

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

Corso di laurea in Fisica

TESI DI LAUREA

Elettrodinamica classica in 2+1 dimensioni

Laureando:

Domenico Matteo Bianco

Relatore:

Prof. Kurt Lechner

Anno Accademico 2013-2014

Indice

1	Introduzione	3
2	Elettrodinamica in D dimensioni spaziotemporali	6
2.1	Soluzioni delle equazioni di Maxwell	6
2.2	Aspetti problematici dell'elettrodinamica classica	7
3	Potenziale e campo elettromagnetico in D=3	9
3.1	Quadripotenziale	9
3.2	Campo elettromagnetico	13
4	Autoforza	15
4.1	Determinazione delle divergenze	15
4.2	Equazione di Lorentz-Dirac in D=3	18
5	Andamento asintotico del campo	20
5.1	Andamento a grandi distanze	20
5.2	Un esempio notevole	23
6	Commenti finali	26
A	Soluzione delle equazioni di Maxwell	28
B	Un limite distribuzionale	29
C	Espansione non relativistica dell'autoforza	30
	Riferimenti bibliografici	31

1 Introduzione

Il presente lavoro ha lo scopo di analizzare le caratteristiche fondamentali dell'elettrodinamica classica in uno spaziotempo $D = 2 + 1$ dimensionale. I motivi che hanno portato allo studio dell'elettrodinamica in uno spazio di dimensione diversa da tre sono diversi.

Innanzitutto uno studio approfondito dell'elettrodinamica classica è motivato dal fatto che essa costituisce un prototipo di teoria descrivente un'interazione fondamentale a livello classico. Tra l'altro l'interazione elettromagnetica è quella compresa, conosciuta e studiata più in profondità tra le quattro fondamentali. La sua importanza risiede nel fatto che la quasi totalità dei fenomeni fisici che osserviamo quotidianamente può essere ricondotta all'interazione elettromagnetica.

Inoltre sono noti i limiti predittivi e i punti problematici della teoria. L'elettrodinamica in spazi di dimensione generica presenta difficoltà concettuali simili a quelle già presenti nell'usuale spaziotempo, ma consente di comprendere meglio la natura di alcune di queste difficoltà.

Un argomento di particolare interesse riguarda lo studio delle divergenze ultraviolette e infrarosse. Le divergenze ultraviolette sono dovute alla natura puntiforme delle cariche; quelle infrarosse sono dovute alla natura di "lungo range" dell'interazione elettromagnetica, ovvero al fatto che l'interazione decresce solo come l'inverso del quadrato della distanza. Un esempio di divergenza ultravioletta è l'integrale della densità di energia eseguito su un volume che contiene una carica. Lo studio di tali divergenze è importante perché è strettamente collegato alla soluzione delle equazioni del moto per un sistema composto da una carica e dal campo elettromagnetico prodotto dalla stessa. Infatti in tal caso si deve valutare il campo sulla traiettoria della carica e questo risulta divergente. Lo studio sistematico dell'elettrodinamica in dimensione generica permette di comprendere meglio tali divergenze. Infatti le divergenze ultraviolette "peggiorano" all'aumentare della dimensione, mentre "migliorano" quelle infrarosse.

Lo studio di spaziotempi di dimensione $D > 4$ è interessante anche perché alcune teorie di unificazione sono formulate in tali spazi. Un esempio sono le teorie di stringa che sono possibili candidate a divenire "teorie del tutto", ovvero teorie in grado di descrivere tutte le interazioni fondamentali all'interno di un unico quadro teorico consistente. In particolare tali teorie ambientano l'interazione elettromagnetica in uno spaziotempo di dimensione $D = 4 + n$, $n \leq 6$, con n dimensioni "compattificate", ovvero di dimensioni molto più piccole rispetto alle 4 dimensioni fisiche. La conoscenza della teoria classica può essere quindi d'aiuto nel verificarne la consistenza.

La naturale evoluzione dell'elettrodinamica classica è l'elettrodinamica quantistica. L'elettrodinamica quantistica è descritta da una teoria di campo quantistica e relativistica. Storicamente è stata la prima teoria a includere sia la descrizione quantistica del mondo sia la relatività speciale. È stata definita il "gioiello della fisica" per le predizioni molto accurate di alcune quan-

tità quali il rapporto giromagnetico dell'elettrone e lo spostamento di Lamb dei livelli energetici dell'idrogeno. D'altra parte anche l'elettrodinamica quantistica presenta alcuni aspetti problematici non ancora risolti. Tra questi meritano menzione le divergenze infrarosse e il fatto che attualmente non è chiaro se la teoria ammetta una formulazione non perturbativa.

Dall'analisi dell'elettrodinamica in dimensione D generica emerge che questa teoria ha caratteristiche fondamentalmente diverse a seconda che D sia pari o dispari. Per evidenziare queste differenze nel modo più chiaro possibile è preferibile studiare innanzitutto i modelli più semplici che corrispondono a spazi di dimensione più bassa. L'elettrodinamica in $2+1$ dimensioni costituisce il modello più semplice sviluppato in uno spazio di dimensione dispari, ma presenta delle peculiarità davvero notevoli. Tra queste la peculiarità saliente, condivisa con le altre dimensioni dispari, è il fatto che il campo elettromagnetico in un punto dipende da tutta la storia passata della carica. Questa differenza introduce molto spesso una complicazione ulteriore perché le equazioni che descrivono il comportamento dei campi e delle cariche diventano integro-differenziali.

Infine va ricordato che l'elettrodinamica ha una formulazione particolarmente elegante nella quale il carattere relativistico è manifesto. Tale formulazione consente di estendere la teoria ad uno spaziotempo di dimensione arbitraria senza difficoltà. Infatti la forma delle equazioni di Maxwell è la medesima in ogni dimensione ma, ovviamente, le soluzioni saranno differenti.

Lo studio dell'elettrodinamica in $D = 2 + 1$ si è sviluppato negli ultimi anni ed è tuttora un campo di ricerca molto attivo. A tal proposito si vedano gli articoli riportati in bibliografia, in particolare [1, 2, 3, 4, 5].

Organizzazione del materiale. Nel capitolo 2 verranno descritte le caratteristiche fondamentali dell'elettrodinamica in dimensione generica. Verranno presentate le equazioni di Maxwell in uno spazio di Minkowski di dimensione generica e alcune differenze notevoli tra gli spazi di dimensione pari e quelli di dimensione dispari. Infine verranno esposti gli aspetti problematici presenti in una teoria classica dell'elettrodinamica nelle differenti dimensioni. Nei restanti capitoli ci soffermeremo su analogie e differenze tra i due casi $D = 3$ e $D = 4$.

A partire dal capitolo 3 ci occuperemo solo del caso $D = 3$, argomento del presente lavoro. In questo capitolo saranno presentate le espressioni esplicite del potenziale A^μ e del campo elettromagnetico $F^{\mu\nu}$. Verranno illustrate in dettaglio le difficoltà dell'elettrodinamica in $D = 3$ anticipate nel capitolo precedente.

Nel capitolo 4 ci occuperemo della derivazione dell'equazione di "Lorentz-Dirac". Utilizzeremo un metodo euristico per ricavare un'espressione della forza di autointerazione della carica con il campo da essa prodotto, sottolineando come le analisi precedenti presenti in letteratura (si vedano [6, 7, 8]) hanno portato ad equazioni incomplete.

Nel capitolo 5 analizzeremo l'andamento asintotico del campo elettromagnetico a grande distanza dalla carica che lo origina. Questo ci consentirà di scrivere il vettore di Poynting

asintotico e di ricavare l'espressione della potenza emessa per irraggiamento, che costituisce la generalizzazione della nota formula di Larmor. Inoltre analizzeremo un esempio notevole che riguarda la dipendenza del campo dalla storia passata della carica.

Nel capitolo 6 riassumeremo le peculiarità descritte nei capitoli precedenti e proporremo alcuni spunti per studi futuri dell'elettrodinamica in $D = 3$.

Notazione. In seguito D indicherà la dimensione dello spaziotempo di Minkowski dotato della metrica $g^{\mu\nu}$ di segnatura $(1, -1, \dots, -1)$. Scriveremo un generico quadrivettore D -dimensionale come $y^\mu = (y^0, y^1, \dots, y^{D-1}) = (y^0, \vec{y})$. Indicheremo con \mathcal{S} lo spazio delle funzioni di prova, con \mathcal{S}' quello delle distribuzioni e con Θ_M quello dei “moltiplicatori”. Scriveremo “Lim” per indicare i limiti nel senso delle distribuzioni. Si intenderà $D \geq 3$ e si porrà $c = 1$, ove non indicato in modo differente.

2 Elettrodinamica in D dimensioni spaziotemporali

In questo capitolo affronteremo il problema della soluzione delle equazioni di Maxwell in uno spaziotempo di dimensione generica. Vedremo che, usando il metodo della funzione di Green, è possibile determinare i potenziali, ma non sempre tali “soluzioni” apparterranno allo spazio delle distribuzioni. Successivamente ci soffermeremo sulle differenze tra le soluzioni in dimensioni pari e quelle in dimensioni dispari. Infine descriveremo gli aspetti problematici presenti in una teoria classica dell'elettrodinamica.

2.1 Soluzioni delle equazioni di Maxwell

Sia $A^\mu(x)$ il potenziale generato da una carica e in moto arbitrario con densità di corrente $j^\mu(x) = e \int \delta^D(x - y(s)) u^\mu(s) ds$, ove δ^D indica la funzione δ di Dirac D -dimensionale, $y^\mu(s)$ la traiettoria della carica, $u^\mu(s) = \frac{dy^\mu}{ds}$ la sua velocità e s è il tempo proprio.

Le equazioni di Maxwell assumono la medesima forma in ogni dimensione (considerando $\mu = 0, \dots, D - 1$), ovvero

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (2.1a)$$

$$\partial_{[\nu} F_{\rho\sigma]} = 0, \quad (2.1b)$$

ove $F^{\mu\nu}$ è il tensore elettromagnetico. La soluzione della (2.1b) è data da $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$.

Il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico è definito come

$$T_{em}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

L'equazione (2.1a) in gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ diventa

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (2.3)$$

ove $\square = \partial^\nu \partial_\nu$ è l'operatore di D'Alambert in D dimensioni. Possibili soluzioni di quest'ultima sono date, formalmente, dalla convoluzione

$$A^\mu = G * j^\mu, \quad (2.4)$$

con la funzione di Green G che soddisfa

$$\square G(x) = \delta^D(x). \quad (2.5)$$

Le equazioni fin qui scritte sono ambientate nello spazio delle distribuzioni; in particolare $F^{\mu\nu} \in \mathcal{S}'$ e $A^\mu \in \mathcal{S}'$. In proposito notiamo che la convoluzione nell'equazione (2.4) non è definita in generale perché sia G che j^μ sono distribuzioni. Affinché questa espressione acquisti senso può essere necessario introdurre delle condizioni aggiuntive. Per esempio in $D = 4$ si deve richiedere che le particelle cariche siano massive (si veda [9]).

L'equazione (2.5) ammette molte soluzioni. Quelle rilevanti dal punto di vista fisico sono quelle ritardate, ovvero quelle supportate all'interno del cono luce futuro in quanto rispettano la causalità einsteiniana. Tali uniche soluzioni hanno la forma ($D \geq 3$)

$$G(x) = \frac{1}{2} \pi^{\frac{2-D}{2}} \theta(x^0) \delta^{(D/2-2)}(x^2) \quad \text{per } D \text{ pari e} \quad (2.6)$$

$$G(x) = \frac{(-1)^{\frac{D-3}{2}}}{2} \pi^{-D/2} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \theta(x^0 - |\vec{x}|) (x^2)^{\frac{2-D}{2}} \quad \text{per } D \text{ dispari,} \quad (2.7)$$

ove θ indica la funzione di Heaviside, $\delta^{(n)}$ la derivata n-esima della funzione δ di Dirac e Γ è la funzione di Eulero.

Nel caso D pari le soluzioni hanno supporto solo sul bordo del cono luce futuro di x e il termine $\theta(x^0)$ è dovuto al principio di causalità. Invece nel caso dispari hanno supporto sull'intero cono luce futuro di x e dipendono dall'inverso di una potenza di x^2 . Questa differenza fa sì che i fenomeni elettromagnetici che si osservano nei due casi siano molto diversi. Anticipiamo il seguente esperimento mentale (riportato da [7]). Supponiamo che una lampadina venga accesa per un tempo t in uno spazio di dimensione pari. Un osservatore vedrà il segnale luminoso solo per un tempo t . Al contrario, lo stesso osservatore in uno spazio di dimensione dispari vedrà la lampadina accendersi ma mai spegnersi completamente (dopo un certo tempo l'intensità sarà così bassa da non essere più rilevabile in pratica, si veda la sezione 5.2).

Questo però non significa che in dimensione dispari esistano onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto ad una velocità inferiore a quella della luce. Il *campo di radiazione*, ovvero il campo nel vuoto, soddisfa in ogni dimensione l'equazione $\square F^{\mu\nu} = 0$ ed è quindi una sovrapposizione di onde piane che si propagano con la velocità della luce. Invece il campo originato da una distribuzione di carica non è dato da una sovrapposizione di onde piane, pur tendendo asintoticamente a un campo di radiazione nel limite di grandi distanze spaziali dalle cariche. D'altra parte non ha senso chiedersi a che velocità si propaga il campo nelle vicinanze della carica perché qui il campo non è dato da una sovrapposizione di onde. L'interpretazione dell'esperimento è dunque la seguente. Per quanto riguarda la generazione del campo da parte della carica, è come se questo fosse composto da "segnali" (non onde) che si propagano con tutte le velocità $0 < v \leq c$. A grandi distanze la perturbazione si propaga come un "treno" d'onde che ha velocità c e il cui profilo presenta una "coda" infinita dovuta al fatto che il campo dipende da tutta la storia passata. Descriveremo questa peculiarità in dettaglio nella sezione 5.2. Per un'interpretazione alternativa dell'effetto "coda" si veda [3].

2.2 Aspetti problematici dell'elettrodinamica classica

Nelle diverse dimensioni l'elettrodinamica classica può presentare due tipi di divergenze: ultraviolette e infrarosse. In generale le divergenze ultraviolette sono originate quando si considerano piccole distanze spaziotemporali. Per indagare piccole distanze sono necessari fotoni

di grande energia, da cui il nome ultraviolette. Invece le divergenze infrarosse si riferiscono a singolarità che emergono a grandi distanze spaziotemporali.

In ogni dimensione $D \geq 3$ una particella puntiforme origina un campo che è ultravioletto divergente nelle vicinanze della carica. In particolare il campo generato da una carica è singolare se valutato sulla sua traiettoria. Questo è evidente se consideriamo una carica statica che origina un *campo coulombiano*. Nelle diverse dimensioni $A^\mu \propto r^{3-D}$ (tranne nel caso $D = 3$ in cui $A^\mu \propto \ln r$), con r distanza dalla carica, e $F_c^{\mu\nu} \propto r^{2-D}$. Il tensore energia-impulso $T_{em}^{\mu\nu}$ (2.2) è proporzionale al quadrato di $F^{\mu\nu}$, quindi $T^{\mu\nu} \propto r^{4-2D}$. Essendo $P^\mu = \int T^{0\mu} d^{D-1}x = \int T^{0\mu} r^{D-2} dr d\Omega \propto \int r^{2-D} dr d\Omega$, l'energia diverge in $r = 0$ per $D \geq 3$ e per $r \rightarrow \infty$ se $D = 3$. Queste divergenze, la prima di tipo ultravioletto e la seconda di tipo infrarosso, mettono in luce un aspetto problematico dell'elettrodinamica classica, ovvero quello della convergenza del quadrimomento elettromagnetico totale.

Invece il *campo di accelerazione* valutato lontano dalle cariche che lo originano, è asintotico a $F_a^{\mu\nu} \sim r^{\frac{2-D}{2}}$ in ogni dimensione (si veda [4]). Ricordando che l'elemento di superficie ($D - 1$)-dimensionale $d\Sigma_{D-1} = r^{D-2} dr d\Omega$ e che la potenza irradiata $\mathcal{W} \propto F_a^2 d\Sigma_{D-1}$, si ha irraggiamento in ogni dimensione in quanto per ogni D le potenze di r in \mathcal{W} si cancellano. Questo risultato non è banale perché contribuiscono all'irraggiamento solo campi elettromagnetici che hanno un opportuno andamento asintotico e non è ovvio a priori che esistano in ogni dimensione.

Un'ulteriore difficoltà si incontra qualora si voglia valutare l'interazione della carica con il campo prodotto dalla stessa. Infatti una carica accelerata produce un campo elettromagnetico che trasporta quantità di moto e momento angolare e subisce una reazione dovuta allo scambio di queste quantità complessivamente conservate. In particolare lo scambio di quadrimomento equivale all'esistenza di una "forza di autointerazione". La difficoltà nel calcolare la forza di autointerazione della carica sta nel fatto che si deve valutare il campo sulla traiettoria della particella e abbiamo appena visto che questo diverge. Si possono ottenere equazioni che descrivono questa interazione in modo euristico a partire dall'equazione di Lorentz con una procedura di rinormalizzazione, oppure a partire dalla conservazione del quadrimomento totale. Di questi approcci, l'unico con un solido fondamento è l'ultimo in quanto discende da un principio fondamentale della fisica. Tuttavia in diversi casi si può dimostrare che i due approcci sono equivalenti e in effetti noi seguiremo il primo.

3 Potenziale e campo elettromagnetico in $D=3$

In seguito ci occuperemo di due tipi di moti: illimitati e limitati. Diremo che un moto è “illimitato” se la velocità della particella ammette limite finito per $s \rightarrow \pm\infty$, in particolare la sua accelerazione si annulla con sufficiente rapidità per $s \rightarrow \pm\infty$. In questa definizione rientrano i casi della carica in moto rettilineo uniforme e della carica accelerata per un tempo finito, che asintoticamente compie quindi un moto rettilineo uniforme. Invece diremo che è “limitato” se il moto si svolge in una regione spazialmente limitata.

In questo capitolo risolveremo l’equazione di Maxwell (2.1a) in 2+1 dimensioni per una particella puntiforme. Si vedrà che il metodo della funzione di Green fallirà, ma si riuscirà comunque a trovare una soluzione per moti illimitati. Al contrario, per moti limitati non riusciremo a emendare il metodo; d’altronde le espressioni proposte in letteratura (si confrontino [1, 6, 7, 8]) per il campo elettromagnetico non convergono per tali moti e, per quanto ne sappiamo, il problema di una soluzione delle equazioni di Maxwell in questo caso è ancora aperto.

3.1 Quadripotenziale

Una soluzione possibile delle equazioni di Maxwell è il quadripotenziale $A^\mu(x)$ corrispondente alla convoluzione (2.4). Nel caso $D = 3$ la corrente originata da una carica e in moto arbitrario con traiettoria $y^\mu(s)$ e velocità $u^\mu(s)$ è

$$j^\mu(x) = e \int \delta^3(x - y(s)) u^\mu(s) ds \quad (3.1)$$

e la funzione di Green, data dall’equazione (2.7), è

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta(x^0 - |\vec{x}|)}{\sqrt{x^2}}. \quad (3.2)$$

Come anticipato, il metodo della funzione di Green fallisce perché l’espressione del potenziale che si ricava attraverso la (2.4) risulta divergente. Infatti, procedendo in maniera formale, risulta

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^3} G(x - y) j^\mu(y) d^3y \\ &\rightarrow \frac{e}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d^3y \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(x^0 - y^0 - |\vec{x} - \vec{y}|)}{\sqrt{(x - y)^2}} u^\mu(s) \delta(y - y(s)) ds \\ &\rightarrow \frac{e}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\theta(x^0 - y^0(s) - |\vec{x} - \vec{y}(s)|)}{\sqrt{(x - y(s))^2}} u^\mu(s) ds \\ &\rightarrow \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda(x)} \frac{u^\mu(s)}{\sqrt{L^2}} ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

ove $L^\mu(x) \equiv x^\mu - y^\mu(s)$. Nel secondo passaggio si è utilizzata la definizione di δ . Nell’ultimo passaggio si è usato il fatto che $x^0 - y^0(s) \geq |\vec{x} - \vec{y}(s)|$ è equivalente a $(x - y(s))^2 \geq 0$ con la condizione $x^0 - y^0(s) > 0$, ovvero al fatto che il vettore che congiunge x a $y(s)$ è di tipo tempo

o luce. Questa condizione diviene un vincolo sugli estremi di integrazione in quanto esiste un massimo valore che può assumere s in funzione di x . Tale valore $\lambda(x)$ è detto tempo proprio ritardato e soddisfa

$$(x - y(\lambda))^2 = 0, \quad x^0 - y^0(\lambda) > 0. \quad (3.4)$$

Il potenziale (3.3) risulta infrarosso divergente (per questo abbiamo usato il simbolo “ \rightarrow ”) a causa dell’estremo inferiore di integrazione sia per moti limitati che per moti illimitati. Analizzeremo in dettaglio tale fatto poiché gli stessi argomenti saranno impiegati anche in seguito.

Iniziamo considerando l’estremo inferiore di integrazione e studiamo l’andamento di $y(s)$ per $s \rightarrow -\infty$. Consideriamo il tempo al posto del tempo proprio come variabile di integrazione, ricordando che $ds = \sqrt{1 - v^2(t)} dt$ e che in generale vale $y^0(s) = t$. L’integrale diverge poiché la funzione integranda è asintotica a $1/t$ nel limite $t \rightarrow -\infty$. Infatti si ha $\sqrt{L^2} = \sqrt{(x - y(s))^2} = \sqrt{(x^0 - t)^2 - |\vec{x} - \vec{y}(t)|^2} \sim |t|$ per $t \rightarrow -\infty$ perché x^μ è fissato. Per moti illimitati, che sono il tipo di moti di cui ci occuperemo in seguito, si ha $y^\mu(s) \rightarrow u_{\pm\infty}^\mu s$ nel limite $s \rightarrow \pm\infty$ e quindi $s \sim t$ in tale limite, per la relazione ricordata in precedenza.

Consideriamo l’estremo superiore. La funzione integranda risulta integrabile in tale estremo. Per mostrarlo possiamo limitarci a studiare l’andamento della funzione integranda vicino a tale estremo. Introduciamo un parametro positivo δ e valutiamo la funzione integranda in $s = \lambda(x) - \delta$ invece di $\lambda(x)$. Infine prenderemo il limite per $\delta \rightarrow 0$. Essendo δ piccolo, sviluppiamo in serie $y^\mu(\lambda(x) - \delta) = y^\mu(\lambda) - u^\mu(\lambda)\delta + O(\delta^2)$ e sostituiamo questa espressione nella funzione integranda. Si ha $\sqrt{L^2} = \sqrt{(x - y(\lambda(x) - \delta))^2} = \sqrt{(x - y(\lambda) + u(\lambda)\delta + O(\delta^2))^2} \sim \sqrt{\delta + O(\delta^2)}$ (ove abbiamo sfruttato la definizione (3.4) di λ) e quindi l’integrale è finito per $\delta \rightarrow 0$ essendo asintotico a $\int \frac{d\delta}{\sqrt{\delta}}$.

Riportiamo gli andamenti della funzione integranda in prossimità degli estremi di integrazione poiché saranno utili in seguito:

$$\frac{1}{\sqrt{L^2}} \sim_{s \rightarrow -\infty} \frac{1}{s}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{L^2}} \sim_{s \rightarrow \lambda(x)} \frac{1}{\sqrt{\lambda(x) - s}}. \quad (3.6)$$

Quindi l’espressione del potenziale derivata in maniera “formale” risulta divergente in ogni punto dello spaziotempo. Questa divergenza mette in luce il fatto che il metodo della funzione di Green fallisce nel risolvere l’equazione (2.3) in $D = 3$. Comunque, nel caso il moto sia *illimitato*, la divergenza infrarossa potrà essere “curata”, come faremo vedere in seguito.

Per fare ciò definiamo A^μ introducendo un parametro Λ positivo e considerando il limite distribuzionale

$$A^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\theta(\lambda(x) + \Lambda) \int_{-\Lambda}^{\lambda(x)} \frac{u^\mu(s)}{\sqrt{L^2}} ds - u_\infty^\mu \ln\left(\frac{\Lambda}{l}\right) \right), \quad (3.7)$$

ove u_∞^μ indica la velocità asintotica della particella per $s \rightarrow -\infty$. Abbiamo aggiunto il termine $u_\infty^\mu \ln(\frac{\Lambda}{l})$ perché la divergenza di $A^\mu(x)$ risulta essere logaritmica. l è un coefficiente che ha

le dimensioni di una lunghezza ed è stato introdotto per questioni dimensionali. La funzione $\theta(\lambda + \Lambda)$ evita che Λ possa essere maggiore di $\lambda(x)$ e quindi che l'integrale non sia definito nel modo corretto. Il limite in (3.7) esiste per moti illimitati (lo faremo vedere in seguito), ma non esiste per moti limitati.

Il limite presente nell'espressione di $A^\mu(x)$ è inteso in senso distribuzionale. Di seguito considereremo limiti puntuali, tuttavia i risultati che otterremo saranno validi anche in senso distribuzionale (si veda l'appendice B).

Moto rettilineo uniforme. Dimostriamo preliminarmente che il limite in (3.7) esiste se la particella compie un moto rettilineo uniforme. La legge del moto è $y^\mu = u^\mu s + a_0^\mu$ con u^μ costante. Per semplicità poniamo $a_0^\mu = 0$. Nel caso il moto della carica sia rettilineo uniforme l'espressione (3.7) diviene

$$A^\mu(x) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{eu^\mu}{2\pi} \left(\theta(\lambda(x) + \Lambda) \int_{-\Lambda}^{\lambda(x)} \frac{1}{\sqrt{(x^\mu - u^\mu s)^2}} ds - \ln\left(\frac{\Lambda}{l}\right) \right). \quad (3.8)$$

In questo caso la soluzione della (3.4) è $\lambda(x) = (x \cdot u) - \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2}$ e, calcolando l'integrale elementare, si ottiene

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{-eu^\mu}{2\pi} \left[\ln\left((x \cdot u) - s + \sqrt{(u^\mu s - x^\mu)^2}\right) \Big|_{-\Lambda}^{\lambda(x)} + \ln\left(\frac{\Lambda}{l}\right) \right] \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{-eu^\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{\Lambda l^{-1} \sqrt{(x \cdot u)^2 - x^2}}{(x \cdot u) + \Lambda + \sqrt{(u^\mu \Lambda + x^\mu)^2}}\right) \\ &= -\frac{eu^\mu}{4\pi} \ln\left(\frac{(x \cdot u)^2 - x^2}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Quindi il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$ in (3.7) è finito.

Moto illimitato generico. Generalizziamo il ragionamento al caso in cui il moto della carica sia illimitato generico. In questo caso l'accelerazione della carica è nulla per $s \rightarrow \pm\infty$ e quindi il suo moto è rettilineo uniforme in questo limite. Sia u_∞^μ la velocità della carica per $s \rightarrow -\infty$, dobbiamo provare che esiste finito il limite (3.7). Sommiamo e sottraiamo lo stesso termine considerando una carica fittizia in moto rettilineo uniforme con velocità u_∞^μ :

$$\frac{e}{2\pi} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-\Lambda}^{\lambda(x)} \left(\frac{u^\mu(s)}{\sqrt{L^2}} - \frac{u_\infty^\mu}{\sqrt{(x^\mu - u^\mu s)^2}} \right) \theta(\lambda + \Lambda) ds + \left(u_\infty^\mu \int_{-\Lambda}^{\lambda(x)} \frac{\theta(\lambda + \Lambda)}{\sqrt{(x^\mu - u^\mu s)^2}} ds - u_\infty^\mu \ln \frac{\Lambda}{l} \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Per $\Lambda \rightarrow \infty$ il primo integrale è finito poiché per $s \rightarrow -\infty$ si ha $\frac{u^\mu(s)}{\sqrt{L^2}} \rightarrow \frac{u_\infty^\mu}{\sqrt{(x^\mu - u_\infty^\mu s)^2}}$ e nell'estremo superiore la funzione integranda è integrabile per quanto visto poco prima della (3.5). Il secondo integrale per $\Lambda \rightarrow \infty$ è ugualmente finito e vale (3.9) per il precedente calcolo.

Quindi l'espressione (3.7) converge se la carica compie un generico moto illimitato.

Potenziale originato da una carica statica. Se la particella è statica si ha $u^\mu = (1, 0, 0)$. L'unica componente non nulla di $A^\mu(x)$ è

$$A^0(x) = -\frac{e}{2\pi} \ln\left(\frac{|\vec{x}|}{l}\right). \quad (3.11)$$

Il campo elettrico e il campo magnetico risultano rispettivamente

$$\vec{E} = \frac{e}{2\pi} \frac{\vec{x}}{x^2}, \quad (3.12)$$

$$B = 0 \quad (3.13)$$

(in $D = 3$ il campo magnetico è scalare).

Il fatto che il potenziale sia proporzionale al logaritmo della distanza ha alcune conseguenze interessanti. Consideriamo una carica q_1 di massa m che si muove nel campo centrale originato da una seconda carica $q_2 > 0$ ferma nell'origine del sistema di riferimento. Affrontiamo il problema nell'ambito della meccanica classica non relativistica ($v \ll 1$). Sia \vec{r} la posizione di q_1 rispetto all'origine. L'energia della carica q_1 è

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) - \frac{q_1 q_2}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{l}\right) \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{q_1 q_2}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{l}\right) \\ &= \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_{eff}(r), \end{aligned} \quad (3.14)$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che il momento angolare $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ è conservato e abbiamo definito il potenziale efficace $V_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{q_1 q_2}{2\pi} \ln(r/l)$, dato dalla somma del termine centrifugo e del termine logaritmico.

Per grandi distanze dall'origine l'andamento di $V_{eff}(r)$ è dato dal termine logaritmico, invece per piccole distanze è dato dal termine centrifugo. Se $q_1 < 0$, la particolare forma del potenziale fa sì che q_1 sia “confinata”. Il termine logaritmico, che diverge per grandi distanze, costituisce una vera e propria barriera, infatti per portare q_1 all'infinito è necessaria un'energia cinetica infinita. Al contrario, se $q_1 > 0$, la divergenza logaritmica fa sì che la carica q_1 sia accelerata per sempre e che la sua velocità $v \rightarrow \infty$ (l'analisi svolta è non relativistica, nel caso relativistico $v \rightarrow 1$).

Quadripotenziale regolarizzato. In seguito sarà utile introdurre un'espressione “regolarizzata” per il potenziale (3.7), ovvero che sia finita se valutata sulla traiettoria della particella. Introduciamo un parametro $\varepsilon > 0$ e sostituiamo la condizione (3.7) con $(x - y(\lambda_\varepsilon))^2 = \varepsilon^2$, $x^0 - y^0(\lambda_\varepsilon) > 0$. In particolare vale il seguente limite puntuale: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon(x) = \lambda(x)$.

La nuova espressione per il potenziale “regolarizzato” è

$$A_{\varepsilon, \Lambda}^\mu(x) = \frac{e}{2\pi} \left(\theta(\lambda_\varepsilon(x) + \Lambda) \int_{-\Lambda}^{\lambda_\varepsilon(x)} \frac{u^\mu(s)}{\sqrt{L^2}} ds - u_\infty^\mu \ln\left(\frac{\Lambda}{l}\right) \right), \quad (3.15)$$

soggetta ai limiti $\text{Lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} A_{\varepsilon, \Lambda}^\mu(x) = A^\mu(x)$.

3.2 Campo elettromagnetico

Per definizione si ha $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Per ottenere l'espressione di $F^{\mu\nu}$ dobbiamo calcolare

$$\partial^\mu A^\nu = \partial^\mu \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} A_{\varepsilon, \Lambda}^\nu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \partial^\mu A_{\varepsilon, \Lambda}^\nu, \quad (3.16)$$

ove i limiti e la derivata commutano perché sono intesi in senso distribuzionale. Ora le derivate possono essere eseguite nel modo usuale perché $A_{\varepsilon, \Lambda}^\nu$ non presenta singolarità.

Calcolando le derivate, si ottiene

$$\partial^\mu A_{\varepsilon, \Lambda}^\nu(x) = \frac{e}{2\pi} \left(\frac{L^\mu u^\nu(s)}{\sqrt{L^2}(L \cdot u)} \Big|_{s=\lambda_\varepsilon(x)} - \theta(\lambda_\varepsilon(x) + \Lambda) \int_{-\Lambda}^{\lambda_\varepsilon(x)} \frac{L^\mu u^\nu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} ds \right), \quad (3.17)$$

ove si è sfruttato il fatto che $\partial^\mu \lambda_\varepsilon(x) = L^\mu / (L \cdot u)$ e non si è scritto il termine in cui compare la derivata della funzione di Heaviside perché il suo coefficiente è nullo. Il primo termine è finito perché viene valutato in $\lambda_\varepsilon(x)$ e non in $\lambda(x)$. L'integrale esiste finito per lo stesso motivo per quanto riguarda l'estremo superiore, mentre l'estremo inferiore Λ è finito.

Sfruttando il fatto che

$$\frac{1}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(L \cdot u)} \frac{d}{ds} \frac{1}{\sqrt{L^2}}, \quad (3.18)$$

possiamo svolgere l'integrale per parti e ottenere

$$\begin{aligned} \partial^\mu A_{\varepsilon, \Lambda}^\nu(x) = & \frac{e}{2\pi} \left(\frac{L^\mu u^\nu(s)}{\sqrt{L^2}(L \cdot u)} \Big|_{s=\lambda_\varepsilon(x)} - \frac{L^\mu u^\nu(s)}{\sqrt{L^2}(L \cdot u)} \Big|_{s=-\Lambda} \right. \\ & \left. + \theta(\lambda_\varepsilon(x) + \Lambda) \int_{-\Lambda}^{\lambda_\varepsilon(x)} \frac{1}{\sqrt{L^2}} \left\{ \frac{L^\mu u^\nu}{(L \cdot u)^2} [1 - L \cdot w] + \frac{L^\mu w^\nu}{L \cdot u} \right\} ds \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

ove i primi due termini valutati in $s = \lambda_\varepsilon(x)$ sono uno l'opposto dell'altro. Il secondo termine valutato in $s = -\Lambda$ nel limite $\Lambda \rightarrow \infty$ è nullo in quanto $1/\sqrt{L^2}$ si annulla in tale limite.

Infine possiamo eseguire i due limiti puntuali $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\Lambda \rightarrow \infty$, ricordando che valgono anche in senso distribuzionale, per ottenere l'espressione del campo. Eseguiamo dapprima solo il limite $\Lambda \rightarrow \infty$, poiché l'espressione ottenuta ci sarà utile in seguito:

$$F_\varepsilon^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda_\varepsilon(x)} \frac{1}{\sqrt{L^2}} \left\{ \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L \cdot u)^2} [1 - L \cdot w] + \frac{L^\mu w^\nu - L^\nu w^\mu}{L \cdot u} \right\} ds. \quad (3.20)$$

Questa espressione è regolare anche sulla traiettoria.

L'espressione del campo elettromagnetico in tutto lo spaziotempo è data da $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda(x)} \frac{L^\mu u^\nu + L^\nu \left((L \cdot u) w^\nu - (L \cdot w) u^\nu \right) - (\mu \leftrightarrow \nu)}{\sqrt{L^2} (L \cdot u)^2} ds. \quad (3.21)$$

Il tensore elettromagnetico (3.21) è una distribuzione per costruzione (è stato ottenuto a partire da una combinazione di derivate di una distribuzione). Notiamo che $F^{\mu\nu}(x)$ è composto da due

parti, la prima dipende solo dalla velocità della carica, la seconda anche dalla sua accelerazione. In seguito ci riferiremo alle due parti come “campo di velocità” e “campo di accelerazione”.

Per costruzione il campo (3.21) risulta finito se viene valutato in un punto che non appartiene alla traiettoria della carica. È comunque istruttivo verificarlo esplicitamente. Studiamo l'andamento della funzione integranda per $s \rightarrow -\infty$. Essendo il moto illimitato $(L \cdot u) \rightarrow u_\infty^\mu (x^\mu - u_\infty^\mu s)$ per $s \rightarrow -\infty$ e quindi vale l'andamento asintotico

$$L \cdot u \sim_{s \rightarrow -\infty} -s \quad (3.22)$$

poiché x^μ è fissato e indipendente da s . Il termine coulombiano della funzione integranda è asintotico a $1/s^2$ (per le (3.5) e (3.22)) e quindi risulta integrabile per $s \rightarrow -\infty$. I restanti termini dipendono dall'accelerazione della carica, che si annulla con sufficiente rapidità per $s \rightarrow -\infty$ poiché il moto è illimitato. Quindi la funzione integranda è integrabile nell'estremo inferiore.

Consideriamo l'estremo superiore e utilizziamo un ragionamento analogo a quello con cui abbiamo ricavato la (3.6). Introduciamo un parametro δ positivo (che poi faremo tendere a zero) e valutiamo la funzione integranda in $s = \lambda(x) - \delta$ al posto di $\lambda(x)$. Il numeratore della funzione integranda è non nullo poiché x^μ non appartiene alla traiettoria della carica. Vale lo sviluppo in serie di Taylor $1/(L \cdot u)(\lambda(x) - \delta) = 1/(L \cdot u)(\lambda(x)) + O(\delta)$. Ricordando l'andamento asintotico (3.6) l'integrale risulta quindi finito per $\delta \rightarrow 0$ essendo asintotico a $\int \frac{d\delta}{\sqrt{\delta}}$.

La nostra derivazione della soluzione (3.21) delle equazioni di Maxwell, per ipotesi, è valida solo per moti *illimitati*. Tuttavia possiamo chiederci se tale espressione abbia senso anche per moti limitati. La risposta è che $F^{\mu\nu}(x)$ diverge per moti limitati a causa del termine che contiene l'accelerazione. Infatti in tal caso la funzione integranda è asintotica a $1/\sqrt{L^2} \sim 1/s$ per $s \rightarrow -\infty$ e quindi l'integrale diverge. Avevamo già messo in luce che il potenziale, definito dall'equazione (3.7), diverge per moti limitati quindi il comportamento del campo non ci sorprende. D'altra parte, il campo ha solitamente un andamento più regolare del potenziale ad esso associato. Invece in $D = 3$ entrambi divergono per moti limitati.

Per ricavare l'espressione del campo originato da una carica in moto rettilineo uniforme possiamo partire dall'espressione (3.9) e calcolare le derivate oppure calcolare esplicitamente l'integrale in (3.21). Tale espressione risulta

$$F^{\mu\nu}(x) = \frac{e}{2\pi} \frac{x^\mu u^\nu - x^\nu u^\mu}{(x \cdot u)^2 - x^2}. \quad (3.23)$$

Componenti del tensore elettromagnetico. Le componenti del tensore antisimmetrico (3.21) corrispondono a

$$\begin{aligned} F^{i0} &= E^i, \\ F^{12} &= B, \end{aligned} \quad (3.24)$$

ove $i = 1, 2$. Tali identificazioni sono semplici da ricavare a partire dalle equazioni di Maxwell (2.1). Si noti che in $D = 3$ il campo magnetico è scalare.

4 Autoforza

In questo capitolo deriveremo in modo euristico un'espressione per l'equazione del moto di una carica considerando l'autointerazione. Richiederemo che l'equazione di "Lorentz-Dirac" derivata soddisfi le seguenti condizioni: invarianza relativistica, assenza di termini divergenti e consistenza con l'identità $u^\mu w_\mu = 0$. Inoltre dovremmo richiedere che l'equazione sia compatibile con la conservazione del quadrimomento totale, ma non ci occuperemo di questa richiesta.

4.1 Determinazione delle divergenze

In seguito dovremo limitarci al caso di moti illimitati della carica, essendo altrimenti divergente l'espressione del campo (3.21).

La procedura che seguiremo per ricavare l'espressione dell'autoforza prevede i seguenti passaggi. Innanzitutto dobbiamo considerare un'espressione "regolarizzata" del campo. Utilizzeremo l'espressione $F_\varepsilon^{\mu\nu}(x)$ definita dall'equazione (3.20). Successivamente valuteremo tale espressione sulla traiettoria della carica e determineremo la presenza di eventuali termini divergenti. Elimineremo tali termini ed eseguiremo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Infine, per valutare l'autoforza, si contrarrà l'espressione ottenuta con la velocità della carica. L'equazione di "Lorentz-Dirac" alla fine avrà la forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left((m + \Delta m_\varepsilon) w^\mu(\tau) - e F_\varepsilon^{\mu\nu}(y) u_\nu(\tau) - e F_{ext}^{\mu\nu}(y) u_\nu(\tau) \right) = 0, \quad (4.1)$$

ove Δm_ε è un termine che dipende da ε , necessario per eliminare eventuali divergenze, e $F_{ext}^{\mu\nu}$ è il campo elettromagnetico esterno agente sulla carica. Si noti che potremo eliminare solo termini divergenti proporzionali a $w^\mu(\tau)$.

Prima di procedere conviene riscrivere $F_\varepsilon^{\mu\nu}(x)$ in modo differente. Per fare ciò ripercorriamo al contrario i passaggi che hanno portato dalla (3.17) alla (3.20). In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned} F_\varepsilon^{\mu\nu}(x) &= \frac{-e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda_\varepsilon(x)} \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} ds + \frac{e}{2\pi} \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{\sqrt{L^2}(L \cdot u)} \Big|_{s=\lambda_\varepsilon(x)} \\ &\equiv G_\varepsilon^{\mu\nu}(x) + H_\varepsilon^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ovviamente vale il limite puntuale (per $x^\mu \neq y^\mu(\tau)$)

$$F^{\mu\nu}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon^{\mu\nu}(x). \quad (4.3)$$

Ora si deve valutare $F_\varepsilon^{\mu\nu}(x)$ su un punto della traiettoria $y^\mu(\tau)$.

$\mathbf{H}_\varepsilon^{\mu\nu}$. Iniziamo considerando il termine $H_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))$. L'estremo superiore di integrazione in (4.2) è ora definito da

$$(y(\tau) - y(\lambda_\varepsilon))^2 = \varepsilon^2 \quad \text{con} \quad y^0(\tau) - y^0(\lambda_\varepsilon) > 0, \quad (4.4)$$

che possiamo risolvere in modo perturbativo. Ponendo $\lambda_\varepsilon(\tau) = \tau + O(\varepsilon)$ ed espandendo la (4.4) in serie di potenze di ε si trova la soluzione $\lambda_\varepsilon(\tau) = \tau - \varepsilon + O(\varepsilon^3)$ (si ricordi che $\varepsilon > 0$).

Definiamo per τ fissato

$$K^\mu(s) \equiv L^\mu(y(\tau)) = y^\mu(\tau) - y^\mu(s). \quad (4.5)$$

Poiché vogliamo valutare $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))$, sviluppiamo in serie di ε i termini che compaiono nella definizione di $H_\varepsilon^{\mu\nu}$. Valgono i seguenti sviluppi:

$$K^\mu(\lambda_\varepsilon) = y^\mu(\tau) - y^\mu(\lambda_\varepsilon) = \varepsilon u^\mu(\tau) - \frac{\varepsilon^2}{2} w^\mu(\tau) + O(\varepsilon^3), \quad (4.6)$$

$$(K \cdot u)(\lambda_\varepsilon) = \varepsilon + O(\varepsilon^3), \quad (4.7)$$

$$u^\nu(\lambda_\varepsilon) = u^\nu(\tau) - \varepsilon w^\nu(\tau) + O(\varepsilon^2). \quad (4.8)$$

Sostituendo queste ultime espressioni in $H_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))$ otteniamo il risultato finito

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e}{2\pi} \frac{K^\mu(\lambda_\varepsilon)u^\nu(\lambda_\varepsilon) - (\mu \leftrightarrow \nu)}{\sqrt{K^2}(K \cdot u)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e}{2\pi} \frac{(\varepsilon u^\mu - \frac{\varepsilon^2}{2} w^\mu + O(\varepsilon^3))(u^\nu - \varepsilon w^\nu + O(\varepsilon^2)) - (\mu \leftrightarrow \nu)}{\varepsilon(\varepsilon + O(\varepsilon^2))} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e}{2\pi} \frac{\frac{\varepsilon^2}{2}(w^\mu u^\nu - w^\nu u^\mu) + O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)} \\ &= \frac{e}{4\pi} (w^\mu u^\nu - w^\nu u^\mu) \end{aligned} \quad (4.9)$$

ove nel secondo passaggio si è sfruttata la simmetria dei termini $u^\mu u^\nu$ e $w^\mu w^\nu$.

Il contributo di $H_\varepsilon^{\mu\nu}$ all'autoforza è quindi dato da

$$eH_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))u_\nu = \frac{e^2}{4\pi} w^\mu(\tau) + O(\varepsilon). \quad (4.10)$$

Questo termine è finito e dipende unicamente dall'istante τ e non dalla storia passata della particella.

$\mathbf{G}_\varepsilon^{\mu\nu}$. Occupiamoci ora del secondo termine $G_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))$ di (4.2). Conviene introdurre un parametro finito e positivo C , che ha le dimensioni di un tempo, e dividere l'integrale in due parti, per motivi che saranno chiari in seguito. C è arbitrario, ma fissato, e alla fine verificheremo se l'espressione ottenuta sia indipendente dalla particolare scelta effettuata per tale parametro. Si ha

$$G_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau)) = \frac{-e}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\lambda_\varepsilon(\tau)-C} + \int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} \right) \frac{K^\mu u^\nu - K^\nu u^\mu}{(K^2)^{\frac{3}{2}}} ds. \quad (4.11)$$

Questa operazione fa sì che il primo integrale converga nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Infatti in tale limite l'estremo superiore di integrazione tende a $\tau - C$. La funzione integranda non presenta singolarità tra $-\infty$ e $\tau - C$ ed è asintotica a $1/s^2$ per $s \rightarrow \infty$; quindi risulta integrabile. Il secondo integrale

è invece divergente nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ in quanto l'estremo superiore si riduce a τ e abbiamo già notato che costituisce una singolarità non integrabile.

Consideriamo di seguito solo il secondo integrale di (4.11), poiché il primo non diverge. Aggiungiamo e sottraiamo al secondo integrale uno stesso termine:

$$\frac{-e}{2\pi} \int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} ds \left(\frac{K^\mu u^\nu - K^\nu u^\mu}{(K^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{u^\mu(\tau)w^\nu(\tau) - u^\nu(\tau)w^\mu(\tau)}{2(\tau-s)} \right) \quad (4.12a)$$

$$+ \frac{e}{4\pi} (u^\mu(\tau)w^\nu(\tau) - u^\nu(\tau)w^\mu(\tau)) \int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} \frac{ds}{\tau-s}. \quad (4.12b)$$

Si noti che senza lo splitting effettuato in (4.11) l'estremo inferiore in (4.12a) sarebbe $-\infty$. In tal caso l'integrando aggiunto darebbe luogo ad un integrale divergente per $s \rightarrow -\infty$. Per evitare tale divergenza è essenziale che l'estremo inferiore $\lambda_\varepsilon(\tau) - C \rightarrow \tau - C$ sia finito.

Il termine (4.12a) risulta finito nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Per dimostrarlo ci basta provare che la funzione integranda sia integrabile qualora l'estremo superiore sia τ ($\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_\varepsilon(\tau) = \tau$) poiché in quello inferiore questo è ovvio. Nelle vicinanze di tale estremo, possiamo espandere in serie di Laurent la funzione integranda. Poniamo $s = \tau - \Delta$ con $\Delta \geq 0$ e $\Delta \rightarrow 0$. Sviluppamo $y^\mu(s)$ in serie di potenze di Δ attorno a τ ,

$$y^\mu(s) = y^\mu(\tau) - u^\mu(\tau)\Delta + w^\mu(\tau)\frac{\Delta^2}{2} + O(\Delta^3). \quad (4.13)$$

Ricordando la definizione (4.5) di $K^\mu(s)$ si ha che

$$K^2 = \Delta^2 + O(\Delta^4). \quad (4.14)$$

Riscriviamo l'integrando in (4.12a) utilizzando la (4.13) e la (4.14),

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{(u^\nu - w^\nu\Delta + O(\Delta^2))(u^\mu\Delta - w^\mu\frac{\Delta^2}{2} + O(\Delta^3)) - \mu \leftrightarrow \nu}{\Delta^3 + O(\Delta^6)} + \frac{u^\mu w^\nu - u^\nu w^\mu}{2\Delta + O(\Delta^2)} \right) \\ &= \left(\frac{(u^\nu w^\mu - u^\mu w^\nu) + O(\Delta)}{2\Delta + O(\Delta^4)} + \frac{(u^\mu w^\nu - u^\nu w^\mu)}{2\Delta + O(\Delta^2)} \right) = 1 + O(\Delta), \end{aligned} \quad (4.15)$$

ove u^μ e w^μ sono sempre valutati in τ . La funzione integranda è continua in $s = \tau$ e quindi l'integrale converge.

L'integrale (4.12b) diverge logicamente, infatti

$$\int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} \frac{1}{\tau-s} ds = \ln \left(\frac{\tau - \lambda_\varepsilon + C}{\tau - \lambda_\varepsilon} \right) = \ln \left(\frac{C}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \quad (4.16)$$

ove si è utilizzato il fatto che $\lambda_\varepsilon(x) = \tau - \varepsilon + O(\varepsilon^2)$.

Il contributo di $G_\varepsilon^{\mu\nu}$ all'autoforza è dato da

$$\begin{aligned}
eG_\varepsilon^{\mu\nu}(y(\tau))u_\nu &= \frac{-e^2}{2\pi} \left\{ u_\nu(\tau) \int_{-\infty}^{\lambda_\varepsilon(\tau)-C} \frac{K^\mu u^\nu - K^\nu u^\mu}{(K^2)^{\frac{3}{2}}} ds \right. \\
&\quad + \int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} \left(u_\nu(\tau) \frac{K^\mu u^\nu - K^\nu u^\mu}{(K^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{w^\mu(\tau)}{2(\tau-s)} \right) ds \\
&\quad \left. + \frac{w^\mu(\tau)}{2} \int_{\lambda_\varepsilon(\tau)-C}^{\lambda_\varepsilon(\tau)} \frac{ds}{\tau-s} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2 Equazione di Lorentz-Dirac in D=3

Inseriamo in (4.1) le espressioni (4.10) e (4.17) ed eseguiamo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$ nei termini finiti (tenendo conto della (4.16)),

$$\begin{aligned}
\left(m - \frac{e^2}{4\pi} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\Delta m_\varepsilon + \frac{e^2}{4\pi} \ln \frac{C}{\varepsilon} \right) \right) w^\mu(\tau) &= -\frac{e^2}{2\pi} u_\nu(\tau) \int_{-\infty}^{\tau-C} \frac{K^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} ds \\
&\quad - \frac{e^2}{2\pi} \int_{\tau-C}^{\tau} \left(u_\nu(\tau) \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{w^\mu(\tau)}{2(\tau-s)} \right) ds + eF_{ext}^{\mu\nu}(y)u_\nu(\tau).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

I due integrali sono convergenti. Il primo per quanto fatto notare dopo l'equazione (4.11) e il secondo per il calcolo fatto in (4.15).

Definendo $\Delta m_\varepsilon \equiv \frac{e^2}{4\pi} (1 - \ln \frac{C}{\varepsilon})$ si riesce ad eliminare il termine divergente. L'inclusione del termine finito $\frac{e^2}{4\pi}$ fa sì che m sia la massa fisica della carica.

Includiamo anche un termine finito perché la massa che compare nell'equazione deve essere la massa determinata sperimentalmente della particella e quindi tale termine può essere incluso all'interno di essa. Infine si ottiene l'espressione dell'equazione di "Lorentz-Dirac" in 2+1 dimensioni:

$$\begin{aligned}
mw^\mu(\tau) &= -\frac{e^2}{2\pi} u_\nu(\tau) \int_{-\infty}^{\tau-C} \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} ds - \frac{e^2}{2\pi} \int_{\tau-C}^{\tau} \left(u_\nu(\tau) \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{w^\mu(\tau)}{2(\tau-s)} \right) ds \\
&\quad + eF_{ext}^{\mu\nu}(y)u_\nu(\tau) \equiv f^\mu(\tau) + eF_{ext}^{\mu\nu}(y)u_\nu(\tau).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$f^\mu(\tau)$ rappresenta la forza di autointerazione finita della carica. La condizione di invarianza relativistica è soddisfatta perché tutte le quantità presenti trasformano come tensori sotto trasformazioni di Lorentz. Inoltre è banale verificare che contraendo ambo i membri dell'equazione con $u_\mu(\tau)$ si ottiene un'identità.

L'autoforza è nulla per una particella che si muove di moto rettilineo uniforme (quindi in assenza di campo esterno). Infatti, sostituita la legge oraria del moto in tale espressione si ha $L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu = 0$ e $w^\mu = 0$.

L'espressione dell'autoforza in 2+1 dimensioni è non locale nel senso che dipende da tutta la storia passata della particella, al contrario di quanto avviene in 3+1 dimensioni. Questa caratteristica dipende dalla particolare forma del campo elettromagnetico (3.21).

D'altra parte ci sono alcune osservazioni che devono essere fatte. Innanzitutto qual è la massa che compare nell'equazione? Nella definizione di Δm_ε avremmo potuto includere un arbitrario termine finito e quindi ottenere un'altra equazione. Tuttavia tale ridefinizione della massa equivale solo a una ridefinizione di C .

Per verificare se l'autoforza è indipendente dalla particolare scelta di C che viene effettuata, possiamo fissare due valori differenti di C , C_1 e C_2 , e calcolare la differenza tra le due autoforze. Dall'equazione (4.19) si ottiene facilmente $f_{C_1}^\mu - f_{C_2}^\mu = \frac{e^2}{4\pi} \ln(\frac{C_1}{C_2}) w^\mu$, che è non nullo. Quindi l'espressione dell'autoforza non è indipendente da C e ciò è ovvio perché anche Δm_ε dipende da C .

Si noti che se in Δm_ε non avessimo incluso il termine $-\frac{e^2}{4\pi} \ln(C)$, la risultante nuova autoforza $f^\mu(\tau)$ sarebbe stata indipendente da C . Tuttavia tale scelta è proibita per motivi dimensionali, infatti C non è adimensionale ($[C] = [l]$).

Alla fine abbiamo ottenuto un'equazione del moto integro-differenziale che dipende da una costante fisica C che deve essere determinata sperimentalmente. Tale costante ha le dimensioni di un tempo e la sua comparsa è dovuta alla divergenza logaritmica del campo in prossimità della traiettoria. Ricordiamo che in una teoria classica in $D = 3$ non è possibile ottenere alcuna costante che abbia le dimensioni di un tempo a partire dalla velocità della luce c , dalla massa m e dalla carica e della particella. A questo proposito si noti che in $D = 3$ $[m] = [e^2]$ (si può vedere a partire dalla (4.18) o dalla (3.11)). Per ottenere una costante con le dimensioni di un tempo è necessario considerare una teoria quantistica nella quale è presente la costante di Planck h . Infatti ora si può definire la lunghezza d'onda Compton $\lambda_C = \frac{h}{mc}$ e, dividendola per la velocità della luce, si ottiene una costante con le dimensioni di un tempo.

È da notare che le espressioni dell'autoforza in $D = 3$ proposte in letteratura (si vedano [6, 7, 8]) non presentano alcuna costante arbitraria. D'altra parte, non è difficile mostrare che tali espressioni non sono ben definite proprio perché non è stata introdotto nessun "cut-off" C nell'integrale (4.11).

Infine notiamo esplicitamente che l'espressione (4.19) è stata ricavata con un ragionamento euristico e quindi non è ovvio che sia corretta. La correttezza di questa espressione può essere provata solo verificando la conservazione del tensore energia-impulso.

Espansione non relativistica dell'autoforza Possiamo scrivere l'espressione non relativistica dell'equazione (4.19). Per ricavarla non si deve fare altro che esplicitare i termini che compaiono nella (4.19) e trascurare le potenze maggiori in $1/c$. Di seguito p indicherà il "tempo" ($ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2(p)}{c^2}} dp$) e t sarà l'istante in cui valutiamo l'autoforza. Il calcolo per ricavare l'espressione non relativistica dell'autoforza non presenta particolari difficoltà ed è riportato in appendice C. Alla fine risulta

$$ma^i(t) = -\frac{e^2}{4\pi c^2} \left\{ \int_{-\infty}^{t-C} \frac{a^i(p)}{(t-p)} dp - \int_{t-C}^t \frac{a^i(t) - a^i(p)}{(t-p)} dp + \frac{a^i(t)}{2} \right\}. \quad (4.20)$$

5 Andamento asintotico del campo

In questo capitolo ricaveremo la forma dei campi elettrico e magnetico nel limite di grandi distanze dalla carica che li origina; in particolare ricaveremo il limite non relativistico di tali campi. L'andamento asintotico del campo a grandi distanze dalla carica è importante per il fenomeno dell'irraggiamento. Come abbiamo già anticipato, in $D = 3$ contribuiscono all'irraggiamento solo i termini del campo che decrescono all'infinito esattamente come $1/\sqrt{r}$. Nella prossima sezione vedremo che solo il campo di accelerazione ha tale andamento asintotico. Di seguito reintrodurremo la velocità della luce nelle equazioni.

5.1 Andamento a grandi distanze

Procederemo nel seguente modo. Per prima cosa esplicheremo i termini presenti nell'espressione del campo (3.21) in funzione del "tempo", successivamente eseguiremo il limite per grandi distanze dalla carica e alla fine il limite non relativistico delle espressioni ottenute. Saremo interessati all'andamento leading del campo e quindi terremo i termini che contengono le potenze più basse in $1/r$ e $1/c$.

Per scrivere gli andamenti asintotici ci serviranno alcuni risultati preliminari. Innanzitutto sostituiamo il tempo proprio s con il "tempo" p grazie alla relazione $ds = \frac{c}{\gamma} dp = c\sqrt{1 - \frac{v^2(p)}{c^2}} dp$ e quindi la traiettoria della carica è ora parametrizzata dal tempo. Valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned}
 u^\mu &= \gamma\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right), \\
 w^\mu &= \frac{\gamma^2}{c^2}(0, \vec{a}) + \frac{\gamma^3}{c^3}(\vec{v} \cdot \vec{a})u^\mu, \\
 L^\mu &= (c(t - p), \vec{R}), \\
 (L \cdot u) &= \gamma(c(t - p) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}), \\
 (L \cdot w) &= -\frac{\gamma^2}{c^2}(\vec{R} \cdot \vec{a}) + \frac{\gamma^4}{c^3}(\vec{v} \cdot \vec{a})(c(t - p) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}), \\
 \vec{R} &\equiv \vec{x} - \vec{y}(p).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Supponiamo che il moto della carica sia illimitato come al solito ma, per semplicità, supponiamo inoltre che la carica sia accelerata solo all'interno di una regione limitata contenuta in una circonferenza di raggio l . Questa assunzione facilita il limite per grandi distanze come sarà chiaro in seguito. D'altra parte il moto della carica non è limitato per $t \rightarrow \pm\infty$, ma è rettilineo uniforme in tale limite.

Risolviamo l'equazione (3.4) in λ nel limite di grandi distanze. Questa equazione diviene $c^2(t - \lambda)^2 = |\vec{x} - \vec{y}(\lambda)|^2$, con la condizione $\lambda < t$. Poiché siamo interessati al limite $r \equiv |\vec{x}| \gg l$,

si ha

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{y}(\lambda)| &= r \sqrt{1 - 2 \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{r^2} + \frac{|\vec{y}|^2}{r^2}} \\ &= r \left(1 - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) = r - \vec{n} \cdot \vec{y} + O\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

ove abbiamo definito $n^i \equiv \frac{x^i}{r}$. La soluzione è il tempo ritardato $\tilde{\lambda} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}$. Nel limite non relativistico il termine $\frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}$ è trascurabile e quindi il tempo ritardato diviene $\lambda(x) = t - \frac{r}{c}$.

Svolgeremo in dettaglio solo il caso del campo elettrico essendo quello del campo magnetico simile.

Campo elettrico di velocità. Le componenti del campo elettrico sono date da $E^i = F^{i0}$, $i = 1, 2$ (si ricordino le (3.24)). Sostituendo le (5.1) nella parte del campo (3.21) di velocità, otteniamo

$$\begin{aligned} E_v^i(x) &= \frac{ec}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda(x)} \frac{R^i - (t-p)v^i}{\gamma^2 \sqrt{c^2(t-p)^2 - R^2} (c(t-p) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c})^2} dp \\ &= \frac{ec}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{x^i - y^i(\alpha + \lambda(x)) - (t - \lambda(x) - \alpha)v^i}{\gamma^2 \sqrt{c^2(t - \lambda(x) - \alpha)^2 - R^2} (c(t - \lambda(x) - \alpha) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c})^2} d\alpha, \end{aligned} \quad (5.3)$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo cambiato variabile di integrazione in $\alpha = p - \lambda(x)$. Nel limite di grandi distanze si ha $\lambda(x) \rightarrow t - \frac{r}{c}$ e $R \rightarrow r$ e quindi

$$E_v^i(x) = \frac{ec}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{x^i - (\frac{r}{c} - \alpha)v^i}{\gamma^2 \sqrt{c^2\alpha^2 - 2c\alpha} (r - c\alpha - \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{c})^2} d\alpha. \quad (5.4)$$

Per studiare l'andamento del campo isoliamo la dipendenza da r . r è ora fissato, perciò possiamo eseguire il cambio di variabile $q = \frac{c\alpha}{r}$,

$$E_v^i(x) = \frac{e}{2\pi} \frac{1}{r} \int_{-\infty}^0 \frac{n^i - (1-q)\frac{v^i}{c}}{\gamma^2 \sqrt{q^2 - 2q} (1-q - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c})^2} dq. \quad (5.5)$$

Eseguiamo il limite non relativistico $c \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} E_v^i(x) &= \frac{e}{2\pi} \frac{n^i}{r} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{q^2 - 2q} (1-q)^2} dq \\ &= \frac{e}{2\pi} \frac{n^i}{r}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

che è l'espressione del campo (3.12) originato da una carica statica. Notiamo che tale campo è non nullo nel limite non relativistico poiché non contiene alcuna potenza di c , come deve essere.

Il campo elettrico di velocità è asintotico a $1/r$ per $r \rightarrow \infty$ e dunque non contribuisce all'irraggiamento. Infatti il quadrimomento emesso da una carica interagente con il campo elettromagnetico è dato in $D = 3$ da

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} r \int T_{em}^{\mu i} n^i d\theta, \quad (5.7)$$

ove $T_{em}^{\mu i} \propto E^2$ indica il tensore energia-impulso del campo elettromagnetico (definito da (2.2)).

Campo elettrico di accelerazione. Sostituendo le (5.1) nella parte del campo (3.21) che contiene l'accelerazione, si ottiene

$$E_a^i(x) = \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda(x)} \frac{(\vec{R} \cdot \vec{a})R^i - c^2(t-p)^2 a^i + (t-p)[(\vec{R} \cdot \vec{v})a^i - (\vec{R} \cdot \vec{a})v^i]}{c\sqrt{c^2(t-p)^2 - R^2} \left(c(t-p) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2} dp. \quad (5.8)$$

Eseguiamo ora il limite per grandi distanze. Innanzitutto utilizziamo le medesime identificazioni già usate in precedenza $\lambda(x) \rightarrow t - \frac{r}{c}$ e $R \rightarrow r$,

$$\begin{aligned} E_a^i(x) &= \frac{e}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{a})r^i - c^2(t-p)^2 a^i + (t-p)[(\vec{r} \cdot \vec{v})a^i - (\vec{r} \cdot \vec{a})v^i]}{c\sqrt{c^2(t-p)^2 - r^2} \left(c(t-p) - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2} dp \\ &= \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}} \sqrt{r}} \int_{-\infty}^0 \frac{(\vec{n} \cdot \vec{a})n^i - \left(\frac{qc}{r} - 1\right)^2 a^i + \left(\frac{1}{c} - \frac{q}{r}\right)[(\vec{n} \cdot \vec{v})a^i - (\vec{n} \cdot \vec{a})v^i]}{\sqrt{-q} \sqrt{2 - \frac{qc}{r} \left(1 - \frac{qc}{r} - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}\right)^2}} dq, \end{aligned} \quad (5.9)$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $q = p - (t - \frac{r}{c})$. Abbiamo messo in evidenza le potenze di r perché ciò facilita la valutazione dell'andamento leading di $E_a^i(x)$ per $r \rightarrow \infty$. Dopo aver eliminato i termini che non contribuiscono all'andamento leading possiamo fare il limite non relativistico $c \rightarrow \infty$ e ottenere infine

$$E_a^i(x) = \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}} \sqrt{r}} \left(n^i n^j - \delta^{ij}\right) \int_{-\infty}^0 \frac{a^j(q + t - \frac{r}{c})}{\sqrt{-2q}} dq. \quad (5.10)$$

Nel limite $r \rightarrow \infty$ il campo elettrico di accelerazione è quindi asintotico a $1/\sqrt{r}$ e dunque contribuisce all'irraggiamento per la (5.7). Notiamo che il campo elettrico di accelerazione è proporzionale a $1/c^{\frac{3}{2}}$ e quindi è un effetto relativistico (come in $D = 4$).

Campi magnetici. In $D = 3$ il campo magnetico è un campo scalare e la sua unica componente è data da $B = F^{12}$ (si ricordino le (3.24)). Utilizzando i cambiamenti di variabile e i medesimi ragionamenti usati in precedenza, non è difficile mostrare che i campi magnetici di velocità e di accelerazione si possono scrivere rispettivamente come

$$B_v(x) = \frac{e}{2\pi c} \frac{\varepsilon^{ij} n^i}{r} \int_{-\infty}^0 \frac{v^j(q \frac{r}{c} + t - \frac{r}{c})}{\sqrt{q^2 - 2q} (1-q)^2} dq, \quad (5.11)$$

$$B_a(x) = \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}} \sqrt{r}} \int_{-\infty}^0 \frac{a^j(q + t - \frac{r}{c})}{\sqrt{-2q}} dq. \quad (5.12)$$

Notiamo che i campi magnetici si annullano nel limite non relativistico.

Le espressioni ricavate per i campi a grandi distanze dalla carica sono per molti versi simili a quelle che si ricavano in $D = 4$, se non fosse che sono integrali. Infatti non è difficile mostrare che il campo elettrico di accelerazione (5.10) e il campo magnetico di accelerazione (5.12) hanno lo stesso modulo,

$$|\vec{E}_a| = |B_a|, \quad (5.13)$$

in quanto $(n^i n^j - \delta^{ij}) a^i a^j = (\varepsilon^{ij} n^i a^j)^2$. Inoltre il campo elettrico di accelerazione è ortogonale alla direzione di osservazione \vec{n} ,

$$\vec{E}_a \cdot \vec{n} = 0, \quad (5.14)$$

poiché $n^i (n^i n^j - \delta^{ij}) = 0$. Invece il campo elettrico di velocità è parallelo a \vec{n} .

Infine scriviamo l'espressione del vettore di Poynting in $D = 3$,

$$\begin{aligned} S^i &= T_{em}^{0i} = F^{00} F_0^i + F^{0j} F_j^i = \varepsilon^{ij} E_a^j B_a = n^i E_a^2 \\ &= \frac{e^2}{8\pi^2 c^3} \frac{n^i}{r} (\delta^{jk} - n^j n^k) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{a^j(q+t-\frac{r}{c}) a^k(q+t-\frac{r}{c})}{\sqrt{-q} \sqrt{-q'}} dq dq', \end{aligned} \quad (5.15)$$

ove abbiamo sfruttato la definizione (2.2) di $T_{em}^{\mu\nu}$, le (3.24) e le espressioni (5.10) e (5.12).

La potenza totale emessa è data dal flusso del vettore di Poynting attraverso una circonferenza di raggio r ,

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int E_a^2 r d\theta = \frac{e^2}{8\pi c^2} \left| \int_{-\infty}^0 \frac{\vec{a}(q+t-\frac{r}{c})}{\sqrt{-q}} dq \right|^2, \quad (5.16)$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che $\int (\delta^{jk} - n^j n^k) d\theta = \pi \delta^{jk}$. Si noti che questa espressione ha una forma simile alla formula di Larmor in $D = 4$, ma vi sono due differenze. La prima è che l'espressione (5.16) contiene l'integrale dell'accelerazione su tutta la storia passata, questo fatto ha conseguenze notevoli come vedremo nella prossima sezione. La seconda è la presenza del fattore $1/c^2$, che in $D = 4$ è $1/c^3$, dovuta a questioni dimensionali.

5.2 Un esempio notevole

Abbiamo ora a disposizione gli strumenti adatti per comprendere meglio l'esperimento della lampadina di cui si è parlato nel capitolo 2. In particolare evidenzieremo le differenze tra i casi $D = 3$ e $D = 4$. Consideriamo una carica non relativistica che viene accelerata solo per un tempo finito tra gli istanti $t = 0$ e $t = T$ ($T \geq 0$). In queste condizioni la carica è accelerata all'interno di una regione limitata contenuta in una circonferenza di raggio l . Ci limitiamo a considerare il campo a grandi distanze dalla carica, ovvero per $r \gg l$, e conseguentemente dominano i campi di accelerazione (5.10) e (5.12). Con le assunzioni fatte, vale $\frac{l}{c} \ll T$.

In una posizione $r \gg l$ e ad un istante t il campo è quindi non nullo solo per $t > \frac{r}{c}$ (r/c è il tempo necessario alla luce per raggiungere la nostra posizione partendo dall'origine). Fissiamo la posizione r e studiamo cosa succede al variare di t . Dobbiamo distinguere due casi: $\frac{r}{c} < t < \frac{r}{c} + T$ e $t > \frac{r}{c} + T$.

Nel primo caso ($t < \frac{r}{c} + T$) l'espressione del campo (5.10) diviene

$$E_1^i(t, \vec{r}) = \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{r}} (n^i n^j - \delta^{ij}) \int_0^{t-\frac{r}{c}} \frac{a^j(p)}{\sqrt{2(t-\frac{r}{c}-p)}} dp. \quad (5.17)$$

Nel caso particolare in cui l'accelerazione sia costante, questo campo diviene

$$E_1^i(t, \vec{r}) = \frac{e}{\sqrt{2}\pi c^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{r}} (n^i n^j - \delta^{ij}) a^j \sqrt{t - \frac{r}{c}}. \quad (5.18)$$

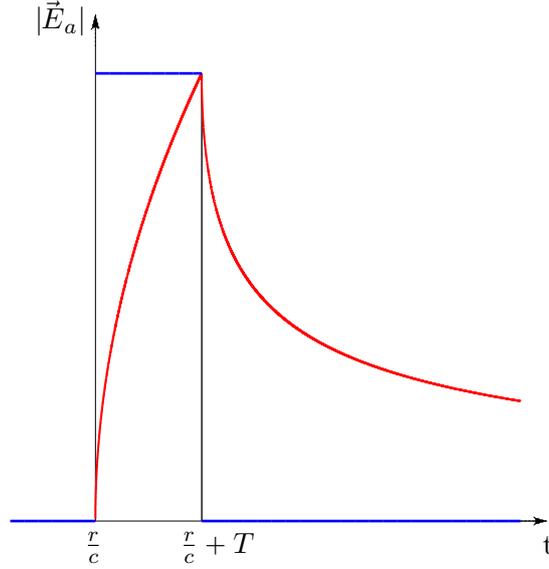


Figura 1: *Andamento dell'ampiezza del campo elettrico in r in funzione del tempo.* In rosso è rappresentato il caso $D = 3$, in blu l'analogo in $D = 4$.

Il campo è nullo per $t = \frac{r}{c}$ e poi cresce fino a raggiungere il valore massimo per $t = T + \frac{r}{c}$. Questo perché a $t = \frac{r}{c}$ riceviamo il primo segnale dalla carica e, poiché il campo dipende dalla storia passata, aumenta di ampiezza perché la carica continua ad essere accelerata. In $D = 4$ non viene misurato alcun incremento di ampiezza perché il campo elettrico in (t, r) dipende solo dall'accelerazione che la carica possiede al tempo $t - \frac{r}{c}$; se l'accelerazione è costante anche il modulo del campo elettrico è quindi costante.

Nel secondo caso ($t > \frac{r}{c} + T$) invece si ha

$$E_2^i(t, \vec{r}) = \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(n^i n^j - \delta^{ij} \right) \int_0^T \frac{a^j(p)}{\sqrt{2(t - \frac{r}{c} - p)}} dp. \quad (5.19)$$

Se vogliamo studiare l'andamento del campo per $t \rightarrow \infty$ a r fissato in generale, possiamo trascurare la dipendenza da p nella radice della funzione integranda in (5.19) in quanto $0 < p < T$. Otteniamo quindi un'espressione valida per $t \rightarrow \infty$ per il campo di accelerazione

$$E_2^i(t, \vec{r}) = \frac{e}{2\pi c^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(n^i n^j - \delta^{ij} \right) \frac{1}{\sqrt{2(t - \frac{r}{c})}} \left(v^j(T) - v^j(0) \right). \quad (5.20)$$

Dunque è evidente che non vediamo mai il campo annullarsi del tutto, ma tendere a zero come $1/\sqrt{t}$. Al contrario in $D = 4$ il campo è identicamente nullo per $t > T + \frac{r}{c}$.

Se l'accelerazione è costante, l'espressione (5.19) diviene

$$E_2^i(t, \vec{r}) = \frac{e}{\sqrt{2\pi c^{\frac{3}{2}}}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(n^i n^j - \delta^{ij} \right) a^j \left(\sqrt{t - \frac{r}{c}} - \sqrt{t - \frac{r}{c} - T} \right). \quad (5.21)$$

L'andamento del campo elettrico nel caso l'accelerazione sia costante è rappresentato in figura 1.

L'andamento dell'ampiezza del campo \vec{E}_2 (5.20) come $1/\sqrt{t}$ per $t \rightarrow \infty$ ha una conseguenza notevole: l'energia totale emessa su unità di angolo $\frac{d\mathcal{E}}{d\theta}$ da una carica, accelerata per un tempo finito, è infinita. Infatti dalla (5.16) si ottiene

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\theta} = r \int |\vec{E}_a|^2 dt \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \infty. \quad (5.22)$$

Concludiamo quindi che è sufficiente che la carica sia accelerata per un tempo arbitrariamente breve affinché l'energia emessa sia infinita.

Questo fatto mette in dubbio l'esistenza di una formulazione consistente dell'elettrodinamica classica in $D = 3$.

Una spiegazione possibile (non una soluzione) è che l'energia totale del campo è infinita. Infatti

$$\mathcal{E}_{tot} = \int T_{em}^{00} d^2x = \frac{1}{2} \int (E^2 + B^2) d^2x \propto \int_0^\infty \left(\frac{1}{r}\right)^2 r dr = \infty, \quad (5.23)$$

ove si è sfruttato l'andamento del campo (3.23). \mathcal{E}_{tot} presenta divergenze ultraviolette e infrarosse. Quelle ultraviolette possono essere curate con un approccio del tipo [10]; invece quelle infrarosse costituiscono un problema aperto. Visto che alla diminuzione della dimensione i problemi infrarossi peggiorano è possibile che la dinamica delle cariche interagenti in $D = 3$ non possa essere formulata in modo consistente.

Se questo è vero, le cariche massive in $D = 3$ sono confinate, ovvero non esistono cariche libere. Tale eventualità è supportata dalle teorie di campo quantistiche relativistiche (si veda [11]).

6 Commenti finali

Una delle motivazioni alla base del presente lavoro è il fatto che l'elettrodinamica in $D = 3$ è una teoria poco studiata in letteratura e che presenta ancora diversi aspetti fondamentali non chiariti. Infatti il presente lavoro ha affrontato alcuni aspetti della teoria, ma ha lasciato senza risposta molti interrogativi interessanti. Di seguito riassumeremo le peculiarità descritte nel corso dei capitoli, le difficoltà incontrate e possibili questioni che meritano di essere studiate.

La più importante peculiarità di $D = 3$ è il fatto che il campo elettromagnetico in una posizione a un dato istante dipende da tutta la traiettoria percorsa dalla carica fino a quell'istante (si ricordi l'espressione della funzione di Green (3.2)). Tale caratteristica, condivisa con gli altri spazi di dimensione dispari, fa sì che l'equazione (4.19) descrivente l'autointerazione di una carica sia integro-differenziale, aspetto che complica notevolmente la sua soluzione.

La seconda peculiarità è il fatto che il metodo della funzione di Green fallisce nel risolvere le equazioni di Maxwell (2.1) a causa delle divergenze infrarosse coinvolte. Infatti siamo stati costretti a “correggere” l'espressione del potenziale (3.3) ricavata in maniera formale.

La terza peculiarità, incontrata nel capitolo 3, riguarda il fatto che le espressioni per il potenziale (3.7) e per il campo elettromagnetico (3.21) hanno senso solo per moti della carica illimitati. Un problema interessante ancora da affrontare è cercare di capire se esistano soluzioni delle equazioni di Maxwell per moti limitati oppure se tali moti non siano ammessi in $D = 3$.

La quarta peculiarità, incontrata nel capitolo 3, riguarda l'interazione tra due cariche. Infatti due cariche di segno opposto sono sempre “confinare”, invece due cariche dello stesso segno risentono di un'accelerazione così intensa in ogni istante che porta le due cariche ad allontanarsi a velocità relativistiche. Tale peculiarità è davvero curiosa: infatti due cariche “confinare” compiono un moto limitato, ma in tal caso le espressioni del potenziale e del campo ricavate non hanno senso. Un problema ancora da risolvere è dunque la forma del campo originato da due cariche “confinare”.

Un'ulteriore peculiarità è la presenza della costante C nell'equazione di “Lorentz-Dirac” (4.19) che ha le dimensioni di un tempo. Tale costante è caratteristica di $D = 3$ perché è dovuta alla divergenza logaritmica del campo in prossimità della traiettoria della carica. Ricordiamo che la nostra derivazione dell'equazione è euristica perché non si fonda sulla conservazione del tensore energia-impulso tuttavia, per gli argomenti esposti alla fine della sezione 4.2, un'eventuale equazione ricavata a partire dalla conservazione del tensore energia-impulso dovrà contenere la medesima costante C . Il ruolo svolto da tale costante in $D = 3$ è una questione ancora da indagare.

L'ultima peculiarità incontrata riguarda l'energia emessa da una carica accelerata per un tempo finito. Nella sezione 5.2 abbiamo notato che misuriamo (a grandi distanze dalla carica) un flusso di energia emessa non nullo anche per $t \rightarrow \infty$. Inoltre l'energia totale irradiata risulta

infinita nel limite non relativistico (e quindi a maggior ragione nel limite relativistico) sebbene la potenza istantanea emessa sia finita. Tale fatto dipende dal particolare andamento asintotico del campo elettromagnetico per grandi distanze. Il fatto che l'energia emessa sia infinita, anche se la carica viene accelerata per un tempo molto breve, segnala ovviamente una possibile inconsistenza interna dell'elettrodinamica classica in $D = 3$. Tuttavia, prima di poter trarre conclusioni in questo senso occorre analizzare in maniera rigorosa la possibile conservazione del quadrimomento totale attraverso la costruzione di un tensore energia-impulso ben definito, ovvero privo di singolarità infrarosse e ultraviolette, e eventualmente compatibile con l'equazione (4.19).

Le peculiarità incontrate dipendono sostanzialmente da due fatti. Il primo è che $D = 3$ è uno spazio dispari, il secondo è che il potenziale elettrostatico ha un andamento logaritmico. La concomitanza in $D = 3$ di questi due fatti dà origine ad una teoria davvero interessante che merita senza dubbio di essere studiata ulteriormente per essere compresa più a fondo.

A Soluzione delle equazioni di Maxwell

Di seguito dimostreremo che il potenziale $A^\mu(x)$ definito dall'equazione (3.7) è una distribuzione e che risolve l'equazione (2.3).

Nel risolvere l'equazione (2.3) utilizzando il metodo della funzione di Green si deve calcolare la convoluzione tra due distribuzioni che in generale non è definita. Affinché la convoluzione sia definita è necessario richiedere che una delle due distribuzioni sia a supporto compatto. Definiamo quindi $j_\Lambda^\mu = e \int_{-\Lambda}^{\Lambda} u^\mu(s) \delta(x - y(s)) ds$. Il potenziale originato da questa corrente è

$$\tilde{A}_\Lambda^\mu = G * j_\Lambda^\mu. \quad (\text{A.1})$$

Indicando con \sim la trasformata di Fourier e con $\overset{\sim}{\sim}$ l'antitrasformata, possiamo scrivere

$$\tilde{A}_\Lambda^\mu = \widehat{\tilde{G}} \cdot \widehat{j_\Lambda^\mu}. \quad (\text{A.2})$$

Per il teorema di Paley-Wiener, $\widehat{j_\Lambda^\mu} \in \Theta_M$ in quanto $j_\Lambda^\mu \in \mathcal{S}'$ è a supporto compatto. Ora il prodotto tra $\widehat{G} \in \mathcal{S}'$ e $\widehat{j_\Lambda^\mu} \in \Theta_M$ è ben definito e $\widehat{G} \cdot \widehat{j_\Lambda^\mu} \in \mathcal{S}'$. L'antitrasformata è un isomorfismo da \mathcal{S}' in sé e quindi $\tilde{A}_\Lambda^\mu \in \mathcal{S}'$.

Il potenziale \tilde{A}_Λ^μ soddisfa l'equazione

$$\square \tilde{A}_\Lambda^\mu = \square(G * j_\Lambda^\mu) = (\square G) * j_\Lambda^\mu = j_\Lambda^\mu, \quad (\text{A.3})$$

ove si è sfruttato una proprietà delle derivate distribuzionali che agiscono su una convoluzione. Prima di eseguire il limite per $\Lambda \rightarrow \infty$, dobbiamo definire

$$A_\Lambda^\mu = \tilde{A}_\Lambda^\mu - \frac{e}{2\pi} u_\infty^\mu \ln\left(\frac{\Lambda}{l}\right) \quad (\text{A.4})$$

altrimenti questo limite non risulterebbe finito (si ricordi il ragionamento che ha portato all'equazione (3.7)). A_Λ^μ soddisfa ancora l'equazione (A.3) e, prendendo il limite $\Lambda \rightarrow \infty$ di ambo i membri dell'equazione, si ha

$$\begin{aligned} \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} \square A_\Lambda^\mu &= \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} j_\Lambda^\mu \\ \square A^\mu &= j^\mu, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

ove A^μ e j^μ sono definiti rispettivamente dalle equazioni (3.7) e (3.1). Abbiamo sfruttato il fatto che i limiti distribuzionali commutano con le derivate e la dimostrazione riportata nell'appendice B. Tale dimostrazione implica che $\text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \infty} A_\Lambda^\mu = A^\mu$.

Quindi A^μ soddisfa l'equazione di Maxwell.

B Un limite distribuzionale

In questa sezione mostreremo che nel caso del moto rettilineo uniforme il limite puntuale in (3.7) vale anche nel senso delle distribuzioni. Per fare ciò dobbiamo provare che

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int A_{\Lambda}^{\mu}(x) \varphi(x) d^3x = \int A^{\mu}(x) \varphi(x) d^3x. \quad (\text{B.1})$$

Per il principio di relatività, possiamo limitarci a considerare una particella statica. Riscriviamo l'espressione (3.7) per una particella statica con $u^{\mu} = (1, 0, 0)$ e $x^{\mu} = (t, \vec{r})$,

$$\begin{aligned} A_{\Lambda}^{\mu}(x) &= \frac{-eu^{\mu}}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{r}{\Lambda + t + \sqrt{(t + \Lambda)^2 - r^2}} \right) + \ln \left(\frac{\Lambda}{l} \right) \right\} \\ &= \frac{eu^{\mu}}{2\pi} \left\{ \ln \left(\frac{\Lambda + t + \sqrt{(t + \Lambda)^2 - r^2}}{\Lambda} \right) + \ln \left(\frac{l}{r} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ove abbiamo sottinteso la funzione di Heaviside $\theta(t - r + \Lambda)$, per cui richiediamo che valga $t + \Lambda > r$.

Vogliamo provare che il limite puntuale

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int A_{\Lambda}^{\mu}(x) \varphi(x) d^3x, \quad (\text{B.3})$$

ove $\varphi \in \mathcal{S}$, può essere portato sotto il segno di integrale. Per fare questo dobbiamo trovare una maggiorante uniforme in Λ per $|A_{\Lambda}^{\mu} \varphi(x)|$ appartenente a $L^1(\mathbb{R}^3)$. Definiamo

$$\alpha = \frac{t + \Lambda}{\Lambda} + \sqrt{\left(\frac{t + \Lambda}{\Lambda} \right)^2 - \frac{r^2}{\Lambda^2}}, \quad (\text{B.4})$$

quindi $A_{\Lambda}^{\mu}(x) = \frac{eu^{\mu}}{2\pi} \{ \ln \alpha + \ln \frac{l}{r} \}$.

Occupiamoci del primo logaritmo in (B.2), sfruttiamo il fatto che $|\ln \alpha| \leq \alpha + \frac{1}{\alpha}$ (α è positivo per definizione). Supponendo $\Lambda > 1$ si ha

$$|\alpha| \leq 2 \left| 1 + \frac{t}{\Lambda} \right| \leq 2(1 + |t|). \quad (\text{B.5})$$

Inoltre, sfruttando il fatto che $t + \Lambda > 0$ (per la condizione $t + \Lambda > r$), si ha

$$\left| \frac{1}{\alpha} \right| \leq \frac{\Lambda}{t + \Lambda} = \theta(t) \frac{\Lambda}{t + \Lambda} + \theta(-t) \left(1 + \frac{|t|}{\Lambda - |t|} \right) \leq \theta(t) + \theta(-t) \left(1 + \frac{|t|}{r} \right) \leq 2 + \frac{|t|}{r}. \quad (\text{B.6})$$

Quindi

$$|A_{\Lambda}^{\mu} \varphi(x)| \leq \left(2(1 + |t|) + 2 + \frac{|t|}{r} + \left| \ln \frac{l}{r} \right| \right) |\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}^3). \quad (\text{B.7})$$

Infatti sia $\frac{1}{r}$ che $\ln r$ sono integrabili in \mathbb{R}^2 per $r \rightarrow 0$ in quanto l'elemento di volume vale $r dr d\theta$. Per $t \rightarrow \infty$ oppure $r \rightarrow \infty$ la maggiorante sta in $L^1(\mathbb{R}^3)$ grazie alle proprietà delle funzioni di prova (svaniscono all'infinito più rapidamente dell'inverso di qualsiasi polinomio).

C Espansione non relativistica dell'autoforza

In questa sezione ricaveremo l'espansione non relativistica (4.20) dell'autoforza

$$f^\mu(\tau) = -\frac{e^2}{2\pi} u_\nu(\tau) \int_{-\infty}^{\tau-C} \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} ds - \frac{e^2}{2\pi} \int_{\tau-C}^{\tau} \left(u_\nu(\tau) \frac{L^\mu u^\nu - L^\nu u^\mu}{(L^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{w^\mu(\tau)}{2(\tau-s)} \right) ds. \quad (\text{C.1})$$

In seguito reintrodurremo la velocità della luce e scriveremo la dipendenza dal tempo in pedice per maggior chiarezza. Scriviamo esplicitamente il primo termine della (C.1) usando le (5.1) e la stessa notazione usata in quel caso. Le coordinate spaziali ($\mu = i$) risultano

$$-\frac{e^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-C} \frac{(y_t^i - y_p^i) \left(1 - \frac{v_t^i v_p^j}{c^2}\right) - v_p^i \left((t-p) - (y_t^j - y_p^j) \frac{v_t^j}{c^2}\right)}{c^2 \left((t-p)^2 - \frac{(\tilde{y}_t - \tilde{y}_p)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \gamma dp, \quad (\text{C.2})$$

ove t è il tempo corrispondente al tempo proprio τ . Nel limite non relativistico $c \rightarrow \infty$ l'espressione precedente diviene

$$\begin{aligned} &= -\frac{e^2}{2\pi c^2} \int_{-\infty}^{t-C} \frac{(y_t^i - y_p^i) - v_p^i (t-p)}{(t-p)^3} dp \\ &= -\frac{e^2}{2\pi c^2} \left(\frac{(y_t^i - y_p^i) - v_p^i (t-p)}{2(t-p)^2} \Big|_{-\infty}^{t-C} + \int_{-\infty}^{t-C} \frac{a_p^i}{2(t-p)} dp \right), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

ove si è eseguita un'integrazione per parti sfruttando il fatto che $\frac{1}{(t-p)^3} = \frac{d}{dp} \frac{1}{2(t-p)^2}$.

Consideriamo ora il secondo termine della (C.1). Utilizzando gli stessi ragionamenti appena usati, tale termine risulta

$$= -\frac{e^2}{2\pi c^2} \left(\frac{(y_t^i - y_p^i) - v_p^i (t-p)}{2(t-p)^2} \Big|_{t-C}^t + \int_{t-C}^t \frac{a_p^i - a_t^i}{2(t-p)} dp \right). \quad (\text{C.4})$$

Infine sommando (C.3) e (C.4) si ottiene

$$f^i(t) = -\frac{e^2}{4\pi c^2} \left(\frac{(y_t^i - y_p^i) - v_p^i (t-p)}{(t-p)^2} \Big|_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^{t-C} \frac{a_p^i}{(t-p)} dp - \int_{t-C}^t \frac{a_t^i - a_p^i}{(t-p)} dp \right) \quad (\text{C.5})$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi c^2} \left(\frac{a_t^i}{2} + \int_{-\infty}^{t-C} \frac{a_p^i}{(t-p)} dp - \int_{t-C}^t \frac{a_t^i - a_p^i}{(t-p)} dp \right), \quad (\text{C.6})$$

ove si è sfruttato il fatto che

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(y_t^i - y_p^i) - v_p^i (t-p)}{(t-p)^2} \Big|_{-\infty}^{t-\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(v_t^i \delta - a_t^i \frac{\delta^2}{2} + O(\delta^3)) - (v_t^i - a_t^i \delta + O(\delta^2)) \delta}{\delta^2} = \frac{a_t^i}{2}. \quad (\text{C.7})$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Y. Yaremko, *Renormalization and radiation reaction in 2+1 electrodynamics*, Journal of Physical Studies **15** (2011) 1003.
- [2] C. Bunster, C. Martinez, *Electric charge in the field of a magnetic event in three-dimensional spacetime*, Phys. Rev. **D85** (2012) 045024.
- [3] D. Dai, D. Stojkovic, *Origin of the tail in Green's functions in odd dimensional space-times*, Eur. Phys. J. Plus **128** (2013) 122.
- [4] O. Birnholtz, S. Hadar, *An action for reaction in general dimension*, Phys. Rev. **D89** (2014) 045003.
- [5] M. Cataldo, A. A. García, *Radiation in (2+1)-dimensions*, arXiv:1405.3878 (2014).
- [6] D. V. Gal'tsov, *Radiation reaction in various dimensions*, Phys. Rev. **D66** (2002) 025016.
- [7] P. O. Kazinski, S. L. Lyakhovich, A. A. Sharapov, *Radiation reaction and renormalization in classical electrodynamics of point particle in any dimension*, Phys. Rev. **D66** (2002) 025017.
- [8] Y. Yaremko, *Self force in 2+1 electrodynamics*, J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 13161.
- [9] K. Lechner, *Elettrodinamica classica*, Springer (2014).
- [10] K. Lechner, *Ultraviolet singularities in classical brane theory*, JHEP **1012** (2010) 063.
- [11] G. Morchio, F. Strocchi, *Confinement of massless charged particles in QED in four-dimensions and of charged particles in QED in three-dimensions*, Annals Phys. **172** (1986) 267.