

**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Ingegneria Industriale DII

**Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale
Curriculum Aeronautico**

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

**CARATTERIZZAZIONE FLUIDODINAMICA
DELL'INTERAZIONE URTO/STRATO LIMITE
IN PROSSIMITÀ DI UNA RAMPA
DI ESPANSIONE
TRAMITE TECNICA IBM/WMLES**

Relatore: FRANCESCO DE VANNA

Laureando: EMANUELE DE PIERI
Matricola: 2023327

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

Indice

Capitolo 1 Introduzione	5
1.1 Introduzione	5
1.2 I metodi di risoluzione principali della CFD	5
1.2.1 DNS	6
1.2.2 RANS	6
1.2.3 LES	6
1.3 Sommario	8
Capitolo 2 Modellazione analitica	9
2.1 Le equazioni di bilancio	9
2.1.1 Equazione di continuità	10
2.1.2 Bilancio di quantità di moto	10
2.1.3 Primo principio della termodinamica	11
2.2 Il sistema di Navier-Stokes	11
2.2.1 La legge costitutiva	12
2.2.2 Il sistema di equazioni	12
2.2.3 Proprietà del gas	12
2.3 Formulazione adimensionale	13
2.3.1 Adimensionalizzazione delle variabili	13
2.3.2 Equazione della massa	13
2.3.3 Equazione di quantità di moto	14
2.3.4 Equazione dell'energia	14
2.3.5 Le equazioni di Navier-Stokes adimensionali	15
2.4 La turbolenza	15
2.4.1 Teoria fenomenologica di Richardson	16
2.4.2 Kolmogorov	17
2.5 Large Eddy Simulation	18
2.5.1 Equazioni di Navier-Stokes filtrate	19
2.5.2 WALE	20
2.5.3 WMLES	20
Capitolo 3 Modellazione Numerica	23
3.1 I metodi alla base	23
3.1.1 Mesh	24
3.1.2 ODE	24
3.1.3 Metodi Runge-Kutta	24
3.1.4 Metodi differenze finite	25
3.2 Metodi numerici per il comprimibile	25
3.2.1 Schemi conservativi	26
3.2.2 Flux Splitting	27
3.3 Schema alle differenze finite	27

3.3.1	WENO5	28
3.3.2	KGP6	29
Capitolo 4 Simulazioni		31
4.1	Setup di simulazione	31
4.1.1	Setup DNS	31
4.1.2	Setup RANS	33
4.1.3	Setup WMLES	35
4.2	2deg	36
4.2.1	Analisi monodimensionale preliminare	36
4.2.2	Post-processing dei dati WMLES	40
4.2.3	Grandezze a parete	43
4.2.4	Campi	46
4.3	5deg	50
4.3.1	Analisi monodimensionale preliminare	50
4.3.2	Post-processing dei dati WMLES	51
4.3.3	Grandezze a parete	54
4.3.4	Campi	55
4.4	Confronto	59
Capitolo 5 Conclusioni		63

Capitolo 1

Introduzione

Contents

1.1	Introduzione	5
1.2	I metodi di risoluzione principali della CFD	5
1.2.1	DNS	6
1.2.2	RANS	6
1.2.3	LES	6
1.3	Sommario	8

1.1 Introduzione

La fluidodinamica è una branca della fisica molto complessa ma di fondamentale importanza al giorno d'oggi per l'enorme quantità di applicazione ingegneristiche derivanti: dal volo degli aerei, alla generazione di deportanza per le auto da corsa fino alla generazione di energia attraverso le pale eoliche.

Nonostante lo studio e la continua ricerca in questo campo, la fluidodinamica è limitata dal fatto che il moto dei fluidi è governato dalle equazioni di *Navier-Stokes*, un sistema di equazioni non lineare di cui la soluzione analitica rappresenta uno dei 7 problemi del millennio non risolti. Delle soluzioni analitiche esistono ma solo per casi estremamente semplificati come la legge di *Poiseuille* o il flusso di *Couette*.

Se per le prime applicazioni, come i primi aerei ad inizio Novecento, i pochi risultati analitici come la teoria della linea portante potevano bastare, al giorno d'oggi la spinta continua verso l'ottimizzazione estrema necessita di strumenti che consentono di investigare meglio la dinamica dei fluidi. Da qui la creazione di nuovi modelli di turbolenza e quindi la nascita della fluidodinamica computazionale che si avvale dei mezzi forniti dall'analisi numerica per la risoluzione delle equazioni.

1.2 I metodi di risoluzione principali della CFD

L'utilizzo della CFD tuttavia non è indolore in quanto la risoluzione per via numerica è molto dispendiosa in termini sia di tempo sia di potenza necessaria per eseguire i calcoli. Per avere dei risultati accurati infatti c'è bisogno di adoperare un griglia (*mesh*) abbastanza fitta da catturare tutti i fenomeni che si verificano durante il moto del fluido. Questa è la parte più problematica in quanto le strutture vorticosi possono essere veramente piccole e difficili da catturare. Tutto ciò è dovuto al fatto che il moto del fluido è descritto dal sistema di equazione di Navier-Stokes, un sistema non lineare che da origine a fenomeni come la turbolenza, dipendente dal tempo e caotica che appunto da origine alle strutture vorticosi multi-scala.

Nel corso del tempo sono stati sviluppati vari metodi per la risoluzione numerica, ognuno con i suoi vantaggi e svantaggi in termini di tempo, potenza e memoria di calcolo richiesti. Di seguito verranno brevemente mostrate le principali tipologie tutt'oggi usate per soffermarsi alla fine sul metodo di risoluzione impiegato per questo elaborato, ovvero la tecnica *Immersed Boundary Method - Wall Modeled Large Eddy Simulation* abbreviato in IBM/WMLLES.

1.2.1 DNS

L'acronimo DNS sta per *Direct Numerical Simulation* proprio per il fatto che in tale tipologia di simulazioni non vengono utilizzati modelli ma le equazioni vengono risolte per principi primi, applicando i metodi numerici direttamente alle equazioni di Navier-Stokes.

Tale tipologia di simulazioni sono classificate come esperimenti virtuali pertanto hanno la medesima validità di un esperimento reale e non necessitano quindi di verifica.

Non facendo uso di modelli di turbolenza tali simulazioni risolvono il moto del fluido ad ogni scala, permettendo di predire anche i vortici più piccoli. Tale precisione si scontra con il fatto della necessità di una risoluzione della griglia altrettanto accurata richiedendo così un'enorme mole di potenza di calcolo.

È possibile stimare il costo computazionale per una simulazione di questo genere infatti preso N come il numero di elementi in una direzione si può dire che:

$$N = \frac{L}{\Delta} \sim \frac{L_0}{\eta} \propto Re^{\frac{3}{4}}$$

che considerando tutte e tre le dimensioni spaziali diventa:

$$N_{\Delta} \sim N^3 \propto Re^{\frac{9}{4}}$$

a cui si aggiunge il costo dovuto ai time steps necessari:

$$N_{\Delta t} = \frac{t}{\Delta t} \propto Re^{\frac{1}{2}}$$

moltiplicando la parte spaziale con quella temporale quindi si ha che il costo computazionale di una singola simulazione è proporzionale a $N_{\Delta} \times N_{\Delta t} \sim Re^{\frac{11}{4}} \sim Re^3$ che già a un numero di Reynolds molto basso come 1000, comporta un enorme dispendio di potenza di calcolo.

1.2.2 RANS

Le simulazioni RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) sono largamente utilizzate in ambito industriale in quanto non richiedono una elevata potenza di calcolo, tanto che con geometrie non troppo complesse è possibile eseguire tali simulazioni in un normale personal computer.

In questo caso si applicano dei modelli per definire il tensore degli sforzi di Reynolds, portando quindi ad avere un'accuratezza molto minore rispetto a prima. Le quantità infatti vengono mediate con una media detta appunto alla Reynolds tralasciando dunque tutti i fenomeni di vortici turbolenti e non stazionari presenti. Lo scopo infatti è quello di catturare il gradiente di tali grandezze mediate permettendo quindi un minore dispendio di risorse computazionali in quanto le dimensioni delle singole celle sono molto maggiori rispetto alle DNS.

Questa tipologia di simulazioni, come detto, non catturano i fenomeni tipici della turbolenza e saranno dunque stazionarie permettendo però di compiere delle analisi bidimensionali molto veloci da eseguire.

1.2.3 LES

Le Large Eddy Simulations sono una via intermedia tra le DNS e le RANS in termini di costo computazionale richiesto. Tale tipologia infatti simula le grandi strutture vorticosi che si generano tralasciando le scale più piccole dove si ha dissipazione dell'energia. Le simulazioni

saranno quindi tridimensionali e non stazionarie proprio per la presenza dei vortici turbolenti dipendenti dalla geometria del sistema.

Le strutture vorticosi più piccole vengono quindi escluse dalla simulazione attraverso un filtro passa basso che può essere la stessa griglia di calcolo o comunque lo schema numerico di discretizzazione scelto, in questo caso si parla di filtro implicito, altrimenti se il filtro viene applicato direttamente alle equazioni N-S è detto esplicito.

Le scale più piccole quindi non vengono risolte e vengono definite come *sub-grid scales* (SGS) a cui viene associato un modello di chiusura.

Tale tipologia di simulazione tuttavia resta ancora lontana dall'essere usata in ambito industriale per via dello sforzo di calcolo richiesto in particolare per la definizione dello strato limite che è la parte più onerosa in quanto richiede maggior risoluzione. Per questo negli ultimi anni sono emersi nuovi approcci in cui la soluzione vicino a parete viene modellata. Si trovano quindi tecniche ibride LES-RANS in cui a parete si ha l'utilizzo delle RANS e lontano per la soluzione esterna si torna alle LES, oppure si utilizza un approccio in cui gli stress a parete vengono imposti in una griglia indipendente che applica le condizioni al contorno all'intero dominio LES.

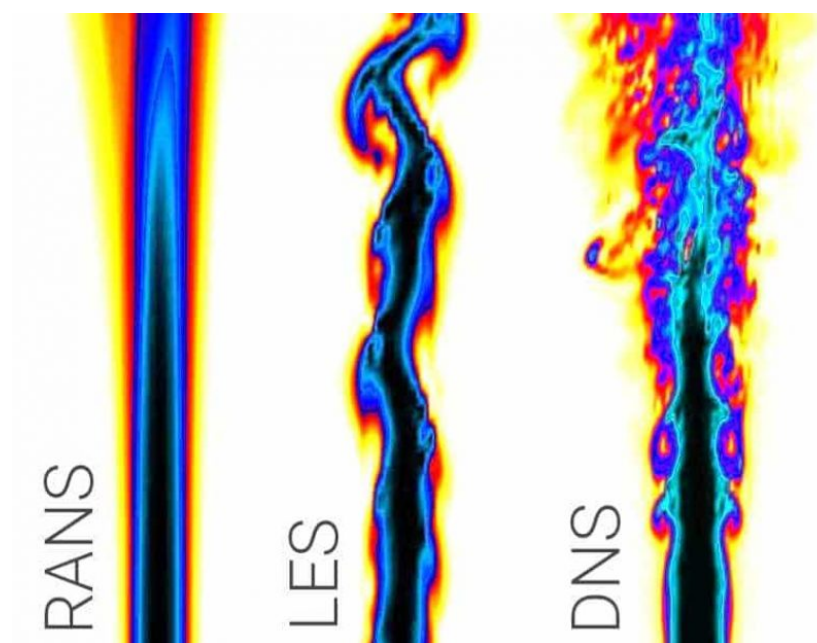


Figura 1.2.1: Simulazioni di un getto con le tre principali tipologie di simulazioni CFD ai volumi finiti.

Con la modellazione a parete delle LES per, di fatto, risparmiare sull'utilizzo di celle della griglia, si parla quindi di Wall-Modeled LES e tale tecnica verrà utilizzata in questa relazione associata al metodo Immersed Boundary (IBM). Quest'ultima tecnica consiste nel risolvere le equazioni di Navier-Stokes in una griglia fissata che non viene deformata dalla geometria presente pertanto anche la superficie di questa non coincide con i nodi della griglia. Pertanto invece di applicare le condizioni al contorno, si aggiunge in prossimità dell'interfaccia una forza fittizia in modo che il fluido sia localmente forzato a non passare attraverso ma a muoversi con la parete. In questo modo è possibile utilizzare una griglia cartesiana, ottima per i metodi alle differenze finite utilizzati.

1.3 Sommario

In questo elaborato verranno analizzati i risultati ottenuti nell'articolo *Incident shock wave and supersonic turbulent boundary layer interactions near an expansion corner*, dove vengono eseguite delle simulazioni DNS di appunto un flusso supersonico a Mach 2.9 attraversato da un'onda d'urto obliqua che devia il flusso di 12° a valle di una rampa di espansione.

In tali simulazioni viene posta attenzione nell'interazione tra urto e lo strato limite al variare dell'apertura della rampa d'espansione e le grandezze misurabili a parete ottenibili da tali analisi, come la pressione ed il coefficiente d'attrito.

I dati forniti dall'articolo verranno quindi confrontati con quelli ottenuti dalle simulazioni IBM/WMLES, svolte per l'occasione, attraverso l'utilizzo del software URANOS (Unsteady Robust All-around Navier-Stokes Solver) sviluppato dall' Ing. Francesco De Vanna. Nell'articolo vengono studiati i casi con apertura di 0° , 2° , 5° e 10° , mentre per questo elaborato verranno considerati unicamente i casi a 2° e 5° .

Verranno svolte anche delle simulazioni RANS preliminari per verificare la correttezza di certe assunzioni, come il non considerare la temperatura a parete.

Si partirà dunque con una descrizione dei modelli analitici di riferimento partendo dal ricavare le equazioni di Navier-Stokes per arrivare alla descrizione del modello di turbolenza adottato. Nel successivo capitolo verrà affrontata la modellazione numerica di tali modelli partendo con una veloce sintesi dei concetti generali per poi focalizzarsi sulle tecniche alle differenze finite usate dal software.

Si passerà poi alla parte centrale di questo elaborato in cui verranno illustrate le simulazioni eseguite, prima descrivendo i vari setup di simulazioni, per poi passare all'analisi distinta dei due casi, partendo da una prima analisi monodimensionale per poi procedere con il confronto tra i dati provenienti dalle varie simulazioni. Al termine di tale capitolo verrà fatto un confronto tra i due casi illustrandone le differenze.

Capitolo 2

Modellazione analitica

Contents

2.1	Le equazioni di bilancio	9
2.1.1	Equazione di continuità	10
2.1.2	Bilancio di quantità di moto	10
2.1.3	Primo principio della termodinamica	11
2.2	Il sistema di Navier-Stokes	11
2.2.1	La legge costitutiva	12
2.2.2	Il sistema di equazioni	12
2.2.3	Proprietà del gas	12
2.3	Formulazione adimensionale	13
2.3.1	Adimensionalizzazione delle variabili	13
2.3.2	Equazione della massa	13
2.3.3	Equazione di quantità di moto	14
2.3.4	Equazione dell'energia	14
2.3.5	Le equazioni di Navier-Stokes adimensionali	15
2.4	La turbolenza	15
2.4.1	Teoria fenomenologica di Richardson	16
2.4.2	Kolmogorov	17
2.5	Large Eddy Simulation	18
2.5.1	Equazioni di Navier-Stokes filtrate	19
2.5.2	WALE	20
2.5.3	WMLES	20

In questo capitolo verranno illustrati i modelli matematici alla base delle simulazioni che verranno mostrate nei capitoli dopo. A partire dalle leggi di bilancio che regolano il moto dei fluidi, si passa quindi per definire la turbolenza e le sue proprietà. Verranno quindi illustrati i principi alla base delle simulazioni LES (*Large Eddy Simulation*) finendo quindi poi con la modellazione a parete per le WMLES (*Wall-Modeled LES*).

2.1 Le equazioni di bilancio

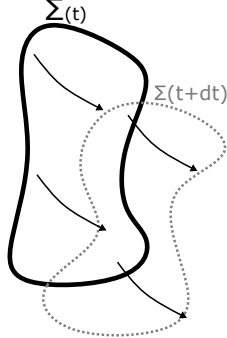
Le equazioni che governano il moto di un fluido è il sistema di equazioni non lineari di Navier-Stokes. Esse sono 3 equazioni di bilancio che esprimono matematicamente 3 principi fisici:

- conservazione della massa quindi l'equazione di continuità;
- conservazione del momento angolare quindi il bilancio di quantità di moto;
- conservazione dell'energia, cioè il primo principio della termodinamica.

Partendo da un punto di vista più generale è possibile considerare una grandezza estensiva:

$$\mathcal{B} = b \cdot m \quad (2.1.1)$$

dove b è la grandezza intensiva (per unità di massa). Considerando dunque un sistema chiuso Σ dipendente dal tempo di volume \mathcal{V}_c si può dunque utilizzare il teorema del trasporto di Reynolds per cui $\mathcal{V}_c = \mathcal{V}_{\Sigma}(t)$ permettendo quindi di passare dalla 2.1.2 alla 2.1.3:



$$\mathcal{B}_{\Sigma} = \int_{\mathcal{V}_{\Sigma}(t)} \rho b d\mathcal{V} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{B}_{\mathcal{V}_{\Sigma}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho b d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_c} \rho b \vec{v} \cdot \hat{n} dS \quad (2.1.3)$$

a cui poi si applica il teorema della divergenza:

$$\int_{\partial \mathcal{V}_c} (\vec{a}) \cdot \hat{n} dS = \int_{\mathcal{V}_c} \vec{\nabla} \cdot (\vec{a}) d\mathcal{V} \quad (2.1.4)$$

Da qui è possibile applicare i principi fisici sostituendo di fatto b con la grandezza fisica in esame.

2.1.1 Equazione di continuità

L'equazione del bilancio di massa (continuità) prevede che la massa del sistema m_{Σ} rimanga costante nel tempo, pertanto:

$$\frac{d}{dt} m_{\Sigma} = 0 \quad (2.1.5)$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\Sigma}(t)} \rho d\mathcal{V} = 0 \quad (2.1.6)$$

a cui si applicando il teorema del trasporto di Reynolds (TTR):

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_c} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dS \quad (2.1.7)$$

e attraverso il teorema della divergenza:

$$\int_{\mathcal{V}_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_c} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d\mathcal{V} = 0 \quad (2.1.8)$$

per cui alla fine si ottiene l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1.9)$$

2.1.2 Bilancio di quantità di moto

Per l'equazione di bilancio di quantità di moto si parte dal II principio della dinamica:

$$\frac{d(\vec{Q}_{\Sigma})}{dt} = \sum \vec{F}_e \quad (2.1.10)$$

ovvero la variazione nel tempo della quantità di moto nel sistema è pari alla sommatoria delle forze esterne. Definendo quindi la quantità di moto:

$$\vec{Q}_{\Sigma} = \int_{\mathcal{V}_{\Sigma}(t)} \rho \vec{v} d\mathcal{V} \quad (2.1.11)$$

Da qui con un procedimento analogo a quello per l'equazione di continuità si arriva:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_c} \rho \vec{v} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_c} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \hat{n} dS = \int d\vec{F}_{e,\mathcal{V}} + \int d\vec{F}_{e,S} \quad (2.1.12)$$

dove si distinguono tra le forze esterne le forze di volume e quelle di superficie:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{e,\mathcal{V}} &= \rho \vec{f} d\mathcal{V} \\ d\vec{F}_{e,S} &= \vec{t}_{(\hat{n})} dS \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

dal teorema di Cauchy è possibile esplicitare la normale che moltiplica il tensore delle tensioni per cui $\vec{t}_{(\hat{n})} = \vec{T} \cdot \hat{n}$. Per cui applicando la 2.1.4 e con qualche passaggio algebrico, si ottengono le 3 equazioni di bilancio di quantità di moto:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \quad (2.1.14)$$

2.1.3 Primo principio della termodinamica

Considerando un sistema termodinamico si ha che l'energia totale dal primo principio della termodinamica è

$$dE = \delta Q + \delta W \quad (2.1.15)$$

dove i termini a destra, come nel caso della quantità di moto, si possono suddividere tra agenti sul volume o sulla superficie, avendo così:

$$\frac{d}{dt} E_{\Sigma} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}_{\Sigma(t)}} \rho E d\mathcal{V} = \dot{Q}_{\mathcal{V}} + \dot{Q}_S + \dot{W}_{\mathcal{V}} + \dot{W}_S \quad (2.1.16)$$

che è possibile esplicitare:

- il flusso di calore per irraggiamento o generazione interna $d\dot{Q}_{\mathcal{V}} = \rho \dot{Q} d\mathcal{V}$
- il calore scambiato per conduzione e/o convezione $d\dot{Q}_S = -\vec{q} \cdot \hat{n} dS = k \vec{\nabla} T \cdot \hat{n} dS$
- il lavoro delle forze di volume $d\dot{W}_{\mathcal{V}} = \vec{v} \cdot \rho \vec{f} d\mathcal{V}$
- il lavoro delle pressioni e delle forze viscosse $d\dot{W}_S = \vec{v} \cdot \vec{T} \cdot \hat{n} dS$

Attraverso la solita procedura si ottiene dunque la forma conservativa dell'equazione dell'energia:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho E \vec{v}) = \rho \dot{Q} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \rho \vec{v} \cdot \vec{f} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{T}) \quad (2.1.17)$$

2.2 Il sistema di Navier-Stokes

Nei paragrafi sono state esplicitate le equazioni di bilancio tuttavia il numero di incognite del sistema è maggiore del numero di equazione rendendo quindi il problema irrisolvibile. È quindi necessario aggiungere informazioni riguardanti il fluido in esame.

2.2.1 La legge costitutiva

La prima ipotesi che viene fatta riguarda la legge costitutiva, ovvero la legge che descrive il comportamento di un certo materiale, si esplicita quindi la sua *reologia*. In questo caso si considera un *fluido Newtoniano* ovvero gli sforzi viscosi sono proporzionali alle deformazioni. In particolare il tensore degli sforzi viscosi si esprime:

$$\vec{T} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{\nabla}\vec{v} + \mu_v(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{I} \quad (2.2.18)$$

dove μ è la viscosità dinamica e μ_v è la viscosità volumetrica, quest'ultima dall'ipotesi Stokes è esprimibile come:

$$\mu_v = -\frac{2}{3}\mu \quad (2.2.19)$$

raccogliendo il tensore degli sforzi viscosi l'equazione di quantità di moto è riscrivibile nel seguente modo:

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Sigma} + \rho \vec{f} \quad (2.2.20)$$

allo stesso modo è riscrivibile l'equazione dell'energia.

2.2.2 Il sistema di equazioni

Una volta espresse tutte le equazioni di bilancio e le proprietà reologiche del fluido è possibile riassumere tutto nel sistema di equazioni alle derivate parziali di Navier-Stokes in forma conservativa per un fluido Newtoniano. Per una successiva semplicità lo si riporta in notazione indiciale:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right) \right] + \rho f_i \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho E + p) u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right) u_i \right] + \rho f_i u_i \end{cases} \quad (2.2.21)$$

Tale sistema descrive appunto un fluido viscoso Newtoniano e comprimibile.

2.2.3 Proprietà del gas

A questo punto il sistema descrive un fluido comprimibile e comprende 5 equazioni e 7 incognite (ρ , $\rho \vec{v}$, ρE , T e p). Per completare il problema si aggiunge un'equazione di stato e un'equazione costitutiva per l'energia totale. Per la prima si considera l'equazione dei *gas ideali*, per cui:

$$p = \rho R T \quad (2.2.22)$$

dove R è la costante specifica del gas pari a $R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}}$ con $\mathcal{R} = 8.3145 \frac{J}{mol \cdot K}$ la costante universale dei gas e \mathcal{M} la massa molare del gas.

L'energia totale invece si esprime nel seguente modo:

$$E = e + \frac{v^2}{2} \quad (2.2.23)$$

dove il secondo termine a destra rappresenta l'energia cinetica specifica, mentre e è l'energia interna specifica che è possibile scrivere come:

$$e = c_v T = \frac{pR}{\gamma - 1} \quad (2.2.24)$$

dove c_v è il calore specifico a volume costante del gas. Inoltre la viscosità è dipendente dalla temperatura in particolare risponde alla *legge di Sutherland*:

$$\mu(T) = T^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_\infty + S}{T + S} \right) \quad (2.2.25)$$

Con $T_\infty = 273.15K$ e $S = 110.4K$ è la costante di Sutherland propria di ogni gas.

Si definisce poi quindi il numero di Prandtl:

$$Pr = \frac{\mu(T)c_p}{\lambda(T)} = 0.71 \quad (2.2.26)$$

dove λ è la conducibilità termica.

2.3 Formulazione adimensionale

Per la risoluzione numerica delle equazioni risulterà più facile esprimere le equazioni in forma adimensionale. Si sfrutta per questo il teorema di Buckingham secondo cui un'equazione (ma in generale un qualsiasi problema) con n variabili ma di fatto dipendente da k grandezze fondamentali indipendenti tra loro, l'equazione può essere espressa come funzione $n - k$ gruppi adimensionali.

Per un fluido comprimibile i gruppi adimensionali risultano essere 4:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{c_p}{c_v} && \text{rapporto tra i calori specifici del fluido} \\ Ma &= \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma RT}} && \text{numero di Mach} \\ Re &= \frac{\rho u_\infty L}{\mu_\infty} && \text{numero di Reynolds} \\ Pr &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{\mu_\infty}{\lambda_\infty} && \text{numero di Prandtl} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

2.3.1 Adimensionalizzazione delle variabili

Nelle equazioni di Navier-Stokes per flussi comprimibili e viscosi troviamo 15 variabili che dipendono da 4 grandezze fondamentali: lunghezza [m], massa [kg], temperatura [K] e tempo [s] in relazione in 7 equazioni:

$$\begin{aligned} p &= \rho RT, & e &= c_v T, & E &= e + \frac{v^2}{2}, & \lambda &= \frac{\mu c_p}{Pr}, \\ c_v &= \frac{R}{\gamma - 1}, & c_p &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, & \mu &= T^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_\infty + S}{T + S} \right), \end{aligned}$$

Per cui come anticipato precedentemente si avranno 4 gruppi adimensionali che descriveranno il problema. Questi si trovano scomponendo le variabili nella parte dimensionale e non:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_\infty \rho', & t &= \frac{L_\infty}{v_\infty} t', & x_i &= L_\infty x'_i, & v_i &= v_\infty v'_i, & \mu &= \mu_\infty \mu', \\ \lambda &= \lambda_\infty \lambda', & T &= T_\infty T' = \left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{1}{R} \right) T', & p &= p_\infty p', & e &= \frac{p_\infty}{\rho_\infty} e' \end{aligned}$$

2.3.2 Equazione della massa

Partendo da $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0$, si inseriscono le variabili scomposte ottenendo:

$$\left(\frac{\rho_\infty}{L_\infty} U_\infty \right) \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \left(\frac{1}{L_\infty} \rho_\infty U_\infty \right) \frac{\partial \rho' u'_j}{\partial x'_j} = 0 \quad (2.3.28)$$

Risulta semplice semplificare ottenendo quindi alla fine:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_j}{\partial x'_j} = 0 \quad (2.3.29)$$

2.3.3 Equazione di quantità di moto

Partendo da $\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + p \delta_{ij}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right) \right]$, dove i termini sorgenti sono considerati all'interno della pressione (modificata), inserendo le variabili scomposte si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L_\infty} \right) \frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} &= - \left(\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} (\rho' u'_i u'_j) - \left(\frac{p_\infty}{L_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} (p' \delta_{ij}) + \\ &+ \left(\frac{\mu_\infty U_\infty}{L_\infty^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

dividendo tutto per $\frac{\rho_\infty U_\infty^2}{L_\infty}$:

$$\frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'_j} (\rho' u'_i u'_j) - \left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty U_\infty^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} (p' \delta_{ij}) + \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty L_\infty U_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \right) \right] \quad (2.3.31)$$

Si definisce quindi il numero di Mach in *free-stream* come il rapporto tra velocità dell'aria e velocità del suono in free-stream:

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}} \quad (2.3.32)$$

E il numero di Reynolds come rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosse:

$$Re = \frac{\rho_\infty U_\infty L_\infty}{\mu_\infty} \quad (2.3.33)$$

Si ottiene quindi alla fine:

$$\frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'_j} (\rho' u'_i u'_j + p' \delta_{ij}) + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \right) \right] \quad (2.3.34)$$

2.3.4 Equazione dell'energia

Partendo da $\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} ((\rho E + p) u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_s}{\partial x_s} \right) u_i \right]$, inserendo le variabili scomposte si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\rho_\infty \frac{p_\infty U_\infty}{\rho_\infty L_\infty} \right) \frac{\partial \rho' E'}{\partial t'} &= - \left(\rho_\infty \frac{p_\infty U_\infty}{\rho_\infty L_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} ((\rho' E' + p') u'_j) + \left(\frac{\lambda_\infty T_\infty}{L_\infty^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) + \\ &+ \left(\frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L_\infty^2} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{\partial x'_s} \right) u'_i \right] \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

In un procedimento analogo al caso della quantità di moto si dividono tutti i termini per $\rho_\infty \frac{p_\infty U_\infty}{\rho_\infty L_\infty}$ ottenendo quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho' E'}{\partial t'} &= -\frac{\partial}{\partial x'_j} ((\rho' E' + p') u'_j) + \left(\frac{\lambda_\infty T_\infty}{L_\infty^2} \frac{L_\infty \rho_\infty}{\rho_\infty U_\infty p_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) + \\ &+ \left(\frac{\mu_\infty U_\infty^2}{L_\infty^2} \frac{L_\infty \rho_\infty}{\rho_\infty U_\infty p_\infty} \right) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{x'_s} \right) u'_i \right] \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Qui è possibile il numero di Prandtl il quale esprime il rapporto della diffusività cinematica rispetto a quella termica per un fluido viscoso:

$$Pr = c_p \frac{\mu_\infty}{\lambda_\infty} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{\mu_\infty}{\lambda_\infty} \quad (2.3.37)$$

Utilizzando anche il numero di Reynolds e M_∞ si può dunque riscrivere l'equazione dell'energia adimensionalizzata nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho' E'}{\partial t'} &= -\frac{\partial}{\partial x'_j} ((\rho' E' + p') u'_j) + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \left[\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{x'_s} \right) u'_i \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

Con la stessa metodologia poi è possibile ridefinire la legge di Sutherland adimensionale:

$$\mu'(T') = T'^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1 + S/T_\infty}{T' + S/T_\infty} \right) \quad (2.3.39)$$

2.3.5 Le equazioni di Navier-Stokes adimensionali

Ora si può riportare l'intero sistema adimensionalizzato:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial \rho' u'_j}{\partial x'_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho' u'_i}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'_j} (\rho' u'_i u'_j + p' \delta_{ij}) + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left[\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{x'_s} \right) \right] \\ \frac{\partial \rho' E'}{\partial t'} = -\frac{\partial}{\partial x'_j} ((\rho' E' + p') u'_j) + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \left[\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\mu' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u'_s}{x'_s} \right) u'_i \right) \right] \end{cases} \quad (2.3.40)$$

Per trattare numericamente il problema sarà più conveniente esprimere le equazioni in forma matriciale distinguendo, da sinistra, il termine temporale dei vettori delle variabili conservate, il vettore dei flussi convettivi connesso ai fenomeni di trasporto dei campi di velocità e pressione non lineare, e quello dei flussi diffusivi dovuto al comportamento termodinamico del gas e sempre lineare:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F_j(U)}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{\nu,j}(U)}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.3.41)$$

dove si sostituiscono i termini:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_i \\ \rho E \end{pmatrix}, F_j = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_i u_j + p \delta_{ij} \\ (\rho E + p) u_i \end{pmatrix}, F_{\nu,j} = \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{ij} \\ \sigma_{ij} u_j + \frac{1}{Pr} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} \quad (2.3.42)$$

2.4 La turbolenza

Facendo infatti un esperimento in cui viene misurata la velocità in uno stesso punto nel tempo per diverse ripetizioni dello stesso esperimento si otterranno diversi segnali di velocità. Inoltre

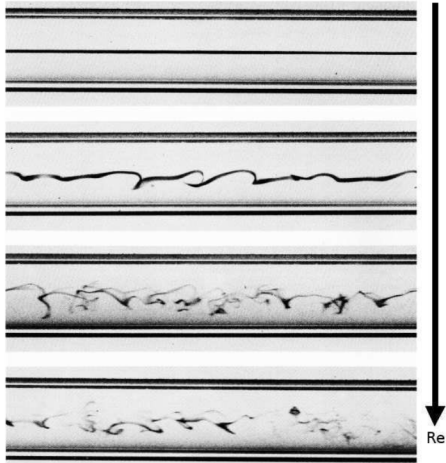


Figura 2.4.1: Confronto tra flusso laminare e turbolento all'interno di un canale a differenti numeri di Reynolds (Van Dyke 1982).

Il moto del fluido può essere caratterizzato da diversi fenomeni, sicuramente uno dei più importanti e difficili da modellare è la turbolenza. Un moto turbolento si verifica quando le forze di inerzia sono preponderanti a quelle viscosse non permettendone la dissipazione, dando così luogo ad un moto caotico. Per questo il numero di Reynolds visto nelle sezioni precedenti risulta essere di fondamentale importanza per prevedere la transizione da un moto a regime laminare ad uno turbolento. Dato che esso esprime il rapporto tra le forze inerziali e quelle viscosse ne consegue che al suo aumentare la parte viscosa perde importanza dando luogo ad un moto imprevedibile.

Per la turbolenza si parla quindi di caos deterministico o anche di *butterfly effect* in quanto ad una minima variazione delle condizioni iniziali e/o al contorno si ottiene un risultato molto differente.

i segnali di velocità saranno caratterizzati da forti gradienti quindi intense variazioni nel tempo della velocità.

Analizzando per esempio la scia creatasi dietro un oggetto investito da un fluido si può notare subito come anche se l'oggetto è simmetrico la scia risulterà irregolare e priva di simmetrie. La turbolenza è così costituita da strutture vorticosse che si vedono essere multi-scala anche di 6-8 ordini di grandezza, dipendenti dal tempo e tridimensionali.

2.4.1 Teoria fenomenologica di Richardson

La prima teoria fenomenologica della turbolenza viene proposta nel 1922 da Richardson proponendo l'ipotesi di *cascata turbolenta* secondo la quale le strutture vorticosse più grandi all'interno di un regime turbolento sono costituiti a loro volta da vortici più piccoli che alimentano vortici più piccoli. Tale fenomeno sarebbe un processo inerziale e non viscoso dove ad una certa quantità di energia cinetica immessa nel sistema corrisponde la quantità di energia dissipata dai vortici più piccoli. Nella turbolenza infatti, analizzando le strutture vorticosse, alle scale più grandi, macroscopiche, si può ancora distinguere la direzione preferenziale di moto, mentre alle scale più piccole, microscopiche, è impossibile riconoscerne un verso.

!

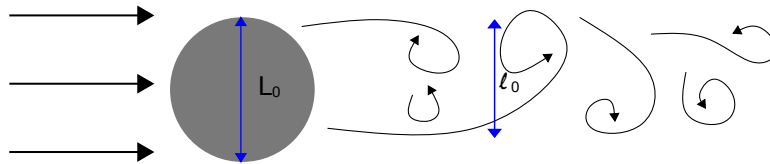


Figura 2.4.2: Disegno di un cilindro investito da un flusso

Considerando (fig.2.4.2) un flusso di velocità U_0 e viscosità ν che investe un cilindro di diametro L_0 dove $Re_0 = \frac{U_0 L_0}{\nu} \gg 1$ per cui si ha un regime turbolento, si possono notare varie strutture vorticosse di grandezza l che si creano in scia al cilindro di differenti scale $\eta < l < l_0$ dove $l_0 \sim L_0$.

Considerando ora due punti P e Q distanti $l = |\overline{PQ}|$ si misura la differenza di flusso:

$$\delta \vec{u}(P, Q) = \vec{u}(Q) - \vec{u}(P) = \delta \vec{u}(l, \hat{l}, P) \quad (2.4.43)$$

per cui per misurare il flusso che attraversa l è possibile avere unicamente un approccio statistico, quindi:

$$u_l = \langle \delta u_{//} \rangle = \langle \vec{\delta u} \cdot \hat{l} \rangle = \langle \delta u_{//} \rangle (l, \hat{l}, P) \quad (2.4.44)$$

Si è utilizzata una media alla Reynolds sul punto P che fa perdere localmente il riferimento alla direzione preferenziale per cui si possono verificare due proprietà:

- omogeneità $u_l = \langle \delta u_{//} \rangle (l, \hat{l}, P)$
- isotropia $u_l = \langle \delta u_{//} \rangle (l, \hat{l}, P)$

Per cui $u_l = \langle \delta u_{//} \rangle (l)$. In tal modo è possibile definire anche il numero di Reynolds associato alle scale:

$$Re_l = \frac{u_l l}{\nu} = \begin{cases} \gg 1 & l \sim l_0 \\ \sim 1 & l \sim \eta \end{cases} \quad (2.4.45)$$

Analizzando le scale più grandi l_0 si ha che:

- $l_0 \sim L_0$
- $u_{l_0} \sim u'_{rms} = \sqrt{\frac{2}{3}k} = \sqrt{\frac{\langle u'_i u'_i \rangle}{3}}$ dove k è l'energia cinetica turbolenta, pertanto:

$$Re_{l_0} = \frac{u_{l_0} l_0}{\nu} \sim \frac{u'_{rms} L_0}{\nu} \sim \frac{U_0 L_0}{\nu} \gg 1 \quad (2.4.46)$$

- l'energia trasferita dalle scale più grandi a quelle più piccole risulta essere:

$$\frac{k_{l_0}}{\tau_{l_0}} \sim \frac{u_{l_0}^3}{l_0} \sim \frac{u'_{rms}{}^3}{L_0} \sim \frac{U_0^3}{L_0} \propto \epsilon \quad (2.4.47)$$

dove ϵ è la dissipazione turbolenta.

2.4.2 Kolmogorov

Nel 1941 Kolmogorov (da qui il nome *Teoria K41*) esprime una teoria dimensionale per rispondere alla domanda a quale scala avviene la dissipazione cercando quindi quantificare la teoria di Richardson.

Partendo dal fatto che il flusso:

- macroscopicamente dipende dalla geometria pertanto sarà disomogeneo e anisotropo;
- a scale $l \ll l_0$ è invece universale, quindi omogeneo e isotropo;

la teoria enuncia 3 ipotesi:

Ipotesi 0:

Se $Re \gg 1$, $l \ll l_0$ allora il flusso è localmente omogeneo e isotropo quindi tutte le statistiche sono universali e dipendenti al più da ϵ e ν .

Ipotesi 1 di similarità:

Le scale più piccole di un flusso dipendono sia da ϵ sia da ν . Pertanto svolgendo un'analisi dimensionale si può scrivere in funzione della lunghezza L e della velocità V che la dimensione dei vortici più piccoli è $\eta = \nu^\alpha \epsilon^\beta$ per cui scrivendo tutto in funzione delle due variabili si ottiene $L = (V \cdot L)^\alpha \left(\frac{\nu^3}{L}\right)^\beta$. Con un banale sistema algebrico si arriva a esprimere quindi:

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.4.48)$$

E in modo analogo si definiscono velocità e tempo caratteristico:

$$\begin{aligned} u_\eta &= (\nu\epsilon)^{\frac{1}{4}} \\ \tau_\eta &= \frac{\eta}{u_\eta} = \left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.4.49)$$

Per vedere se c'è dissipazione si calcola:

$$Re_\eta = \frac{u_\eta \eta}{\nu} = \frac{\nu^{\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}}{\nu} = 1$$

pertanto a questa scala la viscosità è importante quanto lo sono i termini inerziali come predetto da Richardson. Per invece stimare la dissipazione:

$$\epsilon_\eta \sim \nu \left(\frac{u_\eta}{\eta}\right)^2 = \nu \left(\frac{\nu^{\frac{1}{4}} \epsilon^{\frac{1}{4}}}{\nu^{\frac{3}{4}} \epsilon^{-\frac{1}{4}}}\right)^2 = \epsilon$$

pertanto la dissipazione di k avviene completamente alla scala η di Kolmogorov.

Ipotesi 2 di similarità:

Dato $Re \gg 1$ prendendo una scala intermedia $\eta \ll l \ll l_0$ le statistiche sono universali e non dipendono da ν ma da ϵ fissata una scala l . Per cui analogamente all'ipotesi 1 è possibile fare un'analisi dimensionale, quindi:

$$\begin{aligned} u_l &= \epsilon^\alpha l^\beta \\ V &= \left(\frac{V^3}{L}\right)^\alpha (L)^\beta \quad \rightarrow \quad u_l = (\epsilon l)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Da cui con un procedimento analogo a quello fatto per l'ipotesi 1 si ottiene che $Re_l = \frac{l}{\eta}^{\frac{4}{3}}$ pertanto se $l \gg \eta$ allora $Re \gg 1$ e quindi i fenomeni viscosi non assumono molta importanza al contrario di quelli inerziali. È possibile poi vedere l'energia trasferita come era stata definita precedentemente, infatti:

$$\frac{k_l}{\tau_l} \sim \frac{u_l^3}{l} = \frac{((\epsilon l)^{\frac{1}{3}})^3}{l} = \epsilon$$

Pertanto si può affermare che l'energia viene completamente trasferita alle scale più piccole dove verrà poi dissipata.

2.5 Large Eddy Simulation

Come già anticipato nel capitolo di introduzione le LES sono a metà strada tra le simulazioni DNS e RANS. In questo caso infatti verranno simulate unicamente le strutture vorticosi più grandi $l_0 \sim L_0$ che, come si è visto con le teorie di Richardson e Kolmogorov, dipendono dalla geometria, mentre si andranno a modellare le scale più piccole $l \ll l_0$ dove le proprietà statistiche sono universali quindi omogenee e isotrope. Conservando quindi le strutture vorticosi più grandi e quindi cercando di risolvere in parte la turbolenza si avrà sempre un campo tridimensionale e tempo variante.

Nelle Large Eddy Simulations si definisce un'operazione di filtraggio che di fatto va a separare il contributo delle strutture vorticosi più grandi da quelle più piccole o vedendola in un altro modo si escludono le ondulazioni a più alta frequenza. Ciò viene fatto attraverso un *filtro passa basso* che può essere:

- *esplicito* se serve un operatore di filtraggio;
- *implicito* se è la griglia stessa a fare da filtro.

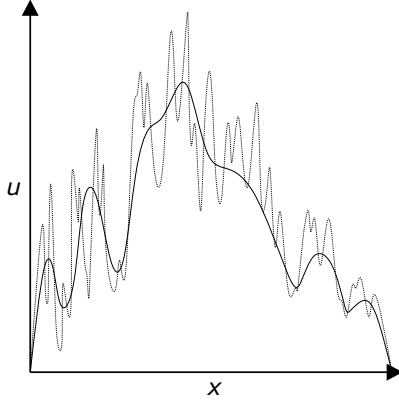


Figura 2.5.3: Schematizzazione dell'operazione di filtraggio: il profilo di velocità originale (tratteggiato) viene pulito dalle alte frequenze dando un profilo di velocità filtrato (linea continua).

L'operazione di filtraggio effettuata nelle LES apparentemente è molto simile a quella che si può vedere nelle RANS infatti anche in questo caso, per esempio, prendendo la velocità u essa viene scomposta nella componente filtrata \tilde{u} e nella componente residua u'' :

$$u = \tilde{u} + u'' \quad (2.5.50)$$

A differenza però delle RANS in questo caso la componente filtrata non rappresenta un campo mediato alla Reynolds, che pertanto resterebbe invariato nel tempo, ma solamente di un'istantanea del campo tolta delle componenti a più alta frequenza.

La scala della griglia di discretizzazione dovrà dunque essere minore o uguale alla scala di filtraggio per catturare tutti i fenomeni presenti. Questa operazione tuttavia non è indolore in quanto richiederà l'introduzione di un modello per la chiusura.

2.5.1 Equazioni di Navier-Stokes filtrate

Considerando quindi un filtro spaziale $\overline{(\cdot)}$, una variabile di flusso filtrata $\tilde{\phi}$ si può definire il filtro di Favre come:

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\overline{\rho}} \quad (2.5.51)$$

che applicato alle equazioni non dimensionali di Navier-Stokes comprimibile si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_j}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tilde{p} \delta_{ij}) + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\mu} \tilde{d}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j)) \\ \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} ((\tilde{\rho} \tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{u}_j) + \\ + \frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{\mu} \tilde{d}_{ij} \tilde{u}_i) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} ((\tilde{\rho} E + \tilde{p}) \tilde{u}_i) - (\tilde{\rho} \tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{u}_i \end{cases} \quad (2.5.52)$$

Da questo nuovo sistema si possono subito notare delle differenze rispetto a quello di partenza (2.3.40), infatti nell'equazione di quantità di moto si trova il termine del *tensore degli sforzi residui* relativo alle scale più piccole della griglia (SGS:subgrid-scale):

$$\tilde{\tau}_{ij}^{SGS} = \overline{\rho u_i u_j} - \tilde{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (2.5.53)$$

Lo stesso si trova nell'equazione dell'energia:

$$\tilde{E}_j^{SGS} = \overline{(\rho E + p) u_i} - (\tilde{\rho} \tilde{E} + \tilde{p}) \tilde{u}_i = \overline{\rho c_p T u_j} - \overline{\rho c_p \tilde{T} \tilde{u}_j} + \frac{1}{2} \tilde{T}_{ij}^{SGS} \tilde{u}_j - \frac{1}{2} \tilde{T}_{kk}^{SGS} \tilde{u}_j \quad (2.5.54)$$

Tali termini non sono risolti dalle LES in quanto appunto residui perché al di sotto della risoluzione della griglia pertanto viene adottato un modello. Si è quindi suddiviso la parte deviatorica di \tilde{T}_{ij}^{SGS} togliendone i contributi isotropi \tilde{T}_{kk}^{SGS} ottenendo quindi:

$$\tilde{T}_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tilde{T}_{kk}^{SGS} \delta_{ij} = -2\mu_{SGS} \left(\tilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.5.55)$$

dove μ_{SGS} è la viscosità residua, mentre \tilde{S}_{ij} è così definito:

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.56)$$

In modo analogo si definisce anche la diffusività residua come:

$$\lambda_{SGS} = \mu_{SGS} \frac{\bar{c}_p}{PR_T} \quad (2.5.57)$$

A questo punto serve dunque un modello per i termini residui come μ_{SGS} . Questo deve essere universale in quanto deve tener conto di svariate condizioni. Si utilizza quindi un modello algebrico così espresso:

$$\mu_{SGS} = \bar{\rho}(C_m \Delta)^2 \mathcal{D}_m[\bar{\mathbf{U}}] \quad (2.5.58)$$

Dove C_m è un parametro relativo al modello utilizzato, $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$ è la lunghezza caratteristica della scala del filtro e $\mathcal{D}_m[\cdot]$ è un operatore differenziale non lineare applicato ad \mathbf{U} , la quantità risolta del flusso.

2.5.2 WALE

Il modello utilizzato nelle simulazioni per μ_{SGS} è il *Wall-Adaptive Large-Eddy viscosity model* (WALE) il quale risolve i problemi vicino a parete del modello di *Smagorinsky* che presentava un comportamento asintotico per l'operatore differenziale.

Qui si definisce $\mathcal{D}_m[\cdot]$ come:

$$\mathcal{D}_W[\mathbf{U}] = \frac{(S_{ij}^d S_{ij}^d)^{3/2}}{(S_{ij} S_{ij})^{3/2} + (S_{ij}^d S_{ij}^d)^{5/4}} \quad (2.5.59)$$

dove:

$$S_{ij}^d = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_l} \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (2.5.60)$$

mentre C_m risulta essere pari a $C_W = \sqrt{10.6} C_S$ dove C_S è la costante di Smagorinsky:

$$C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3K_0}{2} \right)^{-\frac{3}{4}} \simeq 0.18 \quad (2.5.61)$$

con $K_0 = 1.4$ è la costante di Kolmogorov.

2.5.3 WMLES

Come anticipato nell'introduzione, le *Wall-Modeled LES* assumono l'equilibrio tra la convezione e il gradiente di pressione e sono caratterizzate da due incognite: U_{WM} cioè la velocità mediana parallela alla parete e T_{WM} la rispettiva temperatura.

Dall'ipotesi di equilibrio si arriva a questo sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy} \left[(\mu_{WM} + \mu_{t,WM}) \frac{dU_{WM}}{dy} \right] = 0 \\ \frac{d}{dy} \left[c_p \left(\frac{\mu_{WM}}{Pr} + \frac{\mu_{t,WM}}{Pr_{t,WM}} \right) \frac{dT_{WM}}{dy} \right] = -\frac{d}{dy} \left[(\mu_{WM} + \mu_{t,WM}) U_{WM} \frac{dU_{WM}}{dy} \right] \end{cases} \quad (2.5.62)$$

dove c_p è il calore specifico a pressione costante. Si pongono poi il numero di Prandtl del modello di turbolenza $Pr_{t,WM} = 0.9$, $\mu_{WM} = \mu_{WM}(T_{WM})$ è la viscosità laminare che segue la legge di Sutherland la viscosità residua/turbolenta del modello è definita come:

$$\mu_{t,WM} = \kappa \rho_{WM} u_\tau y^+ D \quad (2.5.63)$$

dove $\kappa = 0.41$ è la costante di Von Karman, $\rho_{WM} = p_{LES}/T_{WM}$ è il profilo di densità assumendo una distribuzione costante della pressione nello strato limite. Si definisce poi:

$$D = \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right)^2 \quad (2.5.64)$$

con $A^+ = 17$ costante del modello che indica l'altezza adimensionalizzata dove la viscosità turbolenta e quella molecolare assumono la stessa importanza, ordine di grandezza.

Le equazioni di equilibrio 2.5.62 contengono la somma degli sforzi tangenziali viscosi e turbolenti nella prima equazione, mentre nella seconda si trova la somma della diffusività molecolare, del trasporto di calore turbolento e aerodinamico. Tali sono quantità conservate e costanti lungo la regione del modello. Per questo motivo il sistema di equazioni differenziali ordinarie deve essere risolto in una griglia indipendente partendo da $y = 0$ con le seguenti condizioni al contorno:

$$U_{WM} = 0, \quad T_{WM} = T_w \quad \text{oppure} \quad \frac{dT_{WM}}{dy} = 0 \quad (2.5.65)$$

quindi parete isotermica oppure adiabatica. Mentre per $y = h_{wall}$ si ha:

$$U_{WM} = u_{LES}, \quad T_{WM} = T_{LES}, \quad P_{WM} = p_{LES} \quad (2.5.66)$$

quindi appunto al confine con la regione esterna LES si prendono come condizioni al contorno proprio i valori risolti dalla LES.

I valori di sforzi tangenziali e di flusso termico a parete sono calcolati dal modello di equilibrio:

$$\tau_{w,WM} = \left(\mu \frac{dU_{WM}}{dy} \right)_{y=0}, \quad q_{w,WM} = \left(\frac{c_p \mu}{Pr} \frac{dT_{WM}}{dy} \right)_{y=0} \quad (2.5.67)$$

Capitolo 3

Modellazione Numerica

Contents

3.1	I metodi alla base	23
3.1.1	Mesh	24
3.1.2	ODE	24
3.1.3	Metodi Runge-Kutta	24
3.1.4	Metodi differenze finite	25
3.2	Metodi numerici per il comprimibile	25
3.2.1	Schemi conservativi	26
3.2.2	Flux Splitting	27
3.3	Schema alle differenze finite	27
3.3.1	WENO5	28
3.3.2	KGP6	29

Come detto più volte il sistema di Navier-Stokes è un sistema di equazioni differenziali non lineare. Questo lo rende molto complesso nella sua risoluzione tanto che non si conosce nemmeno se ne esista una soluzione analitica univoca. Per questo motivo tale problema viene affrontato attraverso le tecniche provenienti dall'analisi numerica.

Per risolvere numericamente tale il sistema è di fondamentale importanza saper riconoscere il tipo di equazioni in analisi e usare il metodo numerico più adeguato in modo da ottenere una soluzione consistente, convergente e stabile.

Ci sono svariati metodi di risoluzione, in Uranos è implementato dei metodi alle differenze finite per la discretizzazione spaziale e Runge-Kutta per la parte temporale.

3.1 I metodi alla base

Tornando all'equazione 2.3.42 in cui il sistema di Navier-Stokes comprimibile è espresso in forma matriciale, è facile notare come esso sia costituito da tre contributi principali:

- le variabili conservate sono dipendenti dal tempo, pertanto c'è un contributo temporale;
- un contributo convettivo per via dei campi di velocità e pressioni legati responsabili del trasporto non lineare delle grandezze;
- il contributo viscoso che è lineare.

Inoltre è possibile categorizzare il sistema, infatti la parte convettiva ha carattere iperbolico data la forma del tipo $\frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$, mentre la parte diffusiva ha carattere parabolico $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$. Queste caratteristiche permettono di identificare i metodi numerici necessari per risolvere il problema, infatti per la parte temporale si userà un algoritmo come quello di Runge-Kutta, mentre per la discretizzazione alle differenze finite, vista la natura iperbolica del problema,

saranno necessari molti accorgimenti completamente diversi da quelli che si avrebbero nel caso incomprimibile a partire dalla definizione delle condizioni al contorno.

3.1.1 Mesh

Come detto in precedenza per trarre una soluzione numerica dal problema in questo si farà uso di una discretizzazione alle differenze finite. Questo metodo come altri quindi presuppone la presenza di una griglia (*mesh*) in cui ai nodi si trovano i valori delle grandezze di interesse. Per esempio presa la velocità del fluido nel dominio, essa sarà espressa come

$$u = u(x, y, z, t) \quad (3.1.1)$$

ovvero una funzione dipendente dal tempo e dalle tre direzioni spaziali.

Utilizzando una griglia spaziale in cui in ogni nodo verrà valutata la funzione si ottiene invece:

$$u_{ijk}(t_n) \iff u(x, y, z, t) \quad (3.1.2)$$

con $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$, $k = 1, \dots, N_z$. Pertanto è possibile esprimere il problema in forma di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{d\phi_{ijk}}{dt} = \mathcal{L}[\phi_{ijk}] + \mathcal{N}[\phi_{ijk}] \quad (3.1.3)$$

per cui esistono vari metodi di risoluzione.

3.1.2 ODE

Come detto prima una equazione differenziale ordinaria (ODE) si esprime nel seguente modo:

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi(t), t) \quad (3.1.4)$$

posti ϕ come funzione incognita da trovare e f funzione non lineare. Per la risoluzione si opera una discretizzazione temporale, dividendo quindi il tempo in tanti piccoli Δt , e si integra nell'intervallo.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d\phi}{dt} d\tau = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\phi, \tau) d\tau \quad (3.1.5)$$

per cui:

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\phi, \tau) d\tau \quad (3.1.6)$$

in base a come viene approssimato l'integrale vengono distinti i vari metodi, come Eulero esplicito e implicito, Crank-Nicolson, ecc.

3.1.3 Metodi Runge-Kutta

Uno dei metodi più utilizzati è sicuramente quello di Runge-Kutta. Esso riprende la logica *predictor-corrector* rendendo esplicito di fatto un metodo implicito tenendo però una accuratezza maggiore. In questo caso per ottenere la soluzione a t_{n+1} da t_n si eseguono tanti *stadi* intermedi con Eulero esplicito, dove il numero di essi definisce appunto il numero del metodo.

In generale Runge-Kutta è così formulato:

$$\begin{cases} \phi^{(1)} = \phi^n \\ \phi^{(2)} = \phi^n + \alpha_2 \Delta t f(\phi^{(1)}, t_1) \\ \dots \\ \phi^{(k)} = \phi^n + \alpha_k \Delta t f(\phi^{(k-1)}, t_{k-1}) \\ \phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \sum_{k=1}^s \beta_k f(\phi^{(k)}, t_{n+1}) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Per le simulazioni verrà utilizzato Runge-Kutta a 3 stadi, a cui corrisponde un'accuratezza di ordine 3. La peculiarità dei metodi Runge-Kutta del terzo ordine o superiore sta nel fatto che, oltre ad essere molto accurati anche se dispendiosi, includono nelle curve di stabilità marginali anche gli autovalori immaginari puri mantenendoli quindi stabili.

I coefficienti per RK3 sono i seguenti:

RK	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
3	0	1/3	2/3	1/4	0	3/4

3.1.4 Metodi differenze finite

Per la risoluzione delle derivate spaziali esiste un'ampia varietà di metodi, ognuno con i suoi pro e contro. In *Uranos* vengono utilizzate le differenze finite, per cui la derivata di una funzione viene approssimata come un rapporto incrementale troncato con un certo ordine di accuratezza. Di seguito la formulazione generale come esempio per la derivata prima e seconda:

$$\frac{d\phi_i}{dx} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{s=s_{min}}^{s=s_{max}} \alpha_s^{(1)} \phi_{i+s} + \mathcal{O}(\Delta x^{s_{max}-s_{min}}) \quad (3.1.8)$$

$$\frac{d^2\phi_i}{dx^2} = \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{s=s_{min}}^{s=s_{max}} \alpha_s^{(2)} \phi_{i+s} + \mathcal{O}(\Delta x^{s_{max}-s_{min}}) \quad (3.1.9)$$

dove $\alpha_s^{(1)}$ e $\alpha_s^{(2)}$ sono i coefficienti delle combinazioni provenienti dalle serie di Taylor, mentre s_{min} e s_{max} sono gli estremi dello *stencil computazionale*.

Come si è già visto in precedenza quindi il dominio spaziale viene discretizzato attraverso una griglia (*mesh*) dove in ogni nodo di essa verranno valutate le varie grandezze. Di fondamentale importanza per ottenere dei risultati validi è che il sistema ottenuto dalla discretizzazione sia stabile. Perché sia tale bisogna adottare un Δt sufficientemente piccolo da permettere all'autovalore maggiore di essere dentro il bacino di stabilità del metodo. Si definisce quindi il *numero di Courant-Friedrich-Lewy* come:

$$CFL = |\lambda_{max} \Delta t| \quad (3.1.10)$$

Questo numero è fondamentale, infatti abbassarlo o alzarlo comporterà ad un cambiamento della stabilità. Giocando su questo valore infatti, se alzato troppo, si determina un Δt troppo alto che comporta all'uscita dal bacino di stabilità, in questo caso, di RK3.

Lo schema alle differenze finite utilizzato tuttavia non ricade propriamente in quelli ottenibili dal caso generale illustrato precedentemente, infatti saranno necessari molti accorgimenti che renderà il metodo molto più articolato e complesso.

3.2 Metodi numerici per il comprimibile

Le simulazione che verranno eseguite e mostrate poi sono a regime supersonico, pertanto la comprimibilità dell'aria è centrale e questo comporta alla formazione di onde d'urto e d'espansione quindi discontinuità dovute al carattere iperbolico non-lineare del termine convettivo. Questo comporta a dover trovare dei metodi stabili e robusti che riescano a gestire le discontinuità.

Questi sistemi fisico come la maggior parte può essere rappresentato in modo sufficientemente accurato dalle leggi di conservazione per cui preso il dominio \mathcal{D} :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{U} dV = - \int_{\partial \mathcal{D}} \Phi_j(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.2.11)$$

che, utilizzando il teorema della divergenza e nell'ipotesi di \mathbf{U} sufficientemente regolare, diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -J^j \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \quad \text{con} \quad J^j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \mathbf{U}} \quad (3.2.12)$$

ovvero la formulazione *quasi lineare*.

La legge è iperbolica se tutte le matrici jacobiane J^j associate alla funzione di flusso Φ_j hanno autovalori reali. Il sistema di Navier-Stokes come molti altri non è puramente iperbolico data la natura parabolica del termine diffusivo, pertanto quest'ultima parte viene assunta trascurabile per cui la soluzione dovrà essere una *soluzione di entropia*, per cui:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}_\epsilon = \mathbf{U} \quad (3.2.13)$$

Tale tipologia di leggi, se non lineari come il termine convettivo di Navier-Stokes, svilupperanno delle discontinuità pertanto il problema può essere risolto unicamente in forma debole ovvero soddisfacendo il problema *quasi-ovunque*, se non in un numero finito di punti di discontinuità dove deve valere la condizione di *Rankine-Hugoniot generalizzata*, per cui:

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \quad (3.2.14)$$

dove l ed r indicano a sinistra e destra della discontinuità.

3.2.1 Schemi conservativi

Data la presenza di discontinuità insito nei problemi iperbolici, si sono sviluppati dei metodi che sfruttano dei bilanci integrali dato che l'operazione di integrazione può essere effettuata anche su funzioni che presentano delle discontinuità. Tali schemi sono detti *conservativi* e garantiscono quindi le proprietà di conservazione dell'equazione iperbolica e rispettano le relazioni di salto della legge di Rankine-Hugoniot generalizzata.

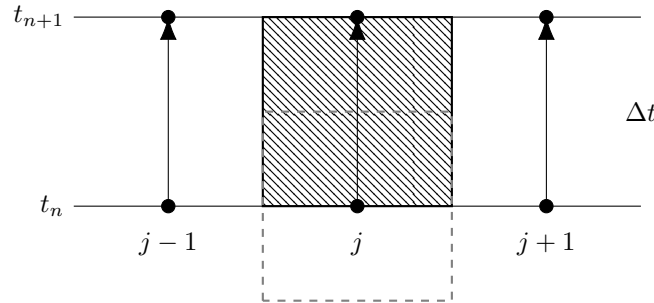


Figura 3.2.1: Schema visivo del dominio di integrazione

Partendo da:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.2.15)$$

per cui integrando nell'intervallo spaziale $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ e temporale $[t_n, t_{n+1}]$ (fig.3.2.1):

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_{n+1}) dx = \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j-\frac{1}{2}}, t)) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (3.2.16)$$

Ponendo ora

$$U_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(x_{j+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (3.2.17)$$

Rispettivamente la media integrale nell'intervallo spaziale della variabile u all'istante t_n e a destra la funzione di flusso numerico associata a u a bordo cella.

Indicando poi con $\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n$ un'approssimazione numerica, come può essere uno schema upwind di un certo ordine, della funzione di flusso numerico $\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}$, si ottiene lo schema numerico conservativo per un problema iperbolico:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (3.2.18)$$

Dal teorema di Lax & Wendroff e da quello di Hou & LeFloch si può affermare che gli schemi conservativi sono gli unici che possono fornire una soluzione debole di un problema di conservazione iperbolico. Tuttavia serve la garanzia che la soluzione ottenuta sia una soluzione di entropia. Considerando quindi il problema convettivo diffusivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

il flusso numerico associato sarà:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f_j^n - f_{j-1}^n) - \frac{\epsilon}{\Delta x} \delta U_{j+\frac{1}{2}} \quad (3.2.19)$$

composto da due termini:

- il termine convettivo legato alla discretizzazione della parte non lineare;
- il termine viscoso derivante dalla discretizzazione del termine diffusivo che ha natura fisica.

Serve dunque, per risolvere il problema puramente convettivo, uno schema con flusso numerico dove la parte diffusiva è evanescente all'aumentare della risoluzione della mesh. Questo contributo è di fatto una *viscosità o dissipazione artificiale*.

3.2.2 Flux Splitting

Per avere uno schema conservativo che converga alla soluzione di entropia si utilizzano le discretizzazioni alle differenze finite upwind/downwind poiché la parte immaginaria del loro numero d'onda ha proprio le caratteristiche di viscosità artificiale ricercata. Tuttavia presentano il problema la propagazione della velocità nel flusso può cambiare di segno portando quindi ad avere un'amplificazione artificiale, distruggendo la soluzione. Per ovviare a tale problema si ricorre alla tecnica di *flux splitting*.

La tecnica di flux splitting di fatto suddivide il flusso che propaga da sinistra verso destra da quelle in verso contrario (da destra verso sinistra):

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u) \quad (3.2.20)$$

in tal modo si applicherà uno schema upwind al flusso f^+ e downwind per f^- .

Dall'equazione 3.2.20, per esempio, applicando il metodo di Lax & Friedrichs per uno schema upwind del primo ordine si ottiene un flusso numerico pari a:

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+1}) - \frac{\alpha}{2} \delta U_{j+\frac{1}{2}} \quad (3.2.23)$$

dove l'ultimo termine è viscosità artificiale. Tale dissipazione sarà tanto maggiore quanto più intenso è il gradiente (per esempio nei pressi di un'onda d'urto) e svanirà tanto più la risoluzione aumenta.

3.3 Schema alle differenze finite

In Uranos viene utilizzato uno schema, alle differenze finite, ibrido. In tal modo è possibile utilizzare l'algoritmo più efficiente a seconda della situazione. Verrà utilizzato uno schema WENO per le parti più irregolari, dove quindi sono presenti onde d'urto e quindi discontinuità. Mentre per la parte più regolare dove il flusso non necessita di particolari accorgimenti numerici si utilizzerà lo schema KGP6 che consente quindi una velocità maggiore.

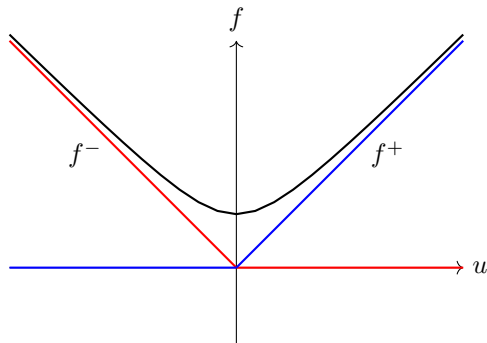


Figura 3.2.2: Schematizzazione della tecnica di flux splitting, colorata per Steger & e Warming, nero per Lax & Friedrichs.

La tecnica più semplice, e anche quella utilizzata nell'articolo di riferimento delle simulazioni DNS, è quella di *Steger & e Warming*:

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn}[f'(u)])f(u) \quad (3.2.21)$$

Purtroppo tale metodo soffre di problemi di stabilità a causa della presenza della discontinuità dove f' cambia segno, pertanto si usa molto più spesso la tecnica di Lax & Friedrichs:

$$f^\pm(u) = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u) \quad \text{con} \quad \alpha = \max_u |f'(u)| \quad (3.2.22)$$

Che permette la continuità alla funzione che approssimerà tanto più il modello di Steger & e Warming tanto più sarà risolta la griglia e tanto più è alto l'ordine di accuratezza del metodo alle differenze finite utilizzato.

3.3.1 WENO5

Gli schemi WENO (*Weighted Essentially Non Oscillatory*) sono un'estensione degli schemi ENO per cui si seleziona dinamicamente lo stencil computazionale dove la funzione sia il più regolare possibile.

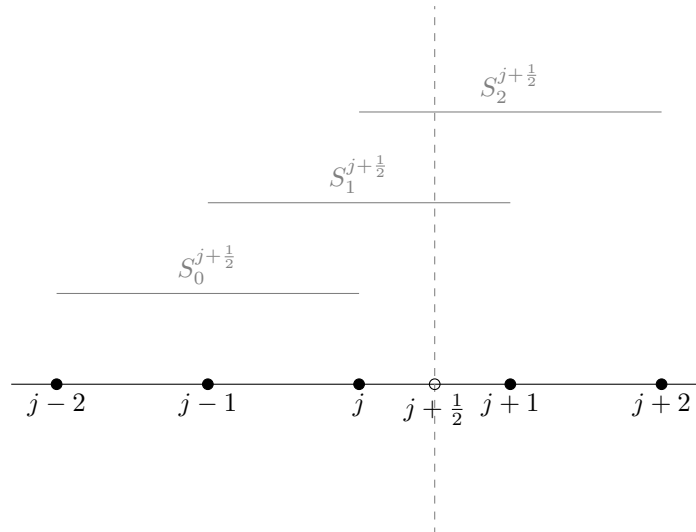


Figura 3.3.3: Schematizzazione dello stencil computazionale in WENO5

Lo schema quindi prevede 3 interpolazioni differenti: S_0 , S_1 e S_2 . In questo modo si possono escludere quelle più irregolari (banalmente quelle attraversate da una discontinuità). Questo viene fatto pesando non linearmente le interpolazioni, penalizzando appunto quelle più irregolari.

La procedura consente di avere alla fine un'accuratezza al quinto ordine dove il flusso è sufficientemente regolare.

3.3.2 KGP6

Lo schema WENO5 è appunto adatto per le regioni con presenza di discontinuità in quanto riesce a mantenere la stabilità. Nelle regioni però dove non si hanno particolari irregolarità nel flusso non è ottimale soprattutto in termini di costo computazionale ma anche perché comunque introduce una viscosità artificiale non voluta.

Per questo motivo nelle regioni più regolari si adotta uno schema centrato del sesto ordine sviluppato da *Kennedy-Grüber-Pirozzoli* (da qui KGP6).

Preso per esempio per l'eq. di quantità di moto la derivata del trasporto di una certa grandezza scalare:

$$\left. \frac{\partial \rho u_j \phi}{\partial x_j} \right|_i \simeq \frac{1}{\Delta x_j} (\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}}) \quad (3.3.24)$$

Il flusso numerico, come illustrato da Pirozzoli (2010), può essere dunque scritto:

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = 2 \sum_{l=1}^L a_l \sum_{m=0}^{l-1} (\widetilde{\rho, u, \phi})_{i-m,l} \quad (3.3.25)$$

dove

$$(\widetilde{\rho, u, \phi})_{i,l} = \frac{1}{8} (\rho_i + \rho_{i+l})(u_i + u_{i+l})(\phi_i + \phi_{i+l}) \quad (3.3.26)$$

e $a_1 = 1/60$, $a_2 = -3/20$ e $a_3 = 3/4$.

Capitolo 4

Simulazioni

Contents

4.1	Setup di simulazione	31
4.1.1	Setup DNS	31
4.1.2	Setup RANS	33
4.1.3	Setup WMLES	35
4.2	2deg	36
4.2.1	Analisi monodimensionale preliminare	36
4.2.2	Post-processing dei dati WMLES	40
4.2.3	Grandezze a parete	43
4.2.4	Campi	46
4.3	5deg	50
4.3.1	Analisi monodimensionale preliminare	50
4.3.2	Post-processing dei dati WMLES	51
4.3.3	Grandezze a parete	54
4.3.4	Campi	55
4.4	Confronto	59

In questo capitolo si analizzeranno le simulazioni eseguite comparando i risultati con quelli illustrati nell'articolo [15], i quali fanno riferimento a delle simulazioni DNS eseguite. Si partirà quindi con il mostrare il set-up di simulazione, ovvero le dimensioni del dominio, angoli usati per la rampa e per l'onda d'urto, per poi proseguire con un elenco dei vari parametri del fluido fissati, come numero di Reynolds, Mach e altri che ne definiscono tutte le caratteristiche.

Si descriveranno brevemente le procedure per la lettura e l'analisi dei dati, per poi quindi passare alla vera e propria analisi delle simulazioni comparando caso per caso i dati con quelli delle simulazioni DNS di riferimento e alla fine confrontando tra loro tutti i dati.

4.1 Setup di simulazione

Nelle due sottosezioni seguenti verranno illustrati i setup di simulazioni utilizzati rispettivamente nell'articolo di riferimento con la DNS e quello utilizzato per questo elaborato nelle simulazioni WMLES. Ovviamente si riscontreranno delle differenze dovute alla natura intrinsecamente diversa delle due tipologie di simulazione, a partire dalla mesh e quindi dal numero di celle utilizzate, ma anche in certi parametri utilizzati.

4.1.1 Setup DNS

In [15] il dominio consiste in un canale il quale può essere suddiviso in due zone di interesse. La prima parte è fondamentalmente un parallelepipedo in cui si sviluppa il flusso dall'inflow e

viene generata l'onda d'urto. Come si può anche vedere in fig.4.1.1 è il primo tratto orizzontale, quindi con gradiente di pressione nullo, da $x = -365mm$ a $x = 0mm$, che quindi non porta al distacco dello strato limite come nel caso di gradiente di pressione avverso, se non per altre cause come verrà illustrato poi.

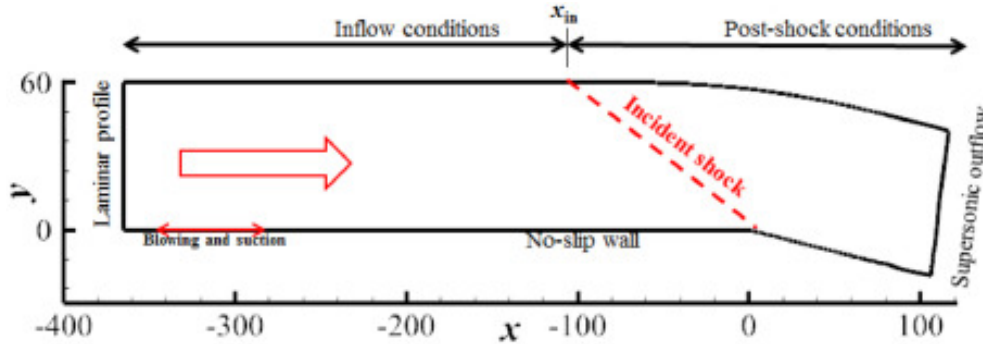


Figura 4.1.1: Schematizzazione del dominio di calcolo e condizioni al contorno.

A valle si trova la rampa di espansione che va quindi da $x = 0mm$ a $x = 100mm$. In questa zona il flusso dovrebbe venir accelerato per effetto delle onde d'espansione di Prandtl-Meyer, tuttavia l'effetto dell'interazione onda d'urto - strato limite limiteranno gli effetti. L'angolo di tale rampa è l'elemento di variazione della geometria del dominio.

Nell'articolo gli angoli utilizzati sono 0° , quindi dominio a parallelepipedo orizzontale semplice, 2° , 5° e 10° .

L'altezza del canale è di $60mm$ con una profondità di $14mm$.

Come condizioni al contorno, viene imposto un profilo di velocità laminare stazionario all'inflow ottenuto da una simulazione aggiuntiva in condizioni simili con flusso laminare. Per avere uno strato limite supersonico turbolento prima della rampa di espansione si è utilizzato un metodo di transizione laminare-turbolenta per il innescare il flusso laminare. Viene inoltre aggiunta una regione di risucchio da $x = -335mm$ a $x = -315mm$ per evolvere lo strato limite turbolento.

L'onda d'urto che devia il flusso di 12° parte da $x = -104mm$ ed è generata applicando le relazioni di salto di Rankine-Hugoniot.

Il wall è in condizione *no-slip* e isoterma con temperatura costante $T_w = 307K$. In profondità è applicata la condizione di periodicità in modo da avere un dominio relativamente infinito in questa direzione e risentire meno degli effetti di parete.

La mesh (fig.4.1.2a) si infittisce nella regione di interazione tra strato limite e onda d'urto poiché in questa regione ci saranno la maggioranza dei fenomeni di interesse con forti gradienti e cambi di direzione del flusso; e ovviamente anche in prossimità della parete per definire meglio lo strato limite stesso il quale diventando turbolento sarà luogo a strutture vorticosi di interesse in tutta la lunghezza del dominio. Il numero di celle utilizzate è $N_x \times N_y \times N_z = 3200 \times 200 \times 140$.

Le condizioni del fluido sono le seguenti:

- Gas perfetto;
- Viscosità dinamica molecolare ottenuta attraverso la legge di Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 110.4}{T + 110.4}, \text{ con } \mu_0 = 1.711 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ e } T_0 = 273.15 \text{ K};$$

- per le condizioni di inflow si ha Numero di Mach $M_\infty = 2.9$;
- Temperatura statica in free-stream $T_\infty = 181K$;
- Numero di Reynolds dello spessore di quantità di moto $\mathbf{Re}_\theta = 2300$;

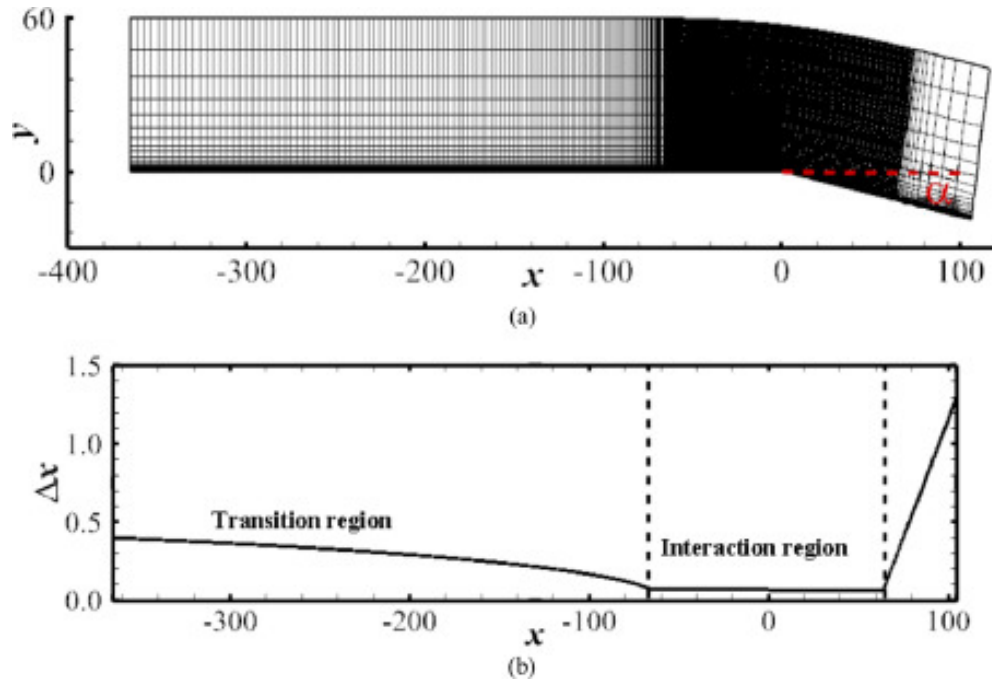


Figura 4.1.2: Schematizzazione del dominio di calcolo e condizioni al contorno.

4.1.2 Setup RANS

Le simulazioni RANS verranno svolte unicamente come confronto e per verificare che la presenza del ΔT a parete ha un ruolo trascurabile nei dati finali. Tali simulazioni svolte con *Ansys Fluent* comunque seguono le indicazioni fornite nell'articolo di riferimento delle simulazioni DNS.

Partendo dalla geometria, si sono utilizzate delle dimensioni leggermente più ridotte a valle per risparmiare celle di calcolo, comunque le strutture vorticosi dello strato limite nelle RANS non vengono simulate quindi non c'è bisogno dello spazio perché si sviluppino.

Come dimensioni in orizzontale quindi si è andati da $x = -154\text{mm}$ a $x = 100\text{mm}$, in verticale si arriva ad un'altezza di 60mm come nell'articolo e lo stesso per la profondità di 14mm . Dato il fatto che da *Fluent* non è possibile generare un'onda d'urto dal nulla, si è optato per avere una rampa di 12° nella parete superiore a $x = -54\text{mm}$ in modo che l'onda incidesse a $x = 0\text{mm}$ come previsto.

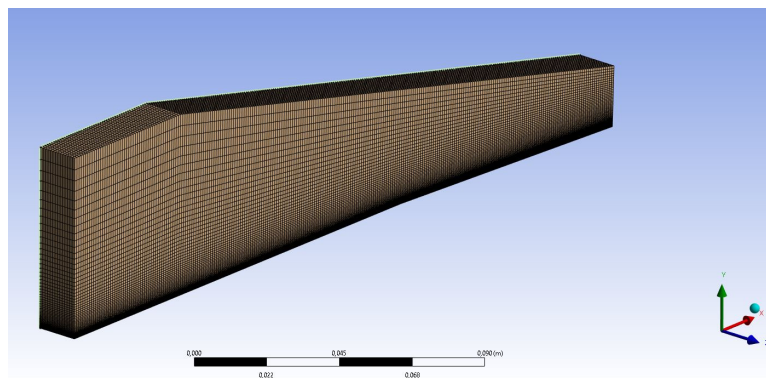


Figura 4.1.3: Foto della mesh ottenuta da Ansys, si nota la griglia di calcolo più fitta in corrispondenza dello strato limite.

La mesh è composta da 213953 elementi con le seguenti suddivisioni:

- parete verticale all'inflow con 60 suddivisioni ed un bias factor di 50 in modo da avere una migliore risoluzione allo strato limite;
- 154 suddivisioni nel primo tratto orizzontale che sarà una parete solida senza bias;
- 100 suddivisioni per la rampa inclinata senza bias;
- 14 suddivisioni in profondità senza bias;
- nella parete di outflow si imposto un bias factor pari a 10 per lo strato limite senza imporre un numero di suddivisioni.

Per avere una mesh il più strutturata possibile si è imposto un *Face Meshing* alla parete laterale.

Dato che sono simulazioni comprimibili quindi la temperatura assume un ruolo rilevante, nelle equazioni da risolvere è stata compresa l'energia. Come modello di turbolenza è stato scelto l'SST $k-\omega$ in quanto più stabile e preciso nella risoluzioni di fenomeni con forti gradienti ed in presenza dello strato limite rispetto ad altri modelli come $k-\epsilon$ o altri $k-\omega$.

Le condizioni al contorno imposte sono le seguenti:

- l'*inlet* è di tipo *pressure far field* a cui viene assegnato un Mach Number pari a $M = 2.9$ ed una temperatura di $T = 181K$, ovvero la temperatura statica di ingresso fornita nell'articolo. Scegliendo tale tipologia di condizione al contorno la soluzione risulta essere più stabile rispetto ad un *velocity inlet*;
- l'*outlet* è caratterizzato da un *pressure outlet* con una *backflow direction* impostata normale alla parete del dominio, la *backflow pressure* su pressione totale e la *backflow total temperature* pari a $T_0 = 485.442K$ calcolata da $T_0 = T(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2)$;
- la parte orizzontale superiore viene impostata come l'inlet, quindi *pressure far field* con gli stessi parametri;
- le pareti laterali vengono impostate con la condizione di *symmetry*;
- la parete inferiore, orizzontale e rampa, viene impostata come *wall* stazionario. Verranno provati i casi con flusso di calore pari a $0W/M^2$ e con temperatura pari a $307K$ come previsto nell'articolo;
- la parete inclinata superiore viene impostata come *wall* per generare l'onda d'urto incidente.

Tali condizioni al contorno sono tutte caratterizzate da una pressione di Gauge pari a $0Pa$ in quanto viene imposta una operating pressure pari alla pressione atmosferica di $101325Pa$.

Come si può vedere dall'immagine in figura 4.1.4 la parete inclinata superiore genera un'onda d'urto come voluto di 30° . Oltre a quest'ultima però si generano altre onde a valle in prossimità dell'outlet dovute alla riflessione delle onde tra le due pareti, inferiore e superiore. Questo tuttavia non è un problema in quanto essendo in regime supersonico ciò che succede a valle non influenza ciò che succede a monte.

Inoltre si può notare anche la presenza dello strato limite nella parete superiore ma anche questo non influirà nei risultati in quanto verranno analizzati quelli nella parete inferiore abbastanza distante da non risentire delle influenze della prima.

Le RANS eseguite, oltre come confronto, hanno lo scopo anche di verificare la trascurabilità della presenza della temperatura a parete. Per questo motivo sono state fatte delle simulazioni comparative i cui risultati sono riportati in figura 4.1.5. Da questi grafici si può notare che per la pressione a parete non c'è nessuna differenza, mentre per il coefficiente d'attrito in presenza di una temperatura più alta a parete si ha un leggero incremento dei valori.

Nel caso a 2 deg sono presenti dei picchi nella zona $x \in [70 - 100]mm$ dovuti alla formazione delle riflessioni e relative interazioni come anticipato precedente che non hanno comunque influenza sui risultati di ascissa inferiore.

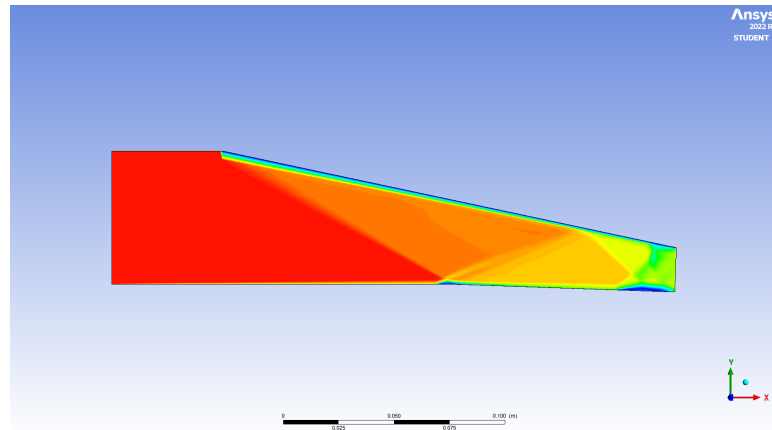
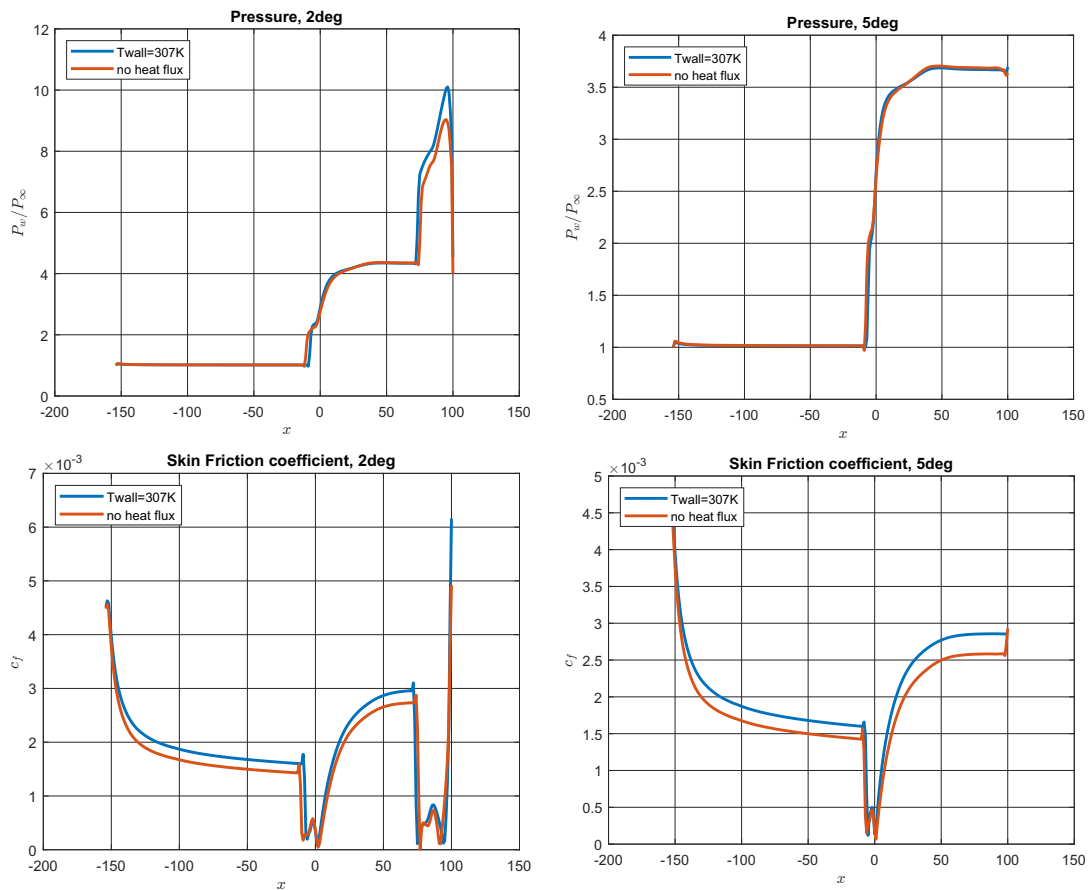


Figura 4.1.4: Contour plot RANS del numero di Mach nel caso 2deg.

Figura 4.1.5: Confronto con e senza T_{wall} nelle simulazioni RANS.

4.1.3 Setup WMLES

Le simulazioni che verranno eseguite con la tecnica WMLES prevedono delle inclinazioni per la rampa di espansione pari a 2° e 5° , i cui dati verranno poi confrontati con quelli presenti nell'articolo delle simulazioni DNS.

Il dominio (fig.4.1.6) in questo caso è un parallelepipedo a cui viene aggiunto il trapezio che fa da wall, che verrà visto come tale attraverso il metodo *immersed-boundary*, pertanto già qui

si può notare una differenza nell'impostazione del problema. Infatti nelle simulazioni DNS la parete superiore curvava per prendere la stessa direzione della rampa, invece in questo caso la parete superiore resterà rettilinea. Nonostante ciò, tale differenza è ininfluyente per grandezze che si andranno a misurare a parete.

Le dimensioni del canale inoltre sono state ridotte rispetto a quanto visto prima per poter risparmiare nel numero di celle. In orizzontale infatti si va da $x = -45mm$ a $x = 45mm$, in verticale si arriva fino a $y = 10mm$, mentre in profondità da $z = -2mm$ a $z = 2mm$.

Essendo una simulazione WMLES non è necessario avere una risoluzione eccessiva della mesh, come nel caso DNS, in quanto le strutture vorticose più piccole non verranno prese in esame. Ha anche dei vantaggi rispetto ad una simulazione LES normale infatti il flusso non verrà completamente risolto a parete ma appunto modellato, consentendo quindi un grosso risparmio. La griglia è uniforme nelle direzioni x e z mentre in y è applicato un parametro di stretching pari a 3.75 in modo da definire meglio lo strato limite. Il numero di nodi in ogni direzione è pari a $N_x \times N_y \times N_z = 512 \times 130 \times 60$.

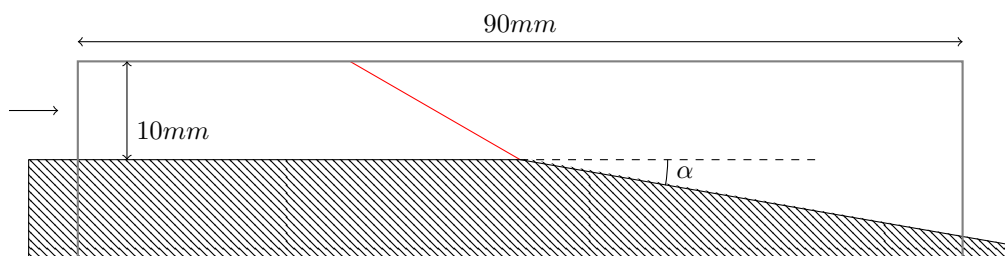


Figura 4.1.6: Rappresentazione del dominio utilizzato nelle simulazioni WMLES.

Le condizioni al contorno sono simili a quelle precedenti, quindi inflow supersonico, pareti laterali con condizione di periodicità e l'onda d'urto che cade a monte della rampa di espansione. Per i parametri del fluido si pongono:

- Viscosità dinamica molecolare ottenuta attraverso la legge di Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + 110.4}{T + 110.4}, \text{ con } \mu_0 = 1.711 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ e } T_0 = 273.15 \text{ K};$$

- Numero di Reynolds d'attrito $\mathbf{Re}_\tau = 400$;
- Numero di Prandtl $\mathbf{Pr} = 0.71$;
- Numero di Mach $\mathbf{M} = 2.91$.

La scelta del numero di Reynolds diverso è dettata dal fatto che in questo caso si parla di numero di Reynolds d'attrito e non di quantità di moto. Queste due grandezze sono comunque correlate come si può vedere in fig.4.1.7 per cui a $\mathbf{Re}_\theta = 2300$ corrisponde circa $\mathbf{Re}_\tau = 400$.

4.2 2deg

4.2.1 Analisi monodimensionale preliminare

Prima di procedere con le simulazioni vere e proprie utilizzando i metodi numerici precedente detti, è opportuno eseguire una prima analisi monodimensionale del problema. Tale studio infatti permetterà di avere quantomeno un'idea approssimata dell'ordine di grandezza delle grandezze che si andranno a considerare. Ovviamente il problema tra onda d'urto e strato limite è difficilmente riconducibile ad un classico problema di onde d'urto e d'espansione in sequenza per la presenza di vari fenomeni puramente tridimensionali. Tuttavia con le dovute ipotesi e

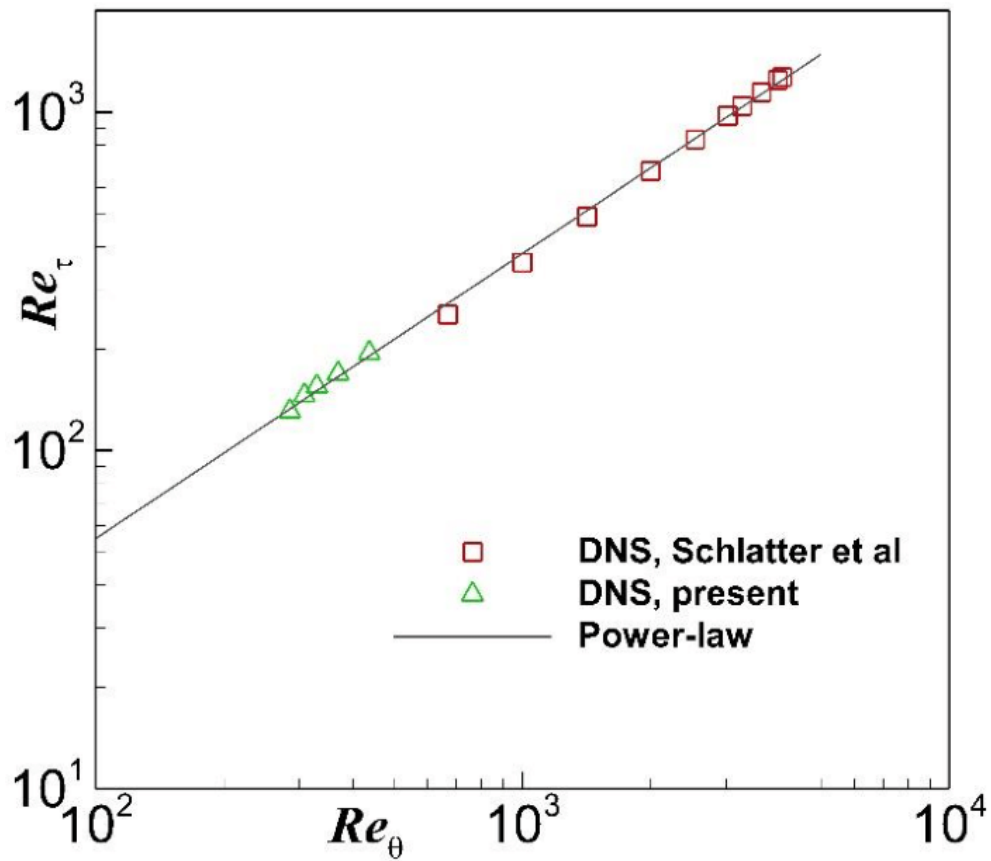


Figura 4.1.7: Relazione ottenuta da dati sperimentali tra Re_θ e Re_τ .

approssimazioni è possibile ricondurre tale fenomeno ad un problema monodimensionale che può fornire dei punti di partenza per l'analisi.

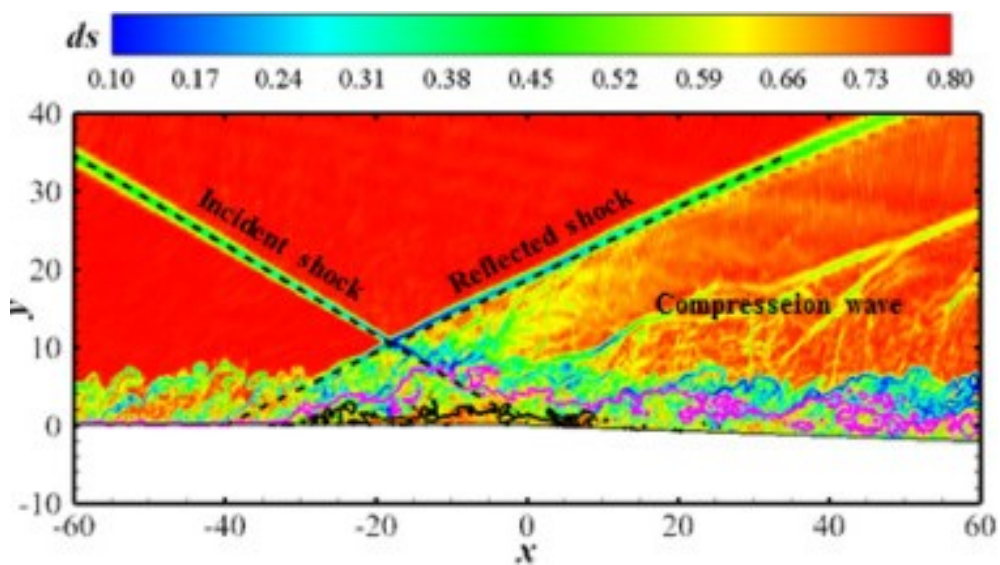


Figura 4.2.8: Istantanea del gradiente di densità a $z = 7\text{mm}$ della simulazione DNS a 2° .

Come si può vedere dalla fig.4.2.8 il comportamento del flusso è del tutto simile a quello del classico caso di interazione onda d'urto - strato limite senza la rampa di espansione a valle visibile alla fig.4.2.9. Questa infatti ha un ruolo marginale in una prima analisi qualitativa, con essa infatti si possono notare solamente delle piccole differenze che comunque produrranno delle grosse variazioni nei risultati numerici.

Si può notare infatti che, con la presenza dell'espansione a valle, l'onda d'urto riflessa abbia un angolo minore rispetto all'orizzontale, avvicinandosi quindi più alla direzione della rampa e cercando così di mantenere invariato l'angolo tra essa e la superficie sottostante. Di conseguenza anche l'onda le onde di compressione a valle saranno leggermente più schiacciate verso la rampa lasciando lo spazio tra le due dove si trova l'onda di espansione poco più ristretto.

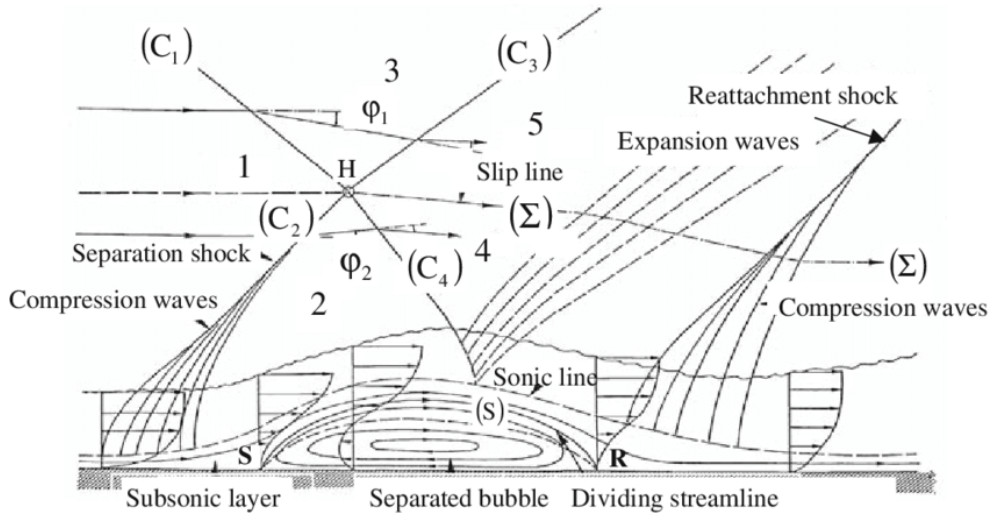


Figura 4.2.9: Schematizzazione dell'interazione onda d'urto obliqua - strato limite.

In questa analisi ovviamente i contributi viscosi, pertanto la presenza dello strato limite e della bolla di separazione, verranno trascurati pertanto è logico presupporre delle differenze rispetto al modello ideale, in particolare i risultati possono essere più grandi in valore assoluto data la non considerazione di fenomeni dissipativi.

Si parte dunque con un flusso supersonico a $M_1 = M_\infty = 2.9$ il quale incontra l'onda d'urto prevista dalle condizioni al contorno generata da una rampa a $\theta = 12^\circ$ dando così origine ad un'onda di $\beta = 30^\circ$, facilmente ottenibile dalla relazione $\theta - \beta - M$:

$$\tan(\theta) = 2 \cot(\beta) \frac{M_1^2 \sin^2(\beta) - 1}{M_1^2 (\gamma + \cos(2\beta)) + 2} \quad (4.2.1)$$

Attraverso le relazioni di salto per un urto è possibile ricavare le caratteristiche del fluido a valle dell'onda.

Prima di tutto, essendo un urto obliquo, bisogna considerare che il flusso non è normale all'onda per questo si considera il numero di Mach normale all'onda:

$$M_{n,1} = M_1 \cdot \sin(\beta) = 1.45 \quad (4.2.2)$$

Da qui si calcola il numero di Mach normale a valle dell'onda attraverso la relazione seguente:

$$M_{n,2}^2 = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{n,1}^2}{\gamma M_{n,1}^2 - \frac{\gamma-1}{2}} \quad \text{con} \quad M_{n,2} < 1 \quad (4.2.3)$$

per cui si ottiene $M_{n,2} = 0.72$

Da qui si ricava geometricamente il numero di Mach a valle:

$$M_2 = \frac{M_{n,2}}{\sin(\beta - \theta)} = 2.33 \quad (4.2.4)$$

Di conseguenza si può calcolare anche il rapporto tra la pressione a valle e monte dell'urto:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_{n,1}^2 - 1) = 2.286 \quad (4.2.5)$$

Da qui in poi è necessario fare delle supposizioni in quanto la presenza dello strato limite rende l'analisi più incerta. L'onda d'urto infatti che incontra il wall secondo la teoria classica priva degli effetti viscosi prevede una riflessione per cui θ_2 sarà ancora di 12° portando ad avere un β_2 maggiore di prima in quanto a parità di angolo il numero di Mach è minore, ma come si può vedere qualitativamente dalla fig.4.2.8 l'onda riflessa ha un angolo molto simile a quello iniziale, questo per via della presenza della rampa d'espansione a valle anche se poco ripida.

Qui si ipotizza pertanto un angolo $\theta_2 = 10^\circ$ come risultato dei 12° cioè l'angolo del flusso rispetto all'orizzontale e dei -2° angolo della rampa a valle.

Partendo dunque con $M_2 = 2.33$ e con $\theta_2 = 10^\circ$ utilizzando la relazione 4.2.1 si ottiene un angolo per l'onda d'urto riflessa pari a $\beta_2 = 35^\circ$.

Con un procedimento del tutto analogo a quello precedente quindi si calcolano le altre grandezze:

$$M_{n2,2} = M_2 * \sin(\beta_2) = 1.336 \quad (4.2.6)$$

da qui utilizzando la relazione 4.2.3 si ottiene $M_{n,3} = 0.768$ a cui corrisponde:

$$M_3 = \frac{M_{n,3}}{\sin(\beta_2 - \theta_2)} = 1.818 \quad (4.2.7)$$

A cui si associa, attraverso l'utilizzo dell'equazione 4.2.5, $\frac{p_3}{p_2} = 1.916$, per cui si ha:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 4.379 \quad (4.2.8)$$

A seguito dell'onda d'urto riflessa hanno origine delle onde d'espansione dovute alla presenza della bolla di separazione come visibile dalla fig.4.2.9. L'angolo di apertura delle onde di Prandtl-Meyer tuttavia è difficile da identificare, va a diminuire con l'aumentare dell'angolo della rampa di espansione. In tal caso si tiene $\theta_e = 12^\circ$.

In questo caso per calcolare le condizioni del flusso a valle delle onde d'espansione si usa la *funzione di Prandtl Meyer* $\nu(M)$, per cui:

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}(M^2 - 1)}\right) - \arctan(\sqrt{M^2 - 1}) \quad (4.2.9)$$

Per cui, partendo da $M_3 = 1.818$, si ottiene $\nu(M_3) = 21.245^\circ$. Da qui si procede per il calcolo di M_4 :

$$\nu(M_4) = \nu(M_3) + \theta_e = 33.245^\circ \quad (4.2.10)$$

per cui si ottiene $M_4 = 2.259$

Si calcola il rapporto tra le pressioni utilizzando le relazioni isoentropiche:

$$\frac{p_4}{p_3} = \frac{p_4}{p_04} \cdot \frac{p_04}{p_03} \cdot \frac{p_03}{p_3} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_3^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (4.2.11)$$

Per cui si ottiene $\frac{p_4}{p_3} = 0.503$ logicamente < 1 in quanto espansione, e quindi:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} = 2.205 \quad (4.2.12)$$

In ultima analisi restano le onde di compressione che si originano a valle della bolla di separazione. Anche queste tendono a dipendere dall'ampiezza dell'angolo della rampa di espansione. Se infatti con un angolo nullo queste onde sono divergenti rispetto all'onda riflessa, esse tendono ad avvicinarsi e restare più parallele man mano che l'angolo della rampa aumenta. Contando che tali onde originano già nella rampa inclinata si tiene un angolo $\theta_4 = 10^\circ$ e utilizzando sempre la 4.2.1 con $M_4 = 2.259$ si ottiene quindi un $\beta_4 = 36^\circ$. Pertanto:

$$M_{n,4} = M_4 \sin(\beta_4) = 1.328 \quad (4.2.13)$$

da qui, ancora una volta, utilizzando la relazione 4.2.3 si ottiene $M_{n,5} = 0.772$ a cui corrisponde:

$$M_5 = \frac{M_{n,5}}{\sin(\beta_4 - \theta_4)} = 1.761 \quad (4.2.14)$$

Per cui, attraverso l'utilizzo dell'equazione 4.2.5, $\frac{p_5}{p_4} = 1.891$, per cui si ha:

$$\frac{p_5}{p_1} = \frac{p_5}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p_1} = 4.169 \quad (4.2.15)$$

Quest'ultimo sarà il dato che si andrà a confrontare con l'analisi numerica nelle simulazioni.

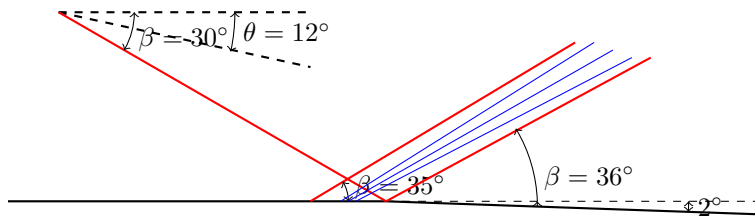
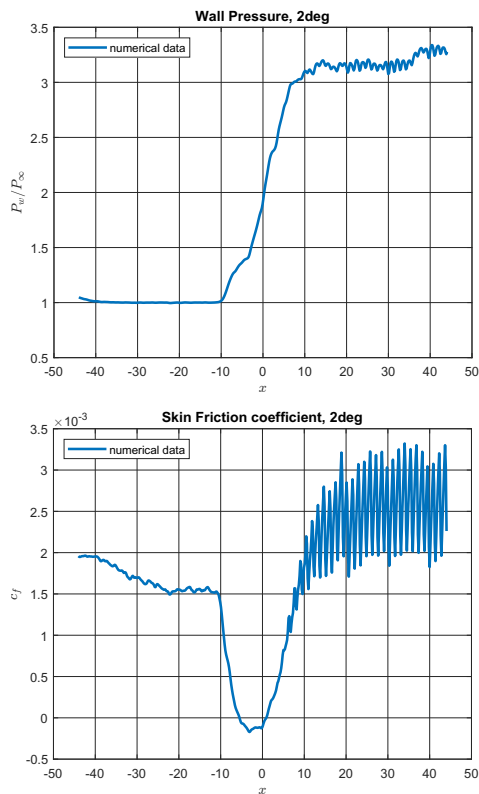


Figura 4.2.10: Modellazione monodimensionale per il caso di interazione onda d'urto - strato limite in presenza di una rampa di espansione a valle di 2° .

4.2.2 Post-processing dei dati WMLES

Una volta impostata ed eseguita la simulazione si può passare alla fase di post-processing dove vengono analizzati i dati sotto forma di grafici e contour plot.

Rimozione del rumore



Una volta effettuata la simulazione, come si può vedere dalle immagini a sinistra i dati ricavati risentono di molto rumore in particolare a seguito dell'interazione urto-strato limite, risultando di fatto illeggibili. Per questo motivo è necessario applicare dei metodi per *pulire* il segnale rappresentante una certa grandezza.

I metodi provati per rendere i grafici di più facile lettura sono i seguenti:

- media mobile;
- filtro passa basso;
- approssimazione polinomiale.

La media mobile (fig.4.2.11) è ottima per le parti in cui il rumore non è troppo elevato ma nella zona critica della rampa di espansione dove lo *skin friction coefficient* ne risente di più, questa non riesce a dare un segnale pulito anche aumentando di molto lo stencil computazionale della media.

Il filtro passa basso funziona bene in ognuna delle zone ma risente molto dei picchi presenti e perde totalmente l'andamento agli estremi anche se sono le zone meno influenti per l'analisi.

Per ottenere quindi un andamento il più pulito possibile si è quindi optato per l'approssimazione polinomiale, ovvero dati i punti si costruisce una funzione polinomiale di grado n che approssimi al meglio l'andamento di questi. Questo metodo tuttavia risente del fatto che i punti ottenuti come output dalla soluzione non hanno un andamento facilmente riconducibile ad una funzione polinomiale, infatti l'andamento presenta dei gradienti molto intensi in prossimità della bolla che verrebbero totalmente appianati da una funzione polinomiale.

Per risolvere tale problema si è suddiviso il dominio x in tre zone separate proprio nei punti a forte gradiente in modo da avere tre funzioni polinomiali che approssimano al meglio la loro parte di punti. Le tre zone sono contraddistinte nel seguente modo:

- zona pre-interazione strato limite - onda d'urto dove solitamente non si riscontra molto rumore;
- zona di interazione dove il rumore è ancora contenuto ma c'è un forte gradiente;
- zona post-iterazione corrispondente alla rampa di espansione dove il rumore è molto ampio.

Una volta ottenute le approssimazioni polinomiali visibili in figura 4.2.12 queste risulteranno essere discontinue infatti sono delle funzioni del tutto separate. Per risolvere tale problema senza creare cuspidi nel grafico si è ricorso ad una media mobile ottenendo quindi la funzione continua e priva di rumore visibile in fig.4.2.13.

I punti totali ottenuti dalle simulazioni *WMLES* sono 502 i quali vengono suddivisi appunto in 3 zone leggermente diverse per estensione in base alla grandezza fisica considerata. Nella seguente tabella si riassumono le suddivisioni dei punti e gradi dei polinomi ($deg(p)$) utilizzati:

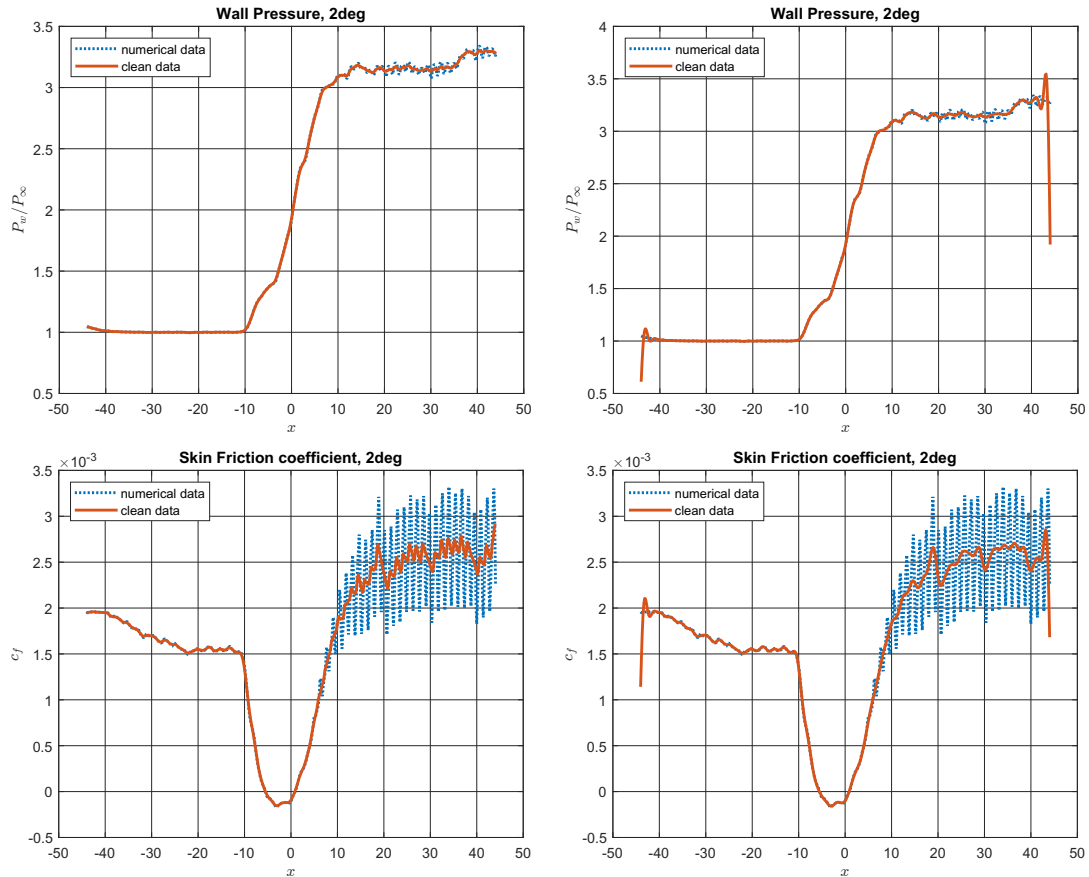


Figura 4.2.11: Confronto tra l'utilizzo della media mobile con uno stencil di 7 (a sinistra) e un filtro passa basso con frequenza di taglio normalizzata a 0.1 (a destra).

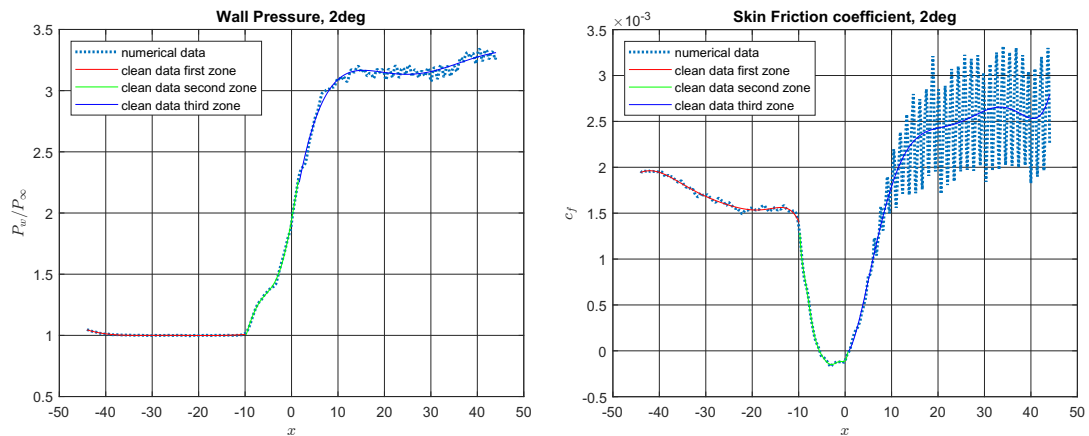


Figura 4.2.12: Pressione (a sinistra) e coefficiente d'attrito (a destra) a parete lungo x , particolare sulle 3 approssimazioni polinomiali usate.

-	intervallo	$deg(p)$	intervallo	$deg(p)$	intervallo	$deg(p)$
P_w/P_∞	0 – 195	5	195 – 260	5	260 – 502	5
c_f	0 – 195	7	195 – 255	9	255 – 502	7

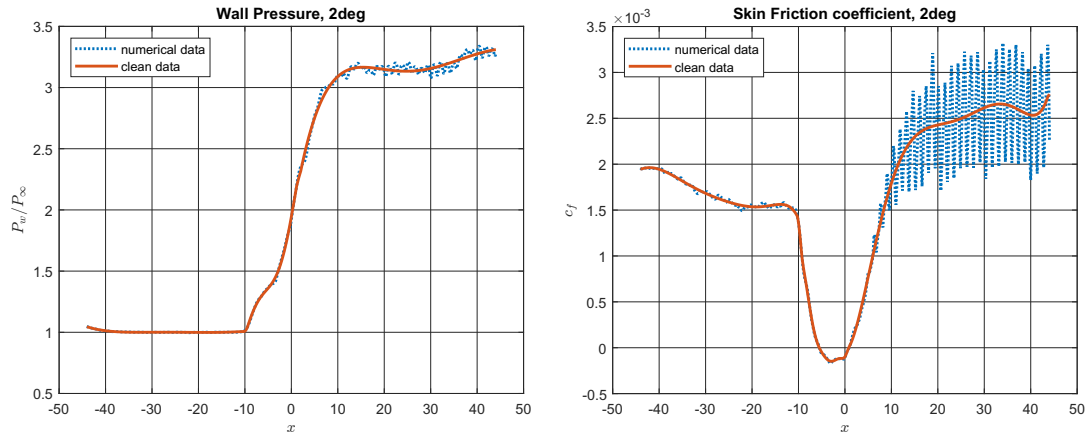


Figura 4.2.13: Pressione (a sinistra) e coefficiente d'attrito (a destra) a parete lungo x , risultato finale della pulizia del rumore dei dati.

Condizione di quasi-stazionarietà

Una volta puliti i dati, prima di passare all'analisi finale di questi, è necessario accertarsi che questi siano indipendenti dall'istante di tempo considerato e quindi dalle condizioni iniziali. Per arrivare a ciò bisogna verificare che si è raggiunta una condizione di quasi-stazionarietà in cui, con il proseguire delle iterazioni, non ci sia più una variazione dei campi presenti se non per piccole fluttuazioni, praticamente trascurabili, dovute ai fenomeni turbolenti presenti.

Facendo sempre riferimento alla *wall pressure* si può vedere (fig.4.2.14) come verso le 100,000 iterazioni la simulazione sembra convergere ad una condizione abbastanza stazionaria in cui non si registrano variazioni sensibili rispetto alle iterazioni precedenti. Tuttavia la simulazione potrebbe dipendere ancora dalle condizioni iniziali, pertanto si fa ripartire la simulazione dall'ultima iterazione per altre 100,000 iterazioni e come si può notare già da subito c'è un notevole distacco, la wall pressure risulta essere infatti molto più alta e si può notare anche all'inizio dell'incremento come si forma uno scalino dovuto alle onde di compressione a inizio della bolla di separazione.

Questo processo viene ripetuto una seconda volta, quindi si fa ripartire la simulazione dall'iterazione 200,000 fino alla 300,000 per vedere se effettivamente si è arrivati ad una condizione in cui non ci sono più variazioni sensibili e si ha la totale indipendenza dalle condizioni iniziali. Questo avviene, infatti si può vedere come i risultati ottenuti sono praticamente gli stessi delle iterazioni precedenti.

Per lo *skin friction coefficient* in fig.4.2.15 il discorso è analogo a quello fatto in precedenza. Le prime 100,000 iterazioni dipendono infatti ancora dalle condizioni iniziali e solo con le successive si ha la perdita di dipendenza per cui si vede appunto un notevole incremento delle dimensioni della parabola corrispondente alla presenza della bolla di separazione. In questo caso è più facile notare come le iterazioni 100 – 200,000 e 200 – 300,000 seguano gli stessi andamenti per i range intermedi a sottolineare l'indipendenza dalle condizioni iniziali.

4.2.3 Grandezze a parete

Wall Pressure

Partendo dall'analisi della wall pressure si possono subito notare le variazioni che subiscono i campi del fluido all'interno del dominio. La pressione a parete infatti è la stessa di quella esterna in quanto lungo l'altezza dello strato limite questa resta costante e non viene influenzata dai vortici come nel caso dei campi di velocità.

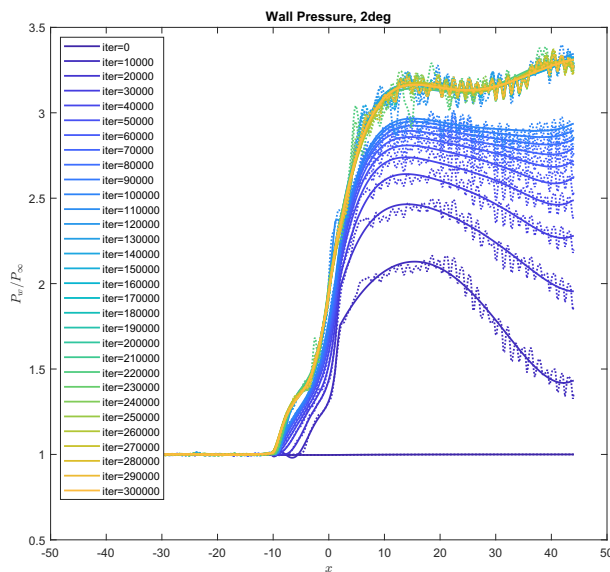


Figura 4.2.14: Storia dell'andamento della Wall-Pressure (su pressione di riferimento) in relazione al numero di iterazioni.

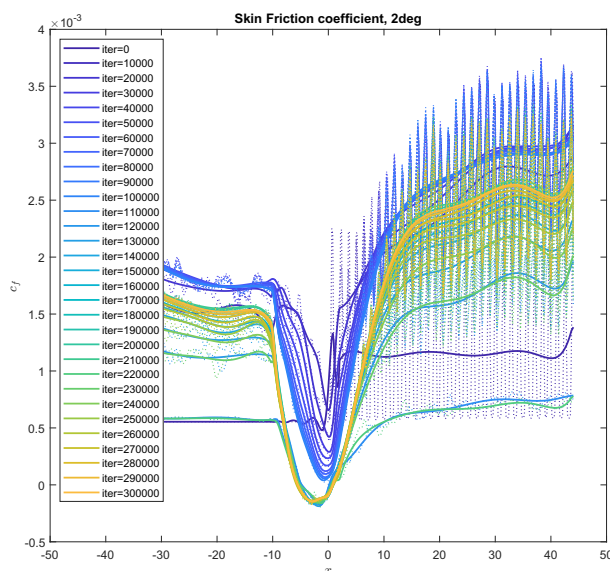


Figura 4.2.15: Storia dell'andamento dello skin friction coefficient in relazione al numero di iterazioni.

Nel grafico in fig.4.2.16 (come nei precedenti) la pressione a parete è riportata in rapporto alla pressione p_∞ di riferimento per questo nella prima parte il valore è unitario in quanto il flusso non subisce modifiche.

Facendo riferimento alla curva arancione, ovvero quella relativa ai risultati WMLES, si può vedere come verso $x = -10\text{mm}$ si ha un rapido incremento della wall pressure che continua con un piccolo flesso e poi continua a salire. Il primo incremento è dovuto alla presenza delle onde di compressione di separazione prima della bolla di separazione che vengono riflesse proprio per la presenza della bolla.

Proseguendo nella curva si continua con l'innalzamento dei valori di pressione in un brevissimo spazio data la natura discontinua delle onde d'urto, per poi arrivare a circa $x = 10\text{mm}$ in

cui la pressione resta pressoché costante fino alla fine della rampa di espansione. L'apice quindi è raggiunto una volta si è superata l'ultima onda d'urto a valle della bolla di separazione e delle onde di espansione che susseguono l'onda riflessa. Ha origine quindi un plateau che nel caso WMLES si assesta attorno ai valori di P_w/P_∞ pari a 3.2 – 3.3 con un piccolo incremento alla fine dovuto alla riflessione delle onde in prossimità delle condizioni al contorno.

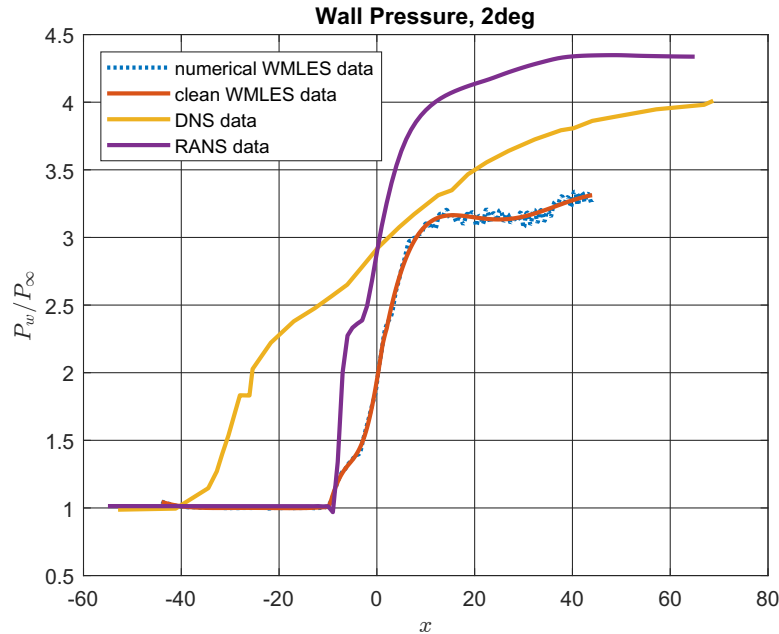


Figura 4.2.16: Comparazione tra i risultati della wall pressure ottenuti dalle simulazioni DNS dell'articolo, WMLES e RANS.

Confrontando la curva WMLES, appena descritta, con quella relativa ai dati provenienti dalle simulazioni DNS si può vedere come esse risultino essere molto differenti. Questo è dovuto alla diversa natura dei metodi per la modellazione della turbolenza utilizzati, la curva gialla infatti rispecchia quello che si può vedere anche nelle istantanee dei campi di gradiente di densità alla fig.4.2.8 ovvero un'interazione urto/strato limite molto più estesa in dimensioni rispetto a quella verificatasi nel caso WMLES.

La bolla di separazione quindi inizia molto prima a circa $x = -40mm$ con un più graduale innalzamento del valore di pressione. Ovviamente anche in questo caso il rapporto tra la wall pressure e quella di riferimento si assesta attorno ad un valore, circa $P_w/P_\infty = 4$, ma tale andamento costante si ottiene circa da $x = 60mm$ in poi, fuori dal grafico.

La curva relativa alle simulazioni RANS, sovrastima il valore di pressione a seguito dell'interazione. Interessante notare che nonostante non vengano simulati tutti i fenomeni di riflessione delle onde la bolla, comunque presente, inizi sempre in corrispondenza di quanto trovato nelle simulazioni WMLES e compare anche lo scalino iniziale dovuto all'onda riflessa.

Skin friction coefficient

Per lo skin friction coefficient il discorso è analogo a quello fatto per la wall pressure, infatti dalla fig.4.2.17 si può subito vedere come la curva arancione dei dati WMLES inizi la discesa sempre circa a $x = -10mm$, punto di attacco delle onde di compressione dovute alla riflessione. Il valore del coefficiente d'attrito a parete a questo punto scende fino ad arrivare a valori negativi dovuti alla presenza della bolla di separazione dove, essendo lo c_f proporzionale al wall shear stress τ_w , si ha un gradiente di velocità in y negativo a parete dovuto ai vortici nella bolla.

Una volta passata la bolla il coefficiente d'attrito torna a crescere fino a valori più alti di quelli iniziali che si assestano attorno a 2.5.

Anche in questo caso i dati WMLES e DNS hanno delle differenze importanti in termini di scala. infatti entrambi presentano un avvallamento in corrispondenza della bolla ma, appunto per le dimensioni differenti di questa, il coefficiente d'attrito scende molto prima, sempre a circa $x = -40mm$ come nel caso della pressione a parete. Interessante notare come in questo caso il valore di c_f già dall'inizio è allo stesso livello di quello che si rilevato nella rampa finale. Un'altra importante differenza è la forma dell'avvallamento, che nel caso DNS presenta due picchi corrispondenti con i punti di interazione tra onde d'urto e strato limite mentre non è molto visibile nella curva WMLES.

La curva RANS conferma quanto ricavato dai dati WMLES, ovviamente le strutture vorticoshe interne alla bolla non vengono simulate pertanto il picco non dovuto al ricircolo che arriva a valori negativi non è presente.

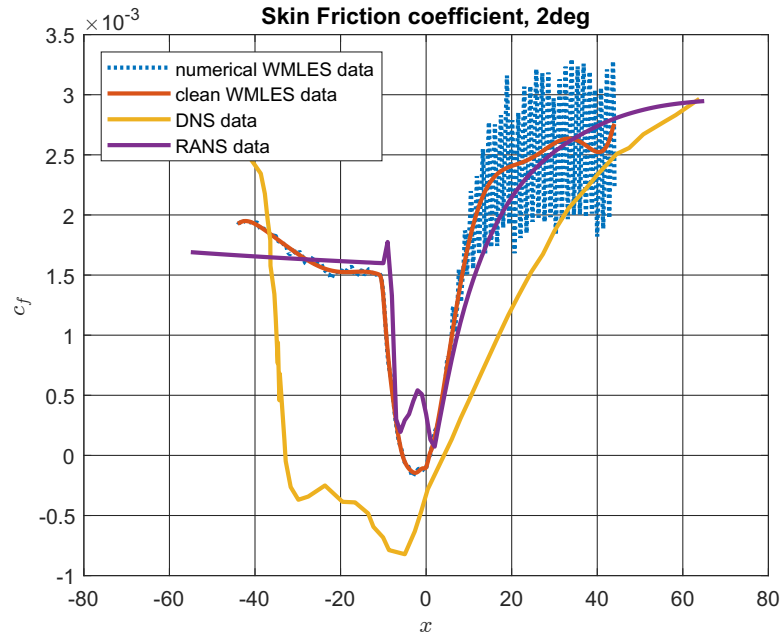


Figura 4.2.17: Comparazione tra i risultati dello skin friction coefficient ottenuti dalle simulazioni DNS dell'articolo, WMLES e RANS.

4.2.4 Campi

Per un'analisi più qualitativa e quindi per avere un'idea più chiara dei fenomeni studiati è possibile visualizzare graficamente attraverso dei file .vtk i campi. Le figure che verranno mostrate in seguito sono file .vtk bidimensionali in cui si è preso il piano xy a metà del dominio in direzione della profondità in z .



Figura 4.2.18: Campo scalare di Mach all'iterazione 200.000, si distinguono le 3 zone delimitate dalle onde d'urto e l'evoluzione e interazione dello strato limite. In nero il wall.

Dal campo scalare del numero di Mach in figura 4.2.18 si possono distinguere tre zone considerando il flusso esterno allo strato limite. Nella prima zona la corrente è indisturbata

restando a $M = 2.9$ infatti si può vedere uniformità nella colorazione e più in dettaglio dal grafico in fig.4.2.19 si può vedere come, prendendo in considerazione la curva viola a metà dell'altezza del dominio, la prima parte è infatti piatta se non per una piccola perturbazione dovuta all'onda che si genera all'entrata del dominio per contatto con il wall. A seguito dell'urto si ha appunto uno scalino in cui il Mach diminuisce in modo quasi discontinuo per poi proseguire con un altro tratto costante a $M = 2.4$.

A seguito della seconda zona si incontra l'onda d'urto riflessa che comporta un'altra diminuzione di velocità che però viene subito seguita dalle onde di espansione di Prandtl-Meyer che ne comporta una breve risalita interrotta dalle onde di compressione di riattacco che riportano il valore di Mach intorno a $M = 2.1$. A questa altezza non si percepiscono ancora gli effetti dello strato limite e dell'interazione di quest'ultimo con l'onda d'urto obliqua iniziale pertanto la curva è praticamente priva di fluttuazioni turbolente.

Avvicinandosi alla parete ma restando comunque fuori dallo strato limite (curva gialla) si può notare come ovviamente le variazioni di Mach avvengono in uno spazio più stretto in quanto ci si avvicina al punto di contatto e di origine delle onde, comunque i valori che raggiungono sono molto simili a quelli precedenti e non si risente ancora delle fluttuazioni.

Con le ultime due curve, a bordo e all'interno dello strato limite, si può vedere come le fluttuazioni dovute alla turbolenza e quindi alla prevalenza delle forze viscosive hanno effetto, di fatto distruggendone l'andamento. Oltre alla presenza delle strutture vorticosive che provocano forti gradienti e picchi locali variabili nel tempo, complessivamente queste due curve logicamente si abbassano verso valori più bassi di Mach in quanto la condizione di aderenza impone velocità nulla a parete e quindi una diminuzione progressiva della velocità verso di essa.

Altri due campi di interesse sono quello della pressione e della densità (figura 4.2.20) i quali contengono molte somiglianze ma con delle differenze sostanziali. Entrambi i campi infatti seguono lo stesso andamento in x , infatti partendo da valore unitario a seguito dell'urto si ha una crescita per entrambe le grandezze, la pressione in rapporto a quella di riferimento arriva al valore di circa 1.98 mentre la densità si attesta ad un valore poco superiore a 1.62 rispettando

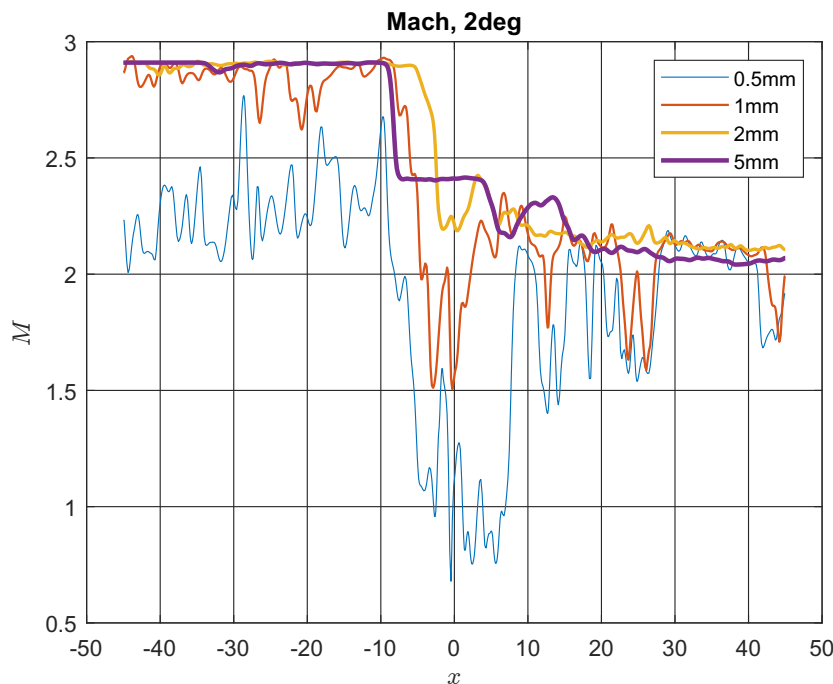


Figura 4.2.19: Comparazione dei vari rilevamenti del numero di Mach a diverse altezze nel piano xy medio del dominio all'iterazione 200.000.



Figura 4.2.20: Campi scalare della pressione (in alto) e della densità (in basso) all'iterazione 200.000.

approssimativamente le relazioni di Rankine-Hugoniot per cui

$$\frac{p_2}{p_\infty} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_\infty} \right)^\gamma \quad (4.2.16)$$

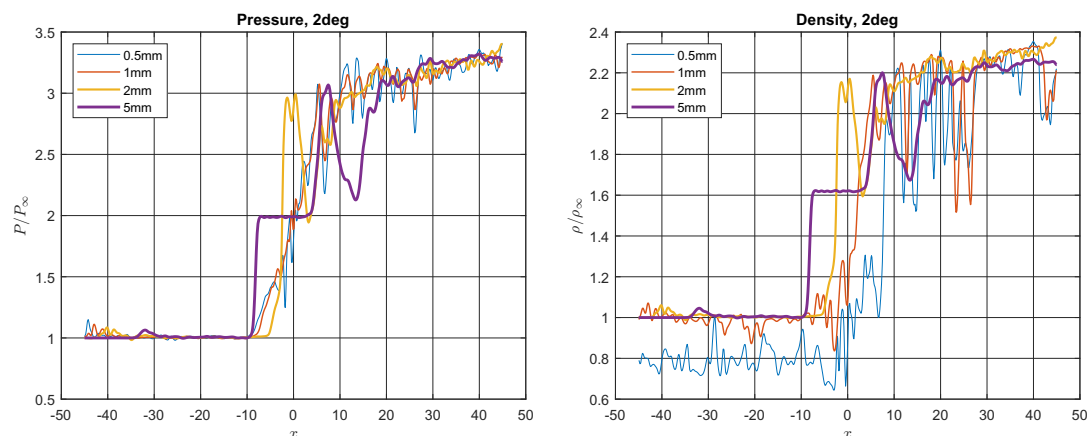


Figura 4.2.21: Comparazione dei vari rilevamenti a diverse altezze nel piano xy medio del dominio all'iterazione 200.000: a sinistra la pressione in rapporto a quella di riferimento, a destra la densità.

Dopo l'incremento dovuto alla prima onda d'urto ne segue un secondo dovuto all'onda riflessa che porta il valore del rapporto tra le pressioni a circa 3 mentre la densità a 2.2. A questo punto, considerando la curva viola del flusso esterno allo strato limite in figura 4.2.21, si può vedere come questo incremento non viene mantenuto in quanto le onde di espansione successive ne causano un decremento fino al raggiungimento delle onde di compressione finali che riportano i valori di pressione e densità a quelli di picco.

Se nella curva a metà altezza del dominio le differenze tra le due grandezze risiede praticamente solo nei valori numerici, confrontando le altre curve si può vedere come le differenze sono molto più considerevoli. Per entrambi i casi infatti scendendo verso la parete si un ovvio restringimento dei picchi e delle valli spiegati prima ma ciò che differisce è la presenza e la tipologia delle fluttuazioni registrate. La pressione infatti è costante lungo l'altezza dello strato limite pertanto non risente degli strutture vorticose presenti ma solo della riflessione e della generazione di onde a seguito dell'interazione. La densità invece risente degli effetti della viscosità nello strato limite pertanto le fluttuazioni turbolente sono la causa principale nelle oscillazioni presenti nel grafico. Inoltre appunto la densità va a diminuire lungo l'altezza dello

strato limite, pertanto si nota come nel tratto iniziale prima dell'interazione questa si abbassa man mano che ci si avvicina alla parete.

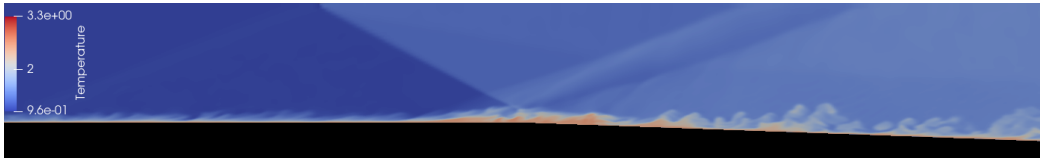


Figura 4.2.22: Campo scalare della temperatura all'iterazione 200.000.

La temperatura, mostrata in fig.4.2.22, lontana dagli effetti dovuti alla parete e quindi dalla presenza dello strato limite, presenta un la stessa fenomenologia della pressione e della densità viste in precedenza come si può vedere dal grafico in figura 4.2.23, infatti segue sempre le relazioni di Rankine-Hugoniot per cui:

$$\frac{T_2}{T_\infty} = \left(\frac{p_2}{p_\infty} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (4.2.17)$$

Le differenze rispetto a prima si hanno avvicinandosi a parete, infatti il flusso nello strato limite viene rallentato per effetto delle forze viscosse preponderanti rispetto a quelle inerziali, questo causa un aumento della temperatura ben visibile sia dalla visualizzazione grafica campo scalare dove si concentra di colore rosso, sia dalle curve rappresentanti gli andamenti. Oltre l'innalzamento della temperatura vicino la parete e le fluttuazioni turbolente che causano lo stesso genere di oscillazioni viste nel caso della densità, si può notare un notevole incremento nella zona di interazione urto - strato limite in quanto in questo tratto si concentrano, o comunque hanno origine, una serie di urti e locali e la bolla di separazione dove il flusso è estremamente rallentato.

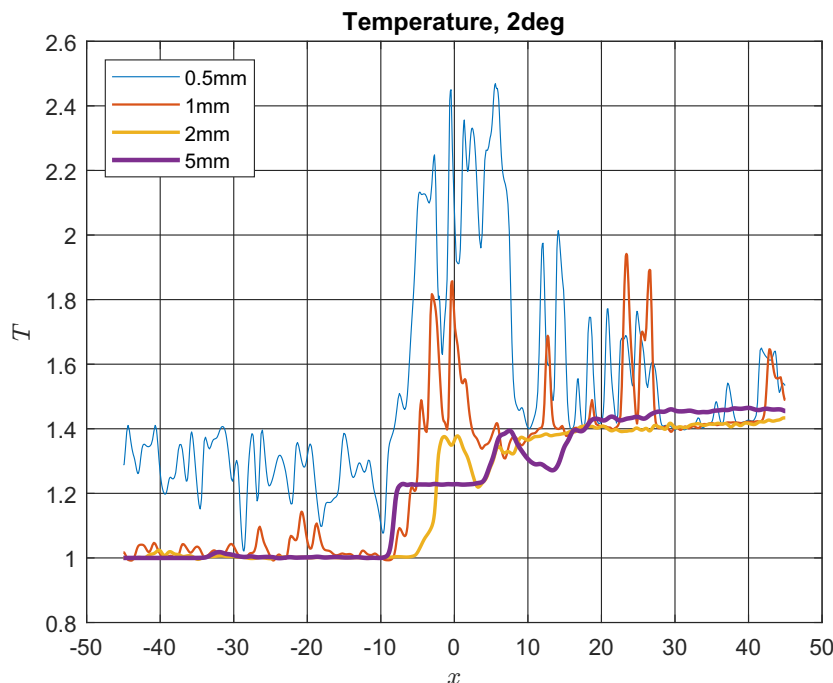


Figura 4.2.23: Comparazione dei vari rilevamenti della temperatura a diverse altezze nel piano xy medio del dominio all'iterazione 200.000.

4.3 5deg

4.3.1 Analisi monodimensionale preliminare

Come fatto per il caso a 2 deg, quindi prima di proseguire con le simulazioni, si esegue un'analisi monodimensionale del problema per avere un ordine di grandezza dei campi velocità e delle pressioni presenti. Anche in questo caso, come fatto in precedenza, tale analisi sarà supportata da molte ipotesi non perfettamente riconducibili al caso reale ma che cercano di avvicinarsi il più possibile.

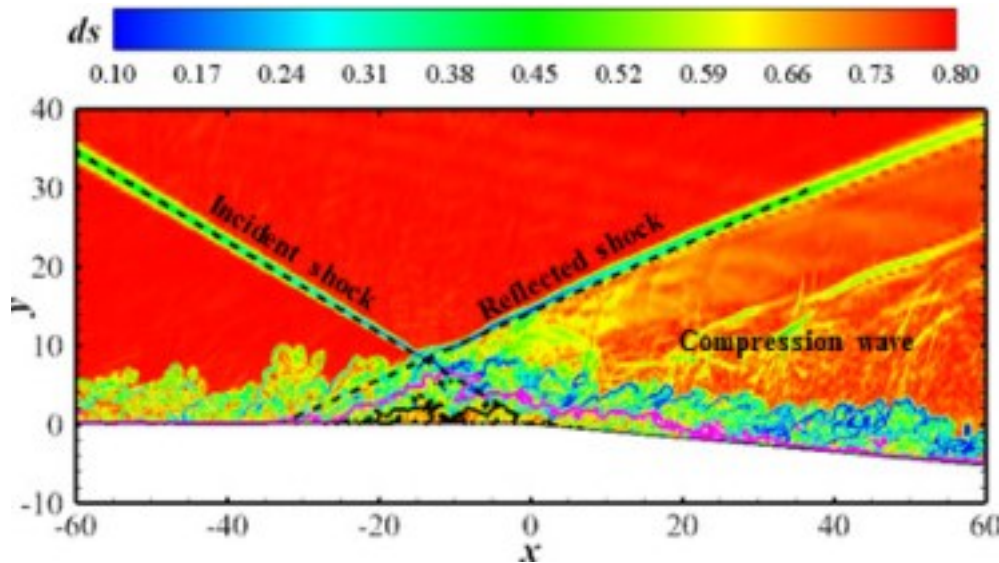


Figura 4.3.24: Istantanea del gradiente di densità a $z = 7mm$ della simulazione DNS a 2° .

Confrontando la fig.4.3.24 con la 4.2.8 si può notare come siano logicamente molto simili dal punto di vista qualitativo e fenomenologico, tuttavia presentano delle importanti differenze, infatti si può notare come l'onda riflessa sia meno inclinata e quindi più orizzontale rispetto al caso precedente. Questo comporta anche ad un abbassamento delle onde di espansione e di conseguenza anche dell'ultima onda di compressione a valle che mantiene circa un'ampiezza simile a prima via del fatto che la rampa di espansione è più ampia.

Di fatto il cambiamento più impattante è l'onda di riflessione meno perpendicolare e quindi meno intensa. Da questo ci si aspetta appunto che i valori delle pressioni saranno meno elevati. Inoltre è possibile notare che la bolla di separazione è leggermente diminuita di dimensione, pertanto, oltre ad un più moderato valore di pressione, ci si aspetta ad uno spostamento a destra del grafico della wall pressure e ad un restringimento della curva dello skin friction coefficient.

Prima di passare alle conclusioni comunque si eseguono i calcoli con il modello monodimensionale. Come in precedenza c'è un flusso supersonico a $M_1 = M_\infty = 2.9$ che attraversa l'onda d'urto obliqua generata da una rampa a $\theta = 12^\circ$ per cui si ottiene che l'onda è di $\beta = 30^\circ$, secondo la relazione $\theta - \beta - M$ (4.2.1).

Non cambiando nulla in questa prima parte rispetto al caso 2° si hanno gli stessi risultati quindi:

$$M_2 = 2.33$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 2.286$$

Di seguito si hanno le prime differenze rispetto a prima in quanto l'onda riflessa assume un angolo rispetto all'orizzontale minore con una conseguente minore intensità dell'onda di compressione.

Similmente al caso precedente si usa un angolo pari a $\theta_2 = 7^\circ$ come risultato dei 12° cioè l'angolo del flusso rispetto all'orizzontale e dei -5° angolo della rampa a valle.

Partendo dunque con $M_2 = 2.33$ e con $\theta_2 = 7^\circ$ utilizzando la relazione 4.2.1 si ottiene un angolo per l'onda d'urto riflessa pari a $\beta_2 = 31.5^\circ$.

Si calcolano di seguito il numero di Mach e il rapporto tra le pressioni:

$$M_{n_2,2} = M_2 * \sin(\beta_2) = 1.217 \quad (4.3.18)$$

da qui utilizzando la relazione 4.2.3 si ottiene $M_{n,3} = 0.692$ a cui corrisponde:

$$M_3 = \frac{M_{n,3}}{\sin(\beta_2 - \theta_2)} = 1.668 \quad (4.3.19)$$

A cui si associa, attraverso l'utilizzo dell'equazione 4.2.5, $\frac{p_3}{p_2} = 1.5624$, per cui si ha:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} = 3.572 \quad (4.3.20)$$

Come si può vedere già da questo risultato, come anticipato, i valori di pressione in gioco sono molto più bassi rispetto a prima per via delle onde oblique di minore intensità.

Successivamente si trovano le onde d'espansione, l'angolo di apertura di queste è simile a prima in quanto dalle immagini queste sono solo ruotate più verso il basso ma mantenendo un'apertura simile quindi di $\theta_e = 12^\circ$.

Quindi ancora una volta si usa la *funzione di Prandtl Meyer* $\nu(M)$, per cui dall'equazione 4.2.9 partendo da $M_3 = 1.668$, si ottiene $\nu(M_3) = 16.869^\circ$. Da qui si procede per il calcolo di M_4 :

$$\nu(M_4) = \nu(M_3) + \theta_e = 28.869^\circ \quad (4.3.21)$$

per cui si ottiene $M_4 = 2.091$.

Utilizzando le relazioni isoentropiche si ottiene $\frac{p_4}{p_3} = 0.521$ e quindi:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_4}{p_3} \cdot \frac{p_3}{p_1} = 1.862 \quad (4.3.22)$$

Da qui restano solo le onde di compressione a valle della bolla di separazione. Esse hanno un angolo di apertura simile a prima, infatti nonostante la discontinuità abbia un'inclinazione minore rispetto all'orizzontale, misurando dalla superficie della rampa l'angolo è molto simile pertanto si tiene $\beta_4 = 36^\circ$ che con $M_4 = 2.091$ corrisponde ad un $\theta_4 = 8^\circ$, per cui:

$$M_{n,4} = M_4 \sin(\beta_4) = 1.229 \quad (4.3.23)$$

da qui, ancora una volta, utilizzando la relazione 4.2.3 si ottiene $M_{n,5} = 0.680$ a cui corrisponde:

$$M_5 = \frac{M_{n,5}}{\sin(\beta_4 - \theta_4)} = 1.448 \quad (4.3.24)$$

Per cui, attraverso l'utilizzo dell'equazione 4.2.5, $\frac{p_5}{p_4} = 1.596$, si ha:

$$\frac{p_5}{p_1} = \frac{p_5}{p_4} \cdot \frac{p_4}{p_1} = 2.971 \quad (4.3.25)$$

4.3.2 Post-processing dei dati WMLES

Per l'analisi dei dati, come fatto per il caso precedente, si passerà attraverso una *pulizia* di questi utilizzando il metodo di approssimazione polinomiale data la loro rumorosità per poi raggiungere una condizione di quasi-stazionarietà in cui i campi non sono più soggetti a grosse variazioni nel tempo.

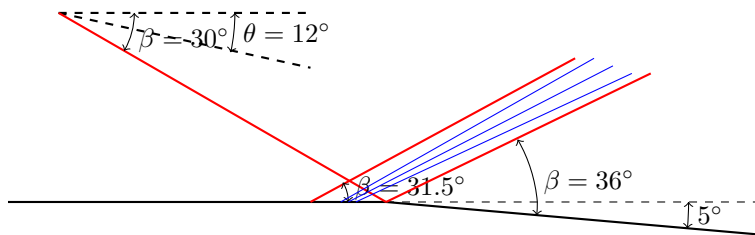


Figura 4.3.25: Modellazione monodimensionale per il caso di interazione onda d’urto - strato limite in presenza di una rampa di espansione a valle di 5°.

Rimozione del rumore

Per la rimozione del rumore (fig.4.3.26) quindi si suddivide il dominio in 3 parti dove la prima parte conterrà anche una parte di accrescimento della bolla di espansione, infatti dal grafico della wall pressure si può vedere la presenza più marcata dello scalino, mentre in quello dello skin friction coefficient si può notare un picco verso l’alto prima della valle dovuta ai ricircoli nella bolla di separazione.

-	intervallo	deg(p)	intervallo	deg(p)	intervallo	deg(p)
P_w/P_∞	0 – 195	5	195 – 265	5	265 – 502	7
c_f	0 – 190	8	190 – 265	9	265 – 385	7

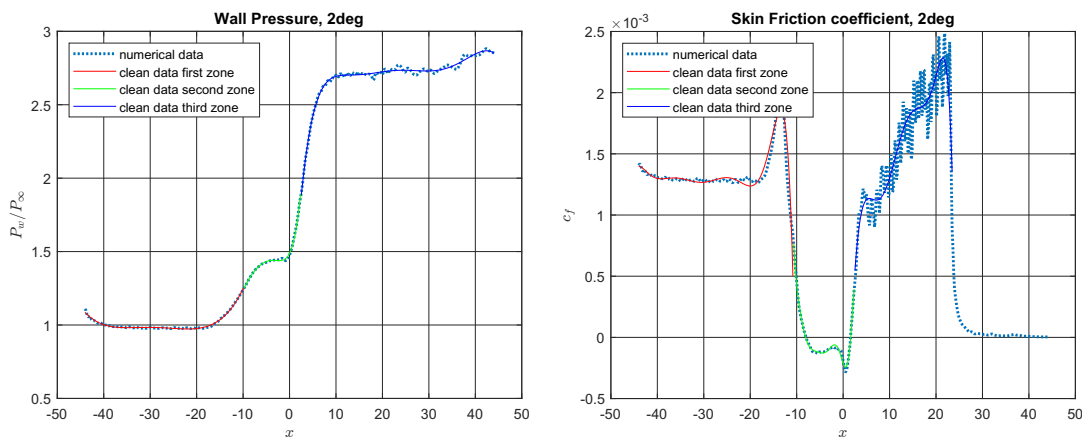


Figura 4.3.26: Pressione (a sinistra) e coefficiente d’attrito (a destra) a parete lungo x, particolare sulle 3 approssimazioni polinomiali usate.

Come si può vedere dalla tabella i valori usati sono molto simili a quelli utilizzati nel caso a 2°. Per la entrambi i casi si è allargato il secondo intervallo spostando leggermente in avanti l’estremo destro che da 260 per la wall pressure e 255 per lo skin friction coefficient passa a 265 poiché la bolla si sposta leggermente in avanti riducendosi di dimensione.

Nel caso dello skin friction coefficient la parte finale è stata tagliata in quanto una apertura della griglia di calcolo falsifica i dati.

In fig.4.3.27 si può vedere il risultato della pulizia dei risultati ottenuti dopo l’applicazione della media mobile per smussare e interconnettere le funzioni polinomiali usate.

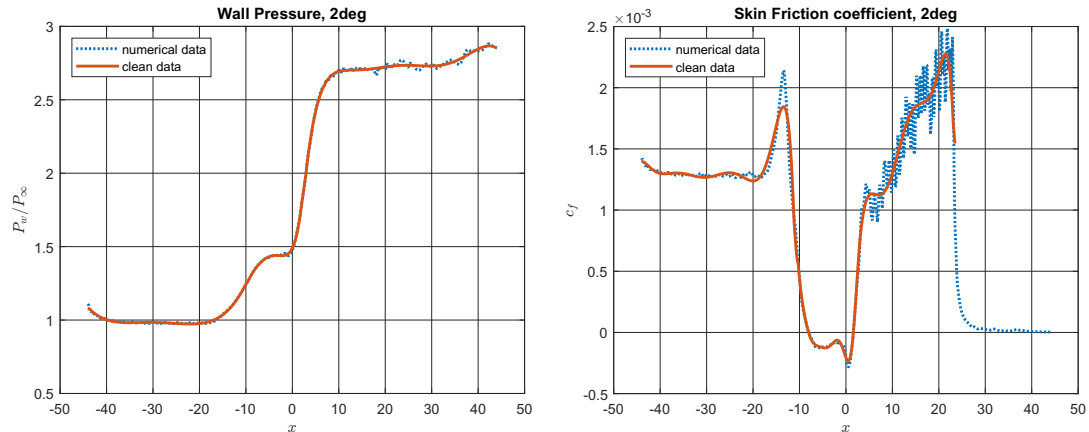


Figura 4.3.27: Pressione (a sinistra) e coefficiente d'attrito (a destra) a parete lungo x , risultato finale della pulizia del rumore dei dati.

Condizione di quasi-stazionarietà

Come per il caso precedente si è eseguita un'analisi per step di 100,000 iterazioni per perdere la dipendenza dalle condizioni iniziali del sistema. Si può vedere infatti dalla fig.4.3.28 come nel primo step di 100,000 iterazioni si arriva ad una convergenza fittizia, tuttavia solo nel secondo step si arriva all'indipendenza dalle condizioni iniziali, infatti compare molto più definito lo scalino iniziale dove ha origine la bolla di separazione e il plateau finale a valle si alza come visto per il caso a 2 deg.

Anche in questo caso si è eseguito un terzo step da 200,000 a 300,000 iterazioni che si è scelto di non visualizzare in quanto praticamente sovrapposto allo step precedente e risultava ancora più confusionario nel grafico dello skin friction coefficient in fig.4.3.29. Proprio in quest'ultima figura si può notare come ci sia un notevole cambiamento dal primo a secondo step infatti la bolla di separazione più sviluppata e appunto allargata più verso sinistra comporta ad una parabola più grande in questo grafico e alla definizione di due valli differenti che verranno meglio analizzate poi.

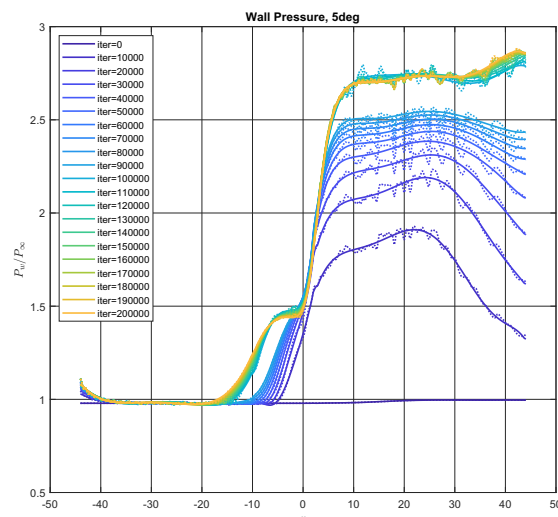


Figura 4.3.28: Storia dell'andamento della Wall-Pressure (su pressione di riferimento) in relazione al numero di iterazioni.

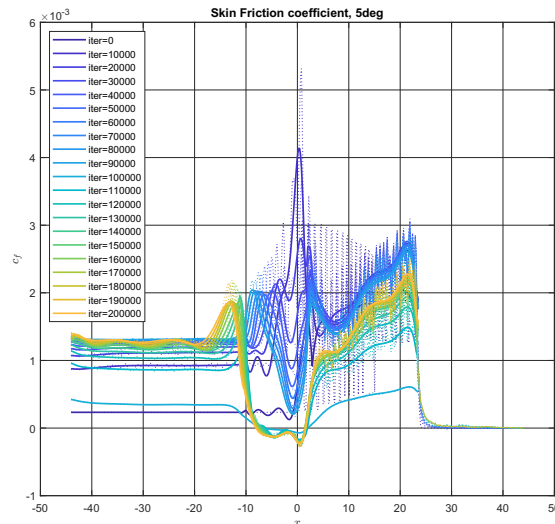


Figura 4.3.29: Storia dell'andamento dello skin friction coefficient in relazione al numero di iterazioni.

4.3.3 Grandezze a parete

Wall pressure

Dall'analisi del grafico della pressione a parete anche in questo caso si possono fare importanti considerazioni in particolare comparando i risultati in fig. 4.3.30 con quelli in fig.4.2.16.

Partendo dall'analisi della curva relativa ai dati delle simulazioni WMLES, si può vedere come l'urto dovuto all'onda riflessa sia molto più distinguibile dall'urto obliquo iniziale rispetto al caso a 2deg infatti in questo caso gli effetti di aumento di pressione del secondo urto vengono smorzati dalla presenza di una rampa di espansione maggiore. Si inoltre può distinguere come la bolla di separazione inizia attorno a $x \sim 10 - 15mm$, leggermente prima rispetto all'altro caso ma ciò è dovuto anche alla scelta dell'istante temporale e quindi alle fluttuazioni sulla dimensione che la bolla subisce.

Al termine degli urti il rapporto tra la pressione a parete e quella di riferimento si assesta tra i valori di $P_w/P_\infty = 2.7 - 2.8$, dal grafico si vede poi un piccolo incremento finale ma è dovuto ad un'apertura nella zona finale del dominio. Il valore finale di pressione come si può notare è inferiore rispetto al caso a 2deg per via appunto della maggiore ampiezza di espansione della rampa a valle.

La curva rappresentante i dati delle simulazioni DNS rappresenta come nel caso precedente una bolla di espansione molto più ampia, nonostante ciò anche con questo modello se ne registra una diminuzione delle dimensioni, infatti si può notare come in questo caso l'incremento inizi a $x = -30mm$ rispetto ai $x = -40mm$ precedenti. Inoltre si può notare come proprio per via del volume ridotto della bolla la curva sia più pendente arrivando al valore stabile di pressione di $P_w/P_\infty = 3.3 - 3.4$ già a $x = 40mm$.

Le curva RANS come in precedenza sovrastima i valori e si avvicina a quella WMLES anche se in questo caso non presenta l'incremento iniziale dovuto all'onda riflessa.

Skin friction coefficient

Il caso del coefficiente d'attrito presenta diverse differenze. Partendo infatti dalla curva arancione dei risultati WMLES si può notare la presenza di un picco prima dell'avvallamento.

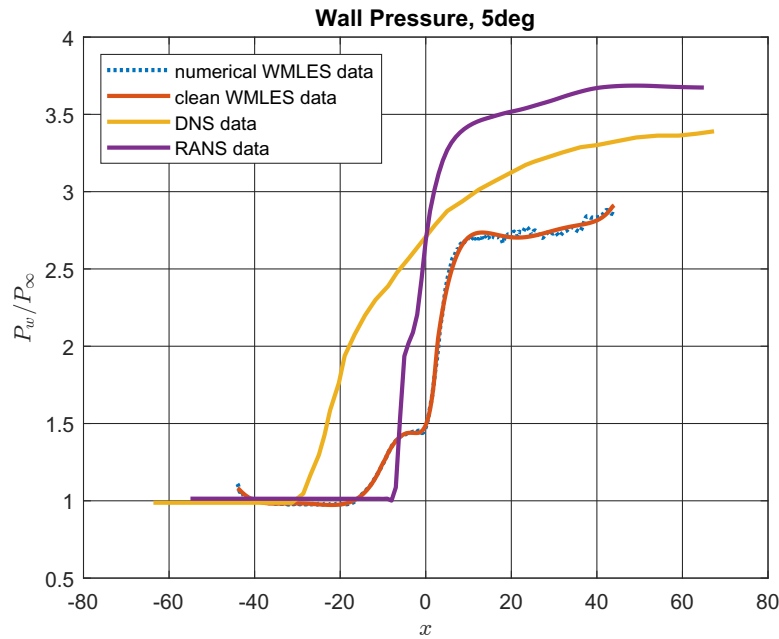


Figura 4.3.30: Comparazione tra i risultati della wall pressure ottenuti dalle simulazioni DNS dell'articolo, WMLES e RANS per la rampa di espansione a 5° .

Tale picco non presente precedentemente dovuto alla presenza dell'onda riflessa può essere dovuto ad un diverso trattamento numerico.

L'avvallamento dovuto alla bolla di separazione inizia a seguito del picco a circa $x = -10\text{mm}$. Anche in questo caso si raggiungono valori negativi di c_f per appunto la presenza dei ricircoli all'interno della bolla di separazione, ma in questo caso si possono anche distinguere due conche dovute alle interazioni urto-strato limite presenti nella zona. Il picco con valore assoluto maggiore si attesta a $c_f = -0.25$, anche in questo caso i valori registrati sono inferiori a quelli della rampa a 2deg .

Successivamente alla bolla, e quindi al recupero dei valori di c_f di partenza, si ha un graduale incremento ulteriore fino a circa un valore pari a $c_f = 2.25$. Tale incremento non è lineare ma a *scalini*, questo è dovuto alla presenza delle diverse onde di compressione post-interazione che poi collassano in un'unica onda nel flusso esterno, ma a parete sono ancora distinguibili. La caduta finale è dovuta all'apertura del dominio ma comunque non va ad intaccare i risultati precedenti.

La curva dei risultati DNS rispetto a quella WMLES, oltre a risultare ovviamente riscalata per via delle diverse dimensioni dell'interazione urto-strato limite, risulta poi traslata a sinistra definendo quindi una posizione più arretrata della bolla di separazione. Partendo dal valore di $c_f = 2.5$ come nel caso a 2deg arriva a scendere fino a $c_f = -0.45$ e $c_f = -0.6$ nei due avvallamenti per poi ritornare ai valori iniziali.

Le RANS presentano un andamento molto simile al caso 2deg infatti la parte iniziale non subisce un decremento in quanto in questa tipologia di simulazioni non vengono simulati i fenomeni interni allo strato limite che saranno meglio visibili con l'analisi del q-criterion poi, dove si vedrà una laminarizzazione del flusso nel caso WMLES. Anche in questo caso si presentano i due picchi che restano comunque con una valore di coefficiente d'attrito positivo.

4.3.4 Campi

Come in precedenza dai campi si possono ricavare importanti informazioni riguardo la dinamica del sistema. Infatti anche in questo caso, fig.4.3.32, si possono distinguere tre zone: una iniziale

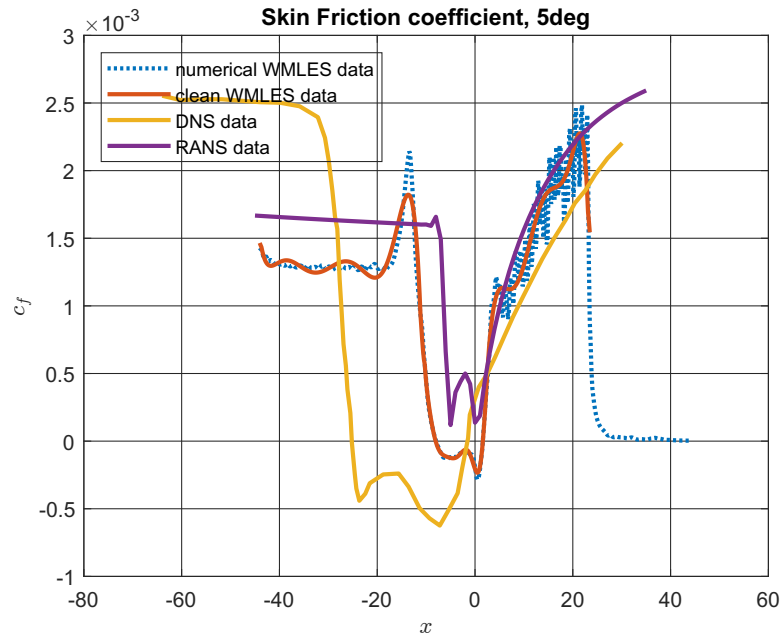


Figura 4.3.31: Comparazione tra i risultati dello skin friction coefficient ottenuti dalle simulazioni DNS dell'articolo, WMLES e RANS per la rampa di espansione a 5° .

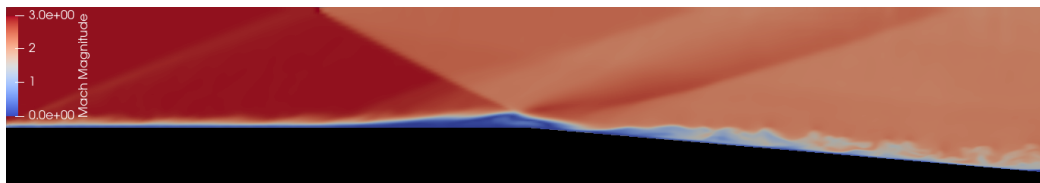


Figura 4.3.32: Campo scalare del numero di Mach all'iterazione 200.000.

dove il flusso non è ancora stato perturbato, una seconda sopra la bolla di interazione le onde di compressione, e la terza a valle, al di sopra della rampa di espansione.

Analizzando anche il grafico in figura 4.3.33 partendo dalla curva viola ovvero quella relativa al flusso più esterno, si nota la somiglianza con quella in fig.4.2.19 se non per il fatto che a seguito del primo urto non si ha un andamento costante del Mach, ma esse tende a diminuire gradualmente. Questo è dovuto alla presenza della fascia delle onde di Prandtl-Meyer che si concludono con l'ultima onda di compressione. Questa fascia risulta essere molto più estesa rispetto al caso a 2° , tuttavia i valori raggiunti sono simili, infatti gli urti risultano essere meno inclinati come visto nell'analisi dimensionale, essendo così meno efficaci e il Mach finale di conseguenza è leggermente maggiore a prima, attestandosi attorno al valore di $M \sim 2.2$.

La curva dei $2mm$ di distanza dal wall rispecchia l'andamento di quella precedente se non per due differenze: la prima, più ovvia, è che avvicinandosi alla zona di interazione anche i vari picchi si avvicinano di conseguenza. La seconda si può notare in prossimità della zona del primo urto dove non l'andamento non subisce una discesa ripida netta, bensì più graduale per via della presenza delle onde riflesse prima della bolla.

Le due curve più vicine a parete ed interne allo strato limite risentono ovviamente delle fluttuazioni turbolente a differenza delle due precedenti, tuttavia in modo meno marcato al caso a 2° . Inoltre si può vedere come, anche se la bolla risulti essere di dimensioni ridotte, questa produca dei picchi molto marcati arrivando anche ad un numero di Mach negativo.

In questo caso poi nella parte finale, corrispondente alla rampa, non si registrano oscillazioni per entrambe le curve poiché la linea di rilevamento è rettilinea e quindi sempre più distante da parete e anche rispetto al caso 2 deg.

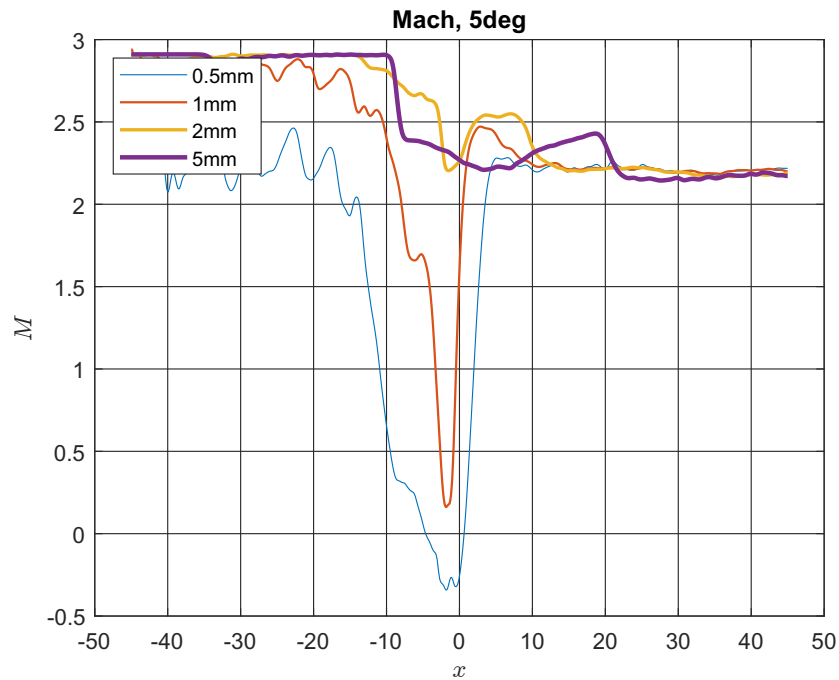


Figura 4.3.33: Campo scalare del numero di Mach all'iterazione 200.000.

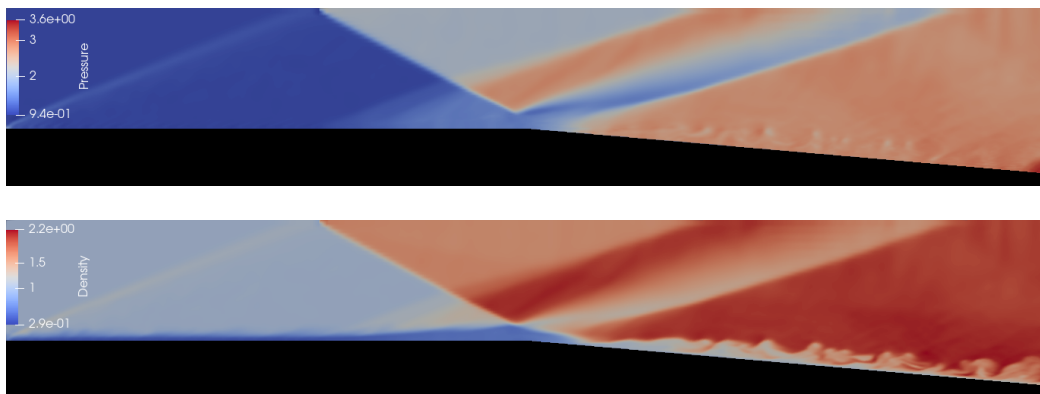


Figura 4.3.34: Campi scalare della pressione (in alto) e della densità (in basso) all'iterazione 200.000.

Dai campi scalari della pressione e della densità in fig.4.3.35 è ancora più evidente come la zona tra l'onda riflessa e l'ultima onda di compressione si sia estesa rispetto al caso con rampa di espansione a 2 deg. Ciò comporta una maggiore ampiezza delle onde di Prandtl-Meyer che causano una diminuzione di pressione, e quindi anche di densità, più intensa rispetto a prima.

Partendo sempre dalla curva viola nel grafico degli andamenti, fig.4.3.35, si può vedere come a seguito del primo urto ci sia un graduale aumento della pressione per via dell'onda riflessa per poi proseguire dopo il picco con un'ulteriore graduale diminuzione dovuta alle onde di espansione che portano $P/P_\infty \sim 1.75$. Poi si conclude con l'urto finale che riporta il valore di pressione, e densità, a quelli di picco intorno a 2.7 – 2.8. Stesso andamento per la curva

gialla con distanza $2mm$ dal wall dove ancora gli effetti delle fluttuazioni turbolente non sono sensibili.

Le ultime due curve, a bordo e internamente allo strato limite, per la pressione sono quasi del tutto sovrapponibili in quanto questa risulta essere costante in y , presentando oscillazioni dovute ai vortici nello strato limite seppur lievi. Di fatto la forma delle due curve si avvicina ad essere di fatto quella della P_w/P_∞ dove gli urti sono sempre meno distinguibili tra loro se non per un breve tratto e comunque non si hanno delle vere e proprie discontinuità ma più un passaggio graduale da un livello di pressione ad un altro.

Per la densità come per il caso a 2° si verifica una diminuzione generale poiché questa segue il gradiente dello strato limite. In particolare si può notare il picco soprattutto nella terza curva dovuta alla presenza della bolla che quindi ingloba completamente la linea di rilevazione.

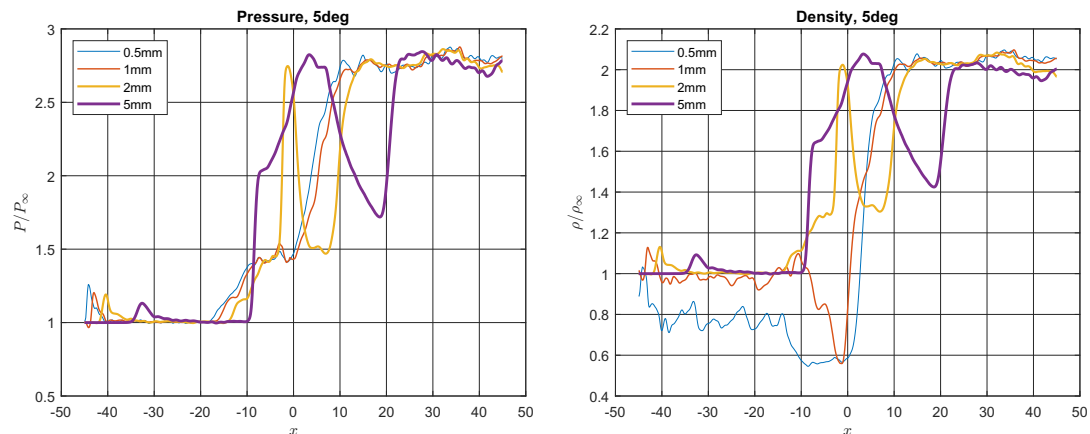


Figura 4.3.35: Comparazione pressione a sinistra e densità a destra nel piano xy medio del dominio all'iterazione 200.000.

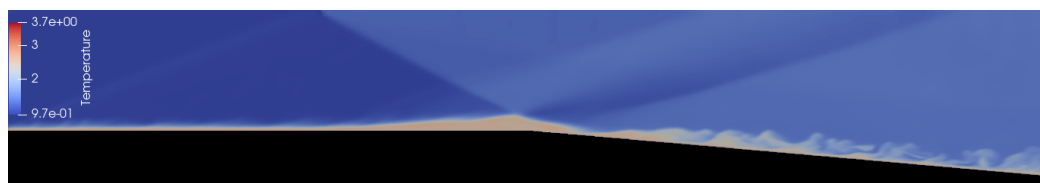


Figura 4.3.36: Campo scalare della temperatura all'iterazione 200.000.

Per la temperatura, fig.4.3.36 e 4.3.37, le considerazioni sono analoghe a quelle fatte in precedenza. Avvicinandosi a parete e quindi internamente allo strato limite la velocità diminuisce pertanto la temperatura aumenta raggiungendo il suo picco in corrispondenza della bolla di separazione dove il flusso viene arrestato e cambia anche verso di moto.

Per il resto delle fluttuazioni dovute alla turbolenza ne risentono solamente le due curve più interne che non mostrano corrispondenza con le altre due curve del flusso esterno. Infatti anche il tratto $x = [0 - 10]mm$ a prima vista pare simile con la curva $2mm$, tuttavia la conca ha origini differenti. Nella curva gialla tale avvallamento è dovuto alla presenza delle onde di Prandtl-Meyer dopo l'onda riflessa che causano una diminuzione di temperatura per via dell'espansione del flusso, mentre per le due curve di strato limite tale conca è dovuta alla fine della bolla e lievi fluttuazioni.

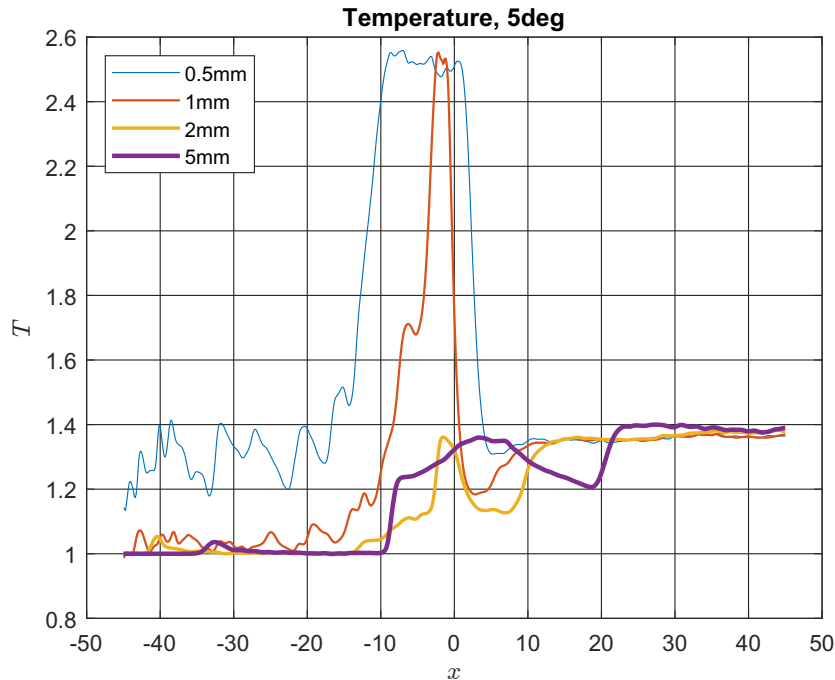


Figura 4.3.37: Campo scalare della Temperatura all'iterazione 200.000.

4.4 Confronto

A questo punto è possibile fare un confronto tra i risultati ottenuti dalle due simulazioni concentrando sugli aspetti più rilevanti e generali. Partendo dunque dalla fig.4.4.38, dove vengono illustrati la wall pressure P_w/P_∞ e lo skin friction coefficient c_f delle simulazioni DNS, si può vedere una tendenza comune in entrambi i grafici. All'aumentare dell'ampiezza dell'angolo della rampa infatti una diminuzione della pressione a parete a seguito dei fenomeni di interazione e l'incremento per arrivare al livello finale di pressione avviene in ritardo, di fatto spostando la curva verso destra. Per il coefficiente d'attrito non si ha una variazione significativa dei valori in corrispondenza della rampa se non una lieve diminuzione, ma i valori di picco negativo risentono di una decrescita in valore assoluto con l'aumentare dell'angolo ma soprattutto si ha un restringimento dell'avvallamento.

Tutto ciò va a confermare quanto visto in precedenza, ovvero la bolla di separazione, conseguenza dell'interazione urto - strato limite, si riduce di dimensione all'aumentare dell'angolo della rampa di espansione.

I risultati ottenuti dalle simulazioni IBM/WMLES mostrano alcune differenze rispetto ai precedenti. Dalla figura 4.4.39 si evince che la pressione a parete in rapporto a quella di riferimento segue l'andamento previsto dai risultati delle DNS. Il valore massimo di pressione che si raggiunge in corrispondenza della rampa infatti diminuisce all'aumentare dell'angolo di questa inoltre l'aumento della pressione avviene leggermente dopo, spostando la curva verso destra.

A differenza di prima però nel caso della parete inclinata di 5 deg si trova un leggero incremento iniziale dovuto ad un accrescimento della bolla verso l'inflow che porta quest'ultima ad essere più estesa rispetto a quella del caso con angolo minore.

Tale anomalia si ripercuote anche nel grafico dello skin friction coefficient dove di fatto la curva si restringe ma, per via dell'estensione verso sinistra della bolla, si ha un decremento anticipato nella curva dei 5 deg che porta così il grafico ad essere spostato verso sinistra. Inoltre sempre in questo caso si può notare come la parte iniziale prima dell'interazione sia di valore inferiore nel secondo caso, terminando con un picco prima dell'interazione. Tale discrepanza a parete si può notare anche qualitativamente dalle isosuperfici del Q-criterion.

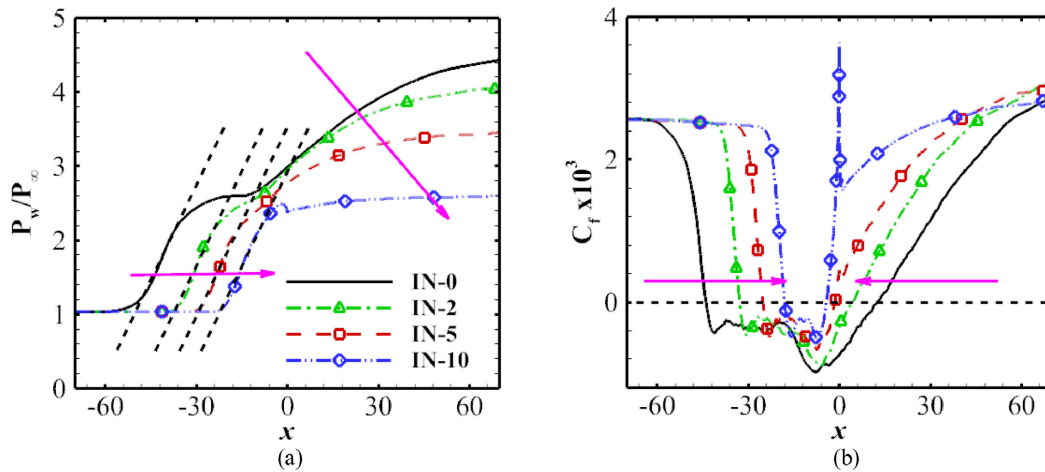


Figura 4.4.38: Confronto della pressione a parete (sinistra) e del coefficiente d'attrito (destra) a varie inclinazioni della rampa. Risultati da DNS.

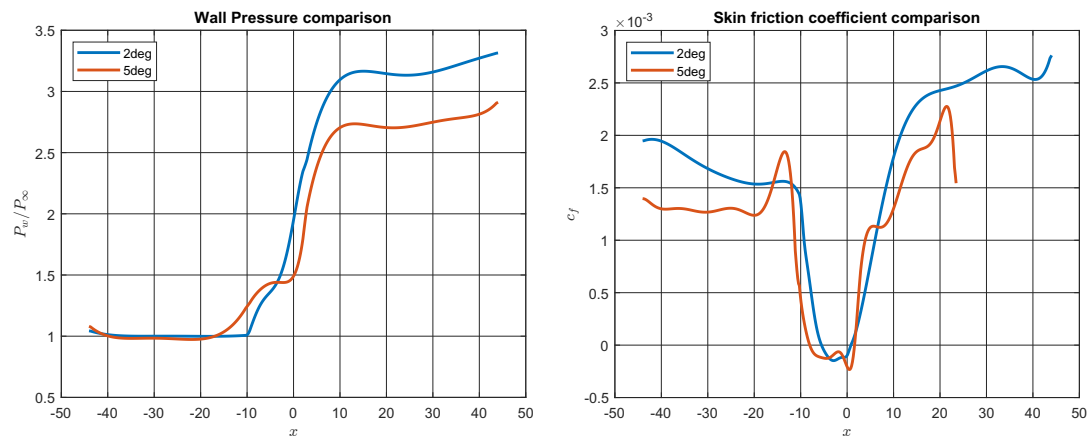


Figura 4.4.39: Confronto della pressione a parete (sinistra) e del coefficiente d'attrito (destra) a 2° e 5°. Risultati da IBM/WMLES.

Dal Q-criterio infatti si può notare come lo strato limite nei due casi sia molto diverso, con la rampa a 5 deg infatti si ha un flusso non completamente sviluppato dal punto di vista della turbolenza, tendendo ad essere quasi laminare. Tale fenomeno corrisponde all'abbassamento della curva del coefficiente d'attrito registrato nel caso a 5° rispetto al caso a 2°, infatti un profilo di velocità laminare esercita uno sforzo a parete minore rispetto a quello turbolento.

Sempre questa zona anomala corrisponde alla presenza del picco sempre nella curva del coefficiente d'attrito.

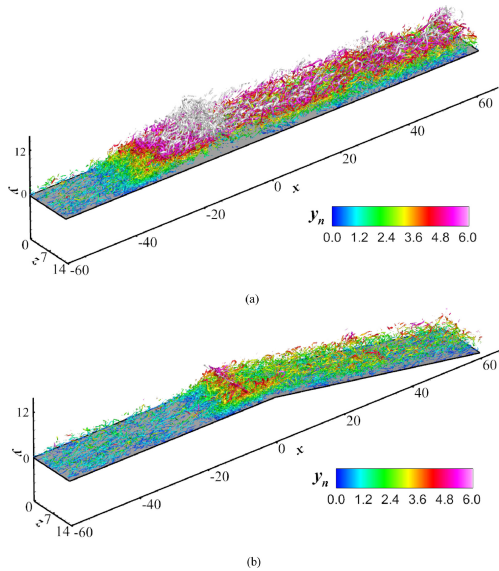


Figura 4.4.40: Isosuperfici DNS del Q criterion ($Q/Q_{max} = 0.01$) colorate in base alla distanza normale alla parete per i casi a 0° (a) e 10° (b).

Nelle immagini a sinistra (fig4.4.40) dalle isosuperfici si può esumere come all'aumentare dell'angolo della rampa l'interazione urto-strato limite generi effetti meno percepibili. Ciò si riscontra sia da prima dell'inizio della bolla di separazione che raggiunge dimensioni minori sia in estensione orizzontale sia in altezza, ma anche nella rampa di espansione dove lo strato limite è meno turbolento e più basso.

Considerazioni molto simili si possono fare anche per quanto riguarda i risultati IBM/WMLES. In figura 4.4.41 sono rappresentate infatti le isosuperfici del Q criterion colorate in base alla magnitudine di Mach. Si può vedere una sostanziale differenza nello strato limite, nel primo caso, 2° , si può vedere come esso sia molto più turbolento e la bolla di separazione nonostante sia più grande è meno distinguibile dal resto.

Nel caso a 5° invece si distingue bene la bolla di separazione dal resto e i vortici a parete assumono una forma molto più ordinata soprattutto a valle, inoltre si può notare come prima dell'interazione ci sia una zona a bassa vorticità che corrisponde alle zone individuate prima dove si registrava un primo incremento anomalo della pressione e l'estensione verso sinistra della curva della skin friction.

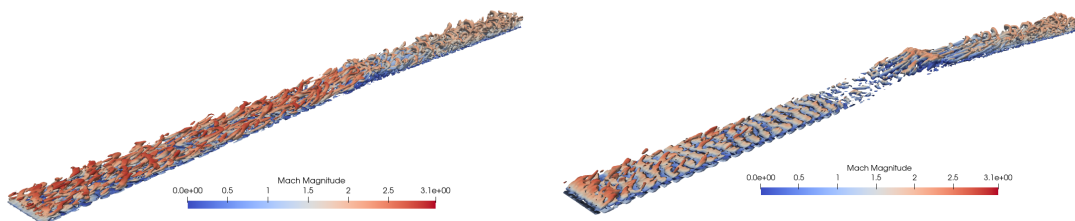


Figura 4.4.41: Isosuperfici relative alle simulazioni IBM/WMLES del Q criterion ($Q/Q_{max} = 0.01$) per i casi a 2° (sinistra) e 5° (destra).

Capitolo 5

Conclusioni

La caratterizzazione fluidodinamica di un'interazione tra onda d'urto e strato limite è molto complessa per via dei fenomeni che si innescano all'interno ed all'esterno dello strato limite stesso. La presenza ulteriore di una rampa di espansione a valle ne complica ancora l'analisi, fattibile unicamente per via numerica, in quanto una trattazione analitica, come visto, deve lasciare spazio a diverse ipotesi semplificative trascurando importanti dettagli del fenomeno.

Dopo le dovute premesse comunque si possono trarre delle conclusioni riguardo le simulazioni IBM/WMLES eseguite. Rispetto a delle DNS si ha una ovvia perdita delle informazioni ottenibili da una tipologia di simulazione molto più precisa, tuttavia se già con le LES si ha un risparmio di tempo notevole, con l'ulteriore modello a parete si ottengono dei risultati già in tempistiche che si avvicinano a quelle delle RANS. Se a questo si unisce il fatto del continuo sviluppo di nuove architetture CPU e GPU è auspicabile che nel giro di pochi anni le simulazioni Wall-modeled LES, nel mondo dell'industria, possano diventare un'alternativa alle RANS nel caso sia richiesta una maggiore precisione.

Confrontando i risultati si riscontrano comunque delle differenze tra le varie tipologie di simulazione. se le simulazioni RANS e IBM/WMLES hanno un'estensione della bolla di separazione e dei fenomeni ad essa connessi che va da $x = -10mm$ a $x = 10mm$ circa, nel caso DNS le proporzioni sono molto diverse nonostante le condizioni di partenza siano identiche. Come si è dimostrato la presenza o meno della temperatura a parete è ininfluente pertanto la causa potrebbe essere dovuta a interazioni e vortici presenti alle scale inferiori a quelli simulati attraverso il modello LES che comportano un comportamento dello strato limite differente. Tuttavia tale spiegazione può non essere sufficiente a spiegarne la differenza. A questo proposito è doveroso quantomeno citare il fatto che unicamente i dati DNS di pressione e coefficiente d'attrito a parete sono forniti nell'articolo lungo x e non in x/δ come il resto dei grafici. A δ corrisponde lo spessore nominale di strato limite pari a circa $\delta = 6.5mm$. Prendendo per ipotesi che per errore le dimensioni siano state scalate per una volta in più, quindi di fatto moltiplicando per δ , i dati coinciderebbero con molta precisione e anche le dimensioni dello strato limite e della bolla nella visualizzazione grafica nei campi scalari e vettoriali corrisponderebbe tra le varie simulazioni.

Nonostante le differenze precedentemente discusse si può affermare che il ruolo della rampa di espansione sia quello di mitigazione degli effetti dell'interazione onda d'urto - strato limite, all'aumentare della sua ampiezza infatti si ha una sensibile diminuzione della pressione a parete registrata a valle ed uno spostamento a destra dell'incremento della relativa curva. In modo analogo la curva del coefficiente d'attrito, che subisce un avvallamento per la presenza dei ricircoli all'interno della bolla di separazione, si restringe per via della riduzione delle dimensioni della bolla stessa.

È poi interessante notare dalla rappresentazione grafica del Q-criterio come nel caso a 5 deg il flusso dello strato limite a monte non si sviluppa completamente proseguendo con un moto quasi laminare prima dell'interazione per poi diventare completamente turbolento a valle.

Bibliografia

- [1] W.A. El-Askary. «Simulation of supersonic turbulent flow in the vicinity of an inclined backward-facing step». In: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 25.7 (2011), pp. 407–423. DOI: [10.1080/10618562.2011.618455](https://doi.org/10.1080/10618562.2011.618455).
- [2] Ivan Bermejo-Moreno et al. «Confinement effects in shock wave/turbulent boundary layer interactions through wall-modelled large-eddy simulations». In: *Journal of Fluid Mechanics* 758 (2014), pp. 5–62. DOI: [10.1017/jfm.2014.505](https://doi.org/10.1017/jfm.2014.505).
- [3] Patrick Bookey et al. «New experimental data of STBLI at DNS/LES accessible reynolds numbers». In: (gen. 2005). DOI: [10.2514/6.2005-309](https://doi.org/10.2514/6.2005-309).
- [4] Y. T. Chew. «Shockwave and Boundary Layer Interaction in the Presence of an Expansion Corner». In: *Aeronautical Quarterly* 30.3 (1979), pp. 506–527. DOI: [10.1017/S0001925900008684](https://doi.org/10.1017/S0001925900008684).
- [5] Pavel V. Chuvakhov et al. «Boundary-Layer Instabilities in Supersonic Expansion Corner Flows». In: *AIAA Journal* 59.9 (2021), pp. 3398–3405. DOI: [10.2514/1.J060145](https://doi.org/10.2514/1.J060145).
- [6] Francesco De Vanna et al. «Unified wall-resolved and wall-modeled method for large-eddy simulations of compressible wall-bounded flows». In: *Phys. Rev. Fluids* 6 (3 mar. 2021), p. 034614. DOI: [10.1103/PhysRevFluids.6.034614](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.6.034614).
- [7] Jean Delery e Jean-Paul Dussauge. «Some physical aspects of shock wave/boundary layer interactions». In: *Shock Waves* 19.6 (dic. 2009), pp. 453–468. DOI: [10.1007/s00193-009-0220-z](https://doi.org/10.1007/s00193-009-0220-z).
- [8] Jian Fang et al. «Direct numerical simulation of supersonic turbulent flows around a tandem expansion-compression corner». In: *Physics of Fluids* 27.12 (2015), p. 125104. DOI: [10.1063/1.4936576](https://doi.org/10.1063/1.4936576).
- [9] Johan LARSSON et al. «Large eddy simulation with modeled wall-stress: recent progress and future directions». In: *Mechanical Engineering Reviews* 3.1 (2016), pp. 15-00418-15-00418. DOI: [10.1299/mer.15-00418](https://doi.org/10.1299/mer.15-00418).
- [10] Sergio Pirozzoli. «Generalized conservative approximations of split convective derivative operators». In: *Journal of Computational Physics* 229.19 (2010), pp. 7180–7190. ISSN: 0021-9991. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.06.006>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999110003219>.
- [11] Sergio Pirozzoli e Matteo Bernardini. «Direct Numerical Simulation Database for Impinging Shock Wave/Turbulent Boundary-Layer Interaction». In: *AIAA Journal* 49.6 (2011), pp. 1307–1312. DOI: [10.2514/1.J050901](https://doi.org/10.2514/1.J050901).
- [12] S. Priebe, M. Wu e M. P. Martín. «Direct Numerical Simulation of a Reflected-Shock-Wave/Turbulent-Boundary-Layer Interaction». In: *AIAA Journal* 47.5 (2009), pp. 1173–1185. DOI: [10.2514/1.38821](https://doi.org/10.2514/1.38821).
- [13] Ming-bo Sun, Zhiwei Hu e Neil D. Sandham. «Recovery of a supersonic turbulent boundary layer after an expansion corner». In: *Physics of Fluids* 29.7 (2017), p. 076103. DOI: [10.1063/1.4995293](https://doi.org/10.1063/1.4995293).
- [14] Fulin Tong et al. «Direct numerical simulation of supersonic turbulent boundary layer subjected to a curved compression ramp». In: *Physics of Fluids* 29.12 (2017), p. 125101. DOI: [10.1063/1.4996762](https://doi.org/10.1063/1.4996762).

- [15] Fulin Tong et al. «Incident shock wave and supersonic turbulent boundarylayer interactions near an expansion corner». In: *Computers & Fluids* 198 (2020), p. 104385.
- [16] De Vanna. «A high-resolution fully compressible Navier-Stokes solver for analysis of moving objects at high Mach numbers». Tesi di dott. Università degli Studi di Padova, 2019.
- [17] «Wall modeled large eddy simulation of supersonic flow physics over compression–expansion ramp». In: *Acta Astronautica* 117 (2015), pp. 197–208. ISSN: 0094-5765. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2015.07.022>.