Università degli studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia Galileo Galilei
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Tesi di Laurea

Rappresentazioni del funzionale generatore delle teorie di campo scalari

Laureando: Marco Benedetti

Relatore: Prof. Marco Matone

Anno accademico 2015-2016

1 Introduzione

Dirac fu tra i primi, ispirandosi alla struttura hamiltoniana della meccanica classica, a cercare una generalizzazione quantomeccanica del concetto di trasformazione canonica.
Una trasformazione classica in particolare, quella che mappa un sistema di hamiltoniana $H(q,p,t)$ in un sistema governato dalla dinamica triviale $H'(q',p',t) \equiv 0$ suscita interesse, in quanto da sola fornisce la descrizione dinamica completa del sistema. La funzione generatrice $S(q,q',t)$ di tale trasformazione dipendente dal tempo $\omega_t : (p,q) \to (p',q')$ soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = -\frac{\partial S}{\partial t} \ , \tag{1.1}$$

e permette di risolvere la dinamica di condizioni iniziali (p_0, q_0) sfruttando

$$p(t) = \omega_t^{-1} \circ \omega_0(p_0, q_0) \ . \tag{1.2}$$

Calcolando la derivata totale della $S(q,q',t)$ lungo i moti del sistema, troviamo

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} = -H(q,p,t) + p\frac{\partial q}{\partial t} \ . \tag{1.3}$$

Integrando si trova quindi che la funzione generatrice della trasformazione che banalizza la dinamica del sistema non è altro che l'azione della lagrangiana

$$S = \int_{t_0}^{t} dt' L \ , \tag{1.4}$$

valutata sulla la traiettoria del moto. L'azione quindi genera le trasformazioni canoniche il cui inverso è l'evoluzione temporale.

Dirac procede alla generalizzazione delle trasformazioni canoniche alla meccanica quantistica. Si vorrebbe trovare una trasformazione fra operatori $\omega(\hat{p},\hat{q}) \to (\hat{P},\hat{Q})$ che, invece che le parentesi di Poisson, conservi la struttura dei commutatori:

$$[\hat{p},\hat{p}] = [\hat{q},\hat{q}] = 0, \qquad [\hat{p},\hat{q}] = i\hbar \ . \tag{1.5}$$

Usando la notazione $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ per le autofunzioni degli operatori e studiando gli elementi di matrice misti si trova

$$\langle q|\hat{p}|Q\rangle = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}\langle q|Q\rangle; \qquad \langle q|\hat{P}|Q\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial Q}\langle q|Q\rangle \ . \tag{1.6}$$

Queste possono essere interpretate come equazioni operatoriali a patto di porre (ecco l'idea di Dirac)

$$\langle q|Q\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}G(q,Q)} \ , \tag{1.7}$$

con G fattorizzabile secondo $G(q,Q) = g_1(q)g_2(Q)$, in maniera che valga

$$\langle q|G(\hat{q},\hat{Q})|Q\rangle = G(q,Q)\langle q|Q\rangle \ . \tag{1.8}$$

In tal caso le (1.6) possono essere scritte come

$$\hat{p} = \widehat{\frac{\partial G}{\partial q}} \ , \qquad \hat{P} = -\widehat{\frac{\partial G}{\partial Q}} \ , \tag{1.9}$$

in perfetta analogia con le trasformazioni canoniche generate da G in meccanica classica. Utilizzando come G l'azione S, dalla (1.7) Feynman prende spunto per la famosa ipotesi

$$\langle q_{t+\delta t}|q_t\rangle \propto \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\delta t L\big(q(t), q(t+\delta t)\big)\Big] \ , \tag{1.10}$$

che è poi la base dello sviluppo della teoria del path integral.

In quanto segue illustreremo delle recenti rappresentazioni per il funzionale generatore, originariamente ricavate in [1], e ne mostreremo i vantaggi.
Deriveremo innanzi tutto una rappresentazione duale per il path integral in termini di derivate funzionali, precisamente:

$$\frac{\int D\phi \exp\big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\big)F[\phi]}{\int D\phi \exp\big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\big)} = \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)F[g]\Big|_{\chi=0} \ . \tag{1.11}$$

Applicheremo tale rappresentazione al calcolo del funzionale generatore, ottenendone una nuova espressione duale

$$W[J] = \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\exp\Big(\int(-V(\chi) + J\chi)\Big]|_{\chi=0} \ . \tag{1.12}$$

Esprimeremo poi il funzionale generatore $W[J]$ mediante la suddetta rappresentazione duale, in termini di un nuovo campo $\phi_c(x) = \int \Delta(y-x)J(y)dy$:

$$T[\phi_c] = W[J] = \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big) \ . \tag{1.13}$$

Le successive sezioni sono dedicate all'applicazione di questa rappresentazione all'equazione di Schwinger-Dyson e allo studio dei potenziali normalmente ordinati, velocizzando i calcoli.
Illustreremo come, nel caso dei potenziali della forma $V(\phi) = \sum_{k=1}^{n} V_k(\phi)$, la rappresentazione duale del funzionale generatore si presti a darne una scrittura fattorizzata in termini dei funzionali generatori associati a ciascuno dei potenziali $V_k(\phi)$ e mostreremo l'interesse di questa caratteristica nel contesto della rinormalizzazione.
Infine ricaveremo un'espressione per il funzionale generatore mediante operatori di derivazione simili alle derivate covarianti, e ne mostreremo i vantaggi in termini di rapidità nei calcoli e di snellezza della notazione.

2 Notazione

In tutto quanto segue si useranno le seguenti notazioni:
siano f, g funzioni o operatori, e sia h una distribuzione o funzione. Si pone allora

$$fhg := \int d^D x d^D y f(x) h(x-y) g(y)$$

$$\frac{\delta}{\delta f} h \frac{\delta}{\delta g} := \int d^D x d^D y \frac{\delta}{\delta f(x)} h(x-y) \frac{\delta}{\delta g(y)}$$

$$hg(x) := \int d^D y h(x-y) g(x)$$

$$h\frac{\delta}{\delta g}(x) := \int d^D y h(x-y) \frac{\delta}{\delta g(y)}$$

$$\langle f \rangle := \int dx f(x)$$

Sia

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + m^2 + i\epsilon} e^{ip(x-y)} \tag{2.1}$$

il propagatore di Feynman. L'espressione del suo inverso è

$$\Delta^{-1}(x-y) = (-\partial^2 + m^2)\delta(x-y) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (p^2 + m^2) e^{ip(x-y)} \ . \tag{2.2}$$

Sia $W[J]$ il funzionale generatore delle funzioni di Green

$$W[J] = e^{-Z[J]} = N \int D\phi \exp(-S[\phi] + \int J\phi) \ , \tag{2.3}$$

dove

$$S[\phi] = \int d^D x \big(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + V(\phi)\big) \tag{2.4}$$

e $N := 1/\int D\phi \exp -S[\phi]$.
Siano infine $N_0 := 1/\int D\phi \exp(-S_0)$ e $Z_0[J] := -\frac{1}{2}J\Delta J$ il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse della teoria libera, corrispondente all'azione $S_0[\phi] = \int d^D x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2)$.

3 Rappresentazione duale del funzionale generatore

In questa sezione ricaviamo una rappresentazione del funzionale generatore duale rispetto alla rappresentazione di Schwinger

$$W[J] = \frac{N}{N_0} \exp\Big(- \int V\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big) \exp(-Z_0[J]) \ ,$$

che comporta uno scambio di ruoli fra i termini di interazione e quelli cinetici. Precisamente troveremo:

$$T[\phi_c] = W[J] = \frac{N}{N_0} \exp\Big(\frac{1}{2}\phi_c \Delta^{-1}\phi_c\Big) \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big) \exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big)$$

con $\phi_c(x) := \int J(y)\Delta(y-x)dy$, e tale funzionale sarà il fulcro del successivo studio. La struttura di $T[\phi_c]$ ci fornirà un'espressione in termini di path integral per l'operatore di evoluzione temporale $S[\hat{\phi}]$ nel limite di grandi T, $S[\hat{\phi}] := \lim_{T\to\infty} e^{-iH(2T)}$, ovvero

$$S[\hat{\phi}] = \int D\phi \exp(-S[\phi]) : \exp(\phi\Delta^{-1}\hat{\phi}) : \quad .$$

3.1

La corrispondenza fra il formalismo operatoriale e il path integral nella QFT deriva dalla relazione fondamentale

$$W[J] = \frac{\langle \Omega \,|\, \Omega\rangle_J}{\langle \Omega \,|\, \Omega\rangle} = N \, \langle 0|\, T \exp[\int (-V(\hat{\phi}) + J\phi)]\, |0\rangle \tag{3.1}$$

dove $|\Omega\rangle$ è il vuoto della teoria interagente e $|0\rangle$ è il vuoto della teoria libera.

Si consideri nella (2.3) il cambio di variabile $\phi := \phi' + \phi_c$, con

$$\phi_c(x) := \int d^D y J(y)\Delta(y-x). \tag{3.2}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} W[J] &= N \int D\phi \exp\big(-S[\phi] + \int J\phi\big) = N \int D\phi \exp\Big[-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\Big] \exp\Big[-\int V(\phi) + \int J\phi\Big] \\ &= N \int D\phi' \exp\Big[-\frac{1}{2}(\phi'+\phi_c)\Delta^{-1}(\phi'+\phi_c)\Big] \exp\Big[-\int V(\phi'+\phi_c) + \int J(\phi'+\phi_c)\Big] \\ &= N \exp(-Z_0[J]) \int D\phi' \exp\big(-\frac{1}{2}\phi'\Delta^{-1}\phi' - \int V(\phi'+\phi_c)\big) \end{aligned} \tag{3.3}$$

dove nella prima riga si è scritto il termine cinetico come $\int d^D x(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2) = \frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi$, nella seconda si è sfruttata l'invarianza della misura di integrazione e nella terza le proprietà $\big(\Delta^{-1}\phi_c\big)(x) = J(x)$ e $\frac{1}{2}\int (J\phi_c)(x)dx = \frac{1}{2}J\Delta J = -Z_0[J]$.
In termini di vev la (3.3) si esprime come

$$= N \exp(-Z_0[J]) \, \langle 0|\, T \exp\Big[\int (-V(\hat{\phi}+\phi_c)\Big] |0\rangle \ . \tag{3.4}$$

Vale inoltre, per ogni funzione $g(x)$,

$$\begin{aligned}\langle 0|\,TF[\hat\phi+g]\,|0\rangle &= \langle 0|\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta g}\Delta\frac{\delta}{\delta g}\Big) : F[\hat\phi+g] : |0\rangle \\ &= \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta g}\Delta\frac{\delta}{\delta g}\Big)\langle 0|\,F[g]\,|0\rangle \\ &= \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta g}\Delta\frac{\delta}{\delta g}\Big)F[g]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

dove nella prima riga si è usato il teorema di Wick e nella seconda la relazione $\langle 0| : G[\hat\phi] : |0\rangle$, valida per ogni funzionale $G[\hat\phi]$, applicata a $G[\hat\phi] = F[\hat\phi+g]$.

La (3.5) dà

$$\langle 0|\,TF[\hat\phi]\,|0\rangle = \langle 0|\,TF[\hat\phi+\chi]\,|0\rangle_{\chi=0} = \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)F[\chi]|_{\chi=0}\ , \tag{3.6}$$

che conduce ad una rappresentazione duale per il path integral, in termini di derivate agenti su un funzionale di ϕ:

$$\frac{\int D\phi\exp\big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\big)F[\phi]}{\int D\phi\exp\big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\big)} = \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)F[\chi]|_{\chi=0} \tag{3.7}$$

Applicando tale relazione alla (2.3) si ottiene una rappresentazione duale del funzionale generatore:

$$W[J] = \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\exp\Big(\int(-V(\chi)+J\chi)\Big]|_{\chi=0}\ , \tag{3.8}$$

ove $N_0 := \int D\phi\exp\big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi\big)$, che da per le funzioni di Green

$$\frac{\langle 0|\,T\hat\phi(x_1)...\hat\phi(x_N)\,|0\rangle}{\langle\Omega\,|\,\Omega\rangle} = \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\chi(x_1)...\chi(x_N)\exp\Big(\int(-V(\chi)\Big)|_{\chi=0}\ . \tag{3.9}$$

3.2 $T[\phi_c] := W[J]$

Applicare invece la (3.5) direttamente alla (3.4) e sfruttare il fatto che

$$J\Delta J = \phi_c\Delta^{-1}\phi_c$$

porta a considerare il funzionale

$$T[\phi_c] = W[J] = \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big)\ . \tag{3.10}$$

Questo dà una nuova rappresentazione per l'operatore S.
Infatti da una parte

$$\begin{aligned} F^k(x_1,...,x_n) &:= \frac{\delta^k T[\phi_c]}{\delta\phi_c(x_1)...\delta\phi_c(x_k)}\Big|_{\phi_c=0} = \prod_{i=1}^{k}\Big[\int d^D y_i\frac{\delta J}{\delta\phi_c}(x_i-y_i)\frac{\delta}{\delta J(y_i)}\Big]W[J] \\ &= \int d^D y_1...\int d^D y_k\Delta^{-1}(x_1-y_1)...\Delta^{-1}(x_k-y_k)\frac{\langle\Omega|\,T\phi(y_1)...\phi(y_k)\,|\Omega\rangle}{\langle\Omega\,|\,\Omega\rangle}\ , \end{aligned} \tag{3.11}$$

dall'altra è noto che

$$S[\hat{\phi}] = N^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int d^Dy_1...\int d^Dy_k F^k(x_1,...,x_n) : \hat{\phi}(y_1)...\hat{\phi}(y_k) : , \tag{3.12}$$

da cui $S[\hat{\phi}] = N^{-1} : T[\hat{\phi}] :$.
Esprimendo $: T[\hat{\phi}] :=: \exp\Big(\hat{\phi}\frac{\delta}{\delta\chi}\Big) : T[\chi]|_{\chi=0}$ ed usando la (3.10) si ottiene:

$$\begin{aligned}
S[\hat{\phi}] &= N^{-1} : \exp\Big(\hat{\phi}\frac{\delta}{\delta\chi}\Big) : T[\chi]|_{\chi=0} \\
&= \frac{1}{N_0} : \exp\Big(\hat{\phi}\frac{\delta}{\delta\chi}\Big) : \exp\Big(\frac{1}{2}\chi\Delta^{-1}\chi\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\exp\Big(-\int V(\chi)\Big)|_{\chi=0} \\
&= \frac{1}{N_0} : \exp\Big(\frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta^{-1}\hat{\phi}\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\exp\Big(-\int V(\hat{\phi}+\chi)\Big) : |_{\chi=0} \\
&= \frac{1}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big) : \exp\big(\frac{1}{2}\hat{\phi}\Delta^{-1}\hat{\phi} - \int V(\hat{\phi}+\chi)\Big) : |_{\chi=0} \ .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Scrivendo $T[\phi_c]$ in termini di path integral:

$$T[\phi_c] = N\int D\phi\exp(-S[\phi])\exp(\phi\Delta^{-1}\phi_c) \tag{3.14}$$

si ottiene

$$S[\hat{\phi}] = \int D\phi\exp(-S[\phi]) : \exp(\phi\Delta^{-1}\hat{\phi}) : \quad , \tag{3.15}$$

che con l'aiuto della (3.7) diventa

$$S[\hat{\phi}] = \frac{1}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\chi}\Delta\frac{\delta}{\delta\chi}\Big)\exp\Big(-\int V(\chi)\Big) : \exp(\chi\Delta^{-1}\hat{\phi}) : |_{\chi=0} \quad . \tag{3.16}$$

4 Polinomi di Hermite e rappresentazione duale dell'equazione di Schwinger-Dyson

In questa sezione mostriamo un primo collegamento fra i polinomi di Hermite e la rappresentazione duale del funzionale deneratore. Altri sorgeranno dalle sezioni successive.
Applichiamo poi queste osservazioni all'equazione di Schwinger-Dyson nel caso modello di potenziali del tipo $V_n \propto \phi^n$, trovandone una forma che coinvolge i cosiddetti polinomi probabilistici di Hermite.

4.1 Legame con i polinomi di Hermite

La rappresentazione di Schwinger per il funzionale generatore

$$W[J] = \frac{N}{N_0} \exp(-\langle V(\frac{\delta}{\delta J})\rangle) \exp(Z_0[J]) \tag{4.1}$$

e l'equivalente scrittura (3.10) implicano la relazione duale

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}J\Delta J\Big)\exp\Big(-\int V\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}J\Delta J\Big)= \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big)\ , \tag{4.2}$$

che ha forti analogie con la relazione fra i polinomi di Hermite e la loro rappresentazione dovuta a Weiestrass:

$$(-1)^n e^{x^2/2} D^n e^{-x^2/2} = e^{-D^2/2} x^n\ . \tag{4.3}$$

Il membro a sinistra contiene la rappresentazione standard dei polinomi di Hermite probabilistici He_n, legati a quelli di uso comune in fisica dalla relazione $H_n(x) = 2^{n/2} He_n(\sqrt{2}x)$.

Si noti per altro che la (4.3) è equivalente, sostituendo x con ix, a:

$$e^{-x^2/2} D^n e^{x^2/2} = e^{D^2/2} x^n \tag{4.4}$$

e che data una funzione $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, la (4.4) dà l'espansione

$$e^{-x^2/2} f(D) e^{x^2/2} = e^{D^2/2} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n He_n(ix), \tag{4.5}$$

con le funzioni $He_n(x)$ che ammettono la nota scrittura

$$He_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} \frac{x^{n-2k}}{2^k}\ . \tag{4.6}$$

In effetti la (4.5) trova immediatamente applicazione in contesto quantistico: da una parte l'espressione (3.10) per il funzionale generatore contiene un fattore

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big)$$

che, espandendo il potenziale V, genera termini del tipo $\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\phi_c^n$, dall'altra

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\phi_c^n = n(n-1)\Delta(0)\phi_c^{n-2} = \Delta(0)\partial^2_{\phi_c}\phi_c^n$$

da cui, con la (4.5)

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\Big)\phi_c^n = (-i)^n \Delta^{\frac{n}{2}}(0) He_n\Big(\frac{i\phi_c(x)}{\Delta^{\frac{1}{2}}(0)}\Big)\ . \tag{4.7}$$

4.2 Applicazione alla rappresentazione duale dell'equazione di Schwinger-Dyson

Le relazioni ricavate nella sezione precedente consentono di riscrivere l'equazione di Schwinger-Dyson

$$\Big[\Delta^{-1}\frac{\delta}{\delta J}(x)+\int\frac{\delta V}{\delta\phi(x)}\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)-J(x)\Big]W(J)=0\ , \tag{4.8}$$

in una forma che coinvolge i polinomi di Hermite.
Tale equazione, espressa in termini del funzionale $T[\phi_c]$, è

$$\Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}}+e^{U_0[\phi_c]}\int\frac{\delta V}{\delta\phi(x)}\Big(\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)e^{-U_0[\phi_c]}\Big]e^{\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}}e^{-\int V(\phi_c)}=0\ . \tag{4.9}$$

Si noti ora che la (4.2), benchè sia stata derivata con i metodi della meccanica quantistica, dipende da oggetti quantomeccanici solo attraverso il propagatore di Feynamn Δ. Questo suggerisce che essa ammetta una generalizzazione di fuori dell'ambito quantomeccanico. Infatti, per ogni finzione I, funzionale F e distribuzione o funzione M vale

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}IMI\Big)F[\delta_I]\exp\Big(\frac{1}{2}IMI\Big)=\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta I}M^{-1}\frac{\delta}{\delta I}\Big)F[MI]\ . \tag{4.10}$$

La prova di tale relazione è rimandata alla sezione 5, dove la ricaveremo come conseguenza di una più generale identità operatoriale.
La (4.10) permette, nel caso di un potenziale $V_n=\frac{\lambda}{n!}\phi^n$, di riscrivere la (4.9) in termini dei polinomi di Hermite.
Per un potenziale $V_n=\frac{\lambda}{n!}\phi^n$, l'equazione di Schwinger-Dyson diventa

$$\Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}}+e^{U_0[\phi_c]}\int\frac{n\lambda}{n!}\Big(\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)^{n-1}e^{-U_0[\phi_c]}\Big]e^{\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}}e^{-\int V(\phi_c)}=0\ . \tag{4.11}$$

Vale poi a livello operatoriale

$$e^{U_0(\phi_c)}\frac{\delta^n}{\delta\phi_c^n(x)}e^{-U_0[\phi_c]}=\Big[e^{U_0[\phi_c]}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\delta^{n-k}}{\delta\phi_c^{n-k}}e^{-U_0[\phi_c]}\Big]\frac{\delta^k}{\delta\phi_c^k(x)}$$

$$=\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\Big)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\Delta^{-1}\phi_c)^{(n-k)}(x)\Big]\frac{\delta^k}{\delta\phi_c^k(x)}\ , \tag{4.12}$$

dove nella seconda riga si è usata la (4.7).

Sfruttando la relazione

$$\frac{\delta}{\delta\big(\Delta^{-1}\phi_c\big)(x)}=\int dz\frac{\delta\phi_c(z)}{\delta\big(\Delta^{-1}\phi_c\big)(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)}=\int dz\frac{\delta\phi_c(z)}{\delta J(x)}\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)}=\int dz\Delta(z-x)\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)} \tag{4.13}$$

possiamo riscrivere la (4.11) come

$$\Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}}+e^{U_0[\phi_c]}\int\frac{n\lambda}{n!}\Big(\frac{\delta}{\delta\big(\Delta^{-1}\phi_c\big)(x)}\Big)^{n-1}e^{-U_0[\phi_c]}\Big]e^{\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}}e^{-\int V(\phi_c)}=0\ . \tag{4.14}$$

Introduciamo la notazione

$$I:=\int dy\Delta^{-1}(x-y)\phi_c(y) \tag{4.15}$$

e notiamo che

$$U_0[\phi_c] = -\frac{1}{2}\phi_C \Delta^{-1}\phi_c = -\frac{1}{2}\Delta I \Delta^{-1}\Delta I = -\frac{1}{2} I \Delta I \ . \tag{4.16}$$

La (4.14) diventa quindi

$$\begin{aligned}
0 &= \Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}} + e^{-\frac{1}{2}I\Delta I} \int \frac{n\lambda}{n!}\Big(\frac{\delta}{\delta I}\Big)^{n-1} e^{-U_0[\phi_c]}\Big] e^{\left(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\right)} e^{-\int V(\phi_c)} \\
&= \Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}} + \int \frac{n\lambda}{n!} e^{\frac{1}{2}\delta_I \delta^{-1}\Delta_I} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-i}{k} \Big(\Delta I\Big)^{n-k-1}(x)\frac{\delta^k}{\delta_I^k}\Big] e^{\left(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\right)} e^{-\int V(\phi_c)} \\
&= \Big[\frac{\delta}{\delta\phi_{c(x)}} + \int \frac{n\lambda}{n!} e^{\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\delta\Delta_{\phi_c}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-i}{k} \Big(\phi_c\Big)^{n-k-1}(x)(\Delta\delta_{\phi_c})\Big] e^{\left(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\right)} e^{-\int V(\phi_c)}
\end{aligned}$$

$$= \Big[\frac{\delta^n}{\delta\phi_c(x)} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda(-i)^k \Delta^{\frac{k}{2}}(0)}{(n-k-1)!k!} He_n\Big(\frac{i\phi_c(x)}{\Delta^{\frac{1}{2}}(0)}\Big)\Big(\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)^{(n-k-1)}(x)\Big] e^{\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}} e^{-\int V(\phi_c)} = 0 \tag{4.17}$$

dove nella seconda riga si è utilizzata la (4.12) e nell'ultima la (4.7) .

5 Dimostrazione e generalizzazione della (4.10)

Questa sezione è dedicata alla costruzione della generalizzazione operatoriale della relazione (4.10), che ne è in effetti una diretta conseguenza.
Illustriamo poi come tale generalizzazione sia l'analogo funzionale di una relazione soddisfatta dai polinomi di Hermite.

5.1 Generalizzazione operatoriale

L'equazione (4.10) non vale come identità operatoriale, come esplicitato dalla (4.12). In quanto segue si dimostra che la sua generalizzazione operatoriale è

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}IMI\Big)F[\delta_I]\exp\Big(\frac{1}{2}IMI\Big) = \exp\Big(-IMI\Big) {}^{\times}_{\times} F[\delta_I] {}^{\times}_{\times} \exp\Big(LMI\Big)|_{L=I} \quad , \tag{5.1}$$

dove ${}^{\times}_{\times} F[\delta_I] {}^{\times}_{\times}$ indica ${}^{\times}_{\times} F[MI] {}^{\times}_{\times}$ con MI sostituito da δ_I.
La relazione (4.10) si dimostra facendo agire la (5.1) su una costante e notando che in tal caso si ha ${}^{\times}_{\times} F[\delta_I] {}^{\times}_{\times} \exp\Big(LMI\Big)|_{L=I} \cdot 1 = {}^{\times}_{\times} F[MI] {}^{\times}_{\times} \exp\Big(IMI\Big)$.

Dimostrazione. Cominciamo col provare che

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}IMI\Big) : F[\delta_I] : \exp\Big(\frac{1}{2}IMI\Big) = \exp\big(-IMI\Big)F[\delta_I]\exp\Big(LMI\Big)|_{L=I} \ . \tag{5.2}$$

A tal fine, scriviamo $: F[MI] :$ in termini della sua trasformata di Laplace

$$\begin{aligned}
: F[MI] : &= e^{-\frac{1}{2}\delta_I M^{-1}\delta_I} F[MI] = e^{-\frac{1}{2}\delta_I M^{-1}\delta_I} \int DJ e^{IMJ} \hat{F}[MJ] \\
&= \int DJ e^{-\frac{1}{2}JMJ + IMJ} \hat{F}[MJ] \ ,
\end{aligned} \tag{5.3}$$

che implica

$$: F[\delta_I] := \int DJe^{-\frac{1}{2}JMJ+J\delta_I}\hat{F}[MJ] \ . \tag{5.4}$$

Vale allora

$$\begin{aligned} : F[\delta_I] : e^{\frac{1}{2}IMI}G[MI] &= \int DJe^{-\frac{1}{2}JMJ+J\delta_I}\hat{F}[MJ]e^{\frac{1}{2}IMI}G[MI] \\ &= \int DJe^{-\frac{1}{2}JMJ}\hat{F}[MJ]e^{\frac{1}{2}(I+J)M(I+J)}G[M(I+J)] \ , \end{aligned} \tag{5.5}$$

da cui

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}IMI} : F[\delta_I] : e^{\frac{1}{2}IMI}G[MI] &= \int DJe^{IMJ}\hat{F}[MJ]G[M(I+J)] \\ &= e^{-IMI}\int DJ\hat{F}[MJ]e^{LM(I+J)}|_{L=I}G[M(I+J)] \\ &= e^{-IMI}\int DJe^{J\delta_I}\hat{F}[MJ]e^{LMI}|_{L=I}G[MI] \\ &= e^{-IMI}F[\delta_I]e^{LMI}|_{L=I}G[MI] \ . \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'ultima uguaglianza è esattamente l'enunciato (5.2).
La (5.2) è poi equivalente alla (5.1), come si vede con la sostituzione

$$F[MI] = \exp\big(\frac{1}{2}\delta_I M^{-1}\delta_I\big) : F[MI] : , \tag{5.7}$$

e ciò conclude la dimostrazione. □

5.2 Analogia con l'estensione operatoriale della rappresentazione di Weierstrass dei polinomi di Hermite

Si noti che la (5.2) è la generalizzazione funzionale dell'identità operatoriale

$$e^{-x^2/2}\Big(e^{-D^2/2}f(x)\Big)(D)e^{x^2/2} = e^{-x^2}f(D)e^{yx}|_{y=x} \ , \tag{5.8}$$

o equivalentemente di

$$e^{-x^2/2}f(D)e^{x^2/2} = e^{-x^2}\Big(e^{D^2/2}f(x)\Big)(D)e^{yx}|_{y=x} \ . \tag{5.9}$$

Questa a sua volta è la generalizzazione operatoriale della rappresentazione di Weierstrass dei polinomi di Hermite, che si ottiene facendo agire la (5.9) su una costante.
Una possibile dimostrazione della (5.8) è la seguente:
Restringiamoci al caso $f_n(x) = x^n$ e proviamo il risultato per induzione su n.
L'estensione della prova ad un arbitraria $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ l'estensione segue per linearità.

La (5.8) vale per $n = 1, \quad f(x) = x$.
Inoltre, come abbiamo già visto

$$e^{-D^2/2}x^n = He_n(x) \quad . \tag{5.10}$$

Dobbiamo quindi provare che vale

$$e^{-x^2/2}He_{n+1}(D)e^{x^2/2} = e^{-x^2}D^{n+1}e^{yx}|_{y=x} \ , \tag{5.11}$$

assumendo vera

$$e^{-x^2/2} He_n(D) e^{x^2/2} = e^{-x^2} D^n e^{yx}|_{y=x} \ .$$

Si ha, usando $He_{n+1}(x) = xHe_n(x) - nHe_{n-1}(x)$,

$$e^{-x^2/2} He_{n+1}(D) e^{x^2/2} = e^{-x^2/2}(DHe_n(D) - nHe_{n-1}(D))e^{x^2/2} \ .$$

D'altra parte, usando $[He_n(D), x] = nHe_{n-1}(D)$,

$$\begin{aligned} e^{-x^2/2} He_n(D) D e^{x^2/2} &= e^{-x^2/2} He_n(D) x e^{x^2/2} + e^{-x^2/2} He_n(D) e^{x^2/2} D \\ &= e^{-x^2/2}(xHe_n(D) + nHe_{n-1}(D))e^{x^2/2} + e^{-x^2/2} He_n(D) e^{x^2/2} D, \end{aligned} \tag{5.12}$$

da cui

$$e^{-x^2/2}(He_n(D)D - nHe_{n-1}(D))e^{x^2/2} = e^{-x^2} x D^n e^{yx}|_{y=x} + e^{-x^2} D^n e^{yx}|_{y=x} D \ . \tag{5.13}$$

Infine vale l'identità

$$\begin{aligned} e^{-x^2} D^{n+1} e^{yx}|_{y=x} &= e^{-x^2} y D^n e^{yx}|_{y=x} + e^{-x^2} D^n e^{yx}|_{y=x} D \\ &= e^{-x^2} x D^n e^{yx}|_{y=x} + e^{-x^2} D^n e^{yx}|_{y=x} D \ . \end{aligned} \tag{5.14}$$

La (5.13) e la (5.14) concludono la prova.

6 Fattorizzazione del funzionale generatore

In questa sezione mostriamo che, dato un potenziale del tipo $V(\phi) = \sum_{k=0}^{n} V_k(\phi)$, la rappresentazione duale del funzionale generatore ne fornisce una forma fattorizzata in termini dipendenti dai singoli potenziali, non palese nelle altre rappresentazioni. Tale forma viene poi impiegata nel contesto della rinormalizzazione.

Consideriamo per definitezza il caso $V(\phi) = V_1(\phi) + V_2(\phi)$. La rappresentazione di Schwinger di $W[J]$ è

$$W[J] = \frac{N}{N_0} \exp\Big(-\int V_1\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big) \exp\Big(\int V_2\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big) \exp(-Z_0[J])$$

che non è a vista decomponibile. Nella rappresentazione duale abbiamo invece

$$T[\phi_c] = \frac{N}{N_0} \exp(-U_0[\phi_c]) \exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big) \exp\Big(-\int V_1(\phi_c)\Big) \exp\Big(-\int V_2(\phi_c)\Big) \ . \tag{6.1}$$

Questa scrittura porta ad investigare l'azione di $\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)$ su prodotti di funzionali di ϕ_c. L'esito della ricerca è la seguente relazione:

$$\begin{aligned} &\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\big) F[\phi_c] G[\phi_c] \\ &= \exp\big(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)\Big(\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_1}}\big)F[\phi_{c_1}] \exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_{c_2}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)G[\phi_{c_2}]\Big)|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c} \ . \end{aligned} \tag{6.2}$$

Dimostrazione. Consideriamo l'identità

$$\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\big)F[\phi_c]G[\phi_c]$$

$$= F[\delta_\mu]G[\delta_\nu]\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_c}\Delta\delta_{\phi_c}\big)\exp\Big[\int(\mu+\nu)\phi_c\Big]|_{\mu=\nu=0}$$

$$= F[\delta_\mu]G[\delta_\nu]\exp\Big[\frac{1}{2}\mu\Delta\mu+\frac{1}{2}\nu\Delta\nu+\mu\Delta\nu+\int(\mu+\nu)\phi_c\Big]|_{\mu=\nu=0}, \tag{6.3}$$

Vale poi:

$$\exp\big(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)\exp\Big[\int(\mu\phi_{c_1}+\nu\phi_{c_2})\Big]$$

$$= \exp\Big(\int\mu\phi_{c_1}\Big)\exp\big(\mu\Delta\delta_{\phi_{c2}}\big)\exp\Big(\int\nu\phi_{c2}\Big)$$

$$= \exp\Big[\int(\mu\phi_{c_1}+\nu\phi_{c2}+\mu\Delta\nu)\Big]\ , \tag{6.4}$$

dove nella seconda riga si è sfruttato il fatto che $\exp(\mu\Delta\delta_{\phi_c})$ trasla di $\mu\Delta$ un funzionale $F[\phi_c]$. Inoltre, per il membro di destra della (6.2) vale

$$\exp\big(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)\Big(\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_1}}\big)F[\phi_{c_1}]\exp\big(\frac{1}{2}\delta_{\phi_{c_2}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)G[\phi_{c2}]\Big)|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}$$

$$= \exp\big(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)\Big[F[\delta_\mu]G[\delta_\nu]\exp\big(\frac{1}{2}\mu\Delta\mu+\frac{1}{2}\nu\Delta\nu+\int(\mu\phi_{c_1}+\nu\phi_{c_2})\big)|_{\mu=\nu=0}\Big]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}$$

$$= F[\delta_\mu]G[\delta_\nu]\Big[\exp\big(\frac{1}{2}\mu\Delta\mu+\frac{1}{2}\nu\Delta\nu\big)\exp\big(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}}\big)\exp\Big(+\int(\mu\phi_{c_1}+\nu\phi_{c_2})\Big)|_{\mu=\nu=0}\Big]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}\ . \tag{6.5}$$

Nella seconda riga si è usato $F[\phi]=F[\delta_\mu]\exp(\int\mu\phi)|_{\mu=0}$.
Applicando alla (6.5) la (6.4) si ottiene la (6.3), provando l'enunciato. □

Poniamo

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}F[MI]\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}=\exp\Big(\frac{1}{2}\delta_I M^{-1}\delta_I\Big)F[MI]\ . \tag{6.6}$$

Inoltre, nel resto della sezione snelliamo la notazione, indicando con $T_k[\phi_c]$ tanto il funzionale generatore relativo all'azione $S_k := \int d^Dx\big(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi+\frac{1}{2}m^2\phi^2+V_k(\phi)\big)$ quanto funzionale generatore privato del fattore di normalizzazione N_k/N_0, con $N_k := 1/\int D\phi\exp(-S_k)$.
La (6.2) si può riscrivere come

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}F[\phi_c]G[\phi_c]\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}=\exp(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_22}})\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}F[\phi_{c_1}]\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}G[\phi_{c_2}]\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}\ . \tag{6.7}$$

Applicando l'identità (6.2) alla (6.1), nella notazione appena introdotta si ha

$$T[\phi_c]=\exp(-U_0[\phi_c])\exp(\delta_{\phi_{c_1}}\Delta\delta_{\phi_{c_2}})\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}\exp\Big(-\int V_1(\phi_{c_1})\Big)\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}\exp\Big(-\int V_2(\phi_{c_2})\Big)\genfrac{}{}{0pt}{}{\times}{\times}|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}\ , \tag{6.8}$$

ovvero

$$T[\phi_c] = \exp(\delta_{\phi_{c_1}} \Delta \delta_{\phi_{c_2}}) \exp \theta(1,2) T_1[\phi_{c1}] T_2[\phi_{c2}]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c} \ , \tag{6.9}$$

con

$$\theta(1,2) := -U_0[\phi_c] + U_0[\phi_{c_1}] + U_0[\phi_{c_2}] \ . \tag{6.10}$$

Questa fattorizzazione torna utile nel procedimento di rinormalizzazione. Si consideri infatti l'azione rinormalizzata

$$S_{ren} = \int \Big(\frac{1}{2} \phi \hat{\Delta}^{-1} \phi + V(\phi) + V_{ct}(\phi) \Big) \ , \tag{6.11}$$

dove V_{ct} è il potenziale di controtermine e $\hat{\Delta}$ è il propagatore di Feynman associato alla parte cinetica della lagrangiana rinormalizzata

$$\frac{1}{2}(1+A) \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + \frac{1}{2}(1+B) m^2 \phi^2 \ . \tag{6.12}$$

Denotiamo con $T_{ren}[\phi_c]$ il funzionale generatore associato all'azione S_{ren}, con $\hat{T}[\phi_c]$ quello associato a $S_{ren} - \int V_{ct}$ e con $\hat{T}_{ct}[\phi_c]$ quello associato a $S_{ren} - \int V$. In tutte queste scritture ϕ_c va inteso come il campo legato alla corrente J dal propagatore della teoria rinormalizzata: $\phi_c(x) := \hat{\Delta} J(x)$. Usando la (6.9) si può decomporre il funzionale generatore rinormalizzato come

$$T_{ren}[\phi_c] = \exp(\delta_{\phi_{c_1}} \hat{\Delta} \delta_{\phi_{c_2}}) \exp \hat{\theta}(1,2) \hat{T}[\phi_{c1}] \hat{T}_{ct}[\phi_{c2}]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c} \ , \tag{6.13}$$

dove $\hat{\theta}(1,2)$ è dato dalla (6.10) con Δ sostituito da $\hat{\Delta}$.
Questa costruzione è evidentemente generale, e può essere utilizzata ad ogni ordine di normalizzazione.

7 $T[\phi_c]$ e potenziali normalmente ordinati

Si noti che, nel caso $TF[\hat{\phi}] = F[\hat{\phi}]$, il teorema di Wick

$$TF[\hat{\phi}] = \exp \Big(\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}} \Delta \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}} \Big) : F[\hat{\phi}] : \tag{7.1}$$

permette di scrivere l'operatore di ordinamento normale come $\exp(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}} \Delta \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}})$.
Estendiamo questa scrittura anche al caso in cui l'argomento di F sia una funzione e non un operatore, riferendoci con il termine *ordinamento normale* anche all'operatore

$$F[\phi] \rightarrow : F[\phi] :\equiv \exp \Big(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi} \Big) F[\phi] \ . \tag{7.2}$$

Ci proponiamo ora di specializzare lo studio svolto al caso di potenziali ordinati normalmente, vale a dire potenziali $: V := \exp\Big(-\frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi}\Big) V[\phi]$.
Nel seguito adoperiamo la seguente notazione:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\delta \phi_c} \Delta \frac{\delta}{\delta \phi_c} \tag{7.3}$$

e

$$\mathcal{D}_j = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_{c_j}}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_{c_j}} \ , \qquad \mathcal{D}_{jk} = \frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_{c_j}}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_{c_k}} \ . \tag{7.4}$$

In tale notazione il funzionale generatore si scrive come

$$T[\phi_c] = \frac{N}{N_0}\exp(-U_0[\phi_c])\exp(\mathcal{D})\exp\Big(-\int :V(\phi_c):\Big) \ , \tag{7.5}$$

e la (6.2) è

$$e^{\mathcal{D}}F[\phi_c]G[\phi_c] = e^{\mathcal{D}_{12}}\Big(e^{\mathcal{D}_1}F[\phi_{c_1}]e^{\mathcal{D}_2}G[\phi_{c_2}]\Big)|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c} \ . \tag{7.6}$$

È nota la seguente relazione funzionale:

$$e^{\mathcal{D}}e^{L[A]} = \exp\Big[\sum_{n=0}^{\infty} Q_n/n!\Big] \tag{7.7}$$

ove

$$\begin{aligned} Q_n :&= e^{\mathcal{D}}L^n[A]|_{conn} \\ &= \prod_{i>j=1}^{n} e^{\mathcal{D}_{ij}}\prod_{i=1}^{n} e^{\mathcal{D}_i}L[A_i]|_{conn,A_1=\ldots=A_n=A} \end{aligned} \tag{7.8}$$

ed il pedice *conn* prescrive tenere solo i termini dello sviluppo in cui ogni coppia di $L[A_i]$ sia "collegata" da un operatore del tipo $e^{\mathcal{D}_{ij}}$, scartando gli altri. Un'ottima referenza in proposito è il testo [2], di H. M. Fried.
Applicando questa relazione alla (6.2) otteniamo

$$T[\phi_c] = \exp(-U[\phi_c]) = \frac{N}{N_0}\exp\Big(-U_0[\phi_c] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k[\phi_c]}{k!}\Big) \ . \tag{7.9}$$

con

$$Q_k[\phi_c] := e^{\mathcal{D}}(-\int :V(\phi_c):)^k|_{conn} \ . \tag{7.10}$$

Vale poi, effettuando un riscalamento del potenziale,

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{D})\exp\Big(-\mu\int :V(\phi_c):\Big) &= \exp\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big[e^{\mathcal{D}}(-\mu\int :V(\phi_c):)^k\Big]_{conn}\Big) \\ &= \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}Q_k[\phi_c]\Big) \end{aligned} \tag{7.11}$$

che implica

$$Q_k[\phi_c] = \partial_\mu^k \ln\Big[\exp(\mathcal{D})\exp\Big(-\mu\int :V(\phi_c):\Big)\Big]|_{\mu=0} \ . \tag{7.12}$$

La forma esplicita di questi funzionali connessi risulta molto semplificata nel caso di potenziali ordinati normalmente : per $k = 1, 2$ abbiamo

$$Q_1 = -e^{\mathcal{D}}\int :V := -\int V \tag{7.13}$$

e

$$Q_2 = \Big[e^{\mathcal{D}_{12}} - 1\Big]\Big[\Big(e^{\mathcal{D}_1}\int : V(\phi_{c_1}) :\Big)\Big(e^{\mathcal{D}_2}\int : V(\phi_{c_2}) :\Big)\Big]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c}$$
$$= \Big[e^{\mathcal{D}_{12}} - 1\Big]\Big[\int V(\phi_{c_1})\int V(\phi_{c_2})\Big]|_{\phi_{c_1}=\phi_{c_2}=\phi_c} \ . \tag{7.14}$$

Come in questi casi, $\forall k$ gli operatori $e^{\mathcal{D}_k}$ cancellano l'azione del ordinamento normale. Si noti anche che l'effetto del -1 in $e^{\mathcal{D}_{12}} - 1$ è quello di eliminare i diagrammi di Feynman non connessi da almeno un propagatore. Per $Q_n[\phi_c]$ vale quindi la sintetica espressione

$$Q_n[\phi_c] = (-1)^n \prod_{j>k}^{n} e^{\mathcal{D}_{jk}} \prod_{i=1}^{n} \int V(\phi_{ci})|_{c,\phi_{c_1},\ldots,\phi_{c_n}=\phi_c} \ , \tag{7.15}$$

dove il pedice c prescrive di scartare i diagrammi sconnessi.
Segue la seguente espressione per il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse:

$$U[\phi_c] = \ln\frac{N_0}{N} + U_0[\phi_c] + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\prod_{j>k}^{p} e^{\mathcal{D}_{jk}}\prod_{i=1}^{p}\int V(\phi_{c_i})|_{c,\phi_{c_1},\ldots,\phi_{c_p}=\phi_c} \ . \tag{7.16}$$

8 Funzionale generatore e derivate "covarianti"

In questa sezione ricaviamo un'altra rappresentazione del funzionale generatore, in termini di un operatore simile alla derivata covariante.
Tale scrittura agevola il calcolo perturbativo del funzionale generatore e permette una notazione particolarmente concisa per descrivere la fattorizzazione del funzionale generatore affrontata nella sezione 6. Inoltre consente di esprimere, come succede per il classico funzionale $W[J]$, anche $T[\phi_c]$ come vev di un opportuno campo operatoriale, calcolato rispetto ai vuoti della teoria libera.

Si consideri l'identità operatoriale

$$\exp\Big(-\frac{1}{2}IMI\Big)F[\delta_I]\exp\Big(\frac{1}{2}IMI\Big) = F[\mathcal{D}_{MI}] \ , \tag{8.1}$$

dove $\mathcal{D}_{MI}(x) := \frac{\delta}{\delta I(x)} + MI(x)$. Ci riferiremo a questo operatore con il termine "derivata covariante".
La (8.1) è la generalizzazione funzionale dell'identità operatoriale

$$e^{-x^2/2}F(D)e^{x^2/2} = F(D+x) \ . \tag{8.2}$$

La (8.2) si dimostra facilmente restringendosi al caso $F(x) := F_n(x) = x^n$ e procedendo per induzione su n, verificando la validitá delle relazioni facendo agire gli operatori su funzioni test tipo $G_m(x) = x^m$. La prova si estende per linearità a generiche $F(x) = \sum_n a_n x^n$ e $G(x) = \sum_n b_n x^n$. La (8.1) si prova analogamente.

Dalla (4.10) che, come già sottolineato, non vale come identità operatoriale e dalla (8.1) segue

$$\exp\Big(\frac{1}{2}\delta_I M^{-1}\delta_I\Big)F[MI] = F[\mathcal{D}_{MI}]\cdot 1 \ , \tag{8.3}$$

che è l'estensione funzionale di

$$e^{D^2/2}f(x) = f(D+x)\cdot 1 \ . \tag{8.4}$$

Inoltre, dalla (5.1) e dalla (8.1) si ottiene l'identità operatoriale

$$\exp\Big(-IMI\Big) \overset{\times}{\times} F[\delta_I] \overset{\times}{\times} \exp\Big(LMI\Big)|_{L=I} = F[\mathcal{D}_{MI}] \ . \tag{8.5}$$

La (8.1), specializzata al contesto quantomeccanico dà, sempre a livello operatoriale,

$$\exp(Z_0[J]) \exp\Big(-\int V\Big(\frac{\delta}{\delta J}\Big)\Big) \exp(-Z_0[J]) = \exp\Big(-\int V(\mathcal{D}^-_{\phi_c})\Big) \ , \tag{8.6}$$

dove abbiamo usato la notazione

$$\mathcal{D}^{\pm}_{\phi}(x) = \mp\Delta\frac{\delta}{\delta\phi}(x) + \phi(x) \ . \tag{8.7}$$

Tali operatori, come è immediato verificare, soddisfano le relazioni di commutazione

$$[\mathcal{D}^-_{\phi}(x), \mathcal{D}^+_{\phi}(y)] = 2\Delta(x-y) \qquad , \qquad [\mathcal{D}^-_{\phi}(x), \mathcal{D}^-_{\phi}(y)] = [\mathcal{D}^+_{\phi}(x), \mathcal{D}^+_{\phi}(y)] = 0 \ . \tag{8.8}$$

Sfruttando le (3.10), (4.2) e (8.6) si mostra che il funzionale generatore può essere espresso in termini di derivate covarianti applicate ad 1:

$$T[\phi_c] = \frac{N}{N_0}\exp(-U_0[\phi_c]) \exp\Big(-\int V(\mathcal{D}^-_{\phi_c})\Big) \cdot 1 \ . \tag{8.9}$$

Illustriamo ora alcune caratteristiche di questa scrittura, concentrandoci in primo luogo sul calcolo delle funzioni di Green. Dall'identità operatoriale

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp(-U_0[\phi_c]) = \exp(-U_0[\phi_c])\mathcal{D}^-_{\phi_c}(x) \tag{8.10}$$

si ottiene una loro rappresentazione in termini di derivate covarianti:

$$\begin{aligned}\frac{\delta^N W[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_N)} &= \exp(-U_0[\phi_c])\mathcal{D}^-_{\phi_c}(x_1)\dots\mathcal{D}^-_{\phi_c}(x_N)\exp\Big(-\int V(\mathcal{D}^-_{\phi_c})\Big)\cdot 1 \\ &= \exp(-U_0[\phi_c])\exp\Big(-\int V(\mathcal{D}^-_{\phi_c})\Big)\mathcal{D}^-_{\phi_c}(x_1)\dots\mathcal{D}^-_{\phi_c}(x_N)\cdot 1 \ .\end{aligned} \tag{8.11}$$

La scrittura (8.9) semplifica inoltre il calcolo perturbativo del funzionale generatore.
Si consideri ad esempio il caso di una teoria $V = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.
Sfruttando le relazioni

$$\mathcal{D}^-_{\phi}(x)\cdot 1 = \phi(x) \quad ; \quad [\mathcal{D}^-_{\phi}(x), \phi(y)] = \Delta(x-y) \tag{8.12}$$

si ottiene

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{2}\mathcal{D}^-_{\phi}(x_k)\cdot 1 = \prod_{k=1}^{2}\phi(x_k) + \Delta(x_1-x_2) \ , \\ &\prod_{k=1}^{3}\mathcal{D}^-_{\phi}(x_k)\cdot 1 = \prod_{k=1}^{3}\phi(x_1) + \Delta(x_1-x_2)\phi(x_3) + \Delta(x_1-x_3)\phi(x_2) + \Delta(x_2-x_3)\phi(x_1) \ , \\ &\prod_{k=1}^{4}\mathcal{D}^-_{\phi}(x_k)\cdot 1 = \prod_{k=1}^{4}\phi(x_k) + \Delta(x_1-x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) + \Delta(x_1-x_3)\phi(x_2)\phi(x_4) \\ &\quad + \Delta(x_1-x_4)\phi(x_2)\phi(x_3) + \Delta(x_2-x_3)\phi(x_1)\phi(x_4) + \Delta(x_2-x_4)\phi(x_1)\phi(x_3) \\ &\quad + \Delta(x_3-x_4)\phi(x_1)\phi(x_2) + \Delta(x_1-x_2)\Delta(x_3-x_4) + \Delta(x_1-x_3)\Delta(x_2-x_4) \\ &\quad + \Delta(x_2-x_3)\Delta(x_1-x_4) \ .\end{aligned} \tag{8.13}$$

Specializzando queste espressioni al caso $x_k = x\ \forall k$ possiamo scrivere, arrestandoci all'ordine λ

$$\begin{aligned} T[\phi_c] &= \frac{N}{N_0}\exp(-U_0[\phi_c])\Big(1 - \frac{\lambda}{4!}\int d^D x \mathcal{D}^{-\,4}_{\phi_c}(x) + o(\lambda^2)\Big)\cdot 1 \\ &= \frac{N}{N_0}\exp(-U_0[\phi_c])\Big(1 - \frac{\lambda}{4!}\int d^D x(\phi_c^4(x) + 6\phi_c^2(x)\Delta(0) + 3\Delta^2(0)) + o(\lambda^2)\Big)\ . \end{aligned} \tag{8.14}$$

Anche nel caso di potenziali ordinati normalmente l'utilizzo delle derivate covarianti semplifica la scrittura. Infatti, la (8.3) implica

$$: F[\phi] := F[\mathcal{D}^+_\phi]\cdot 1\ . \tag{8.15}$$

Calcoli analoghi a quelli in (8.13) permettono di ottenere le espressioni esplicite

$$\begin{aligned} &: \phi^2(x) : = \phi^2(x) - \Delta(0)\ , \\ &: \phi^3(x) : = \phi^3(x) - 3\Delta(0)\phi(x)\ , \\ &: \phi^4(x) : = \phi^4(x) - 6\Delta(0)\phi^2(x) + 3\Delta^2(0)\ . \end{aligned} \tag{8.16}$$

Per quanto riguarda il problema di fattorizzazione affrontato nella sezione 6, l'espressione (6.7) si snellisce molto. Dalla (8.3) si ottengono infatti :

$$\exp\big(\frac{1}{2}\delta_\phi\Delta\delta_\phi\big)F[\phi]G[\phi] = F[\mathcal{D}^-_\phi]G[\mathcal{D}^-_\phi]\cdot 1\ , \tag{8.17}$$

e

$$\exp\big(-\frac{1}{2}\delta_\phi\Delta\delta_\phi\big)F[\phi]G[\phi] = F[\mathcal{D}^+_\phi]G[\mathcal{D}^+_\phi]\cdot 1\ . \tag{8.18}$$

Da ultimo sottolineiamo che il funzionale generatore ammette un'espressione in termini di vev anche nella forma $T[\phi_c]$. A tal proposito, notiamo che sostituendo nella (4.2) $e^{-\int V}$ con $: e^{-\int V} :$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big) &= \exp\Big(-\frac{1}{2}J\Delta J\Big) : \exp\Big(-\int V(\delta_J)\Big) : \exp\Big(\frac{1}{2}J\Delta J\Big) \\ &= N_0\exp\Big(-\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big)\langle 0|T : \exp\Big(-\int V(\hat\phi)\Big) : \exp\Big(\int\hat\phi\Delta^{-1}\phi_c\Big)|0\rangle\ . \end{aligned} \tag{8.19}$$

Inoltre dalla (8.1) si ottiene l'identità operatoriale

$$\exp(-U_0[\phi_c])\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp(U_0[\phi_c]) = \exp(\frac{1}{2}\mathcal{D}^-_{\phi_c}\Delta^{-1}\mathcal{D}^-_{\phi_c})\ . \tag{8.20}$$

Utilizzando queste relazioni si può scrivere

$$\begin{aligned} T[\phi_c] &= \frac{N}{N_0}\exp\Big(\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\int V(\phi_c)\Big) \\ &= N\exp\Big(\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big)\exp\Big(\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Delta\frac{\delta}{\delta\phi_c}\Big)\exp\Big(-\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\Big) \\ &\qquad\cdot\langle 0|T : \exp\Big(-\int V(\hat\phi)\Big) : \exp\Big(\int\hat\phi\Delta^{-1}\phi_c\Big)|0\rangle \\ &= N\exp(\frac{1}{2}\mathcal{D}^-_{\phi_c}\Delta^{-1}\mathcal{D}^-_{\phi_c})\langle 0|T : \exp\Big(-\int V(\hat\phi)\Big) : \exp\Big(\int\hat\phi\Delta^{-1}\phi_c\Big)|0\rangle\ , \end{aligned} \tag{8.21}$$

che è proprio nella forma cercata.

9 Dualità ϕ-ϕ_c e $U[\phi_c]$ come potenziale efficace

Il fatto che in espressioni quali la (3.3) compaiano termini del tipo $\int V(\phi+\phi_c)$ lascia pensare che vi sia una sottostante struttura di intercambiabilità fra il campo ϕ e ϕ_c. In quanto segue sottolineiamo ulteriori aspetti formali a sostegno di tale ipotesi, che merita probabilmente ulteriori investigazioni.

Il punto di partenza è il funzionale generatore per una teoria a due campi scalari ϕ e ϕ_c, accoppiati simmetricamente da un potenziale $V(\phi+\phi_c)$. Precisamente:

$$W[I,K] = N_D N \int D\phi_c \int D\phi \exp\Big[-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c - \int (V(\phi+\phi_c) - I\phi - K\phi_c)\Big] \ . \tag{9.1}$$

Definiamo i seguenti funzionali:

$$S_D[\phi_c] := \phi_c\Delta^{-1}\phi_c + U[\phi_c] \ , \tag{9.2}$$
$$H[\phi,\phi_c] := \exp\Big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi + \frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c - \int V(\phi+\phi_c)\Big) \ , \tag{9.3}$$
$$K[\phi,\phi_c] := \exp\big(-\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\big)H[\phi,\phi_c] = \exp\Big(-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c - \int V(\phi+\phi_c)\Big) \ . \tag{9.4}$$

Sfruttando la (3.3) possiamo quindi scrivere

$$T[\phi_c] = N\int D\phi H[\phi,\phi_c] \ . \tag{9.5}$$

e

$$\exp(-S_D[\phi_c]) = N\int D\phi K[\phi,\phi_c] = \exp\big(-\phi_c\Delta^{-1}\phi_c\big)T[\phi_c] \ , \tag{9.6}$$

$$S_D[\phi_c] = \ln\frac{N_0}{N} + \frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k[\phi_c]}{k!} \ . \tag{9.7}$$

Ponendo a 0 la corrente associata al campo ϕ nel funzionale (9.1), ed effettuando un cambio di variabile analogo a (3.2), possiamo definire un funzionale

$$\begin{aligned} T_D[\varphi_c] = W[0,\varphi_c\Delta^{-1}] &= N_D N\int D\phi_c \int D\phi K[\phi,\phi_c]\exp(\varphi_c\Delta^{-1}\phi_c) \\ &= N_D\int D\phi_c \exp(-S_D[\phi_c] + \varphi_c\Delta^{-1}\phi_c) \ , \end{aligned} \tag{9.8}$$

che ha una forma analoga al funzionale generatore di una teoria ad un campo, ϕ_c, in cui il funzionale generatore $U[\phi_c] - U_0[\phi_c]$ svolga il ruolo di potenziale.

Riformuliamo la (9.1). Il cambio di variabile

$$\phi = \phi' + \Delta I \ , \qquad \phi_c = \phi'_c + \Delta K \ , \tag{9.9}$$

dà

$$\begin{aligned} W[I,K] = {} & N_D N \exp(\frac{1}{2}I\Delta I + \frac{1}{2}K\Delta K) \\ & \cdot \int D\phi_c D\phi \exp\Big[-\frac{1}{2}\phi\Delta^{-1}\phi - \frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c - \int V(\phi+\phi_c+\Delta(I+K))\Big] \ . \end{aligned} \tag{9.10}$$

Un ulteriore cambio di variabile

$$\rho = \frac{\phi + \phi_c}{\sqrt{2}} \ , \qquad \sigma = \frac{\phi - \phi_c}{\sqrt{2}} \ , \tag{9.11}$$

porta a

$$W[I,K] = \frac{N_D N}{N_0} \exp(\frac{1}{2} I\Delta I + \frac{1}{2} K\Delta K) \int D\rho \exp\Big[-\frac{1}{2}\rho\Delta^{-1}\rho - \int V(\sqrt{2}\rho + \Delta(I+K)) \Big] \ . \tag{9.12}$$

Infine, ponendo

$$\rho_c = \frac{\Delta(I+K)}{\sqrt{2}} \ , \qquad \sigma_c = \frac{\Delta(I-K)}{\sqrt{2}} \ , \tag{9.13}$$

si ottiene $W[I,K] = T_D[\rho_c, \sigma_c]$, con

$$T_D[\rho_c, \sigma_c] = \frac{N_D N}{N_0^2} \exp(\frac{1}{2}\sigma_c\Delta^{-1}\sigma_c + \frac{1}{2}\rho_c\Delta^{-1}\rho_c) \exp\Big(\frac{1}{2}\delta_{\rho_c}\Delta\delta_{\rho_c}\Big) \exp\Big(-\int V(\sqrt{2}\rho_c)\Big) \ . \tag{9.14}$$

Ricordando che per definizione

$$T_D[\varphi_c] = T_D[\rho_c, \sigma_c]|_{I=0} = T_D[\frac{\varphi_c}{\sqrt{2}}, -\frac{\varphi_c}{\sqrt{2}}] \ , \tag{9.15}$$

le (9.8) e (9.14) danno l'identità

$$\begin{aligned} \frac{N_0}{N_D} T_D[\varphi_c] &= N \int D\phi_c \exp\Big(-\frac{1}{2}\phi_c\Delta^{-1}\phi_c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k[\phi_c]}{k!} + \varphi_c\Delta^{-1}\phi_c \Big) \\ &= \frac{N}{N_0} \exp(\frac{1}{2}\varphi_c\Delta^{-1}\varphi_c) \exp(\delta_{\varphi_c}\Delta\delta_{\varphi_c}) \exp\Big(-\int V(\varphi_c)\Big) \ , \end{aligned} \tag{9.16}$$

che ha la stessa forma della rappresentazione duale del funzionale generatore associato al potenziale $V(\phi_c)$, salvo il fattore di riscalamento 2 del termine $\delta_{\varphi_c}\Delta\delta_{\varphi_c}$.
Tali analogie andrebbero ulteriormente esplorate. Intanto sottolineiamo che il fattore 2 di cui sopra è equivalente ad un riscalamento di un fattore 1/2 del termine cinetico.
Per verificarlo, si può sostituire il cambio di variabile (9.11) con

$$\tilde\rho = \phi + \phi_c \ , \qquad \tilde\sigma = \phi - \phi_c \ , \tag{9.17}$$

ottenendo

$$T_D[\varphi_c] = \frac{N_D N}{N_0 N_0'} \exp(\frac{1}{2}\varphi_c\Delta^{-1}\varphi_c) \int D\tilde\rho \exp\Big(-\frac{1}{4}\tilde\rho\Delta^{-1}\tilde\rho - \int V(\tilde\rho + \varphi_c)\Big) \ , \tag{9.18}$$

con $N_0' = 1/\int D\tilde\sigma \exp(-\frac{1}{4}\tilde\sigma\Delta^{-1}\tilde\sigma)$.

Riferimenti bibliografici

[1] M. Matone, "Dual Representation for the generating functional of the Feynman path-integral", Nucl. Phys. B 910 (2016) 309 doi:10.1016/j.nuclphysb.2016.07.003 [arXiv:1511.07408 [hep-th]].

[2] H.M. Fried, Functional Methods and Eikonal Models, Éditions Frontières, Gif-sur-Yvette, France (1990)