



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”
Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Meccanica quantistica e rinormalizzazione

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureando

Luca Novelli

Anno Accademico 2020/2021

Indice

1	Premessa	4
2	Motivazioni per l'uso di un potenziale a delta di Dirac	6
3	Scattering in 1D	7
3.1	Buca di potenziale rettangolare di profondità finita in 1D	7
3.2	Potenziale a delta in 1D	8
3.3	Potenziale a corto raggio qualsiasi e derivata della delta in 1D	10
4	Scattering in 3D	15
4.1	Introduzione allo scattering in 3D	15
4.2	Buca di potenziale rettangolare di profondità finita in 3D	16
4.3	Potenziale a delta in 3D	18
5	Conclusioni	21
6	Bibliografia	22

1 Premessa

Il presente lavoro di tesi mira ad approfondire alcune caratteristiche che sono proprie di una “teoria efficace” discutendo in particolare il problema della rinormalizzazione.

Nello specifico si intende mostrare, tramite l’analisi di alcuni potenziali singolari, come in meccanica quantistica non relativistica le procedure di rinormalizzazione possano trovare una loro applicazione.

La conoscenza del mondo fisico non può trascendere dalla presenza di scale naturali: scale di distanza, energia o di qualsiasi altra grandezza fisica, scale fondamentali di carattere universale o relative ad un problema specifico. Ad esempio le scale di lunghezza tipiche di un atomo sono dell’ordine di 10^{-10} metri, del nucleo atomico di circa 10^{-15} metri e per la fisica subnucleare si è ben al di sotto dei 10^{-18} metri.

Se un fenomeno fisico dipendesse in egual misura da ciò che avviene a tutte le scale, sarebbe estremamente complicato darne una descrizione quantitativa. In generale i fenomeni che avvengono a una certa scala non sono influenzati dai dettagli della fisica associata a scale molto diverse e, in molti casi, le osservabili fisiche rilevanti possono cambiare passando da una scala all’altra. Per questo spesso è conveniente utilizzare una teoria non esatta, che però colga la fisica rilevante a una data scala e la descriva nella maniera più appropriata: questo è ciò che si intende con teoria efficace.

Ciò emerge in maniera evidente a partire dal principio di indeterminazione di Heisenberg: per sondare la fisica delle “piccole distanze” sono indispensabili alti valori per il momento (e quindi per l’energia), ma questo significa che è possibile costruire delle teorie fisiche che sono in grado di predire il comportamento a basse energie senza avere necessariamente una conoscenza completa di quanto avviene ad alte energie.

In teorie effettive e nella teoria quantistica dei campi compaiono frequentemente delle divergenze, apparentemente insanabili, nel calcolo delle quantità fisiche: la rinormalizzazione è un insieme di tecniche per trattare questi risultati infiniti.

Il primo passo consiste in una procedura di regolarizzazione, ovvero in una riformulazione della teoria in esame in modo tale da rendere forzata-

mente finite le quantità divergenti tramite una parametrizzazione della teoria da un parametro ε (tipicamente dipendente da una scala di lunghezza o energia). Successivamente si cerca di ritornare alla descrizione fisica originaria tramite un limite per ε nel quale si tengono fissati i valori delle osservabili sperimentalmente misurabili (rinormalizzazione).

La presenza di queste divergenze è un effetto della fisica ad alte energie ovvero dipende dai dettagli dell'interazione tra particelle a piccole distanze: in sintesi tramite la regolarizzazione questa dipendenza viene parametrizzata e, con la rinormalizzazione, viene poi riassorbita per mezzo della ridefinizione di nuove costanti di accoppiamento, note come costanti rinormalizzate. Esse sono le grandezze fisiche che è possibile confrontare con i risultati sperimentali. Tipicamente le costanti rinormalizzate c_R hanno dimensioni fisiche diverse dalle costanti c che appaiono nell'Hamiltoniana in esame.

Obiettivo del seguente lavoro sarà mostrare come in meccanica quantistica non relativistica nell'ambito di processi di scattering da potenziali singolari possano comparire gli stessi problemi che in teoria quantistica dei campi portano alla necessità di rinormalizzare una teoria.

Per questo motivo si approfondirà lo studio di un potenziale singolare, quale ad esempio la delta di Dirac o la sua derivata, focalizzando la trattazione sul caso unidimensionale e tridimensionale.

Questo consente di anticipare la questione della rinormalizzazione senza dover introdurre una teoria quantistica relativistica.

Gli esempi che si considerano sono suggeriti in [1], [2]; ulteriori approfondimenti si possono trovare in [5], [6].

Si premette inoltre che in tutta la trattazione si useranno le unità naturali ovvero $\hbar=c=1$.

2 Motivazioni per l'uso di un potenziale a delta di Dirac

Esistono almeno due principali motivazioni per le quali è fisicamente rilevante considerare un potenziale singolare come una delta di Dirac:

- ci si aspetta intuitivamente che un potenziale di forma qualsiasi e diverso da zero solo in una regione di larghezza Δ , possa essere approssimato da un potenziale a $\delta(\vec{x})$ nel limite di basse energie, in particolare per $k \ll 1/\Delta$. Infatti in questo regime non si è in grado di percepire i dettagli della fisica a piccole distanze e di distinguere una buca di potenziale stretta da un potenziale “puntiforme” come la delta. In altre parole il limite $k \rightarrow 0$ con Δ fissato è equivalente al limite $\Delta \rightarrow 0$ a momento k fissato: ciò che conta, come verrà discusso, è che $k\Delta \ll 1$.
- come implicitamente anticipato il potenziale a δ ha un ampio utilizzo in vari ambiti della teoria quantistica dei campi. Ciò si deve al fatto che esso è un potenziale “di contatto” ed è dunque in grado di modellizzare le interazioni tra sistemi relativistici: ciò per il fatto che le azioni a distanza sono incompatibili con la relatività ristretta. Per esigenze di calcolo è però comodo cercare di descrivere un potenziale singolare di questo tipo come approssimazione (tramite un limite) a partire da un potenziale che è più facile da trattare: diventa quindi necessario comprendere come effettuare tale limite.

3 Scattering in 1D

3.1 Buca di potenziale rettangolare di profondità finita in 1D

Siccome si vuole analizzare un potenziale a delta come limite di un potenziale non singolare, è di interesse concentrarsi su un potenziale a corto raggio come ad esempio una buca rettangolare di profondità finita.

Si consideri una particella di massa m soggetta ad un'interazione del tipo

$$V(x) = \begin{cases} V_0 = -\frac{\alpha^2}{2m\Delta^2} & 0 \leq x \leq \Delta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.1)$$

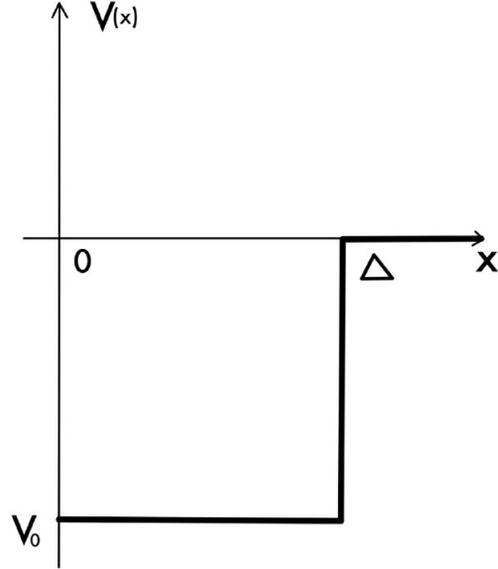
dove Δ è la larghezza, $|V_0|$ la profondità della buca e α è la sua costante di accoppiamento, un parametro adimensionale che quantifica l'intensità dell'interazione.

Risolvendo l'equazione di Schrödinger $-\frac{1}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\varphi_\varepsilon(x) + V(x)\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon\varphi_\varepsilon(x)$ rispettivamente in $x < 0$, $0 < x < \Delta$, $x > \Delta$ si trovano le seguenti autofunzioni:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_+^1 e^{ikx} + c_-^1 e^{-ikx} & x < 0 \\ c_+^2 e^{i\kappa x} + c_-^2 e^{-i\kappa x} & 0 < x < \Delta \\ c_+^3 e^{ikx} + c_-^3 e^{-ikx} & x > \Delta \end{cases}$$

con $k = \sqrt{2m\varepsilon}$, $\kappa = \sqrt{2m(\varepsilon - \bar{V})} = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta^2}}$.

Imponiamo poi le condizioni di continuità di $\varphi_\varepsilon(x)$ e della sua derivata in $x = 0$ e in $x = \Delta$. Queste condizioni sono necessarie, perché se $\varphi_\varepsilon(x)$ fosse discontinua in un punto x_0 si avrebbe che localmente $\varphi'_\varepsilon(x) \sim \delta(x)$, quindi $\varphi''_\varepsilon(x) \sim \delta'(x)$ attorno a x_0 : in tal caso l'equazione di Schrödinger non è mai soddisfatta in quanto non c'è modo di riassorbire la $\delta'(x)$ che è altamente singolare. Analogamente se $\varphi'_\varepsilon(x)$ fosse discontinua allora



$\varphi''_{\mathcal{E}}(x) \sim \delta(x)$ per cui vale lo stesso detto sopra.

Si ottiene:

$$R = (1 - T) = \left[\frac{4\kappa^2 k^2 \csc^2(\kappa\Delta)}{(k^2 - \kappa^2)^2} + 1 \right]^{-1}, \quad (3.2)$$

dove si è posto $c_-^3 = 0$ per fare in modo che ci sia solo trasmissione per $x > \Delta$ e si sono definiti i coefficienti di trasmissione e riflessione rispettivamente come $T = \left| \frac{c_+^3}{c_+^1} \right|^2$, $R = \left| \frac{c_-^1}{c_+^1} \right|^2$.

Siccome il coefficiente di riflessione è una funzione analitica in k e si è interessati al limite di basse energie si può procedere espandendo R in serie di potenze per $k \ll 1$:

$$R = 1 - \frac{4}{\alpha^2 \sin^2 \alpha} \Delta^2 k^2 + O(\Delta^4 k^4).$$

Si noti che per $k \rightarrow 0$ si ha che $R \rightarrow 1$ e la buca si comporta come una barriera infinita: l'interazione diviene sempre più rilevante nel limite di basse energie. Questo implica che un'onda piana incidente che si muove verso destra per $x < 0$ viene riflessa dalla buca di potenziale con certezza (probabilità 1), mentre tale probabilità decresce all'aumentare delle energie fino ad annullarsi nel limite di $k \rightarrow +\infty$ (si vede facilmente notando che $k \sim \kappa$ per $k \gg 1$). Questo è coerente con quanto si attende per un potenziale che, in questo regime, ha quindi speranza di essere descritto da una delta.

3.2 Potenziale a delta in 1D

Si consideri ora un potenziale a delta di Dirac della forma:

$$V(x) = -\frac{g}{2m\Delta} \delta(x). \quad (3.3)$$

A differenza di (3.1) compare un solo fattore Δ a denominatore per rendere ancora adimensionale la costante di accoppiamento g , necessario poiché $[\delta(x)] = \frac{1}{\text{lunghezza}}$, mentre si deve avere $[V(x)] = \frac{1}{\text{massa} \cdot \text{lunghezza}^2}$.

Risolviendo l'equazione di Schrödinger per $x < 0$ e per $x > 0$ si trovano le seguenti autofunzioni:

$$\varphi_{\varepsilon}(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{i\kappa x} + De^{-i\kappa x} & x > 0 \end{cases} \quad \text{con } k = \sqrt{2m\varepsilon} \quad .$$

Per gli stessi ragionamenti usati in precedenza per la buca (si veda pagina 7) si richiede che $\varphi_{\varepsilon}(x)$ sia ovunque continua e $\varphi'_{\varepsilon}(x)$ sia continua tranne nei punti dove il potenziale è infinito.

È possibile trovare le specifiche condizioni di discontinuità della derivata in $x = 0$ integrando l'equazione di Schrödinger nel limite di intervallo infinitesimo, ovvero

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2m} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{d^2 \varphi_{\varepsilon}(x)}{dx^2} dx + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} V(x) \varphi_{\varepsilon}(x) dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi_{\varepsilon}(x) dx \right) \quad (3.4)$$

da cui, usando la continuità di φ_{ε} all'origine, il teorema fondamentale del calcolo integrale e la definizione della delta di Dirac, si trova:

$$\varphi'_{\varepsilon}(0^+) - \varphi'_{\varepsilon}(0^-) = 2m \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} V(x) \varphi_{\varepsilon}(x) dx = -\frac{g}{\Delta} \varphi_{\varepsilon}(0) \quad . \quad (3.5)$$

Dalle condizioni al contorno si verifica:

$$\begin{cases} C + D = A + B \\ C - D = A(1 + 2i\beta) - B(1 - 2i\beta) \end{cases} \quad \text{con } \beta = \frac{g}{2k\Delta} \quad .$$

Nel caso di diffusione da sinistra ($D = 0$) si trova

$$B = \frac{i\beta}{1 - i\beta} A \quad C = \frac{1}{1 - i\beta} A \quad , \quad (3.6)$$

da cui l'ampiezza di riflessione

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = (1 - T) = \left[1 + \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} \right]^{-1} = 1 - \frac{4k^2 \Delta^2}{g^2} + O(k^4) \quad . \quad (3.7)$$

L'intuito fisico suggerisce che nel limite di basse energie non sia possibile distinguere i dettagli del potenziale su scale di lunghezza molto minori di $\frac{1}{k}$. Ciò è confermato dalla relazione appena trovata che mostra come per lo scattering in 1D da potenziale delforme il coefficiente di riflessione

R sia lo stesso della diffusione dalla buca di potenziale finita a meno di termini $O(k^4)$ a patto di imporre, nell'effettuare il limite, una specifica relazione tra le costanti di accoppiamento dei due potenziali (la cosiddetta "matching condition"): $g = \alpha \sin \alpha$.

Per riuscire ad eseguire in maniera consistente il limite a basse energie a questo livello non si riscontrano particolari problematiche: è soltanto necessario, al fine di riprodurre un risultato fisicamente consistente, che le due costanti di accoppiamento debbano dipendere in questo specifico modo l'una dall'altra.

3.3 Potenziale a corto raggio qualsiasi e derivata della delta in 1D

L'intuizione suggerisce che l'equivalenza, mostrata nei paragrafi 3.1 e 3.2, tra la fisica della buca finita e del potenziale a delta non si può limitare al solo caso della buca. Il limite a basse energie ci si aspetta che debba dare lo stesso risultato indipendentemente dalla forma specifica del potenziale usato: in sostituzione alla buca finita sarebbe stato lecito utilizzare un potenziale di forma qualsiasi con supporto limitato di estensione Δ . Si vuole mostrare che anche considerando questo caso più generale si riesce a fare con efficacia il limite a basse energie, mostrando l'equivalenza della fisica tra situazioni che a priori sembrano diverse tra loro.

Nello specifico data una hamiltoniana $H = \frac{1}{2m}p^2 + V$, si consideri un processo di scattering dove un'onda piana incidente si muove nella regione $x < 0$ con momento $k > 0$.

Si sta assumendo che la generica autofunzione di H abbia il seguente andamento asintotico:

$$\varphi_{\mathcal{E}}(x) \rightarrow \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x \rightarrow -\infty \\ Ce^{ikx} & x \rightarrow +\infty . \end{cases} \quad (3.8)$$

Si assuma inoltre che il range Δ del potenziale sia molto minore della lunghezza d'onda di de Broglie $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ in modo tale che l'onda piana incidente sia approssimativamente costante nel supporto del potenziale. Questo permette di poter approssimare quest'ultimo con una delta di Dirac $V(x) \simeq c\delta(x)$, da cui ponendo $c = -\frac{g}{2m\Delta}$ si trova proprio il caso (3.3).

La correttezza di questa approssimazione si può verificare considerando

l'elemento di matrice $\langle \chi | V | \psi \rangle = \int dx \chi^*(x) \psi(x) V(x)$, dove si è assunto che le due funzioni χ , ψ siano approssimativamente costanti nella regione limitata dove il potenziale è non nullo.

In tal modo si può scrivere $\langle \chi | V | \psi \rangle \simeq \chi^*(0) \psi(0) \int dx V(x)$ che è proprio l'approssimazione di cui si è parlato poco sopra se si pone $c = \int dx V(x)$.

Si può introdurre una correzione tramite uno sviluppo di Taylor del prodotto $\chi^*(x) \psi(x)$ arrestato al primo ordine attorno a $x = 0$, tramite cui, inserendo tale sviluppo nell'elemento di matrice, si ottiene

$$\langle \chi | V | \psi \rangle = f(0) \int dx V(x) + f'(0) \int dx x V(x) + \dots, \quad (3.9)$$

dove per semplicità di notazione si è definito $f(x) = \chi^*(x) \psi(x)$.

Questo significa che il generico potenziale $V(x)$ può essere scritto come

$$V(x) = c_0 \delta(x) + c_1 \delta'(x) + \mathcal{O}(V_0 \Delta^2 / \lambda^2), \quad (3.10)$$

dove $c_0 = \int dx V(x)$, $c_1 = - \int dx x V(x)$.

Se si considera il caso specifico di un potenziale dispari, allora la (3.10) arrestata al primo ordine, diventa

$$V(x) \simeq c_1 \delta'(x). \quad (3.11)$$

È quindi particolarmente rilevante effettuare l'analogo di quanto fatto per la delta, trattando la situazione di scattering da un potenziale a derivata della delta.

Supponiamo di voler risolvere l'equazione di Schrödinger per (3.11), ovvero

$$-\frac{1}{2m} \varphi''_{\mathcal{E}}(x) + c_1 \delta'(x) \varphi_{\mathcal{E}}(x) = \mathcal{E} \varphi_{\mathcal{E}}(x). \quad (3.12)$$

Se si integra ambo i membri tale equazione tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ nel limite $\varepsilon \rightarrow 0$ si trova la condizione

$$\varphi'_{\mathcal{E}}(0^+) - \varphi'_{\mathcal{E}}(0^-) = 2m c_1 \varphi'_{\mathcal{E}}(0). \quad (3.13)$$

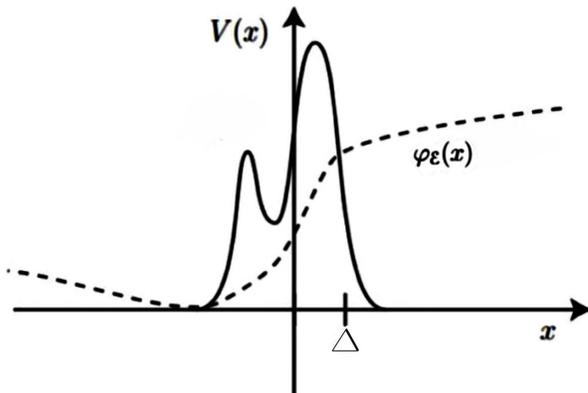
Non esiste alcuna funzione in grado di risolvere l'equazione di Schrödinger (3.12) e soddisfare contemporaneamente questa condizione di discontinuità.

Infatti la (3.13) implica che $\varphi''_\varepsilon \sim \delta$ attorno a $x = 0$ che non può portare a soluzioni perché la singolarità della delta non viene mai riassorbita: nell'equazione (3.12) non compare una delta ma la sua derivata.

Si potrebbe pensare di considerare una φ_ε discontinua attorno a $x = 0$ in modo tale che $\varphi''_\varepsilon \sim \delta'$ che effettivamente compare in (3.12) ma nella stessa equazione compare anche $\delta'(x)\varphi_\varepsilon(x)$ che è definito solo se φ_ε è di classe C^1 e quindi non può essere discontinua.

Questa inconsistenza è un campanello d'allarme e quindi occorre capire meglio cosa accade: la risposta è da rintracciare nella dipendenza della fisica a basse energie da quella ad alte energie.

Se risolvessimo l'equazione di Schrödinger originaria per il potenziale $V(x)$ troveremmo che la generica soluzione ha il seguente andamento:



Si può notare che mentre la funzione d'onda varia molto lentamente nella regione dove il potenziale è nullo, deve variare rapidamente nella regione dove il potenziale è diverso da zero.

Si nota che l'approssimazione (3.10) per il potenziale generico $V(x)$ vale solo per momenti sufficientemente piccoli $k \ll 1/\Delta$ ma dal grafico riportato si nota che la soluzione dell'equazione di Schrödinger coinvolge anche momenti elevati.

Si potrebbe semplicemente concludere che l'approssimazione suggerita dalla (3.10) non si può in realtà utilizzare, e che un potenziale $c_1\delta'(x)$ è intrinsecamente diverso da un potenziale dispari $V(x)$ anche per $\Delta \rightarrow 0$. Questo porta alla conclusione secondo cui è possibile ottenere dettagli sulla fisica a piccole distanze tramite esperimenti eseguiti sulle grandi distanze e quindi, che non si possano fare previsioni teoriche sui risultati di questi ultimi esperimenti senza conoscere l'esatta teoria ad alte energie.

Questo implica che la fisica ad una data scala diventerebbe sensibile a quella relativa ad una scala molto diversa e dunque entrerebbe in contraddizione con l'intuizione fisica che si sta discutendo secondo cui invece nel limite a basse energie ci si aspetta non siano rilevanti i dettagli del potenziale di scattering sulle piccole distanze.

Per districare questo problema tentiamo di "regolarizzare" il potenziale (3.11) considerando: $V(x) = c_1 \frac{\delta(x+\Delta) - \delta(x-\Delta)}{2\Delta}$.

Questo potenziale è in un certo senso analogo alla buca finitamente profonda in 1D da cui, tramite il regime discusso, si è ottenuto il potenziale delta. Infatti nel limite in cui la larghezza si annulla $\Delta \rightarrow 0$ si ritrova il potenziale di attuale interesse $V(x) \rightarrow c_1 \delta'(x)$ (per definizione di derivata).

La grandezza Δ viene anche tecnicamente denominata "short-distance cutoff" in quanto fornisce la soglia massima di energia $\frac{1}{\Delta}$ oltre la quale la fisica non può essere più descritta da una teoria a basse energia.

Si può scrivere una soluzione per l'equazione di Schrödinger per $V(x)$ nella forma

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < -\Delta \\ A'e^{ikx} + B'e^{-ikx} & -\Delta < x < \Delta \\ Ce^{ikx} & x > \Delta. \end{cases} \quad (3.14)$$

Da cui imponendo le usuali condizioni di continuità di φ_ε e discontinuità di φ'_ε in $x = \pm\Delta$ e replicando gli stessi passaggi di calcolo fatti nel paragrafo 3.2 per il potenziale $V(x) \sim \delta(x)$, si trova che il coefficiente di trasmissione T (si sceglie di considerare T e non R a differenza di quanto fatto precedentemente, siccome $R = 1 - T$) risulta essere tale che

$$T = \left| 4\Delta^2 k^2 \frac{1}{c_1^2 (1 - e^{4i\Delta k})} \right|^2 \simeq \left| -\frac{i\Delta k}{c_1^2} \right|^2 = \frac{\Delta^2 k^2}{c_1^4}, \quad (3.15)$$

dove il penultimo passaggio è valido per $k \ll \frac{1}{\Delta}$.

Si era trovata una giustificazione per la forma iniziale del potenziale supponendo valida l'approssimazione di "piccoli" momenti k (ovvero di "grandi" lunghezze d'onda λ), per cui è logico credere che quanto è stato trovato non sia più valido oltre quest'approssimazione. Precisamente la condizione di grandi lunghezze d'onda è in realtà $k\Delta \ll 1$, ovvero è espressa in termini della scala di lunghezza Δ introdotta al fine di

regolarizzare il potenziale. Quindi possiamo dire, a posteriori, che si è introdotto la grandezza Δ dal momento che non si disponeva altrimenti di nessuna scala di lunghezza nel problema. In altre parole non c'era modo di capire cosa si intendesse per grandi lunghezze d'onda, ovvero, quale fosse il significato preciso dell'approssimazione entro cui valgono le formule di cui sopra: il vincolo è $\lambda > \Delta$. Non si aveva quindi speranza di trovare una soluzione fisicamente sensata prima della regolarizzazione, perché si era privi di informazioni fondamentali per il problema (ovvero la scala di lunghezza Δ).

A partire da un unico parametro c_1 ora a disposizione se ne hanno due: c_1 e Δ . Nel regime di approssimazione discusso, ci si aspetta che il risultato finale non dipenda da Δ , almeno al prim'ordine. Tuttavia dalla (3.15) si nota che T ha una dipendenza esplicita da Δ , a meno che non si renda possibile che c_1 dipenda da Δ . D'altronde a priori non esiste alcun motivo in particolare per il quale l'intensità dell'interazione non debba dipendere da Δ . Imporre che il coefficiente di trasmissione sia indipendente da Δ al prim'ordine significa far sì che c_1 riscali come una funzione del tipo

$$c_1^4 = c_R \Delta^2. \quad (3.16)$$

Dalla (3.15) si nota che la teoria a basse energie dipende dal solo parametro fenomenologico $c_R = \frac{c_1^4}{\Delta^2}$, noto come costante rinormalizzata.

Così la (3.15) diventa:

$$T \simeq \frac{k^2}{c_R}. \quad (3.17)$$

La dipendenza di T dal rapporto $\frac{c_1^4}{\Delta^2}$ implica che si può variare Δ facendo variare c_1 mantenendo inalterata la fisica sottostante e facendo sì che T non dipenda dal short-distance cutoff Δ (rinormalizzazione).

Senza la rinormalizzazione una dipendenza di T dal momento k non sarebbe possibile perché non si può definire una quantità adimensionale T utilizzando solamente k e c_1 . Invece, introducendo la scala Δ e il parametro c_R , è ammissibile che T dipenda dal momento k , come trovato nella (3.17). Dal fatto che la grandezza Δ non è adimensionale segue che la costante rinormalizzata ha una dimensione diversa rispetto alla costante che appare nel potenziale.

4 Scattering in 3D

Esattamente come quanto detto nel caso unidimensionale, anche passando al caso in tre dimensioni ci si aspetta che, nel limite di basse energie, ci sia la stessa fisica tra la buca finita e un potenziale a delta di Dirac. A differenza del caso 1D, dove la discussione è stata fatta attorno all'ampiezza di riflessione R o di trasmissione T , ora si intende stimare la lunghezza di scattering d .

Per farlo è necessario riprendere i fondamenti essenziali della teoria dello scattering in 3D da onda-s.

4.1 Introduzione allo scattering in 3D

Si consideri un fascio di particelle identiche con momenti ben focalizzati attorno ad un valor medio k_0 in direzione z contro un bersaglio fisso.

Assumendo valida l'approssimazione di diffusione elastica e non considerando eventuali diffusioni multiple, una soluzione di scattering per una particella di massa m soggetta ad un potenziale a corto raggio dovrà avere tale forma asintotica:

$$\varphi_{\mathcal{E}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad (4.1)$$

dove il primo termine rappresenta un'onda piana incidente che si muove lungo z e il secondo un'onda sferica diffusa (r è una coordinata radiale centrata nel punto dove è avvenuta l'interazione con il bersaglio) corretta da un fattore angolare $f(\theta)$, noto come ampiezza di scattering. A partire da quest'ultima è possibile definire la sezione d'urto differenziale come $\frac{d\sigma}{d\theta} = |f(\theta)|^2$. Considerando un potenziale centrale e uno scattering da onda-s (ovvero un autostato di L^2 e L_z con autovalore comune dato da $l=0$), allora:

- f dipende solo dal momento k e non dall'angolo θ
- posso integrare su θ l'onda piana incidente e ottenere

$$e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta} \xrightarrow{s\text{-wave}} \int \frac{d\theta}{2\pi} e^{ikr \cos \theta} = j_0(kr), \quad (4.2)$$

dove $j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ e $n_0(x) = -\frac{\cos(z)}{z}$ sono rispettivamente la funzione di Bessel sferica regolare e irregolare.

Quindi la soluzione cercata diventa della forma:

$$\varphi_\varepsilon \xrightarrow[r\text{- wave}]{r \rightarrow \infty} j_0(kr) + \frac{f}{r} e^{ikr} = j_0(kr) + kf (ij_0(kr) - n_0(kr)), \quad (4.3)$$

dove l'ultima uguaglianza si verifica moltiplicando il termine $\frac{f}{r} e^{ikr}$ per $\frac{k}{k}$ e riscrivendo l'esponenziale $e^{ikr} = \cos(kr) + i\sin(kr)$ da cui si ottiene la (4.3) usando le definizioni di $j_0(kr)$ e $n_0(kr)$.

D'altra parte ci si aspetta che a distanza infinita dal bersaglio la soluzione sia autofunzione di una hamiltoniana di particella libera, la cui generale forma in coordinate sferiche è nota essere

$$\varphi_\varepsilon \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A [\cos(\delta)j_0(kr) - \sin(\delta)n_0(kr)], \quad (4.4)$$

con A , δ costanti reali.

Mettendo assieme (4.3) e (4.4) si trova

$$f = \frac{1}{k \cot \delta - ik}. \quad (4.5)$$

Bethe e Schwinger hanno dimostrato (si veda [7] e [8] nella bibliografia) che la quantità $k \cot \delta$ è analitica in k e ammette un'espansione, chiamata "espansione di range effettivo", del tipo

$$k \cot \delta = -\frac{1}{d} + \frac{1}{2}r_0k^2 + O(k^4), \quad (4.6)$$

dove d è chiamata "lunghezza di scattering" e r_0 "range effettivo".

Nella trattazione del caso 3D ci si concentrerà sulla lunghezza di scattering d , della quale si può dare la seguente definizione:

$$\lim_{k \rightarrow 0} (k \cot \delta) = -\frac{1}{d}. \quad (4.7)$$

4.2 Buca di potenziale rettangolare di profondità finita in 3D

Si consideri lo scattering di una particella di massa m da una buca di potenziale di profondità finita e di larghezza radiale Δ data da

$$V = \begin{cases} -\frac{\alpha^2}{m\Delta^2} & r < \Delta \\ 0 & r > \Delta, \end{cases} \quad (4.8)$$

dove $r = \sqrt{\delta_{ij}x^i x^j}$ (in notazione di Einstein) e α è la sua costante (adimensionale) di accoppiamento.

Nel caso di onda-s le funzioni d'onda di interesse, rispettivamente dentro e fuori il supporto di V , sono

$$\varphi_{\varepsilon <}(r) = j_0(\kappa r), \quad \varphi_{\varepsilon >}(r) = A [\cos \delta j_0(kr) - \sin \delta n_0(kr)], \quad (4.9)$$

dove $\kappa = \sqrt{k^2 + \alpha^2/\Delta^2}$

Si vuole ora stimare la lunghezza di scattering d per la buca.

Imponendo le condizione di continuità al bordo

$\varphi_{\varepsilon <}(r = \Delta^-) = \varphi_{\varepsilon >}(r = \Delta^+)$ si ottiene un'espressione per $k \cot \delta$, ovvero

$$k \cot \delta = \frac{k(k \sin \kappa \Delta + \kappa \cot k \Delta \cos \kappa \Delta)}{k \cot k \Delta \sin \kappa \Delta - \kappa \cos \kappa \Delta}, \quad (4.10)$$

che espansa in potenze di k conduce a

$$k \cot \delta = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} - 1 \right)^{-1} + O(k^2). \quad (4.11)$$

Confrontando quest'ultima espressione con la (4.6) si trova che nel caso del potenziale a buca rettangolare in 3D la lunghezza di scattering da onda-s vale:

$$d = \Delta \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\alpha} \right). \quad (4.12)$$

Dove si nota che d è funzione dell'intensità α del potenziale e dipende dalla larghezza Δ in conformità con quanto si attendeva: infatti essa fissa in maniera naturale la scala di lunghezze tipiche del problema.

Siccome $d \sim \frac{1}{\cos(\alpha)}$ allora le singolarità della lunghezza di scattering corrispondono ai valori critici $\alpha_c = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ con $n = 0, 1, 2, \dots$

Per questi ultimi possiamo dare un'interpretazione fisica precisa.

Per la buca finita è noto che ad energie positive corrisponde lo spettro continuo dell'hamiltoniana H (stati di scattering) mentre ad energie negative, superiori al minimo assoluto del potenziale, corrisponde lo spettro discreto di H (stati legati).

Gli autovalori \mathcal{E} hanno una dipendenza esplicita da α , in particolare la divergenza della lunghezza d per i valori corrispondenti ad α_c segnala che c'è un autovalore discreto di H "sulla soglia": questo significa che esiste

un autovalore discreto ($\mathcal{E} < 0$) che per $\alpha \rightarrow \alpha_c$ tende a 0 e, parallelamente, un autovalore continuo ($\mathcal{E} > 0$) tende a 0 per $k \rightarrow 0$: i due vanno a coincidere.

4.3 Potenziale a delta in 3D

Si introduce ora un potenziale deltiforme tridimensionale con costante di accoppiamento adimensionale g :

$$V(\vec{r}) = -\frac{g\Delta}{m}\delta^{(3)}(\vec{x}). \quad (4.13)$$

Ci si pone il seguente quesito: cosa si può dire adesso della lunghezza di scattering da onda-s?

Intuitivamente ci si aspetta che la fisica non cambi tra potenziale a buca e delta a basse energie: nel caso di scattering 3D è particolarmente indicato utilizzare la lunghezza di scattering d poiché essa è definita da un limite a basse energie (si veda la definizione (4.7)).

Ci si chiede quindi se sia davvero possibile l'assenza di differenze tra d_{buca} e d_{delta} .

Sorgono almeno due problemi:

- **Irrelevanza dell'interazione**

Dal calcolo esatto per la buca fatto al paragrafo 4.2 si è trovato $d \sim \Delta$ ma siccome ci si aspetta di ottenere il potenziale a delta di Dirac tramite un limite $\Delta \rightarrow 0$ allora si attende un risultato del tipo $d_{delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} d_{buca}$ ma il risultato di tale limite è zero.

Quindi, trovando da (4.12) che $d_{delta} \rightarrow 0$ per $\Delta \rightarrow 0$, segue che non solo la lunghezza d (a basse energie) è diversa nei due casi

$d_{buca} \neq d_{delta}$ ma, per di più, quanto ottenuto non replica nemmeno le condizioni che ci si aspetterebbe per un potenziale a delta.

Infatti tale risultato significa fisicamente che, nel limite in cui si fa tendere Δ a 0, la presenza della buca diventa sempre meno importante (si parla infatti di "interazione irrilevante") e non può perciò descrivere una delta.

Si ottiene invece la descrizione di una teoria di particella libera: infatti per $d \rightarrow 0$ si ha, da (4.5)-(4.7), che $f \rightarrow 0$.

Ciò è in netta rottura con il caso 1D analizzato nel paragrafo 3.1 in cui si era trovato che nel limite $k \rightarrow 0$ si otteneva $R \rightarrow 1$ ovvero l'interazione progressivamente sempre più rilevante diveniva una barriera impenetrabile.

Questo primo problema insegna che in 3D non è possibile replicare, dalla buca, la fisica della delta di Dirac tramite un limite "naive" a basse energie ma c'è bisogno di pensare tale limite in modo diverso. Prima di capire come risolvere quanto detto occorre analizzare anche il secondo problema.

- **Problema di scala**

La seconda problematica è legata al fatto che i termini cinetico e potenziale a delta riscalano in modo tra loro diverso (rispettivamente come $1/r^2$ e $1/r^3$), questo ha un'importante implicazione sullo spettro in energia.

Si consideri una hamiltoniana del tipo

$$H = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - \frac{g\Delta}{m}\delta^{(3)}(\vec{x}), \quad (4.14)$$

con $g > 0$.

Sia $\psi(x)$ una funzione normalizzata ($\|\psi(x)\|=1$) qualsiasi, allora $\langle H \rangle_\psi = \int \psi^*(\vec{x})H\psi(\vec{x})d^3x = \langle T \rangle_\psi + \langle V \rangle_\psi$ dove la media del termine cinetico è definita positiva e quella del potenziale invece in questo caso è negativa.

Supponiamo di effettuare una trasformazione di scala

$$\vec{x} \rightarrow \lambda\vec{x}, \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\text{da cui } \psi(\vec{x}) \rightarrow \lambda^{3/2}\psi(\lambda\vec{x}) := \varphi(\vec{x}),$$

dove il fattore $\lambda^{3/2}$ è stato inserito per mantenere la funzione d'onda normalizzata.

Ne segue che il valor medio trasforma come $\langle H \rangle_\varphi = \int \lambda^3\psi^*(\lambda\vec{x})H\psi(\lambda\vec{x})d^3x$, da cui:

$$\langle T \rangle_\psi \rightarrow \langle T \rangle_\varphi = \lambda^2\langle T \rangle_\psi > 0,$$

$$\langle V \rangle_\psi \rightarrow \langle V \rangle_\varphi = \lambda^3\langle V \rangle_\psi < 0.$$

Siccome il parametro di scala λ è arbitrario, al crescere di λ ne segue che il valore di aspettazione di H può diminuire arbitrariamente: quindi lo spettro di una tale hamiltoniana non è inferiormente limitato e non esiste, di conseguenza, uno stato fondamentale finito in energia.

Come si possono risolvere questi due problemi?

L'idea è di ottenere il potenziale $\delta(x)$ dal potenziale della buca prendendo un particolare limite $\Delta \rightarrow 0$: si tiene fisso il valore della lunghezza di scattering d (osservabile che si misura sperimentalmente e che si conosce dalla teoria della buca) e si fa variare la costante di accoppiamento α della buca (come nel caso della δ' in 1D) che dovrà riscalarare come una qualche funzione della larghezza Δ .

In particolare vogliamo $d = \Delta \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\alpha}\right)$ fissato per $\Delta \rightarrow 0$. Allora ciò implica che $\alpha(\Delta)$ deve assorbire il fattore Δ che si annulla nel limite tramite una divergenza del tipo $\tan(\alpha(\Delta)) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} +\infty$: altrimenti non c'è speranza di riprodurre la lunghezza di scattering della buca.

Si riesce quindi ad evitare che il limite riproduca la fisica della particella libera solo ammettendo che $\alpha = \alpha(\Delta)$.

La divergenza appena scritta implica che $\alpha(\Delta) \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} + n\pi$, con n intero. Allora si può effettuare una correzione tramite uno sviluppo per $\Delta \ll 1$ che per $n = 0$ diventa $\alpha(\Delta) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi d}\Delta + O(\Delta^2)$.

Quindi in conclusione ritroviamo che la fisica della buca è equivalente a quella del potenziale a delta al netto di fare un limite per $\Delta \rightarrow 0$ non banale, che si ottiene tenendo fissata la grandezza fisica sperimentalmente misurabile d e ammettendo che la costante di accoppiamento del potenziale riscali come una funzione della larghezza della buca.

Questo evidenzia come a basse energie non si riescano a riconoscere i dettagli (la forma) del potenziale e come invece tali dettagli (che rimarcano la dipendenza dalla fisica ad alte energie) si manifestino solo nelle costanti di accoppiamento che devono dunque essere scelte in modo opportuno. Questo non solo risolve la prima questione sull' indesiderata irrilevanza del potenziale ma anche il problema di scala, dato che tramite questo particolare limite, si trova un potenziale dato da una funzione a delta ridefinita in modo tale da riscalarare in modo anomalo come $1/r^2$ e non come $1/r^3$.

5 Conclusioni

La presenza in una teoria di divergenze nel calcolo di quantità fisiche rivela la dipendenza della stessa dalla fisica ad alte energie. Nel presente lavoro si è visto concretamente come, attraverso le tecniche di regolarizzazione e rinormalizzazione, sia possibile riassorbire questi risultati infiniti tramite opportune scelte di ridefinizione delle costanti di accoppiamento, che vengono dunque "rinormalizzate".

Si è verificato come queste tecniche trovano applicazione non solo in teoria quantistica dei campi (dove il loro utilizzo è ampio) ma anche in problemi quantistici non relativistici di scattering da potenziali singolari.

In particolare si è analizzata la diffusione da un potenziale unidimensionale a δ che non si è rivelata particolarmente problematica: è stato sufficiente porre una relazione per legare la costante di accoppiamento della buca di profondità finita con quella della δ , la cosiddetta "matching condition". Nel caso di potenziale 1D a δ' e 3D a $\delta^{(3)}$ il limite a basse energie forniva risultati inconsistenti: a questi problemi si è risposto svolgendo tale limite tenendo fissata una quantità fisica scelta (il coefficiente T per l'interazione a $\delta'(x)$ e la lunghezza d per la $\delta^{(3)}(\vec{x})$) permettendo di conseguenza che la costante di accoppiamento del potenziale originario riscalasse come una funzione della lunghezza Δ (il parametro di regolarizzazione che introduce una scala di lunghezza).

Tutto questo mostra come anche in una teoria quantistica non relativistica possa avere un ruolo teorico di rilievo la procedura di rinormalizzazione.

6 Bibliografia

- [1] **Kaplan D.B.**, *Lectures on effective field theory*, 2016.
https://www.ggi.infn.it/ggilectures/ggilectures2016/kaplan_slides/kaplan.pdf
- [2] **Luty M.A.**, *Renormalization, Chapter 1, Lectures*, 2007.
<https://www.physics.umd.edu/courses/Phys851/Luty/notes/renorm.pdf>
- [3] **Griffiths D.**, *Introduzione alla meccanica quantistica*, Cambridge University Press, 2005.
- [4] **P. Marchetti** "Meccanica Quantistica" lecture notes, anno accademico 2020-2021, Padova.
- [5] **Gopalakrishnan S.** *Self-Adjointness and the Renormalization of Singular Potentials*, 2006.
<https://www.amherst.edu/media/view/10264/original/gopalakrishnan06.pdf>
- [6] **Gosdzinsky P.; Tarrach R.** *Learning Quantum Field Theory from elementary quantum mechanics*, 1989.
<https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1990/9001/9001522.pdf>
- [7] **Schwinger J.**, *Harvard lecture notes, section 2 and 3*, 1948.
- [8] **Bethe H.A.**, *Theory of the Effective Range in Nuclear Scattering*, 1949.
<https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.76.38>

Ringraziamenti

A conclusione di questo lavoro di tesi ritengo sia doveroso ringraziare tutti coloro che mi sono stati vicini in questo percorso di studio e di vita. Un particolare ringraziamento va al mio relatore Volpato Roberto che ha saputo guidarmi, attraverso i suoi preziosi suggerimenti, nella stesura dell'elaborato.

Un sincero grazie va a tre amici e colleghi: Paolo, Paolo e Andrea. Siete stati fondamentali nella mia formazione ed un esempio da seguire.

Non posso non menzionare i miei genitori, coloro che da sempre sostengono la realizzazione dei miei progetti e sogni.

Infine concludo ringraziando la persona che, più di tutte, mi ha saputo supportare in ogni mia scelta e difficoltà: Cristina. Condividiamo ogni battaglia da (quasi) tre anni a questa parte: senza di te non so dove sarei, ma sicuramente non sarei arrivato fino a qua. Dai sorrisi alle lacrime, ho imparato che nulla è impossibile se lo si vuole davvero e se si ha la fortuna di avere al proprio fianco la persona giusta.