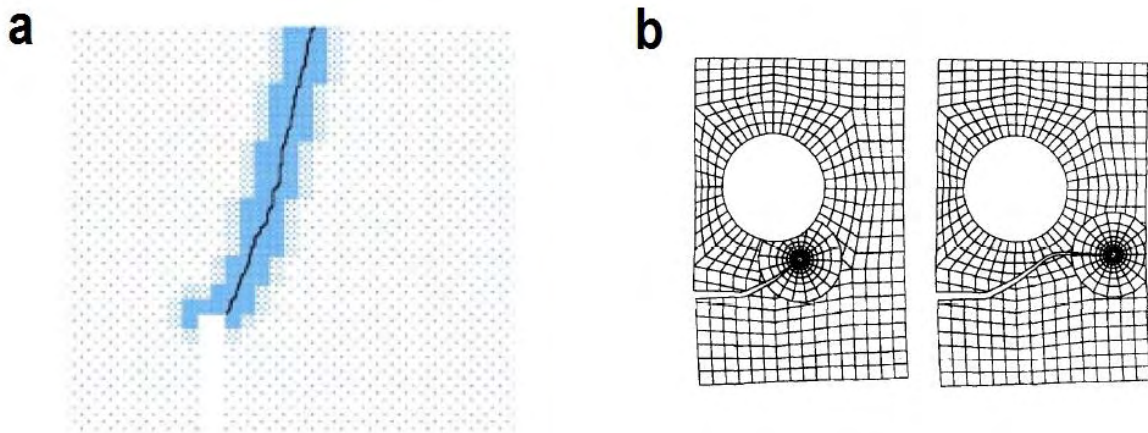
Figura 2: Esempio d'interfaccia utilizzata nel Concurrent Multiscale Modeling.

In quest'ultimo approccio l'accoppiamento tra il modello continuo e il modello discreto porta a manifestare le cosiddette “ghost force”, cioè delle forze spurie che disturbano l'equilibrio della regione di transizione, richiedendo speciali condizioni per la risoluzione di questo problema.

La teoria non locale bond-based peridynamic consente attraverso l'adaptive refinement di implementare una modellazione multiscala, poiché la strategia dell'adaptive refinement introdotta da Bobaru [7-8] prevede non solo l'aumento di densità dei nodi della mesh, ma anche una riduzione della dimensione d'interazione non locale, quest'ultima relazionata alla lunghezza scala del fenomeno che si vuole analizzare.

Inoltre la teoria peridynamic è una teoria non locale del continuo, per cui si ha una transizione continuo-contínuo tra regioni di differente lunghezza scala, ciò comporta

l'assenza di forze spurie, come messo in evidenza nelle analisi condotte in questo studio.



**Figura 3: Immagini riguardanti la strategia di refinement: a) refinement senza coarsening b) refinement e coarsening (Immagini tratte dall'articolo di Rabczuk [34] e di Rashid [37]).**

Bisogna da subito evidenziare che ci sono due differenti approcci per l'implementazione dell'adaptive refinement:

- I nuovi nodi generati dal processo di refinement rimangono nel sistema per tutto il corso dell'analisi (Figura 3.a).
- I nuovi nodi generati dal processo di refinement non rimangono nel modello, si parla più propriamente di processo di refinement/coarsening (Figura 3.b).

Con riferimento alla meccanica della frattura (Figura 3), il primo approccio comporta l'aumento di risoluzione (inteso come aumento della densità dei nodi) che si sviluppa nella regione attorno lungo tutta la traiettoria di propagazione della cricca, mentre il secondo approccio prevede l'aumento di risoluzione solamente in corrispondenza dell'apice della cricca, essendo che a ogni step dell'analisi i nodi generati dall'adaptive refinement sono cancellati attraverso un processo di coarsening per riportare la mesh allo stato originario.

A differenza del primo approccio, il processo di refinement/coarsening deve essere integrato con un modello per tracciare l'evoluzione spaziale del percorso della cricca in una griglia di nodi coarse, introducendo così una maggiore complessità nell'implementazione della teoria peridynamic.

L'utilizzo di una strategia di questo tipo intaccherebbe la semplicità fornita dalla teoria di base della peridynamic nel modellare fenomeni quali la propagazione di fratture; per tale motivo in questo studio si è adottato l'adaptive refinement senza coarsening.

## **1.2 La teoria Bond-Based Peridynamic**

La teoria denominata bond-based peridynamic è stata proposta e sviluppata nell'anno 2000 dal Dottor Silling (v. [48-52] e [2]) e può essere considerata l'equivalente nel continuo della dinamica molecolare, come tale prevede l'interazione a distanza tra coppie di particelle di materiale racchiuse entro un'opportuna distanza denominata orizzonte.

A differenza della teoria classica della meccanica del continuo dove le particelle si limitano a interagire con le particelle adiacenti tramite forze di contatto (da qui il nome di teoria locale), la teoria peridynamic rientra nella categoria dei metodi non locali; si mette da subito in evidenza come la teoria della peridynamic si differenzi da tutti gli altri metodi non locali poiché è una teoria del continuo, tale caratteristica gli permette di fornire risultati che convergono a quelli previsti dalla soluzione della teoria classica come l'orizzonte tende a zero; inoltre la peridynamic è basata su equazioni integrali valide anche in presenza di discontinuità.

### **1.2.1 Equazioni del moto**

Per descrivere il comportamento meccanico di un corpo la teoria classica utilizza equazioni differenziali nel dominio spaziale del campo di spostamenti, attraverso il concetto di tensore di tensione e deformazione. Si capisce come l'utilizzo di equazioni differenziali renda difficoltoso l'affronto di problematiche relative la presenza di discontinuità quali cricche, porosità ecc. a causa dell'impossibilità della loro definizione in corrispondenza di singolarità presenti nel campo di spostamenti.

Punto di forza della teoria BBP è proprio l'utilizzo di relazioni integro-differenziali temporali piuttosto che differenziali per la formulazione delle equazioni del moto, come di seguito riportato

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} \mathbf{f}(\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}' - \mathbf{x}) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

dove  $\mathbf{u}$  indica il campo vettoriale dello spostamento,  $\ddot{\mathbf{u}}$  il campo vettoriale dell'accelerazione,  $\rho$  la densità di massa del materiale nella configurazione iniziale di riferimento,  $\mathbf{b}$  la densità di forza volumetrica e  $\mathbf{f}$  denominata "pairwise force function" che esprime la densità di forza vettoriale che la particella di coordinata  $\mathbf{x}'$  esercita sulla particella di coordinata  $\mathbf{x}$ , entrambe le coordinate riferite alla configurazione iniziale di riferimento dell'indeformata del corpo di dominio  $R_0$ .

La regione d'integrazione  $H_x$  è definita

$$H_x = \{\mathbf{x}' \in R_0: |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta\} \quad (2)$$

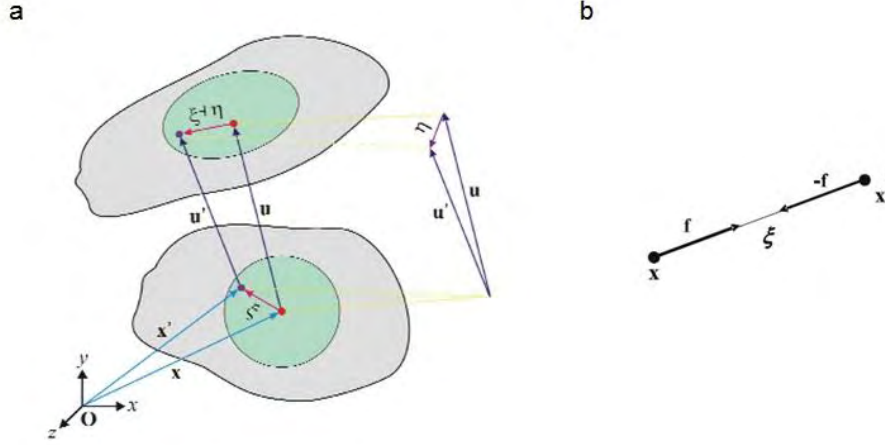
dove  $\delta$  è definito orizzonte e definisce la dimensione dell'interazione non locale.

La dimensione dell'orizzonte può essere correlata alla lunghezza scala intrinseca del materiale (v. Askari [1]), ma d'altra parte alcuni materiali non esibiscono una lunghezza scala poiché non rilevabile dalla propria microstruttura o dalla propria risposta meccanica sotto particolari condizioni di carico; in questi casi l'orizzonte viene scelto dall'utente attraverso considerazioni di convenienza.

Introducendo il vettore posizione relativa tra nodo famiglia e nodo sorgente  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$  nella configurazione di riferimento e il corrispettivo vettore spostamento relativo  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  nell'istante considerato, la pairwise force function può essere espressa nella forma

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = f(y, \boldsymbol{\xi}, t) \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} \quad (3)$$

con  $f$  definita “scalar bond force” e  $y = \|\xi + \eta\|$  che esprime la distanza tra le particelle nell’istante considerato (vedere Figura 4).



**Figura 4: Immagine rappresentativa dell’interazione non locale e della pairwise force function (Immagine tratta dalla tesi di dottorato di Kilic [27]).**

La forma assunta dalla pairwise force function (Figura 4) è conseguenza del rispetto della conservazione della quantità di moto e del momento angolare locale, oltre al fatto che è espressione di un’interazione (chiamata “bond”) tra coppie di particelle, ne consegue che il coefficiente di Poisson nel caso 2D è limitato al valore di 1/3 nella condizione di “plane stress” e di 1/4 nella condizione di “plane strain” e analisi 3D; tale limitazione è stata superata attraverso l’implementazione della teoria denominata state-based peridynamic nel quale l’interazione ha natura tensoriale piuttosto che vettoriale. La scalar bond force racchiude il modello costitutivo del materiale, a tale scopo è introdotta la grandezza

$$s = \frac{y - \|\xi\|}{\|\xi\|} \quad (4)$$

definita “relative elongation” ed ha il significato di deformazione ingegneristica del bond; in particolare un materiale è definito microelastico se esiste una funzione scalare denominata micropotenziale tale che la pairwise force function assume la forma



$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (5)$$

nel caso di materiale microelastico e lineare il micropotenziale è definito

$$w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{c(\|\boldsymbol{\xi}\|)s^2\|\boldsymbol{\xi}\|}{2} \quad (6)$$

dove  $c(\xi)$ , avendo posto per semplicità  $\xi = \|\boldsymbol{\xi}\|$ , è definita funzione micromodulo ed ha il significato di rigidezza elastica del bond, per cui la pairwise force function diventa

$$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} c(\xi)s \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{\|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}\|} & \xi \leq \delta \\ 0 & \xi > \delta \end{cases} \quad (7)$$

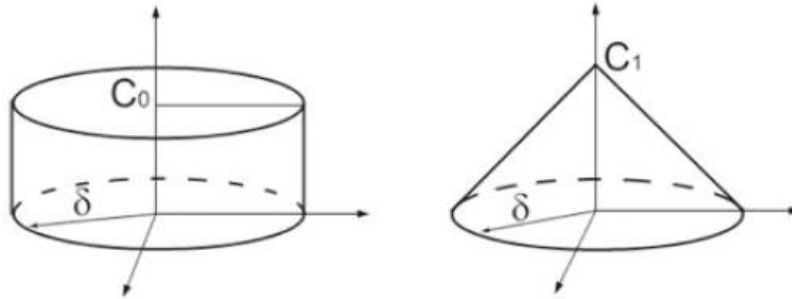
Nella teoria classica un materiale omogeneo ed elastico lineare isotropo è caratterizzato dalle sole due costanti quali il modulo di Young  $E$  e il coefficiente di Poisson  $\nu$ , mentre nella teoria BBP lo stesso materiale è caratterizzato dalla sola funzione micromodulo (essendo  $\nu$  vincolato ai valori di 1/3 o 1/4).

Quest'ultima è posta in relazione con le proprietà elastiche del materiale uguagliando la densità di energia di deformazione elastica prevista dalla teoria classica in una condizione di deformazione isotropa con quella definita dalla teoria peridynamic, nel caso in studio di analisi 2D la densità di energia potenziale è definita

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{H_x} w(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) dV_x = \frac{1}{2} \int_0^\delta \left( \frac{c(\xi)s^2\xi}{2} \right) 2\pi\xi d\xi \quad (8)$$

La funzione micromodulo può assumere differenti forme secondo la modulazione scelta dell'intensità dei bond in funzione della distanza, come ad esempio le funzioni

micromodulo introdotte da Pablo Seleson [46], le prime introdotte da Silling prevedono l'utilizzo di un micromodulo costante e conico come visualizzato in Figura 5.



**Figura 5: Forma delle funzioni micromodulo inizialmente proposta da Silling (immagine tratta dall'articolo di Bobaru[21]).**

Nella condizione di “plane stress” la funzione micromodulo costante è ottenuta tramite l'espressione (con assunto spessore unitario)

$$c(\xi) = c_0 = \frac{6E}{\pi\delta^3(1-\nu)} \quad (9)$$

mentre la funzione micromodulo di tipo conico è ottenuta tramite l'espressione

$$c(\xi) = c_1 \left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right) = \frac{24E}{\pi\delta^3(1-\nu)} \left(1 - \frac{\xi}{\delta}\right) \quad (10)$$

Nella condizione di “plane strain” invece la funzione micromodulo costante è ottenuta tramite l'espressione (con assunto spessore unitario)

$$c(\xi) = c_0 = \frac{6E}{\pi\delta^3(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (11)$$

La teoria BBP ha sviluppato anche una versione linearizzata delle Eq.1, nell'ipotesi di piccoli spostamenti l'equazione del moto può essere riscritta come:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \int_{H_x} [\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})](\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) dV_{x'} + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \quad (12)$$

dove si è introdotto il tensore micromodulo  $[\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})]$  definito

$$[\mathbf{C}(\boldsymbol{\xi})] = \frac{\partial \mathbf{f}(0, \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad \forall \boldsymbol{\xi} \quad (13)$$

per materiale microelastico lineare e micromodulo costante le componenti del tensore micro-modulo assumono la forma

$$C_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = c_0 \frac{\xi_i \xi_j}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} \quad (14)$$

con  $\xi_i$  componente  $i$ -esima della posizione relativa rispetto un sistema di riferimento Cartesiano.

### 1.2.2 Definizione di danneggiamento

Nel paragrafo precedente si sono definite le equazioni del moto e il criterio utilizzato dalla teoria bond-based peridynamic per la definizione del legame costitutivo, in particolare si è visto la definizione di materiale microelastico lineare conosciuto con l'acronimo di PMB (Prototype Microelastic Brittle).

Questa teoria è stata pensata principalmente per analizzare eventi quali fenomeni di frattura e cedimento data la sua potenzialità derivante dall'utilizzo di relazioni integrali piuttosto che differenziali, per cui è possibile affrontare analisi della propagazione sia

statica sia dinamica di cricche con relativa semplicità, se confrontate con le teorie basate sulle tecniche FEA oggi diffuse in tale ambito di ricerca.

La teoria della meccanica classica richiede l'utilizzo di equazioni ausiliarie per governare l'inizio e la propagazione di fratture, equazioni che si complicano sensibilmente qualora si manifestino simultaneamente nucleazioni di frattura in locazioni multiple e/o interazioni tra percorsi di frattura quali fenomeni del crack branching, soprattutto poi in analisi 3D.

Tra le tecniche oggi diffuse e basate sulle equazioni della meccanica classica si cita a titolo informativo la tecnica basata sulla modellazione LEFM (Linear Elastic Fracture Mechanics), la tecnica CZM (Cohesive Zone Models) inizialmente proposta da Dugdal and Barrenblatt e in ultimo la tecnica denominata XFEM (eXtended Finite Element Method) proposta da Belytschko [6], Black and Möes, tutte tecniche in grado di affrontare anche fenomeni complessi quali ad esempio la delaminazione dei materiali compositi.

A differenza delle tecniche sopra citate la teoria peridynamic consente di modellare la frattura semplicemente introducendo la possibilità che il bond si rompa se è stirato oltre una certa quantità definita "critical relative elongation"  $s_0$ , la rottura del bond è irreversibile per cui il modello diventa "history-dependent".

Per separare completamente un corpo in due metà è richiesta la rottura di tutti i bond che attraversano il piano di frattura e che connettono i punti nelle metà opposte, l'energia richiesta per unità di lunghezza di frattura (caso 2D, altrimenti unità di superficie nel caso 3D) è chiamata energia di frattura  $G_0$ .

Tale grandezza è una quantità misurabile del materiale e può essere messa in relazione nel caso di analisi 2D alla critical relative elongation  $s_0$  tramite l'espressione

$$G_0 = 2 \int_0^\delta \int_z^\delta \int_0^{\cos^{-1}(z/\xi)} \left( \frac{c(\xi)s_0^2\xi}{2} \right) \xi d\theta d\xi dz \quad (15)$$

valutando l'integrale con la funzione micromodulo costante (Eq. 9) per il caso di "plane stress" la critical relative elongation assume la forma

$$s_0 = \sqrt{\frac{4\pi G_0}{9E\delta}} \quad (16)$$

mentre l'utilizzo della funzione micromodulo conico (Eq. 10) porta, sempre nella condizione di "plane stress" all'espressione

$$s_0 = \sqrt{\frac{5\pi G_0}{9E\delta}} \quad (17)$$

Da notare come la critical relative elongation sia funzione oltre delle proprietà elastiche del materiale anche dell'orizzonte, in particolare al diminuire di quest'ultimo la forza necessaria per la rottura dei bond aumenta, in accordo con l'esperienza fisica di quanto osservato su scala atomica e subatomica.

Sempre nell'ipotesi di materiale PMB, l'introduzione del modello di danneggiamento porta a modificare l'espressione (Eq. 7) della scalar bond force

$$f(y, \xi, t) = \mu(t, \xi)c(\xi)s \quad (18)$$

dove il parametro  $\mu$  è definito

$$\mu(t, \xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } s < s_0 \text{ for all } 0 \leq t' \leq t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

Il vantaggio di avere introdotto il modello di danneggiamento direttamente all'intero del legame costitutivo del materiale (Figura 6) sta nel fatto che è possibile dare una

definizione univoca dello stato di danneggiamento locale subito da un punto materiale del corpo, definito tramite la relazione

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_{H_x} \mu(\mathbf{x}, t, \xi) dV_{x'}}{\int_{H_x} dV_{x'}} \quad (20)$$

dove  $0 \leq \varphi \leq 1$ , con 0 rappresentativo lo stato vergine del materiale e 1 della completa disconnessione di tutti i bond che collegano i punti interni all'orizzonte del punto materiale di coordinata  $\mathbf{x}$ .

Si rammenta che in questo elaborato si è assunto un valore costante di  $s_0$ , questo comporta assumere implicitamente che la rottura di un bond è indipendente dalle condizioni di tutti gli altri bond interni all'orizzonte del punto materiale in esame.

In realtà la teoria peridynamic non pone vincoli sulla forma del critical relative elongation data la possibilità di assumere modelli di danneggiamento più complessi, ad esempio è possibile ottenere nel campo della frattura fragile dei risultati maggiormente in accordo con le osservazioni sperimentali quando si assume che  $s_0$  dipenda dal comportamento degli altri bond, cosa che esula dall'interesse di questo elaborato.

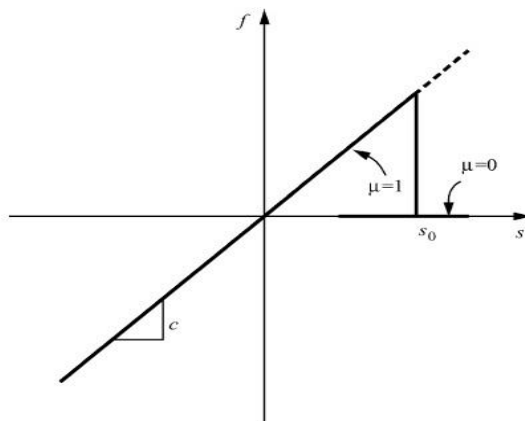


Figura 6: Modello costitutivo di materiale microelastico lineare (PMB) con rottura del singolo bond (Immagine tratta dall'articolo di Silling [48]).

### 1.2.3 Implementazione numerica della bond-based peridynamic

In letteratura sono stati proposti svariati metodi per la risoluzione numerica delle equazioni del moto della teoria BBP, tra tutti quello inizialmente proposto da Silling e Askari [48] prende il nome di metodo “mesh-free”, in tale metodo il corpo è rappresentato in forma discretizzata con una griglia di nodi equispaziati (vedere Figura 7), a ognuno dei quali è associato un volume noto nella configurazione di riferimento (l'indeformata); la denominazione mesh-free deriva dal fatto che non ci sono elementi o altre connessioni geometriche tra i nodi e quindi l'assenza di funzioni di forma.

Nella forma discretizzata delle equazioni del moto (Eq.1) l'integrale è sostituito da una sommatoria finita

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^n = \sum_j \mathbf{f}(\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_i^n, \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) V_j + \mathbf{b}_i^n \quad \forall j \in H_{x_i} \quad (21)$$

dove il pedice  $j$  indica il nodo (chiamato nodo famiglia) appartenente all'orizzonte del nodo  $i$ -esimo della griglia (chiamato nodo sorgente), il pedice  $n$  indica lo step temporale,  $V_j$  il volume associato al corrispettivo nodo famiglia.

Al fine di preservare le dimensioni delle quantità d'interesse, il volume nel caso di analisi 2D è espresso come  $V_j = \Delta x \Delta y t$  avendo indicato con  $\Delta x$  e  $\Delta y$  il passo tra i nodi lungo la direzione  $x$  e  $y$  rispettivamente e con  $t$  lo spessore del corpo in esame, generalmente si assume la griglia di nodi equispaziati con  $\Delta x = \Delta y$  e spessore unitario per cui risulta  $V_j = \Delta x^2$ .

Un modo semplificato di risolvere l'equazione del moto in forma discretizzata, prevede di considerare per il calcolo della pairwise force function tutti i nodi interni all'orizzonte con il medesimo volume, portando così a inaccuranze nei risultati ottenuti; tale ragionamento è valido indipendentemente dalla dimensione del passo della griglia, per cui anche un grid refinement non risolverebbe il problema.

Al fine di migliorare l'accuratezza dell'integrazione kebing Yu [26] ha proposto l'utilizzo di un fattore correttivo  $\beta$  tale che  $V_j = \beta_j \Delta x^2$ , così facendo solo la frazione di

volume del nodo famiglia racchiuso entro l'orizzonte contribuisce al calcolo integrale, come visualizzato in Figura 7 riferito al caso in cui  $\Delta x = \delta/3$ ; il fattore correttivo è calcolato tramite l'espressione

$$\beta = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{for } \|\xi\| \leq \delta - 0.5\Delta x \\ \frac{\delta + 0.5\Delta x - \|\xi\|}{\Delta x} & \text{for } \delta - 0.5\Delta x < \|\xi\| \leq \delta + 0.5\Delta x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

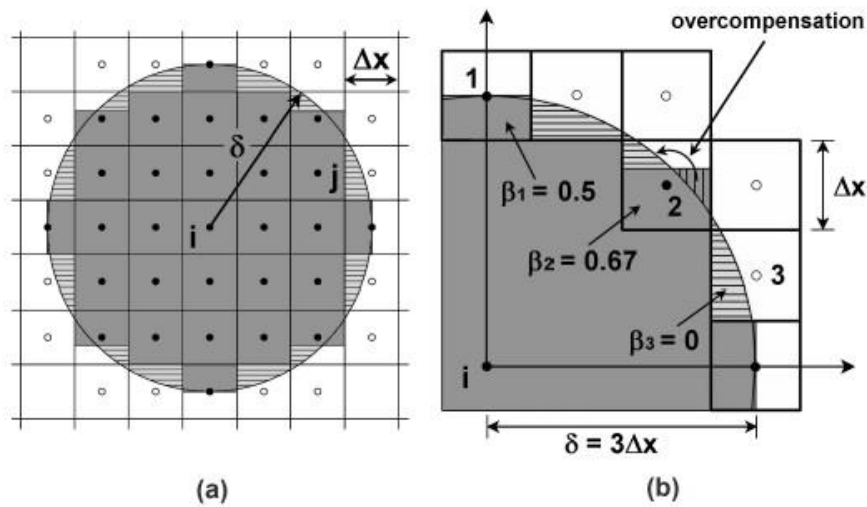


Figura 7: Meshfree di nodi equispaziati nel caso di  $m=3$ , a) immagine del volume nodale effettivo che partecipa al calcolo integrale, b) immagine dell'applicazione del fattore correttivo (Immagine tratta dalla tesi di dottorato di Keping Yu [26]).

Da notare come l'utilizzo dell'Eq. (22) per il calcolo del fattore correttivo è stato pensato assumendo implicitamente che la griglia di nodi sia uniforme, comunque tal espressione può essere applicata anche per griglie non uniformi, ad esempio conseguente l'utilizzo di una strategia di adaptive refinement; questo viene fatto semplicemente assumendo l'orizzonte associato al nodo sorgente e il passo associato al nodo famiglia a esso appartenente, come visualizzato in Figura 8.



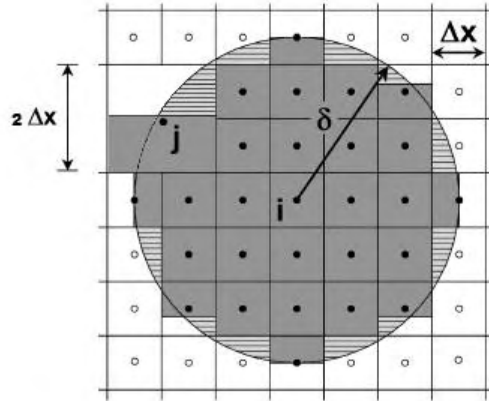


Figura 8: Immagine dell'applicazione del fattore correttivo di Kebing Yu nel caso di griglia non uniforme.

L'integrazione temporale può anch'essa essere affrontata con varie metodologie, in particolare molto diffuso è l'utilizzo del solutore esplicito basato sullo schema di integrazione denominato Velocity-Verlet poiché semplice, robusto e affidabile (molto diffuso nell'ambito della dinamica molecolare), il cui algoritmo di esecuzione prevede i seguenti step

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_n \\
 \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} \\
 \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}
 \end{aligned} \tag{23}$$

con  $\Delta t$  step temporale assunto costante, quest'ultimo deve essere selezionato in modo tale da assicurare stabilità dell'integrazione numerica, per cui l'intervallo di tempo adottato deve essere inferiore all'intervallo di tempo critico definito

$$\Delta t_c = \frac{\|\xi\|_{min}}{c_k} \tag{24}$$

con  $\xi_{min}$  la lunghezza del bond più piccola presente nel corpo e  $c_k$  la velocità del suono massima del materiale (nel caso di analisi 2D si parla di velocità di propagazione di onde longitudinali), quest'ultima definita

$$c_k = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (25)$$

Come accennato nel paragrafo 1.2.1 alcuni materiali non esibiscono una lunghezza scala intrinseca per cui la scelta dell'orizzonte è dettata dalla convenienza, a tale proposito un'importante parametro che caratterizza l'implementazione numerica della teoria peridynamic è definito dal rapporto  $m=\delta/\Delta x$ .

La scelta di tale parametro è molto importante poiché influisce sulla qualità e accuratezza della soluzione (v. Bobaru [9] e Ferhat [17]), generalmente si adottano valori di  $m=3\div 4$  perchè buon compromesso tra qualità della soluzione ed efficienza computazionale.

I parametri orizzonte  $\delta$ , passo  $\Delta x$  e rapporto  $m$  giocano un ruolo fondamentale riguardo la convergenza numerica della peridynamic alla teoria classica, in particolare si possono definire tre tipologie di convergenza:

- Convergenza ( $\delta m$ ):  $\delta \rightarrow 0$  e  $m$  aumenta più velocemente della riduzione di  $\delta$ , in questo caso l'approssimazione numerica converge alla soluzione analitica della *peridynamic*, convergendo uniformemente alla soluzione della teoria classica.
- Convergenza (m):  $\delta$  è fissato e  $m \rightarrow \infty$ , in questo caso l'approssimazione numerica converge alla soluzione esatta non locale prevista dalla peridynamic per un dato  $\delta$ .
- Convergenza ( $\delta$ ):  $\delta \rightarrow 0$  e  $m$  fissato o aumenta più lentamente della riduzione di  $\delta$ , in questo caso l'approssimazione numerica della peridynamic converge a

un'approssimazione della teoria classica, però non è garantita l'uniformità della convergenza.

#### 1.2.4 Applicazione delle condizioni al contorno e “skin effect”

Data la natura non locale della teoria bond-based peridynamic le condizioni al contorno sono applicate in modo differente da come sono applicate nell'ambito della meccanica classica.

Si può notare innanzitutto l'assenza di forze superficiali nelle equazioni del moto della teoria peridynamic, per cui le forze esterne agenti nel corpo devono essere applicate sotto forma di forze per unità di volume piuttosto che per unità di superficie.

Questa differenza può essere capita meglio se consideriamo un corpo di dominio  $\Omega$  sottoposta a un carico meccanico, secondo la teoria della meccanica classica se immaginiamo di suddividere il corpo in due metà di volume  $\Omega^-$  e  $\Omega^+$ , perché il corpo continua a rimanere in equilibrio il dominio  $\Omega^-$  deve esercitare una forza netta  $F^+$  sul dominio  $\Omega^+$  definita

$$F^+ = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{T} dA \quad (26)$$

avendo espresso con  $\mathbf{T}$  la forza per unità di superficie, per cui l'interazione tra i due domini è di natura superficiale.

Viceversa nella teoria peridynamic ogni particella localizzata nel dominio  $\Omega^+$  interagisce con quelle localizzate nel dominio  $\Omega^-$ , se esprimiamo con  $\mathbf{L}$  la densità di forza agente in un punto materiale  $\mathbf{x}$  del dominio  $\Omega^+$  si ha

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' \quad (27)$$

per cui la forza netta che il dominio  $\Omega^-$  esercita sul dominio  $\Omega^+$  è espresso tramite una forza per unità di volume

$$\mathbf{F}^+ = \int_{\Omega^+} \mathbf{L}(\mathbf{x}) dV = \int_{\Omega^+} \int_{\Omega^-} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') dV' dV \quad (28)$$

Da un punto di vista dell'implementazione numerica della teoria peridynamic tramite il modello meshfree presentato nel precedente paragrafo, un modo semplice di convertire la tensione superficiale  $\sigma$  in una tensione volumetrica  $\sigma_{eq}$  è di utilizzare l'espressione

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma \Delta x \Delta z N_{nodi}}{V_{load}} \quad (29)$$

avendo indicato con  $N_{nodi}$  il numero di nodi al quale sarebbe applicata la tensione superficiale e  $V_{load}$  il volume al quale è applicata la tensione volumetrica.

Altra caratteristica della teoria peridynamic che differisce dalla teoria della meccanica classica è il cosiddetto “skin effect”, cioè l'aumento di cedevolezza manifestato dai punti materiale in prossimità della superficie libera del dominio di appartenenza.

Ciò è conseguenza della perdita d'interazioni che un punto materiale manifesta se è localizzato entro la regione di spazio compresa tra la superficie libera e il proprio orizzonte.

Le strategie solitamente utilizzate per ridurre questo effetto di perdita di rigidità in prossimità dei bordi del corpo sono:

1. Applicare le condizioni al contorno in una striscia di materiale di ampiezza pari all'orizzonte  $\delta$
2. Applicare un fattore di compensazione alla perdita di rigidità

Sempre con riferimento all'implementazione numerica della teoria peridynamic, la prima strategia comporta l'applicazione delle condizioni al contorno in un numero di strati pari al rapporto tra orizzonte e passo della mesh  $m$ , in tale caso risulta nell'Eq. (29)  $V_{load} = m N_{nodi} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ . La seconda strategia invece prevede l'utilizzo di un

fattore di compensazione da applicare o a livello di ciascun bond tra nodo famiglia e nodo sorgente (v. Macek [32]) o a livello della densità di forza agente nel nodo sorgente (integrale dei bond).

Riguardo a quest'ultimo approccio Kebin Yu [26] propone un metodo per il calcolo del fattore di compensazione basato sul criterio energetico, nel caso di superficie libera piana (Figura 9) il fattore di compensazione è definito

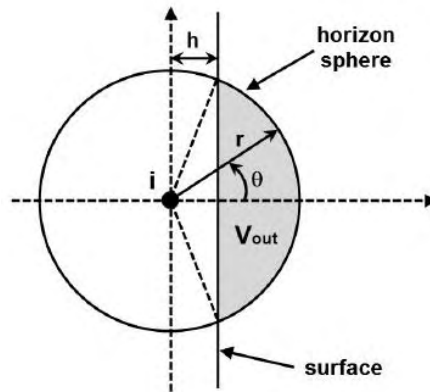


Figura 9: Nodo sorgente *i*-esimo con il proprio orizzonte sferico che interseca una superficie libera piana (immagine tratta dalla tesi di dottorato di Kebin Yu [26]).

$$\beta = \frac{W_{inf}}{W_{sup}} = \frac{6\delta^4}{3\delta^4 + 4\delta^3 h - h^4} \quad (30)$$

dove con  $W_{inf}$  si è indicata la densità di energia potenziale definita dall'Equazione 8,  $W_{sup}$  la densità di energia potenziale effettiva e  $h$  la distanza del nodo sorgente dal bordo libero.

### 1.2.5 Adaptivity refinement applicato alla peridynamic

Fenomeni quali la propagazione della frattura sono caratterizzati da lunghezze scala di dimensioni paragonabile alla scala atomica, inoltre come accennato nel paragrafo 1.2.3

la convergenza numerica della teoria peridynamic alla teoria classica viene raggiunta tanto più si assume un orizzonte di dimensioni ridotte, per cui si capisce come l'adozione di un modello di griglia uniforme con orizzonte costante sia poco efficiente da un punto di vista computazionale.

Oggi giorno sono diffusi differenti metodi multiscala in cui modelli basati sulla dinamica atomistica, adatti allo studio della propagazione della frattura, sono accoppiati ai metodi che implementano la teoria classica, efficienti da un punto di vista computazionale.

Problema che l'accoppiamento tra modelli discreti e continui richiede dei trattamenti particolari all'interfaccia per eliminare le cosiddette "ghost force", creando problemi sia di equilibrio nella soluzione sia di complessità dell'implementazione dei metodi multiscala.

Anche se la formulazione originale della teoria peridynamic prevede implicitamente l'utilizzo di una regione d'interazione non locale, definito per l'appunto orizzonte, costante su tutto il dominio d'interesse, può essere comunque estesa al caso di modello multiscala prevedendo la variazione dell'orizzonte, inoltre tale strategia non prevede complessi trattamenti all'interfaccia tra zone a maggiore e minore orizzonte poiché l'accoppiamento è tra un modello continuo-continuo.

Come introdotto da Bobaru [8] con il termine adaptive refinement è inteso non solo l'aumento di densità dei nodi presenti nella griglia, ma anche una riduzione dell'orizzonte, infatti l'aumento di densità dei nodi comporta adottare una convergenza di tipo ( $m$ ), mentre un aumento di densità dei nodi accompagnato da una riduzione dell'orizzonte comporta adottare una convergenza di tipo ( $\delta m$ ) o di tipo ( $\delta$ ), a seconda che il parametro  $m$  sia aumentato o mantenuto costante.

Scopo dell'adaptive refinement è di aumentare la risoluzione e allo stesso tempo ridurre la lunghezza scala solo in determinate zone del dominio analizzato, come ad esempio in prossimità dell'apice di una cricca che si propaga, mentre nella zona esterna a essa una risoluzione più grossolana consente di ridurre notevolmente le risorse computazionali altrimenti necessarie.

Perché i modelli costitutivi del materiale corrispondenti a differenti orizzonti, indicati con il simbolo  $\delta$  e  $\varepsilon$ , siano equivalenti nel senso che se sottoposti a una deformazione omogenea l'energia di deformazione sia la stessa nelle regioni con differente orizzonte, è necessaria un'operazione di "scaling" della funzione micropotenziale, introdotta da Silling, che nel caso di analisi 2D è espressa dalla relazione

$$w_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \gamma^2 w_\delta(\gamma\boldsymbol{\eta}, \gamma\boldsymbol{\xi}) \quad (31)$$

essendo  $\gamma = \delta / \varepsilon$ , per cui con il termine scaling nella peridynamic s'intende la variazione del micromodulo indotto dalla variazione dell'orizzonte, come si può vedere dall'Equazioni 9-11.

E' facile verificare come l'operazione di scaling consenta di mantenere costante l'energia di deformazione elastica al variare dell'orizzonte risultando

$$W_\delta(\mathbf{x}) = \frac{t}{2} \int_{H_x} w_\delta(\gamma\boldsymbol{\eta}, \gamma\boldsymbol{\xi}) d(\gamma^2 A) = \frac{t}{2} \int_{H_x} w_\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \gamma^2 d(A) = W_\varepsilon(\mathbf{x}) \quad (32)$$

Bobaru [7] inoltre propone una strategia per il trattamento dei nodi d'interfaccia tra due zone a differente orizzonte e maggiore e minore densità di nodi, basata sulla naturale conseguenza del rispetto della terza legge di Newton; definiamo con  $U$  una regione del dominio e con  $R$  un'altra regione in cui si ha una maggiore densità di nodi e una riduzione dell'orizzonte, come riportato in Figura 10, se il nodo sorgente  $i$ -esimo nella regione  $U$  copre con il proprio orizzonte il nodo famiglia  $j$ -esimo della regione  $R$ , il micromodulo del bond tra i due nodi è quello associato all'orizzonte del nodo sorgente. Stesso ragionamento vale se il nodo sorgente  $i$ -esimo appartiene alla regione  $R$  e il nodo famiglia  $j$ -esimo alla regione  $U$ .

Quanto affermato può essere dimostrato analiticamente (v. Bobaru[7]), per esempio se consideriamo il punto sorgente di coordinata  $\mathbf{x}$  con orizzonte  $\varepsilon$  il micropotenziale è definito (materiale PMB)

$$w(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, \xi) = \frac{c(\xi, \varepsilon)s^2\xi}{2} \quad (33)$$

Se consideriamo il micropotenziale del punto di coordinate  $\mathbf{x}+\xi$ , indipendentemente che appartenga alla regione U o R si ha

$$w(-\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x} + \xi, -\xi) = \frac{c(-\xi, \varepsilon)s^2\xi}{2} = \frac{c(\xi, \varepsilon)s^2\xi}{2} \quad (34)$$

la cui ultima uguaglianza è conseguenza del fatto che la funzione micromodulo è una funzione definita pari (veder Eq. 10), per cui la densità di forza che agisce nel punto  $\mathbf{x}$  è

$$f(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, \xi) = \frac{\partial w(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, \xi)}{\partial \boldsymbol{\eta}} = c(\xi, \varepsilon)s \quad (35)$$

mentre la densità di forza che agisce nel punto  $\mathbf{x}+\xi$  risulta

$$f(-\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x} + \xi, -\xi) = \frac{\partial w(-\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x} + \xi, -\xi)}{\partial \boldsymbol{\eta}} = -c(\xi, \varepsilon)s = -f(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{x}, \xi) \quad (36)$$

il quale dimostra come la densità di forza sia uguale e opposta, condizione che deve essere rispettata nella definizione di pairwise force function della bond-based peridynamic.

Inoltre Bobaru evidenzia come l'utilizzo di un orizzonte variabile nel dominio causi perdita di bond, cioè se l'equazione del moto riferita al nodo della regione  $U$  comprende l'interazione con il nodo della regione  $R$ , non è detto che l'equazione del moto del punto della regione  $R$  comprenda l'interazione con il nodo della regione  $U$ , come riportato in Figura 10.

Comunque tale perdita non rappresenta un problema poiché non rappresenta una contraddizione dell'equazione del moto imposta al nodo (Eq. 1), sia che quest'ultimo appartenga alla regione coarse che quella refined.



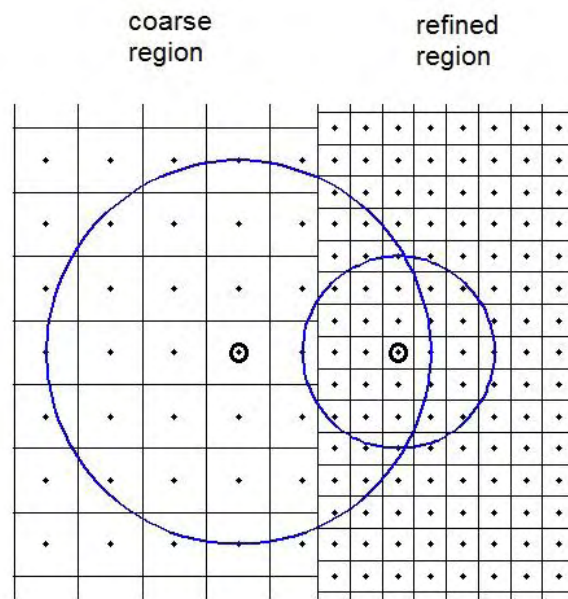


Figura 10: Immagine di griglia non uniforme e multiscala.



## **2 SVILUPPO DELL'ADAPTIVE GRID REFINEMENT E SUOI EFFETTI IN ANALISI DINAMICHE 2D**

In questo capitolo è mostrata la strategia sviluppata per l'implementazione dell'adaptive refinement alla teoria bond-based peridynamic con una presentazione dettagliata degli algoritmi sviluppati per tale scopo, questo è fatto con l'utilizzo del flow chart.

Come in precedenza discusso, la presenza di una regione d'interfaccia tra due regioni di griglia di differente densità nodale e lunghezza scala può provocare fenomeni di riflessioni spurie e/o distorsioni delle onde di tensione che la attraversano.

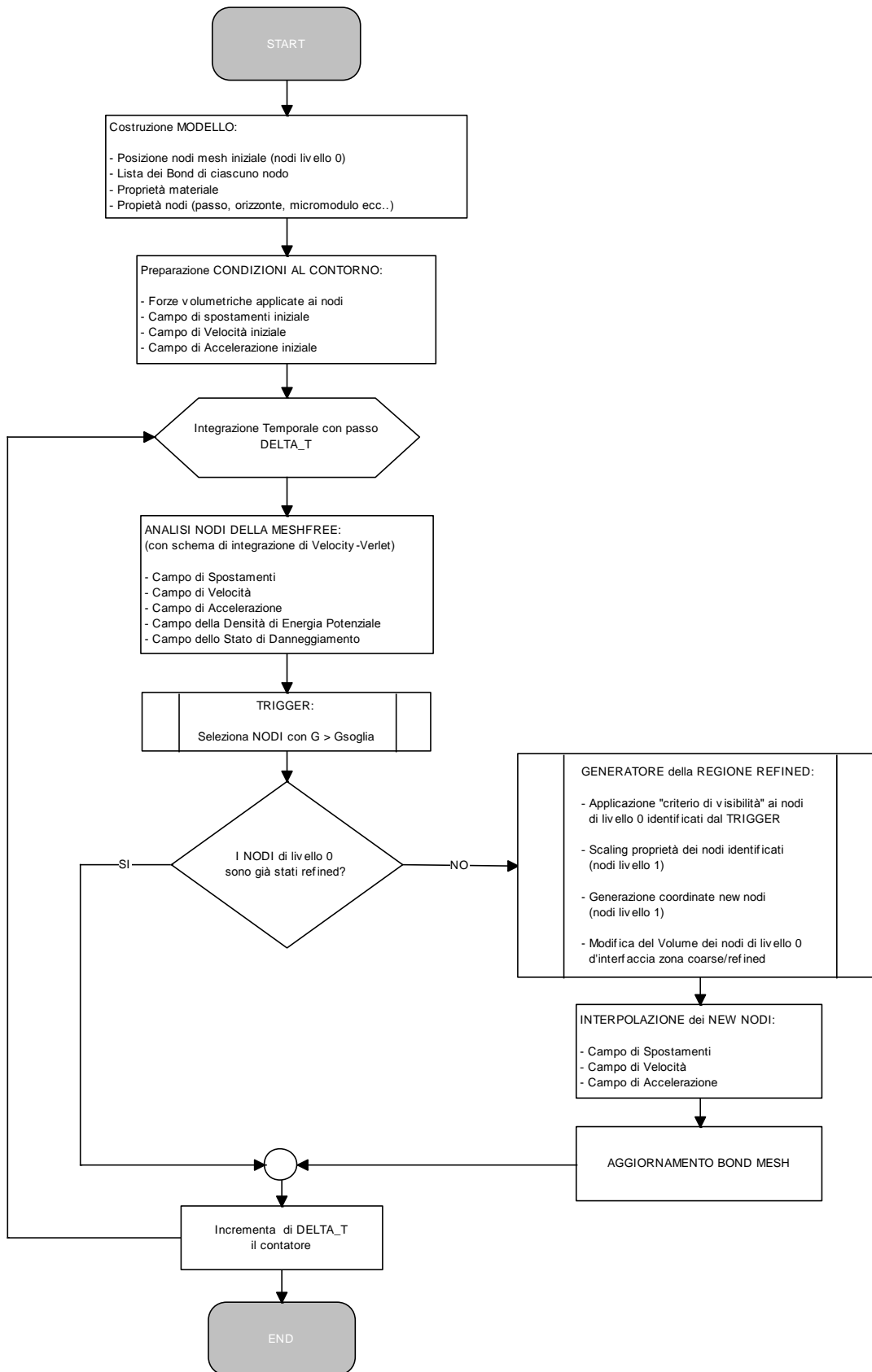
Per questi motivi sono analizzati gli effetti provocati dall'utilizzo di una griglia non uniforme/multiscala sulla soluzione di due problemi classici della dinamica 2D, il primo riguarda la propagazione di un'onda longitudinale gaussiana (onda continua), il secondo riguarda la propagazione di un'onda di tensione provocata dall'applicazione di un carico di trazione a gradino (onda discontinua).

### **2.1 Strategia per l'implementazione dell'adaptive grid refinement**

All'università di Padova è stato sviluppato dall'Ing. Mirco Zaccariotto, prof. Ugo Galvanetto e suoi collaboratori un tool con il software Matlab dedicato all'implementazione numerica del metodo meshfree della teoria BBP.

Il codice è stato testato per vari casi di studio della meccanica della frattura sia statica sia dinamica, il tool per l'analisi statica è inoltre basato su una tecnica di soluzione implicita; in questo elaborato si sono sviluppati gli algoritmi per l'implementazione dell'adaptive grid refinement nel contesto di studio della dinamica della frattura, anche se applicabili in un prossimo futuro a casi di studio statici o quasi-statici.

Il tool Matlab dedicato all'analisi dinamica implementa il metodo meshfree con lo schema d'integrazione temporale esplicito di Velocity-Verlet (Eq. 21 e 23), come riportato nel paragrafo 1.2.3.



**Figura 11: Flow Chart del main del tool Matlab dedicato all'analisi dinamica con integrato le funzioni per l'implementazione dell'adaptive refinement di primo livello.**

In Figura 11 è riportato il flow chart rappresentativo dell'architettura del tool integrato con l'adaptive grid refinement, dove il simbolo  $G$  sta a indicare una generica grandezza utilizzata come trigger di attivazione del refinement.

Tale schema riporta in sintesi la procedura per l'ottenimento del refinement di primo livello, comunque da un punto di vista concettuale la strategia è la stessa, come messo in evidenza nei paragrafi che seguono, per cui in futuro sarà possibile introdurre negli algoritmi la capacità di generare il refinement del livello desiderato con relativa semplicità.

Le scelte fatte per la strategia d'implementazione del refinement prendono spunto principalmente dagli studi di Bobaru [7-8], ma sono dettate sia dalla volontà di alterare il meno possibile la struttura dati originaria del tool dedicato alla teoria peridynamic, sia dall'evitare l'introduzione di modelli che potrebbero aumentare inutilmente la complessità di questa teoria.

Nel paragrafo 2.1.1 è affrontato il criterio utilizzato per l'attivazione del refinement dei nodi appartenenti alla mesh originale (nodi di livello 0 di refinement), nel paragrafo 2.1.2 è presentata la modalità con la quale vengono generati i nuovi nodi (nodi di livello 1 di refinement) e l'identificazione dei nodi di interfaccia tra zona coarse e zona refined, nel paragrafo 2.1.3 vengono invece discusse brevemente le modalità d'interpolazione e aggiornamento dei bond della griglia.

### **2.1.1 Criterio per l'attivazione dell'adaptive refinement**

Come accennato nell'introduzione, si parla di adaptive refinement quando a partire da una mesh iniziale, l'operazione di refinement si attiva in modo automatico secondo un meccanismo di selezione dei nodi originali della griglia, chiamati nodi coarse.

Nei metodi classici quali il FEM questo meccanismo si basa sull'utilizzo di modelli per la stima dell'errore nell'approssimazione degli elementi finiti (v. ad esempio Oden [33] e Rank [36]), basati sul campo di tensione, deformazione e/o energetico.

Si ricorda che la teoria peridynamic non richiede la definizione di tensione e deformazione, poiché il calcolo delle equazioni del moto richiede solamente la conoscenza del campo di spostamenti, velocità e accelerazione; comunque data l'importanza della definizione di tensione e deformazione in campo ingegneristico, sono stati proposti dei metodi per ricavare tali grandezze dal campo di spostamenti.

Per questo Bobaru propone di utilizzare la densità di energia di deformazione elastica come criterio per la selezione dei nodi, in particolare tutti i nodi presenti nella griglia sono selezionati per l'attivazione del refinement se  $W \geq W_{soglia}$ , dove il valore di soglia proposto da Bobaru è pari a  $W_{soglia} = 0.4W_{max}$ , con  $W_{max}$  il valore della densità di energia elastica massima presente nella griglia nell'istante di tempo considerato; questo valore di soglia è ritenuto dallo stesso Bobaru un buon compromesso tra accuratezza della soluzione ed efficienza.

Si capisce come un maggiore o minore valore di soglia influenzi l'estensione della zona refined, poiché la riduzione del valore di soglia comporta un'estensione della zona refined, viceversa l'aumento del valore di soglia ne comporta una sua riduzione.

Quanto consigliato da Bobaru fa riferimento ad analisi statiche, mentre in questo studio è indagata l'applicabilità dell'adaptive refinement a fenomeni quali la propagazione dinamica di fratture e loro nucleazione.

Le simulazioni condotte hanno evidenziato come non ci sia un unico valore di soglia ottimale, ma piuttosto un range di valori compreso tra il 30% e il 70% della densità di energia di deformazione massima presente nel sistema, in dipendenza del tipo di analisi che viene affrontata.

Altra importante considerazione evidenziata nelle simulazioni della dinamica della frattura fragile è che il solo utilizzo di una grandezza come valore di soglia può non essere sufficiente per l'attivazione del refinement nella zona d'interesse, come l'apice di una cricca che si propaga.

Infatti si possono avere casi in cui la concentrazione di energia si concentri in una determinata regione del dominio analizzato per tutta la durata della simulazione, ciò

porta a pregiudicare il meccanismo di attivazione del refinement poiché l'adottare bassi valori di soglia può causare la generazione di una zona refined troppo estesa.

Perciò è stato introdotto un meccanismo di attivazione di supporto a quello energetico basato sullo stato di danneggiamento dei nodi della griglia, in particolare i nodi sono selezionati per l'attivazione se  $\varphi > 0$ ; ciò comporta l'attivazione del refinement nella regione in cui sta per verificarsi la nucleazione e/o propagazione di una cricca, qualora il criterio energetico fallisca.

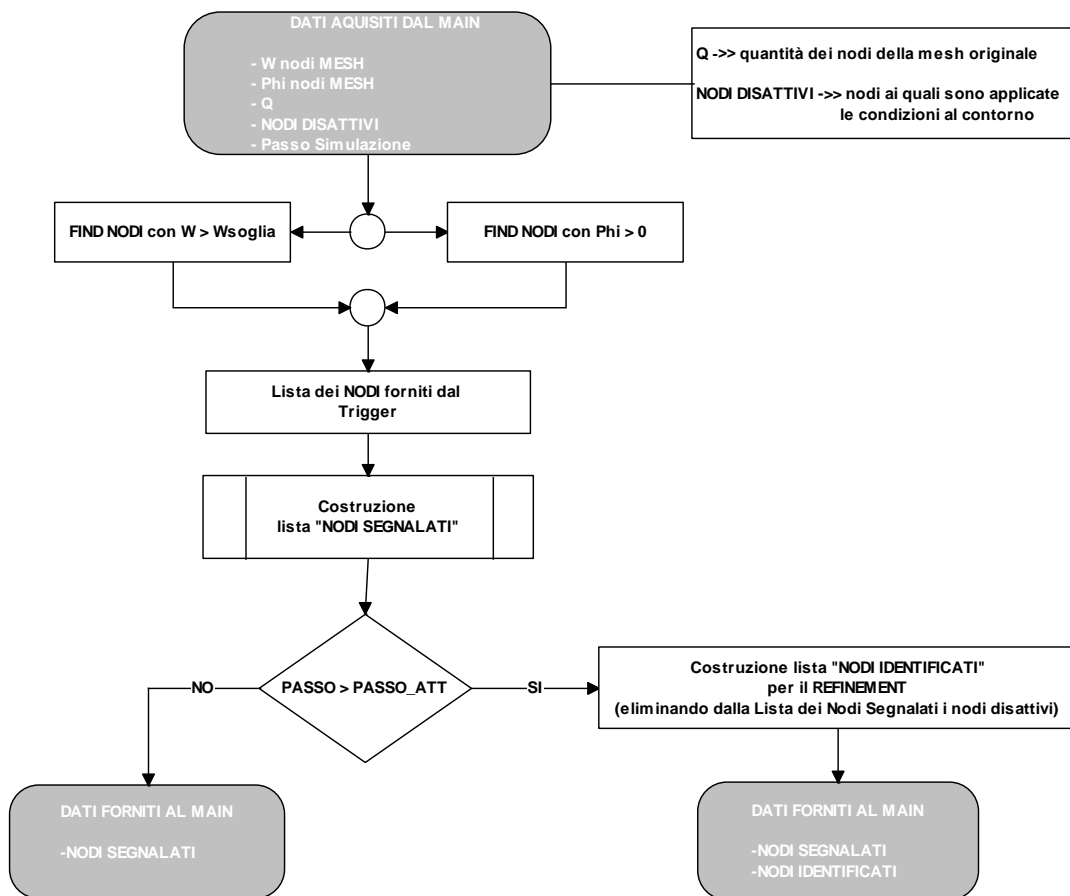
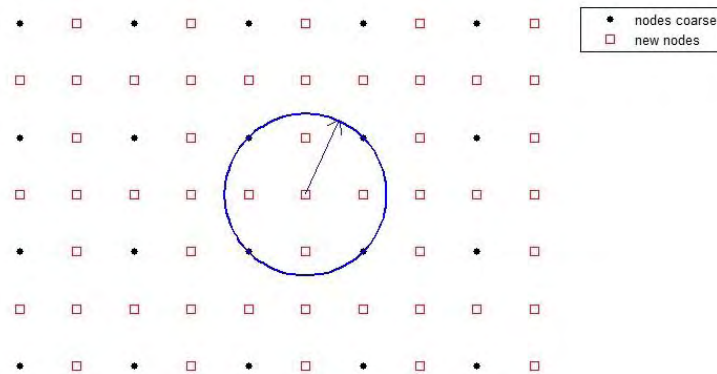


Figura 12: Flow Chart della funzione "Trigger" per l'implementazione dell'adaptive refinement, sono riportati entrambi i criteri di selezione.

In Figura 12 e 14 sono riportati i diagrammi di flusso che schematizzano la struttura dell'algoritmo denominato "trigger" (vedere flow chart di Figura 11) per la segnalazione dei nodi appartenenti alla griglia iniziale; a ogni step temporale sono segnalati i nodi presenti nella griglia secondo i meccanismi di selezione introdotti sopra, se il nodo appartiene alla griglia iniziale (che chiamiamo griglia coarse) allora è identificato e

aggiunto alla lista, altrimenti se il nodo identificato appartiene ai nuovi nodi generati negli step temporali precedenti, si attiva una funzione di ricerca dei nodi coarse vicini al nuovo nodo, come riportato in Figura 13.

Una volta che sono stati segnalati tutti i nodi della griglia iniziale che soddisfano la condizione del trigger è costruita la lista dei nodi denominata “Nodi Identificati”, questa lista è ottenuta tramite l’eliminazione dalla lista “Nodi Segnalati” dei nodi ai quali sono applicate le condizioni al contorno; l’applicazione del refinement a tali nodi richiederebbe la ridefinizione delle condizioni al contorno, operazione questa non implementata in questo studio.



**Figura 13: Operazione di ricerca dei nodi della griglia iniziale adiacenti al nuovo nodo generato dall’adaptive refinement.**

Come riportato nel flow chart di Figura 14 la lista dei nodi identificati, e quindi la possibile attivazione del refinement, è costruita solamente da un determinato istante di tempo in poi dell’analisi. Quest’ultimo (indicato con “passo\_att”) deve essere determinato tramite l’utilizzo di analisi di “preparazione”, chiamate tali poiché forniscono informazioni riguardo il comportamento di massima del sistema analizzato.

Bisogna considerare che in un’analisi dinamica l’attivazione del refinement dall’istante iniziale di applicazione del carico porterebbe al refinement dell’intera griglia, poiché l’attivazione seguirebbe il flusso di energia dell’onda di tensione.

Una strategia alternativa a quest’ultima potrebbe essere quella di impostare la prima attivazione di refinement solamente ai nodi delle regioni d’interesse.



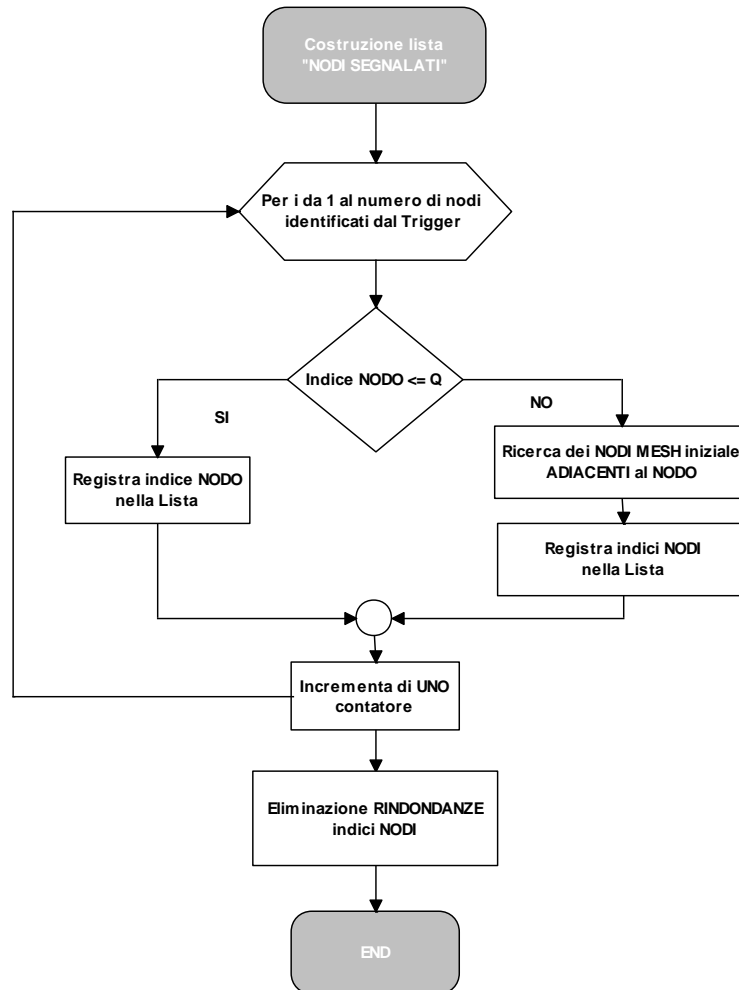


Figura 14: Flow Chart del processo di costruzione della Lista dei “Nodi Segnalati” per l’adaptive refinement.

### 2.1.2 Modalità utilizzata per la generazione dei nuovi nodi

Come descritto nel paragrafo precedente, a ogni step temporale sono segnalati i nodi coarse la cui densità di energia potenziale è superiore a un determinato valore di soglia e/o come conseguenza dell’inizio del loro danneggiamento.

La segnalazione porta a identificare i nodi della griglia iniziale che devono essere refined, questi ultimi comprendono i nodi segnalati meno i nodi ai quali sono applicate le condizioni al contorno.

Quanto deve essere ampia la regione di spazio refined intorno a ciascun nodo identificato dal trigger è determinata dal cosiddetto “criterio di visibilità”, quest’ultimo

è stato proposto da Bobaru a seguito degli studi condotti riguardo l'applicazione dell'adaptive refinement alla teoria BBP in problemi sia statici sia dinamici di analisi 1D.

Tale criterio sostiene che la zona refined deve essere di ampiezza tale che l'orizzonte dei nodi coarse d'interfaccia tra le due zone non comprendano con il loro orizzonte il nodo segnalato per il refinement; per cui ciò comporta estendere il refinement a tutti i nodi famiglia appartenenti al nodo sorgente identificato per l'attivazione del refinement (vedere Figura 15).

Come accennato nel paragrafo introduttivo, una strategia per la generazione dei nodi e adottata da Bobaru consiste nell'utilizzare la struttura dati "quadrees" per griglia 2D e "octrees" per griglia 3D, problema che tale strategia è adatta a essere applicata a mesh che presentano elementi geometrici di connessione tra i nodi, come nei metodi classici FEM.

La sua applicazione in una mesh-free (priva di elementi geometrici) richiederebbe la definizione di elementi geometrici fittizi, ciò porterebbe allo sviluppo di una differente struttura dati del tool originale, con un conseguente aumento della complessità di quest'ultimo.

Il metodo qui proposto è molto semplice e veloce, consiste nel dividere in modo ricorsivo le congiungenti tra nodi adiacenti, per cui indicato con  $x_i$  la coordinata del nodo *i-esimo* e con  $x_j$  la coordinata del nodo *j-esimo* a esso adiacente, entrambe riferite alla configurazione di riferimento, la coordinata del nuovo nodo  $x_{ij}$  è ricavata tramite la relazione

$$x_{ij} = \frac{x_i + x_j}{2} \quad (37)$$

Da notare che tale strategia anche se qui applicata al caso di griglia regolare 2D, può essere applicata per griglie irregolari e 3D, come per la strategia implementata dal quadtree e octree.

In Figura 15 è riportata l'immagine nella quale viene rappresentata la modalità di generazione dei nuovi nodi nel caso di refinement di primo livello, con applicato il criterio di visibilità al nodo identificato per l'attivazione dell'adaptive refinement, nel caso particolare di  $m=3$ ; la generazione dei nodi di primo livello richiede la costruzione della lista dei nodi adiacenti a ciascun nodo della griglia originale, determinata in fase di preparazione del modello.

Refinement di livello superiore sono ottenuti tramite la stessa procedura, anche se questo richiederebbe di determinare per ogni nodo generato la lista dei nodi a esso adiacente, portando probabilmente a inefficienze computazionali qualora la zona di refinement sia molto estesa.

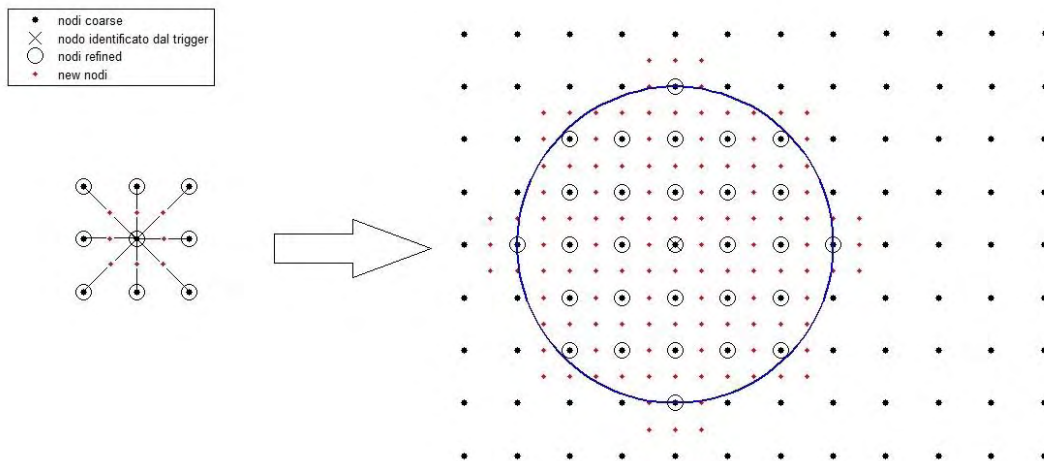


Figura 15: Strategia utilizzata per la generazione dei nuovi nodi.

L'ulteriore vantaggio della strategia di refinement qui proposta sta nel fatto che non si ha la generazione dei cosiddetti "hanging node"; come accennato nel paragrafo introduttivo questi nodi nei metodi classici come il FEM creano problematiche di non-conformità tra elementi adiacenti di differente livello di refinement, richiedendo dei metodi di interpolazione o altre tecniche per la risoluzione del problema.

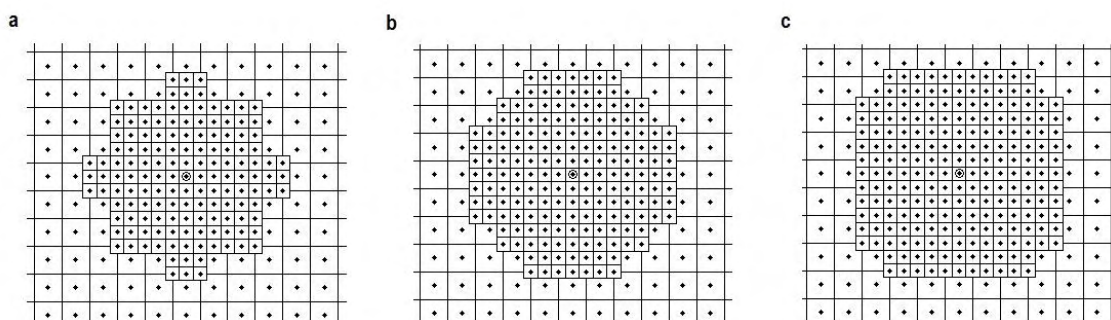
Data la mancanza di elementi (e funzioni di forma) nell'implementazione del metodo mesh-free della teoria peridynamic questi nodi non rappresentano lo stesso problema del metodo FEM, ma devono comunque subire un trattamento particolare poiché vanno a

influire negativamente sul volume che deve essere associato ai nodi d'interfaccia tra zona coarse e refined.

La strategia proposta e utilizzata da Bobaru è di eliminare questi nodi (che però sono comunque generati dal quadtree) dalla computazione del dominio integrale assegnando un volume nullo, per cui è come avere dei nodi “morti” presenti nella mesh.

L'immagine riportata in Figura 15 evidenzia come alcuni nodi generati escano dall'orizzonte del nodo coarse identificato per il refinement generando una forma non uniforme, ciò è conseguenza sia del rispetto del criterio di visibilità, sia della volontà di minimizzare la quantità dei nodi generati, sia della conseguenza di non generare gli “hanging node”; per cui la forma della regione assunta da un singolo nodo identificato dipende dal parametro  $m$ , come visualizzato in Figura 16 al variare di quest'ultimo.

Secondo step è quello dell'assegnazione dell'area (volume nel caso 3D), e dell'operazione di scaling dell'orizzonte e micromodulo dei nodi attivati per il refinement (questi ultimi convertiti da nodi di livello 0 a nodi di livello 1) e dei nuovi nodi; nell'ipotesi di mesh regolare con passo  $\Delta x = \Delta y$  (sempre utilizzata in questo studio) l'area associata ai nodi iniziali al di fuori della zona refined è  $A_c = \Delta x^2$  mentre l'area associata ai nuovi nodi è ridotta ad  $A_r = A_c/4$  e assunta costante per tutti i nuovi nodi, come riportato in Figura 16.



**Figura 16: Forma della regione refined generata dall'attivazione del refinement di un singolo nodo identificato dal Trigger al variare di  $m$ , a)  $m=3$ , b)  $m=3,5$ , c)  $m=3,7$ .**

L'immagine di Figura 16 mostra come l'operazione di refinement porta a modificare l'area associata ai nodi coarse adiacenti alla regione refined, oltre al fatto che non sono

più centrati nel loro dominio; ciò comporta una perdita di accuratezza dell'integrazione spaziale essendo che le equazioni del moto nel metodo mesh-free sono risolte attraverso uno schema di integrazione spaziale mid-point (vedere l'Eq. 21), gli effetti di tale perdita di accuratezza sono messi in risalto nel paragrafo 2.2.1 e 2.2.2.

Terzo step è di aggiornare l'area associata ai nodi coarse di interfaccia, indicando quest'ultima con  $A_i$  si ha

$$A_i = \begin{cases} A_c - A_r/4 & \text{con } n = 1 \\ A_c - 3A_r/4 & \text{con } n = 2 \\ A_c - A_r & \text{con } n = 3 \end{cases}$$

$$A_i = \begin{cases} A_c - 6A_r/4 & \text{con } n = 4 \\ A_c - 7A_r/4 & \text{con } n = 5 \end{cases} \quad (38)$$

avendo indicato con  $n$  il numero dei nodi appartenenti alla zona refined e adiacenti ai nodi coarse di interfaccia, i cui valori sono compresi tra 1 e 5; tale equazione fa riferimento al caso di refinement di primo livello, ma può essere applicata anche al caso di refinement di livello superiore.

Nella logica di ottenere un refinement di livello superiore, i nodi di primo livello (con associato orizzonte scalato rispetto i nodi coarse) devono essere visti come i nodi coarse nella procedura per l'attivazione del refinement, ciò porterebbe alla generazione di una regione refined interna alla regione refined tante volte quanto è il livello di refinement che si vuole raggiungere.

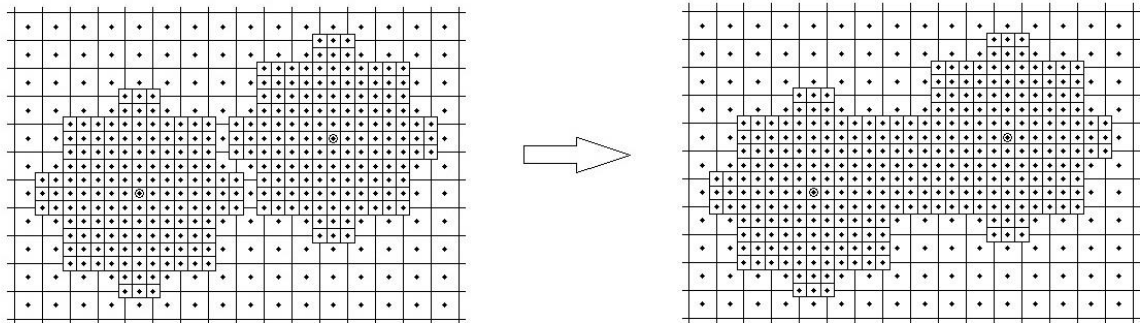


Figura 17: Immagini relative al caso di zone refined indipendenti molto vicine che portano all'attivazione della funzione "incolla".

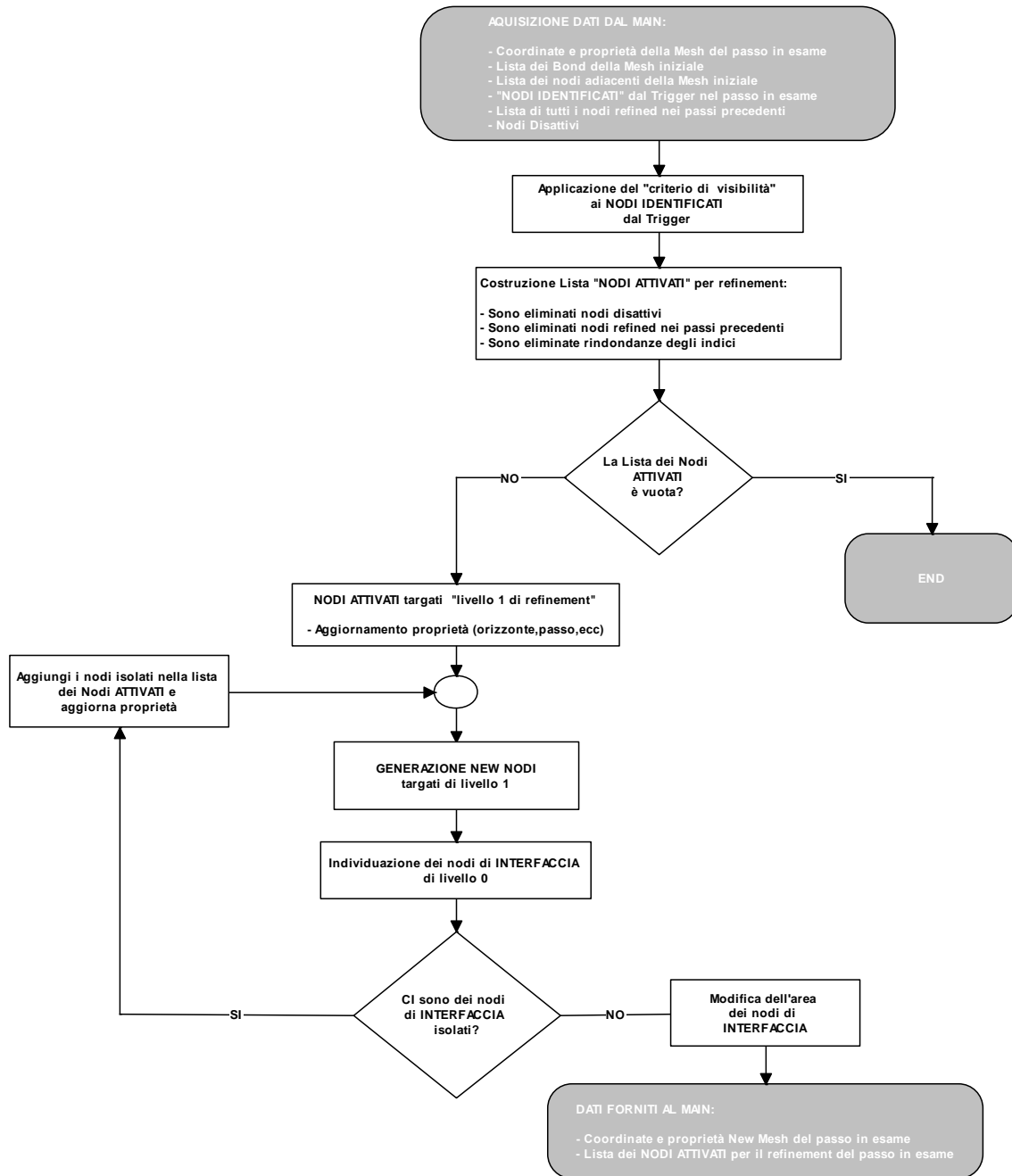


Figura 18: Flow Chart della funzione "GENERATORE della REGIONE REFINED", utilizzata per la generazione dei nuovi nodi e l'aggiornamento delle proprietà dei nodi refined.

Così facendo si rispetta anche la logica messa in risalto da Bazant [4-5] riguardo i fenomeni di riflessioni spurie, mitigate solamente se si adotta una variazione graduale del livello di refinement e non improvvisa, come messo in evidenza anche dallo stesso Bobaru [7].

Quando nel dominio di analisi s'innescano in modo indipendente più zone per l'attivazione del refinement, può capitare che alcuni nodi coarse d'interfaccia rimangano racchiusi tra di esse portando solamente all'introduzione di errori numerici, come riportato in Figura 17.

Per questo motivo l'algoritmo qui sviluppato svolge anche la funzione denominata "incolla", portando all'attivazione del refinement anche in quelle regioni di spazio appartenenti all'interfaccia di più zone refined e contigue.

Capire quando un nodo coarse appartenga a questa zona è semplice, essendo che il numero di nodi appartenenti alla zona refined e adiacenti a esso è  $n > 5$ , come si può notare dall'immagine riportata in Figura 17.

In Figura 18 è riportato il flow chart rappresentativo della sequenza delle principali funzioni svolte dall'algoritmo dedicato alla generazione della regione refined di primo livello.

### **2.1.3 Interpolazione e aggiornamento Bond della griglia**

Come visto nei paragrafi precedenti l'attivazione dell'adaptive refinement porta, in un determinato istante di tempo, all'introduzione nella griglia originale di nuovi nodi dei quali si conoscono solamente le coordinate rispetto il sistema di riferimento iniziale e le proprietà a esse associate quali l'area, orizzonte, micromodulo, passo e critical relative elongation (nel caso di materiale fragile).

Perché nell'istante di tempo successivo i nuovi nodi generati siano partecipi alla computazione della densità di forza agente su ciascun nodo della griglia è necessario eseguire un'interpolazione delle grandezze note di spostamento, velocità e accelerazione.

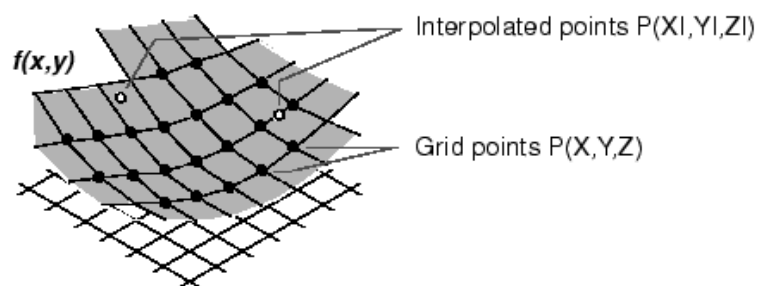
Le strategie d'interpolazione oggi disponibili sono molteplici, ciascuna delle quali ha le proprie peculiarità; si cita a titolo informativo la tecnica MLS (Moving Least Squares) utilizzata da Rabczuk e Belytschko [34] nell'implementazione dell'adaptive refinement applicato al metodo EFG meshfree particle (Element Free Galerkin) per casi di studio

della dinamica della frattura, tale tecnica di interpolazione può essere applicata sia a griglie di nodi regolari che irregolari.

L'algoritmo qui sviluppato fa uso di tecniche d'interpolazione fornite dalla libreria funzioni di Matlab, in particolare si sono utilizzate le funzioni "interp2" e "TriScatteredInterp", la prima applicabile solamente a griglie di nodi regolari 2D mentre la seconda a griglie di nodi sia regolari sia irregolari 2D e 3D.

La funzione interp2 esegue differenti tipologie d'interpolazione, la "Nearest" la quale assegna alla coordinata interna al dominio d'interpolazione il valore noto della funzione della coordinata più vicina, la "Bilinear" che è un'estensione 2D dell'interpolazione lineare a tratti e la "Spline Bicubic" che è l'estensione 2D dell'interpolazione cubica a tratti.

In alcuni casi di studio si è utilizzata l'interpolazione bilineare della funzione interp2, il problema che quest'ultima richiede che i valori della funzione interpolatrice siano definiti su di una griglia regolare di nodi, come visualizzato in Figura 19, ciò presenta lo svantaggio che i nodi che partecipano all'interpolazione del campo di spostamento, velocità e accelerazione dei nuovi nodi sono quelli coarse della mesh iniziale, per cui i nodi generati dal processo dell'adaptive refinement in istanti di tempo precedenti sono esclusi.



**Figura 19: Modalità di interpolazione adottata dalla funzione Matlab "interp2" (immagine tratta dal doc help di Matlab).**

Allo scopo di includere nel processo d'interpolazione anche i nodi generati dall'attivazione dell'adaptive refinement si è utilizzata la funzione Matlab TriScatteredInterp, quest'ultima consente di eseguire differenti tipologie di interpo-



lazione, la “Nearest”, la “Linear” e la “Natural”; in questo studio si è utilizzata l’interpolazione lineare.

Tale funzione utilizza la “Delanauy triangulation” per l’individuazione delle coordinate dei valori noti della funzione da interpolare, per cui a differenza dell’interpolazione bilineare (analogo all’utilizzo di elementi quadrilateri in analisi FEM) l’interpolazione è solamente lineare (analogo all’utilizzo di elementi triangolari nel FEM).

L’adozione di altri metodi d’interpolazione deve essere indagato in futuro, unitamente ad uno studio di sensibilità della loro influenza sui risultati ottenuti con i modelli che implementano l’adaptive refinement.

Componente fondamentale della struttura dati del tool dedicato alla peridynamic è l’utilizzo della lista dei Bond, quest’ultima ha il compito di registrare gli indici dei nodi famiglia appartenenti a ciascun nodo sorgente presente nella griglia (e quindi i bond racchiusi dentro l’orizzonte di ciascun nodo).

L’attivazione dell’adaptive refinement richiede l’aggiornamento dei bond di tutti i nodi circostanti la zona refined, oltre che all’introduzione di nuovi bond dei nodi generati.

L’algoritmo qui sviluppato implementa l’aggiornamento dei bond per tutti i nodi presenti nella griglia, e questo comporta una grave perdita in termini di efficienza computazionale.

In futuro il problema può essere risolto semplicemente prevedendo l’aggiornamento dei bond interni a una finestra circoscritta alla zona refined, rendendo l’algoritmo molto più efficiente.

## **2.2 Indagine degli effetti di un modello non uniforme/multiscala sulla soluzione di analisi dinamiche 2D**

Gli studi condotti da Bobaru [7-8] riguardo all’applicabilità dell’adaptive refinement nell’implementazione numerica mesh-free della teoria bond-based peridynamic hanno messo in luce vari aspetti che devono essere presi in considerazione e come tali richiedono un approfondimento.

In particolare gli studi affrontati da Bobaru riguardano analisi statiche 1D/2D e analisi dinamiche 1D, quest'ultime indaga gli effetti di una griglia non uniforme e multiscala sulla propagazione di onde elastiche continue, come la propagazione di un'onda di forma gaussiana.

I fenomeni di riflessioni spurie che scaturiscono dalla presenza di un'onda di tensione elastica che attraversa due zone di mesh con elementi di differente dimensione (caso di analisi FEM) o di differente densità nodale sono un problema noto da qualche tempo, come evidenziano gli studi condotti da Bazant [4-5]; anche i modelli multiscala presentano a tutt'oggi problematiche relative al trasferimento corretto delle onde di tensione tra i modelli di differente lunghezza scala.

Perciò nei paragrafi a seguire sono analizzati gli effetti della presenza di una zona refined non uniforme nella griglia 2D sulla risposta meccanica di due piastre, una tratta il problema del valore iniziale conseguente l'imposizione al campo di spostamenti iniziale di un'onda di forma gaussiana (onda continua), l'altra tratta il caso della propagazione di un'onda "shock" (onda discontinua) generata dall'applicazione di un carico di trazione a gradino.

### **2.2.1 Problema del valore iniziale: propagazione di un'onda continua**

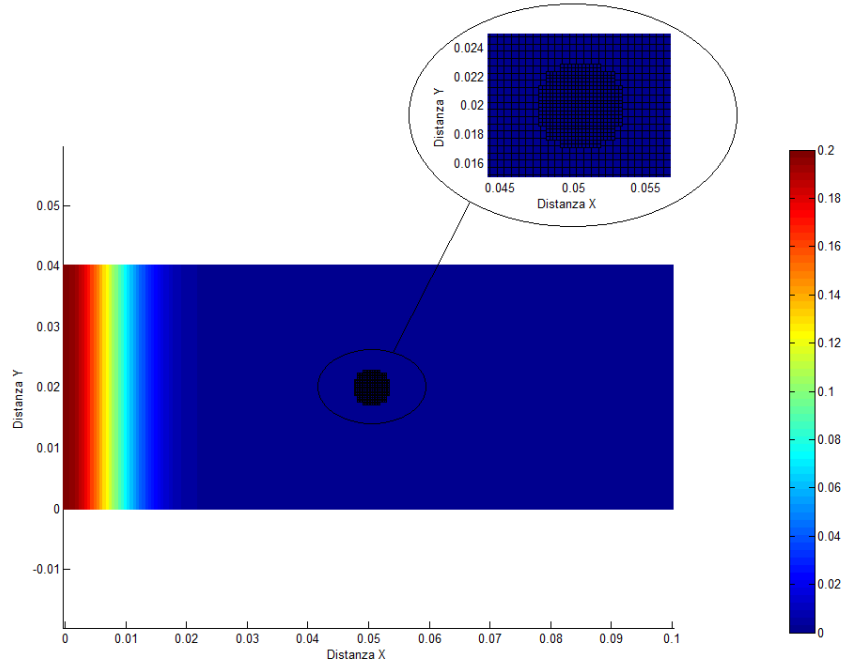
L'analisi in oggetto riguarda la propagazione di un'onda piana di forma gaussiana in una piastra 2D, l'onda è generata attraverso l'imposizione del campo di spostamento iniziale  $u_0(x,y)$  espresso dalla relazione:

$$u_0(x, y) = 0.2e^{-\left(\frac{x}{l}\right)^2}$$

$$v_0(x, y) = 0 \tag{39}$$

avendo indicato con  $u$  e  $v$  lo spostamento in direzione X e Y rispettivamente, mentre si è assunto come parametro caratteristico della dimensione dell'onda  $l = 0,01$ ; si assume

l'ipotesi di materiale elastico lineare omogeneo e isotropo con modulo di Young  $E=1$ , densità di massa  $\rho=1$  e coefficiente di Poisson  $\nu=1/3$ , valore quest'ultimo imposto dalla teoria bond-based peridynamic conseguente l'assunzione di analisi 2D e "plane stress".



**Figura 20: Contour plot del campo di spostamento iniziale (Eq. 39) imposto per generare l'onda longitudinale di forma gaussiana, con dettaglio della regione refined al centro della piastra.**

La lunghezza della piastra è  $L=0,1$  e larghezza  $H=0,04$ , come riportato in Figura 20 si può notare come le unità di misura non vengono riportate poiché le dimensioni assolute sono ininfluenti allo scopo prefissato da quest'analisi.

Si assume l'ipotesi di piccoli spostamenti, per cui l'analisi è implementata con la versione linearizzata delle equazioni del moto della teoria bond-based peridynamic, inoltre si assume micromodulo costante e modello costitutivo di materiale PMB .

Scopo dell'analisi qui proposta è di valutare l'effetto della distorsione subita dall'onda piana nell'attraversare una regione di spazio non uniforme con differente densità nodale e lunghezza scala, come riportato in Figura 21.

La valutazione può essere tanto più valida quanto l'onda inizialmente piana rimanga tale durante la sua propagazione, ciò comporta minimizzare tutti i possibili meccanismi che possono introdurre relazioni di dispersione, questi meccanismi comprendono l'effetto di Poisson che causa una contrazione e dilatazione laterale del materiale rispetto la

direzione di propagazione dell'onda elastica, la stessa modellazione non locale della teoria peridynamic introduce importanti effetti dispersivi (studiati da Silling [49]), effetti questi ultimi accentuati dal skin effect a causa dell'aumento di cedevolezza manifestato dai bordi del modello rispetto la propria regione centrale.

Per questo motivo la piastra è vincolata agli spostamenti lungo la direzione  $Y$  (direzione ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda), inoltre si è assunta una larghezza  $H$  sufficiente da ridurre l'influenza del skin effect sulla distorsione dell'onda nella zona centrale del modello, quest'ultima oggetto di studio.

Al fine di valutare se la distorsione subita dall'onda sia causa della sola differente densità nodale della zona attraversata o causa sia della differente densità nodale e orizzonte a esso associato, sono realizzati due modelli numerici, il primo denominato modello A e il secondo modello B come visualizzati in Figura 21.

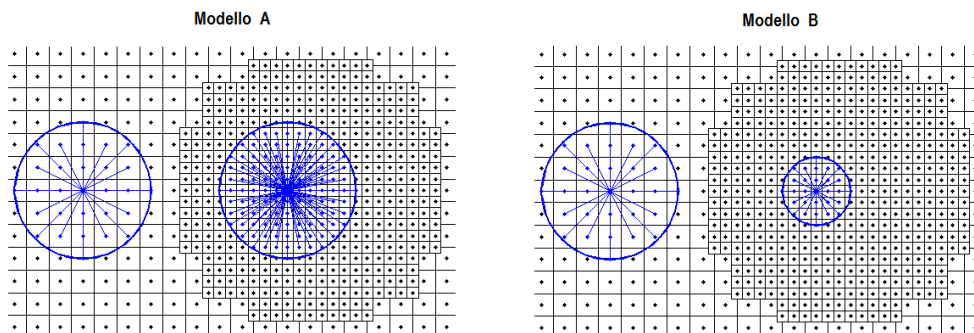


Figura 21: Visualizzazione dei modelli A e B.

Come visualizzato in Figura 20 entrambe i modelli sono ottenuti da una griglia di nodi uniforme attraverso l'attivazione del refinement in una zona centrale e circoscritta della piastra; le soluzioni ottenute con i due modelli A e B sono allora confrontate con la soluzione del modello di griglia uniforme coarse.

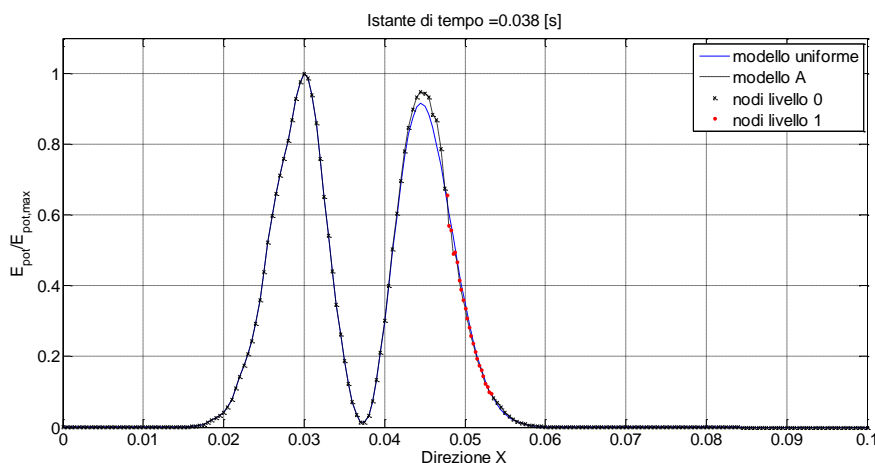
Il passo della griglia coarse è  $\Delta x = \Delta y = 0,0005$  e orizzonte  $\delta = 0,0015$  (avendo assunto  $m=3$ ) con un numero totale di 16281 nodi, il refinement genera 348 nodi con passo  $\Delta x = \Delta y = 0,0005$  e orizzonte  $\delta = 0,0015$  per il modello A e con passo  $\Delta x = \Delta y = 0,0005$  e orizzonte  $\delta = 0,00075$  per il modello B; tutte le analisi condotte hanno una durata di  $t = 0,8$  s con uno step temporale  $\Delta t = 2e-4$  s.

Una prima valutazione è fatta ponendo a confronto i profili longitudinali dei campi di densità dell'energia potenziale ottenuti con i differenti modelli refined con quello del modello di griglia uniforme.

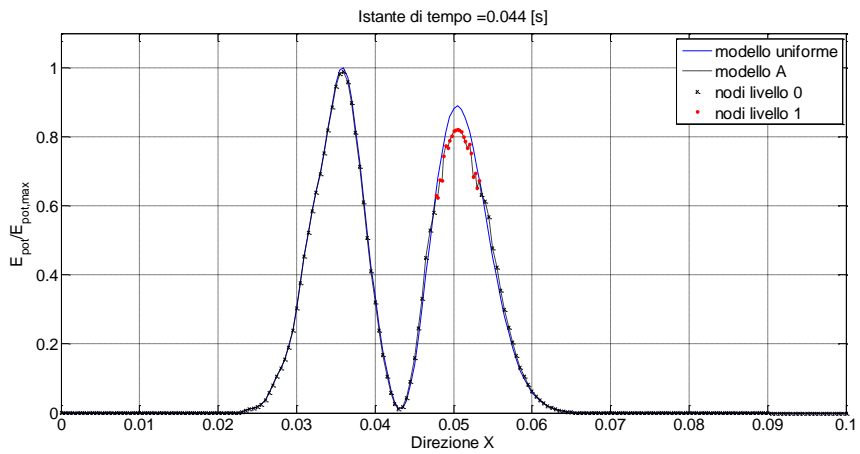
Nelle Figure 22-27 sono riportati i grafici riguardanti il modello A mentre nelle Figura 28-33 quelli riguardanti il modello B. Le sezioni dei profili di confronto hanno coordinate  $y=0,02$ ,  $y=0,0202$  e  $y=0,0227$ , scelte come campione di riferimento del comportamento dei modelli refined, mentre gli istanti di tempo selezionati  $t=0.038s$  e  $t=0.044s$  corrispondono agli istanti di inizio passaggio del fronte d'onda nella zona refined; non sono riportati altri istanti di tempo poiché quelli selezionati sono già esaustivi del comportamento manifestato dai modelli analizzati.

Si può notare dai grafici come anche il flusso di energia del modello di riferimento ha un andamento non simmetrico, ciò è conseguenza degli effetti provocati sia dall'interazione non locale della teoria peridynamic sia del skin effect del bordo dal quale l'onda viene fatta partire.

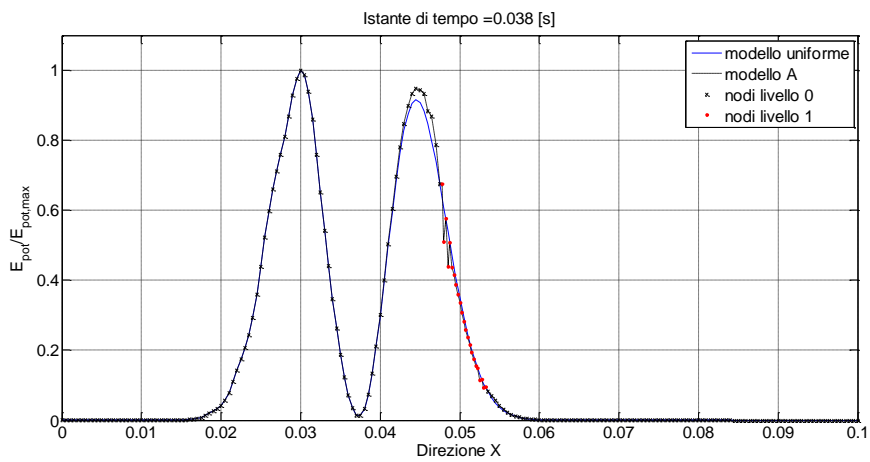
I grafici riguardanti il flusso della densità di energia potenziale evidenziano due importanti questioni, primo che i nodi della regione refined di entrambi i modelli manifestano una perdita di energia, perdita che è molto più accentuata per i nodi del modello B, secondo che tale perdita di energia è localizzata soprattutto in corrispondenza delle zone d'interfaccia.



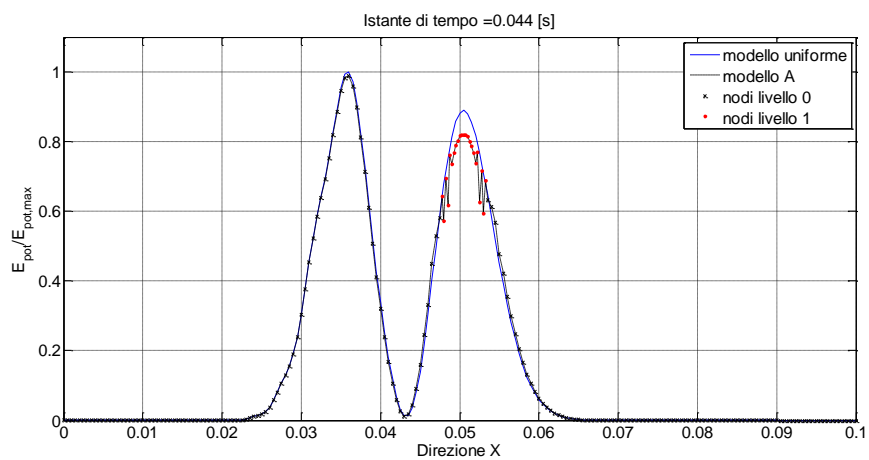
**Figura 22: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,02$  e istante  $t=0,038s$ , relativa al modello A.**



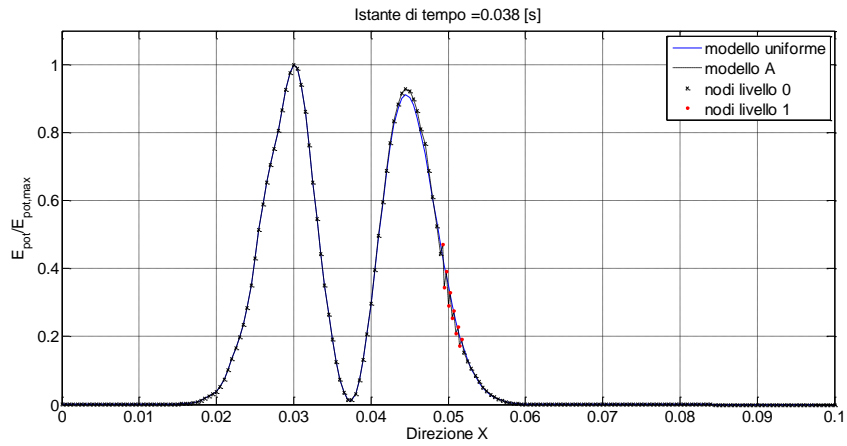
**Figura 23: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,02$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello A.**



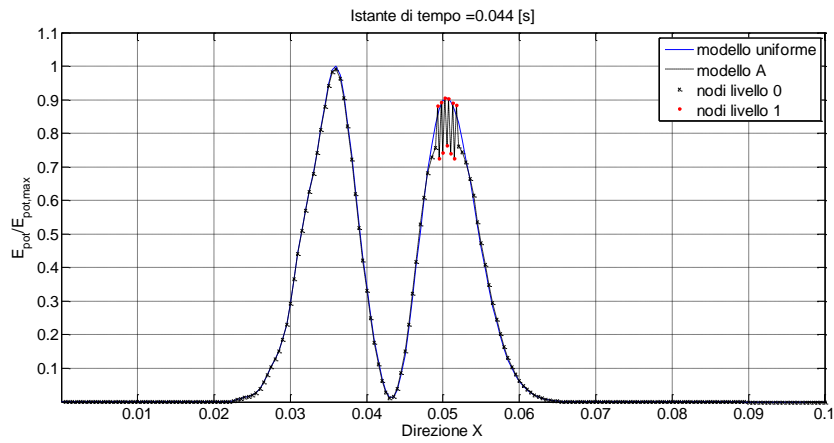
**Figura 24: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0202$  e istante  $t=0,038s$ , relativa al modello A.**



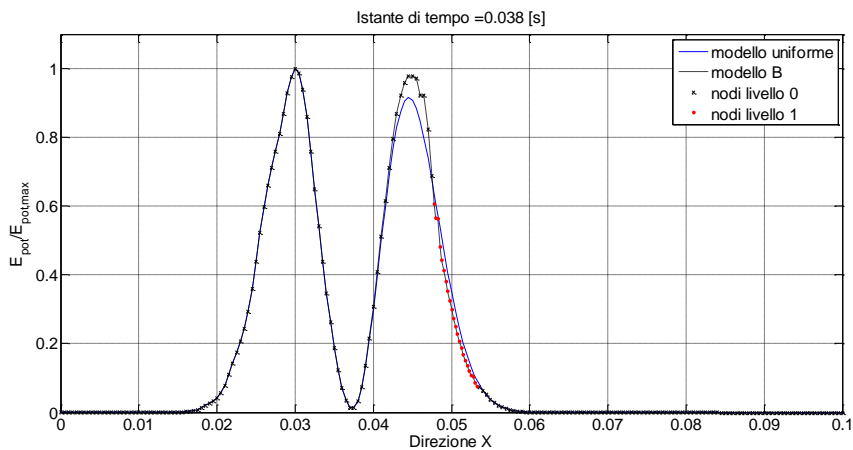
**Figura 25: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0202$  e  $t=0,044s$ , relativa al modello A.**



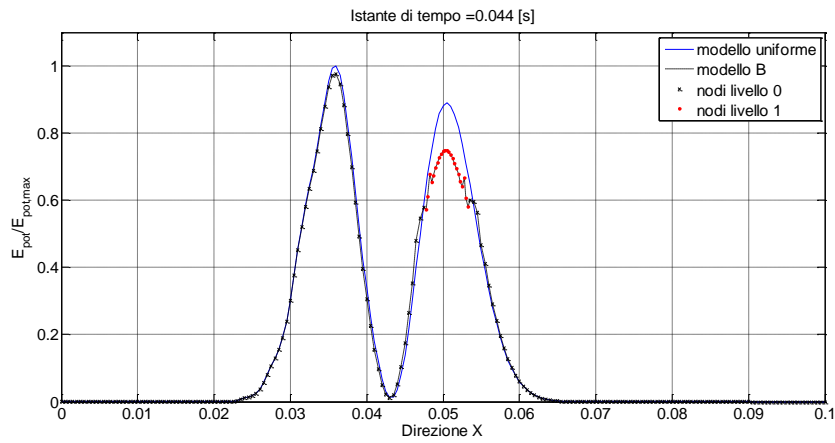
**Figura 26: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0227$  e istante  $t=0,038s$ , relativa al modello A.**



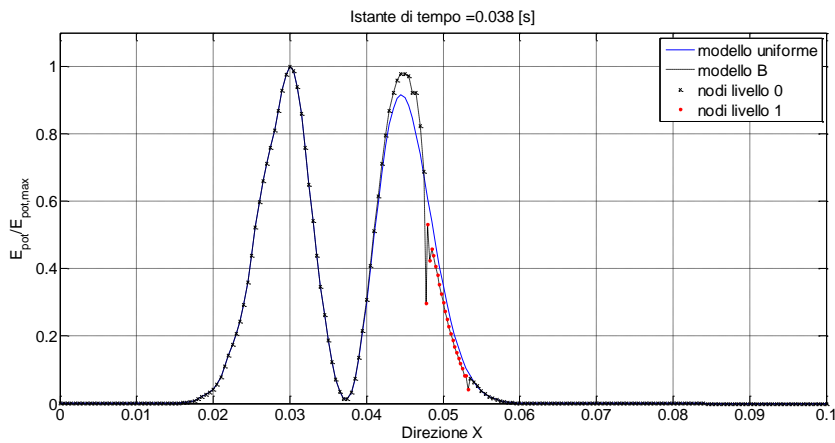
**Figura 27: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0227$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello A.**



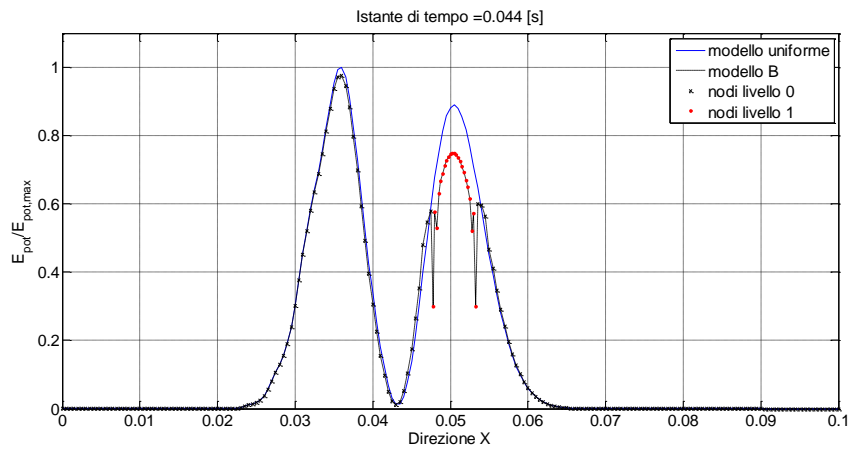
**Figura 28: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,02$  e istante  $t=0,038s$ , relativa al mode**



**Figura 29: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,02$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello B.**

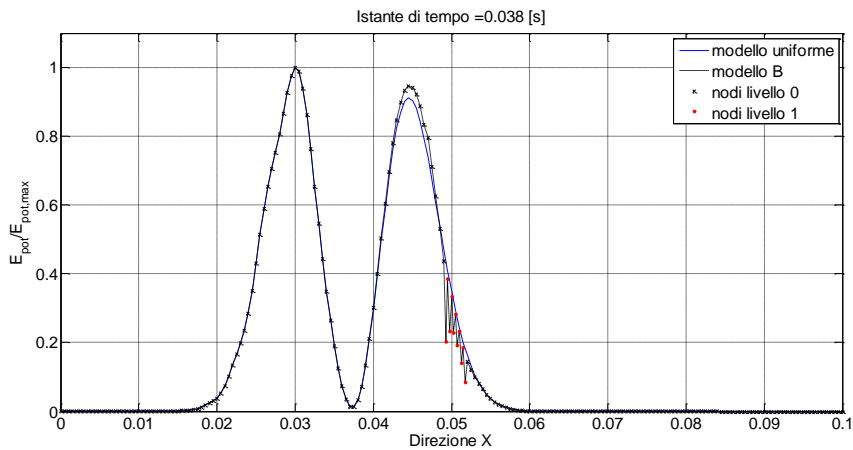


**Figura 30: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0202$  e istante  $t=0,038s$ , relativa al modello B.**

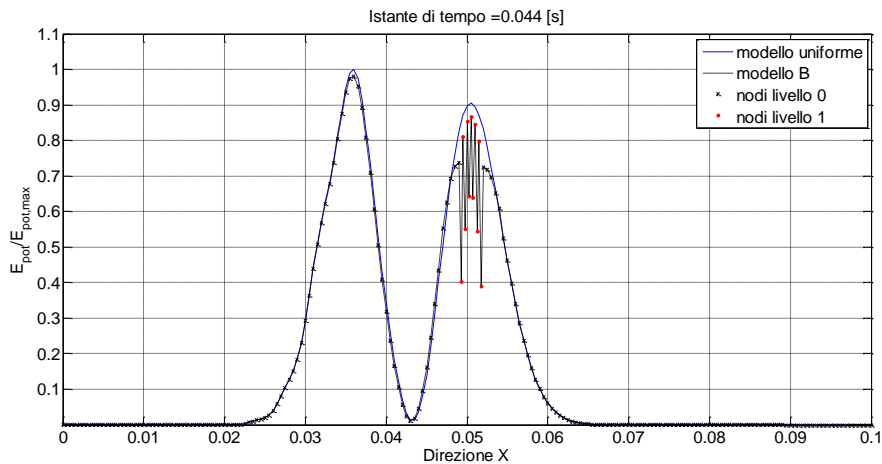


**Figura 31: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0202$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello B.**





**Figura 32: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0227$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello B.**



**Figura 33: Profilo della densità di energia potenziale normalizzata alla coordinata  $y=0,0227$  e istante  $t=0,044s$ , relativa al modello B.**

In Tabella 1 sono riportati i valori percentuali di riduzione massima  $\varepsilon_{p,max}$ ,  $\varepsilon_{k,max}$  e minima  $\varepsilon_{p,min}$ ,  $\varepsilon_{k,min}$  della densità di energia potenziale e cinetica manifestata dai nodi contenuti nella regione refined durante il corso di tutta la simulazione e l'errore relativo percentuale  $\varepsilon_{tot}$  dell'energia totale persa dal sistema.

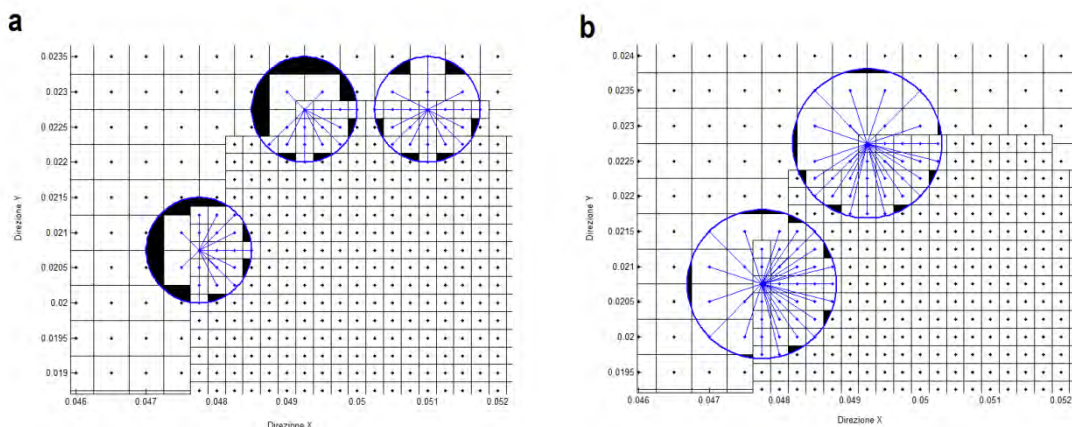
Modello	$\varepsilon_{p,max}$ [%]	$\varepsilon_{p,min}$ [%]	$\varepsilon_{k,max}$ [%]	$\varepsilon_{k,min}$ [%]	$\varepsilon_{tot}$ [%]
A	22,38	2,88	13,00	0,46	0,15
B	56,62	4,37	22,55	0,25	0,57

**Tabella 1: Valori relativi alla perdita della densità di energia potenziale/cinetica e dell'energia totale specifica del sistema dei modelli A e B.**

I valori di perdita maggiore sono manifestati dai nodi d'interfaccia, perdite che molto probabilmente sono conseguenza dell'errore introdotto dal cambiamento dell'accuratezza numerica dell'integrazione tra due regioni di differente livello di refinement.

Tale cambiamento è molto più pronunciato nel modello multiscala, dove alcuni nodi d'interfaccia arrivano a manifestare perdite di energia di circa il 57%; queste perdite sono strettamente legate alla riduzione del volume (visualizzato in Figura 34) che partecipa al calcolo della densità di forza agente sul nodo, portando così all'aumento di cedevolezza.

In Figura 35.a è riportato il contour plot delle percentuali di perdita della densità di energia potenziale che i nodi della regione refined manifestano durante il corso di tutta la simulazione, evidenziando quanto detto sopra.



**Figura 34: Immagine della perdita di volume di alcuni nodi d'interfaccia, il colore nero evidenzia il volume perso: a) modello B, b) modello B con modifica dell'orizzonte dei nodi con maggiore perdita volumetrica.**

Una strategia proposta da Bobaru [8] e pensata per griglie non uniformi è di assegnare l'orizzonte a ciascun nodo d'interfaccia della zona refined come multiplo della distanza con il nodo famiglia coarse più vicino, tale fattore moltiplicativo deve essere molto vicino al valore di  $m$  adottato nel modello (nel nostro caso  $m=3$ ).

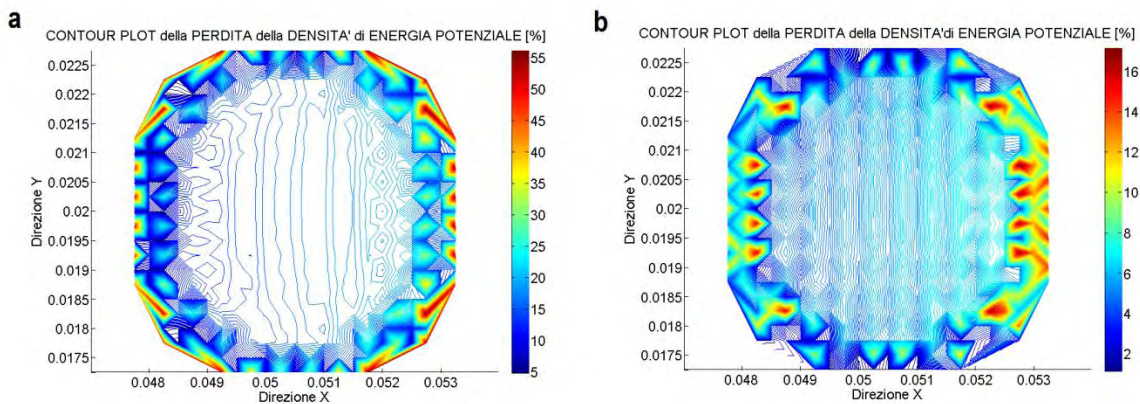
L'applicazione di questa correzione comporta l'aumento dell'orizzonte di alcuni nodi localizzati nella regione d'interfaccia, portando di fatto a un aumento del volume che

partecipa al calcolo della densità di forza agente sul nodo stesso, come visualizzato in Figura 34; in particolare l'orizzonte corretto  $\delta_c$  assume le dimensioni

$$\delta_c = m \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2} = 0,00106 \quad (40)$$

valore pressoché intermedio tra l'orizzonte della zona coarse e quello della zona refined. L'adozione di tale strategia porta a ridurre notevolmente la quantità di energia persa dai nodi della zona refined, come evidenziato dal contour plot di Figura 35.b riguardo la perdita percentuale della densità di energia potenziale manifestata dai nodi durante il corso di tutta la simulazione.

I valori delle perdite percentuali di energia sono riportati in tabella 2, si può notare come la riduzione relativa percentuale dell'energia totale manifestata dal sistema con l'utilizzo di tale correzione sia di un ordine di grandezza inferiore a quella manifesta dai sistemi con l'utilizzo dei modelli A e B.



**Figura 35: Confronto dei Contour plot della perdita percentuale della densità di energia potenziale tra il modello multiscala e quello con orizzonte corretto.**

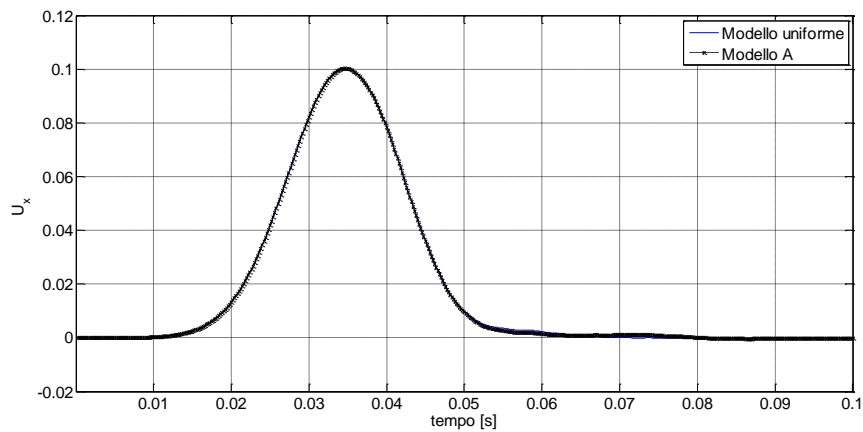
Modello	$\varepsilon_{p,max}$ [%]	$\varepsilon_{p,min}$ [%]	$\varepsilon_{k,max}$ [%]	$\varepsilon_{k,min}$ [%]	$\varepsilon_{tot}$ [%]
B con correzione orizzonte	17,33	1,00	9,73	0,55	0,09

**Tabella 2: Valori della perdita della densità di energia potenziale/cinetica e dell'energia totale specifica del sistema del modello B comprensivo di correzione.**

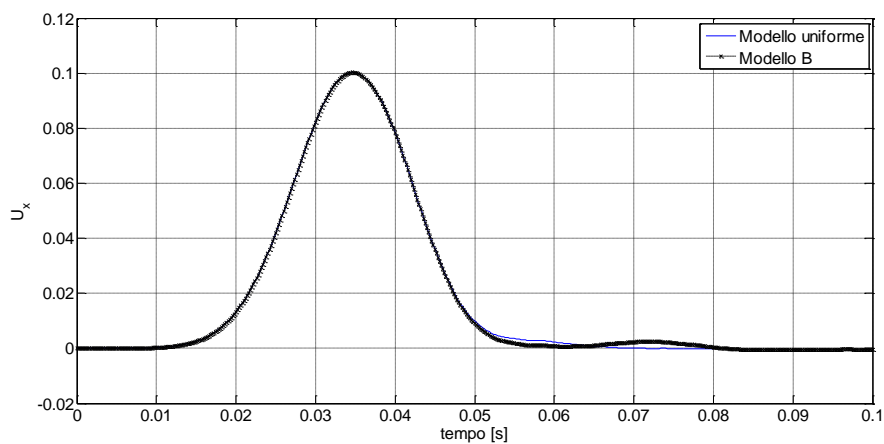
I contour plot di Figura 35 evidenziano il fatto che mentre nel modello B solamente alcuni dei nodi più esterni manifestano una consistente perdita di energia, la variazione dell'orizzonte all'interfaccia provochi una perdita di energia minore ma di maggiore estensione, estendendo la perdita anche a nodi più interni della zona refined.

In futuro devono essere indagate a fondo delle strategie che permettano di minimizzare tali perdite di energia, ciò esula dallo scopo di questo studio.

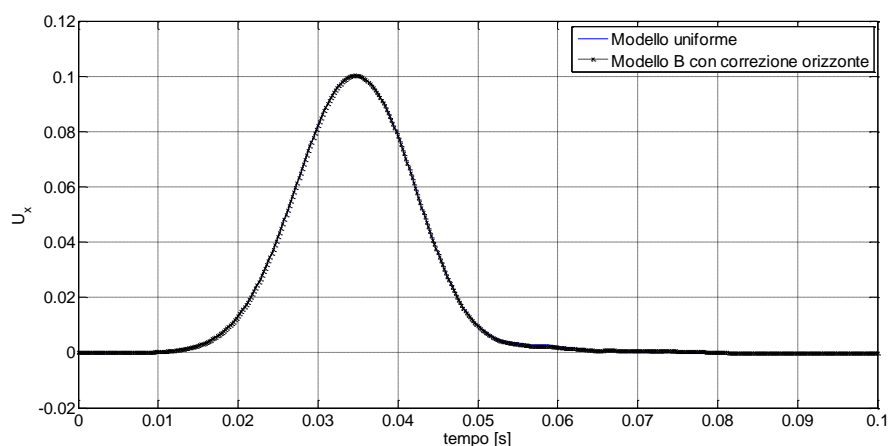
Finora si è discusso del comportamento dei nodi della regione refined, per quanto riguarda invece la presenza dei fenomeni di riflessione spuria sono riportati nelle Figure 36-38 gli andamenti temporali dello spostamento di un nodo coarse localizzato nella parte centrale e antistante alla zona refined per entrambe i modelli.



**Figura 36: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate  $x=0,034$  e  $y=0,02$ , relativo al Modello A.**



**Figura 37: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate  $x=0,034$  e  $y=0,02$ , relativo al Modello B.**



**Figura 38: Confronto dell'andamento temporale dello spostamento del nodo di coordinate  $x=0,034$  e  $y=0,02$ , relativo al Modello B con apportata modifica dell'orizzonte.**

Si può notare come nel modello B sia presente una lieve riflessione d'onda, visualizzata in 7 in corrispondenza dell'intervallo di tempo di circa  $t=0,65 \div 0,8$  s con un'ampiezza massima del 2,5% dell'ampiezza dell'onda gaussiana, riflessione che invece non viene manifestata apportando al modello B la correzione dell'orizzonte (Figura 38); anche il modello A manifesta una lieve riflessione ma di ampiezza del 1,2% dell'ampiezza massima dell'onda gaussiana (Figura 36).

I risultati ottenuti riguardo i fenomeni di riflessione spuria sono in accordo con quanto analizzato da Bobaru [7] riguardo la propagazione di un'onda gaussiana in un modello refined di primo livello di una trave 1D. Tali risultati evidenziano come l'entità dell'ampiezza dell'onda riflessa sia comunque di lieve entità e come tale di effetto trascurabile nel caso di refinement di primo livello.

### **2.2.2 Problema al contorno: propagazione di un'onda discontinua**

Le analisi 2D condotte nel precedente paragrafo hanno evidenziato come la presenza di una zona refined in una griglia di nodi inizialmente uniforme causi la perdita di energia del sistema, perdita che si manifesta soprattutto da parte di alcuni nodi localizzati all'interfaccia tra la zona coarse e quella refined.

Questi risultati sono stati ottenuti valutando gli effetti di distorsione provocati da una regione refined circoscritta al centro di una piastra sulla propagazione di un'onda continua, si vogliono ora valutare gli stessi effetti provocati da una zona refined più estesa sulla propagazione di un'onda discontinua.

L'onda discontinua è generata attraverso l'applicazione a gradino di un carico di trazione al bordo di una piastra quadrata delle dimensioni di 40x40 mm (Figura 39), inoltre a quest'ultima è applicata la condizione di vincolo degli spostamenti lungo la direzione Y (direzione di applicazione del carico) al bordo opposto a quello di applicazione del carico.

Il materiale utilizzato è Duran 50 Glass con modulo di Young  $E=65 \text{ GPa}$  e densità di massa  $\rho=2235 \text{ kg/m}^3$ , si assumono le ipotesi di materiale elastico lineare omogeneo e isotropo, inoltre si assume la condizione di analisi 2D "plane stress" perciò il coefficiente di Poisson è vincolato al valore  $\nu=1/3$ .

Sono implementati quattro modelli di griglia per la discretizzazione della piastra, un modello di griglia uniforme coarse, un modello di griglia uniforme refined e due modelli di griglia non uniforme/multiscala, questi ultimi si differenziano poiché è apportata la correzione dell'orizzonte ai nodi d'interfaccia, come visualizzato in Figura 34.

MODELLO	$\Delta x=\Delta y$ [m]	$\delta$ [m]
<i>Uniforme</i>	0,001	0,003
<i>Uniforme</i>	0,0005	0,0015
<i>Non-uniforme/multiscala</i>	0,001/0,0005	0,003/0,0015
<i>Non-uniforme/multiscala</i>	0,001/0,0005	0,003/0,0021/0,0015

**Tabella 3: Valori del passo e orizzonte adottati nei modelli di griglia uniforme/monoscala e non uniforme/multiscala.**

In Tabella 3 sono riportate le informazioni riguardanti le dimensioni del passo e dell'orizzonte associati ai nodi dei quattro modelli, in tutti i modelli si è utilizzato il

valore di  $m=3$ ; in Figura 39 sono riportate le immagini relative ai tre modelli di griglia utilizzati per l'implementazione dei quattro modelli.

Dalle immagini riportate in Figura 39 si può notare come in tutti i modelli siano presenti due file di nodi lungo la direzione Y che si aggiungono alla dimensione effettiva della piastra ( $y=0,04\text{ m}$ ), ciò poiché la condizione di vincolo è applicata nella striscia di materiale di larghezza pari all'orizzonte dei nodi di coordinata  $y=0,04\text{m}$ , come descritto nel paragrafo 1.2.4; anche il carico di trazione è applicato allo stesso modo, con applicata una tensione superficiale di  $\sigma=20\text{MPa}$ .

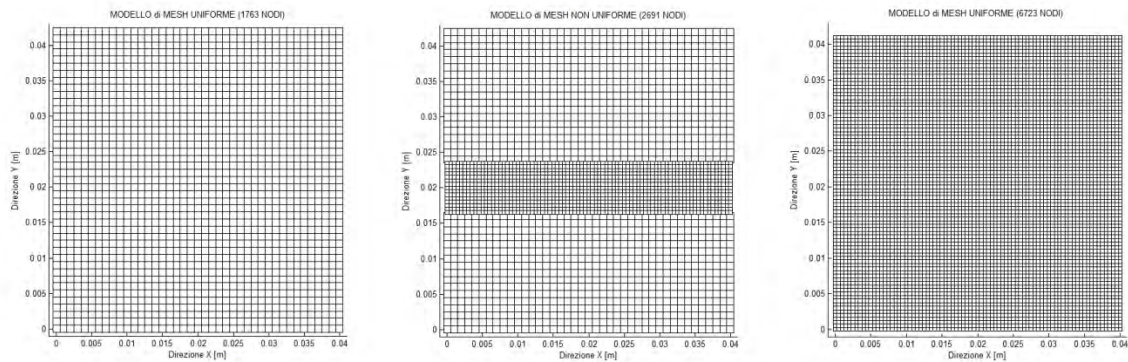


Figura 39: Immagine dei quattro modelli di griglia utilizzati per la discretizzazione della piastra.

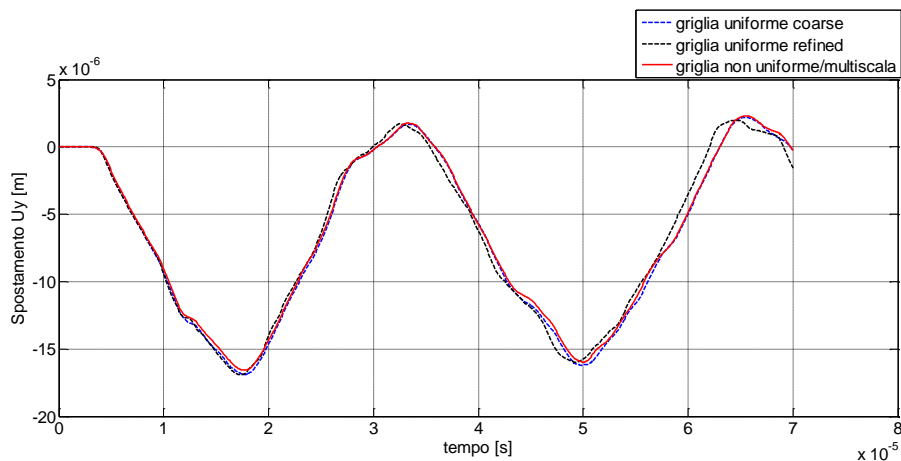
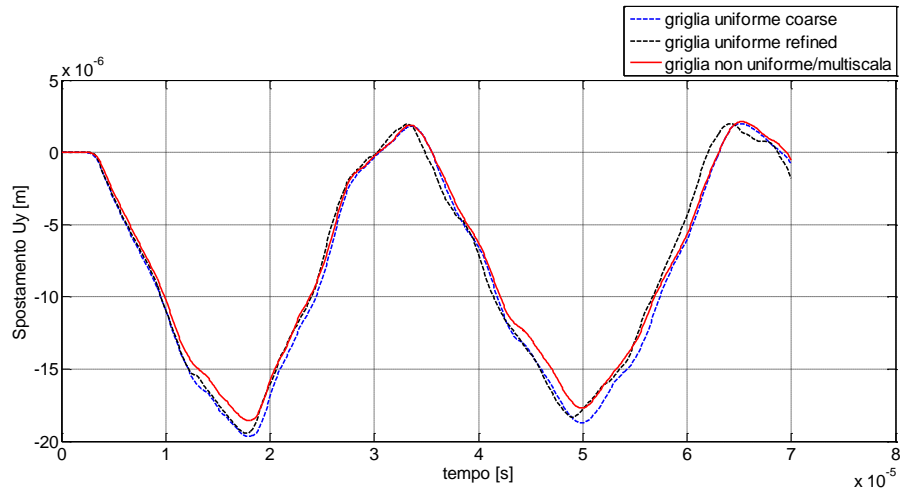
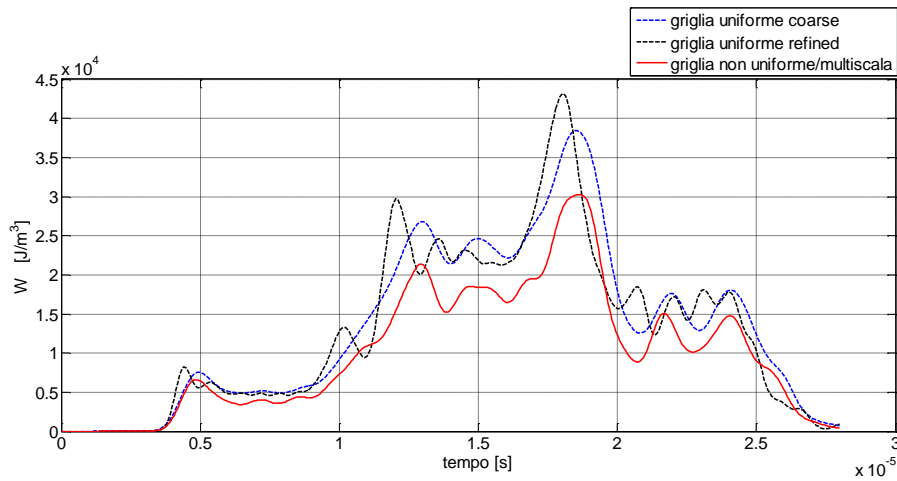


Figura 40: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo centrale della regione refined (coordinate  $x=0,02$  e  $y=0,02$ ).



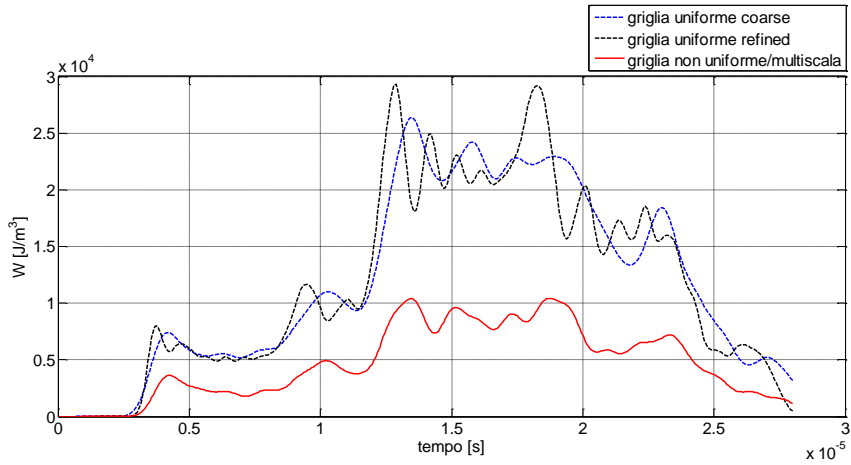
**Figura 41: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate  $x=0,0202$  e  $y=0,0165$ ).**



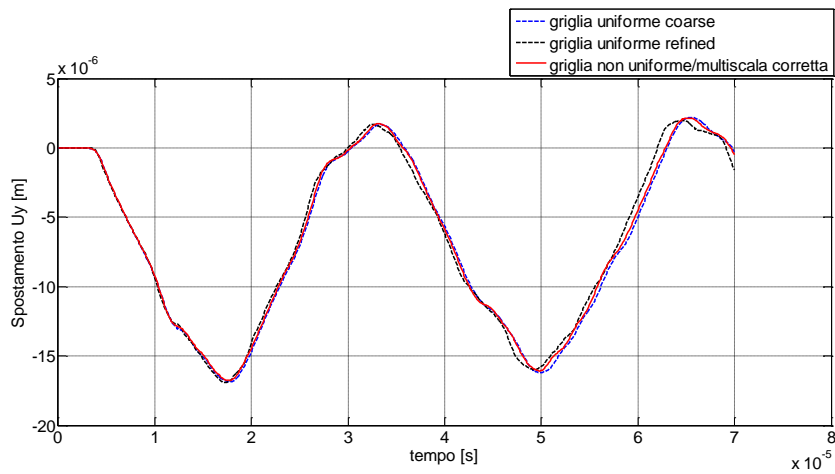
**Figura 42: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo centrale della regione refined (coordinate  $x=0,02$  e  $y=0,02$ ).**

I risultati dei modelli di griglia uniforme sono utilizzati per il confronto della soluzione ottenuta con i due modelli di griglia non uniforme/multiscala, a tale proposito nelle Figure 40-43 sono posti a confronto gli andamenti temporali dello spostamento  $u_y$  e nelle Figure 44-47 gli andamenti temporali della densità di energia potenziale  $W$ .

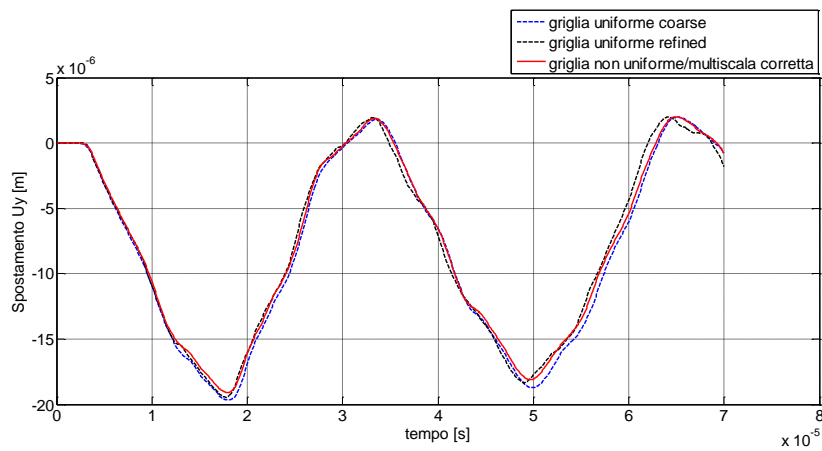




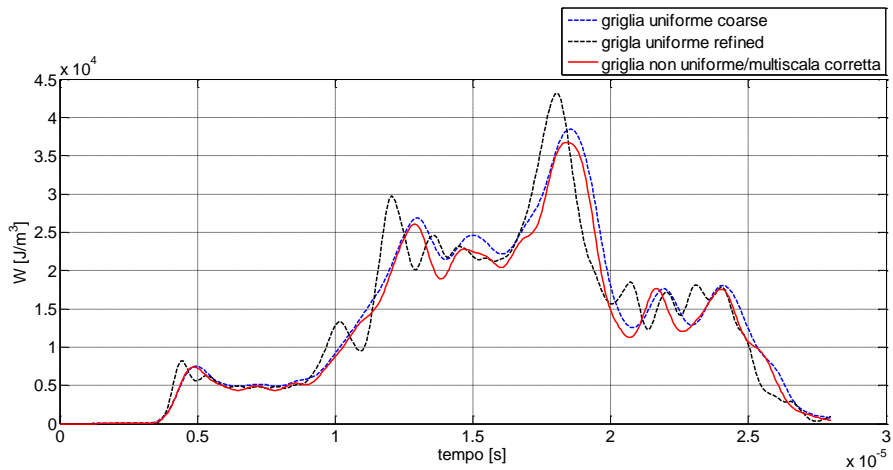
**Figura 43: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate  $x=0,0202$  e  $y=0,0165$ ).**



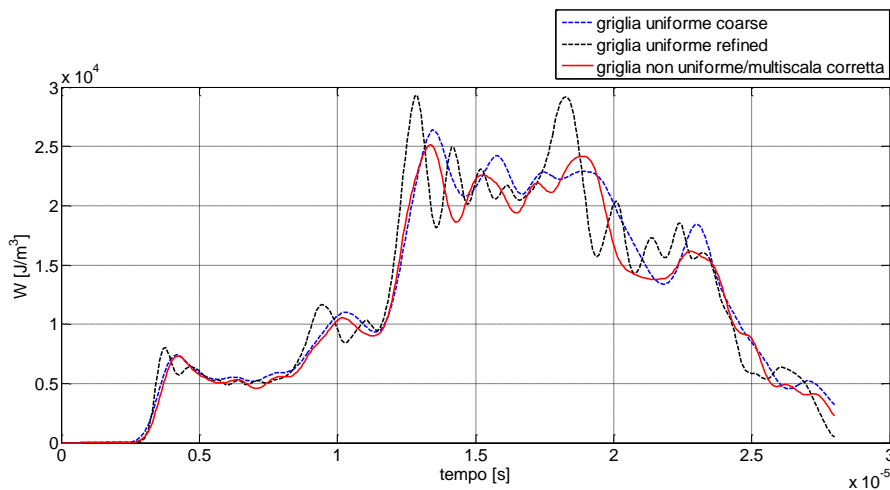
**Figura 44: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo centrale della regione refined (coordinate  $x=0,02$  e  $y=0,02$ ).**



**Figura 45: Confronto degli andamenti temporali dello spostamento del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate  $x=0,0202$  e  $y=0,0165$ ).**



**Figura 46: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo centrale della regione refined (coordinate  $x=0,02$  e  $y=0,02$ ).**



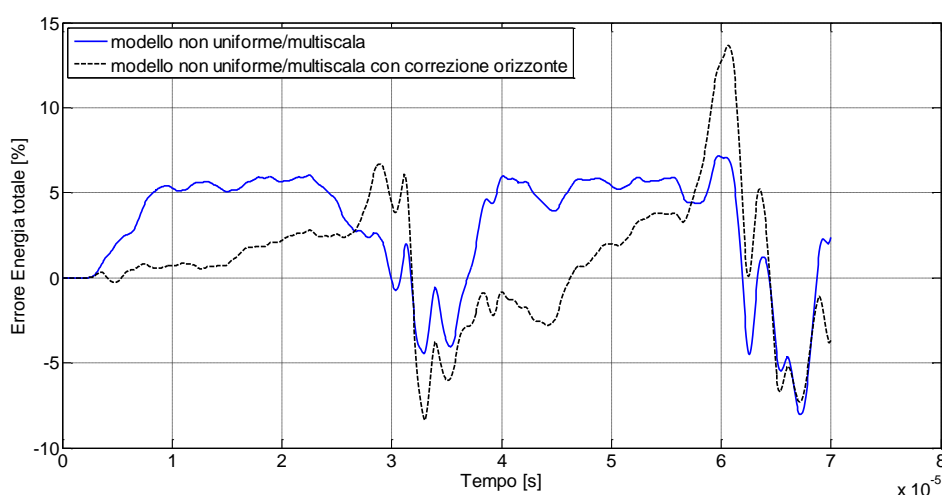
**Figura 47: Confronto degli andamenti temporali della densità di energia potenziale del nodo d'interfaccia della regione refined (coordinate  $x=0,0202$  e  $y=0,0165$ ).**

Come fatto nell'analisi del paragrafo precedente si sono presi gli andamenti temporali di alcuni nodi campione della regione refined, le simulazioni sono state condotte con uno step d'integrazione temporale di  $\Delta t=7e-08s$  e la durata di  $t=7e-05s$ ; riguardo i grafici della densità di energia potenziale si è riportato l'andamento di un intervallo di tempo inferiore alla durata della simulazione, ciò per motivi di chiarezza nella visualizzazione della soluzione.

Dagli andamenti della densità di energia potenziale si può notare come il modello di griglia non uniforme/multiscala manifesti delle perdite di energia molto accentuate in

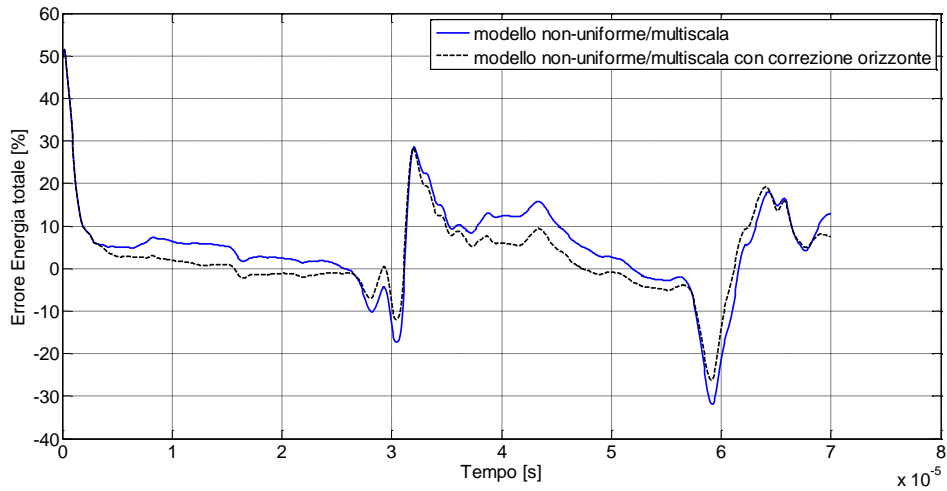
corrispondenza di alcuni nodi d'interfaccia, allo stesso modo delle analisi viste in precedenza; queste perdite diventano trascurabili apportando la modifica dell'orizzonte. Bisogna tenere in considerazione che i grafici riportati nelle Figure 40-47 possono trarre in inganno poiché rappresentano una valutazione locale del comportamento del sistema, da un'analisi globale invece si costata come il modello di griglia non uniforme "rivisto" manifesti una maggiore perdita di energia.

Quanto affermato è visualizzato nelle Figure 48-49 nelle quali è riportato l'andamento temporale dello scostamento relativo percentuale dell'energia totale tra i modelli di griglia non uniformi e quelli di griglia uniforme; si mette in risalto che uno scostamento positivo (Figura 48) significa perdita di energia, uno scostamento negativo significa aumento di energia.



**Figura 48: Andamento temporale dello scostamento relativo dell'energia totale del sistema dei due modelli non-uniforme/multiscala con quello uniforme/monoscala coarse.**

Si può notare dalla Figura 48 come il modello "rivisto" manifesti un picco nel calo di energia totale del 13,65%, a differenza del 7,15% manifestato dal modello "non rivisto". Nell'analisi condotta nel precedente paragrafo, è emerso come la correzione dell'orizzonte ai nodi d'interfaccia porti a migliorare le prestazioni del modello non uniforme refined sia da un punto di vista locale sia globale del sistema; la stessa cosa non si può dire nel caso qui analizzato dove tale correzione porta ad accentuare le perdite globali.



**Figura 49: Andamento temporale dello scostamento relativo dell'energia totale del sistema dei due modelli non-uniforme/multiscala con quello uniforme/monoscala refined.**

Si capisce come questo comportamento non univoco sulla risposta del sistema richieda uno studio più approfondito, cosa che dovrà essere affrontata in futuro per capire e minimizzare gli effetti provocati non solo da una differente discretizzazione della griglia, ma anche da una differente lunghezza scala.

### **3 APPLICAZIONE DELL'ADAPTIVE GRID REFINEMENT NELLA DINAMICA DELLA FRATTURA FRAGILE 2D**

Nei paragrafi precedenti si sono analizzati in dettaglio sia la strategia utilizzata per l'implementazione dell'adaptive refinement nella teoria bond-based peridynamic, che gli effetti provocati dalla presenza di un modello di griglia non uniforme e multiscala sulla propagazione di onde elastiche.

L'interazione tra le onde di tensione e la propagazione di fratture è di fondamentale importanza nello studio della dinamica della frattura, poiché sia la velocità di propagazione della frattura sia la sua traiettoria nel mezzo materiale sono strettamente legate da una loro continua interazione.

Al fine di valutare l'applicabilità dell'adaptive refinement a casi di studio che riguardano fenomeni inerenti alla dinamica della frattura fragile (v. Bowden [10], Döll [14], Field [18] e Ravi Chandar [38-42]), sono proposte nel seguito tre simulazioni di esperimenti che rappresentano il benchmark delle analisi condotte da molti studiosi per verificare la validità dei modelli da loro proposti.

Questo è fatto utilizzando il modello di adaptive refinement senza correzione dell'orizzonte all'interfaccia, questa scelta è determinata da più motivazioni, primo la correzione dell'orizzonte richiede delle operazioni aggiuntive nell'algoritmo d'implementazione dell'adaptive refinement portando a una riduzione dell'efficienza computazionale, secondo i risultati mostrati in Figura 48 hanno evidenziato come tale correzione porti a una maggiore perdita di energia globale del sistema in presenza dell'applicazione di carichi a gradino, condizione quest'ultima che si ritrova in molti casi di studio qui affrontati.

Tutti i modelli implementati riguardano casi di analisi 2D sia in condizione di "plane stress" sia di "plane strain", si utilizza il modello costitutivo PMB di materiale micro-elastico e lineare, inoltre si assumono le ipotesi di materiale omogeneo e isotropo.

Allo stato attuale è implementato solamente il refinement di primo livello, anche se in futuro si prevede una sua estensione per l'ottenimento del livello di refinement desiderato.

### 3.1 Piastra posta in trazione e pre-criccata

Un caso di studio che è stato ampiamente indagato nell'ambito della meccanica della frattura fragile è quello che riguarda una piastra sottoposta a un carico di trazione e pre-criccata lateralmente; tra gli studiosi che hanno affrontato questo caso si ricorda Bobaru [21-23] con la teoria bond-based peridynamic e Belytschko [6] con il metodo XFEM basato sulla teoria della meccanica classica FEA (entrambe utilizzano una mesh uniforme).

Il particolare interesse che deriva da questo caso di studio riguarda il fenomeno del "crack branching" nei materiali fragili, questo fenomeno consiste nella ramificazione manifestata da una cricca che inizialmente si propaga lungo una traiettoria, ciò è conseguenza del raggiungimento di un valore di energia di frattura superiore a un determinato valore critico dipendente dal materiale (v. al riguardo Doll [14]); non esistono ancora dei metodi analitici in grado di prevedere tale fenomeno.

Si vuole verificare l'applicabilità dell'adaptive refinement a questa tipologia di fenomeno, questo è fatto ponendo a confronto la soluzione ottenuta con il modello di griglia non uniforme/multiscala con quelle ottenute con modelli di griglia uniforme/monoscala. In Figura 50 sono riportate le dimensioni della piastra, della cricca e la modalità di applicazione del carico di trazione, inoltre il carico è applicato all'improvviso (dall'istante di tempo iniziale) e mantenuto costante per tutta la durata della simulazione.

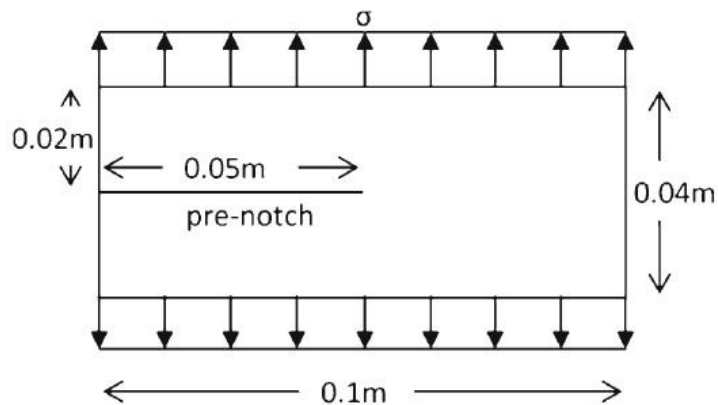


Figura 50: Setup della piastra pre-criccata lateralmente (Immagine tratta dall'articolo di Bobaru [21]).

### 3.1.1 Costruzione del modello

Il materiale della piastra è *Soda-Lime Glass* assunto lineare elastico omogeneo e isotropo, con densità di massa  $\rho=2440 \text{ kg/m}^3$ , modulo di Young  $E=72 \text{ GPa}$ , coefficiente di Poisson  $\nu=0.22$  ed energia di frattura  $G_0 =135 \text{ J/m}^2$ , il valore del coefficiente di Poisson è riportato solamente a titolo informativo dato che nel caso di analisi 2D e assunta la condizione di “plane stress” la BBP pone il vincolo di assumere  $\nu=1/3$ .

Sono sviluppati tre modelli, un modello con griglia uniforme di 4000 nodi, un altro con griglia uniforme di 16000 nodi e il terzo con griglia adattativa costituita inizialmente da 4000 nodi, in Tabella 4 sono riportati i valori dei parametri caratteristici corrispondenti ai due modelli, si è adottato micromodulo costante (Eq. 9) e modello costitutivo PMB (Eq. 18); i parametri del modello adaptive sono corrispondenti a quelli dei due modelli con griglia uniforme, poiché i parametri associati alla regione coarse corrispondono al modello con meno nodi e quelli associati alla regione refined al modello con il maggiore numero di nodi.

$N^\circ$ nodi	$\Delta x$ [m]	$\delta$ [m]	$c_0$ [N/m <sup>6</sup> ]	$s_0$
4000	0,001	0,003	7,64e+18	0,000934
16000	0,0005	0,0015	6,11e+19	0,00132

Tabella 4: Valori dei parametri peridynamics associati ai nodi di livello 0 e 1 di refinement.

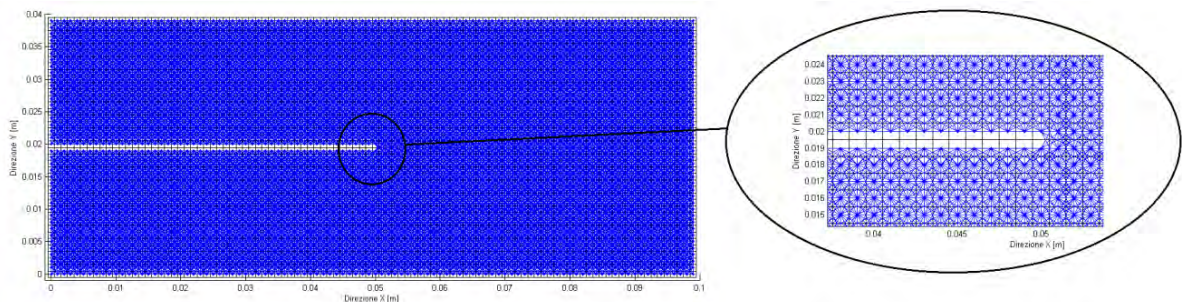


Figura 51: Modello di griglia con 4000 nodi utilizzata per le analisi del modello uniforme e adaptive, con l'immagine ingrandita di come è modellata l'apice della cricca.

In Figura 51 è riportata l'immagine del modello di mesh di 4000 nodi con un ingrandimento dell'apice della cricca, quest'ultima è modellata attraverso la rottura dei bond che attraversano la linea del taglio.

Il carico di tensione è applicato nei soli nodi del bordo superiore e inferiore della piastra allo stesso modo con la quale è applicato il carico nelle analisi FEM, questo è possibile poiché si è utilizzato il fattore correttivo (Eq. 30) dei nodi in prossimità dei bordi per la compensazione del skin effect.

Tale correzione non è applicata ai bordi laterali, poiché in questo studio non si sono valutati i possibili effetti dell'applicazione del fattore di compensazione a nodi appartenenti a regioni con differente passo.

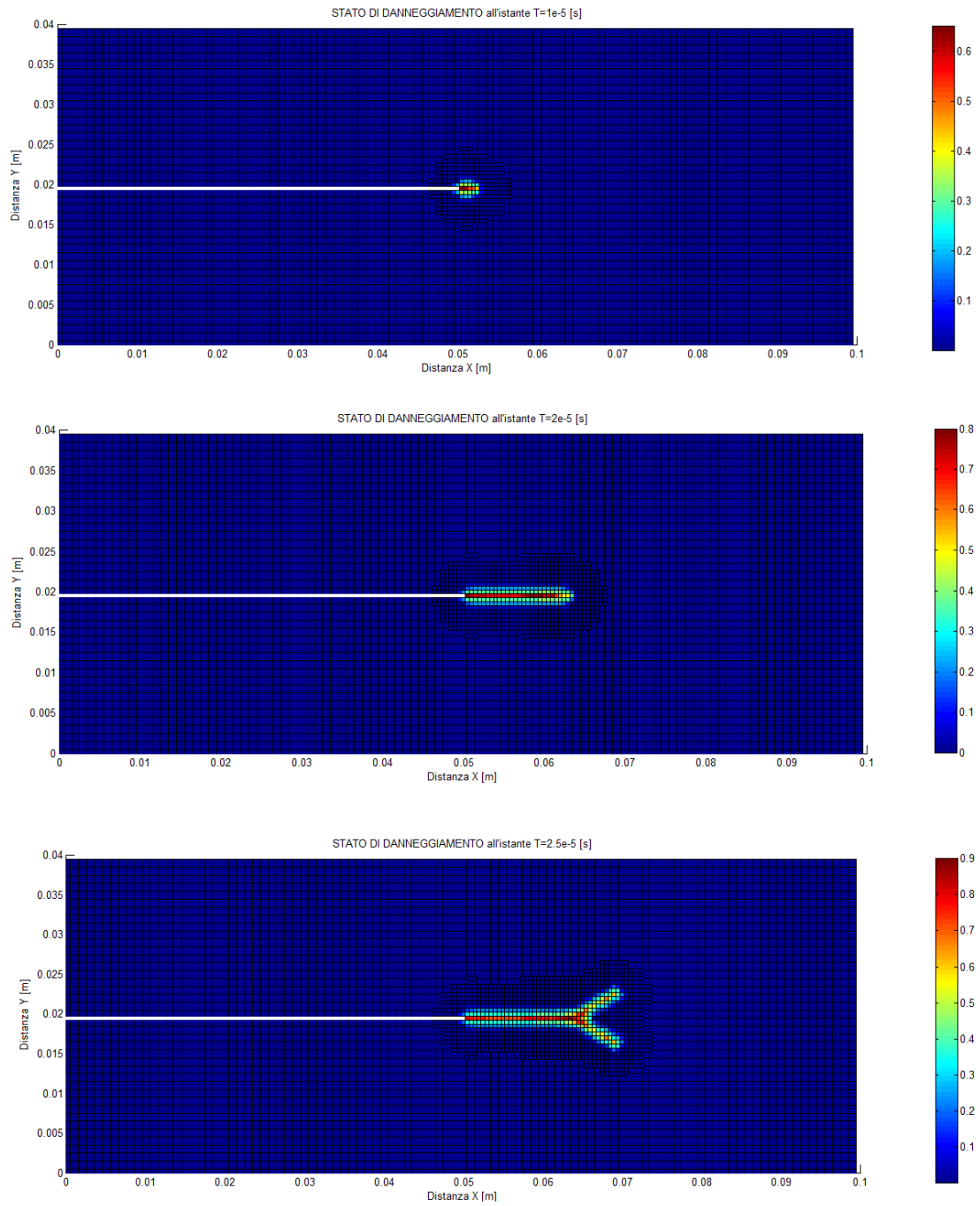
Come fatto da Bobaru [22] i bond dei nodi ai quali è applicato il carico di trazione sono resi "indistruttibili", poiché l'applicazione di un carico a gradino potrebbe causarne la rottura prematura.

### **3.1.2 Risultati delle analisi**

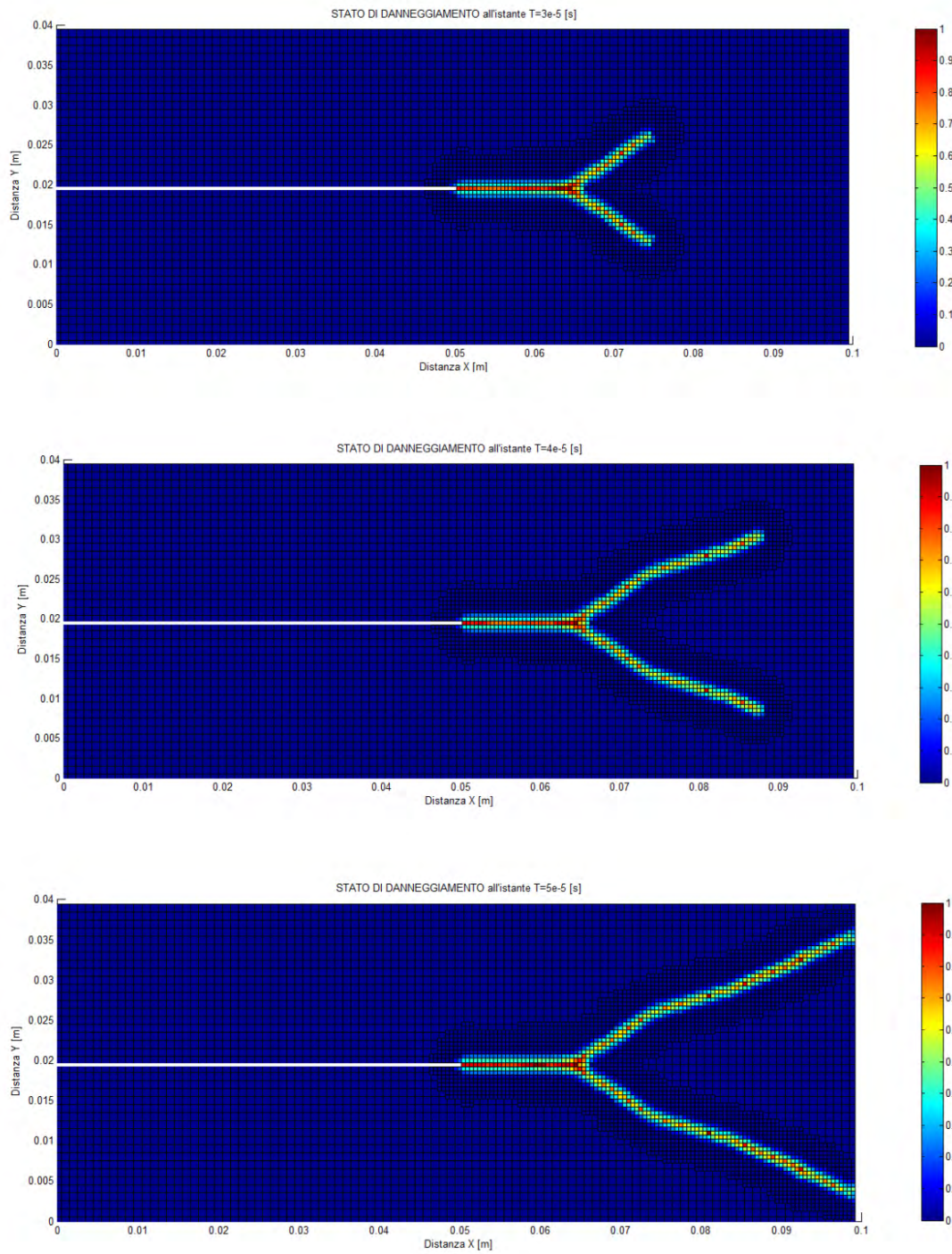
A tutti i modelli è applicata una tensione superficiale di  $22MPa$ , inoltre le simulazioni hanno una durata di  $t=5e-05$  s con step temporale di  $\Delta t=5e-08$  s; nelle Figure 52-53 sono riportati alcuni frame dell'evoluzione temporale dello stato di evoluzione temporale del livello di danneggiamento subito dai nodi del modello adaptive, nelle Figura 55 sono invece poste a confronto la morfologia della frattura completa delle piastre mediante l'immagine di rottura dei bond.

E' interessante notare (Figura 52-53) come la zona di refinement segua l'evoluzione spaziale della frattura, conseguenza dell'attivazione dell'adaptive refinement in corrispondenza dell'apice della cricca, regione quest'ultima caratterizzata da un'elevata densità di energia di deformazione elastica; l'attivazione dell'adaptive refinement porta alla generazione totale di 2429 nodi.





**Figura 52: Immagini di alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento subito dal modello adaptive.**



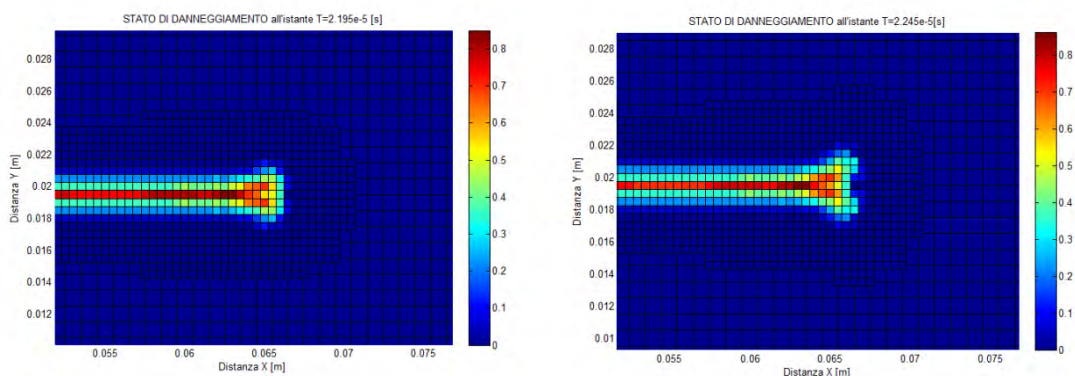
**Figura 53: Immagini di alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento subito dal modello adaptive.**

Si è utilizzato il criterio energetico  $W > 0,7W_{max}$  per l'attivazione del refinement, quest'ultimo attivato all'istante  $t_{att}=5,7e-6$  s. In tabella 5 sono confrontati l'istante di tempo d'innesco della cricca  $t_i$ , l'istante di tempo nel quale si manifesta la biforcazione della cricca  $t_b$  e la lunghezza del percorso della cricca prima del crack branching  $l_b$ , inoltre vengono riportati i valori d'inclinazione dei rami iniziali e finali  $\Theta_i$  e  $\Theta_f$  (con un'incertezza di un grado); in Figura 54 è riportata l'immagine ingrandita relativa al modello adaptive di alcuni istanti di tempo nel quale si manifesta la biforcazione della cricca.

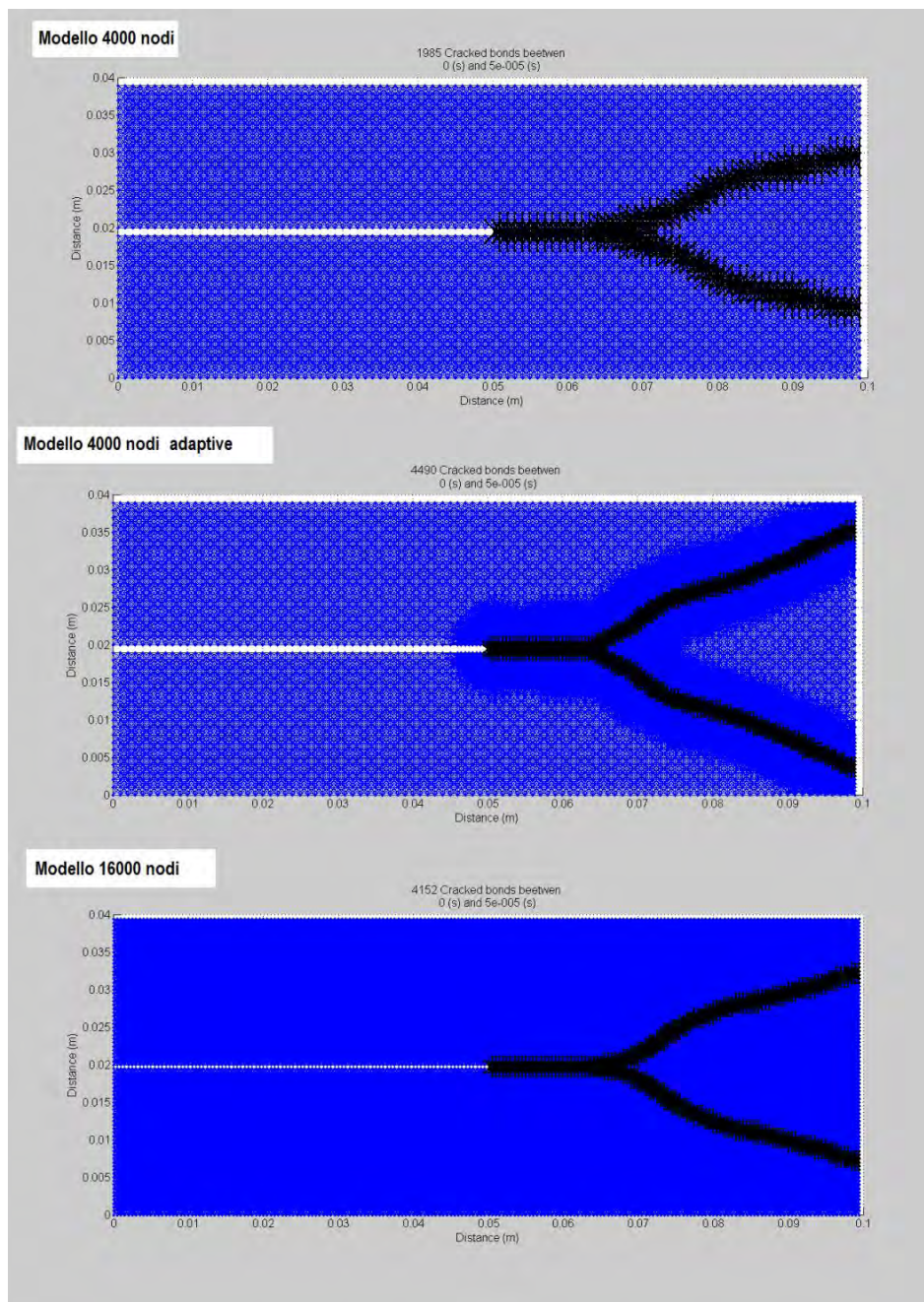
Modello	$N^\circ$ nodi	$t_i$ [ $\mu s$ ]	$t_b$ [ $\mu s$ ]	$l_b$ [mm]	$\Theta_i$ [deg]	$\Theta_f$ [deg]
<i>Uniforme</i>	4000	6,05	22,5÷23,5	67,0	26,0÷27,0	11,0÷12,0
<i>Adaptive</i>	4000÷6429	5,75	22,0÷22,5	64,5	34,5÷35,5	21,0÷22,0
<i>Uniforme</i>	16000	6,00	21,0÷22,0	65,5	34,5÷35,5	15,0÷16,0

**Tabella 5: Valori riguardanti la morfologia della frattura e quantità nodi della mesh.**

I valori riportati in Tabella 5 mettono in risalto come lo scostamento tra le tempistiche con il quale avvengono l'innesco della cricca e la sua ramificazione valutate con i modelli di griglia non uniforme/multiscala e uniforme/monoscala sia molto piccolo e dell'ordine del decimo di microsecondo, inoltre come aspettato tale scostamento è più pronunciato nei confronti del modello a minore densità nodale.



**Figura 54: Ingrandimento dell'inizio dell'evoluzione del crack branching in due istanti di tempo, relativi al modello adaptive.**



**Figura 55: Confronto dei bond rotti delle configurazioni finali dei tre modelli.**

Per quanto riguarda invece la morfologia del percorso seguito dalla cricca dopo la sua ramificazione, si può notare come l'inclinazione iniziale del ramo di circa  $35^\circ$  sia lo stesso per i modelli adaptive e quello uniforme a maggiore densità nodale, mentre lo stesso non si può dire per l'inclinazione del ramo finale la cui pendenza fornita dal modello adaptive è maggiore di circa  $6^\circ$  rispetto al modello uniforme appena citato.

Ciò può essere la conseguenza di più fattori, in particolare la zona di interfaccia gioca un ruolo fondamentale nella trasmissione delle onde di tensione che generate dalla rottura dei bond si espandono nelle zone circostanti per poi essere riflesse dai bordi della piastra; questa continua interazione tra onde elastiche e l'apice della cricca porta a influenzarne il suo cammino e quindi la traiettoria percorsa dalla frattura.

Si è visto nei paragrafi 2.2.1 e 2.2.2 come alcuni nodi d'interfaccia manifestino delle perdite di energia, ciò porta sicuramente a influenzare negativamente la trasmissione delle onde di tensione.

Inoltre bisogna considerare come due regioni con differente densità nodale e dimensione d'interazione non locale introduce nel modello adaptive la presenza di due differenti relazioni di dispersione del materiale.

Come accennato nel paragrafo introduttivo, l'interazione non locale della teoria peridynamic introduce dei modelli dispersivi nella propagazione delle onde di tensione nel materiale (v. Silling [51]), dispersione che si riduce tanto più diminuisce la dimensione dell'orizzonte convergendo al comportamento della teoria della meccanica classica come l'orizzonte tende zero (convergenza di tipo  $(\delta)$  e  $(\delta m)$ ).

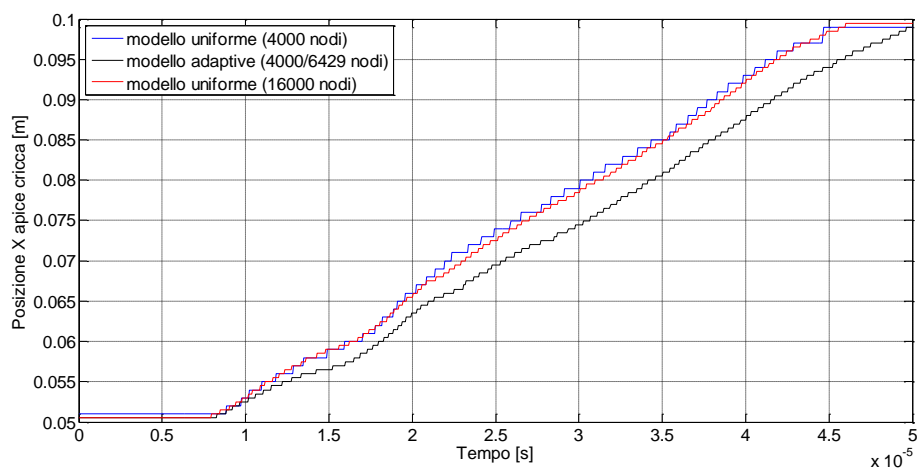


Figura 56: Posizione dell'apice della cricca lungo la direzione X.

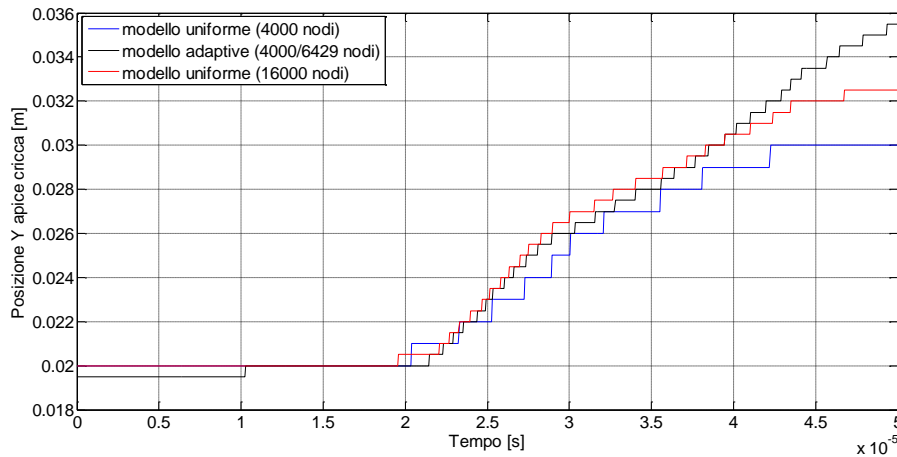


Figura 57: Posizione dell'apice della cricca lungo la direzione Y.

Oltre alla morfologia della frattura, un altro importante aspetto che la teoria BBP è in grado di fornire con relativa semplicità è la stima della velocità di propagazione della cricca. Come suggerito da Bobaru [21] la posizione dell'apice della cricca può essere determinata acquisendo a ogni step temporale le coordinate del nodo più a destra che presenta il livello di danneggiamento maggiore di 0.35 (il metodo è applicato seguendo solamente l'apice della cricca superiore dopo la sua ramificazione), come riportato nelle Figura 56 e 57 per i tre modelli analizzati.

Il valore di danneggiamento di 0,35 significa una rottura del 35% dei bond appartenenti al nodo nel suo stato iniziale, questo valore è rappresentativo dell'inizio della formazione di un piano di frattura.

La stima della velocità di propagazione è allora valutata tramite l'espressione

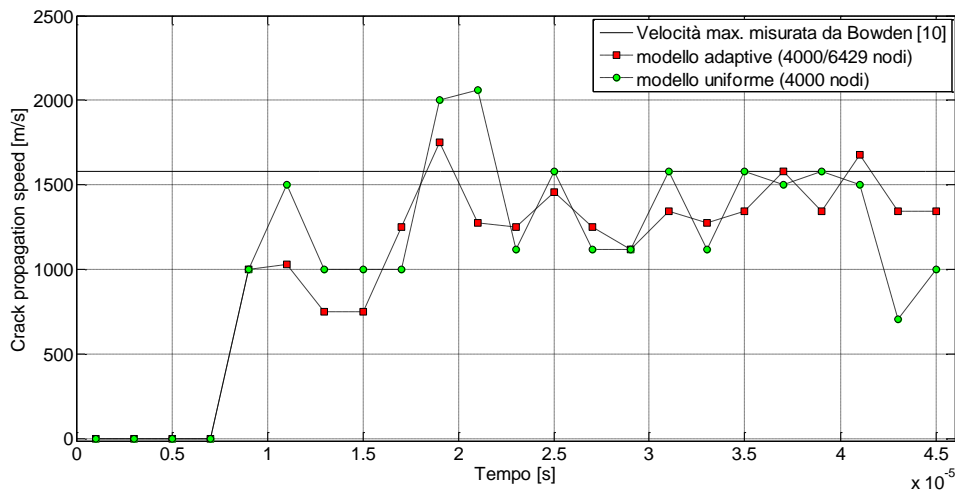
$$V_{l-1/2} = \frac{\|x_l - x_{l-1}\|}{t_l - t_{l-1}} \quad (41)$$

con  $x_l$  e  $x_{l-1}$  la posizione dell'apice della cricca nell'istante  $t_l$  e  $t_{l-1}$ .

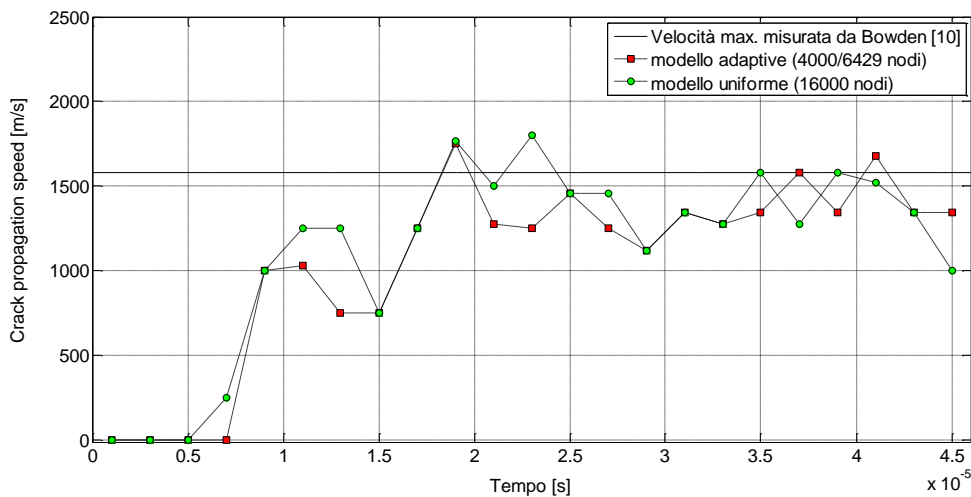
Bisogna tenere in considerazione che a causa della natura discreta del problema (sia spaziale che temporale) la stima della velocità di propagazione istantanea introdurrebbe delle fluttuazioni eccessive nei valori computati, per questo è stimata la velocità di propagazione in un intervallo di  $2\mu s$ .

Nelle Figure 58 e 59 sono posti a confronto gli andamenti temporali della velocità di propagazione della cricca ottenuti con i tre modelli qui analizzati, con riportata la velocità massima di frattura di  $1580 \text{ m/s}$  misurata sperimentalmente da Bowden [10] per il materiale *Soda-Lime Glass*.

Si può notare (Fig. 59) come l'andamento mostrato dai risultati ottenuti con il modello adaptive siano in pieno accordo con quelli ottenuti con il modello uniforme a maggiore densità nodale i cui valori, in parecchi istanti di tempo, sono pressoché equivalenti.



**Figura 58: Confronto degli andamenti temporali della velocità di propagazione della cricca tra il modello adaptive/multiscala e quello uniforme/monoscala a minore densità nodale.**



**Figura 59: Confronto degli andamenti temporali della velocità di propagazione della cricca tra il modello adaptive/multiscala e quello uniforme/monoscala a maggiore densità nodale.**

In Tabella 6 sono riportati le velocità massime di propagazione della cricca ottenuti con i tre modelli, quello adaptive fornisce la velocità che si discosta meno dalla velocità massima rilevata sperimentalmente.

	$V_{max}$ [m/s]
<i>Uniforme</i> (4000 nodi)	2062
<i>Uniforme</i> (16000 nodi)	1803
<i>Adaptive</i> (4000/6249 nodi)	1750
<i>Esperimento di Bowden</i>	1580

**Tabella 6: Velocità massima della propagazione della cricca computata con i modelli di mesh uniforme e non uniforme, con riportata la velocità misurata sperimentalmente da Bowden [10].**

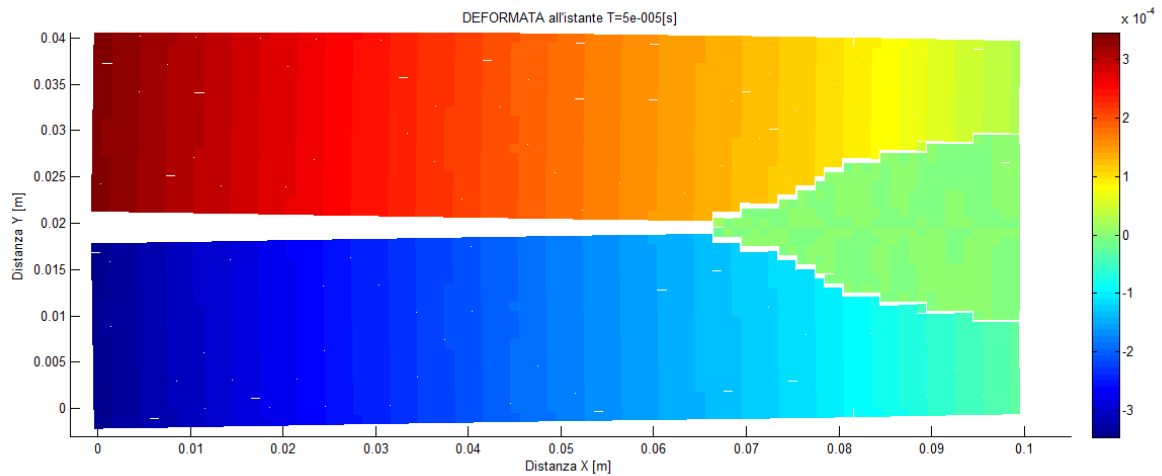
Inoltre è interessante notare come anche il modello adaptive sia in grado di catturare quanto è stato rilevato sperimentalmente da Field [18] riguardo l'andamento della velocità di propagazione della cricca negli istanti che precedono l'istante di innesco del crack branching.

Si nota da Figura 59 come la velocità massima è raggiunta nell'istante poco prima dell'istante di innesco del crack branching (valori in Tab. 5), manifestando un calo di velocità proprio durante il quale si ha la formazione della ramificazione.

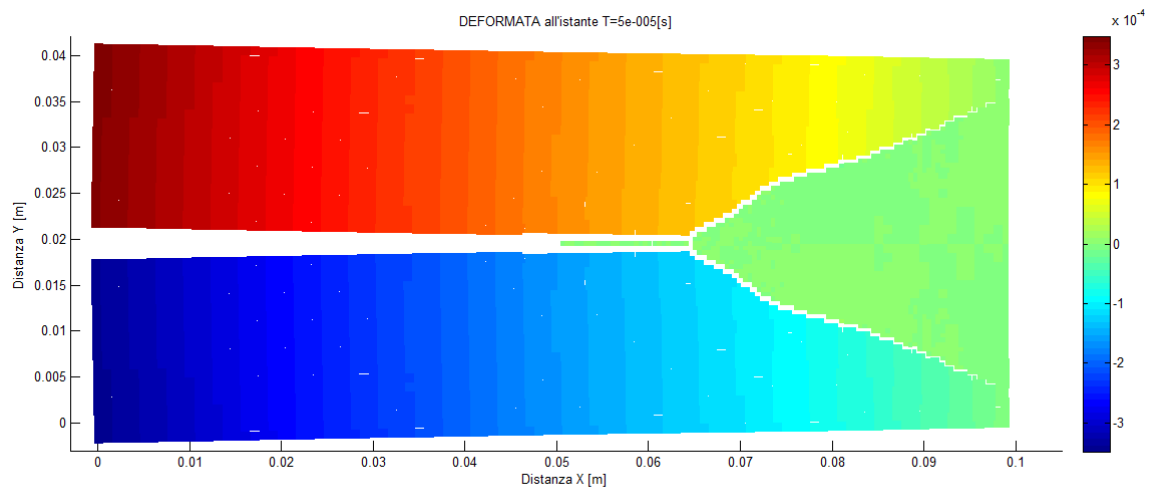
Finora si sono poste a confronto la morfologia della frattura e sua velocità di propagazione ottenuti con i modelli qui analizzati, grazie alla definizione univoca del livello di danneggiamento (Eq. 20) fornita dalla teoria BBP; per quanto riguarda il campo di spostamenti nelle Figure 60-62 sono riportate le deformate delle configurazioni finali dei tre modelli con relativo contour plot del campo di spostamenti  $u_y$ , amplificati di un fattore 5.

Tali deformate mostrano come non ci siano sostanziali differenze nel comportamento meccanico globale della piastra modellata con i differenti modelli; si può invece notare da Figura 61 come ci sia una piccola striscia di materiale compresa tra l'apice della cricca iniziale e il punto della ramificazione.





**Figura 60: Deformata della configurazione finale del modello di griglia uniforme (4000 nodi) con contour plot del campo di spostamenti  $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.**

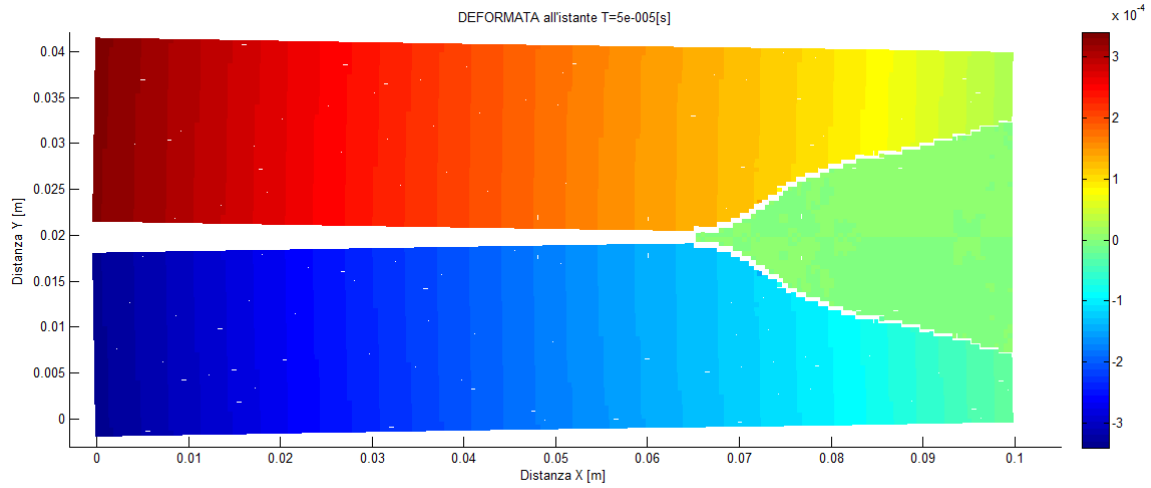


**Figura 61: Deformata della configurazione finale del modello di griglia adaptive (4000/6429 nodi) con contour plot del campo di spostamenti  $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.**

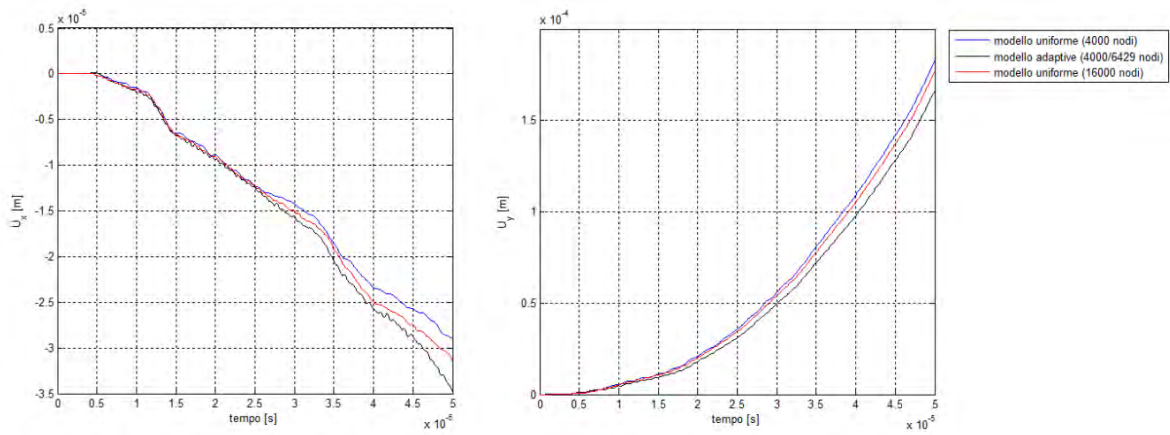
Ciò è la conseguenza del fatto che l'attivazione del refinement nella zona circostante l'apice della cricca iniziale porta ad aggiungere nodi in mezzeria del modello, nodi che non sono presenti nei modelli di mesh uniforme.

In Figura 63 sono riportati gli andamenti temporali delle componenti di spostamento di un nodo posizionato in prossimità della parte superiore dell'apice della cricca iniziale

della piastra modellata con le differenti griglie di nodi; gli andamenti sono molto simili anche se l'andamento dello spostamento in direzione di applicazione del carico mostrato dal modello adaptive sembra affetto da un lieve aumento di rigidità.



**Figura 62: Deformata della configurazione finale del modello di griglia uniforme (16000 nodi) con contour plot del campo di spostamenti  $u_y$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.**



**Figura 63: Andamenti temporali dello spostamento di un nodo posizionato in prossimità della cricca iniziale della piastra.**

### 3.1.3 Valutazioni delle prestazioni computazionali dell'algorithmo per l'adaptive refinement

Come accennato nei paragrafi introduttivi l'utilizzo di un modello adaptive multiscala consente di utilizzare al meglio le risorse computazionali, poiché l'aumento di risoluzione è attivato solamente nelle zone d'interesse.

Si vogliono evidenziare le prestazioni dei codici sviluppati in questo studio per l'implementazione dell'adaptive refinement rispetto ai modelli con griglia uniforme, questa è fatto ponendo a confronto i tempi di analisi delle simulazioni lanciate per i modelli sopra analizzati.

Le simulazioni sono state condotte nello stesso computer le cui caratteristiche hardware e software sono:

- Intel® Core™ i7-3770 CPU @ 3.40 GHz
- RAM: 32 GB
- OS: Windows 8 Pro 64 bit

In Tabella 7 sono riportati il numero di nodi utilizzato da ciascun modello e i valori dei tempi di esecuzione, questi ultimi fanno riferimento dall'istante in cui è lanciato il codice Matlab all'istante nel quale sono forniti i risultati; perciò le tempistiche di esecuzione comprendono anche il tempo necessario per la costruzione del modello.

Modello	N° nodi	Tempo di esecuzione [s]
<i>Uniforme</i>	4000	5294
<i>Adaptive</i>	4000÷6429	12813
<i>Uniforme</i>	16000	34090

Tabella 7: Confronto dei tempi di esecuzione delle simulazioni dei modelli uniformi e adaptive.

Le tempistiche per la costruzione del modello non sono un dato da trascurare poiché possono diventare molto elevate per griglie con molti nodi, ad esempio è richiesto un tempo di  $t=2520s$  per la costruzione della griglia con 16000 nodi in confronto a  $t=24s$

per modellare la griglia con 4000 nodi; ciò è legato alla necessità di costruire la lista degli indici dei nodi famiglia appartenenti a ciascun nodo sorgente della griglia, operazione quest'ultima molto onerosa.

I codici qui sviluppati possono essere resi molto più efficienti se come descritto nel paragrafo 2.1.2 si applicasse l'aggiornamento dei bond a una finestra localizzata alla regione nella quale sono introdotti i nuovi nodi, senza dovere ri-definire l'intera lista di tutti i nodi della griglia anche con la sola introduzione di un nodo generato dall'attivazione dell'adaptive refinement.

Comunque si ricorda che in questo lavoro lo scopo primario è quello di dimostrare l'applicabilità dell'adaptive refinement alla teoria bond-based peridynamic, perciò le prestazioni computazionali dell'algoritmo sono messe in secondo piano.

### **3.2 Esperimento di Kalthoff-Winkler**

Caso di studio molto interessante e riguardante la meccanica della frattura fragile è l'esperimento di Kalthoff-Winkler [25], in questo esperimento una piastra di acciaio con due pre-cricche è impattata lateralmente con un proiettile come mostrato in Figura 64.

Secondo la velocità con la quale il proiettile impatta e di quanto è acuta l'apice della cricca, si osserva un differente comportamento a frattura della piastra, in particolare gli esperimenti hanno evidenziato come un'elevata velocità di deformazione porti a manifestare una frattura a scorrimento tramite la formazione di una shear band (frattura del 2° Modo) con un'inclinazione di circa  $-10^\circ$  (rispetto il piano del notch), mentre una bassa velocità di deformazione porta a manifestare una frattura fragile di apertura (frattura del 1° Modo) con un'angolazione di propagazione di circa  $70^\circ$ . Come per il caso analizzato nel precedente paragrafo, anche l'esperimento di Kalthoff-Winkler è un benchmark per la convalida di modelli numerici proposti per simulare fenomeni della meccanica della frattura, lo stesso Silling [52] propone l'esperimento con la teoria BBP, Belytschko [6] con il metodo XFEM basato sulla teoria della meccanica classica FEA e Koteski [28-29] con il truss-like discrete element method. Come fatto dagli studiosi

sopra citati anche in questo elaborato si fa riferimento al caso della frattura fragile al fine di verificare se il modello adaptive è in grado di catturare l'angolo con il quale si propaga la cricca.

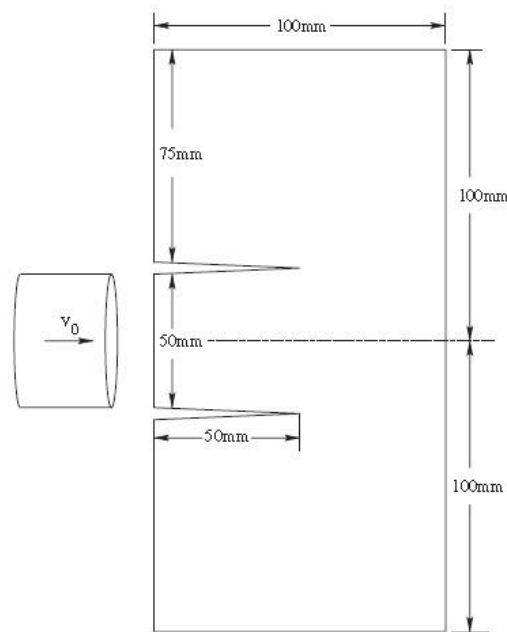


Figura 64: Setup dell'esperimento di Kalthoff-Winkler.

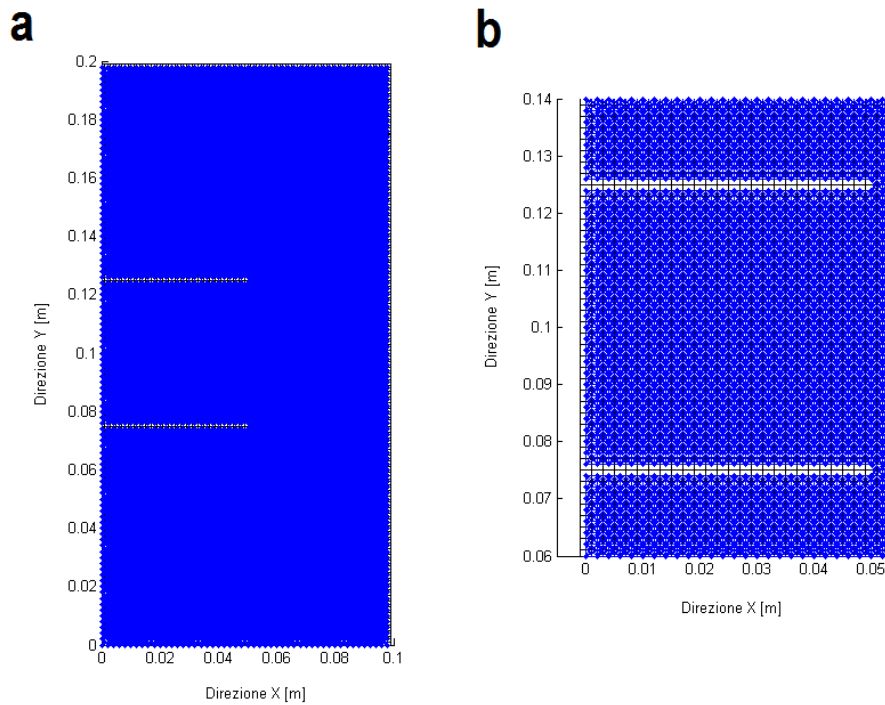
### 3.2.1 Modellazione della piastra

Dal *setup* del problema di Figura 64 si capisce come l'analisi possa essere condotta sfruttando la condizione di simmetria, come fatto da Belytschko e Kosteski, qui si sceglie di adottare la modellazione dell'intera piastra dando così la possibilità di rilevare eventuali problemi di simmetria nella soluzione.

In Figura 65 è riportata l'immagine del modello di griglia iniziale rappresentato dal network dei bond, con riportato l'ingrandimento di come sono modellate le cricche, quest'ultime sono ottenute (come visto nel caso di studio precedente) con la rottura dei bond dei nodi che sono posizionati nelle parti opposte della linea di frattura.

Il passo della griglia iniziale è  $\Delta x = \Delta y = 0,002 \text{ mm}$  cui corrispondono 5000 nodi, l'impatto è simulato imponendo ai nodi compresi tra le due cricche iniziali e posizionati

sul bordo una velocità  $v_i$  a gradino in direzione X, mentre i bordi della piastra sono liberi.



**Figura 65: Modellazione della piastra di Kalthoff, a) modello come network dei bond, b) dettaglio di come sono modellate le cricche iniziali.**

Per quanto riguarda il tipo di materiale utilizzato, si è scelto di utilizzare due tipologie differenti di Maraging Steel le cui proprietà sono riportate in Tabella 8; questa scelta è dettata dalla volontà di confrontare (oltre alla convalida del modello adaptive con i risultati sperimentali) i risultati qui ottenuti con quelli ottenuti da Silling, Belytschko e Kostaski, Silling utilizza il tipo di Maraging Steel X2 NiCoMo 18 9 5 mentre Belytschko e Kostaski il tipo 18Ni1900 (designazione american standard).

Materiale	$E$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$G_0$ [J/m <sup>2</sup> ]
X2 NiCoMo 18 9 5	191	8000	38590
18Ni1900	190	8000	22170

**Tabella 8: Valori delle proprietà meccaniche utilizzate per i modelli peridynamic.**

Si assume come modello costitutivo il materiale PMB mentre l'analisi è condotta assumendo la condizione di "strain plane", cui corrisponde un coefficiente di Poisson

$\nu=0,25$ . Per questa tipologia di materiali la velocità del proiettile necessaria a scaturire una frattura fragile di apertura è di almeno  $v_0=32 \text{ m/s}$ , se si assume l'ipotesi che l'oggetto impattante abbia la stessa impedenza elastica della piastra, la velocità d'impatto può essere considerata approssimativamente pari alla metà della velocità del proiettile, per cui come velocità imposta ai nodi del modello è assunta  $v_i=16,5\text{m/s}$ .

In Tabella 9 sono riportati i valori del passo, dell'orizzonte, micromodulo e critical relative elongation associati ai nodi di livello 0/1 per i due materiali, essendo che viene applicato l'adaptive refinement di primo livello.

Materiale	Livello Refinement	$\Delta x [m]$	$\delta [m]$	$c_0 [N/m^6]$	$s_0$
X2 NiCoMo 18 9 5	0	0,002	0,006	2,702e+18	0.00665
	1	0,001	0,003	2,162e+19	0.00940
18Ni1900	0	0,002	0,006	2,688e+18	0,00505
	1	0,001	0,003	2,150e+19	0.00713

Tabella 9: Valori dei parametri peridynamic associati ai nodi di differente livello di refinement.

Come riportato nel paragrafo 2.1.2 l'algoritmo qui sviluppato non porta all'attivazione dell'adaptive refinement per i nodi ai quali sono applicate le condizioni al contorno, per cui i nodi ai quali è applicata la velocità dell'impatto non sono presi in considerazione dall'adaptive refinement.

### 3.2.2 Risultati dell'esperimento di Kalthoff-Winkler

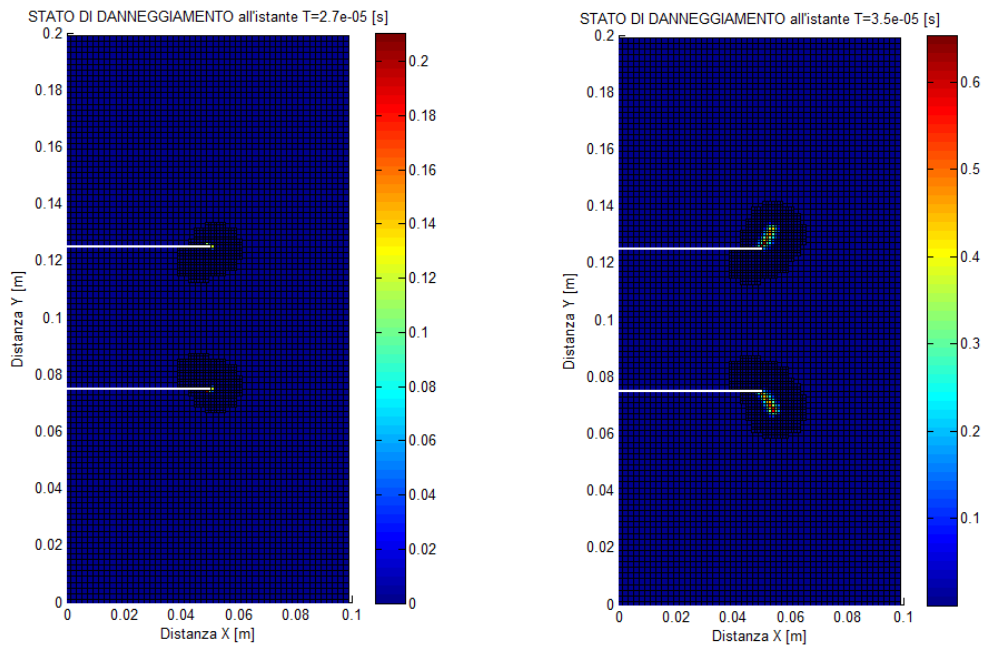
Nelle Figure 66-69 sono riportate le immagini di alcuni frame dello stato di danneggiamento della piastra relative al modello di materiale X2 NiCoMo, nelle Figure 70-72 quelle relative al modello di materiale 18Ni1900.

In tabella 9 sono riportate le informazioni riguardanti il tempo di simulazione  $t_s$ , step temporale  $\Delta t$ , istante di attivazione dell'adaptive refinement  $t_{att}$ , il criterio utilizzato per la sua attivazione e la quantità di nodi presenti nella griglia iniziale e finale.

Si può notare come entrambi i modelli siano in grado di catturare da un punto di vista qualitativo le principali caratteristiche riportate nell'esperienza di Kalthoff-Winkler [25], anche se nell'esperienza da loro condotta non è riportata alcuna evidenza della zona di danneggiamento subita dalla piastra nel bordo opposto del lato impattato.

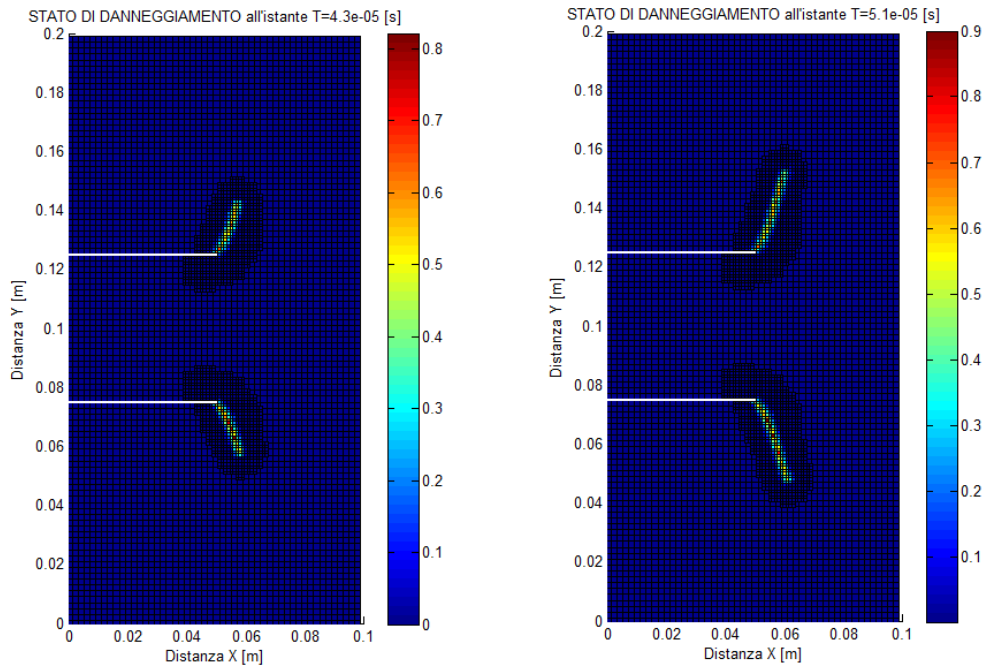
Materiale	$t_s$ [s]	$\Delta t$ [s]	$t_{att}$ [s]	Criterio attivazione	N° nodi griglia
X2 NiCoMo 18 9 5	9,1e-6	4e-8	2,000e-5	$W > 0,35W_{max}$	5000÷8488
18Ni1900	9,1e-6	7e-8	1,533e-5	$W > 0,7W_{max}$ $\varphi > 0$	5000÷9550

**Tabella 10: Informazioni relative ai parametri della simulazione e attivazione dell'adaptive refinement.**

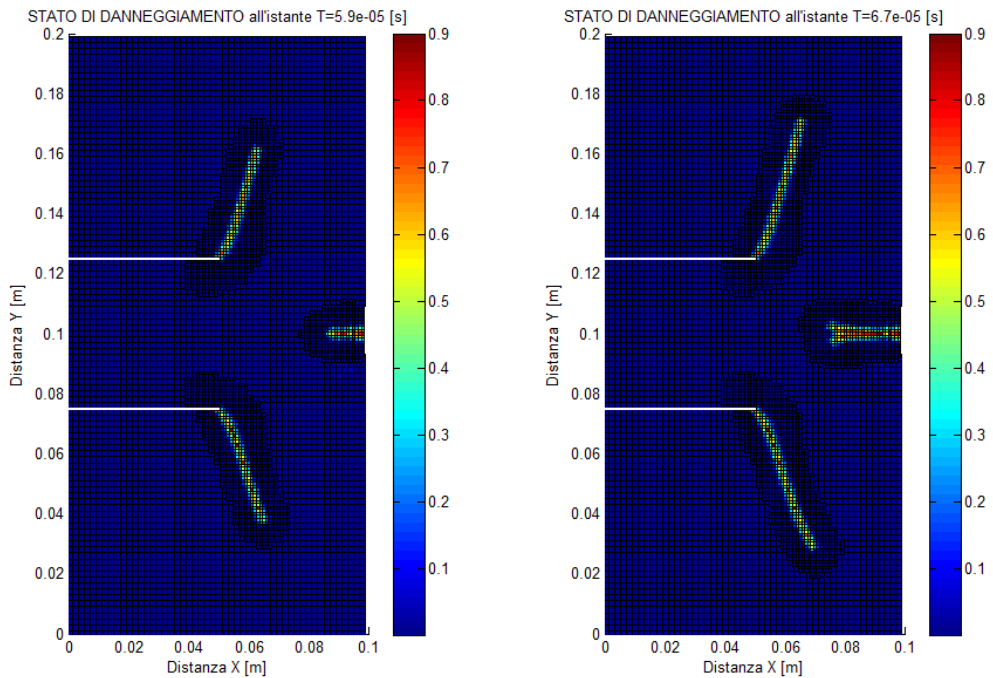


**Figura 66: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5.**

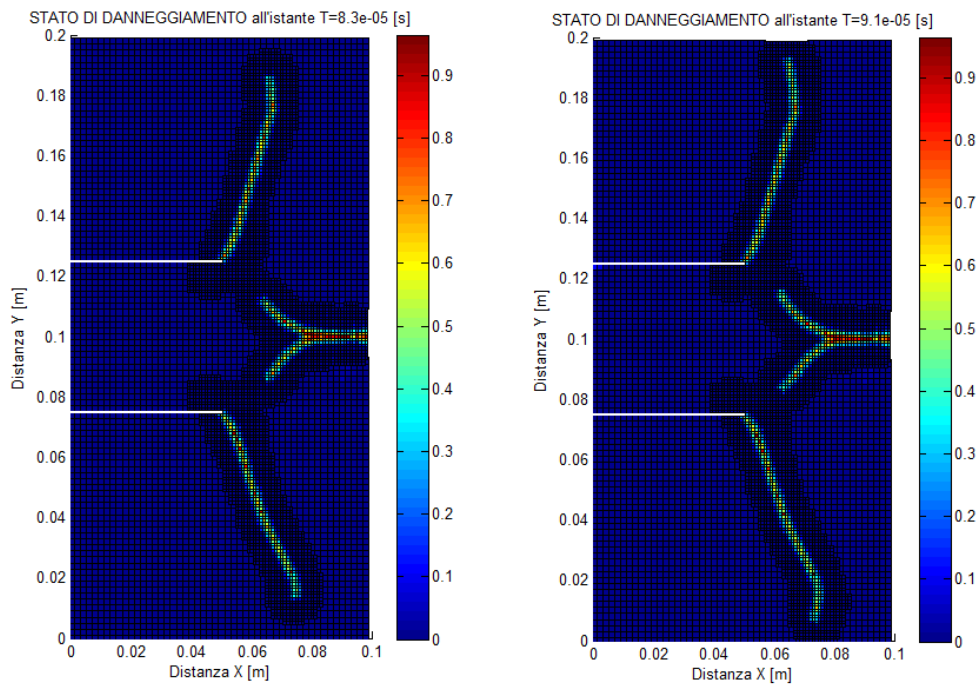




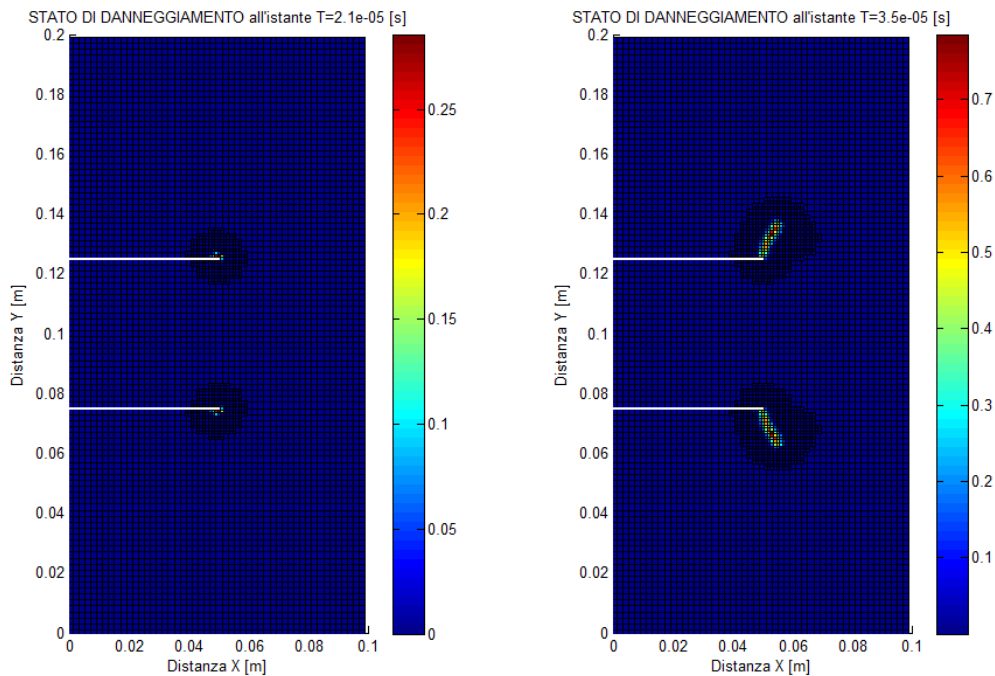
**Figura 67: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5.**



**Figura 68: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5.**



**Figura 69:** Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale X2 NiCoMo 18 9 5.



**Figura 70:** Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.

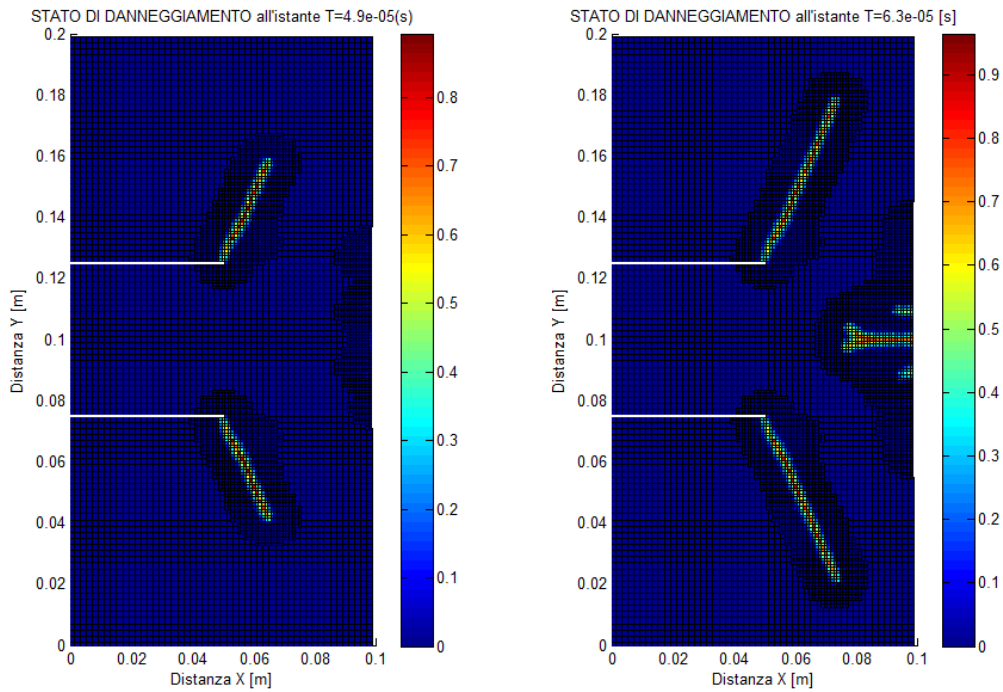


Figura 71: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.

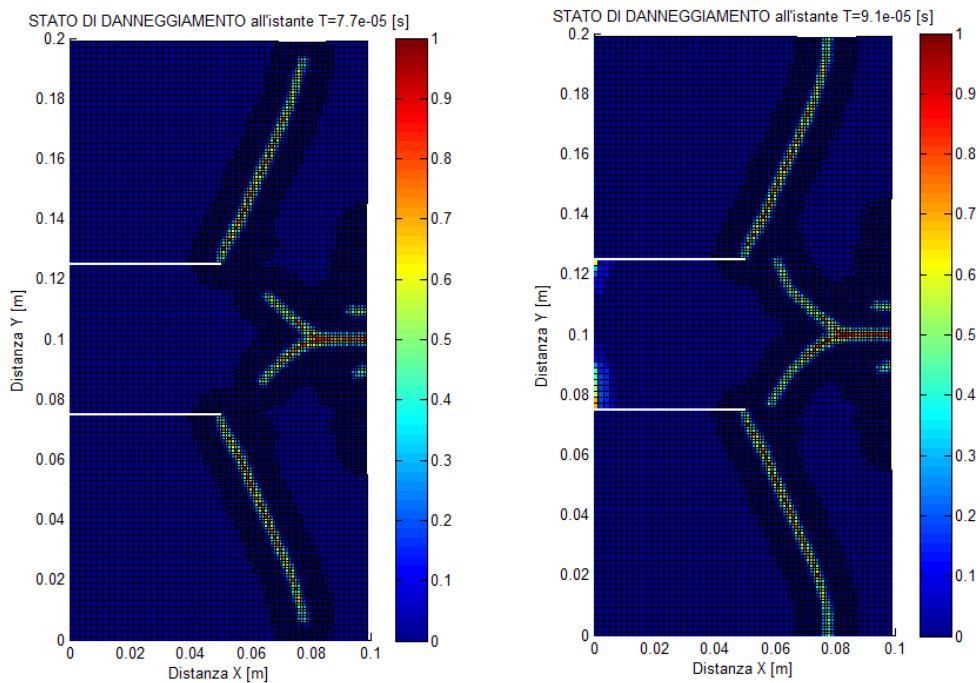
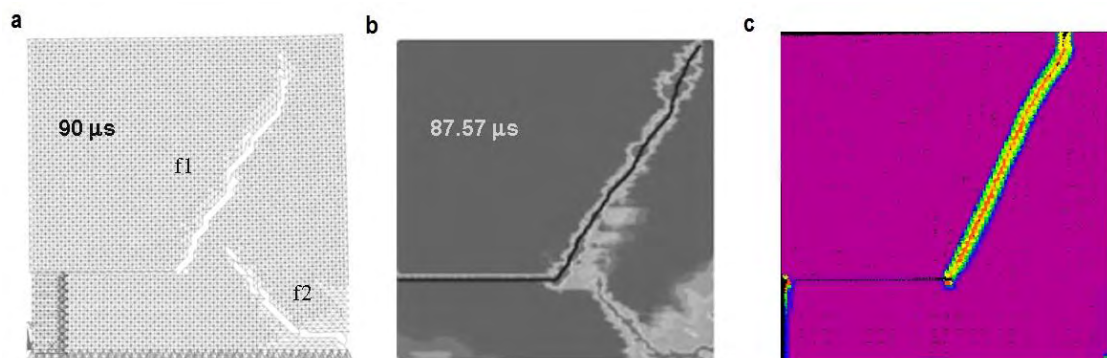


Figura 72: Alcuni frame dell'evoluzione del livello di danneggiamento del modello di piastra con materiale 19Ni1900.

In particolare si osservano due differenti percorsi di frattura, una frattura primaria che s'innesta in corrispondenza dell'apice del notch e una frattura secondaria che scaturisce dall'eccessivo danneggiamento subito dal bordo della piastra a causa della riflessione dell'onda di compressione generata dall'impatto. Questa morfologia di frattura è in accordo con quanto osservato dai modelli proposti da Belytschko [6] e Koteski [28-29] come visualizzato in Figura 73, inoltre la spiegazione della presenza di una frattura secondaria può essere legata sia al livello di discretizzazione del modello, oltre al fatto che gli esperimenti di Kalthoff-Winkler sono stati condotti su di un solo provino, per cui si capisce come i dati sperimentali messi a disposizione non siano esaurienti.

Bisogna tenere in considerazione che il livello di discretizzazione utilizzato da Silling [52] nell'implementazione della teoria peridynamic di questo esperimento è molto elevato, avendo usato 180000 nodi (analisi 3D), oltre il fatto che utilizza delle forze di contatto per simulare l'impatto.



**Figura 73: Percorsi di frattura predetti da, a) Koteski , DEM b) Belytschko, XFEM with loss of hyperbolicity criterion c) Silling, bond based peridynamic con griglia uniforme (immagini tratte dall'articolo di Koteski [27-28] e Silling [51]).**

Come accennato le analisi sono state condotte senza sfruttare la simmetria offerta dal problema analizzato per evidenziare probabili fenomeni di non simmetria della soluzione, fenomeni che sono bene visibili in Figura 69 e 71.

L'introduzione di asimmetrie nella soluzione di un problema simmetrico implementato con la teoria della peridynamic è già stato trattato da Bobaru [23], ciò possono essere una conseguenza di errori di troncamento non bilanciati dovuti soprattutto all'utilizzo di

un sistema di riferimento non posizionato nel centro di simmetria del problema, come nel nostro caso.

In un modello adaptive queste asimmetrie possono portare alla generazione di una regione refined non simmetrica, come visualizzato in Figura 71, provocando asimmetrie nella soluzione ancora più pronunciate in un problema inizialmente simmetrico.

Confrontando la quantità di nodi generati dall'adaptive refinement durante il corso delle simulazioni, si può notare come il modello con materiale 18Ni1900 presenta una quantità di nodi maggiore, ciò è conseguenza di un differente trigger per l'attivazione del refinement (Tabella 9).

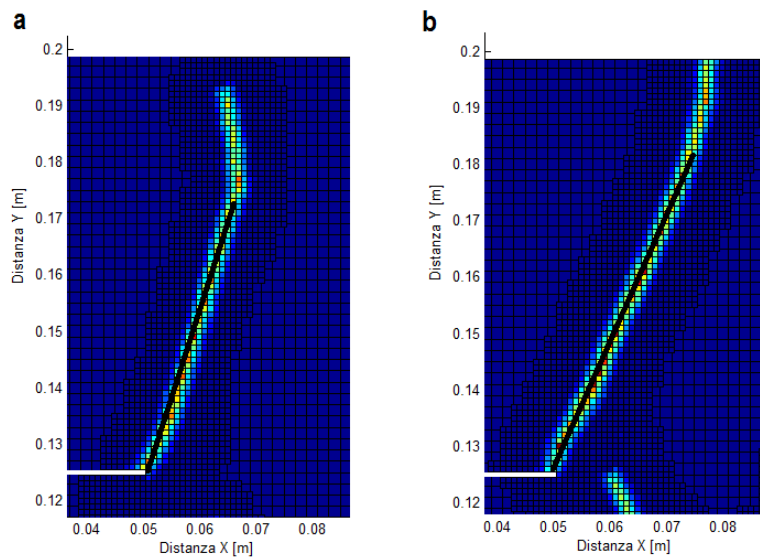
Infatti come discusso nel paragrafo 2.2.1 e 2.2.2 alcuni nodi di interfaccia sono più cedevoli di altri causando, in presenza di alti livelli di energia, delle rotture premature dei bond localizzate proprio all'interfaccia della regione refined; queste rotture causano l'attivazione del refinement anche in quelle zone che non richiedono il refinement.

In Tabella 11 sono riportati i valori degli angoli d'inclinazione media  $\theta_m$  della frattura primaria rispetto la direzione dell'asse X, con evidenziate le pendenze dei percorsi di frattura primaria in Figura 74; i valori sono molto prossimi a quanto rilevato sperimentalmente di circa  $68^\circ \div 70^\circ$ .

Materiale	$\theta_m [deg]$
X2 NiCoMo 18 9 5	71
18Ni1900	66

Tabella 11: Valori degli angoli della pendenza media delle cricche primarie.

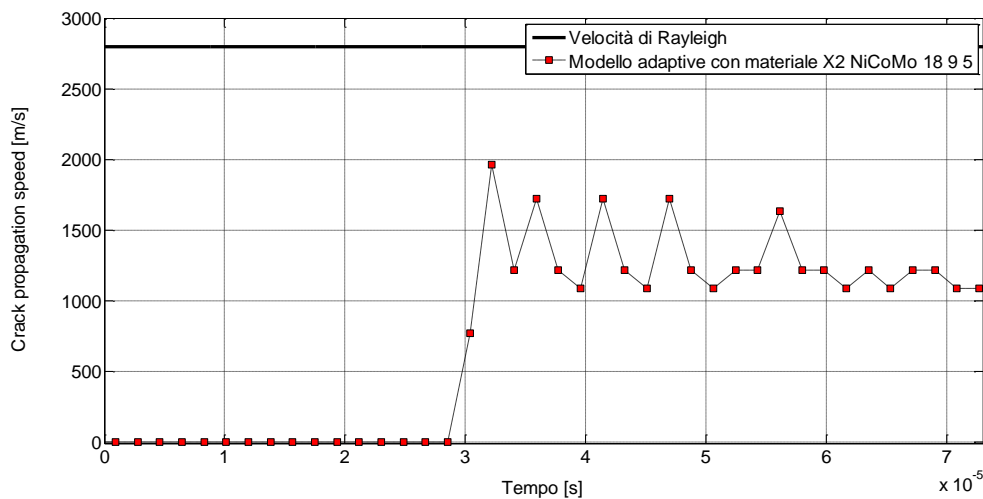
Altra importante caratteristica per la convalida del modello adaptive riguarda la stima della velocità di propagazione della frattura, come riporta Ravi Chandar [42] quest'ultima non deve superare la velocità di Rayleigh che per le proprietà elastiche dei materiali assunti nei modelli analizzati è  $c_r=2799,2$  m/s.



**Figura 74: Immagini della pendenza delle cricche primarie, a) modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5, b) modello con materiale 18Ni1900 (Immagini ottenute dall'ingrandimento di Fig.69 e 72).**

In Figura 75 e 76 sono riportati gli andamenti della velocità di propagazione della frattura primaria dei due modelli (con riferimento alla parte superiore del modello), ottenute tramite l'Equazione 41 con un intervallo di  $1,82\mu s$ .

E' interessante notare come in entrambi i modelli la velocità massima di propagazione della frattura non superi i  $2000\text{ m/s}$ , ben inferiore alla velocità di Rayleigh.



**Figura 75: Andamento della velocità di propagazione della frattura primaria del modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5, con riportata la velocità limite di Rayleigh.**

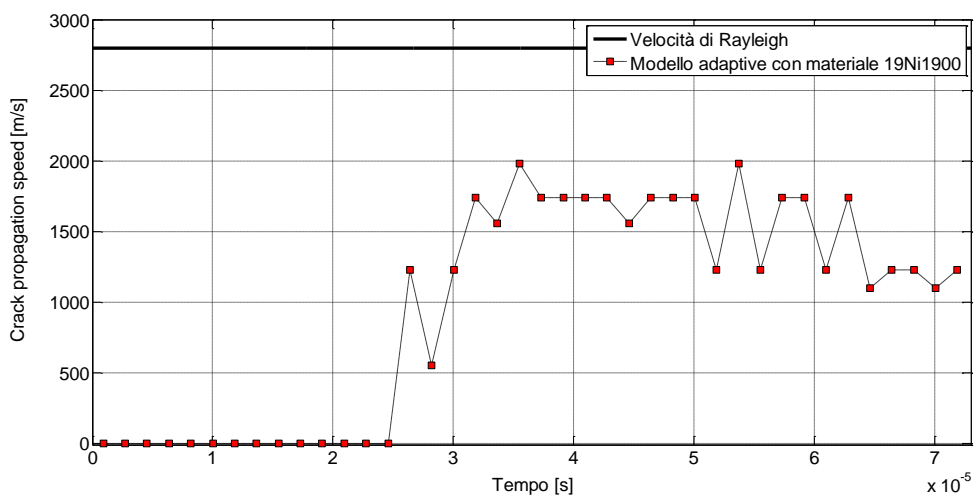


Figura 76: Andamento della velocità di propagazione della frattura primaria del modello con materiale 19Ni1900, con riportata la velocità limite di Rayleigh.

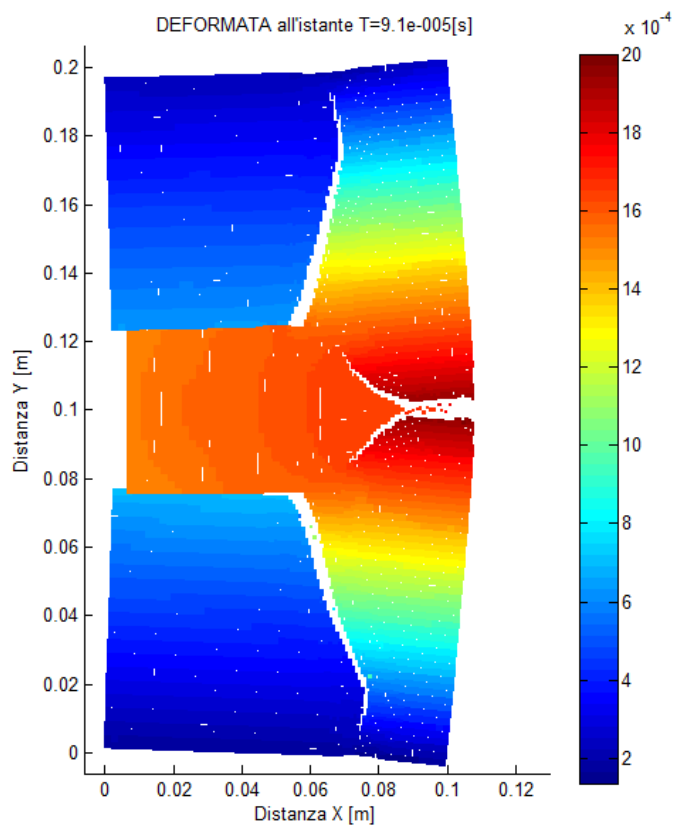
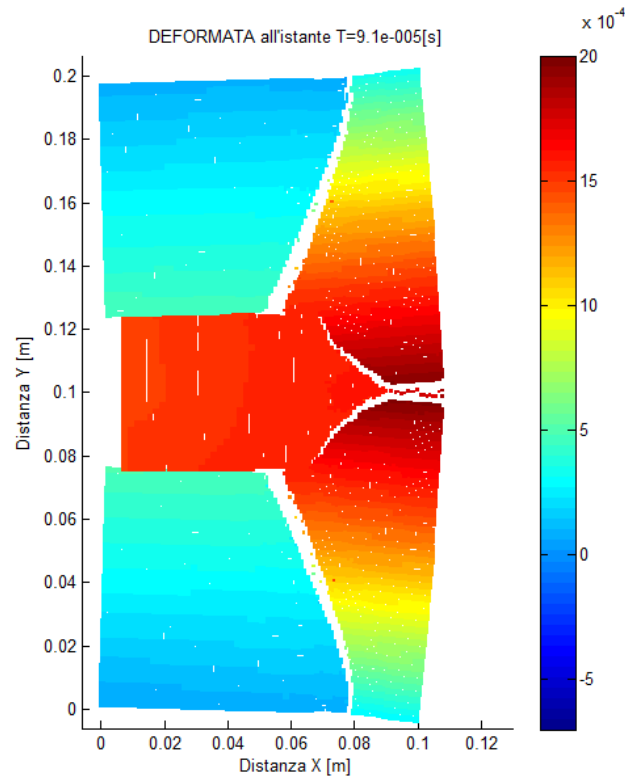


Figura 77: Deformata del modello con materiale X2 NiCoMo 18 9 5 con contourplot del campo di spostamenti in direzione X, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.

Sono riportate in Figura 77 e 78 le deformate dei due modelli con visualizzati il contour plot del campo di spostamenti  $u_x$ , gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5; i campi di spostamento sono pressoché simili, a differenza della presenza di qualche nodo il cui spostamento a valore negativo (colorbar di Figura 78).



**Figura 78: Deformata del modello con materiale 19Ni1900 con contourplot del campo di spostamenti in direzione X, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 5.**

### 3.3 Piastra con foro e cricca laterale

I casi di studio analizzati nei precedenti paragrafi hanno dimostrato come il modello adaptive della teoria BBP sia in grado di catturare alcuni dei principali fenomeni riguardanti l'ambito della meccanica della frattura fragile.

Si vuole ora dimostrare la capacità offerta da una modellazione adattativa di catturare le interazioni che scaturiscono da una cricca che si propaga in prossimità di un foro, questo caso di studio è stato affrontato da Rashid [37] con il metodo Arbitrary Local



Mesh Replacement basato sulla tecnica FEM, Tabiei [54] con il codice DYNA3D e Kostaski [28] con il Truss-Like Discrete Element Method.

Il caso riguarda una piastra rettangolare pre-criccata lateralmente e forata, un'estremità è incastrata mentre all'estremità opposta è applicato un carico di trazione, come riportato in Figura 79.

Si vuole analizzare come il percorso di frattura sia influenzato dalla presenza del foro di forma circolare al variare della distanza  $h$  della cricca iniziale dal bordo incastrato della piastra; i valori di  $h$  sono riportati in Tabella 12 per tre differenti configurazioni analizzate.

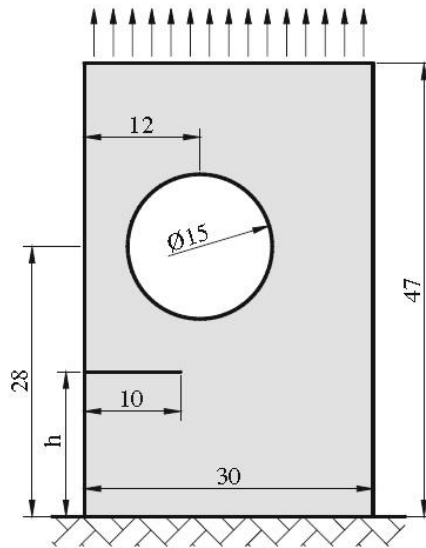


Figura 79: Setup della piastra con foro e cricca laterale (immagine tratta dall'articolo di Kostaski [28]).

Modello	$h$
A	15
B	10
C	5

Tabella 12: Valori di  $h$  per i tre differenti modelli analizzati.

### 3.3.1 Modellazione della piastra pre-criccata con foro

In Figura 80 è riportata l'immagine dei tre modelli 2D di griglia iniziale utilizzati per simulare i tre casi di studio, entrambi i modelli hanno passo  $\Delta x = \Delta y = 0,001m$  con 1238 nodi.

Dalla Figura 80 si può notare come la coordinata cui corrisponde la linea del taglio è pari a  $y = h - \Delta x/2$ , questo per il motivo che il sistema di riferimento è posizionato in corrispondenza della coordinata  $(x,y)=(0,0)$  del nodo della griglia e non del bordo effettivo della piastra.

Il materiale utilizzato ha modulo di Young  $E=71,4GPa$ , densità di massa  $\rho=2700 kg/m^3$ , coefficiente di Poisson  $\nu=0,25$  ed energia di frattura  $G_0=1000 J/m^2$ ; si assume l'ipotesi di materiale lineare elastico isotropo e omogeneo, inoltre si assume la condizione di "strain plane".

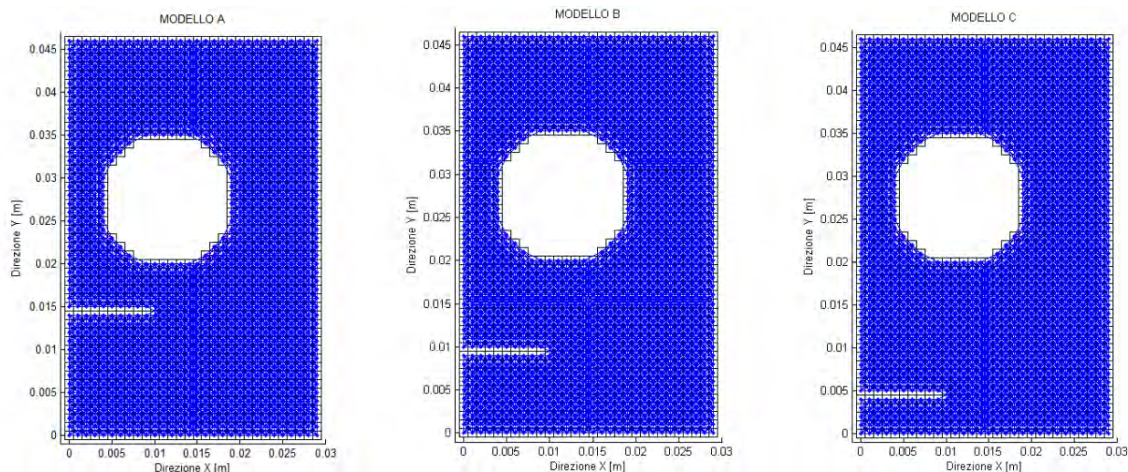


Figura 80: Immagine dei tre modelli utilizzati per simulare l'interazione del percorso della frattura con il foro.

La cricca è modellata con la stessa tecnica utilizzata nei precedenti casi di studio, cioè con la rottura dei bond che attraversano la linea del taglio; si assume modello di materiale PMB e micromodulo costante (Eq. 11), in Tabella 13 sono riportati i valori del passo, orizzonte, micromodulo e critical relative elongation associato ai nodi dei due livelli di refinement, avendo utilizzato un refinement di primo livello.

Livello di Refinement	$\Delta x [m]$	$\delta [m]$	$c_0 [N/m^6]$	$s_0$
0	0,001	0,003	8,081e+18	0,00247
1	0,0005	0,0015	6,465e+19	0.00350

**Tabella 13: Valori dei parametri peridynamics associati ai nodi dei due livelli di refinement.**

La condizione d'incastro è ottenuta imponendo a ogni step d'integrazione temporale uno spostamento e una velocità nulla, mentre il carico di trazione è applicato improvvisamente e mantenuto costante per tutto il corso della simulazione; sia la condizione d'incastro sia il carico di trazione sono applicati a un solo strato di nodi poiché si è utilizzato il fattore di compensazione introdotto da Kebing Yu [26], come riportato nel paragrafo 1.2.4. Si ricorda che i nodi ai quali sono applicate le condizioni al contorno non sono interessati dall'adaptive refinement.

Date la difficoltà nel reperire in letteratura le informazioni riguardo all'entità del carico applicato nel caso di studio qui analizzato, si è applicata una tensione di trazione di entità sufficiente da provocare l'innesco della cricca per i tre modelli, in Tabella 14 sono riportati i corrispettivi valori di tensione superficiale e corrispondente densità di forza volumetrica  $b_{eq}$ .

Modello	$\sigma [N/m^2]$	$b_{eq} [N/m^3]$
A	22,000e+6	2,127e+10
B	26,000e+6	2,513e+10
B	30,000e+6	2,900e+10

**Tabella 14: Valori di tensione superficiale e volumetrica applicato ai tre modelli.**

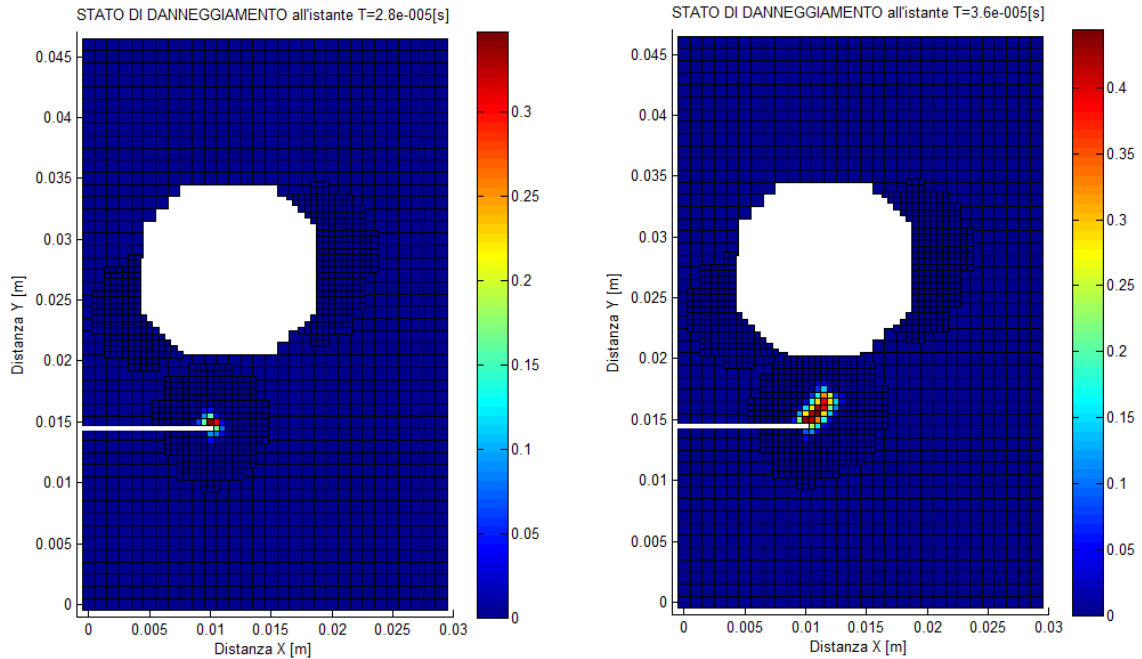
### 3.3.2 Risultati dei tre modelli analizzati

In Tabella 14 sono riportati i valori dei tempi di simulazione, step d'integrazione temporale, istante e criterio di attivazione dell'adaptive refinement e la quantità di nodi della griglia iniziale e finale.

Nelle Figure 81-86 sono riportate le immagini di alcuni frame dello stato di danneggiamento subito dai tre modelli analizzati.

Modello	$t_s$ [s]	$\Delta t$ [s]	$t_{att}$ [s]	Criterio attivazione	N° nodi griglia
A	7,2e-05	4,0e-08	1,92e-05	$W > 0,7W_{max}$ $\varphi > 0$	1238÷1927
B	14,8e-05		1,80e-05		1238÷2409
C			1,92e-05		1238÷2492

**Tabella 15: Valori dei parametri caratteristici della simulazione e attivazione dell'adaptive refinement.**



**Figura 81: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello A.**

Le Figure 81-86 mostrano come durante il corso delle simulazioni il refinement si attivi nelle regioni di maggiore gradiente di deformazione, cioè nelle zone circostanti al foro e in corrispondenza dell'apice della cricca, seguendo il percorso della frattura durante la sua evoluzione.

In Figura 87 sono riportate le deformate delle configurazioni finali dei tre modelli analizzati mentre in Figura 77 sono riportati i risultati ottenuti da Tabiei [54].

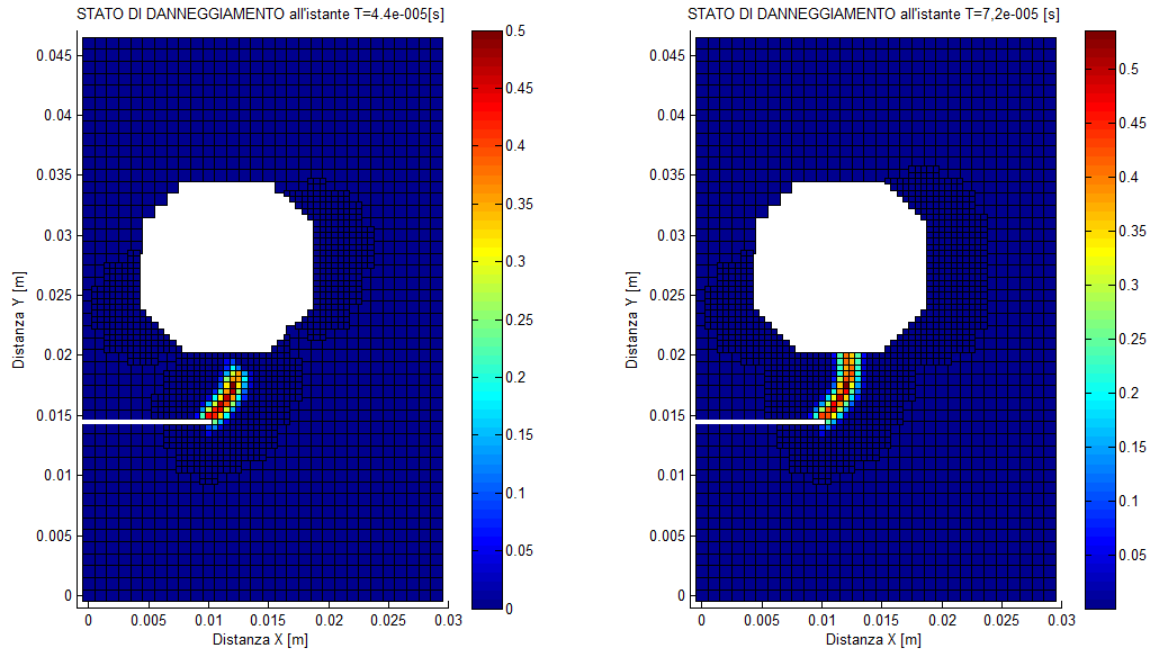


Figura 82: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello A.

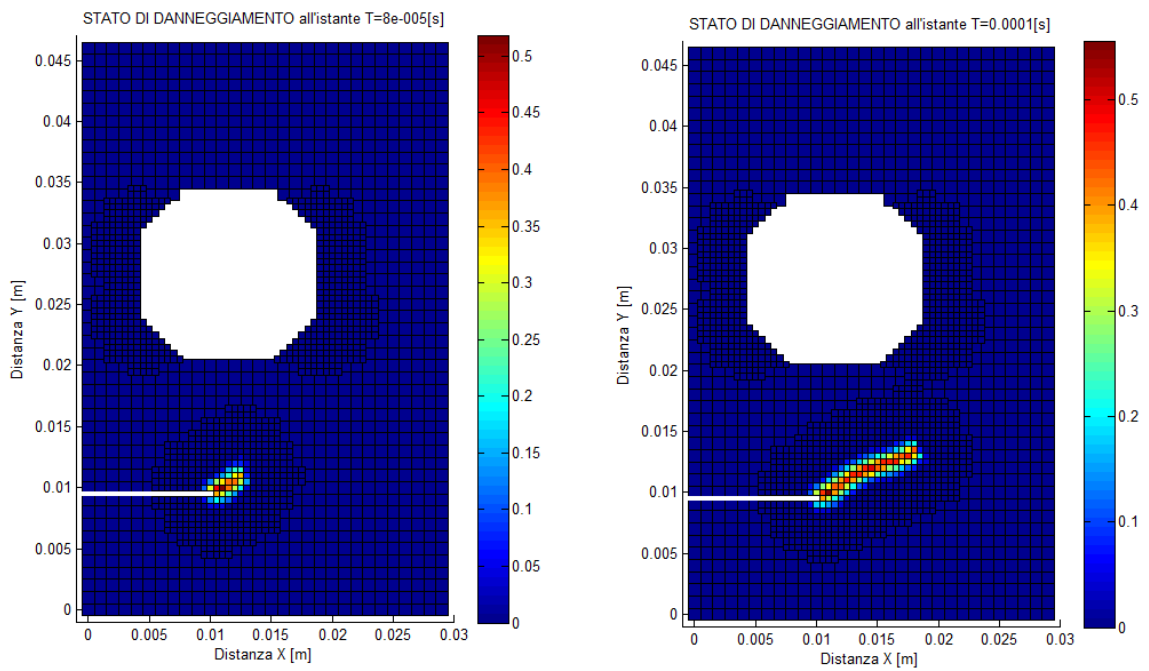


Figura 83: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello B.

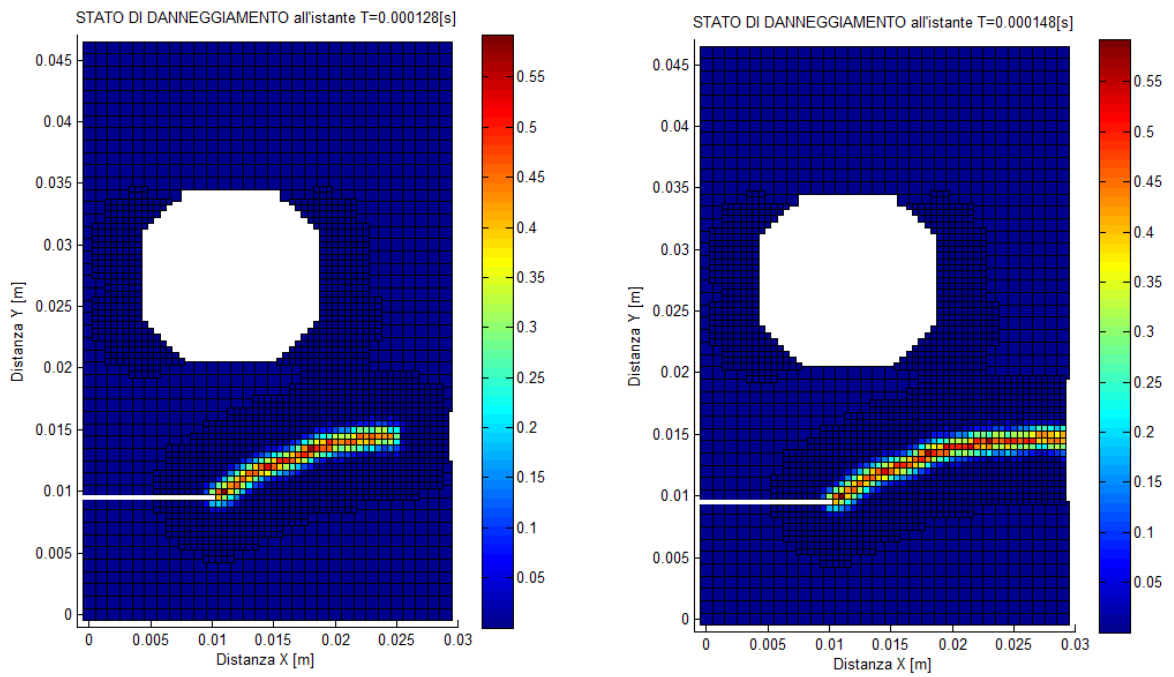


Figura 84: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello B.

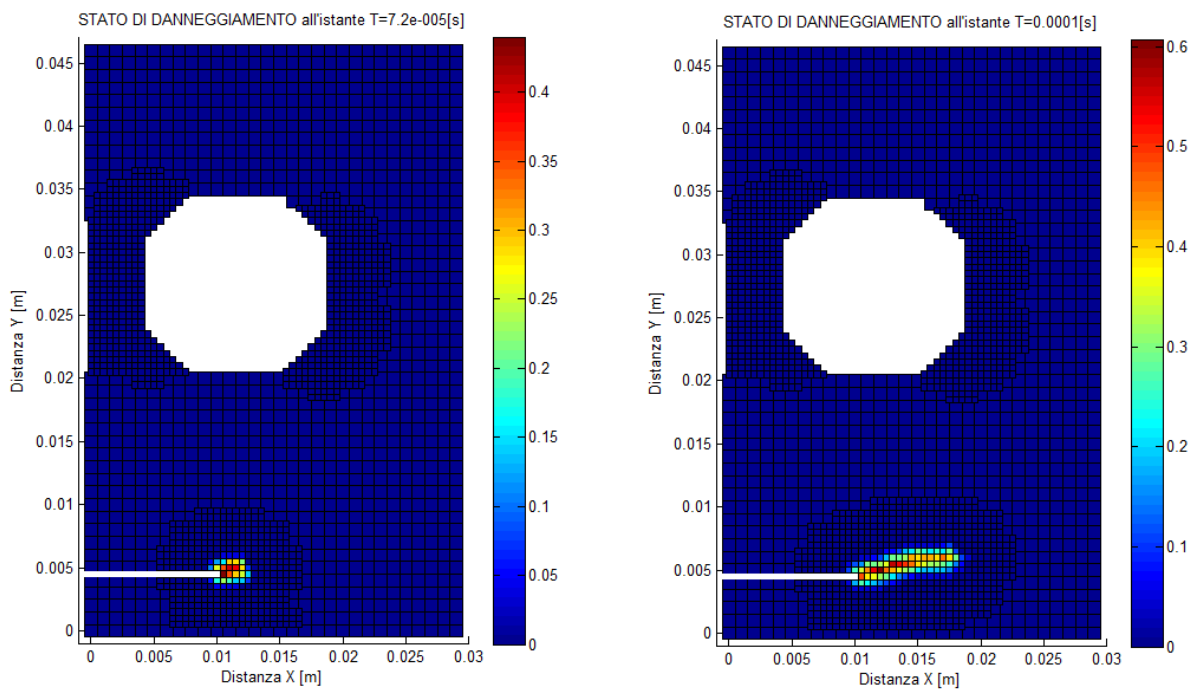
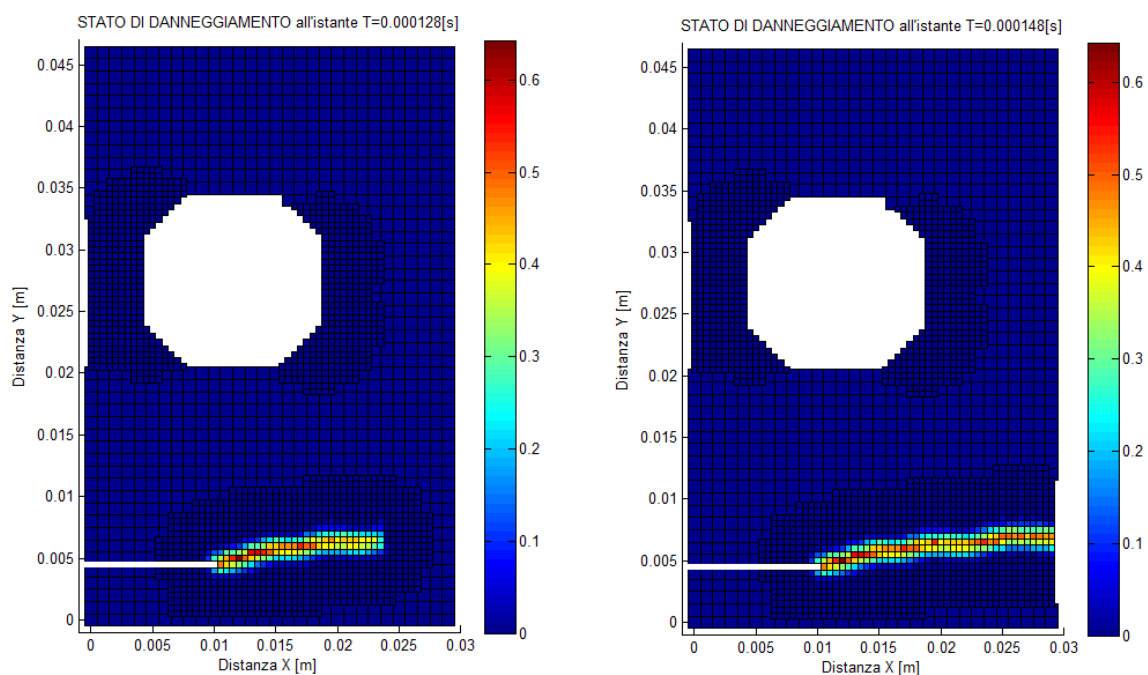


Figura 85: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello C.



**Figura 86: Alcuni frame dell'evoluzione temporale del livello di danneggiamento del modello C.**

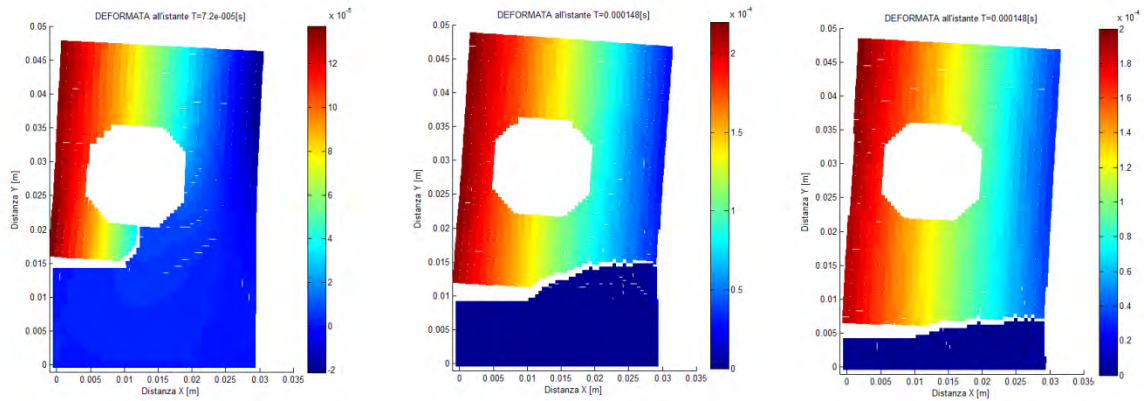
Riguardo il modello A si può notare come la curvatura manifestata dalla cricca nella sua propagazione sia maggiore rispetto a quella mostrata dal modello di Tabiei, infatti quest'ultima si propaga in modo più rettilineo; stessa curvatura è mostrata dai risultati di Kostas [27]. Riguardo invece al modello B e C si può notare una minore curvatura della traiettoria seguita dalla cricca se confrontata con i risultati degli autori appena citati.

Bisogna prendere in considerazione del fatto che la modellazione del foro non è molto accurata, ciò porta alla formazione di concentrazioni di tensione differenti a quelle che si dovrebbero avere.

Anche se l'attivazione del refinement nella regione circostante il foro porta ad aumentare la densità nodale della griglia, tale aumento non è comunque in grado di catturare la forma circolare del foro, conseguenza di una griglia regolare.

Questo studio dell'applicazione dell'adaptive refinement alla teoria BBP è un primo passo per capire il comportamento di un modello non uniforme e multiscala nelle

soluzioni di problemi meccanici, consentendo in futuro di adottare griglie di nodi non uniformi per discretizzare nel modo più efficace geometrie che presentano delle forme curve e complesse.



**Figura 87: Deformate con relativo contour plot del campo di spostamenti lungo la direzione Y delle configurazioni finali, gli spostamenti sono amplificati di un fattore 10.**



**Figura 88: Risultati ottenuti da Tabiei (immagine tratta dall'articolo di Tabiei [53]).**



## CONCLUSIONI

Si sono sviluppati gli algoritmi per l'implementazione numerica dell'adaptive grid refinement di primo livello applicato alla teoria non locale bond-based peridynamic. Per valutare gli effetti provocati da una modellazione non uniforme/multiscala sulle soluzioni ottenute con modelli di griglia uniforme/monoscala, si sono analizzati due problemi di analisi dinamiche di una piastra 2D. Il primo riguarda la propagazione di un'onda elastica gaussiana, le analisi evidenziano come alcuni nodi refined d'interfaccia siano affetti da errori d'integrazione, ciò porta a delle perdite anche del 56,62% nella densità di energia potenziale, ridotte al 17,33% adottando un'opportuna correzione dell'orizzonte associato a questi nodi. Queste perdite locali si riflettono sulla perdita di energia totale del sistema, perdite del 0,57% e del 0,09% per modello senza e con correzione rispettivamente. Inoltre si osservano fenomeni di riflessioni spurie con un'ampiezza massima del 2,5% dell'ampiezza dell'onda gaussiana, fenomeni non rilevati con l'apporto di tale modifica dell'orizzonte. Il secondo riguarda invece la propagazione di un'onda di tensione generata dall'applicazione di un carico di trazione a gradino, quest'ultima analisi evidenzia le stesse problematiche concernenti il comportamento anomalo di alcuni nodi d'interfaccia, ma con un effetto opposto sul comportamento globale del sistema. L'utilizzo del modello non uniforme/multiscala porta a perdite di energia totale nel sistema del 7,15%, aumentando al 13,65% con l'apporto della correzione dell'orizzonte. Gli effetti di tale correzione dei nodi d'interfaccia devono essere ulteriormente approfonditi, perciò non sono stati impiegati nei casi di studio qui affrontati.

I tre casi di studio affrontati per mostrare l'applicabilità dell'adaptive grid refinement a problemi della dinamica della frattura fragile 2D riguardano il fenomeno del crack branching in una piastra pre-criccata posta in trazione, l'esperimento di Kalthoff-Winkler e l'interazione tra il percorso della frattura e il foro di una piastra posta in trazione.

I risultati ottenuti sono concordi con quanto presentato in letteratura e i dati sperimentali, in particolare riguardo l'esperimento di Kalthoff-Winkler i modelli

sviluppati in questo studio forniscono un'angolazione della propagazione della cricca di  $66^\circ$  e  $71^\circ$ , valori molto prossimi ai valori di  $68^\circ$ - $70^\circ$  forniti dai dati sperimentali.

## BIBLIOGRAFIA

1. Askari E., Bobaru F., Lehoucq R.B., Parks M.L., Silling S. A., Weckner O., “Peridynamics for multiscale materials modeling”, Journal of Physics: Conference Series 125, 2008
2. Askari E., Xu J., Silling S., “Peridynamic analysis of damage and failure in composites”, 44<sup>th</sup> Aerospace meeting and Exhibit, 2006
3. Babuska I., Rheinboldt W.C., “A posteriori error estimates for the finite element method”, Int. J. Numer. Method Eng., vol. 1, no. 12, 1978, pp. 1597-1615
4. Banžant P. Zdeněk, Celept Zekai, “Spurious reflection of elastic waves due to gradually changing finite element size”, International journal for numerical in engineering, Vol 19, 1983
5. Banžant P. Zdeněk, Celept Zekai, “Spurious reflection of elastic waves in nonuniform finite element grids”, Computer methods in applied mechanics and engineering 16, North-Holland Publishing Company, 1978
6. Belytschko T., Chen H., Xu J., Zi G., “Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 58, 2003, pp. 1873-1905
7. Bobaru F., Yabg M., Alves L.F., Silling S.A., Askari E., Xu J., “Convergence, adaptive refinement, and scaling in 1D peridynamics”, Int. J. Numer Methods Eng., Vol 77, 2009, pp. 852-877
8. Bobaru F., Ha Y.D, “ Adaptive refinement and multiscale modeling in 2D peridynamics, Journal for Multiscale Computational Engineering, Vol 9, 2011, pp. 635-659
9. Bobaru F., Hu W., “The meaning, selection, an use of the peridynamic horizon and its relation to crack branching in brittle materials”, Int. J Fract 2012
10. Bowden F.P., Brunton H., Field J. E. and Heyes A.D; “Controlled fracture of brittle solid and interruption of electrical current”, Nature Publishing Group, 1967, pp. 38-42

11. Chen Jiun-Shyan, Lu Hongsheng, “Adaptative Galerikin Particle Method”,  
Departement of Civil & Environmental Engineering, University of California,  
Los Angeles
12. Chen J-S, Y.You, H. Lu, “Filters, reproducing kernel, and adaptative meshfree  
method”, Computational Mechanics 31, 2003
13. Demkowicz L., J.T. Oden, “Application of hp-adaptive BE/FE methods to  
elastic scattering”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 133, 1996
14. Döll W., “Investigation of the crack branching energy”, Int. J.Fract. 11, 1975,  
pp. 184-186
15. Emmrich E., Weckner O., “On the well-posedness of the linear peridynamic  
model and its convergence towards the navier equation of linear elasticity”,  
Commun. Math Sci., Vol 5, No 4, pp. 851-864, 2007, International Press
16. Emmrich E., Weckner O., “The peridynamic equation of motion in non-local  
elasticity theory”, III European Conference on Computational Mechanics Solid.  
Structures and Coupled Problems in Engineering, 2006
17. Ferhat T., Ozkol I., “The effects of dimension ratio and horizon length in the  
micropolar peridynamic model” , Engineering, 2011
18. Field J.E., “ Brittle Fracture: its Study and Application”, Contemp. Phys., Vol  
12, 1971, pp. 1-31
19. Foster J.T., Silling S.A., Chen W.W., “State based peridynamic modeling of  
dynamic fracture”, DYMAT, 2009
20. Hunter M. Gregory, Steiglitz Kenneth, “Operations on images using quadtrees”,  
Ieee Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. Pami-1,  
1979
21. Ha D.Y, Bobaru F., “Studies of dynamic crack propagation and crack branching  
with peridynamics”, 2010, Int.J. Frac, 2010, pp. 229-244
22. Ha D.Y, Bobaru F., “Characteristics of dynamic brittle fracture captured with  
peridynamics”, Tecnical report Departement of Engineering Mechanics,  
University of Nebraska-Lincoln, 2010, pp. 1157-1168

23. Ha D.Y, Bobaru F., “Dynamic brittle fracture captured with peridynamics”, IMECE Nov. 2011, pp. 1-6
24. Jonaes M.T, Plassmann E.P, “Adaptive refinement of unstructured finite-element meshes”, Finite Elements in Analysis and Design, Vol 25, 1997, pp. 41-60
25. Kalthoff J.F., “Modes of dynamic shear failure in solids”, International Journal of Fracture, Vol 101, 2000, pp. 1-31
26. Keping Y., “Enhanced integration method for the peridynamic theory”, Departement of mechanical and Nuclear Engineering, College of Engineering, Kansas State University, 2011
27. Kilic B., “Peridynamic theory for progressive failure prediction homogeneous and heterogeneous materials”, dissertation Department of Aerospace and mechanical Engineering, University of Arizona, 2008
28. Koteski L., D’Ambra Barrios R., Iturrioz I., “Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method”, Int J Fract, 2010
29. Koteski L., D’Ambra Barrios R., Iturrioz I., “ The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics”, Engineering Computations International Journal for Software, 2011
30. Lall P., Shantaram S., Panchagade D., “Peridynamic-model using finite element for shock and vibration reliability of lead-free electronics”, Aburn University Department of Mechanical Engineering, 2010
31. Lu W., Hong J.W., “Discretized peridynamics for linear elastic solid”, Comput Mach, 2012
32. Macek R.W., Silling S.A., “Peridynamics via finite element analysis”, Finite Element in Analysis and Design, Vol 43, 2007, pp. 1168-1178
33. Oden J.T., Prudhomme S., “Goal-Oriented error estimation and adaptivity for the finite element method”, Computers and Mathematics with Applications 41, 2001

34. Rabczuk T., Belytschko T., "Adaptivity for structured meshfree particle methods in 2D and 3D", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005
35. Rachowicz W., Pardo D., Demkowicz L., "Fully automatic hp-adaptivity in three dimensions", *Section of Applied Mathematics Cracow University of Technology, Institute for Computational Engineering and Sciences The University of Texas at Austin*
36. Rank E., Zienkiewicz O.C., "A simple error estimator in the finite element method", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol 3, 1987, pp.243-249
37. Rashid M.M, "The arbitrary local mesh replacement method: An alternative to remeshing for crack propagation analysis", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1998, pp. 133-150
38. Ravi-Chandar K., Knauss W.G., "An experimental investigation into dynamic fracture: I. Crack initiation and arrest", *Int. J. Frac.*, 1984, pp. 247-261
39. Ravi-Chandar K., Knauss W.G., "An experimental investigation into dynamic fracture: II. Microstructural aspect", *Int. J. Frac.*, 1984, pp. 65-79
40. Ravi-Chandar K., Knauss W.G., "An experimental investigation into dynamic fracture: III. On steady-state crack propagation and crack branching", *Int. J. Frac.*, 1984, pp. 141-154
41. Ravi-Chandar K., Knauss W.G., "An experimental investigation into dynamic fracture: IV. On the interaction of stress waves with propagating cracks", *Int. J. Frac.*, 1984, pp. 189-199
42. Ravi-Chandar K., "Dynamic fracture of nominally brittle materials", *Int. J.Frac.* 1998, pp. 83-100
43. Samet Hanan, "Neighbor finding techniques for images represented by quadtrees", *Computer Graphics and Image Processing*, Vol 18, 1982
44. Samet Hanan, "An overview of quadtrees, octrees and related hierarchical data structures", *Computer Science Department, University of Maryland*

45. Samet H., "Hierarchical data structures and algorithms for computer graphics", Part 1, 2 University of Maryland
46. Samet H., "The quadtree and related hierarchical data structures", University of Maryland
47. Seleson P., Parks M.L., "On the role of the influence function in the peridynamic theory", *Scient.Comp.* 400, pp. 1-17
48. Silling S.A., Askari E., "A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics", *Comput. Struct.* 83, 2005, pp. 1526-1535
49. Silling S.A., Epton M., Weckner O., Xu J., Askari E., "Peridynamic states and constitutive modeling", *J Elasticity*, 2007
50. Silling S.A., Weckner O., Askari E., Florin Bobaru Ph.D., "Crack nucleation in peridynamic solid", *Int. J. Fact*, 2010
51. Silling S.A., Leouchq R.B., "Peridynamic Theory of Solid Mechanics", Sandia National Labs Technical report SAND 2010-1233J. Published in: Hassan Aref, Erik van der Giessen editors
52. Silling S.A., "Peridynamic Modeling of the Kalthoff-Winkler Experiment", Submission for the 2001 Sandia Prize in Computational Science
53. Tabarrei A., Sukumar N., "Adaptive computations on conforming quadtree meshes", *Fine Elements in Analysis and Design* 41, 2005
54. Tabiei A., Wu J., "Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003
55. Warren T.,L., Silling S.A., Askari A., Weckner O.,Epton M. A., Xu J., "A non-ordinary state-based peridynamic to model solid material deformation and fracture, *International Journal of Solid and Structures*, 2009
56. Zaccariotto M., Galvanetto U., "Peridynamic and cohesive zone model approaches for crack propagation modeling", 3° CEAS Air&Space Conference, 21 AIDAA Congress

57. Zukas Jonas A., Scheffler Daniel R., “Practical aspects of numerical simulations of dynamics events: effects of meshing”, Army Research Laboratory, 2000