Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Funtori tensore e Hom su categorie di moduli

Relatrice:
Prof.ssa Luisa Fiorot

Laureando: Alberto Vio
Matricola: 2002073

Anno Accademico 2023/2024

19/04/2024

Introduzione

La nozione di modulo fu introdotta all'inizio del XIX secolo, con lo scopo di fornire maggiori strumenti alla teoria dei numeri e a quella degli invarianti. In seguito la teoria dei moduli prese sempre più piede nel panorama della matematica, divenendo un vero e proprio settore di ricerca verso la metà del XX secolo, grazie anche agli apporti di grandi matematici come Leopold Kronecker e Emmy Noether, i quali introdussero per la prima volta la nozione di modulo su un anello. A cambiarne ulteriormente l'ottica fu la teoria delle categorie di Saunders Mac Lane e Samuel Eilenberg, la quale contribuì ad uno studio più astratto dei moduli attraverso le categorie di moduli, ampiamente trattate in questa tesi. Sempre a Mac Lane e Eilenberg si devono le definizioni di funtori, trasformazioni naturali ed equivalenze tra categorie. La stessa dimostrazione dell'aggiunzione tra i funtori tensore e Hom fu data da Mac Lane.
Lo studio categorico della teoria dei moduli ha l'importante vantaggio di farci comprendere la versatilità di tale teoria, data la grande quantità di strutture che si possono definire nelle corrispondenti categorie.
Lo scopo di questa tesi è quindi analizzare alcuni dei fondamentali risultati della teoria dei moduli, ponendo particolare attenzione alle cosiddette proprietà universali delle strutture categoriche. Tra tutte queste strutture spiccherà il prodotto tensoriale tra moduli, qui presentato come rappresentazione dei funtori Bil attraverso il Lemma di Yoneda, dotato della seguente proprietà universale: per ogni applicazione bilineare esiste un unico morfismo di moduli che la estende. Si porrà poi l'attenzione sulla struttura funtoriale del prodotto tensoriale, definendo i funtori tensore e mostrando le varie proprietà condivise da questi, ad esempio l'esattezza a destra. Il culmine della tesi sarà perciò dimostrare che il funtore tensore $\_ \otimes_A P$ ammette come aggiunto destro il funtore omomorfismo $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$, cioè trovare una trasformazione naturale tra i bifuntori $\mathrm{Hom}_R(\_ \otimes_A P, \_)$ e $\mathrm{Hom}_A(\_, \mathrm{Hom}_R(P, \_))$.
I dati esposti nei primi quattro capitoli derivano dai testi [5] e [8]. I concetti sulle classi sono trattati in [7], e il quinto capitolo deriva dal testo [3] e dall'articolo [1]. L'enunciato del Lemma di Yoneda e la definizione di funtori rappresentabili è stata presa dal testo [4].
Nel primo capitolo si definiscono moduli, bimoduli, sottomoduli su anelli unitari e morfismi di moduli, si dimostrano i teoremi di omomorfismo e le proprietà fondamentali del prodotto e della somma diretta di moduli, porgendo particolare attenzione alle successioni esatte di moduli e quando esse spezzano.
Nel secondo capitolo si trattano due tipologie fondamentali di moduli: i moduli liberi e i moduli proiettivi.
Il capitolo successivo porta ad una svolta la trattazione attraverso l'analisi della teoria delle categorie. Si trattano funtori covarianti e contravarianti, bifuntori, funtori aggiunti e equivalenze, monomorfismi ed epimorfismi, nuclei e conuclei, prodotti e coprodotti, immagini e coimmagini, limiti diretti, attraverso un'analisi che partirà dalle classi e dalle categorie più generiche possibili, arrivando a richiedere sempre più condizioni alle categorie trattate fino alla trattazione delle categorie abeliane. Si mantiene però costante il riferimento ai moduli, attraverso teoremi specifici ed esempi.
Il quarto capitolo è il più importante: si parte dalle applicazioni bilineari, definendo il

prodotto tensoriale associato a tali applicazioni e il concetto di funtore rappresentabile, per poi trattare le applicazioni R-bilineari, con R anello, e dimostrare che la rappresentazione del funtore covariante associato a queste è lo stesso prodotto tensoriale definito precedentemente con una struttura di modulo. Si enunciano i principali teoremi del prodotto tensoriale, fino ad arrivare alla dimostrazione dell'aggiunzione tra i funtori tensore e Hom. Alla fine del capitolo quattro si trattano i moduli piatti, tipologia di moduli definita sfruttando l'esattezza del funtore tensore, confrontandoli con i moduli liberi e proiettivi definiti nel capitolo due.
La tesi finisce con il quinto capitolo, dove gli anelli unitari considerati saranno commutativi e in cui si trattano le algebre e le rappresentazioni, terminando la tesi con un importante teorema sui morfismi puri.
Ringrazio la mia relatrice Luisa Fiorot per la disponibilità e il CSM di Venezia per l'aiuto psicologico.

Indice

Capitolo 1

Generalità sui Moduli

1.1 Moduli, bimoduli, sottomoduli e quozienti

Lo scopo di questa sezione è introdurre il concetto di modulo su un anello unitario e fornire qualche esempio.
Si indichi con R un qualsiasi anello unitario, dotato di somma $+_R$ e prodotto $\cdot_R$, tale che la sua unità 1_R sia diversa da 0_R.
Sia poi M un gruppo abeliano additivo, con somma $+_M$ e zero 0_M.

Definizione 1.1. Si dice che il gruppo abeliano M è un R-modulo sinistro se esiste una funzione $R \times M \xrightarrow{\cdot} M$, detta moltiplicazione scalare, tale che, denotando il corrispondente in M della coppia $(r, x) \in R \times M$ con rx, risultino valide le seguenti proprietà:

$$r(x +_M y) = rx +_M ry \tag{1.1.1a}$$

$$(r +_R s)x = rx +_M sx \tag{1.1.1b}$$

$$r(sx) = (r \cdot_R s)x \tag{1.1.1c}$$

$$1_R x = x \tag{1.1.1d}$$

con r, s $\in R$ e x, y $\in M$.
Sostituendo invece la proprietà 1.1.1c con la proprietà

$$r(sx) = (s \cdot_R r)x \tag{1.1.2}$$

M si dirà R-modulo destro.

Definizione 1.2. Siano A e R due anelli unitari e M un gruppo abeliano additivo. Diremo che M è un R-A-bimodulo (a sinistra su R e a destra su A) se M è simultaneamente un R-modulo sinistro, un A-modulo destro e per ogni $r \in R$, $x \in M$, $a \in A$ si ha

$$r(xa) = (rx)a \tag{1.1.3}$$

Osservazione 1.1.1. Se al posto di R si considera un campo, la definizione di R-modulo si riduce a quella di spazio vettoriale su R.

Osservazione 1.1.2. Valgono le seguenti formule:

- $\forall x \in M \;\; 0_R x = 0_M$,
- $\forall r \in R \;\; r0_M = 0_M$,
- $\forall r \in R, \forall x \in M \;\; -(rx) = r(-x) = (-r)x$.

In ottica della precedente osservazione, d'ora in poi si ometteranno gli indici nei segni di operazione.
Osserviamo che se R è un anello commutativo allora i moduli sinistri coincidono con i moduli destri.
Visto che ogni argomento che verrà trattato di seguito ammette per simmetria una versione per quanto riguarda i moduli destri, noi consideriamo solo moduli sinistri, tenendo comunque in mente che tutto ciò che verrà introdotto avrà la propria versione a destra.

Definizione 1.3. Sia M un R-modulo sinistro e $H \subseteq M$, H viene detto sottomodulo di M $(H \leq M)$ se è un R-modulo sinistro con le operazioni di M ristrette a H.

Quindi un sottoinsieme non vuoto di M è un sottomodulo se e solo se è un sottogruppo di $(M,+_M,0_M)$ e $rx \in H \; \forall r \in R, \forall x \in H$.

Osservazione 1.1.3.

- $0 = \{0\}$, M sono sottomoduli di M.
- Sia $\mathcal{L}(M) = \{H \mid H \leq M\}$, allora $(\mathcal{L}(M), \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato, con minimo $\mathtt{0}$ e massimo M.
- Data una famiglia $(H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli di M, la loro intersezione $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ è un sottomodulo di M. Infatti un'intersezione arbitraria di sottogruppi è un sottogruppo e $\forall r \in R, \forall x \in M$, $rx \in H_\lambda$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ in quanto sottomoduli.
  Quindi $(\mathcal{L}(M), \leq)$ è *inf-completo* con $\bigwedge \equiv \bigcap$.
- Dato un qualsiasi $X \subseteq M$, si definisce il sottomodulo generato da X, indicato con $\langle X\rangle$, come l'intersezione di tutti i sottomoduli di M che contengono X. Si vede facilmente che

  $$\langle X\rangle = \begin{cases} 0 & \textit{se } X = \emptyset \\ \{\sum_{x\in X} r_x x \mid r_x \in R \wedge r_x = 0 \;\forall\forall x \in X\} & \textit{se } X \neq \emptyset \end{cases}$$

  (ove $\forall\forall$ sta per "per quasi ogni")
- Data una famiglia $(H_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di sottomoduli di M si ha che $\langle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ considerando [1]

  $$\sum_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \mid x_\lambda \in H_\lambda, \; x_\lambda = 0 \;\forall\forall\lambda \in \Lambda\}$$

[1]La stessa definizione può essere generalizzata ad H_λ sottoinsiemi qualsiasi di M

Infatti gli elementi di $\langle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda\rangle$ sono per definizione gli $\sum_{y\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda} r_y y$ con $r_y = 0\ \forall\forall y \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, ma questa somma si può scrivere come $\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{y_\lambda\in H_\lambda} r_{y_\lambda} y_\lambda$ riordinando gli addendi per commutatività di $+_M$ e finitezza della somma, ma essendo gli H_λ sottomoduli di M allora $\sum_{y_\lambda\in H_\lambda} r_{y_\lambda} y_\lambda = x_\lambda \in H_\lambda\ \forall\lambda\in\Lambda$. L'altra inclusione è ovvia.
Quindi $(\mathcal{L}(M), \leq)$ è *sup-completo* con $\bigvee \equiv \bigcup$.

Si ha quindi il reticolo dei sottomoduli di M.

Definizione 1.4. Sia H un sottomodulo di M, definisco il modulo quoziente di M rispetto a H come l'insieme

$$M/H = \{x + H \mid\ x \in M\}$$

dove con $x + H$ si intende l'insieme $\{x\} + H$, dotato della somma:

$$(x + H) + (y + H) = x + y\ + H \tag{1.1.4}$$

e della funzione:

$$R \times M/H \dot{\to} M/H \colon (r, x + H) \mapsto rx\ + H$$

con le quali risulta un modulo su R.
Per ogni $x, y \in M$ risulta $x + H = y + H \iff x - y \in H$.

Esempio 1.1.1. Sia R un anello unitario e I un suo ideale sinistro, allora:

- R è un R-R-bimodulo considerando $\cdot_R$ come prodotto scalare;
- I è un sottomodulo sinistro di R, infatti per definizione è un sottogruppo additivo per $+_R$ e $\forall r \in R,\ rx \in I$;
- R/I è un modulo sinistro.

Esempio 1.1.2. sia $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ l'anello degli interi, allora i moduli sinistri su $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli i gruppi abeliani.

1.2 Morfismi e teoremi fondamentali

Definizione 1.5. Siano L e M due R-moduli sinistri e $\varphi\colon L \to M, x \mapsto \varphi(x)$ un'applicazione. φ viene detta morfismo di R-moduli se risultano valide le seguenti proprietà:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{1.2.1a}$$
$$\varphi(rx) = r\varphi(x) \tag{1.2.1b}$$

con r $\in R$ e x, y $\in L$.

Ricordandosi che i moduli sono a loro volta gruppi abeliani con $+$, si nota che un morfismo di R-moduli è a sua volta un morfismo di gruppi per (1.2.1a).

Definizione 1.6. Un morfismo di R-moduli $\varphi\colon L \to M$ è detto

- monomorfismo se è iniettivo ($L \preceq M$),
- epimorfismo se è suriettivo; si dirà che M è immagine omomorfa di L,
- isomorfismo se è monomorfismo e epimorfismo; si dirà che L e M sono isomorfi $L \cong M$,
- endomorfismo se $L = M$,
- automorfismo se è un endomorfismo biiettivo.

Esempio 1.2.1. Dato M modulo e $H \leq M$, sono morfismi:

- la proiezione canonica di M su M/H $\rho\colon M \to M/H, x \mapsto x + H$,
- l'inclusione di H in M $i\colon H \to M, x \mapsto x$.

Definizione 1.7. Sia $\varphi\colon L \to M$ un morfismo di R-moduli, allora si definiscono i seguenti insiemi:

$$\ker(\varphi) = \{x \in L \mid \ \varphi(x) = 0\} \subseteq L \tag{1.2.2}$$

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(x) \mid \ x \in L\} \subseteq M \tag{1.2.3}$$

Proposizione 1.2.1. *I due sottoinsiemi sono sottomoduli rispettivamente di* L *e* M. φ *è iniettivo se e solo se* $\ker(\varphi) = 0$*, suriettivo se e solo se* $\mathrm{Im}(\varphi) = M$.

Definizione 1.8. Essendo $\ker(\varphi) \leq L$ e $\mathrm{Im}(\varphi) \leq M$ posso allora definire i seguenti R-moduli

$$\mathrm{Coim}(\varphi) = L/\ker(\varphi) \tag{1.2.4}$$

$$\mathrm{Coker}(\varphi) = M/\mathrm{Im}(\varphi) \tag{1.2.5}$$

Osservazione 1.2.1. Siano $f\colon L \to M$, $g\colon M \to N$ con L, M, N moduli e f, g morfismi di R-moduli, allora $g \circ f$ è un morfismo di R-moduli. Se $h\colon L \to M$ è invertibile, allora anche il suo inverso lo è.

Osservazione 1.2.2. Si può notare che, dati $L_1 \leq L$ e $M_1 \leq M$:

- $\varphi(L_1) \leq \mathrm{Im}(\varphi)$
- $\varphi^{-1}(M_1) \leq \varphi^{-1}(M)$
- $\varphi^{-1}(\varphi(L_1)) = L_1 + \ker(\varphi)$
- $\varphi(\varphi^{-1}(M_1)) = M_1 \cap \varphi(L)$

Esempio 1.2.2. Usando la notazione dell'Esempio 1.2.1

- $\ker(\rho) = H$ e $\mathrm{Im}(\rho) = M/H$
- $\ker(i) = 0$ e $\mathrm{Im}(i) = H$

Teorema 1.1. *Siano $f\colon L \to M, \varphi\colon L \to N$ morfismi di* R*-moduli tali che* $\mathrm{Im}(\varphi) = N$ *e* $\ker(\varphi) \leq \ker(f)$*, allora esiste un unico morfismo $F\colon N \to M$ tale che $f = F \circ \varphi$. Inoltre* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(F)$.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \\ N \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Dato che φ è suriettiva, $\forall y \in N$ fissiamo un $x \in L$ tale che $\varphi(x) = y$.
Sia $F\colon N \to M, y \mapsto \varphi(x)$. Essa è una funzione ben definita. Infatti dato un altro $\bar{x} \in L$ tale che $\varphi(\bar{x}) = y$, allora $\varphi(x - \bar{x}) = 0$ per linearità e $x - \bar{x} \in \ker(\varphi) \leq \ker(f)$, da cui $f(x) = f(\bar{x})$.
Osserviamo che se $y = \varphi(x)$, $ry = \varphi(rx)$ perché φ è R-lineare, quindi $F(ry) = \varphi(rx) = r\varphi(x)$.
Ovviamente $f = F \circ \varphi$ ed è unica per costruzione. □

Teorema 1.2. *Siano $f\colon L \to M$, $\varphi\colon N \to M$ morfismi di* R*-moduli tali che f è iniettiva e* $\mathrm{Im}(\varphi) \leq \mathrm{Im}(f)$*, allora esiste un unico morfismo $F\colon N \to L$ tale che $\varphi = F \circ f$.*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \\ N \arrow[u, "F"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Visto che $\mathrm{Im}(\varphi) \leq \mathrm{Im}(f)$, $\forall m \in \mathrm{Im}(\varphi)$ $\exists!$ $l \in L$ tale che $f(l) = m$. Definiamo $F(n) = l \iff \varphi(n) = m$. F è ben definita perché f è iniettiva e associa ad un elemento $n \in N$ l'unico elemento $l \in L$ tale che $f(l) = \varphi(n)$. Inoltre, per unicità di l si ottiene $F(rn) = rF(n)$, per ogni $r \in R, n \in N$. Infatti $F(rn) = rl \iff \varphi(rn) = f(rl)$, ma questo è ovvio per R-linearità di f e di φ, quindi $F(rn) = rF(n)$. □

Primo teorema di Omomorfismo 1. Sia $f\colon L \to M$ un morfismo di R-moduli e $\rho\colon L \to L/\ker(f)$ la proiezione canonica. Esiste uno ed un solo morfismo $F\colon L/\ker(f) \to M$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & M \\ L/\ker(f) \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo. Tale F è definito da $F(x + \ker(f)) = f(x)$. Inoltre è iniettivo e $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(f)$.
In particolare

$$\mathrm{Im}(f) \cong L/\ker(f) = \mathrm{Coim}(f) \tag{1.2.6}$$

Dimostrazione. Si usa il Teorema 1.1, considerando $\varphi = \rho$. F è iniettivo: $F(x + \ker(f) = 0 \iff f(x) = 0 \iff x \in \ker(f) \iff x + \ker(f) = \ker(f) = 0_{L/\ker(f)}$ quindi $\ker(f) = 0$.
$\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(f)$ sempre per il Teorema 1.1. $\square$

Proprietà universale del conucleo 2. Sia $f\colon L \to M$ morfismo, allora $F\colon L/H \to M, x + H \mapsto f(x)$ è ben definita se e solo se $H \leq \ker(f)$. Inoltre $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(f)$ e F è l'unica funzione $L/H \to M$ tale che $f = F \circ \rho$ con ρ la proiezione canonica di H su L/H.

Secondo teorema di Omomorfismo 3. Siano N modulo e $L, M \in \mathcal{L}(N)$. Esiste un isomorfismo naturale

$$\frac{L}{L \cap M} \cong \frac{L + M}{M} \tag{1.2.7}$$

Dimostrazione. Siano $\rho\colon L + M \to (L + M)/M$ la proiezione canonica di $L + M$ su $(L + M)/M$ e $i\colon L \to L + M$ l'inclusione di L in $L + M$. Dimostriamo che il morfismo $F = \rho \circ i\colon L \to (L + M)/M, x \mapsto x + M$ è suriettivo: $(L + M)/M = \{l + m \ + M \mid l \in L \wedge m \in M\} = \{l + M \mid l \in L\} = \mathrm{Im}(F)$.
Si conclude per il primo teorema di omomorfismo, essendo $\ker(F) = \{l \in L \mid l + M = M\} = \{l \in L \mid l \in M\} = L \cap M$. $\square$

Terzo teorema di Omomorfismo 4. Siano $L \leq M \leq N$ R-moduli. Esiste un isomorfismo naturale

$$\frac{N/L}{M/L} \cong \frac{N}{M} \tag{1.2.8}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $M/L \leq N/L$: $N/L = \{n + L \mid n \in N\} \supseteq \{m + L \mid m \in M\} = M/L$. Allora è ben definito $(N/L)/(M/L)$.
Sia $F\colon N/L \to N/M, x+L \mapsto x+M$, essa è ben definita per la proprietà fondamentale del conucleo, con $f\colon N \to N/M$ proiezione canonica di N su N/L e $\varphi\colon N \to N/L$ proiezione canonica di N su N/L.
Essendo F è suriettivo e $\ker(F) = \{n + L \in N/L \mid n + M = M\} = \{n + L \in N/L \mid n \in M\} = M/L$, concludiamo per il primo teorema di omomorfismo. $\square$

1.3 Hom e l'esattezza a sinistra

Dopo aver definito i morfismi di R-moduli ed aver elencato e dimostrato i principali teoremi, ora si cercherà di trattare questo particolare tipo di funzioni dal punto di vista insiemistico/algebrico. Si consideri allora la totalità dei morfismi tra due moduli qualsiasi L e M. Chiaramente questi formeranno un insieme in quanto funzioni, mai vuoto, contenendo infatti sempre la funzione $0 : L \to M, x \mapsto 0$.

Definizione 1.9. Dati L e M due R-moduli, con $\mathrm{Hom}_R(L, M)$ si intende l'insieme di tutti i morfismi R-lineari aventi dominio L e codominio M.

A questo insieme si fornisce la struttura algebrica di gruppo abeliano attraverso la seguente operazione:

$$+\colon \mathrm{Hom}_R(L, M) \times \mathrm{Hom}_R(L, M) \to \mathrm{Hom}_R(L, M), (f, g) \mapsto +(f, g)$$

dove $+(f,g) = f+g\colon L \to M, x \mapsto f(x)+g(x)$.
La abelianità del gruppo M, l'associatività di $+_M$ e la proprietà (1.1.1a), rende ben definita la funzione $+$ e $(\mathrm{Hom}_R(L,M),+)$ con $0_{\mathrm{Hom}_R(L,M)}$ la funzione 0 e opposto di $f \in \mathrm{Hom}(L,M)$ la funzione $-f\colon x \mapsto -f(x)$. Con queste notazioni la composizione tra morfismi $M \to N$ e morfismi $L \to M$ si riduce alla applicazione bilineare

$$\circ\colon \mathrm{Hom}_R(M,N) \times \mathrm{Hom}_R(L,M) \to \mathrm{Hom}_R(L,N), (g,f) \mapsto g \circ f$$

Definizione 1.10. Si definiscono:

- $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{Hom}_R(M,M)$
- $\mathrm{Aut}_R(M) = \{f \in \mathrm{End}_R(M) \mid \ f \text{ isomorfismo}\}$

$(\mathrm{End}_R(M),+,\circ_M)$ diventa quindi un anello unitario, dove $\circ_M\colon M \times M \to M, (g,f) \mapsto g \circ f$, con $1_{\mathrm{End}_R(M)} = \mathrm{id}_M$ identità. Ovviamente $\mathrm{U}(\mathrm{End}_R(M)) = \mathrm{Aut}_R(M)$.

Osservazione 1.3.1. Sia M un R-modulo sinistro. Si consideri la funzione $M \times \mathrm{End}_R(M) \to M, (x,f) \mapsto xf$, con $xf = f(x)$, allora, per la linearità delle f, M è un R-$\mathrm{End}_R(M)$-bimodulo.

Definizione 1.11.

1. Una successione esatta è una successione di R-moduli e di morfismi R-lineari
$$\dots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \to \dots$$
tale che $\mathrm{Im}(f_n) = \ker(f_{n+1})\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. Una successione esatta corta è una successione esatta del tipo
$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$
cioè f è iniettiva, g suriettiva e $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.

Teorema 1.3. *Sia $f\colon L \to L_1$ morfismo di R-moduli e K un R-modulo. Si definiscono*

$$f_{*K}\colon \mathrm{Hom}_R(K,L) \to \mathrm{Hom}_R(K,L_1), \alpha \mapsto f \circ \alpha$$

e

$$f^*{}_K\colon \mathrm{Hom}_R(L_1,K) \to \mathrm{Hom}_R(L,K), \beta \mapsto \beta \circ f$$

Allora, data una successione esatta del tipo

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0,$$

le successioni di $\mathbb{Z}$-moduli

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(N,M_1) \xrightarrow{f_{*N}} \mathrm{Hom}_R(N,M) \xrightarrow{g_{*N}} \mathrm{Hom}_R(N,M_2)$$

e

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M_2,N) \xrightarrow{g^*{}_N} \mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{f^*{}_N} \mathrm{Hom}_R(M_1,N)$$

sono esatte.

Dimostrazione. Dimostriamo l'esattezza della seconda successione.

- ${g^*}_N$ è iniettiva:
  Sia $\phi\colon M_2 \to N$ morfismo. $\phi \in \ker({g^*}_N) \iff {g^*}_N(\phi) = 0 \iff \mathrm{Im}(\phi \circ g) = 0$. Per la suriettività di g si ha $\mathrm{Im}(\phi \circ g) = \mathrm{Im}(\phi)$, quindi $\mathrm{Im}(\phi) = 0$ e $\ker({g^*}_N) = 0$.

- $\ker({f^*}_N) \supseteq \mathrm{Im}({g^*}_N)$:
  Sia $h\colon M \to N$ morfismo, allora $h \in \mathrm{Im}({g^*}_N) \iff \exists \phi\colon M_2 \to N$ morfismo tale che $h = {g^*}_N(\phi) \iff h = \phi \circ g$. Quindi si ha che ${f^*}_N(h) = h \circ f = (\phi \circ g) \circ f = \phi \circ (g \circ f) = 0$, essendo $g \circ f = 0$ per l'esattezza.

- $\ker({f^*}_N) \subseteq \mathrm{Im}({g^*}_N)$:
  Sia $h \in \ker({f^*}_N)$. $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ per l'esattezza e $\mathrm{Im}(f) \leq \ker(h)$ per come è stata definita h, allora $\ker(g) \leq \ker(h)$. Visto che g è suriettivo, per il Teorema 1.1 esiste un morfismo ϕ tale che $\phi \circ g = h$, perciò $h \in \mathrm{Im}({g^*}_N)$.

La dimostrazione dell'esattezza della prima successione è simile a quella appena illustrata, usando il Teorema 1.2 per dimostrare che $\mathrm{Im}(f_{*N}) \supseteq \ker(g_{*N})$. □

1.4 Prodotti diretti e somme dirette

Data una famiglia di R-moduli $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, si consideri il prodotto cartesiano insiemistico

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{f\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid f(\lambda) \in M_\lambda \ \forall \lambda \in \Lambda\}$$

Per comodità si utilizza la notazione $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, con $x_\lambda \in M_\lambda$, per indicare l' elemento $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tale che $f(\lambda) = x_\lambda$.

Definizione 1.12. Con prodotto diretto dei moduli M_λ si intende il modulo $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ dotato delle operazioni definite da

$$x + y = (x_\lambda + y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$
$$rx = (rx_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

dove $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, y = (y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, r \in R$.

Definizione 1.13. Data una famiglia $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di moduli, viene detto proiezione di indice λ l'epimorfismo

$$\pi_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M_\lambda, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto x_\lambda$$

Ogni elemento del prodotto diretto viene univocamente determinato dalle sue λ-proiezioni e ogni morfismo f di codominio $\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ dalle posizioni $f_\lambda(x) = \pi_\lambda \circ f(x), \forall \lambda \in \Lambda$, al variare di λ in Λ e di x nel dominio di f.

Proprietà universale del prodotto diretto 5. Siano dati una famiglia di R-moduli $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ed un R-modulo H; per ogni $\lambda \in \Lambda$ sia $f_\lambda \colon H \to M_\lambda$ un morfismo. Allora esiste uno e uno solo morfismo $f : H \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tale che $\forall\lambda \in \Lambda$ i diagrammi

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\ & M_\lambda & \end{tikzcd}$$

risultino commutativi.

Dimostrazione. Dimostriamo che se esiste f allora è unico.
f deve soddisfare le condizioni $\pi_\lambda \circ f(x) = f_\lambda(x)$ $\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall x \in H$, ma f è univocamente determinata da tali posizioni.
Per l'esistenza basta dimostrare che la funzione $f \colon H \to \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, x \mapsto (f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ sia un morfismo di R-moduli. Infatti per ogni $x, y \in H, r \in R$:

- $f(x + y) = (f_\lambda(x + y))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x) + f_\lambda(y)))_{\lambda\in\Lambda} = (f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} + (f_\lambda(y))_{\lambda\in\Lambda} = f(x) + f(y)$,
- $f(rx) = (f_\lambda(rx))_{\lambda\in\Lambda} = r(f_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda} = rf(x)$.

□

Definizione 1.14. f precedentemente definito nell'ultima dimostrazione viene detto il morfismo diagonale dei morfismi f_λ e indicato con $\mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

Osservazione 1.4.1.

$$\mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} \colon \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}_R(H, M_\lambda) \to \mathrm{Hom}(H, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda), (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.
Infatti rispetta la somma per come sono state definite le somme nei gruppi Hom e nei prodotti diretti, se $\mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda$ allora $\forall\lambda$ $f_\lambda = \pi_\lambda \circ \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = \pi_\lambda \circ \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} g = g_\lambda$ e dato $f \in \mathrm{Hom}(H, \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)$, $f = \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda}(\pi_\lambda \circ f)$.

Osservazione 1.4.2.

1. Sia M R-modulo sinistro, I ideale sinistro. Si definisca $IM = \langle\{\sum_{m\in M} i_m m \mid i_m \in I\ \forall m \in M \wedge i_m = 0\ \forall\forall m \in M\}\rangle$. Se $M = R$ e I ideale allora $I^n = IR^n \leq R^n$.
2. Sia M modulo, N sottomodulo di M, n naturale positivo. Allora esiste un isomorfismo naturale da M^n/N^n a $(M/N)^n$. Infatti $f \colon M^n \to (M/N)^n$, $(m_1, \ldots, m_n) \mapsto (m_1 + N, \ldots, m_n + N)$ è suriettiva e
$\ker(f) = \{(m_1, \ldots, m_n) \mid\ m_i \in N\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} = N^n$.
3. Se $M = R$ e $N = I$, allora $R^n/I^n = (R/I)^n$, in particolare se R è commutativo e I è masimale, R^n/IR^n è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Definizione 1.15. Data una famiglia di R-moduli $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, si consideri l'insieme

$$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda = \{x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \mid \ \pi_\lambda(x) = 0 \ \forall\forall\lambda \in \Lambda\}$$

allora $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \leq \prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e viene detto somma diretta dei moduli M_λ.

Osservazione 1.4.3. Se Λ è finito, la definizione di somma diretta si riduce a quella di prodotto diretto.

Definizione 1.16. Si definisce iniezione canonica di M_λ sulla somma diretta il monomorfismo

$$\epsilon_\lambda \colon M_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, y \mapsto \epsilon_\lambda(y)$$

tale che $\pi_\mu \circ \epsilon_\lambda(y) = \delta_{\mu\lambda}(y) \ \forall \mu, \lambda \in \Lambda$.

Ogni elemento della somma diretta viene scritto in modo unico nella forma

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda)$$

con $x_\lambda \in M_\lambda$ quasi tutti nulli.

Proprietà universale della somma diretta 6. Siano dati una famiglia di R-moduli $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ed un R-modulo H; per ogni $\lambda \in \Lambda$ sia $f_\lambda \colon M_\lambda \to H$ un morfismo. Allora esiste uno e uno solo morfismo $f : \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to H$ tale che $\forall\lambda \in \Lambda$ i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \arrow[dr, "f"] & \\
M_\lambda \arrow[ur, "\epsilon_\lambda"] \arrow[rr, "f_\lambda"'] & & H
\end{tikzcd}$$

risultino commutativi.

Dimostrazione. Dimostriamo che se esiste f allora è unica.
f deve soddisfare le condizioni $f \circ \epsilon_\lambda = f_\lambda \ \forall\lambda \in \Lambda$. Ogni $x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ si scrive in modo unico come $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda)$ con $x_\lambda \in M_\lambda$ quasi tutti nulli.

$$f(x) = f(\sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$$

Sia g è un'altra funzione, diversa da f, che verifica le richieste, allora esiste un $y \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ tale che $g(y) \neq f(y)$. Ma $g(y) = g(\sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(y_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(y_\lambda)$ usando $g \circ \epsilon_\lambda(y) = f_\lambda \ \forall\lambda \in \Lambda$, allora $g(y) = f(y)$; assurdo.
Per l'esistenza basta dimostrare che la funzione $f\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to H, x \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$ è ben definita ed è un morfismo.
f è ben definita perché per ogni $x \in \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ la somma $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$ si riduce ad una somma finita ed è ovviamente un morfismo di R-moduli. $\square$

Definizione 1.17. f definito nell'ultima dimostrazione viene detto il morfismo codiagonale dei morfismi f_λ e indicato con $\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

Osservazione 1.4.4.

$$\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\colon \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}_R(M_\lambda, H) \to \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, H), (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Definizione 1.18. Siano M R-modulo e $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di sottomoduli di M. M viene detto somma diretta interna degli M_λ se ogni elemento $x \in M$ si scrive in modo unico nella forma

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$$

con x_λ quasi tutti nulli.

Proposizione 1.4.1. *Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

- *M è somma diretta interna degli M_λ,*
- *$M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ e per ogni λ vale*

$$M_\lambda \bigcap \sum_{\mu\neq\lambda} M_\lambda = \{0_m\}$$

Inoltre $\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to M$*, con i_λ inclusione di M_λ $\forall\lambda \in \Lambda$, è isomorfismo.*

Definizione 1.19. $H \leq M$ si dice addendo diretto di M se esiste $K \leq M$ tale che $M = H \bigoplus K$. Allora, dal fatto che ogni $x \in M$ si scrive in modo unico come $x = h + k$ con $h \in H \wedge k \in K$, risulta ben definito l'epimorfismo

$$\pi\colon M \to H, x \mapsto h$$

detto proiezione di M su H di nucleo K.

Definizione 1.20. Un morfismo di R-moduli è detto sezione (risp. retrazione) se ammette inverso sinistro (destro) R-lineare.

Lemma 1.4. *$f\colon L \to M$ è una sezione se e solo se è iniettiva e $f(L)$ è addendo diretto di M.*
$g\colon M \to H$ è una retrazione se e solo se è suriettiva e $\ker(g)$ *è addendo diretto di L.*

Dimostrazione. Sia f sezione e g retrazione.
Sicuramente f è iniettiva e g suriettiva.
Dimostriamo che $M = f(L) \bigoplus \ker(h)$ con $h\colon M \to L$ un morfismo inverso sinistro di f.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "h"] & \\ L \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "id_L"'] & & L \end{tikzcd}$$

$M = f(L) + \ker(h)$: sia $x \in M \implies h(x) = l \in L$, ma $h \circ f = \mathrm{id}_L$, quindi $h(x) = h(f(l)) \implies x - f(l) \in \ker(h) \implies x \in f(l) + \ker(h)$.
$f(L) \bigcap \ker(h) = 0$: $x \in f(L) \bigcap \ker(h) \implies \exists l \in L$ tale che $f(l) = x$ e $h(x) = 0 \implies h(f(l)) = l = 0 \implies x = 0$.
Nello stesso modo si dimostra che $\ker(g)$ è addendo diretto di M.
Viceversa se f è monomorfismo e $M = f(L) \bigoplus K$ definiamo $\varphi\colon M \to L$ tale che:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & x \in f(L) \\ 0 & x \in K \end{cases}$$

φ è un morfismo ben definito ed è un inverso sinistro di f.
Se g è epimorfismo e $M = ker(g) + K_1$, $\psi = g|_K\colon K \to N$ è sicuramente suriettiva per linearità di g. Dimostriamo che è anche iniettiva. Sia $n \in N$, allora $g^{-1}(n) = m + ker(g)$ con $m \in K_1$. Deve essere $g^{-1}(n) \bigcap K_1 = \{m\}$, altrimenti un altro elemento divenso da m in $g^{-1}(n) \bigcap K_1$ si potrebbe scrivere come $m + k$ con $k \in \ker(g)$ e ciò risulta impossibile per unicità della scrittura. $i \circ (\psi)^{-1}$ con i inclusione di K_1 in M è la funzione cercata.

□

Definizione 1.21. Una successione esatta corta si dice che spezza (o che è spezzante) se $f(L)$ è addendo diretto di M.

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

Osservazione 1.4.5. Chiedere che una successione corta si spezzi è equivalente a chiedere che f sia sezione o g retrazione.

Capitolo 2

I moduli proiettivi

2.1 Moduli liberi

Essenziali per comprendere i moduli proiettivi, definiti nella prossima sezione, sono i moduli liberi. Come nel capitolo precedente noi considereremo solo moduli sinistri. Dato M un R-modulo e Λ un insieme di indici, il prodotto diretto e la somma diretta degli M_λ con $M_\lambda = M \ \forall\lambda \in \Lambda$ si indicano rispettivamente con M^Λ e $M^{(\Lambda)}$. Nel caso in cui Λ sia infinito risulta più comodo utilizzare le notazioni funzionali:

$$M^\Lambda = \{f \colon \Lambda \to M\} \tag{2.1.1a}$$

$$M^{(\Lambda)} = \{f \colon \Lambda \to M \mid \operatorname{Supp}(f) \text{ è finito}\} \tag{2.1.1b}$$

Se $\alpha = \operatorname{Card}(\Lambda)$ si può scriverere direttamente M^α e $M^{(\alpha)}$.

Definizione 2.1. Una famiglia $(x_\lambda)_\Lambda$ di elementi di M, viene detta linearmente indipendente se per ogni relazione del tipo

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda x_\lambda = 0$$

con gli $r_\lambda \in R$ e quasi tutti nulli si ha $r_\lambda = 0$ per ogni $\lambda \in \Lambda$.
Un sottoinsieme $X \subseteq M$ si dice sistema di generatori per M se $\langle X\rangle = M$.

Osservazione 2.1.1. Se la famiglia $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è linearmente indipendente allora ogni elemento di $\langle (x_\lambda)_\Lambda\rangle$ si scrive in modo unico nella forma

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} r_\lambda x_\lambda$$

con $r_\lambda \in R$ quasi tutti nulli.

Definizione 2.2. Un modulo L viene detto libero se ammette un sistema di generatori che è anche linearmente indipendente. Un tale sistema viene detto base di L.

Osservazione 2.1.2. Sia R un anello unitario.

1. $R^{(\Lambda)}$ è libero con base canonica composta dalle funzioni $e_\lambda = \delta_{\lambda\mu}(\mu)$, $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$.
2. Se $R = \mathbb{Z}$ allora i moduli liberi corrispondono ai gruppi abeliani liberi.
3. Se $R = K$ campo allora tutti i moduli sono liberi per il teorema di struttura degli spazi vettoriali.
4. Somma diretta di moduli liberi è un modulo libero.
5. Se R è commutativo, allora $R^n \cong R^m \iff n = m$ con n, m naturali positivi: Sia $f\colon R^n \to R^m$ un isomorfismo , dato P ideale massimale di R, risulta ben definita la funzione $\bar{f}\colon R^n/PR^n \to R^m/PR^m, x + PR^n \mapsto f(x) + PR^m$ visto che $f(PR^n) \leq PR^m$ per linearità di f. $\bar{f}$ è allora un epimorfismo di spazi vettoriali per l'Osservazione 1.4.2,3 , quindi $n = dim(R^n/PR^n) \geq dim(R^m/PR^m) = m$. Per simmetria n=m.
6. Un morfismo di moduli con dominio un modulo libero L è univocamente determinato dalle immagini di una base di L. Infatti per linearità lo si estende in modo unico a tutti gli elementi di L.

Proposizione 2.1.1. *Dati L modulo e $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di elementi di L, sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1. *L è libero con base $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$*
2. *$f\colon R^{(\Lambda)} \to L, \phi \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)x_\lambda$, è un isomorfismo*
3. *Proprietà universale del modulo libero: Dato un modulo M, si prenda una qualsiasi famiglia $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ di elementi di M; esiste sempre un unico morfismo ψ che manda x_λ in y_λ $\forall \lambda \in \Lambda$.*

Dimostrazione. $1 \implies 2$: ϕ è ben definito in quanto morfismo codiagonale dei morfismi $\phi_\lambda\colon R \to L, r \mapsto rx_\lambda$. ϕ è un isomorfismo per l'Osservazione 2.1.1.
$2 \implies 1$: Definizione base riformulata.
$2 \implies 3$: La funzione $\beta\colon R^{(\Lambda)} \to M, f \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)y_\lambda$ è ben definita in quanto morfismo codiagonale dei morfismi $\beta_\lambda\colon R \to M, r \mapsto ry_\lambda$. Consideriamo $\psi = \beta \circ \phi^{-1}$; ϕ manda e_λ in x_λ, β manda e_λ in y_λ, quindi la funzione ψ soddisfa la condizione. L'unicità viene dall'Osservazione 2.1.2, 6.
$3 \implies 2$: Prima si fissano $M = R^{(\Lambda)}$ e $y_\lambda = e_\lambda$; poi si sostituiscono L con il modulo R ed M con il modulo L e si fissano $x_\lambda = e_\lambda$ e $y_\lambda = x_\lambda$. Le due funzioni trovate sono una l'inversa dell'altra, usando sempre l'Osservazione 2.1.1. □

La proprietà universale viene usata per definire cosa si intende con l'R-modulo libero generato da un insieme.

Definizione 2.3. Sia S un insieme, R un anello unitario. Con R-modulo libero generato da S si intende un R-modulo M che contiene S e tale che, per ogni R-modulo N e per ogni funzione $f\colon S \to N$, rimanga determinato uno ed uno solo morfismo di moduli $\varphi\colon M \to N$ con $\varphi|_S = f$, ossia $M = R^{(S)}$.

Osservazione 2.1.3. Il modulo libero generato da un insieme dato è unico a meno di isomorfismi. Si può quindi definire come l'insieme delle scritture $\sum_{s\in S} r_s s$ tale che $r_s = 0$ $\forall\forall s \in S$, con somma e moltiplicazione scalare definiti termine a termine, isomorfo ad $R^{(S)}$.

Osservazione 2.1.4.
- Ogni M modulo è immagine omomorfa di un modulo libero: Si consideri $R^{(M)}$, modulo libero con base e_m al variare di $m \in M$. Per il Teorema precedente esiste un morfismo tale che $e_m \mapsto m$; ovviamente è suriettivo.

- Tutti i moduli liberi con basi della stessa cardinalità sono isomorfi e se R è commutativo, i moduli che ammettono una base di cardinalità n naturale hanno tutte le basi di cardinalità n per l' Osservazione 2.1.2, 5.

2.2 Moduli proiettivi

Definizione 2.4. Un modulo P su R è detto proiettivo se per ogni successione esatta del tipo $L \xrightarrow{f} M \to 0$ (cioè per ogni funzione $f\colon L \to M$ suriettiva) e per ogni morfismo $g\colon P \to M$ esiste un morfismo $h\colon P \to M$ tale che il seguente diagramma risulti commutativo.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] & \\ L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Proposizione 2.2.1. *I moduli liberi sono proiettivi*

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Sia L libero. Data la successione esatta $M \xrightarrow{f} N \to 0$ e data $g\colon L \to N$, definiamo $h\colon L \to M$ come segue:
sia $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una base di L, si consideri la famiglia $(g(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$. Essendo f suriettiva, allora $\forall\lambda$ $\exists m_\lambda$ tale che $f(m_\lambda) = g(x_\lambda)$; se ne scelga uno per ogni λ. Consideriamo allora la famiglia di elementi di M scelti, $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, allora per l'Osservazione 2.1.1 esiste un unico morfismo h che manda $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. h rispetta la proprietà richiesta, infatti $f(h(x_\lambda)) = f(m_\lambda) = g(x_\lambda)$, quindi per l'Osservazione 2.1.1 $f \circ h = g$, essendo uguali su una base.

□

Lemma 2.1. *Sia $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di R-moduli sinistri. Allora il modulo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ è proiettivo se e solo se ciascun P_λ è proiettivo.*

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "g"] & P_\lambda \arrow[l, "\epsilon_\lambda"'] \arrow[d, "g_\lambda"] \arrow[dl, "h_\lambda"'] & \\
L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ sia un modulo proiettivo. Fissiamo $\bar{\lambda} \in \Lambda$ e $\bar{g}_{\bar{\lambda}} \colon P_{\bar{\lambda}} \to M$ e dimostriamo che $P_{\bar{\lambda}}$ è proiettivo. Sia $(g_\lambda \colon P_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di funzioni tale che $g_{\bar{\lambda}} = \bar{g}_{\bar{\lambda}}$; consideriamo il morfismo codiagonale $g \colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to M$, allora il triangolo superiore destro commuta $\forall\lambda$.
Per la proiettività di $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ esiste h tale che $g = h \circ f$ (il triangolo inferiore sinistro commuta, quindi il quadrato esterno $\bar{\lambda}$ commuta), allora $h \circ \epsilon_{\bar{\lambda}}$ è la funzione cercata e $P_{\bar{\lambda}}$ è proiettivo.
Viceversa sia $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di moduli proiettivi e $g \colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda \to M$ morfismo. Allora esiste una famiglia $(g_\lambda \colon P_\lambda \to M)_{\lambda\in\Lambda}$ tale che g è il morfismo codiagonale dei g_λ e il triangolo superiore destro commuta $\forall\lambda \in \Lambda$. Per la proiettività dei $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ troviamo $(h_\lambda \colon P_\lambda \to L)_{\lambda\in\Lambda}$ tali che $h_\lambda \circ f = g_\lambda$; i triangoli inferiori destri commutano. Sia h il morfismo codiagonale dei morfismi h_λ, allora il triangoli superiori sinistri commutano. Da ciò si ottiene che i quadrati esterni e il triangolo inferiore sinistro commutano. $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} P_\lambda$ è dunque un modulo proiettivo. $\square$

Teorema 2.2. *Sia P un modulo su R. Le condizioni che seguono sono equivalenti:*

1. *P è proiettivo;*
2. *ogni successione esatta corta del tipo $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \to 0$ si spezza;*
3. *P è addendo diretto di un modulo libero;*
4. *per ogni successione esatta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, la successione di gruppi abeliani seguente è esatta*

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{f_{*P}} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g_{*P}} \mathrm{Hom}_R(P, N) \to 0$$

Dimostrazione. $1 \iff 4$: L'esattezza di

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P, L) \xrightarrow{f_{*P}} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{g_{*P}} \mathrm{Hom}_R(P, N)$$

è vera per ogni modulo P: chiedere che g_{*P} sia suriettiva corrisponde infatti a chiedere che P sia proiettivo.
$1 \implies 2$: Bisogna provare che g sia una retrazione, cioè bisogna provare l'esistenza di un morfismo h che renda commutativo il seguente diagramma.

$$\begin{tikzcd}
 & & & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] & \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & P \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ma P è proiettivo, quindi un tale h esiste.
2 $\implies$ 3: Dimostriamo che P è addendo diretto di un modulo libero. Per l'Osservazione 2.1.4, 1, esiste un epimorfismo $g\colon R^{(P)} \to P$. Consideriamo la successione

$$0 \to \ker(g) \overset{f}{\hookrightarrow} R^{(P)} \overset{g}{\to} P \to 0$$

con f inclusione di $\ker(g)$ in $R^{(P)}$. Sicuramente è esatta quindi per ipotesi si spezza e $R^{(P)} = \ker(g) \bigoplus H$. Sia poi $\pi\colon R^{(P)} \to H$ proiezione di $R^{(P)}$ su H di nucleo $\ker(g)$, allora per il primo teorema di omomorfismo si ha che $R^{(P)} \cong H$, ma sempre per il primo teorema di omomorfismo si ha che $R^{(P)}/\ker(g) \cong P$ quindi $R^{(P)} \cong \ker(g) \bigoplus P$.
3 $\implies$ 1: Se P è addendo diretto di un modulo libero allora è proiettivo in quanto addendo diretto di un modulo proiettivo.

$\square$

Capitolo 3

Generalità sulle Categorie

Lo scopo di questo capitolo è quello di presentare alcuni elementi della teoria delle categorie, in particolare delle categorie di moduli e della categoria *Set*.

3.1 Categorie e classi

Alla base delle definizioni forndamentali c'è il concetto di classe, una generalizzazione dei classici insiemi.

Definizione 3.1. Sia dato il predicato binario $\in$ di appartenenza. Con il termine classi si intendono i modelli del sistema assiomatico *Von Neumann-Bernays-Gödel* (NBG).

Nella teoria NBG gli insiemi sono le classi appartenenti ad altre classi e gli assiomi della teoria di *Zermelo-Fraenkel* (ZF) sono conseguenza logica degli assiomi NBG .
A differenza di quanto accade in ZF, data una classe X, si può definire la classe $\bar{X}$ complementare ad X, contenente tutti gli insiemi non appartenenti ad X, la quale esistenza è garantita dall'*assioma del complementare.* Conseguenza di questo è l'esistenza della *classe di Cantor* o *classe universo* U, complementere dell'insieme vuoto.
Come in ZF, l'*assioma della coppia* sancisce l'esistenza di un insieme che abbia come elementi due insiemi dati x, y, la coppia appunto, e tale coppia può essere ordinata nel modo standard.
Si definisce allora il prodotto cartesiano tra due classi: $X \times Y = \{x \mid \ \exists u \ \exists v \ \text{tc} x = (u, v) \wedge u \in X \wedge v \in Y\}$, con le lettere maiuscole che indicano classi, le minuscole gli insiemi e (u, v) la coppia ordinata che ha come primo elemento u e come secondo v.
Uno strumento alla base della teoria NBG è il *teorema di esistenza delle classi*:
Sia $\phi(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k)$ una fbf del linguaggio con variabili libere comprese tra quelle scritte. Se in essa compaiono al più quantifcazioni relative a variabili di insieme, la classe $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \ \phi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)\}$ è ben definita.
Un esempio di applicazione del teorema è appunto l'esistenza del prodotto cartesiano, ma può essere usato anche per dimostrare l'esistenza della *classe di Russel*, che, come è noto dallo studio del paradosso, non è un insieme per ZF.
La teoria NBG va quindi molto oltre a quella di ZF, comprendendo molte collezioni che non sono insiemi e perciò vengono dette classi proprie.
L'ultimo fatto da ricordare è l'*assioma dell'unione*, il quale ci sarà ultile dopo:

$$\bigcup X = \bigcup_{u \in X} u \text{ è un insieme se lo è } X.$$

NOTA 1. *In questa tesi si considerano l'*assioma di regolarità *e l'*assioma di scelta *come parti integranti della teoria degli insiemi e delle classi. Per una completa trattazione degli assiomi ZF e NBG si rimanda ai testi "Teorie degli insiemi - Numeri ordinali e cardinali" [7] e "Introduction to Mathematical Logic " [6].*

Definizione 3.2. Una categoria $\mathcal{C}$ consiste dei seguenti dati ed assiomi:

d.1 una classe $Ob(\mathcal{C})$, detta classe degli oggetti di $\mathcal{C}$. Gli elementi di $Ob(\mathcal{C})$ vengono indicati con le lettere maiuscole, e si dicono oggetti di $\mathcal{C}$;

d.2 un insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ per ogni coppia ordinata $(X,Y) \in Ob(\mathcal{C})^2$, detto l'insieme dei morfismi di X in Y. Gli elementi di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ vengono indicati con scritture del tipo $f\colon X \to Y$ o con f, g, ..., e si dicono morfismi;

d.3 una mappa per ogni terna ordinata $(X,Y,Z) \in Ob(\mathcal{C})^3$,

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z), (g,f) \mapsto g \circ f$$

detta legge di composizione. Dato $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, il morfismo $g \circ f$ è detto morfismo composto;

a.1 Dati (X,Y) e (Z,W) due elementi distinti di $Ob(\mathcal{C})^2$, allora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \bigcap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W) = \emptyset$;

a.2 Vale la proprietà associativa della composizione: $\forall X,Y,Z \in Ob(\mathcal{C})$ siano $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z), con$h$\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z,W)$, allora $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

a.3 Per ogni $X \in Ob(\mathcal{C})$ esiste un morfismo $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ tale che $\forall Y \in Ob(\mathcal{C})$ $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ $\mathrm{id}_X \circ f = f$ e $\forall Z \in Ob(\mathcal{C}) \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \quad g \circ \mathrm{id}_X = g$. id_X è detto identità di X.

Definizione 3.3.
- Sia data una categoria $\mathcal{C}$. La classe $Mor(\mathcal{C}) = \bigsqcup_{(X,Y) \in Ob(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ viene detta *classe dei morfismi* di $\mathcal{C}$.
- Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo di $\mathcal{C}$. Si dice che f è un isomorfismo se esiste un morfismo $g\colon Y \to X$ in $\mathcal{C}$ tale che $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

Osservazione 3.1.1. Non è un caso che venga specificata la parola classe nella definizione di $Mor(\mathcal{C})$; infatti $Mor(\mathcal{C}) = \bigcup \{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid (X,Y) \in Ob(\mathcal{C})\}$ e non è detto che $\{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \mid (X,Y) \in Ob(\mathcal{C})\}$ sia un insieme.

Esempio 3.1.1.
- Con Set si intende la categoria i cui oggetti sono gli insiemi ed i cui morfismi sono le usuali applicazioni tra insiemi. In particolare $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\emptyset, Y) = \{f_Y\}$, con f_Y l'inclusione di $\emptyset$ in Y, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(\emptyset,\emptyset) = \{f_\emptyset\} = \{\mathrm{id}_\emptyset\}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(X,\emptyset) = \emptyset$, con X, Y insiemi diversi dal vuoto.

- Dato un anello unitario R, con Mod-R si intende la categoria che ha come oggetti i moduli destri su R e per ogni M, N R-moduli destri $\mathrm{Hom}_{Mod_R}(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N)$. Resta così anche definita la categoria dei gruppi abeliani Mod-$\mathbb{Z}$, dove i morfismi sono i classici morfismi di gruppi. Simmetricamente si definisce la categoria R-Mod dei moduli sinistri su R. Le classi degli oggetti di queste categorie sono proprie: basta infatti considerare i moduli liberi e le loro basi.

- Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due categorie. Si dice che $\mathcal{B}$ è una sottocategoria di $\mathcal{C}$ ($\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$) se:

  - $Ob(\mathcal{B}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$;
  - per ogni $X, Y \in Ob(\mathcal{B})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$;
  - per ogni $(X,Y,Z) \in Ob(\mathcal{B})^3$ la legge di composizione in $\mathcal{B}$ è la stessa che vige in $\mathcal{C}$, ristretta, e per ogni $X \in Ob(\mathcal{B})$ l'identità di X in $\mathcal{B}$ corrisponde all'identità di X in $\mathcal{C}$.

  Le categorie di moduli sono sottocategorie di Set.

- Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due categorie. Con $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ categoria prodotto si intende la categoria dotata delle seguenti proprietà:

  - $Ob(\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = Ob(\mathcal{B}) \times Ob(\mathcal{C})$;
  - $Mor(\mathcal{B} \times \mathcal{C}) = Mor(\mathcal{B}) \times Mor(\mathcal{C})$;
  - dati $(X,Y,Z) \in Ob(\mathcal{B})^3$ e $(X',Y',Z') \in Ob(\mathcal{C})^3$, la legge di composizione è definita come segue:

    $$\circ\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((Y,Y'),(Z,Z')) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((X,X'),(Y,Y')) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}\times\mathcal{C}}((X,X'),(Z,Z'))$$

    $$((g,g'),(f,f')) \mapsto (g \circ f, g' \circ f')$$

    L'identità di $(X,Y) \in Ob(\mathcal{B} \times \mathcal{C})$ è $\mathrm{id}_{X\times Y} = (\mathrm{id}_X, \mathrm{id}_Y)$.

Definizione 3.4. Data una categoria $\mathcal{C}$, con $\mathcal{C}^{op}$ si intende la categoria duale di $\mathcal{C}$, cioè la particolare categoria che possiede le seguenti proprietà:

- $Ob(\mathcal{C}^{op}) = Ob(\mathcal{C})$;

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ con la legge di composizione che si inverte di conseguenza.

Definizione 3.5. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice preadditiva se sono rispettate le seguenti condizioni:

- per ogni $(X,Y) \in Ob(\mathcal{C})^2$ l'insieme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ è dotato di un'operazione $+$ tale che lo renda un gruppo abeliano;

- per ogni $(X,Y,Z) \in Ob(\mathcal{C})^3$ la legge di composizione corrispondente è bilineare.

Osservazione 3.1.2. Se $\mathcal{C}$ è preaddiva allora $(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X), +, \circ)$ è un anello unitario, con prodotto dato dalla composizione in $\mathcal{C}$.

Esempio 3.1.2. Le categorie di moduli sono categorie preadditive attraverso la somma di morfismi, invece Set non lo è.

Definizione 3.6. Sia data una categoria $\mathcal{C}$. Un suo oggetto X viene detto oggetto iniziale se per ogni $Y \in Ob(\mathcal{C})$ $\text{Card}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)) = 1$, oggetto finale se per ogni $Y \in Ob(\mathcal{C})$ $\text{Card}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)) = 1$. Un oggetto sia finale sia iniziale viene detto oggetto nullo di $\mathcal{C}$.

Esempio 3.1.3. Le categorie di moduli hanno come oggetto nullo 0.

3.2 Funtori e equivalenze

A partire dagli assiomi della teoria NBG si possono definire le funzioni come corrispondenze univoche tra due classi. Altre definizioni riguardanti le funzioni (per esempio cosa si intende con composizione, identità, iniettività,...) vengono riprese direttamente dalla teoria degli insiemi, con l'unica differenza il fatto che dominio e codominio sono classi.

Definizione 3.7. Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ due categorie. Un funtore covariante $T\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ è una coppia ordinata (T_{Ob}, T_{Mor}), con T_{Ob} una funzione di $Ob(\mathcal{B})$ in $Ob(\mathcal{C})$ e T_{Mor} una funzione di $Mor(\mathcal{B})$ in $Mor(\mathcal{C})$, normalmente indicate rispettivamente $T\colon Ob(\mathcal{B}) \to Ob(\mathcal{C})$ e $T\colon Mor(\mathcal{B}) \to Mor(\mathcal{C})$, tali che rispettino le seguenti condizioni:

1. per ogni morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)$, $T(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(X),T(Y))$;
2. per ogni $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ in $Mor(\mathcal{C})$, $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$;
3. per ogni $X \in Ob(\mathcal{B})$, $T(\text{id}_X) = \text{id}_{T(X)}$.

Sostituendo le prime 2 condizioni con:

1. per ogni morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y)$, $T(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(Y),T(X))$;
2. per ogni $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ in $Mor(\mathcal{C})$, $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$,

si ottiene un funtore contravariante.
Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sono entrambe preadditive si chiede anche che un funtore covariante (risp. contravariante) soddisfi la proprietà additiva:

- per ogni $(X,Y) \in Ob(\mathcal{B})^{\in}$ e per ogni $f, f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ si ha $T(f+g) = T(f) + T(g)$.

Osservazione 3.2.1. Dato un funtore covariante $T\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$,per ogni $X,Y \in Ob(\mathcal{B})$ rimangono definite le applicazioni $\text{Hom}_{\mathcal{B}}(X,Y) \to \text{Hom}_{\mathcal{C}}(T(X),T(Y)),\ f \mapsto T(f)$.
Un funtore si dice fedele se tali applicazioni sono iniettive.
Nel caso in cui le categorie coinvolte siano preadditive, tali applicazione diventano morfismi di gruppi (di anelli se $X = Y$).

Osservazione 3.2.2. Un funtore contravariante di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ può essere anche visto come un funtore covariante di $\mathcal{B}^{op}$ in $\mathcal{C}$.

Esempio 3.2.1.

- Siano $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$. Il funtore inclusione di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ manda ogni oggetto di $\mathcal{B}$ e ogni morfismo di $\mathcal{B}$ in se stesso. Se $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ si ottiene il funtore identico $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$. Nel caso in cui $\mathcal{B} = R$-Mod e $\mathcal{C} = Set$, il funtore viene detto *funtore dimenticante* For, in quanto ci si dimentica della struttura di modulo di X, oggetto di R-Mod, e si guarda i morfismi R-lineari come semplici funzioni tra i sostegni dei moduli.

- Sia $\mathcal{C}$ categoria e A suo oggetto. Con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \_) \colon \mathcal{C} \to Set$ si intende il funtore covariante definito dalle assegnazioni:

  - $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ con $X \in Ob(\mathcal{C})$;
  - $f \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f)$, dove $f \colon X \to Y$ morfismo di $\mathcal{C}$ e $\mathrm{Hom}(A, f) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y), \varphi \mapsto f \circ \varphi$.

  Invece con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, A) \colon \mathcal{C} \to Set$ si intende il funtore contravariante definito dalle posizioni:

  - $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A)$ con $X \in Ob(\mathcal{C})$;
  - $f \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, A)$, dove $f \colon X \to Y$ morfismo di $\mathcal{C}$ e $\mathrm{Hom}(f, A) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, A) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A), \varphi \mapsto \varphi \circ f$.

  Se come classe utiliziamo Mod-R, con R anello unitario, possiamo considerare $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(A, \_)$ e $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(\_, A)$ come funtori di Mod-R in Mod-$\mathbb{Z}$. Otterremo $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(A, f) = f_{*A}$ e $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(f, A) = {f^*}_A$, già trattati.

- Siano $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tre categorie. I funtori covarianti (risp. contravarianti) di $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ vengono detti bifuntori covarianti (contravarianti).
  Dato un $F(\_, \_) \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ bifuntore covariante, si può fissare un elemento $X' \in Ob(\mathcal{B})$ e considerare il funtore $F(\_, X') \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, ottenuto da F fissando la seconda componente ad X', che manda X oggetto di $\mathcal{A}$ in $F(X, X')$ e $f \colon X \to Y$ morfismo di $\mathcal{A}$ in $F(f, \mathrm{id}_{X'})$. Lo stesso si può fare per ogni elemento $X \in Ob(\mathcal{A})$, definendo il funtore covariante $F(X, \_)$, cioè fissando la prima componente uguale ad X. Un bifuntore rimane quindi determinato unicamente da queste due famiglie di funtori al variare di X e X'. Infatti $F(X, X') = F(X, \_)(X')$ e $F(f, f') = F(f, \mathrm{id}'_Y) \circ F(\mathrm{id}_X, f') = F(f, Y') \circ F(X, f')$, con $f \colon X \to Y$ e $g \colon X' \to Y'$. Considerando bifuntori contravarianti e usando la notazione dell'ultima osservazione, si possono fare ragionamenti simili.
  Ciò ci porta a considerare bifuntori "misti", cioè tali che, fissando una componente portano a un funtore covariante e, fissando l'altra, ad uno contravariante.
  Un esempio di bifuntore misto è $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, \_) \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to Set$ che manda (A, B) in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ e (f, g), con $f \colon A \to B$ e $g \colon A' \to B$, in $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B', A), h \in g \circ h \circ f$. Sia $X \in \mathcal{C}$, Allora $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\_, X)$ sono esattamente i funtori del punto precedente.
  Di solito i bifuntori misti vengono trattati come funtori covarianti attraverso la categoria duale corrispondente alla componente contravariante, ma per comodità qui vengono trattati come un caso separato.

Definizione 3.8. Siano S e T due funtori covarianti da $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$. Una trasformazione naturale $\eta\colon S \to T$ è una funzione $\eta\colon Ob(\mathcal{B}) \to Mor(\mathcal{C})$ che verifica le seguenti proprietà:

- per ogni $X \in Ob(\mathcal{B})$, $\eta_X = \eta(X)\colon S(X) \to T(X)$;
- per ogni $f\colon X \to X'$ in $Mor(\mathcal{B})$ il seguente diagramma risulta commutativo

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[r, "S(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & S(X') \arrow[d, "\eta_{X'}"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(X') \end{tikzcd}$$

η_X viene detta trasformazione in $\mathcal{C}$ naturale in X.

Osservazione 3.2.3. Per funtori contravarianti la definizione è la stessa, a differenza del diagramma che viene sostituito da:

$$\begin{tikzcd} S(X) \arrow[d, "\eta_X"'] & S(X') \arrow[l, "S(f)"'] \arrow[d, "\eta_{X'}"] \\ T(X) & T(X') \arrow[l, "T(f)"] \end{tikzcd}$$

Definizione 3.9. Dati $F(\_,\_)\colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ e $G(\_,\_)\colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ bifuntori con prima componente contravariante e seconda covariante, un morfismo naturale $\lambda\colon F \to G$ associa ad ogni (X, X') oggetto di $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ un morfismo $\lambda_{X,X'}\colon F(X,X') \to G(X,X')$ in $\mathcal{C}$ tale che i seguenti diagrammi risultino commutativi per ogni $(g, f)\colon (X,Y) \to (X',Y')$:

$$\begin{tikzcd} F(X,Y) \arrow[r, "\lambda_{X,Y}"] \arrow[d, "F(X,f)"'] & G(X,Y) \arrow[d, "G(X,f)"] \\ F(X,Y') \arrow[r, "\lambda_{X,Y'}"'] & G(X,Y') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(X',Y) \arrow[r, "\lambda_{X',Y}"] \arrow[d, "F(g,Y)"'] & G(X',Y) \arrow[d, "G(g,Y)"] \\ F(X,Y) \arrow[r, "\lambda_{X,Y}"'] & G(X,Y) \end{tikzcd}$$

$\lambda_{X,Y}$ viene detta trasformazione naturale in X e Y .

Osservazione 3.2.4. Il primo diagramma afferma che $\lambda_{X,\_}\colon F(X,\_) \to G(X,\_)$ è una trasformazione naturale per ogni X, il secondo che $\lambda_{\_,Y}\colon F(\_,Y) \to G(\_,Y)$ è naturale per ogni Y.

Definizione 3.10. Una trasformazione naturale η è detta isomorfismo naturale se per ogni $X \in Ob(\mathcal{B})$, η_X è un isomorfismo. In tal caso i funtori S e T vengono detti naturalmente equivalenti ($S \cong T$).

Osservazione 3.2.5. Se $F(\_,\_) \cong G(\_,\_)$, allora $F(X,\_) \cong G(X,\_)$ per ogni X e $F(\_,Y) \cong G(\_,Y)$ per ogni Y.

Esempio 3.2.2. Sia R anello unitario, S insieme e $L_R(S) = R^{(S)}$ l'R-modulo libero sinistro generato da S. Data $f\colon S \to S'$, esiste un unica applicazione R-lineare $L_R(f)\colon L_R(S) \to L_R(S')$ tale che $L_R(f)|_S = f$, la così detta estensione per linearità di f, per la proprietà universale del modulo libero. In tal modo otteniamo un funtore covariante $L_R\colon Set \to R$-Mod.
Troviamo quindi le seguenti trasformazioni lineari:

- $\phi\colon \mathrm{id}_{Set} \to \mathrm{For} \circ L_R$ tale che $\phi_S\colon S \to \mathrm{For} \circ L_R(S)$ è l'inclusione dell'insieme S nel sostegno del modulo libero generato da S.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi_S"'] & S' \arrow[d, "\phi_{S'}"] \\ \mathrm{For} \circ L_R(S) \arrow[r, "\mathrm{For} \circ L_R(f)"'] & \mathrm{For} \circ L_R(S') \end{tikzcd}$$

- $\psi\colon L_R \circ \mathrm{For} \to \mathrm{id}_{R\text{-Mod}}$ tale che $\psi_M\colon L_R \circ \mathrm{For}(M) \to M$ è l'epimorfismo definito, a meno di un isomorfimo, nell'Osservazione 2.1.4, che manda $m \in M$, elemento della base di $L_R \circ \mathrm{For}(M)$, in se stesso.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \\ L_A \circ \mathrm{For}(M) \arrow[u, "\psi_M"] \arrow[r, "L_R \circ \mathrm{For}(f)"'] & L_R \circ \mathrm{For}(M') \arrow[u, "\psi_M"'] \end{tikzcd}$$

Si verifica che ϕ e ψ così definite sono trasformazioni naturali.

Definizione 3.11. Un funtore covariante (risp. contravariante) $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ si dice equivalenza (dualità) tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ se esiste un funtore covariante (contravariante) $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tale che $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ e $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. Due categorie $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ si dicono equivalenti (risp. duali) se esiste una equivalenza (dualità) tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.

3.3 Aggiunzione tra funtori

D'ora in poi si tratteranno solo funtori covarianti, se non in casi espliciti.

Definizione 3.12. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie e $T\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ due funtori. T si dice aggiunto a sinistra di H se $\forall L \in \mathcal{A}$, $\forall M \in \mathcal{B}$ esiste una biiezione di insiemi naturale in L e M:

$$\varphi_{L,M}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, H(M))$$

cioè se i bifuntori $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(\_),\_)\colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to Set$ e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\_, H(\_))\colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to Set$ sono naturalmente isomorfi.
In questo caso si dice che H è un aggiunto destro di T e (H, T, φ) è una aggiunzione.

Teorema 3.1. *Tutti gli aggiunti a sinistra di un funtore $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ sono equivalenti tra loro.*

Dimostrazione. Siano T, T' aggiunti a sinistra di H.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L), M) \arrow[r, "\psi_{L,M}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, H(M)) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L), M) \arrow[u, "\lambda_{L,M}"] \arrow[ur, "\varphi_{L,M}"] &
\end{tikzcd}$$

Con $\varphi_{L,M}$ e $\psi_{L,M}$ le rispettive biiezioni naturali in L e M. Sia $\lambda_{L,M} = \psi^{-1}_{L,M} \circ \varphi_{L,M}$, biiezione perché composizione di biiezioni. Mettendo insieme i diagrammi commutativi che descrivono la naturalità di $\varphi_{L,M}$e di $\psi_{L,M}$, otteniamo i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L), M) \arrow[r, "\varphi_{L,M}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L),f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, H(M)) \arrow[r, "\psi^{-1}_{L,M}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,H(f))"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L), M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L),f)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L), M') \arrow[r, "\varphi_{L,M'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, H(M)) \arrow[r, "\psi^{-1}_{L,M'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L), M')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L'), M) \arrow[r, "\varphi_{L',M}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(g),M)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L', H(M)) \arrow[r, "\psi^{-1}_{L',M}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(g,H(M)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L'), M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(g),M)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L), M) \arrow[r, "\varphi_{L,M}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L, H(M)) \arrow[r, "\psi^{-1}_{L,M}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(L), M)
\end{tikzcd}$$

Visto che i rettangoli interni commutano, commutano anche gli esterni, allora si è dimostrato che $\lambda_{L,M}$ è una biiezione naturale in L e M, $\lambda : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(\_), \_) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(\_), \_)$. Sia $\chi_L = \lambda_{L,T(L)}(\mathrm{id}_{T(L)})\colon T'(L) \to T(L)$. Dimostriamo che $\chi\colon T' \to T$ è un morfismo naturale. Sia $f\colon X \to Y$. Dobbiamo dimostrare che il diagramma seguente è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
T'(X) \arrow[r, "\chi_X"] \arrow[d, "T'(f)"'] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
T'(Y) \arrow[r, "\chi_Y"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

Sappiamo che $\lambda_{X,\_} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X), \_) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X), \_)$ e $\lambda_{\_,T(Y)} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(\_), T(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(\_), T(Y))$ sono isomorfismi naturali, quindi i seguenti diagrammi sono commutativi.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X), T(X)) \arrow[r, "\lambda_{X,T(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X),T(f))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X), T(X)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X),T(f))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X), T(Y)) \arrow[r, "\lambda_{X,T(Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X), T(Y))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(Y),T(Y)) \arrow[r, "\lambda_{Y,T(Y)}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(f),T(Y))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(Y),T(Y)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(f),T(Y))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X),T(Y)) \arrow[r, "\lambda_{X,T(Y)}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X),T(Y))
\end{tikzcd}$$

$T(f)\circ\chi_X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X),T(f))(\chi_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(X),T(f))\circ\lambda_{X,T(X)}(\mathrm{id}_{T(X)}) = \lambda_{X,T(Y)}\circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(X),T(f))(\mathrm{id}_{T(X)}) = \lambda_{X,T(Y)}(T(f)\circ\mathrm{id}_{T(X)}) = \lambda_{X,T(Y)}(T(f)) = \lambda_{X,T(Y)}(\mathrm{id}_{T(Y)}\circ T(f)) = \lambda_{X,T(Y)}\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(f),T(Y))(\mathrm{id}_{(T(Y)}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(f),T(Y))\circ\lambda_{X,T(Y)}(\mathrm{id}_{T(Y)}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T'(f),T(Y))(\chi_Y) = \chi_Y\circ T'(f)$

Utilizzando la commutatività di questi diagrammi, la definizione di χ e dei funtori Hom, troviamo quindi che $T(f)\circ\chi_X = \chi_Y\circ T'(f)$.

Per vedere che χ_X è invertibile basta dimostrare che la sua inversa è $\chi'_X = \lambda^{-1}_{X,T'(X)}(\mathrm{id}_{T'(X)})$ e questo deriva da $\lambda_{X,\_}$ morfismo naturale. $\square$

Definizione 3.13. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie e $T\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $H\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ due funtori e

$$(T,H,\varphi)$$

una aggiunzione.

- Il morfismo naturale $\sigma:\mathrm{id}_{\mathcal{A}}\to HT$, tale che per ogni $L\in Ob(\mathcal{A})$ $\sigma_L=\varphi_{L,TL}(\mathrm{id}_{TL})$, viene detto l'unità dell'aggiunzione.
- Il morfismo funtoriale $\varrho: TH\to\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$, tale che per ogni $M\in Ob(\mathcal{B})$ $\varrho_M=\varphi^{-1}_{HM,M}(\mathrm{id}_{HM})$, viene detto la counità dell'aggiunzione.

Osservazione 3.3.1. La dimostrazione del fatto che l'unità e la counità di una aggiunzione siano morfismi funtoriali percorre i passi della dimostrazione del Teorema 3.1.

Proposizione 3.3.1. *Sia data una aggiunzione (T,H,φ). φ, σ unità e ϱ counità sono legate dalle seguenti relazioni:*

1. $\varphi_{L,M}(f) = H(f)\circ\sigma_L$ *per ogni* $f\colon T(L)\to M$*;*
2. $(\varphi_{L,M})^{-1}(g) = \varrho_M\circ T(g)$ *per ogni* $g\colon L\to H(M)$*;*
3. $\varrho_{T(L)}\circ T(\sigma_L) = \mathrm{id}_{T(L)}$*;*
4. $H(\varrho_M)\circ\sigma_{H(M)} = \mathrm{id}_{H(M)}$.

Dimostrazione. Dimostriamo le asserzioni 1 e 4.

1 Sia $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L),M)$.

$$\varphi_{L,M}(f) = \varphi_{L,M}\circ\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L),f)(\mathrm{id}_{T(L)}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,H(f))(\varphi_{L,T(L)}(\mathrm{id}_{T(L)}))$$

Visto che $\varphi_{L,\_}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(T(L),\_)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,H(\_))$ è un morfismo naturale e

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,H(f))(\varphi_{L,TL}(\mathrm{id}_{T(L)})) = H(f)\circ\sigma_L$$

usando la definizione di σ e di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(L,H(f))$.

4 Posto $L = HM$, $f = \varrho_M$, utilizzando l'asserzione 1 si ottiene

$$\varphi_{H(M),M}(\varrho_M) = H(\varrho_M) \circ \sigma_{H(M)}$$

ma $\varrho_M = \varphi^{-1}_{H(M),M}(\mathrm{id}_{H(M)})$, da cui la tesi.

$\square$

3.4 Monomorfismi ed epimorfismi

Definizione 3.14. Sia $\mathcal{B}$ una categoria e $\mu \colon X \to Y$ un morfismo di $\mathcal{B}$. μ viene detto monomorfismo se per ogni coppia di morfismi f, g, con $f \colon Z \to X$ e $g \colon Z \to X$, tali che $\mu \circ f = \mu \circ g$, si ha $f = g$.

Proposizione 3.4.1. *Se $\mathcal{B}$ è una categoria preadditiva con oggetto nullo, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *μ è un monomorfismo;*

2. *per ogni morfismo $f \colon Z \to X$, se $\mu \circ f = 0$ si ha che $f = 0$.*

Dimostrazione. $1 \implies 2$: Ovvio, considerando che $\mu \circ f = \mu \circ 0$.
$2 \implies 1$: Se $\mu \circ f = \mu \circ g \implies \mu \circ (f - g) = 0 \implies f - g = 0$, cioè μ è un monomorfismo. $\square$

Esempio 3.4.1.
- In *Set* i monomorfismi sono tutte e sole le applicazioni iniettive.
- In R-Mod se $\mu \colon X \to Y$ è un monomorfismo allora è iniettivo. Infatti, se $\ker(\mu) \neq 0$, allora $\mu \circ i = 0$, con i l'inclusione di $\ker(\mu)$ in X, ma $i \neq 0$.

Definizione 3.15. Due monomorfismi μ e μ' di una categoria $\mathcal{B}$, con $\mu \colon X \to Y$ e $\mu' \colon X' \to Y$, si dicono equivalenti se esiste un isomorfismo $\gamma \colon X \to X'$ tale che il seguente diagramma risulta commutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ X' \arrow[r, "\mu'"'] & Y \end{tikzcd}$$

Dato un oggetto Y di $\mathcal{B}$ e la classe $M_Y = \{\mu \colon X \to Y \mid X \in \mathcal{B} \wedge \mu \text{ monomorfismo}\}$, si denoti con $\sim$ la relazione di equivalenza su M, definita da $\mu \sim \mu' \iff$ sono equivalenti. Le classi di equivalenza di M_Y modulo $\sim$ sono dette sotto-oggetti di Y.

Definizione 3.16. Sia $\mathcal{B}$ una categoria e $\epsilon \colon X \to Y$ morfismo di $\mathcal{B}$. ϵ viene detto epimorfismo se per ogni coppia di morfismi f, g di $\mathcal{B}$, con $f \colon Y \to Z$ e $g \colon Y \to Z$, tali che $f \circ \epsilon = g \circ \epsilon$, si ha $f = g$.

Proposizione 3.4.2. *Se $\mathcal{B}$ è una categoria preadditiva con oggetto nullo, le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *ϵ è un epimorfismo;*

2. *per ogni morfismo $f\colon Y \to Z$, se $f \circ \epsilon = 0$ allora $f = 0$.*

Esempio 3.4.2.
- In *Set* gli epimorfismi sono tutte e sole le applicazioni suriettive.
- In R-Mod se $\epsilon\colon X \to Y$ è un epimorfismo allora è suriettivo; infatti, se $\mathrm{Im}(\epsilon) \neq Y$ allora $\rho \circ \epsilon = 0$, con ρ proiezione canonica di Y su $Y/\mathrm{Im}(\epsilon)$, ma $\rho \neq 0$.

Definizione 3.17. Due epimorfismi ϵ e ϵ' di una categoria $\mathcal{B}$, con $\epsilon\colon Y \to X$ e $\epsilon'\colon Y \to X'$, si dicono equivalenti se esiste un isomorfismo $\gamma\colon X \to X'$ tale che il seguente diagramma risulti commutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\gamma"'] & T \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[dl, "\epsilon'"] \\
X' &
\end{tikzcd}$$

Dato un oggetto Y di $\mathcal{B}$ e la classe $E_Y = \{\epsilon\colon Y \to X \mid \epsilon \text{ epimorfismo}\}$, si denoti con $\sim$ la relazione di equivalenza su E_Y, definita da $\epsilon \sim \epsilon' \iff$ sono equivalenti. Le classi di equivalenza di E_Y modulo $\sim$ sono dette oggetti quozienti di Y.

3.4.1 Nuclei e conuclei

In questa sottosezione si utilizzano categorie preadditive con oggetto nullo; d'ora in poi questo si sottointenderà.

Definizione 3.18. Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $f\colon X \to Y$ un morfismo. Un nucleo di f è un morfismo $\gamma\colon K \to X$ con le proprietà:

- $f \circ \gamma = 0$;
- se $f \circ \gamma' = 0$, con $\gamma'\colon K' \to X$ morfismo, allora esiste un unico morfismo $\beta\colon K' \to K$ tale che $\gamma' = \gamma \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& K' \arrow[dl, "\exists!\,\beta"'] \arrow[d, "\gamma'"] & \\
K \arrow[r, "\gamma"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Proposizione 3.4.3. *Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo che ammetta nucleo. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *ogni nucleo di f è un monomorfismo;*

2. *due nuclei rappresentano lo stesso sotto-oggetto di X;*

3. *se $\gamma\colon K \to X$ è un nucleo di f allora ogni elemento di $[\gamma]_\sim$ è nucleo di f;*

4. *il nucleo di f è un unico sotto-oggetto di X e viene indicato con $\ker(f)$;*

5. f è un monomorfismo se e solo se $\ker(f) = 0$.

Dimostrazione. **1** Siano γ un nucleo di f e $g\colon K' \to K$ un morfismo tale che $\gamma \circ g = 0$. Sia $\gamma' = 0\colon K' \to X$, allora $\gamma \circ g = \gamma'$, ma vale anche $\gamma \circ 0 = \gamma'$, con $0\colon K' \to K$. Perciò, per la definizione di nucleo, $g = 0$ e γ è un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dl, "0"', "g"] \arrow[d, "\gamma'"] & \\ K \arrow[r, "\gamma"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

2 Siano $\gamma\colon K \to X$ e $\gamma'\colon K' \to X$ due nuclei di f. Per definizione di nucleo esiste un unico morfismo $\beta\colon K' \to K$ tale che $\gamma' = \gamma \circ \beta$ e un unico morfismo $\beta'\colon K \to K'$ tale che $\gamma = \gamma' \circ \beta'$. Dimostriamo che β e β' sono uno l'inverso dell'altra.

$$\gamma' = \gamma' \circ \mathrm{id}_{K'} = \gamma \circ \beta = \gamma' \circ (\beta' \circ \beta)$$

quindi, per l'asserzione 1, $\beta' \circ \beta = \mathrm{id}_{K'}$.

$$\gamma = \gamma \circ \mathrm{id}_K = \gamma' \circ \beta' = \gamma \circ (\beta \circ \beta')$$

da cui, sempre per 1, si deriva che $\beta \circ \beta' = \mathrm{id}_K$.

3 Siano $\gamma\colon K \to X$ nucleo di f e $\gamma'\colon K' \to X$ un monomorfismo equivalente a γ. Per definizione esiste un isomorfismo $\phi\colon K \to K'$ tale che $\gamma' \circ \phi = \gamma$, allora $f \circ \gamma' = f \circ \gamma \circ \phi^{-1} = 0 \circ \phi^{-1} = 0$.
Siano K'' un oggetto di $\mathcal{C}$ e $\gamma''\colon K'' \to X$ un morfismo tale che $f \circ \gamma'' = 0$; per definizione esiste un unico morfismo $\beta\colon K'' \to K$ tale che $\gamma \circ \beta = \gamma''$. Consideriamo $\beta' = \phi \circ \beta$, allora $\gamma' \circ \beta' = (\gamma' \circ \phi) \circ \beta = \gamma \circ \beta = \gamma''$ ed è l'unico morfismo di K'' in K' tale che $\gamma' \circ \beta' = \gamma''$: se ci fosse un altro $\beta''\colon K'' \to K'$ tale che $\gamma' \circ \beta' = \gamma''$ e $\beta'' \neq \beta'$, avremmo $\phi^{-1} \circ \beta'' \neq \beta$ e $\gamma \circ \phi^{-1} \circ \beta'' = \gamma' \circ \beta'' = \gamma''$; impossibile per unicità di β.

4 Si ricava utilizzando le asserzioni 2 e 3.

5 Se $f\colon X \to Y$ è un monomorfismo e $\gamma\colon K \to X$ il suo nucleo, allora $f \circ \gamma = 0$. Si ha quindi $\gamma = 0$.

$$\begin{tikzcd} & K' \arrow[dl, "\exists!\,\beta"'] \arrow[d, "\gamma'"] & \\ K \arrow[r, "\gamma"'] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Viceversa, si supponga che $\gamma\colon K \to X$ corrisponda alla funzione identicamente nulla. Sia $\gamma'\colon K' \to X$ tale che $f \circ \gamma' = 0$, allora per la definizione di nucleo, esiste un unico morfismo $\beta\colon K' \to K$ tale che $\gamma \circ \beta = \gamma'$, da cui $\gamma' = 0 \circ \beta = 0$.

□

Definizione 3.19. Sia $\mathcal{C}$ una categoria e $f\colon X \to Y$ un morfismo. Un conucleo di f è un morfismo $\chi\colon Y \to C$ con le proprietà:

- $\chi \circ f = 0$;
- se $\chi' \circ f = 0$, con $\chi'\colon Y \to C'$ morfismo, allora esiste un unico morfismo $\beta\colon C \to C'$ tale che $\chi' = \beta \circ \chi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\chi'"'] & C \arrow[d, "\beta"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

Proposizione 3.4.4. *Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo che ammetta conucleo. Allora valgono le seguenti affermazioni:*

1. *ogni conucleo di f è un epimorfismo;*
2. *due conuclei rappresentano lo stesso oggetto quoziente di Y;*
3. *se $\chi\colon Y \to C$ è un conucleo di f allora ogni elemento di $[\chi]_\sim$ è conucleo di f;*
4. *il conucleo di f è unico a meno di un oggetto quoziente di Y e viene indicato con $\mathrm{Coker}(f)$;*
5. *f è un epimorfismo se e solo se $\mathrm{Coker}(f) = 0$.*

Proposizione 3.4.5. *Sia $\gamma\colon K \to X$ il nucleo di un morfismo $f\colon X \to Y$ e si supponga che esista il $\mathrm{Coker}(\gamma)$. Allora $\gamma = \ker(\mathrm{Coker}(\gamma))$.*

Dimostrazione. Sia $\chi\colon X \to C$ il conucleo di γ, allora $\chi \circ \gamma = 0$. Dobbiamo dimostrare che $\gamma = \ker(\chi)$.
Sappiamo già che $\chi\circ\gamma = 0$. Sia ora $\gamma'\colon K' \to X$ tale che $\chi\circ\gamma' = 0$. Se vale $f\circ\gamma' = 0$, allora esiste un unico $\beta\colon K' \to K$ tale che $\gamma' = \gamma \circ \beta$, essendo $\gamma = \ker(f)$, quindi $\gamma = \ker(\chi)$ per definizione.
Dimostriamo che se $\chi \circ \gamma' = 0$, allora $f \circ \gamma' = 0$: visto che γ è il nucleo di f e $\chi\colon X \to C$ il conucleo di γ, essendo $f \circ \gamma = 0$, allora esiste un unico $\beta'\colon C \to Y$ tale che $\beta' \circ \chi = f$, quindi $f \circ \gamma' = (\beta' \circ \chi) \circ \gamma' = \beta' \circ (\chi \circ \gamma') = \beta' \circ 0 = 0$. $\square$

Proposizione 3.4.6. *Sia $\chi\colon Y \to C$ il conucleo di un morfismo $f\colon X \to Y$ e si supponga che esista il $\ker(\chi)$. Allora $\chi = \mathrm{Coker}(\ker(\chi))$.*

Teorema 3.2. *Nella categoria* R-Mod *le nozioni categoriche di nucleo e conucleo coincidono con quelle usuali.*

Dimostrazione. Sia $\varphi\colon L \to M$ un morfismo. Indichiamo con R-$\mathrm{Ker}(\varphi)$ e con R-$\mathrm{Coker}(\varphi)$ R-moduli il nucleo e conucleo usuali di φ e con $\ker(\varphi)$ e con $\mathrm{Coker}(\varphi)$ il nucleo e il conucleo categorici. Sia $i\colon R\text{-}\mathrm{Ker}(\varphi) \to L$ l'inclusione di R-$\mathrm{Ker}(\varphi)$ in L e $\rho\colon M \to R\text{-}\mathrm{Coker}(\varphi)$ la proiezione canonica di M su $M/\operatorname{Im}(\varphi) = R\text{-}\mathrm{Coker}(\varphi)$. Dimostriamo che $\ker(\varphi) = i$ e $\mathrm{Coker}(\varphi) = \rho$.

Si ha allora che $\varphi \circ i = 0$ e $\rho \circ \varphi = 0$.
Siano $\gamma\colon H \to L$ morfismo di R-moduli tale che $\varphi \circ \gamma = 0$ e $y \in \mathrm{Im}(\gamma)$, allora per definizione di R-Ker(φ) si ha $\mathrm{Im}(\gamma) \leq \mathrm{Im}(i)$. Essendo i iniettiva, esiste un unico morfismo $\beta\colon H \to R\text{-Ker}(\varphi)$ tale che $\gamma = i \circ \beta$, per il Teorema 1.2.
Sia ora $\chi\colon M \to K$ morfismo di R-moduli tale che $\chi \circ \varphi = 0$, allora $\mathrm{Im}(\varphi) \leq R\text{-Ker}(\varphi)(\chi)$ e per la proprietà universale del conucleo esiste un unico morfismo $\beta'\colon R\text{-Coker}(\varphi) \to K$ tale che $\chi = \beta' \circ \rho$.
Abbiamo quindi dimostrato che $\ker(\varphi) = i$ e $\mathrm{Coker}(\varphi) = \rho$. $\square$

In particolare si ha che il nucleo usuale è dominio del nucleo categorico e il conucleo usuale codominio del conucleo categorico.

Osservazione 3.4.1.
- Nella categoria R-Mod le nozioni categoriche di monomorfismo ed epimorfismo coincidono.
- La categoria R-Mod ha nuclei e conuclei, cioè ogni morfismo ammette nucleo e conucleo categorici.

Osservazione 3.4.2. Usando la notazione della precedente dimostrazione, otteniamo:

- l'isomorfismo di gruppi abeliani

$$\phi\colon \mathrm{Hom}_R(H, R\text{-Ker}(\varphi)) \to R\text{-Ker}(\varphi_{*H}), \beta \mapsto i \circ \beta$$

  per le proprietà del nucleo e per le proprietà di $\circ$,

- l'isomorfismo di gruppi abeliani

$$\psi\colon \mathrm{Hom}_R(R\text{-Coker}(\varphi), K) \to R\text{-Ker}({\varphi^*}_K), \beta' \mapsto \beta' \circ \rho$$

3.4.2 Prodotti e coprodotti

Definizione 3.20. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$. Si definisce prodotto della famiglia data una coppia $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, dove $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $(\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di morfismi di $\mathcal{C}$ con $\pi_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$, dotati della seguente proprietà, detta proprietà universale del prodotto:

sia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di morfismi con $f_\lambda\colon Y \to X_\lambda$, con Y oggetto, allora esiste un unico morfismo $\mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\colon Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *tale che* $\pi_\lambda \circ \mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda = f_\lambda$ $\forall\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "\mathrm{Diag}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda"] \arrow[dr, "f_\lambda"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[dl, "\pi_\lambda"] \\
& X_\lambda &
\end{tikzcd}$$

La funzione π_λ viene detta proiezione canonica di indice λ.

Proposizione 3.4.7. *In una data categoria il prodotto di una famiglia di oggetti, se esiste, è unico a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per due oggetti.
Siano quindi X, Y due oggetti e $(Z, (\pi_\lambda)_{\lambda\in\{X,Y\}})$, $(Z', (\pi'_\lambda)_{\lambda\in\{X,Y\}})$ due prodotti di X e Y. Si utilizzi la seguente notazione: $f = \pi_X \times \pi_Y$ e $g = \pi'_X \times \pi'_Y$.
Osserviamo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X & Z' \arrow[l, "\pi'_X"] \arrow[r, "\pi'_Y"'] \arrow[d, "g"] & Y \\
& Z \arrow[ul, "\pi_X"] \arrow[ur, "\pi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

con $f = \pi_X \times \pi_Y$ e $g = \pi'_X \times \pi'_Y$ I triangoli superiori e inferiori piccoli commutano quindi anche i due triangoli grandi destro e sinistro. Si ha che $g \circ f = \pi_X \times \pi_Y = \mathrm{id}_Z$ per l'unicità del morfismo.
Invertendo Z e Z' si ottiene che $f : Z \to Z'$ è un isomorfismo. □

Osservazione 3.4.3. Se si considera la famiglia vuota, denotando con $X_\emptyset$ il prodotto di tale famiglia, la Definizione 3.20 si riduce a:
per ogni oggetto Y di $\mathcal{C}$ esiste un unico morfismo da Y a $X_\emptyset$.
Allora la famiglia vuota ammette prodotto in $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{C}$ possiede un oggetto terminale. Tale oggetto sarà il prodotto considerato.

Definizione 3.21. Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Si dice:

- $\mathcal{C}$ ha tutti i prodotti binari se ogni coppia di oggetti di $\mathcal{C}$ ammette prodotto;
- $\mathcal{C}$ ha tutti i prodotti finiti se possiede un oggetto terminale e ogni famiglia finita di oggetti di $\mathcal{C}$ ammette prodotto;
- $\mathcal{C}$ ha tutti i prodotti se ogni famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$ ammette prodotto.

Esempio 3.4.3.
- La categoria *Set* ha tutti prodotti. Infatti, data una famiglia $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, essa ammette prodotto $(\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda, (\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, con $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ prodotto cartesiano degli S_λ e π_λ l'usuale proiezione su S_λ. Ogni singoletto è oggetto terminale di *Set* e sono tutti chiaramente isomorfi.
- La categoria R-Mod ha tutti i prodotti. Infatti, data una famiglia $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, essa ammette prodotto diretto e la nozione di prodotto categorico coincide con la coppia $(\prod_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda, (\pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, con π_λ la proiezione di indice λ. R-Mod ammette anche oggetto terminale, il modulo 0, come è già stato osservato.

Proposizione 3.4.8. *Sia $\mathcal{C}$ preadditiva. Se una famiglia di oggetti ammette prodotto allora i morfismi π_λ sono epimorfismi.*

Dimostrazione. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ la famiglia considerata. Consideriamo la seguente famiglia di morfismi $\forall \lambda, \mu \in \Lambda$: $\delta_{\lambda,\mu} : X_\mu \to X_\lambda$ con

$$\delta_{\lambda,\mu} = \begin{cases} \mathrm{id}_{X_\mu} & \text{se } \lambda = \mu \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esiste quindi un unico morfismo $\varepsilon_\mu\colon X_\mu \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ tale che $\pi_\lambda \circ \epsilon_\mu = \delta_{\lambda,\mu} \quad \forall\lambda \in \Lambda$. Fisso μ e dimostriamo che π_μ è un epimorfismo: sia $f\colon X_\mu \to Y$ tale che $f \circ \pi_\mu = 0$.

$$\begin{tikzcd}
X_\mu \arrow[rr, "\varepsilon_\mu"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{X_\mu}"'] & & \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[dl, "\pi_\mu"] \\
& X_\mu \arrow[dl, "f"] & \\
Y & &
\end{tikzcd}$$

Allora $f = f \circ \mathrm{id}_{X_\mu} = f \circ (\pi_\mu \circ \varepsilon_\mu) = (f \circ \pi_\mu) \circ \varepsilon_\mu = 0$, quindi π_μ è un epimorfismo.

$\square$

Definizione 3.22. Sia $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{C}$. Si definisce coprodotto della famiglia data una coppia $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, (\varepsilon_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, dove $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $(\varepsilon_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di morfismi di $\mathcal{C}$ con $\varepsilon_\lambda\colon X_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, dotati della seguente proprietà, detta proprietà universale del coprodotto:

sia $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *una famiglia di morfismi con* $f_\lambda\colon X_\lambda \to Y$*, con* Y *oggetto, allora esiste un unico morfismo* $\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ *tale che* $\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda \circ \varepsilon_\lambda = f_\lambda \;\forall\lambda \in \Lambda$.

Il morfismo ε_λ viene detto iniezione canonica di indice λ.

Proposizione 3.4.9. *In una data categoria il coprodotto di una famiglia di oggetti, se esiste, è unico a meno di isomorfismo.*

Osservazione 3.4.4. Se si considera la famiglia vuota, denotando con $X_\emptyset$ il coprodotto di tale famiglia, la Definizione 3.22 si riduce a:

per ogni oggetto Y *di* $\mathcal{C}$ *esiste un unico morfismo da* $X_\emptyset$ *in* Y*.*

Allora la famiglia vuota ammette coprodotto in $\mathcal{C}$ se e solo se $\mathcal{C}$ possiede un oggetto iniziale. Tale oggetto sarà il coprodotto considerato.

La Definizione 3.21 si addatta ai coprodotti sostituendo la parola prodotti con coprodotti.

Esempio 3.4.4.

- La categoria *Set* ha tutti i coprodotti. Infatti il coprodotto di una famiglia $(S_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è l'unione disgiunta $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda$ con $S'_\lambda = S_\lambda \times \{\lambda\}$ e le iniezioni canoniche sono $\varepsilon_\lambda : S_\lambda \to \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} S'_\lambda, s \mapsto (s, \lambda)$.
- La categoria R-Mod ha tutti i coprodotti e il coprodotto di una famiglia di R-moduli corrisponde alla loro somma diretta.

Proposizione 3.4.10. *Sia* $\mathcal{C}$ *preadditiva. Se una famiglia di oggetti ammette coprodotto allora i morfismi* ε_λ*, sono monomorfismi.*

Si può dimostrare che una categoria preadditiva con oggetto nullo ha tutti i prodotti finiti se e solo se ha tutti i coprodotti finiti.

Definizione 3.23. Una categoria che ha oggetto nullo, prodotti finiti, nuclei e conuclei viene detta preabeliana.

3.4.3 Immagini e coimmagini

Definizione 3.24. Sia $\mathcal{C}$ una categoria preabelliana. Dato un morfismo $f\colon X \to Y$ si definiscono l'immagine di f e la coimmagine di f :
$\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{Coker}(f))$ e $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{Coker}(\ker(f))$.

In particolare l'immagine e la coimmagine di f sono rispettivamente sotto-oggetto di Y e oggetto quoziente di X.
Si utilizzi ora la seguente notazione:

- $f\colon X \to Y$;
- $i\colon \ker(f) \to X$ nucleo di f, con $\ker(f)$ oggetto di $\mathcal{C}$;
- $\rho\colon Y \to \mathrm{Coker}(f)$ conucleo di f, con $\mathrm{Coker}(f)$ oggetto di $\mathcal{C}$;
- $\rho'\colon X \to \mathrm{Coim}(f)$ coimmagine di f, con $\mathrm{Coim}(f)$ oggetto di $\mathcal{C}$;
- $i'\colon \mathrm{Im}(f) \to Y$ immagine di f, con $\mathrm{Im}(f)$ oggetto di $\mathcal{C}$.

Si ottiene quindi il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho'"'] & Y \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& \mathrm{Coim}(f) \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, "\gamma"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i'"'] &
\end{tikzcd}$$

ove γ è l'unico morfismo tale che $\gamma \circ \rho' = f$, (visto che $f \circ i = 0$ e ρ' è il conucleo di i), e u è l'unico morfismo tale che $u \circ i' = \gamma$, visto che $\rho \circ \gamma \circ \rho' = \rho \circ f = 0 \implies \rho \circ \gamma = 0$, essendo ρ' epimorfismo, e i' è il nucleo di ρ.
Perciò u è l'unico morfismo rende commutativo il quadrato.

Definizione 3.25. Una categoria preabeliana si dice abeliana se per ogni f il morfismo u definito sopra è un isomorfismo, cioè se $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Coim}(f)$.

Teorema 3.3. *Nella categoria* R-Mod *le nozioni categoriche di immagine e coimmagine sono quelle usuali.*

Dimostrazione. Con la notazione usuale $\ker(\rho) = \mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Coker}(i) = \mathrm{Coim}(f)$. Allora immagine e coimmagine categorici corrispondono alla versione usuale. □

Osservazione 3.4.5. R-Mod è una categoria abeliana per il primo teorema di omomorfismo.

Osservazione 3.4.6. Una categoria preabeliana è abeliana se e solo se tutti i monomorfismi e gli epimorfismi sono rispettivamente nuclei e conuclei di qualche morfismo.

3.5 Limiti diretti

Prima di definire il concetto di limite diretto bisogna richiamare alcune definizioni della teoria degli insiemi.

Definizione 3.26. Un ordine parziale su un insieme X non vuoto si dice filtrante crescente se (indicando con $\leq$ l'ordine) per ogni $x, y \in X$ esiste un elemento z di X tale che $x \leq z$ e $y \leq z$. In tal caso X si dice insieme diretto.

Definizione 3.27. Siano $\mathcal{C}$ una categoria e Λ un insieme diretto; con sistema diretto si intende la coppia $((X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}, (f_{\lambda,\mu}\colon X_\lambda \to X_\mu)_{\lambda,\mu\in\Lambda,\ \lambda\leq\mu})$, con $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di oggetti e $(f_{\lambda,\mu}\colon X_\lambda \to X_\mu)_{\lambda,\mu\in\Lambda,\ \lambda\leq\mu}$ una famiglia di morfismi, dotata delle seguenti proprietà:

- per ogni $\lambda \in \Lambda$ $f_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$;
- per ogni $(\lambda, \mu, \nu) \in \Lambda^3$ tali che $\lambda \leq \mu \leq \nu$, il seguente diagramma risulta commutativo:

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, "f_{\lambda,\nu}"] & \\ X_\mu \arrow[rr, "f_{\mu,\nu}"'] & & X_\nu \end{tikzcd}$$

Definizione 3.28. Sia $((X_\lambda)_\lambda, (f_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu})$ un sistema diretto. Il limite diretto del sistema diretto dato è una coppia $(\varinjlim X_\lambda, (f_\lambda)_\lambda)$, ove $\varinjlim X_\lambda$ è un oggetto di $\mathcal{C}$ e $(f_\lambda)_\lambda$ una famiglia di morfismi $f_\lambda\colon X_\lambda \to \varinjlim X_\lambda$, soddisfacente le proprietà seguenti:

1. per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$, con $\lambda \leq \mu$, i diagrammi

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_{\lambda,\nu}"'] \arrow[dr, "f_\lambda"] & \\ X_\mu \arrow[rr, "f_\mu"'] & & \varinjlim X_\lambda \end{tikzcd}$$

   sono commutativi

2. per ogni altra coppia $(Y, (g_\lambda)_\lambda)$, ove Y è un oggetto e $g_\lambda\colon X_\lambda \to Y$ sono morfismi che rendono commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} & X_\lambda \arrow[dl, "f_{\lambda,\nu}"'] \arrow[dr, "g_\lambda"] & \\ X_\mu \arrow[rr, "g_\mu"'] & & Y \end{tikzcd}$$

   per ogni $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \leq \mu$,

esiste un unico morfismo $\varinjlim g_\lambda : \varinjlim X_\lambda \to Y$ che rende commutativi i seguenti diagrammi $\forall \lambda \in \Lambda$:

$$\begin{tikzcd} & \varinjlim X_\lambda \arrow[dl, "f_\lambda"'] \arrow[dr, "\varinjlim g_\lambda"] & \\ X_\lambda \arrow[rr, "g_\lambda"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Teorema 3.4. *In* R-Mod *ogni sistema diretto ha limite.*

Dimostrazione. Sia $((M_\lambda)_\lambda, (f_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu})$ un sistema diretto in R-Mod. Consideriamo il modulo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$, con le iniezioni canoniche ϵ_λ, e il suo sottomodulo $M = \langle\{\epsilon_\lambda(x_\lambda) - \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) \mid \lambda,\mu \in \Lambda \wedge \lambda \leq \mu \wedge x_\lambda \in M_\lambda\}\rangle = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda) - \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) \mid x_\lambda \in M_\lambda \wedge X_\lambda = 0 \;\forall\!\forall\lambda \in \Lambda\}$. Dimostriamo che $((\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M, \rho\circ\epsilon_\lambda)$ è il limite diretto del sistema dato, ove $\rho\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M$ è la proiezione canonica di $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ su $(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M$.

1. Sia $f_\lambda = \rho\circ\epsilon_\lambda\colon M_\lambda \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M$. Dobbiamo provare che $f_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = f_\lambda$.
   Sia $x_\lambda \in M_\lambda$, allora $f_\mu \circ f_{\lambda,\mu}(x_\lambda) = \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) + M$ e $f_\lambda(x_\lambda) = \epsilon_\lambda(x_\lambda) + M$, ma $\epsilon_\lambda(x_\lambda) - \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) \in M$, per la definizione stessa di M, perciò $f_\mu \circ f_{\lambda,\mu} = f_\lambda$.

2. Sia $(Y, (g_\lambda)_\lambda)$ una coppia che soddisfi le condizioni del punto 2 della Definizione 3.28.
   Sia $g\colon (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M \to Y, (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} + M \mapsto \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, g_\lambda((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$. Dimostriamo che $\varinjlim g_\lambda = g$.
   Il morfismo g è ben definito, infatti $\mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, g_\lambda(\sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda) - \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda))) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, g_\lambda \circ \epsilon_\lambda(x_\lambda) - \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, g_\lambda \circ \epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(x_\lambda) - g_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(x_\lambda) - g_\lambda(x_\lambda) = 0$.
   In più $g \circ f_\lambda = g\circ\rho\circ\epsilon_\lambda = \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, g_\lambda \circ \epsilon_\lambda = g_\lambda$.

Si è quindi dimostrato che $((\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda)/M, \rho\circ\epsilon_\lambda) = (\varinjlim X_\lambda, (f_\lambda)_\lambda)$. □

Osservazione 3.5.1. Sia L il limite diretto degli $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

- Per ogni $x \in L$ esiste un $\lambda \in \Lambda$ e un $x_\lambda \in M_\lambda$ tale che $x = f_\lambda(x_\lambda)$; infatti ogni elemento di L si scrive come $\sum_{\lambda\in\Lambda'} \epsilon_\lambda(x_\lambda) + M = \epsilon_\mu(\sum_{\lambda\in\Lambda'} f_{\lambda,\mu}) + M$, con $\Lambda' \subseteq \Lambda$ finito e $\mu \in \Lambda$ tale che $\lambda \leq \mu\ \forall\lambda \in \Lambda'$. L'esistenza di tale μ è garantita, essendo $\leq$ filtrante crescente.

- Se i morfismi $f_{\lambda,\mu}$ sono tutti iniettivi allora gli f_λ lo sono; infatti se $f_\lambda(x_\lambda) = 0$ allora esiste un $\mu \in \Lambda$ tale che $\lambda \leq \mu$ e $f_{\lambda,\mu}(x_\lambda) = 0$. Questo avviene perché se $f_\lambda(x_\lambda) = 0$, allora $\epsilon_\lambda(x_\lambda) \in M$, quindi, per unicità scrittura, esiste un μ tale che $\epsilon_\mu(f_{\lambda,\mu}(x_\lambda)) = 0$ e ϵ_μ è iniettiva.

- Se i morfismi g_λ sono tutti iniettivi allora g è iniettivo.

- $L = \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(M_\lambda)$ e $\mathrm{Im}(g) = \sum_{\lambda\in\Lambda} g_\lambda(M_\lambda)$.

Definizione 3.29. Un modulo si dice finitamente generato se ammette un sistema finito di generatori.

Teorema 3.5. *Ogni modulo è limite diretto dei suoi sottomoduli finitamente generati.*

Dimostrazione. Sia M un modulo e sia Λ l'insieme delle parti finite di M; Λ risulta un insieme diretto con l'ordine $\subseteq$. La coppia $((M_\lambda)_\lambda, (i_{\lambda,\mu}\colon M_\lambda \to M_\mu)_{\lambda,\mu\in\Lambda,\lambda\subseteq\mu}$, ove $M_\lambda = \langle\{x \mid x \in \lambda\}\rangle$ è il sottomodulo di M generato dagli elementi di λ e $i_{\lambda,\mu}$ è l'inclusione di M_λ in M_μ, è un sistema diretto in R-Mod, quindi, per il Teorema precedente, ammette limite.
In particolare il limite di tale sistema diretto è (M, i_λ), con i_λ l'inclusione di M_λ in M.
□

Dalle proprietà dei funtori deriva direttamente la seguente proposizione

Proposizione 3.5.1. *Siano* $((X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},(f_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda})$ *un sistema diretto di* $\mathcal{C}$ *e* $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ *un funtore.* $((F(X_\lambda))_\lambda,(F(f_{\lambda,\mu}))_{\lambda,\mu})$ *è un sistema diretto di* $\mathcal{D}$.

Definizione 3.30. Sia $((X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda},(f_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu\in\Lambda})$ un sistema diretto di $\mathcal{C}$, ammettente limite diretto; si dice che il funtore $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ preserva il limite diretto $(\varinjlim X_\lambda,(f_\lambda)_\lambda)$ se il sistema diretto $((F(X_\lambda))_\lambda,(F(f_{\lambda,\mu}))_{\lambda,\mu})$ ammette come limite diretto in $\mathcal{D}$ la coppia $(F(\varinjlim X_\lambda),((F(f_\lambda))_\lambda)$.
Se avviene ciò per ogni sistema diretto in $\mathcal{C}$ ammettente limite, si dice che F preserva i limiti diretti di $\mathcal{C}$ e scriveremo:

$$F(\varinjlim X_\lambda)=\varinjlim F(X_\lambda)$$

Osservazione 3.5.2. Se F preserva i limiti allora, data una famiglia di morfismi $(g_\lambda)_\lambda$ che verifica le condizioni del secondo punto della Definizione 3.28, si ha che $F(g\circ f_\lambda)=F(\varinjlim g_\lambda)\circ F(f_\lambda)=F(g_\lambda)$, essendo F un funtore. Per unicità $F(\varinjlim g_\lambda)=\varinjlim F(g_\lambda)$.

Teorema 3.6. *Siano* $\mathcal{C},\mathcal{D}$ *categorie e* $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ *un funtore. Se* F *ammette un aggiunto a destra allora preserva i limiti diretti in* $\mathcal{C}$.

Capitolo 4

Prodotti tensoriali

L'analisi si concentrerà nuovamente sui moduli. Siano R ed A anelli unitari, si utilizzi la seguente notazione:

- M_R indica un oggetto di Mod-R;
- ${}_RM$ indica un oggetto di R-Mod;
- ${}_RM_A$ indica un R-A-bimodulo;
- I morfismi tra moduli si scriveranno dalla parte opposta a quella in cui operano gli scalari.

4.1 Applicazioni bilineare e prodotto tensore

Definizione 4.1. Siano R un anello unitario, L_R e ${}_RM$ moduli come sopra indicato, e G un gruppo abeliano. Una applicazione $f\colon L \times M \to G$ viene detta bilineare se soddisfa le seguenti condizioni $\forall x, x' \in L, y, y' \in M, r \in R$:

1. $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$;
2. $f(x, y + y') = f(x, y) + f(x, y')$;
3. $f(xr, y) = f(x, ry)$.

L'insieme di tali applicazioni verrà indicato con $\mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$.

Osservazione 4.1.1.

- Per ogni $f \in \mathrm{Bil}_R(l \times M, G)$, $f(x, 0) = 0 = f(0, y)$ e $f(nx, y) = f(x, ny) = nf(x, y)$ per ogni $x \in L$, $y \in M$ e n intero.
- $(\mathrm{Bil}_R(L \times M, G), +, 0)$ è un gruppo abeliano, dove $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ per ogni f, g applicazioni bilineari e 0 è la mappa identicamente nulla.
- Sia $f \in \mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$ e $\varphi\colon G \to U$ un morfismo di gruppi abeliani, allora $g \circ f \in \mathrm{Bil}_R(L \times M, U)$ per linearità di φ.

- Per i punti precedenti si definisce il funtore covariante $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_)\colon \text{Mod-}\mathbb{Z} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$ che manda ogni gruppo abeliano G in $\mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$ e ogni morfismo di gruppi abeliani $\varphi\colon G \to U$ nel morfismo $\mathrm{Bil}_R(L\times M, G) \to \mathrm{Bil}_R(L\times M, U)$, $f \mapsto \varphi\circ f$. $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_)$ è chiaramente un funtore per associatività e bilinearità di $\circ$ rispetto $+$.

- Sia $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(L, L')$ e $f \in \mathrm{Bil}_R(L' \times M, G)$, allora $f_\varphi\colon L \times M \to G, (x, y) \mapsto f(\varphi(x), y)$ è bilineare per la linearità di φ.
  Otteniamo quindi il funtore contravariante $\mathrm{Bil}_R(\_ \times M, G)\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$, che manda ogni L R-modulo destro in $\mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$ e ogni R-morfismo di moduli destri $\varphi\colon L \to L'$ in $\mathrm{Bil}_R(L' \times M, G) \to \mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$, $f \mapsto f_\varphi$.

- Simmetricamente si definisce il funtore contravariante $\mathrm{Bil}_R(L \times \_, G)\colon R\text{-Mod} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$

Lemma di Yoneda 7. Siano $\mathcal{C}$ una categoria e X un oggetto e $F\colon \mathcal{C} \to Set$ un funtore covariante. La seguente mappa è una biiezione

$$\theta\colon Nat(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_), F) \to F(X), \eta\colon \eta_X(\mathrm{id}_X)$$

con inversa

$$\psi\colon F(X) \to Nat(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_), F), x \mapsto \psi(x) = (\psi(x)_B\colon f \mapsto (F(f)(x)))_{B\in Ob(\mathcal{C})}$$

con $Nat(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_), F)$ l'insieme delle trasformazioni naturali di $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_)$ in F.

Dimostrazione. Dimostriamo che ψ è ben definita e che è l'inversa di θ.
ψ è ben definita: per ogni $x \in FX$ $(\psi(x)_B\colon f \mapsto (F(f)(x)))_{B\in Ob(\mathcal{C})}$ è una trasformazone naturale, infatti $Fg(\psi_Y(x)(f)) = F(g \circ f)(x) = \psi_Y(x)(g \circ f)$ perché F è un funtore, con $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$, $g\colon Y \to Z$.
ψ è l'inversa sinistra: $\theta \circ \psi(x) = \psi(x)_X(\mathrm{id}_X) = F\,\mathrm{id}_X(x) = x$.
Sia ora $\eta \in Nat(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_), F)$ e $f\colon X \to Y$: dalla naturalità si deduce che il diagramma di seguito commuta:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(A,f)"'] & FX \arrow[d, "Ff"] \\
\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \arrow[r, "\eta_Y"'] & FY
\end{tikzcd}$$

Quindi $\eta_Y(f) = F(f) \circ \eta_X(\mathrm{id}_X)$ per ogni Y e per ogni f. In particolare ogni trasformazione naturale $\eta \in Nat(\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_), F)$ è totalmente definita dall'oggetto $\eta_X(\mathrm{id}_X)$ appartenente a $\mathcal{C}$. Allora $(\psi \circ \theta(\eta))_Y(f) = \psi(\theta(\eta))(f) = Ff(\eta_X(\mathrm{id}_X)) = \eta_Y(f)$. □

Definizione 4.2.
- Sia $\mathcal{C}$ una categoria qualsiasi e $F\colon \mathcal{C} \to Set$ un funtore covariante. F si dice rappresentabile se esiste un oggetto $X \in Ob(\mathcal{C})$ tale che F è naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_)$.

- Una rappresentazione di F è una coppia (X, x), ove X è un oggetto di $\mathcal{C}$ e x è un elemento di FX, tale che $\psi(x)\colon \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, \_) \to F$ definito da $\psi(x)_Y\colon \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \to FY, f \to (F(f))(x)$ è un isomorfismo naturale. In tal caso si dice che X rappresenta F e che x è elemento universale di F.

Osservazione 4.1.2. Se un funtore è rappresentabile allora ammette rappresentazione per il lemma di Yoneda.
(X, x) è una rappresentazione di F se e solo se per ogni Y oggetto di $\mathcal{C}$ e per ogni y in FY esiste uno e uno solo morfismo $f\colon X \to Y$ tale che $Ff(x) = y$; infatti ogni trasformazione è del tipo $\psi(u)_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to FY, f \mapsto (F(f))(u)$, ove $u \in FX$, quindi fissando $u = x$, si ottiene una trasformazione naturale biiettiva.
Da ciò segue che ogni trasformazione η naturale è del tipo $\psi((F(\varphi))(x))$, con $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$, cioè tali che $\eta_Y(f) = (F(f \circ \varphi))(x)$.

Definizione 4.3. Una categoria $\mathcal{C}$ si dice concreta se esiste un funtore fedele F di $\mathcal{C}$ in Set. Se una categoria è concreta allora un funtore $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ si dice rappresentabile se lo è $F \circ G$.

Esempio 4.1.1. Le categorie di moduli sono concrete, infatti il funtore For è fedele.

Osservazione 4.1.3. Se $\mathcal{C}$ è preadditiva allora risulta ben definito il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)'\colon \mathcal{C} \to$ Mod-$\mathbb{Z}$ e se $F\colon \mathcal{C} \to$ Mod-$\mathbb{Z}$ è un funtore rappresentabile, allora tutti i morfismi naturali di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)$ in $For \circ F$ sono anche morfismi naturali di $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)'$ in F, in quanto $\psi_Y\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to F(Y), f \mapsto (F(f))((F(\varphi))(x)) = F(f \circ \varphi)(x)$ sono lineari per additività di F.
Quindi tutto ciò che è stato detto per i funtori $F\colon \mathcal{C} \to Set$ vale per i funtori $F\colon \mathcal{C} \to$ Mod-$\mathbb{Z}$, sostituendo $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)$ con $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \_)'\colon \mathcal{C} \to$ Mod-$\mathbb{Z}$.

Lo scopo ora è quello di dimostrare che il funtore $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_)$ è rappresentabile.

Teorema 4.1. *Esiste una rappresentazione di* $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_)$.

Dimostrazione. Si consideri il gruppo abeliano libero generato da $L \times M$, $\mathbb{Z}^{(L\times M)}$, indicato con $L_{\mathbb{Z}}(L \times M)$. Si considerino gli insiemi $P_1 = \{(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \mid \forall x, x' \in L,\ \forall y \in M\}$, $P_2 = \{(x, y + y') - (x, y) - (x, y') \mid x \in L,\ y,\ y' \in M\}$ e $P_3 = \{(xr, y) - (x, ry) \mid x \in L,\ y \in M,\ r \in R\}$, corrispondenti alle tre proprietà delle funzioni bilineari e i quali elementi vengono mandati a 0 da esse.
Siano $H = \langle P_1,\ P_2,\ P_3\rangle$, $T = L_{\mathbb{Z}}(L\times M)/H$, $i\colon L\times M \to L_{\mathbb{Z}}(L\times M)$ l'inclusione canonica di $L \times M$ in $L_{\mathbb{Z}}(L \times M)$ e $\pi\colon L_{\mathbb{Z}}(L \times M) \to T$ la proiezione canonica.
Data $\tau = \pi \circ i\colon L \times M \to T$, dimostriamo che (T, τ) è una rapprentazione:

Basta dimostrare che, per ogni ogni applicazione bilineare $f\colon L \times M \to G$, esiste un unico morfismo di gruppi abeliani α tale che $f = \alpha \circ \tau$. Per la definizione del modulo libero generato esiste un unico $\bar{f}$ morfismo di gruppi abeliani che estende f.
Come è gia stato notato f manda in zero gli elementi di $\bigcup_{1,2,3} P_i$, quindi, essendo questi generatori, H è contenuto nel nucleo di $\bar{f}$. Per la proprietà fondamentale del conucleo esiste un unico morfismo $\alpha\colon T \to G$ tale che $f = \bar{f} \circ i = \alpha \circ \pi \circ i = \alpha \circ \tau$.
Dal fatto che T ha come sistema di generatori $\{(l, m) + H \mid (l, m) \in L \times M\}$, si ottiene che $\langle \mathrm{Im}(\tau)\rangle = T$ e perciò α è unico, in quanto unicamente determinato dai valori presi dal sistema di generatori del dominio.
Si deduce quindi che $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(T, \_)$, con elemento universale τ e isomorfismo naturale $\eta\colon \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(T, \_) \to \mathrm{Bil}(L \times M, G)$ dato da:

$$\eta_G\colon \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(T, G) \to \mathrm{Bil}(L \times M, G), \alpha \mapsto \alpha \circ \tau$$

$\square$

Definizione 4.4. Siano L_R e $_RM$ muduli su R. Un prodotto tensoriale di L_R per $_RM$ è una rappresentazione di $\mathrm{Bil}_R(L \times M, \_)$.

Come già visto un prodotto tensoriale gode della seguente proprietà:

Proprietà universale del prodotto tensoriale 8. Siano $L \in$ Mod-R e $M \in R$-Mod. Per ogni gruppo abeliano G e per ogni applicazione bilineare $f\colon L \times M \to G$ esiste un unico morfismo di gruppi $\alpha\colon T \to G$ tale che il diagramma seguente commuti:

$$\begin{tikzcd} & L \times M \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "f"] & \\ T \arrow[rr, "\alpha"'] & & G \end{tikzcd}$$

Proposizione 4.1.1. *Se (T, τ) e (T', τ') sono due prodotti tensoriali di L_R per $_RM$, allora esiste un unico isomorfismo $\alpha\colon T \to T'$ tale che $\tau' = \alpha \circ \tau$.*

Dimostrazione. Per la proprietà universale esiste un unico morfismo di gruppi $\alpha\colon T \to T'$ tale che $\tau' = \alpha \circ \tau$ e un unico $\alpha'\colon T' \to T$ tale che $\tau = \alpha' \circ \tau'$.
$\alpha' \circ \alpha \circ \tau = \alpha' \circ \tau' = \tau$, ma $\tau = \mathrm{id}_T \circ \tau$, quindi per unicità $\alpha' \circ \alpha = \mathrm{id}_T$. Similmente si dimostra che $\alpha \circ \alpha' = \mathrm{id}_{T'}$. $\square$

Quindi il prodotto tensoriale di L per M esiste unico a meno di un isomorfismo, per questo viene indicato come $L \otimes_R M$. Essendo $\langle \tau(L \times M) \rangle = L \otimes_R M$, allora $\tau(L \times M)$ è un insieme di generatori di $L \otimes_R M$, $x \otimes y = \tau(x, y)$ e ogni elemento di $L \otimes_R M$ si scrive come $\sum_{i \in I} n_i(x_i \otimes y_i)$, con gli n_i interi quasi tutti nulli.
Per la bilinearità di τ e per il Teorema 4.1

$$\begin{gathered} (x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y \\ x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y' \\ xr \otimes y = x \otimes ry \\ x \otimes y = 0 \iff x = 0 \vee y = 0 \\ n(x \otimes y) = (nx) \otimes y = x \otimes (ny) \\ x \otimes y = x' \otimes y' \iff (x, y) - (x', y') \in H \end{gathered}$$

per ogni $x, x' \in L$, $y, y' \in M$, $r \in R$, $n \in \mathbb{Z}$.

Definizione 4.5. Siano $f\colon L \to L'$ un morfismo di R-moduli destri e $g\colon M \to M'$ un morfismo di R-moduli sinistri. Con $(f \times g)\colon L \times M \to L' \otimes_R M'$ si intende l'applicazione definita da $(f \times g)(x, y) = f(x) \otimes g(y)$.

Osservazione 4.1.4. $f \times g$ è bilineare, infatti, usando le proprietà del prodotto tensoriale, la R-linearità di f e di g, si deduce che:

1. $(f \times g)(x + x', y) = f(x + x') \otimes g(y) = f(x) \otimes g(y) + f(x') \otimes g(y) = (f \times g)(x, y) + (f \times g)(x', y)$;

2. $(f \times g)(x, y + y') = (f \times g)(x, y) + (f \times g)(x, y')$;

3. $(f \times g)(xr, y) = f(xr) \otimes g(y) = (f(x)r) \otimes g(y) = f(x) \otimes (rg(y)) = f(x) \otimes g(rx) = (f \times g)(x, ry)$.

Definizione 4.6. Siano $f\colon L \to L'$ un morfismo di R-moduli destri e $g\colon M \to M'$ un morfismo di R-moduli sinistri. Con $f \otimes g\colon L \otimes_R M \to L' \otimes_R M'$ si intende il morfismo di gruppi abeliani definito dalle posizioni $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$.

Osservazione 4.1.5.

- $f \otimes g$ è ben definito, infatti si ottiene da $f \times g$ per la proprietà universale del prodotto tensoriale.

- $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, con $f\colon L \to L'$, $f'\colon L' \to L''$, $g\colon M \to M'$ e $g'\colon M' \to M''$.

- $((f + h) \otimes g)(x \otimes y) = (f + h)(x) \otimes g(y) = f(x) \otimes g(y) + h(x) \otimes g(y)$, con $h\colon L \to L'$ e $f \otimes (g + i) = (f \otimes g) + (f \otimes i)$, con $i\colon M \to M'$, dimostrabile nello stesso modo.

- $((f \otimes \mathrm{id}_Y) + (f' \otimes \mathrm{id}_Y))(x \otimes y) = (f(x) \otimes y) + (f'(x) \otimes y) = ((f + f')(x), y) = ((f + f') \otimes \mathrm{id}_Y)(x \otimes y)$ e $\mathrm{id}_X \otimes (g + g') = (\mathrm{id}_X \otimes g) + (\mathrm{id}_X \otimes g')$, con $f,\ f'\colon X \to M$ e $g,\ g'\colon Y \to L$.

Dalla Osservazione 4.1.5 si deriva che:

- $L \otimes_R \_\colon$ R-Mod $\to$ Mod-$\mathbb{Z}$, ove L è un R-modulo destro, che manda $M \in R$-Mod nel gruppo abeliano $L \otimes_R M$ e ogni morfismo $f\colon M \to M'$ in $\mathrm{id}_L \otimes f$, è un funtore covariante.

- $\_ \otimes_R M\colon$ Mod-$R \to$ Mod-$\mathbb{Z}$, ove M è un R-modulo sinistro, che manda $L \in$ Mod-R nel gruppo abeliano $L \otimes_R M$ e ogni morfismo $f\colon L \to L'$ in $f \otimes \mathrm{id}_M$, è un funtore covariante.

- $\_ \otimes_R \_\colon$ Mod-$R \times R$-Mod $\to$ Mod-$\mathbb{Z}$, definito dalle posizioni $(L, M) \mapsto L \otimes_R M$ e $(f, g) \mapsto (f \otimes g)$, con $L \in$ Mod-R, $M \in R$-Mod, $f\colon L \to L'$ morfismo di moduli destri e $g\colon M \to M'$ morfismo di R-moduli sinistri, è un bifuntore covariante.

Questi funtori vengono detti funtori tensore.

Proposizione 4.1.2. *Per ogni* $M \in$ R-Mod*,* $L \in$ Mod-R *e* $G \in$ Mod-$\mathbb{Z}$*,* $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(\_ \otimes_R M, G) \cong \mathrm{Bil}_R(\_ \times M, G)$ *e* $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L \otimes \_, G) \cong \mathrm{Bil}_R(L \times \_, G)$*.*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima equivalenza; la seconda deriva simmetricamente. Sia $\eta_L\colon \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L \otimes_R M, G) \to \mathrm{Bil}_R(L \times M, G), \alpha \mapsto \alpha \circ \tau_{L \otimes M}$ con $\eta_{L'}(\alpha)(x, y) = \alpha(x \otimes y)$. Dimostriamo che il diagramma seguente commuta, per ogni $f \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L' \otimes_R M, G) \arrow[r, "\eta_{L'}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(f \otimes \mathrm{id}_M, G)"'] & \mathrm{Bil}_R(L' \times M, G) \arrow[d, "\mathrm{Bil}_R(f \times M, G)"] \\
\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L \otimes_R M, G) \arrow[r, "\eta_L"'] & \mathrm{Bil}_R(L \times M, G)
\end{tikzcd}$$

Dobbiamo quindi dimostrare che $\mathrm{Bil}_R(f \times M, G) \circ \eta_{L'} = \eta_L \circ \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(f \otimes \mathrm{id}_M, G)$. Sia α in $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L' \otimes_R M, G)$.

$$(\mathrm{Bil}_R(f \times M, G) \circ \eta_{L'})(\alpha)(x, y) = \eta_{L'}(\alpha)(f(x), y) = \alpha(f(x) \otimes y)$$

$$(\eta_L \circ \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(f \otimes \mathrm{id}_M, G))(\alpha)(x, y) = \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(f \otimes \mathrm{id}_M, G))(\alpha)(x \otimes y) =$$
$$= (\alpha \circ (f \otimes \mathrm{id}_M))(x \otimes y) = \alpha(f(x) \otimes y)$$

Che sia biiezione e morfismo di gruppo abeliano si è già dimostrato in precedenza.

$\square$

Teorema 4.2. *Per ogni M R-modulo sinistro,* $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(\_ \otimes_R M, \_) \cong \mathrm{Bil}_R(\_ \times M, \_)$ *con isomorfismo naturale in L, G*

$$\psi_{L,G} \colon \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}\mathbb{Z}}(L \otimes_R M, G) \to \mathrm{Bil}_R(L \times M, G)$$

dato da:

$$\psi_{L,G}(\alpha)(x, y) = \alpha(x \otimes y).$$

4.1.1 Funtori esatti

Le seguenti definizioni vengono date per i moduli sinistri, ma simmetricamente si possono estendere ai moduli destri.

Definizione 4.7. Un funtore covariante $F \colon R\text{-Mod} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$ si dice esatto a destra se per ogni successione esatta del tipo

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

allora la successione seguente è esatta:

$$F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M_2) \to 0$$

Se invece è esatta la successione $0 \to F(M_1) \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M_2)$ allora F viene detto esatto a sinistra.
Un funtore esatto sia a sinistra che a destra viene detto esatto.

Definizione 4.8. Un funtore contravariante $F \colon R\text{-Mod} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$ si dice esatto a destra se per ogni successione esatta del tipo

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

allora la successione seguente è esatta:

$$F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M_1) \to 0$$

. Se invece è esatta la successione $0 \to F(M_2) \xrightarrow{F(g)} F(M) \xrightarrow{F(f)} F(M_1)$ allora F viene detto esatto a sinistra.
Un funtore esatto sia a sinistra che a destra viene detto esatto.

Esempio 4.1.2. Il funtore $\mathrm{Hom}_R(X, \_)$ è covariante esatto a sinistra e $\mathrm{Hom}_R(\_, X)$ è contravariante esatto a sinistra, per ogni R-modulo X.

Teorema 4.3. *I funtori covarianti $L \otimes_R \_$ e $\_ \otimes_R M$ sono esatti a destra.*

Dimostrazione. Dimostriamo che $L \otimes_R \_$ è esatto a destra; simmetricamente si ottiene la dimostrazione per $\_ \otimes_R M$.
Si consideri la seguente successione esatta in Mod-R:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

Si deve dimostrare che la successione di Mod-$\mathbb{Z}$

$$L \otimes_R M_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_L \otimes f} L \otimes_R M \xrightarrow{\mathrm{id}_L \otimes g} L \otimes_R M_2 \to 0$$

è esatta.
$\mathrm{id}_L \otimes g$ è suriettiva: Basta provare che $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes g) = \langle (\mathrm{id}_L \otimes g)(x \otimes y) \mid x \otimes y \in L \otimes_R M \rangle$ contenga i generatori di $L \otimes_R M_2$. Sia $x \otimes y_2 \in L \otimes_R M_2$; visto che g è suriettiva esiste un $y \in M$ tale che $g(y) = y_2$, quindi $(\mathrm{id}_L \otimes g)(x \otimes y) = x \otimes g(y) = x \otimes y_2$.
$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) \leq \ker(\mathrm{id}_L \otimes g)$: Sia $x \otimes y_1 \in L \otimes_R M_1$, allora $(\mathrm{id}_L \otimes g) \circ (\mathrm{id}_L \otimes f)(x \otimes y_1) = (\mathrm{id}_L \otimes (g \circ f))(x \otimes y_1) = x \otimes (g(f(y_1))) = x \otimes 0 = 0$, da $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$.
$\ker(\mathrm{id}_L \otimes f) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes g)$: Utilizziamo la proprietà fondamentale del conucleo rispetto a $\mathrm{id}_L \otimes g$, sfruttando che $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) \leq \ker(\mathrm{id}_L \otimes g)$. Allora è ben definito il morfismo di gruppi abeliani

$$\varphi \colon (L \otimes_R M)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) \to L \otimes_R M_2, x \otimes y + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) \mapsto (\mathrm{id}_L \otimes g)(x \otimes y)$$

(chiaramente se S è un sistema di generatori per M, $\{s + H \mid s \in S\}$ è un sistema di generatori per M/H, usando la proiezione canonica), tale che il diagramma seguente risulta commutativo, con ρ proiezione canonica.

$$\begin{tikzcd}
& L \otimes_R M \arrow[dl, "\rho"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_L \otimes g"] & \\
\frac{L \otimes_R M}{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f)} \arrow[rr, "\varphi"'] & & L \otimes_R M_2
\end{tikzcd}$$

Dimostriamo che $\eta \colon L \times M_2 \to (L \otimes_R M)/(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes \alpha))$, definita da $\eta(x, y_2) = \rho(x \times y)$, con y tale che $g(y) = y_2$, è ben definita e lineare: fissiamo $y_2 \in M_2$; siano $y, y' \in M$ tali che $g(y) = g(y') = y_2$, allora $y - y' \in \ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ per esattezza, quindi esiste $k_1 \in M_1$ tale che $f(k_1) = y - y'$.
$\rho(x \otimes y) = x \otimes y - x \otimes y' = x \otimes (y - y') = \mathrm{id}_L \otimes f(x \otimes k_1) \implies (x \otimes y) + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) = (x \otimes y') + \mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f) = \rho(x \otimes y')$, quindi η è ben definita. Per linearità di ρ, η è bilineare. Esiste quindi un unico morfismo di gruppi

$$\bar{\eta} \colon L \otimes_R M_2 \to (L \otimes_R M)/\mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f), x \otimes y_2 \to \rho(x \otimes y)$$

Si dimostra facilmente che $\bar{\eta}$ è l'inverso di φ, quindi φ è un isomorfismo di gruppi.
Allora $\ker(\mathrm{id}_L \otimes g) = \ker(\varphi \circ \rho) = \ker(\rho) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_L \otimes f)$. □

4.2 Applicazioni R-bilineari e il modulo tensore

Proposizione 4.2.1. *Siano A, B, R anelli unitari.*

1. *Se L è un A-R-bimodulo e $M \in$ R-Mod, allora $L \otimes_R M \in$ A-Mod con l'operazione definita sui generatori ponendo:*

$$a(x \otimes y) = (ax) \otimes y$$

   con $a \in A$, $x \in L$, $y \in M$. In questo caso il funtore $L \otimes_R \_$ si può considerare $L \otimes_R \_ \colon$ R-Mod $\to$ A-Mod.

2. *Se M è un R-B-bimodulo e $L \in$ Mod-R, allora $L \otimes_R M \in$ Mod-B con l'operazione definita sui generatori ponendo:*

$$(x \otimes y)b = x \otimes (yb)$$

   con $b \in B$, $x \in L$, $y \in M$. In questo caso il funtore $\_ \otimes_R M$ si può considerare $\_ \otimes_R M \colon$ Mod-R $\to$ Mod-B.

3. *Se L è un A-R-bimodulo e M è un R-B-bimodulo, allora $L \otimes_R M$ è un A-B-bimodulo con le operazioni definite precedentemente.*

Osservazione 4.2.1. Nelle ipotesi del punto 1 della Proposizione precedente, la moltiplicazione scalare in $L \otimes_R M$ è definita sugli elementi come $a(\sum_{L\times M} n_{x,y}(x \otimes y)) = \sum_{L\times M} n_{x,y}((ax) \otimes y)$, dove $n_{x,y} = 0$ $\forall\forall(x, y) \in L \times M$.
In particolare se $g \colon M \to M'$ è morfismo di R-moduli sinistri, allora $\mathrm{id}_L \otimes g$ è un morfismo di A-moduli, infatti $(\mathrm{id}_L \otimes g)(ax \otimes y) = (ax, g(y)) = a(x \otimes g(y)) = a((\mathrm{id}_L \otimes g)(x \otimes y))$.

Proposizione 4.2.2. *Siano A, R anelli unitari e ${}_AP_R$ un bimodulo.*

1. *Per ogni $L \in$ A-Mod, $\mathrm{Hom}_A(L, P) \in$ Mod-R con l'operazione definita ponendo:*

$$(x)(fr) = (xf)r$$

   per ogni $x \in L, r \in R$ e $\mathrm{Hom}_R(P, L) \in$ R-Mod con:

$$(x)(rf) = (xr)f$$

2. *Per ogni $M \in$ Mod-R $\mathrm{Hom}_R(M, P) \in$ A-Mod, con l'operazione definita ponendo:*

$$(af)(x) = af(x)$$

   per ogni $x \in L, a \in A$ e $\mathrm{Hom}_R(P, M) \in$ Mod-A con:

$$(fa)(x) = f(ax)$$

Definizione 4.9. Siano $L \in$ Mod-A, P un A-R-bimodulo e $M \in$ Mod-R. Una applicazione $f\colon L \times P \to M$ viene detta R-bilineare se soddisfa le seguenti condizioni $\forall l, l' \in L$, $\forall p, p' \in P$, $a \in A$, $r \in R$:

1. $f(l + l', p) = f(l, p) + f(l', p)$;
2. $f(l, p + p') = f(l, p) + f(l, p')$;
3. $f(la, p) = f(l, ap)$;
4. $f(l, pr) = f(l, p)r$.

L'insieme di tali applicazioni verrà indicato con $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$.
Le applicazioni R-bilineari $\mathrm{Bil}_{A-R}(L' \times P', M)$, con L' un R-A-bimodulo, $P' \in A$-Mod e $M' \in R$-Mod, soddisfano le prime tre proprietà e la seguente:

- $f(rl, p) = rf(l, p)$

Si analizzerà principalmente il primo caso della definizione, ricavando le osservazioni riguardanti il secondo caso per simmetria.

Osservazione 4.2.2.

- $(\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M), +, 0)$ è un gruppo abeliano, dove $(f+g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ per ogni f, g applicazioni bilineari, e 0 è la mappa identicamente nulla.
- Considerando M come un gruppo abeliano, si ha che $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M) \leq \mathrm{Bil}_A(L \times P, M)$, infatti tutte le applicazioni R-bilineari sono bilineari.
- Sia $f \in \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$ e $\varphi\colon M \to M'$ un morfismo di R-moduli destri, allora $\varphi \circ f \in \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M')$ per linearità di φ.
- Per i punti precedenti si definisce il funtore covariante $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_)\colon$ Mod-$R \to$ Mod-$\mathbb{Z}$ che manda ogni R-modulo destro M in $\mathrm{Bil}\, A - R(L \times P, M)$ e ogni morfismo R-lineare $\varphi\colon M \to M'$ nel morfismo $\mathrm{Bil}\, A - R(L \times P, M) \to \mathrm{Bil}\, A - R(L \times P, M'), f \mapsto \varphi \circ f$.
- Come nella sezione precedente, ma sostituendo gli A-moduli destri ai gruppi abeliani, si ottiene il funtore contravariante $\mathrm{Bil}_{A-R}(\_ \times P, M)\colon$ Mod-$A \to$ Mod-$\mathbb{Z}$.

Teorema 4.4. *Esiste una rappresentazione di* $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'R-modulo libero destro generato da $L \times P$, $R^{(L \times P)}$, indicato con $F_R(L \times P)$. Consideriamo gli insiemi $P_1 = \{(x + x', y) - (x, y) - (x', y) \mid \forall x, x' \in L,\ \forall y \in P\}$, $P_2 = \{(x, y + y') - (x, y) - (x, y') \mid x \in L,\ y, y' \in P\}$, $P_3 = \{(xa, y) - (x, ay) \mid x \in L,\ y \in P,\ a \in A\}$ e $P_4 = \{(x, yr) - (x, y)r \mid x \in L,\ y \in P,\ r \in R\}$. Siano $H = \langle P_1, P_2, P_3, P_4 \rangle$, $T = F_R(L \times P)/H$ e $\tau = \pi \circ i = L \times P \to T$, ove i è l'inclusione canonica di $L \times P$ in $F_R(L \times P)$ e π la proiezione canonica di $F_R(L \times P)$ su T. Per dimostrare che (T, τ) è una rappresentazione di $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_)$ si procede come nella dimostrazione del Teorema 4.1, notando che, per ogni M R-modulo destro e per ogni

applicazione f in $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$, esiste un morfismo di R-moduli destri $\alpha\colon T \to M$ tale che $f = \tau \circ \alpha$.
Otteniamo quindi $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_) \cong \mathrm{Hom}_R(T, \_)$, con isomorfismo naturale in M

$$\eta_M\colon \mathrm{Hom}_R(T, M) \to \mathrm{Bil}_R(L \times P, M), \alpha \mapsto \alpha \circ \tau$$

$\square$

Definizione 4.10. Siano $(L_A, {}_A P_R)$. Un prodotto tensoriale di L_A per ${}_A P_R$ è una rappresentazione di $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_)$.

Procedendo in modo identico rispetto alla sezione precedente, si dimostra l'unicità del prodotto tensoriale di L_A per ${}_A P_R$ e si definisce la corrispondente proprietà universale.
Si può notare però come al momento esistano due prodotti tensoriali di L per P: quello descritto nella Definizione 4.4 e quello determinato dalla Definizione 4.10.

Teorema 4.5. *La rappresentazione di* $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_)$ *corrisponde alla rappresentazione di* $\mathrm{Bil}_A(L \times P, \_)$ *con la moltiplicazione scalare definita nella Proposizione 4.2.1.*

Dimostrazione. Sappiamo che T, il gruppo abeliano che rappresenta $\mathrm{Bil}_A(L \times P, \_)$, è un R-modulo destro per la Proposizione 4.2.1 e $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, \_) \leq \mathrm{Bil}(L \times P, \_)$.
Sia $f \in \mathrm{Bil}_R(L \times P, \_)$ e $\bar{f}$ il morfismo di gruppi corrispondente a f per la proprietà universale del prodotto tensoriale.

$$\bar{f}\colon T \to M, x \otimes y \in f(x, y)$$

Allora $\bar{f}((x \otimes y)r) = \bar{f}(x \otimes yr) = f(x, yr) = f(x, y)r = \bar{f}(x \otimes y)r$.
Si deriva quindi la tesi. $\square$

Tirando le conclusioni, vale:

Proposizione 4.2.3. *Per ogni A-R-bimodulo P,* $\mathrm{Hom}_R(\_ \otimes_A P, \_) \cong \mathrm{Bil}_{A,R}(\_ \times P, \_)$ *con isomorfismo naturale in L, M*

$$\psi_{L,M}\colon \mathrm{Hom}_R(L \otimes_A P, M) \to \mathrm{Bil}_{A,R}(L \times P, M)$$

dato da:

$$\psi_{L,M}(\alpha)(x, y) = \alpha(x \otimes y)$$

4.2.1 Teoremi fondamentali sui prodotti tensoriali di moduli

Proposizione 4.2.4. *Per ogni* $M \in \text{R-Mod}$ *esiste un isomorfismo naturale di R-moduli sinistri:*

$$R \otimes_R M \cong M$$

Dimostrazione. Bisogna trovare una trasformazione naturale $(\phi_L \colon R \otimes_R L \to L)_{L \in Ob(R\text{-Mod})}$, con ϕ_L isomorfismo di moduli sinistri. Se esiste tale trasformazione, fissando M e N, per ogni $f \colon M \to N$ il diagramma di seguito deve commutare:

$$\begin{tikzcd} R \otimes_R M \arrow[r, "\phi_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_R \otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ R \otimes_R N \arrow[r, "\phi_N"'] & N \end{tikzcd}$$

Sia $\varphi_M \colon R \times M \to M, (r,x) \in rx$; $\varphi_M \in \mathrm{Bil}_R(R \times M, M)$, infatti φ_M non è altro che moltiplicazione scalare in M. Per la proprietà universale del prodotto tensoriale esiste un unico morfismo di R-moduli che estende φ_M:

$$\phi_M \colon R \otimes_R M \to M, r \otimes x \mapsto rx$$

Il diagramma con tale ϕ è commutativo: $\phi_N \circ (\mathrm{id}_R \otimes f)(r \otimes x) = \phi_N(r \otimes f(x)) = rf(x) = f(rx)$ per linearità di f e $f \circ \phi_M(r \otimes x) = f(rx)$.
Dimostriamo ora che tale trasformazione naturale è un isomorfismo.

$$\psi_M \colon M \to R \otimes_R M, x \mapsto 1 \otimes x$$

è chiaramente R-lineare ed è l'inverso di ϕ_M; infatti $\phi_M \circ \psi_M(x) = \phi_M(1 \otimes x) = 1x = x$ e $\psi_M \circ \phi_M(r \otimes x) = \psi_M(rx) = 1 \otimes rx = r \otimes x$. Otteniamo quindi che ϕ è un isomorfismo naturale. □

Proposizione 4.2.5. *Siano* $L \in$ Mod-R *e* $M \in$ R-Mod. *Fissato* $y \in M$, $\alpha_y \colon L \to L \otimes_R M, x \mapsto x \otimes y$ *è un morfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Gli α_y sono morfismo di gruppi, infatti $\alpha_y(x + x') = (x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y = \alpha_y(x) + \alpha_y(x')$ e $\alpha_0 = 0$. □

Associatività del prodotto tensoriale 9. Si consideri la situazione $(L_{A}, {}_A P_R, {}_R M)$. Allora si ha il morfismo naturale:

$$(L \otimes_A P) \otimes_R M \cong L \otimes_A (P \otimes_R M)$$

Dimostrazione. I morfismi di gruppo $\alpha_z \colon P \to P \otimes_R M$ sono A-lineari.
Si consideri l'applicazione bilineare

$$\phi \colon (L \otimes_A P) \times M \to L \otimes_A (P \otimes_R M)$$

$$((x \otimes y), z) \mapsto (\mathrm{id}_L \otimes \alpha_z)(x \otimes y) = x \otimes (y \otimes z)$$

Allora, usando la proprietà fondamentale del prodotto tensoriale, si ottiene un morfismo di gruppi, biiettivo per simmetria. □

Osservazione 4.2.3. Sia $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di R-moduli destri, allora $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R \_)\colon R\text{-Mod} \to \text{Mod-}\mathbb{Z}$, definito mandando M in $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M)$ e $f\colon M \to M'$ in $\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f) = \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}\, \epsilon'_\lambda \circ (\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f)$, è un funtore.
Infatti, data $g\colon M' \to M''$, si ha che $\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes (g \circ f)) = \oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes g) \circ \oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f)$, per la commutatività dei seguenti diagrammi, per $\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes (g \circ f) = (\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes g) \circ (\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f)$ e per la proprietà universale della somma diretta.

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M) \arrow[d, "\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f)"'] \arrow[dd, bend right=60, "\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes (g\circ f))"'] & L_\lambda \otimes_R M \arrow[l, "\epsilon_\lambda"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f"] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes (g\circ f)"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M') \arrow[d, "\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes g)"'] & L_\lambda \otimes_R M' \arrow[l, "\epsilon'_\lambda"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes g"] \\
\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M'') & L_\lambda \otimes_R M'' \arrow[l, "\epsilon''_\lambda"']
\end{tikzcd}$$

Sia ora $f'\colon M \to M'$, allora $\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes (f + f')) = \oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f) + (\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f') = (\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f)) + (\oplus_{\lambda\in\Lambda}(\mathrm{id}_{L_\lambda} \otimes f))$ per l'Osservazione 1.4.4.

Distributività rispetto la somma diretta 10. Sia $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di R-moduli destri e sia M un R-modulo sinistro. Allora vi è un isomorfismo naturale di Mod-$\mathbb{Z}$:

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R M \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M)$$

in particolare

$$(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R \_ \cong \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R \_)$$

Dimostrazione. Consideriamo le iniezioni canoniche $\epsilon_\lambda\colon L_\lambda \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$: risultano ben definiti i morfismi di gruppi $\epsilon_\lambda \otimes \mathrm{id}_M\colon L_\lambda \otimes_R M \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R M$.

$$\psi = \mathrm{Cod}_{\lambda\in\Lambda}(\epsilon_\lambda \otimes \mathrm{id}_M)\colon \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M) \to (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R M$$

$$(x_\lambda \otimes y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda) \otimes y_\lambda$$

è un morfismo di gruppi.
Dimostriamo che è biiettivo costruendo l'inverso. Data l'applicazione bilineare $\varphi\colon (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \times M \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M)$ tale che $\varphi((x_\lambda)_\lambda \otimes y) = (x_\lambda \otimes y)_\lambda$, per la proprietà universale del prodotto tensoriale esiste il morfismo di gruppi abeliani

$$\phi\colon (\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R M \to \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M)$$

$$((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes y) \mapsto (x_\lambda \otimes y)_{\lambda\in\Lambda}$$

$(\psi \circ \phi)((x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \otimes y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda) \otimes y = (\sum_{\lambda\in\Lambda} \epsilon_\lambda(x_\lambda)) \otimes y$ perché somma finita, quindi $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda) \otimes_R M}$.
Similmente si calcola $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}(L_\lambda \otimes_R M)}$. $\square$

Corollario 4.6. *Siano R un anello unitario, M un* R*-modulo sinistro e Λ un insieme. Allora esiste un isomorfismo naturale di* R*-moduli sinistri:*

$$R^{(\Lambda)} \otimes_R M \cong M^{(\Lambda)}$$

Sia poi I un ideale di R. Allora

$$R/I \otimes_R M \cong M/(IM)$$

canonicamente.

Dimostrazione. $R^{(\Lambda)} \otimes_R M \cong (R \otimes_R M)^{(\Lambda)} \cong M^{(\Lambda)}$ utilizzando il Teorema 10 e la Proposizione 4.2.4.
Dimostriamo ora la seconda parte: si è già visto in precedenza che I e R/I sono R-moduli destri se I è un ideale destro, sinistri se I è sinistro. Denotando con i l'inclusione canonica di I in R e con ρ la proiezione canonica di R su R/I, si ha la seguente successione esatta in Mod-R:

$$0 \to I \xrightarrow{i} R \xrightarrow{\rho} R/I \to 0$$

Utilizzando l'esattezza a destra del funtore $\_ \otimes_R M$ e I ideale sinistro,otteniamo la successione esatta in R-Mod

$$I \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes \mathrm{id}_M} R \otimes_R M \xrightarrow{\rho \otimes_R \mathrm{id}_M} R/I \otimes_R M \to 0$$

Si consideri ora l'isomorfismo naturale $\phi\colon R \otimes_R M \to M, r \otimes x \mapsto rx$, già utilizzato nella dimostrazione della Proposizione 4.2.4, e $\phi \circ (i \otimes \mathrm{id}_M)\colon I \otimes_R M \to M, i \otimes x \mapsto ix$. Allora $\mathrm{Im}(\phi \circ (i \otimes \mathrm{id}_M)) = \phi(\mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{id}_M)) = IM$ e

$$R/I \otimes_R M \cong \frac{R \otimes_R M}{\mathrm{Im}(i \otimes \mathrm{id}_M)} \cong \frac{M}{IM}$$

per l'esattezza della successione in R-Mod precedente. □

4.3 Aggiunzione tra i funtori Tensore e Hom

Lemma 4.7. *Per ogni A-R-bimodulo P, si ha* $\mathrm{Bil}_{A-R}(\_ \times P, \_) \cong \mathrm{Hom}_A(\_, \mathrm{Hom}_R(P, \_))$ *con isomorfismo naturale in L, M*

$$\psi_{L,M}\colon\ \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P, M))$$

dato da:

$$\psi_{L,M}(f)(l)(p) = f(l, p)$$

Dimostrazione.
- $\psi_{L,M}$ è un morfismo di gruppi: Siano $f, f' \in \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$, allora, per come è definita la somma in $\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$, $\psi_{L,M}(f + f')(l)(p) = f + f'(l, p) = f(l, p) + f'(l, p) = \psi_{L,M}(f)(l)(p) + \psi_{L,M}(f')(l)(p)$, quindi $\psi_{L,M}(f + f') = \psi_{L,M}(f) + \psi_{L,M}(f')$.

- $\psi_{L,M}$ è iniettiva: Sia $\varphi\colon L \to \mathrm{Hom}_R(P,M)$ il morfismo di A-moduli sinistri che manda ogni elemento di L nella funzione $0 \in \mathrm{Hom}_R(P,M)$. $\psi_{L,M}(f) = \varphi \iff f(l,p) = \psi_{L,M}(f)(l)(p) = \varphi(l)(p) = 0 \iff f = 0$.

- $\psi_{L,M}$ è suriettiva: Data $\epsilon \in \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P,M))$, allora $f\colon L \times P \to M, (l,p) \mapsto \epsilon(l)(p)$ è R-bilineare:

  1. $f(l+l',p) = \epsilon(l+l')(p) = (\epsilon(l)+\epsilon(l'))(p) = \epsilon(l)(p)+\epsilon(l')(p) = f(l,p)+f(l',p)$, per linearità di ϵ e per come è stata definita la somma in $\mathrm{Hom}_R(P,M)$;
  2. $f(l,p+p') = f(l,p) + f(l,p')$, per linearità di $\epsilon(l)$;
  3. $f(la,p) = \epsilon(la)(p) = (\epsilon(l)a)(p) = \epsilon(l)(ap)$, per A-linearità di ϵ e per l'Osservazione 4.2.2;
  4. $f(l,pr) = \epsilon(l)(pr) = ((\epsilon(l))(p))r = f(l,p)r$, per R-linearità di $\epsilon(l)$.

  Troviamo quindi $\psi_{L,M}(f) = \epsilon$.

- Naturalità in L: Tale diagramma deve commutare per ogni $g\colon L \to L'$, morfismo di A-moduli destri:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bil}_{A-R}(L' \times P, M) \arrow[r, "\psi_{L',M}"] \arrow[d, "\mathrm{Bil}_{A-R}(g\times P,M)"'] & \mathrm{Hom}_A(L', \mathrm{Hom}_R(P,M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(g,\mathrm{Hom}_R(P,M))"] \\ \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M) \arrow[r, "\psi_{L,M}"'] & \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P,M)) \end{tikzcd}$$

  Sia $f \in \mathrm{Bil}_R(L' \times P, M)$

$$(\mathrm{Hom}_A(g, \mathrm{Hom}_R(P,M)) \circ \psi_{L',M})(f)(l)(p) = \psi_{L',M})(f)(g(l))(p) = f(g(l),p)$$

$$(\psi_{L,M} \circ \mathrm{Bil}_{A-R}(g \times P, M))(f)(l)(p) = (\mathrm{Bil}_{A-R}(g \times P, M)(f))(l,p) = f(g(l),p)$$

- Naturalità in M: Tale diagramma deve commutare per ogni $g\colon M \to M'$, morfismo di R-moduli destri:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M) \arrow[r, "\psi_{L,M}"] \arrow[d, "\mathrm{Bil}_{A-R}(L\times P,g)"'] & \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P,M)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_A(L,\mathrm{Hom}_R(P,g))"] \\ \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M') \arrow[r, "\psi_{L,M'}"'] & \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P,M')) \end{tikzcd}$$

  Sia $f \in \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$

$$(\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P,g)) \circ \psi_{L,M})(f)(l)(p) = g \circ (\psi_{L,M})(f)(l))(p) = g(f(l,p))$$

$$\psi_{L,M'} \circ \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, g))(f)(l)(p) = ((\mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, g))(f))(l)(p) = g(f(l,p))$$

$\square$

Aggiunzione tra i funtori tensore e Hom 11. Sia P un A-R-bimodulo. Il funtore $\_ \otimes_A P\colon$ Mod-$A \to$ Mod-R è l'aggiunto a sinistra di $\mathrm{Hom}_R(P, \_)\colon$ Mod-$R \to$ Mod-A, con biiezione naturale in L, M:

$$\eta_{L,M}\colon \mathrm{Hom}_R(L \otimes_A P, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P, M))$$

data da:

$$\eta_{L,M}(f)(l)(p) = f(l \otimes p)$$

Tale aggiunzione ha unità:

$$\sigma_L\colon L \to \mathrm{Hom}_R(P, L \otimes_A P)$$

data da:

$$\sigma_L(l)(p) = l \otimes p$$

e counità:

$$\varrho_M\colon \mathrm{Hom}_R(P, M) \otimes_A P \to M$$

tale che: $\varrho_M(f \otimes p) = f(p)$.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 4.2.3 si ottiene l'isomorfismo naturale in L, M $\psi_{L,M}\colon \mathrm{Hom}_R(L\otimes_A P, M) \to \mathrm{Bil}_{A-R}(L \times P, M)$,con

$$\psi_{L,M}(\alpha)(l, p) = \alpha(l \otimes p)$$

Dal Lemma 4.7 si ottiene invece l'isomorfismo naturale in L, M $\phi_{L,M}\colon \mathrm{Bil}_R(L \times P, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P, M))$, con

$$\phi_{L,M}(f)(l)(p) = f(l, p)$$

Componendo i due isomorfismi naturali si trova

$$\eta_{L,M} = \phi_{L,M} \circ \psi_{L,M}\colon \mathrm{Hom}_R(L \otimes_A P, M) \to \mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_R(P, M))$$

isomorfismo naturale; risulta quindi dimostrato che $(\_\otimes_A P, \mathrm{Hom}_R(P, \_), \eta)$ è un' aggiunzione. Esplicitiamo tale funzione: data $f \in \mathrm{Hom}_R(L \otimes_A P, M)$, $\varphi = \psi_{L,M}(f)$ è l'applicazione R-bilineare definita da $\varphi(l, p) = f(l \otimes p)$ e $\phi(\varphi)(l)(p) = \varphi(l, p) = f(l \otimes p)$. Allora $\eta_{L,M}(f)(l)(p) = f(l \otimes p)$. Calcoliamo ora l'unità e la counità di tale aggiunzione.

- Unità $\sigma\colon \mathrm{id}_{\text{Mod-}A} \to \mathrm{Hom}_R(P, \_ \otimes_A P)$: Dalla Proposizione 3.3.1 si deriva che

$$\sigma_L(l)(p) = \eta_{L,L\otimes_A P}(\mathrm{id}_{L\otimes_A P})(l)(p) = (\mathrm{id}_{L\otimes_A P})(l \otimes p) = l \otimes p$$

- Counità $\varrho\colon \mathrm{Hom}_R(P, \_) \otimes_A P \to \mathrm{id}_{\text{Mod-}R}$: Si noti che l'inversa di $\eta_{L,M}$ è definita da $\eta^{-1}_{L,M}(g)(l \otimes p) = g(l)(p)$; procediamo quindi utilizzando la Proposizione 3.3.1.

$$\varrho_M(f \otimes p) = \eta^{-1}_{\mathrm{Hom}_R(P,M),M}(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(P,M)})(f \otimes p) = (\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_R(P,M)}(f))(p) = f(p)$$

□

Osservazione 4.3.1. Il funtore tensore $\_ \otimes_A P$ preserva i limiti diretti in Mod-A, ammettendo $\mathrm{Hom}_R(P, \_)$ come aggiunto a destra.

4.3.1 Moduli Piatti

Definizione 4.11.
- Sia A un anello unitario. Un A-modulo sinistro P si dice piatto se il funtore $\_ \otimes_A P$ è esatto.
- Un A-modulo sinistro è proiettivo se il funtore $\mathrm{Hom}_A(P, \_)$ è esatto.

Esempio 4.3.1. L'anello unitario A è un modulo piatto. Infatti $\mathrm{id}_{\text{Mod-}A} \cong \_ \otimes_A A$ naturalmente.

Definizione 4.12. Un funtore $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ preserva i monomorfismi (risp. epimorfismi) se, dato un monomorfismo (epimorfismo) f in $\mathcal{B}$, $F(f)$ è un monomorfismo (epimorfismo).

Osservazione 4.3.2.
1. Un modulo sinistro P è piatto se e solo se il funtore tensore $\_ \otimes_A P$ preserva i monomorfismi. Infatti, se $\_ \otimes_A P$ preserva i monomorfismi, data una successione esatta corta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$, la successione $0 \to L \otimes_A P \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}_P} M \otimes_A P \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}_P} N \otimes_A P \to 0$ è esatta, per l'esattezza a destra del funtore $\_ \otimes_A P$ e per l'iniettività di $f \otimes \mathrm{id}_P$ (f è iniettivo e $\_ \otimes_A P$ preserva i monomorfismi).
   Viceversa, se $f \colon L \to M$ è un monomorfismo in A-Mod, allora la seguente successione è esatta $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(f) \to 0$. Dalla piattezza di P troviamo che $f \otimes \mathrm{id}_P$ è un monomorfismo.
2. Analogamente un modulo sinistro P è proiettivo se e solo se il funtore $\mathrm{Hom}_A(P, \_)$ preserva gli epimorfismi.

Lemma 4.8. *Sia $(M_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una famiglia di A-moduli sinistri. Allora il modulo $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ è piatto se e solo se ciascun M_λ è piatto.*

Dimostrazione. Sia $f \colon L \to M$ un monomorfismo in Mod-A, allora il seguente diagramma commuta per il Teorema 10:

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_A (\bigoplus_\lambda M_\lambda) \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}_{\bigoplus_\lambda M_\lambda}"] \arrow[d, "\cong"'] & M \otimes_A (\bigoplus_\lambda M_\lambda) \arrow[d, "\cong"] \\
\bigoplus_\lambda (L \otimes_A M_\lambda) \arrow[r, "\oplus(f\otimes \mathrm{id}_{M_\lambda})"'] & \bigoplus_\lambda (M \otimes_A M_\lambda)
\end{tikzcd}$$

Da ciò discende che $f \otimes \mathrm{id}_{\bigoplus_\lambda M_\lambda}$ è iniettivo se e solo se ogni $f \otimes \mathrm{id}_{M_\lambda}$ è iniettivo. Si dimostra quindi la tesi utilizzando il primo punto dell'Osservazione 4.3.2. □

Esempio 4.3.2.
- I moduli proiettivi sono piatti in quanto addendi diretti di moduli liberi. Di solito il viceversa non vale.
- I moduli liberi su A sono piatti, in quanto somme dirette di copie di A, proiettivi.

Teorema 4.9. *Un A-modulo sinistro P è piatto se e solo se $\_ \otimes_A P$ preserva i monomorfismi a dominio finitamente generato.*

Dimostrazione. $\Longrightarrow$: Se P è piatto allora $\_ \otimes_A P$ preserva tutti i monomorfismi, quindi anche quelli a dominio finitamente generato.
$\Longleftarrow$: Sia $f\colon L \to M$ un monomorfismo di A-moduli destri, dimostrando che $f \otimes \mathrm{id}_P$ è iniettivo si deriva la tesi.
Consideriamo il sistema diretto dei sottomoduli finitamente generati di L, $\mathcal{L} = ((L_\lambda)_\lambda, (i_{\lambda,\mu}\colon L_\lambda \to L_\mu)_{\lambda,\mu\in\Lambda})$, già studiato nel Teorema 3.5. Il limite diretto di $\mathcal{L}$ è $(L, (i_\lambda)_\lambda)$, con i_λ inclusione del sottomodulo L_λ in L. Consideriamo i morfismi $f_\lambda = f \circ i_\lambda\colon L_\lambda \to M$, monomorfismi a dominio finitamente generato, allora per ipotesi $f_\lambda \otimes \mathrm{id}_P$ è un monomorfismo.
Sia $\lambda \leq \mu$.

$$\begin{tikzcd}
L_\lambda \arrow[dd, "i_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, "i_\lambda"] \arrow[drr, hook, "f_\lambda"] & & \\
& L \arrow[r, hook, "f"'] & M \\
L_\mu \arrow[ur, "i_\mu"] \arrow[urr, hook, "f_\mu"'] & &
\end{tikzcd}$$

Valendo $f_\lambda = f \circ i_\lambda = f \circ i_\mu \circ i_{\lambda,\mu} = f_\mu \circ i_{\lambda,\mu}$, per la definizione di limite diretto esiste un unico morfismo $\varinjlim f_\lambda$ tale che $\varinjlim f_\lambda \circ i_\lambda = f_\lambda$, ma anche f ha questo comportamento, perciò $f = \varinjlim f_\lambda$.
Il sistema diretto $((L_\lambda \circ_A P)_\lambda, (i_{\lambda,\mu} \otimes \mathrm{id}_P)_{\lambda,\mu})$ ha limite $((L \otimes_A P)_\lambda, (i_\lambda \otimes \mathrm{id}_P)_\lambda)$ per il Teorema 3.6 e $f \otimes \mathrm{id}_P = (\varinjlim f_\lambda) \otimes \mathrm{id}_P = \varinjlim (f_\lambda \otimes \mathrm{id}_P)$. Essendo tutti i morfismi $f_\lambda \otimes \mathrm{id}_P$ iniettivi, $f \otimes \mathrm{id}_P$ è un monomorfismo per l'Osservazione 3.5.1. P è quindi piatto. $\square$

Capitolo 5

Algebre e morfismi puri

5.1 Algebre commutative e unitarie

In questo capitolo si utilizzano sempre anelli unitari e commutativi, con $1 \neq 0$.
Esistono due definizioni di algebra, entrambe molto usate e tra loro equivalenti.

Definizione 5.1. Siano R e A anelli. A è un'algebra su R se esiste una funzione $R \times A \to A$ tale che:

1. A è un R-modulo con la funzione data come moltiplicazione scalare;

2. $r(xy) = x(ry) = (rx)y$, per ogni $r \in R$, $x, y \in A$.

Definizione 5.2. Sia R un anello. Un'algebra su R è una coppia (A, f), con A anello e $f\colon R \to A$ morfismo di anelli.

Osservazione 5.1.1. Essendo R commutativo, la definizione di R-modulo sinistro corrisponde a quella di R-modulo destro, per questo si può parlare tranquillamente di R-moduli.

Proposizione 5.1.1. *Sia R un anello. Se A è un'algebra su R per la prima definizione allora (A, f), con $f\colon R \to A, r \in r1_A$, è un R-algebra per la seconda definizione.
Viceversa, se (A, f) è un R-algebra nel senso della seconda definizione, A con la moltiplicazione scalare definita da $rx = f(r)x$ è una R-algebra nel senso della prima definizione.*

Dimostrazione. Sia A una R-algebra secondo la Definizione 5.1. Bisogna dimostrare che la funzione f, definita come sopra, sia un morfismo di anelli.

1. $f(r + s) = (r + s)1_A = r1_A + s1_A = f(r) + f(s)$;

2. $f(rs) = (rs)1_A = r(s1_A) = rf(s) = r(1_A f(s)) = (r1_A)f(s) = f(r)f(s)$;

3. $f(1_R) = 1_R 1_A = 1_A$.

Viceversa, data (A, f) R-algebra allora:

1. $r(x + y) = f(r)(x + y) = f(r)x + f(r)y = rx + ry$

2. $(r+s)x = f(r+s)x = (f(r)+f(s))x = f(r)x + f(s)x = rx + sx$

3. $r(sx) = f(r)(f(s)x) = (f(r)f(s))x = f(rs)x = (rs)x$

4. $1_R x = f(1_R)x = 1_A x = x$

5. $r(xy) = f(r)xy = (f(r)x)y = (rx)y = xf(r)y = x(f(r)y) = x(ry)$

□

Osservazione 5.1.2. Restrizione degli scalari: Sia (A, f) un R-algebra. Se M gruppo abeliano è un A-modulo con moltiplicazione scalare $\cdot$, allora è un R-modulo con moltiplicazione scalare $rx = f(r) \cdot x$, per ogni $x \in M, r \in R$. Sia ora $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. f rispetta il prodotto appena definito, infatti $g(rx) = g(f(r) \cdot x) = f(r) \cdot g(x) = rg(x)$. Quindi vale:

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \leq \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

Allora il funtore dimenticanza $F\colon$ A-Mod $\to$ R-Mod, che manda ogni A-Modulo e ogni morfismo di A-moduli in se stessi, guardandoli rispettivamente come oggetti e morfismi di R-Mod, è fedele.

Per il resto della sezione si utilizzerà la prima definizione di algebra.

Esempio 5.1.1. 1. Dato R anello unitario e commutativo, R è una R-algebra, usando come prodotto scalare il prodotto definito R.

2. Ogni anello è un'algebra su $\mathbb{Z}$, ponendo nx uguale al multiplo di x secondo n.

3. R-algebra aumentata di M: Sia M un R-modulo qualsiasi. $T = R \times M$ con prodotto

$$T \times T \to T, ((r_1, m_1), (r_2, m_2)) \mapsto (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

è una R-algebra, detta R-algebra aumentata di M. Chiaramente questo insieme è un R-modulo con le operazioni usuali. Dimostriamo l'associatività e la commutatività del prodotto appena definito, usando la definizione di modulo e la commutatività di R.

$$((r_1, m_1)(r_2, m_2))(r_3, m_3) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)(r_3, m_3) =$$
$$= ((r_1 r_2) r_3, r_3(r_2 m_1 + r_1 m_2) + (r_1 r_2) m_3) = (r_1, m_1)(r_2 r_3, r_3 m_2 + r_2 m_3) =$$
$$= (r_1, m_1)((r_2, m_2)(r_3, m_3))$$

e

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1) =$$
$$= (r_2 r_1, r_2 m_1 + r_1 m_2) = (r_2, m_2)(r_1, m_1)$$

Tale prodotto ammette come unità $(1, 0) \in T$.

Definizione 5.3. Siano A e A' due R-algebre. Con rappresentazione di A in A' si intende una applicazione $f\colon A \to A'$ che sia morfismo di anelli e morfismo di R-moduli.

Osservazione 5.1.3. Se si utilizza la seconda definizione di algebra, una rappresentazione si definisce in tale modo:

Date due R-algebre $\alpha_A\colon R \to A$ e $\alpha_B\colon R \to B$, una rappresentazione di α_A in α_B è un omomorfismo di anelli $\theta\colon A \to B$ tale che $\theta \circ \alpha_A = \alpha_B$.

Esempio 5.1.2. Il morfirsmo di anelli $f\colon R \to T, r\colon r1_T$, definito nella Proposizione 5.1.1, è una rappresentazione. Infatti $f(rr') = f(r)f(r') = (r1_T)f(r') = r(1_T f(r')) = rf(r')$

5.2 Morfismi Puri

Ritorniamo a parlare di prodotto tensoriale. Anche per questa sezione si continuerà ad utilizzare anelli commutativi unitari, quindi, dati due R-moduli L e M, il prodotto tensoriale $L \otimes_R M$ è sempre dotato di struttura di R-Mod. In particolare valgono:

- $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$
- $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$
- $(rx) \otimes y = x \otimes (ry) = r(x \otimes y)$

Osservazione 5.2.1. Siano $M,\ L,\ N \in R$-Mod. Essendo R commutativo e il prodotto tensoriale associativo, si possono omettere le parentesi in $L \otimes_R M \otimes_R N$.

Osservazione 5.2.2.
1. Siano S e T due R-algebre. Si può calcolare il modulo prodotto tensoriale $S \otimes_R T$. Tale modulo, dotato del prodotto definito sui generatori, per ogni $x, x' \in S$, $y, y' \in T$, come:

$$(x \otimes y)(x' \otimes y') = (xx') \otimes (yy')$$

   è una R-algebra con unità $1_S \otimes 1_T$.

2. Siano T, T', S, S' algebre su R. Se $\alpha\colon T \to S$ e $\beta\colon T' \to S'$ sono rappresentazioni, allora $\alpha \otimes \beta$ è rappresentazione.

Definizione 5.4. Siano R, S anelli commutativi unitari. Un morfismo di anelli $\alpha\colon R \to S$ viene detto puro se è universalmente iniettivo per ogni R-algebra, cioè per ogni T R-algebra la rappresentazione $\alpha_T = \alpha \otimes \mathrm{id}_T\colon T \to S \otimes_R T, \quad t \mapsto 1_S \otimes t$ è iniettiva.

Definizione 5.5. Sia R anello commutativo unitario e $M \in R$-Mod e S una R-algebra. Si definisce il morfismo di R-moduli $\alpha_M\colon M \to S \otimes_R M, m \mapsto 1_S \otimes m$.

Osservazione 5.2.3.
- Si è dimostrato che α_T sia un morfismo di R-moduli nella Proposizione 4.2.5. Si ha poi, per ogni $t, t' \in T$, $\alpha_T(tt') = 1_S \otimes (tt') = (1_S \otimes t)(1_S \otimes t') = \alpha_T(t)\alpha_T(t')$ e $\alpha_T(1_T) = 1_S \otimes 1_T$.
  α_T è quindi una rappresentazione.
- Non è un caso che α_T venga anche chiamata $\alpha \otimes \mathrm{id}_T$, infatti $T \cong R \otimes_R T$ con isomorfimo naturale di algebre $\phi\colon R \otimes_R T \to T, r \otimes t \mapsto rt$, e $\alpha_T \circ \phi = \alpha \otimes \mathrm{id}_T$, con $\alpha \otimes \mathrm{id}_T\colon R \otimes_R T \to S \otimes_R T, r \otimes t \mapsto \alpha(r)1_S \otimes t$.

- Se un morfimo è puro allora è iniettivo. Infatti $\alpha_R \colon R \to S \otimes_R R$ è iniettivo e $S \otimes_R R \cong S$.

Teorema 5.1. *Sia $\alpha \colon R \to S$ morfismo di anelli. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *α è puro;*
2. *per ogni* R*-modulo M $\alpha_M \colon M \to S \otimes_R M$ è un monomorfismo di* R*-moduli;*
3. *per ogni* R*-modulo M la seguente successione è esatta:*
$$0 \to M \xrightarrow{\alpha_M} S \otimes_R M \xrightarrow{\eta_1 - \eta_2} S \otimes_R S \otimes_R M$$
con $\eta_1 \colon S \otimes_R M \to S \otimes_R S \otimes_R M, s \otimes m \mapsto (1_S \otimes s) \otimes m$ e $\eta_2 \colon S \otimes_R M \to S \otimes_R S \otimes_R M, s \otimes m \mapsto s \otimes 1_S \otimes m$;
4. *Per ogni R-algebra T la seguente successione è esatta:*
$$0 \to T \xrightarrow{\alpha_T} S \otimes_R T \xrightarrow{\eta_1 - \eta_2} S \otimes_R S \otimes_R M$$
5. *il funtore $S \otimes_R \_ \colon$ R-Mod $\to$ S-Mod è fedele.*

Dimostrazione. 1 $\implies$ 2: Sia $T = M \in R$-Mod. Si consideri $R \times M$, l'R-algebra aumentata di M, definita nell'Esempio 5.1.1.
$\alpha \colon R \to S$ è universalmente iniettivo per ogni R-algebra, quindi il morfismo $\alpha_T \colon R \times M \to S \otimes_R (R \times M)$ è iniettivo.
$S \otimes_R (R \times M) \cong (S \otimes_R R) \times (S \otimes_R M)$ per il Teorema 10 e $S \otimes_R R \cong S$ per la Proposizione 4.2.4. Si ottiene allora:
$$S \otimes_R (R \times M) \cong S \times (S \otimes_R M)$$
Quindi il morfismo di R-moduli $\beta \colon T \to S \otimes_R (S \otimes_R M), (r, m) \mapsto (r1_S, 1_S \otimes m) = (r1_S, \alpha_M(m))$ è iniettivo. Da ciò si deduce che α_M è iniettivo; infatti, se esistessero $m, m' \in M$ tali che $\alpha_M(m) = \alpha_M(m')$, allora $\beta(1_R, m) = (1_S, \alpha_M(m)) = (1_S, \alpha_M(m')) = \beta(1_R, m')$, quindi $m = m'$.
2 $\implies$ 3: Bisogna dimostrare che $\gamma_M = \eta_1 - \eta_2$ ha come nucleo α_M. Per prima cosa $\gamma_M \circ \alpha_M(m) = \gamma_M(1_S \otimes m) = \eta_1(1_S \otimes m) - \eta_2(1_S \otimes m) = 1_S \otimes 1_S \otimes m - 1_S \otimes 1_S \otimes m = 0$, per ogni $m \in M$.
Sia poi $\beta \colon K \to S \otimes_R M$, morfismo di R-moduli, tale che $\gamma_M \circ \beta = 0 \iff \eta_1 \circ \beta = \eta_2 \circ \beta$. Mostriamo che esiste un unico morfismo $\gamma \colon K \to M$ tale che $\beta = \alpha_M \circ \gamma$.
Sia $0 \to M \xrightarrow{\alpha_M} S \otimes_R M \xrightarrow{\pi} C \to 0$ una successione esatta, cioè $C = \operatorname{Coker}(\alpha_M)$. Il diagramma
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "\alpha_M"'] & S \otimes_R M \arrow[d, "\mathrm{id}_S \otimes \alpha_M"] \\ S \otimes_R M \arrow[r, "\alpha_{S \otimes_R M}"'] & S \otimes_R S \otimes_R M \end{tikzcd}$$

è commutativo. Infatti $\mathrm{id}_S \otimes \alpha_M = \eta_2$, $\alpha_{S\otimes_R M} = \eta_1$ e $(\eta_1 - \eta_2)\alpha_M = 0 \iff \eta_1 \circ \alpha_M = \eta_2 \circ \alpha_M$.
Da $(\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ (\mathrm{id}_S \otimes \alpha_M) = \mathrm{id}_S \otimes (\pi \circ \alpha_M) = \mathrm{id}_s \otimes 0 = 0$, si ottiene che $(\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ (\mathrm{id}_S \otimes \alpha_M) \circ \alpha_M = (\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ (\alpha_{S\otimes_R M}) \circ \alpha_M = 0$, quindi esiste un unico morfismo di moduli $\chi\colon C \to S \otimes_R C$ tale che $\chi \circ \pi = (\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ (\alpha_{S\otimes_R M})$.
Calcolando sui generatori di $S \otimes_R M$, si nota che $\alpha_C = \chi$, infatti $\alpha_C \circ \pi(s \otimes m) = 1_S \otimes (\pi(s \otimes m)) = (\mathrm{id}_S \otimes \pi)(1_S \otimes s \otimes m) = (\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ (\alpha_{S\otimes_R M})(s \otimes m)$ e per unicità i due morfismi sono uguali.
Da $\alpha_C \circ \pi \circ \beta = (\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ \eta_1 \circ \beta = (\mathrm{id}_S \otimes \pi) \circ \eta_2 \circ \beta = (\mathrm{id}_S \circ (\pi \circ \alpha_M) \circ \beta = 0$, essendo α_C monomorfismo per ipotesi, si ha $\pi \circ \beta = 0$, ma α_M è nucleo di π, quindi esiste un unico morfismo $\gamma\colon K \to M$ tale che $\beta = \alpha_M \circ \gamma$. Allora la successione $0 \to M \xrightarrow{\alpha_M} S \otimes_R M \xrightarrow{\eta_1 - \eta_2} S \otimes_R S \otimes_R M$ è esatta.
Riassumendo, tale dimostrazione può essere visualizzata nel seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, dotted, "\exists!\gamma"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddl, "\beta"] & \\
M \arrow[rr, "\alpha_M"] \arrow[d, "\alpha_M"'] & & S \otimes_R M \arrow[d, "1_S \otimes_R \alpha_M"] \\
S \otimes_R M \arrow[rr, "\alpha_{S\otimes_R M}"] \arrow[d, "\pi"'] & & S \otimes_R S \otimes_R M \arrow[d, "1_S \otimes \pi"] \\
C \arrow[rr, hook, "\alpha_C"] & & S \otimes_R C.
\end{tikzcd}$$

$3 \implies 4$: Tutte le R-algebre sono R-morfismi per definizione e i morfismi della successione sono rappresentazioni.
$4 \implies 1$: La successione $0 \to T \xrightarrow{\alpha_T} S \otimes_R T \xrightarrow{\eta_1 - \eta_2} S \otimes_R S \otimes_R M$ è esatta, quindi α_T è iniettiva per ogni T algebra su R, cioè α è universalmente iniettivo per ogni R-algebra e quindi puro.
$2 \implies 5$: Dimostriamo che $\psi = F \circ S \otimes_R \_\colon$ R-Mod $\to$ R-Mod è fedele, con $F\colon$ S-Mod $\to$ R-Mod il funtore dimenticanza definito nell'Osservazione 5.1.2.
Tale funtore ψ è fedele se e solo se i morfismi di gruppo

$$\phi\colon \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(S \otimes_R M, S \otimes_R M), \varphi \mapsto \mathrm{id}_S \otimes \varphi$$

per ogni $M, N \in R$-Mod, sono iniettivi. Come prima, cosa si noti come $\alpha\colon \mathrm{id}_{R\text{-Mod}} \to \psi$, $M \mapsto \alpha_M$ sia un morfismo funtoriale. Infatti, per ogni $\varphi\colon M \to N$ morfismo di R-moduli, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\alpha_M"] \arrow[d, "\varphi"'] & S \otimes_R M \arrow[d, "\mathrm{id}_S \otimes \varphi"] \\
N \arrow[r, "\alpha_N"'] & S \otimes_R N
\end{tikzcd}$$

$$\alpha_N \circ \varphi(m) = 1_S \otimes (\varphi(m)) = (\mathrm{id}_S \otimes \varphi)(1_S \otimes m) = (\mathrm{id}_S \otimes \varphi) \circ \alpha_M(m)$$

per ogni $m \in M$. Sia ora $\varphi \in \ker(\phi)$, allora $\mathrm{id}_S \otimes \phi = 0$ e $\alpha_N \circ \phi = (\mathrm{id}_S \otimes \varphi) \circ \alpha_M = 0$. Essendo α_N monomorfismo per ipotesi, allora $\varphi = 0$. ϕ è fedele quindi $S \otimes_R \_\colon$ R-Mod $\to$ S-Mod è fedele.

$5 \implies 2$: Supponiamo $S \otimes_R \_ \colon R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ sia fedele e dimostriamo che per ogni $M \in R\text{-Mod}$ $\alpha_M \colon M \to S \otimes_R M, m \mapsto 1_S \otimes m$ è iniettivo.
Sia $\gamma \colon K \to M$ nucleo di α_M. Si consideri il morfismo di gruppi:

$$\phi \colon \operatorname{Hom}_R(K, M) \to \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R K, S \otimes_R M), \varphi \mapsto \mathrm{id}_S \otimes \varphi$$

Visto che il funtore $S \otimes_R \_$ è fedele, tale funzione è iniettiva, quindi $\ker(\phi) = 0$.
Dato che γ è il nucleo di α_M, si ha che $\alpha_M(\gamma(k)) = 1_S \otimes (\gamma(k)) = 0$ e $\mathrm{id}_S \otimes \gamma = 0$; infatti $\mathrm{id}_S \otimes \gamma(\sum_{i=1}^n s_i \otimes k_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{id}_S \otimes \gamma(s_i \otimes k_i) = \sum_{i=1}^n s_i \otimes (\gamma(k_i)) = 0$. Essendo $\ker(\phi) = 0$, si deduce che $\gamma = 0$ e da ciò che α_M è un monomorfismo. $\square$

Osservazione 5.2.4. Se $\alpha \colon R \to S$ è un morfismo puro, il funtore $S \otimes_R \_ \colon R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ è fedele e si può definire una categoria $DD(\alpha)$, detta categoria dei dati di discesa, e i funtori $C_\alpha \colon R\text{-Mod} \to DD(\alpha)$ e $F \colon DD(\alpha) \to S\text{-Mod}$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
R\text{-Mod} \arrow[rr, "_\otimes_R S"] \arrow[dr, "C_\alpha"'] & & S\text{-Mod} \\
& DD(\alpha) \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

risulti commutativo e C_α sia un equivalenza di categorie.

Bibliografia

[1] Yves Andrè, Luisa Fiorot *On the canonical, fpqc, and finite topologies on affine schemes. The state of the art.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) Vol. XXIII (2022), 81-114, 2022.

[2] M.F.Atiyab, I.G.Macdonald *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969

[3] Mario Curzio, *Lezioni di algebra.* Liguori Editore, Napoli, Nuova Edizione, 1967.

[4] Martina Lanini, *Appunti corso di algebra 3, AA 2017-2018.* Note di lettura, versione 2020-12-18, 2020.

[5] Adalberto Orsatti, *Una introduzione alla teoria dei moduli.* Aracne Editrice, Roma, Edizione 2013, A01 36, 1995.

[6] Elliott Mendelson,Queens College of the City University of New York, *Introduction to Mathematical Logic.* Chapman & Hall, 2-6 Boundary Row, London SEl 8HN, UK, Fourth edition, 1997.

[7] Piero Plazzi, *Teorie degli insiemi - Numeri ordinali e cardinali.* Dispensa, Dipartimento di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, Università di Bologna, 2011.

[8] Alessandra Tullini, *Algebra II 2016/2017.* Note del corso di Algebra II, Università di Pisa, 2016/2017.