

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'effetto Hall quantistico

Relatore

Prof. Roberto Volpato

Laureanda

Beatrice Bergamin 1222754

Anno Accademico 2022/2023



# Sommario

A livello classico, l'effetto Hall è un noto fenomeno che si verifica quando una corrente si propaga in una lastra due dimensionale in presenza di un campo magnetico esterno. Questa tesi ha lo scopo di descrivere alcune proprietà dell'effetto Hall a livello quantistico, limitandosi al cosiddetto effetto Hall "intero". Ci si focalizzerà su alcuni aspetti teorici di tale fenomeno, in particolare sul ruolo della topologia nella quantizzazione della conduttività di Hall.



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>L'Effetto Hall Quantistico Intero</b>	<b>3</b>
2.1	Modello fisico e considerazioni dimensionali . . . . .	3
2.2	Descrizione del modello . . . . .	4
2.3	Modello semiclassico di Drude . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Descrizione semi-quantistica del fenomeno</b>	<b>7</b>
3.1	Risoluzione dell'equazione di Schroedinger . . . . .	8
3.1.1	Analisi delle condizioni al contorno . . . . .	9
3.2	Accensione del campo elettrico . . . . .	10
3.3	Stati sul bordo del campione . . . . .	12
3.3.1	Stati riempiti e accensione del campo elettrico . . . . .	14
3.4	Ruolo del disordine . . . . .	15
3.5	Corrente degli stati estesi . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Anello di Corbino</b>	<b>19</b>
4.1	Spectral Flow sul Lowest Landau Level . . . . .	21
4.2	Introduzione del disordine . . . . .	21
4.2.1	Considerazioni di gauge . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Teoria perturbativa: conducibilità e Formula di Kubo</b>	<b>23</b>
5.1	Formula di Kubo per la conducibilità . . . . .	23
5.2	L'invarianza topologica della conducibilità . . . . .	25
5.3	La fase di Berry . . . . .	28
5.4	Calcolo della fase di Berry e della connessione . . . . .	28
5.5	Quantizzazione della conducibilità del campione . . . . .	29



# Capitolo 1

## Introduzione

L'effetto Hall viene definito così dal nome del suo scopritore, il professore Edwin Hall, docente di Fisica all'Università di Harvard dal 1895 al 1921. Dal punto di vista classico, l'effetto Hall fu scoperto nel 1879 e consiste nella creazione di una differenza di potenziale su una lastra bidimensionale a seguito della deviazione della traiettoria dei portatori di carica, sotto l'effetto di un campo magnetico. Quasi cento anni dopo la pubblicazione ufficiale di Hall, fu scoperto un comportamento anomalo dell'andamento della resistività e della conducibilità di un campione di materiale nelle stesse condizioni studiate da Hall, che venne denominato Integer Quantum Hall Effect (IQHE). L'esperimento chiave per la scoperta di questo fenomeno venne condotto nel 1980 da Klaus von Klitzing, assieme a Gerhard Dorda e a Michael Pepper [3].

Gli scienziati rilevarono che i tensori della conducibilità e della resistività di una lastra di materiale bidimensionale, assumevano una forma antidiagonale, proprio come aveva rilevato Hall nel caso classico. Ciò che rivelò un aspetto puramente quantistico, fu il fatto che, misurando con alta accuratezza, la resistività del campione risultava quantizzata in unità di  $\frac{h}{2e^2}$ , con  $h$  la costante di Planck ed  $e$  la carica elettrica. Fu possibile inoltre osservare il cammino libero medio dei portatori di carica che, in presenza di campi magnetici di alta intensità, si creava su lati opposti del campione scorrendo in direzioni opposte.

Grazie a questo esperimento cinque anni dopo, nel 1985, venne consegnato il premio Nobel a von Klitzing.

Lo scopo della presente tesi è descrivere l'IQHE con l'obiettivo di giustificare in che modo avviene la quantizzazione di conducibilità e di resistività del materiale e quale sia il ruolo rivestito dalle impurità del materiale. Come si leggerà nella trattazione, la quantizzazione di tali grandezze fisiche è indipendente dai dettagli fisici del materiale (come dimensione, "pulizia" del materiale ecc...): l'unico fattore determinante sono le simmetrie del campione di materiale usato in quanto esse si riflettono nella topologia del sistema. In particolare sarà la topologia del gruppo di gauge a determinare la quantizzazione della conducibilità.

Nei primi paragrafi si analizza il fenomeno utilizzando una teoria semiclassica, dove gli elettroni vengono trattati come non interagenti. Nel capitolo 2 si dimostra quindi che è incompatibile con i risultati riportati da von Klitzing [3]. Dal terzo capitolo, senza abbandonare l'ipotesi di elettroni non interagenti, si tratta il fenomeno dal punto di vista quantistico mostrando che, definendo opportunamente l'Hamiltoniana in modo che rispetti le simmetrie del sistema, si possono replicare i risultati sperimentali.

La peculiarità del fenomeno sta nel fatto che, poichè la corrente è trasportata soltanto da quegli elettroni che sono in grado di muoversi lungo tutto il campione di materiale, potrebbe sembrare che il calcolo della conducibilità possa alterarsi poichè la presenza di impurità nel materiale rompe la degenerazione del sistema determinando una distinzione tra stati elettronici "localizzati", ovvero vincolati nel corpo del campione, ed "estesi", ovvero in grado di percorrere il campione in tutta la sua

lunghezza. Tuttavia, come si legge nel capitolo 3, la quantizzazione risulta indipendente dal numero di stati che si prende in considerazione per il calcolo della conducibilità.

Da questo fatto prende le mosse il lavoro di Robert Laughlin [5] che ha collegato la conduttività quantizzata, al trasporto di carica quantizzato, dimostrando che questo fenomeno nasce dalla proprietà di invarianza di gauge che gode il sistema. L'obiettivo dei capitoli 4 e 5 è quello di dimostrare che il calcolo della conducibilità dipende soltanto da proprietà topologiche, ovvero proprietà che dipendono da variazioni continue di parametri, in questo caso, di gauge[6].

In particolare nel capitolo 4 viene analizzata la geometria dell'anello di Corbino [7], grazie alla quale si riesce a mostrare facilmente come la scelta della gauge influenza il moto degli elettroni e quindi la creazione di corrente. La gauge infatti deve rispettare le simmetrie del problema e quindi la necessaria continuità degli stati dei portatori di carica.

Infine, nel capitolo 5, viene descritta la relazione tra tali proprietà e i concetti di fase e connessione di Berry. Si riesce ad ottenere una riscrittura delle entrate caratteristiche della conducibilità del materiale misurate sperimentalmente, in modo tale da evidenziare la loro invarianza per cambi di gauge in maniera più formale, giungendo in questo modo alla prova finale che la conducibilità è una proprietà topologica.

La scelta dell'Effetto Hall per questa tesi è stata dettata dal fatto che questo effetto permette di spostarsi all'interno di un impressionante edificio teorico, attraverso le scoperte matematiche e fisiche degli scorsi decenni. Come riportato da D. Tong: *"Because of this kind of striking behaviour, the quantum Hall effect has been a constant source of new ideas, providing hints of where to look for interesting and novel phenomena, most of them related to the ways in which the mathematics of topology impinges on quantum physics. Important examples include the subject of topological insulators, topological order and topological quantum computing. All of them have their genesis in the quantum Hall effect."*[9].



## Capitolo 2

# L'Effetto Hall Quantistico Intero

### 2.1 Modello fisico e considerazioni dimensionali

L'IQHE fu scoperto inizialmente con un MOSFET (“metal-oxide-semiconductor field-effect transistor”) di Silicio, ovvero una struttura a strati di metallo-isolante-semiconduttore nella quale gli elettroni risultano intrappolati nella zona detta di “inversione di banda”, di larghezza  $\approx 30 \cdot 10^{-10}m$  tra l'isolante e il semiconduttore. L'Effetto Hall frazionario fu scoperto tramite una struttura composta di GaAs/AlAs e di conseguenza gli studi successivi furono condotti su mezzi di questo tipo. Più recentemente si sono condotti degli esperimenti sul grafene i cui elettroni possono essere considerati relativistici all'interno di uno strato bidimensionale.

I risultati sperimentali riportati in questo capitolo sono stati ricavati tramite lo studio del fenomeno su un accoppiamento di GaAs/AlAs drogati al Silicio 2.3. Gli elettroni dello strato si dispongono all'interno della buca di potenziale creata dalla banda di conduzione del semiconduttore. Siccome il salto energetico tra le bande può essere dell'ordine dei  $10^3K$ , ponendo il sistema a temperature criogeniche, si può considerare che gli elettroni siano tutti congelati all'interno del primo livello energetico della banda. Tuttavia, poichè il materiale utilizzato è un semiconduttore, gli elettroni nella banda di conduzione sono liberi di muoversi sul piano formato dallo strato di GaAs. In questo modo è possibile considerare la superficie del moto degli elettroni come un piano bidimensionale anche se la buca di potenziale è di fatto tridimensionale.

Calcolando la resistenza  $R$  di un materiale in un ipercubo a  $d$ -dimensioni, di resistività  $\rho$ , si ottiene la seguente relazione

$$R = \rho L^{2-d}. \quad (2.1)$$

Ponendo  $d=2$  risulta evidente il vantaggio di utilizzare un sistema bidimensionale: sia la resistenza, sia di conseguenza la resistività, sono invarianti rispetto alla grandezza del materiale considerato. Dal punto di vista sperimentale risulta non necessario effettuare misure precise della dimensione della buca di potenziale creata dal sistema. Oltretutto, questo permette di non considerare la precisa posizione degli elettrodi del potenziale di Hall.

Il piano del moto degli elettroni del MOSFET utilizzato, può essere modellizzato come un reticolo in un volume bidimensionale di lunghezza  $L_x$  e  $L_y$  contenente elettroni liberi di muoversi. Nella figura successiva 2.1 si è riportato lo schema del modello.

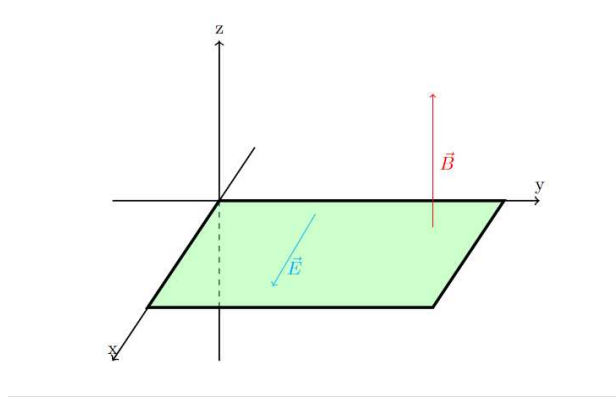


Figura 2.1: Schema del piano di moto degli elettroni. In figura sono stati inseriti anche i campi elettromagnetici considerati nei prossimi paragrafi.

## 2.2 Descrizione del modello

A partire dalle condizioni descritte nel paragrafo precedente, è possibile introdurre i campi caratteristici dell'IQHE: un campo magnetico  $\vec{B}$  parallelo all'asse  $z$   $\vec{B} = B\hat{u}_z$ , che attraversa perpendicolarmente il piano di reticolo parallelo al piano  $xy$ , e un campo elettrico  $\vec{E}$  in termini di differenza di potenziale perpendicolare al campo magnetico, scelto lungo l'asse  $x$   $\vec{E} = E\hat{u}_x$ .

Se non ci fosse il campo magnetico, questa differenza di potenziale genererebbe una corrente soltanto lungo  $x$ . Tuttavia, la presenza del campo magnetico devia le traiettorie degli elettroni, infatti la forza di Lorentz sul singolo elettrone risulta essere

$$\vec{F}_L = e\vec{v} \times \vec{B} = -qvB\hat{u}_y = JB\hat{u}_y. \quad (2.2)$$

Le cariche soggette a questa forza si accumulano attorno ai bordi del campione; la separazione tra le cariche produce un campo elettrico interno e quindi una forza elettromotrice che, all'equilibrio, risulta opposta alla forza di Lorentz riportata in equazione 2.2.

Il campo elettrico sul campione considerato risulta quindi essere

$$\vec{E} = (E_x, E_y) = \left(E_x, \frac{F_{e,y}}{e}\right), \quad (2.3)$$

la cui componente lungo  $y$  genera una differenza di potenziale detta voltaggio di Hall ( $V_H$ ).

In un sistema bidimensionale la relazione tra la densità di corrente  $\vec{J}$  e il campo elettrico  $\vec{E}$  diventa

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{E} = \rho\vec{J}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}, \quad \rho = \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

dove si è indicato con  $\sigma$  il tensore di conducibilità e con  $\rho$  il suo inverso, ossia la resistività. In assenza di campo magnetico i tensori riportati in 2.4, presentano generalmente solo i termini diagonali.

Come si vedrà nei prossimi paragrafi sono i termini fuori diagonale a caratterizzare il fenomeno dell'IQHE.

Sperimentalmente è possibile misurare la resistenza  $R$  che in generale differisce dalla resistività soltanto per fattori geometrici, tuttavia come già riportato in equazione 2.1 per i termini non diagonali del tensore resistività in equazione 2.4 valgono le seguenti relazioni

$$R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{LE_y}{LJ_x} = \frac{E_y}{J_x} = -\rho_{xy}. \quad (2.5)$$

Le entrate diagonali della resistività corrispondono, in modulo, al valore della rispettiva resistenza, mantenendo la relazione sperimentale classica

$$R_{ii} = \rho_{ii}L_i,$$

dove  $i = 1, 2$  è l'indice delle coordinate  $x, y$ .

Si può notare inoltre che, quando la resistività del materiale è nulla, i portatori di carica sono, in generale, capaci di spostarsi liberamente: si associa quindi al materiale il termine di conduttore perfetto. Tuttavia, sfruttando le proprietà tensoriali della resistività e della conduttività, si può dimostrare che valgono le seguenti relazioni

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho_{xx}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{-\rho_{xy}}{\rho_{xx}^2 + \rho_{xy}^2}. \quad (2.6)$$

Quando  $\rho_{xx}$  si annulla, anche  $\sigma_{xx}$  si annulla e ciò comporta che sia possibile associare al materiale sia comportamento conduttivo, che comportamento isolante. Questo fenomeno sembra quindi portare ad un controsenso, che in realtà si risolve facilmente ricordando che  $\vec{E} \cdot \vec{J}$  è interpretabile come il lavoro svolto per accelerare le cariche: quando tale prodotto si annulla, significa che si è creata una corrente stabile, che scorre senza dissipazione di energia. Di conseguenza, quando  $\sigma_{xx} = 0$ , nessuna corrente sta scorrendo lungo l'asse longitudinale e il materiale si sta comportando come un isolante. Contestualmente il fatto che  $\rho_{xx}$  si annulli, si spiega considerando il fatto che è un parametro che rivela l'assenza di dissipazione di energia, quindi il materiale si comporta come un conduttore nel senso che il moto dei portatori di carica si svolge senza dissipazione.

## 2.3 Modello semiclassico di Drude

Per descrivere il fenomeno IQHE, è possibile utilizzare il modello di Drude il quale assume che il comportamento microscopico degli elettroni possa essere trattato classicamente, ovvero come un gas di elettroni liberi ed indipendenti che si muovono su uno sfondo di cariche positive. Gli elettroni sono sottoposti ad una forza dissipativa: si deve quindi introdurre un termine di frizione lineare che cattura gli effetti di scattering degli elettroni con altri elettroni, con impurità o con atomi del reticolo. Detto  $\tau$  il tempo medio tra due collisioni successive, altrimenti detto tempo di rilassamento, il termine di frizione lineare risulta essere:

$$\xi = -\frac{m\vec{v}}{\tau}. \quad (2.7)$$

Gli elettroni, di conseguenza, si muovono secondo la legge

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \frac{m\vec{v}}{\tau}. \quad (2.8)$$

Sostituendo  $\vec{v}$  in funzione di  $\vec{J}$  dalla relazione  $\vec{J} = -ne\vec{v}$  (si veda l'uguaglianza evidenziata con (\*) in equazione 2.9), dove  $n$  è la densità di elettroni. In condizioni di equilibrio e di corrente stazionaria, ovvero  $\frac{dv}{dt} = 0$ , risulta che[9]:

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{-e\tau} & -B \\ B & \frac{m}{-e\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{=} \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & \frac{B}{ne} \\ \frac{-B}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

allora si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau e B / m \\ -\tau e B / m & 1 \end{pmatrix} \vec{J} = \frac{e^2 n \tau}{m} \vec{E}, \quad (2.10)$$

e ponendo  $\sigma_0 = ne^2 \frac{\tau}{m}$ , e utilizzando la relazione tra conducibilità  $\sigma$  e resistività  $\rho$  riportata in equazione 2.4, si trovano le seguenti relazioni

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

in cui si è utilizzata la definizione di frequenza di ciclotrone  $\omega_c = eB/m$ . Di conseguenza si trovano le seguenti espressioni per le entrate del tensore resistività:

$$\rho_{xx} = \frac{m}{ne^2\tau}, \quad \rho_{xy} = \frac{B}{ne}. \quad (2.12)$$

Si può notare che secondo il modello di Drude, il termine diagonale  $\rho_{xx}$  ha un andamento costante al variare del campo magnetico, mentre il termine fuori diagonale varia linearmente come si vede in figura 2.2.

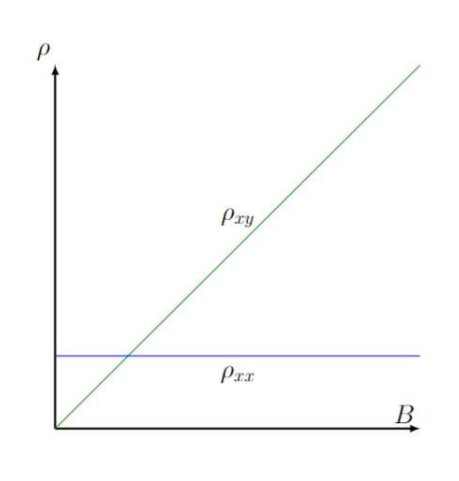


Figura 2.2: Comportamento atteso dal modello di Drude della resistività al variare del campo magnetico.

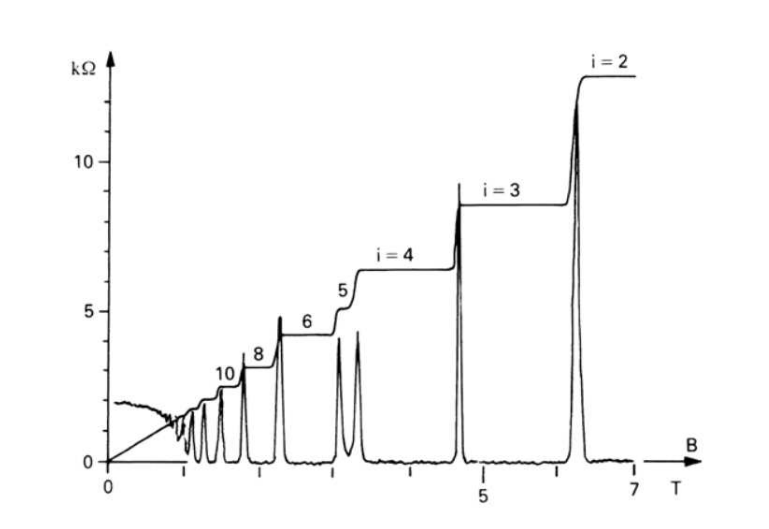


Figura 2.3: Andamento sperimentale della resistività al variare del campo magnetico.  $\rho_{xy}$  presenta andamento a plateau mentre  $\rho_{xx}$  si annulla a meno di picchi quando il termine fuori diagonale passa da un plateau al successivo. Figura tratta da:[9].

Tuttavia l'andamento riportato in figura 2.2, non coincide con i risultati sperimentali: in figura 2.3 sono riportati i dati rilevati durante l'esperimento di von Klitzing [9] relativi all'andamento dei termini diagonali e fuori diagonale della resistività. Si nota un andamento peculiare, in quanto il contributo diagonale alla resistività presenta un andamento a gradini quantizzati per salti interi: quando  $\rho_{xy}$  è stabile in uno dei plateau,  $\rho_{xx}$  è identicamente nulla, mentre  $\rho_{xx}$  presenta picchi quando  $\rho_{xy}$  salta da un plateau all'altro.

Questo comportamento non è atteso rispetto alle formule ricavate dal modello di Drude.

In ogni plateau il valore della resistività è:

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad \nu \in \mathbf{Z}. \quad (2.13)$$

## Capitolo 3

# Descrizione semi-quantistica del fenomeno

Nel capitolo precedente si è visto come l'interpretazione classica non sia sufficiente a spiegare l'andamento della resistività del materiale. In questo capitolo verrà introdotta una teoria semi-quantistica.

Si definiscano la lunghezza magnetica e il quanto di flusso magnetico, tramite i quali è possibile riscrivere il modulo del campo magnetico, come segue

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}, \quad \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e} \implies B = \frac{\Phi_0}{2\pi l^2}. \quad (3.1)$$

tali per cui, per un area  $A = 2\pi l^2$ , passa un quanto di flusso  $\Phi_0$ . Si consideri il caso semplificato in cui è presente soltanto il campo magnetico lungo l'asse  $z$ : è possibile quindi introdurre il campo magnetico tramite il potenziale vettore definito nella gauge di Landau

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ xB \\ 0 \end{pmatrix} = xB\hat{u}_y. \quad (3.2)$$

L'Hamiltoniana del sistema in tale gauge risulta essere:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} (\vec{P} + e\vec{A})^2 = \frac{P_x^2 + P_y^2}{2m} + \frac{e^2 B^2 x^2}{2m} + \frac{2P_y e B x}{2m} = \\ &= \frac{1}{2m} \left( P_x^2 + \underbrace{(P_y + e B x)^2}_{\pi_y} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sono evidenti le simmetrie di traslazione lungo l'asse  $y$  in quanto:

$$\begin{aligned} [P_x, x] &= i\hbar \neq 0 \implies [H, P_x] \neq 0, \\ [P_i, P_j] &= [\pi_y, X] = [H, P_y] = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Di conseguenza è possibile definire una base di autovettori comuni per  $H$  e  $P_y$ , i quali, per il teorema di Bloch, possono essere considerati, lungo l'asse  $y$ , come delle onde piane, ottenendo quindi che le autofunzioni dell'Hamiltoniana del problema, presentano l'andamento evidenziato dalla seguente espressione:

$$\psi_k(x, y) = e^{iky} f_k(x). \quad (3.5)$$

### 3.1 Risoluzione dell'equazione di Schroedinger

A partire dalla considerazione riportata in equazione 3.5, si riesce a risolvere agevolmente l'equazione agli autovalori per l'Hamiltoniana 3.3

$$\begin{aligned}
 E|\psi\rangle &= H|\psi\rangle = \\
 &= \frac{1}{2m} [P_x^2 + P_y^2 + e^2 B^2 x^2 + 2eB P_y x] |\psi\rangle = \\
 &= \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hbar^2 k^2 + e^2 B^2 x^2 + 2eB \hbar k \right] f_k(x) e^{iky} = \\
 \implies E f_k(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_k(x) + \frac{1}{2m} (\hbar^2 k^2 + e^2 B^2 x^2 + 2eB \hbar k x) f_k(x) = \\
 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_k(x) + \frac{e^2}{2m} B^2 \left[ x^2 + \frac{2k\hbar}{eB} x + \frac{\hbar^2 k^2}{e^2 B^2} \right] f_k(x).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale in  $f_k(x)$ .

Ridefinendo la lunghezza magnetica tramite la frequenza di ciclotrone  $\omega_c$ , si trova che l'Hamiltoniana dipende da un parametro caratteristico  $x_0$  come riportato nella seguente equazione

$$l^2 = \frac{\hbar}{eB} = \frac{\hbar}{m\omega_c}, \quad x_0 = -kl^2 = -\frac{\hbar k}{eB}, \quad \omega_c = \frac{eB}{m}. \tag{3.7}$$

L'equazione agli autovalori diventa:

$$\begin{aligned}
 E f_k(x) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_k(x) + \frac{(eB)^2}{2m} (x - x_0)^2 f_k(x) = \\
 &= \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_k(x)}_{(a)} + \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_c^2 (x - x_0)^2 f_k(x)}_{(b)},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

in cui il termine (a) è il termine cinetico, mentre il termine (b) è legato al termine di oscillatore armonico centrato in  $x = x_0$  di costante elastica  $k = m\omega_c^2$ . Infatti, completando il quadrato, l'Hamiltoniana del sistema corrisponde a quella di un oscillatore armonico traslato

$$h_k = \frac{1}{2m} (P_x^2 + m^2 \omega_c (x + l^2 k)^2), \quad E_{kn} = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}). \tag{3.9}$$

Si può notare quindi che, nell'Hamiltoniana, il momento lungo l'asse  $y$  ( $\hbar k$ ) diventa un termine di posizione di oscillatore armonico lungo la direzione  $x$ . Il campo magnetico agisce nella spaziatura tra autovalori successivi: i livelli risultano equispaziati con salti proporzionali a  $B$ .

Allora le autofunzioni dell'Hamiltoniana, intesa come oscillatore armonico, diventano:

$$\psi_{nk} = A e^{iky} H_n(x - x_0) e^{-\frac{1}{2l^2}(x + kl^2)^2}, \tag{3.10}$$

dove  $H_n$  sono i polinomi di Hermite opportunamente traslati. Le funzioni d'onda risultano quindi dipendenti da due numeri quantici:  $n \in \mathbb{N}$  e  $k \in \mathbb{R}$  [1]. Si noti, tuttavia, come gli autovalori non dipendano esplicitamente dal parametro  $k$ . Lo spettro del sistema si presenta infatti come riportato in figura 3.1.

In questo modo si creano i livelli di Landau, che sembrano in accordo con la quantizzazione della resistività del materiale.

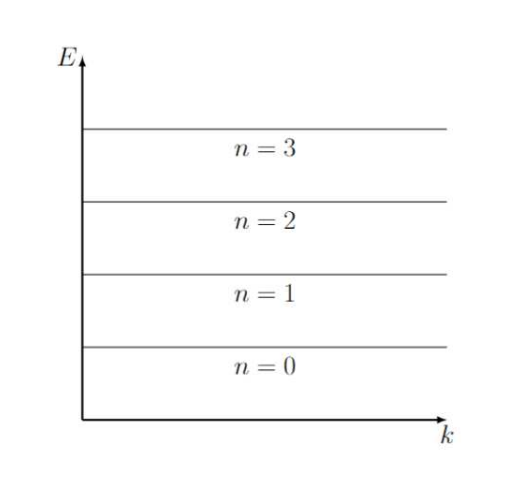


Figura 3.1: Spettro in energia per stati degeneri indicizzato per  $n$  al variare di  $k$ .

### 3.1.1 Analisi delle condizioni al contorno

A questo punto è necessario porre le condizioni al contorno, affinché le autofunzioni rappresentino delle particelle confinate nel reticolo di dimensioni  $L_x$ ,  $L_y$ . Ponendo il limite della dimensione del campione lungo l'asse  $y$  pari a  $L_y$ , si crea una quantizzazione del momento  $k$  in unità di  $2\pi/L_y$ , mentre porre la limitazione di  $L_x$  lungo l'asse  $x$  non è altrettanto semplice, in quanto il sistema non è invariante per traslazioni lungo quest'asse, come si vede in figura 3.2.

Tuttavia, considerando che la base descrivente l'Hamiltoniana è la base delle autofunzioni di oscillatore armonico moltiplicata per delle gaussiane che scompaiono velocemente allontanandosi da  $x_0$ , si rende non necessaria una limitazione esplicita della dimensione lungo l'asse  $x$ .

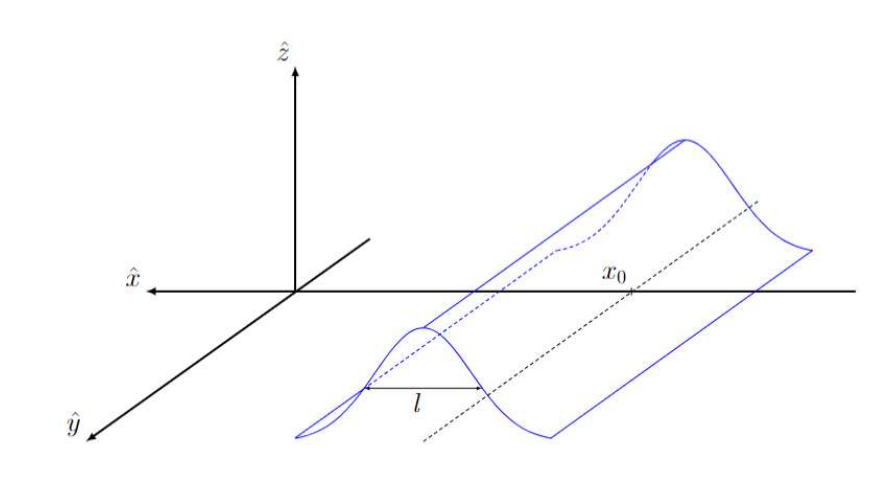


Figura 3.2: Assonometria del profilo della funzione d'onda di equazione 3.12 sul campione.

Per un campione confinato in  $x$  tra 0 e  $L_x$ , ci si può aspettare che i valori di  $x_0 = -kl^2$  siano compresi tra  $0 \leq x_0 \leq L_x$ , per cui i valori di  $k$ , parametro associato al momento lungo  $y$ , siano compresi tra  $-L_x/l^2 \leq k \leq 0$ . Di conseguenza, si può calcolare il numero di stati  $N$  per livello di Landau come:

$$N = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-L_x/l^2}^0 dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} = \frac{B L_x L_y}{\Phi_0}. \quad (3.11)$$

Ne consegue che  $N$  sia anche il numero di quanti di flusso che attraversano la superficie del campione. Se la lunghezza in  $x$  fosse indefinita, ci sarebbe degenerazione infinita: si può quindi passare a degenerazione con cardinalità del continuo quando  $L_x$  è molto maggiore della spaziatura tra i livelli.

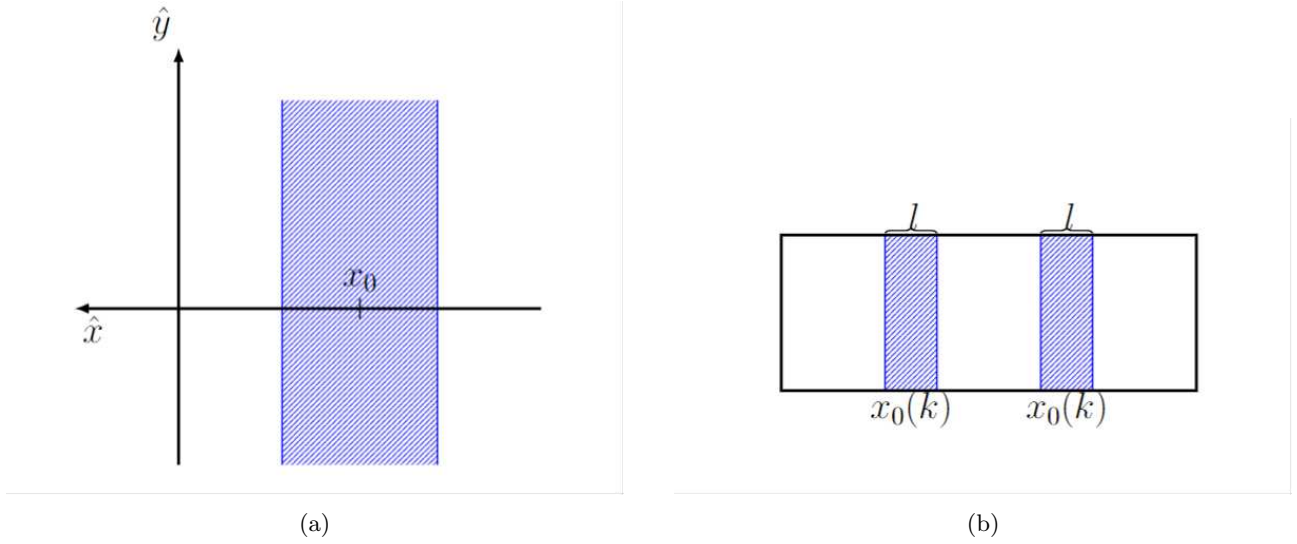


Figura 3.3: Vista dall'alto del campione con evidenziate le zone occupate dalle funzioni d'onda di un solo livello energetico 3.3a e di più livelli energetici 3.3b.

Allora le autofunzioni per ogni livello di Landau nel reticolo a dimensioni finite diventano

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n \int L_y \frac{dk}{2\pi} a_n(\vec{k}) \psi_{nk}(\vec{r}) e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_c t}, \quad (3.12)$$

in cui  $a_n(\vec{k})$  comprendono le condizioni iniziali del sistema.

Poiché i livelli di energia hanno una spaziatura regolare, il moto degli elettroni sarà esattamente periodico come

$$\Psi(\vec{r}, t + \frac{2\pi}{\omega_c}) = \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.13)$$

e si può dimostrare che il moto corrisponde al moto circolare del caso classico[1].

## 3.2 Accensione del campo elettrico

Si accenda il campo elettrico lungo l'asse  $x$  mantenendo la gauge scelta in precedenza (equazione 3.2), conseguentemente si conserva la simmetria per traslazione lungo l'asse  $y$ . Allora l'Hamiltoniana diventa:

$$H_k = \frac{1}{2m} \left( P_x^2 + (\hbar k + \frac{eB}{c}x)^2 \right) + eEx. \quad (3.14)$$

In questo modo si ottiene, per completamento del quadrato, un oscillatore armonico centrato nella nuova posizione:

$$x'_k = -kl^2 - \frac{eE}{m\omega_c^2}. \quad (3.15)$$

Avendo introdotto il termine di potenziale elettrico all'interno dell'Hamiltoniana, che dipende dalla posizione, gli autovalori diventano esplicitamente dipendenti dal centro dell'oscillatore armonico secondo la formula

$$\tilde{E}_k = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + eEx'_k + \underbrace{\frac{1}{2}m\bar{v}^2}_{(a)}, \quad \text{con } \bar{v} = -c\frac{E}{B}. \quad (3.16)$$

Il termine (a) presente nella espressione degli autovalori riportata in equazione 3.16 è dovuto alla velocità media, vista come velocità di drift di una particella carica in campo elettromagnetico.

La velocità di drift rappresenta la velocità di gruppo del pacchetto d'onda.



Il teorema di Ehrenfest definisce la relazione tra velocità di gruppo e autovalori del sistema come  $v_g = \frac{\langle p \rangle}{m}$  ed espandendo in serie di Taylor gli autovalori dell'Hamiltoniana del sistema, si ottiene

$$E_n(\vec{k} + \vec{q}) = E_n(\vec{k}) + \vec{q} \cdot \nabla_k E_n(\vec{k}) = E_n(\vec{k}) + q \frac{\langle P \rangle}{m} \hbar, \quad (3.17)$$

$$v_g = \frac{\langle p \rangle}{m} = \frac{1}{\hbar} \nabla_k \tilde{E}_k. \quad (3.18)$$

Allora si ottiene il valore esplicito della velocità di gruppo nelle condizioni in esame

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \tilde{E}_k}{\partial k} = \frac{-e}{\hbar} El^2 = -c \frac{E}{B}, \quad (3.19)$$

che è consistente con l'equazione degli autovalori 3.16. Siccome ora gli autovalori dipendono linearmente dal parametro  $k$ , risultano inclinati se l'energia viene rappresentata in funzione della posizione o del momento come riportato in figura 3.4. In questa configurazione gli stati possono quindi muoversi con velocità di drift lungo l'asse  $y$ .

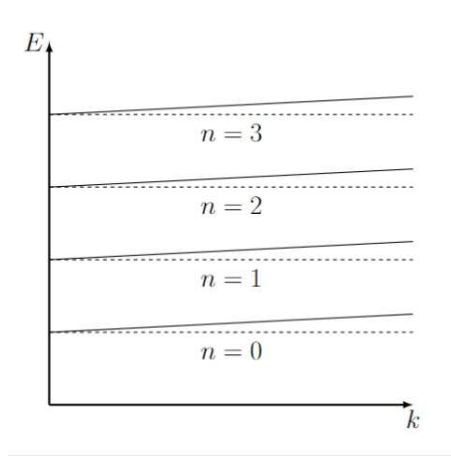


Figura 3.4: Spettro dell'energia in funzione della posizione prima (tratteggio) e dopo (linea continua) l'accensione del campo elettrico.

E' possibile definire la corrente in modo analogo al caso classico, con valori di aspettazione pari a

$$\langle \vec{I} \rangle = \frac{-e}{m} \langle \Psi_k | \vec{P} + e\vec{A} | \Psi_k \rangle. \quad (3.20)$$

Definito  $\nu$  come il numero di livelli di Landau occupati, si può calcolare la corrente lungo le direzioni caratteristiche del campione. Lungo la direzione  $x$  vale la seguente formula

$$I_x = \frac{-e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \left\langle \Psi_{nk} \left| -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right| \Psi_{nk} \right\rangle = 0 \quad (3.21)$$

ed è nulla poiché è equivalente a calcolare il valore di aspettazione di  $\vec{P}$  degli stati di oscillatore armonico. Lungo la direzione  $y$  invece vale

$$\begin{aligned} I_y &= \frac{-e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \left\langle \Psi_{nk} \left| -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eBx \right| \Psi_{nk} \right\rangle = \frac{-e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \langle \Psi_{nk} | \hbar k + eBx | \Psi_{nk} \rangle = \\ &= \frac{-e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \left\langle \Psi_{nk} \left| \hbar k + eB \left( -\frac{\hbar k}{eB} - \frac{mE}{eB^2} \right) \right| \Psi_{nk} \right\rangle = \frac{-e}{m} \sum_{n=1}^{\nu} \sum_k \left\langle \Psi_{nk} \left| -\frac{mE}{B} \right| \Psi_{nk} \right\rangle = \\ &\stackrel{(*)}{=} e\nu \sum_k \frac{E}{B} = e\nu \frac{E}{B} \frac{L_x L_y B}{\Phi_0} = \frac{e\nu E L_x L_y}{\Phi_0}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

dove nell'uguaglianza contrassegnata da (\*) la somma su  $k$  è riconducibile al calcolo del numero di elettroni in un livello di Landau completamente riempito e quindi al valore del quanto di flusso. Si noti come per il calcolo della corrente  $I_y$  non è presente nessun termine che tenga conto della forma del campione: conta solo la differenza di potenziale ai bordi. Nei paragrafi successivi, 3.3 e 3.3.1, si introdurrà la presenza di potenziale confinante, arrivando a concludere che, nemmeno con un generico confinamento sulla lastra, la corrente  $I_y$  risulta inalterata (si veda equazione 3.29). Questo è un primo argomento che mostra come l'effetto Hall non dipende dai dettagli del materiale utilizzato.

Dividendo l'equazione 3.22 per l'area del campione si trova la densità di corrente

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{eE\nu}{\Phi_0} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Riconducendosi quindi ai tensori della conduttività e della resistività, definiti in equazione 2.4, si ottiene che

$$\sigma_{xx} = 0, \quad \sigma_{xy} = \frac{e\nu}{\Phi_0} = \frac{e^2\nu}{2\pi\hbar}, \quad \rho_{xx} = 0, \quad \rho_{xy} = -\frac{\Phi_0}{e\nu} = \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}, \quad (3.24)$$

ovvero si ottiene la quantizzazione della resistività misurata sperimentalmente. Si noti che questo risultato è stato calcolato assumendo che ci fossero  $\nu$  livelli di energia pieni. Apparentemente, se non ci fossero esattamente  $\nu$  livelli di Landau completamente pieni, il calcolo della conducibilità dovrebbe cambiare in quanto, da equazione 3.22, ci si aspetterebbe che il valore della conducibilità vari in modo continuo al variare del campo magnetico, e che di conseguenza, la quantizzazione non venga rispettata. Tuttavia, come si vedrà nel paragrafo 3.3.1, anche considerando livelli di Landau parzialmente pieni, i valori di conducibilità e di resistività non cambiano e la quantizzazione rimane invariata.

Il riempimento dei livelli di Landau non dipende soltanto dal valore dell'energia degli elettroni, ma anche dalla presenza del disordine che modifica il profilo dei livelli, come si vedrà nel paragrafo 3.4.

### 3.3 Stati sul bordo del campione

Nel paragrafo precedente si è visto come ricavare i valori di conducibilità e resistività se gli elettroni riempiono esattamente  $\nu$  livelli di Landau. Tuttavia, anche a livello classico, la corrente è portata soltanto dagli elettroni in grado di muoversi da una parte all'altra del campione.

In questo paragrafo si analizza nello specifico il ruolo degli stati sul bordo del campione.

L'idea classica consiste nel considerare gli elettroni sul bordo come particelle che compiono traiettorie circolari andando a scontrarsi con il bordo del campione rimbalzando e proseguendo con un moto a salti, detto di skipping. Il moto degli elettroni su ciascun bordo del campione è unidirezionale ed opposto al moto degli elettroni sul bordo opposto.

In questa sezione si vuole studiare questo fenomeno a partire dall'Hamiltoniana del sistema riportata in equazione 3.9.

I bordi del campione possono essere modellizzati da un potenziale confinante  $V(x)$  che sale in modo continuo lungo i bordi perpendicolari all'asse  $x$  come in 3.5.

In assenza di potenziale confinante, le autofunzioni dell'Hamiltoniana sono localizzate su bande di larghezza  $l$  attorno ad un valore  $x_0$ , come si vede nelle figure 3.3a e 3.3b. Supponendo che il potenziale sia liscio e che vari lentamente lungo la larghezza delle strips (ordini di  $l$ ), è lecito sviluppare il potenziale in espansione di Taylor come

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial V}{\partial x}(x_0) + \dots, \quad (3.25)$$

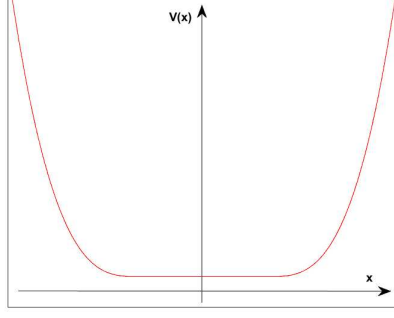


Figura 3.5: Potenziale vincolante gli elettroni all'interno della lastra.

arrestando al termine lineare in  $(x - x_0)$ . L'Hamiltoniana diventa quindi:

$$\begin{aligned}
 h_k &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - x_0)^2 + V(x) = \\
 &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - x_0)^2 + V(x_0) + (x - x_0)\frac{\partial V}{\partial x}(x_0) = \\
 &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 \left[ (x - x_0)^2 + \left( \frac{V'(x_0)}{m\omega_c^2} \right)^2 + 2(x - x_0)\frac{V'(x_0)}{m\omega_c^2} \right] + V(x_0) - \frac{m\omega_c^2}{2} \left( \frac{V'(x_0)}{m\omega_c^2} \right)^2 = \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 [(x - x_0)^2 + (\delta x_0)^2 + 2(x - x_0)\delta x_0] + V(x_0) - \frac{m\omega_c^2}{2}(\delta x_0)^2 = \\
 &\stackrel{(**)}{=} \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 [x - x_0 + \delta x_0]^2 + \varepsilon_0 \\
 &\approx \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 [x - x_0 + \delta x_0]^2 + V(x_0),
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

dove in  $(*)$  si è definito  $\delta x_0 = \frac{V'(x_0)}{m\omega_c^2}$ , ed in  $(**)$   $\varepsilon_0 = V(x_0) - \frac{1}{2}m\omega_c^2(\delta x_0)^2 \approx V(x_0)$ .

Si ottiene che il centro dei polinomi di Hermite all'interno delle autofunzioni, risulta essere traslato di  $\delta x_0$ . Anche gli autovalori di energia risultano shiftati, assumendo la forma espressa nell'equazione 3.27 seguente

$$E_n(x_0) = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c + V(x_0) \tag{3.27}$$

e di conseguenza anche la degenerazione degli stati subisce una modifica. A causa di questa traslazione, le densità di probabilità degli stati risultano traslate verso l'interno del potenziale confinante  $V(x)$ .

Dal momento che gli elettroni sono presenti in grande numero, sono costretti a muoversi lungo il bordo del campione collettivamente, seguendo la stessa direzione. Gli elettroni sull'altro bordo seguono la direzione opposta, come mostrato dalla velocità di gruppo delle funzioni d'onda, espressa dalla formula seguente (ricavata sfruttando l'equazione 3.18)

$$v_y = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial k} = -\frac{l^2}{\hbar} \frac{\partial E_n}{\partial x_0} = -\frac{l^2}{\hbar} V'(x_0) = -\frac{1}{eB} \underbrace{V'(x_0)}_{(a)}, \tag{3.28}$$

dove il termine evidenziato (a) è la pendenza del confinamento potenziale. Gli elettroni che seguono questo moto vengono detti elettroni chirali. Questo significa che le cariche in movimento lungo i bordi del campione generano correnti di segno opposto: con verso concorde all'asse  $y$  sul bordo di sinistra, con verso opposto per il bordo di destra, in accordo con il segno della derivata del potenziale.

Gli stati sul bordo del campione sono liberi di muoversi in modo chirale lungo le pareti, mentre gli stati all'interno del materiale, avendo velocità di gruppo nulla, rimangono localizzati. Ciò comporta che

il materiale abbia comportamento isolante nella parte interna del suo volume, mentre sia descrivibile come conduttore sui bordi del campione.

Si noti che, all'equilibrio non è presente una corrente netta: la corrente portata da entrambi i bordi è la stessa, ma in segno opposto. Soltanto se viene applicata una differenza di potenziale lungo una delle due direzioni si è in grado di misurare una corrente.

### 3.3.1 Stati riempiti e accensione del campo elettrico

Per riempire un livello di Landau è necessario considerare un potenziale chimico, in modo tale da poter introdurre elettroni finché si raggiunge il valore di energia pari all'energia di Fermi. Inoltre, si considerino temperature basse in modo da riempire il Lowest Landau Level (LLL) e in modo tale che gli elettroni non possano saltare al livello energetico successivo per agitazione termica. Nella seguente figura 3.6, sono riportati gli stati degli elettroni rappresentati tramite la loro posizione sul potenziale confinante. Si noti che la formula della velocità dei portatori di carica, riportata in equazione 3.28, dipende dalla derivata del potenziale confinante. Dunque, scelta la forma del potenziale come in figura 3.5 e 3.6, gli unici stati a portare corrente sono quelli sul bordo, perchè quelli nel corpo del campione hanno velocità nulla.

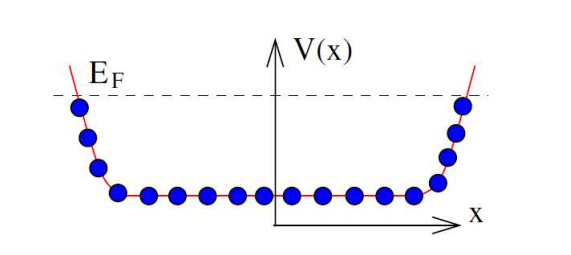


Figura 3.6: Livello di Landau riempito. Gli stati degli elettroni sono identificati tramite la posizione in  $x$ . Figura tratta da:[9].

Si introduca, a questo punto, una differenza di potenziale  $V_H$  ai bordi del campione, lungo la direzione delle ascisse: questa variazione di energia potenziale  $\Delta\phi$  crea una disparità nei livelli energetici occupabili dagli elettroni, lungo tutto il materiale. Ciò significa che ci sono più stati occupabili lungo la parte destra del campione, come riportato in figura 3.7.

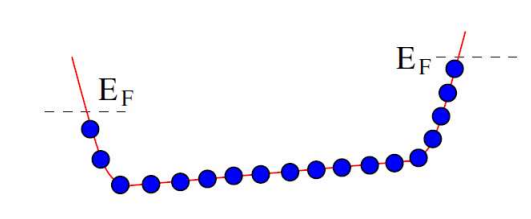


Figura 3.7: Livello di Landau dopo l'applicazione della differenza di potenziale lungo  $x$ . Figura tratta da:[9].

Per calcolare la corrente che scorre lungo  $y$  è necessario sommare su tutti i livelli completamente riempiti, ovvero basta integrare sui momenti la velocità di gruppo

$$I_y = -e \int \frac{dk}{2\pi} v_y(k) = \frac{e}{2\pi l^2} \int dx \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e\Delta\phi}{2\pi\hbar} = \frac{e^2 V_H}{2\pi\hbar}, \quad (3.29)$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è evidenziata la relazione tra il potenziale di Hall e la differenza di potenziale  $\Delta\phi$ :  $eV_H = \Delta\phi$ .

Tale potenziale permette di stimare la  $\sigma_{xy}$  del singolo livello di Landau come

$$\sigma_{xy} = \sigma_{H,0} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}, \quad (3.30)$$

che corrisponde allo stesso valore di  $\sigma_{xy}$  riportato in equazione 3.24.

Di conseguenza si può concludere che qualunque sia la forma che il potenziale assume, fintantoché la deformazione non superi l'energia di Fermi, il calcolo della corrente, e quindi della conducibilità non cambia. E' quindi possibile che gli stati di elettroni si dispongano come in figura 3.8. La modifica del

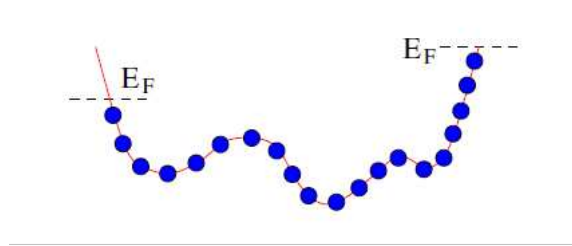


Figura 3.8: Riempimento del livello di Landau sottoposto a potenziale elettrico continuo e potenziale chimico di forma generica. Figura tratta da:[9].

profilo del potenziale confinante può essere data dalla presenza di impurità del campione. Di fatto, il disordine riveste un ruolo non trascurabile all'interno del IQHE: poichè il profilo del potenziale si modifica, si modifica anche la velocità dei portatori di carica all'interno del materiale.

Nella prossima sezione si analizzano in dettaglio gli effetti delle impurità del campione sugli stati degli elettroni e le conseguenze che hanno sulle proprietà di conduzione del materiale.

### 3.4 Ruolo del disordine

Nella precedente sezione si è notato che l'eventuale presenza del disordine agisce in modo significativo sulla velocità dei portatori di carica, sia in termini di modulo che di segno. Di conseguenza, è necessario trovare un modello che rappresenti la presenza di impurità e di disordine del materiale.

Si aggiunga un potenziale generico  $\tilde{V}(x)$  all'Hamiltoniana. Si può trattare questo potenziale come una perturbazione se  $\tilde{V} \ll \hbar\omega_c$ .

In questo modo i livelli di Landau non saranno più dei segmenti, ma delle zone estese in cui lo shift massimo è proporzionale al modulo del potenziale del disordine utilizzato. E' necessario introdurre delle condizioni sulle dimensioni del potenziale che rappresenta il disordine affinché i livelli di Landau non si sovrappongano nemmeno dopo lo splitting per degenerazione, rappresentato dalla figura 3.9b.

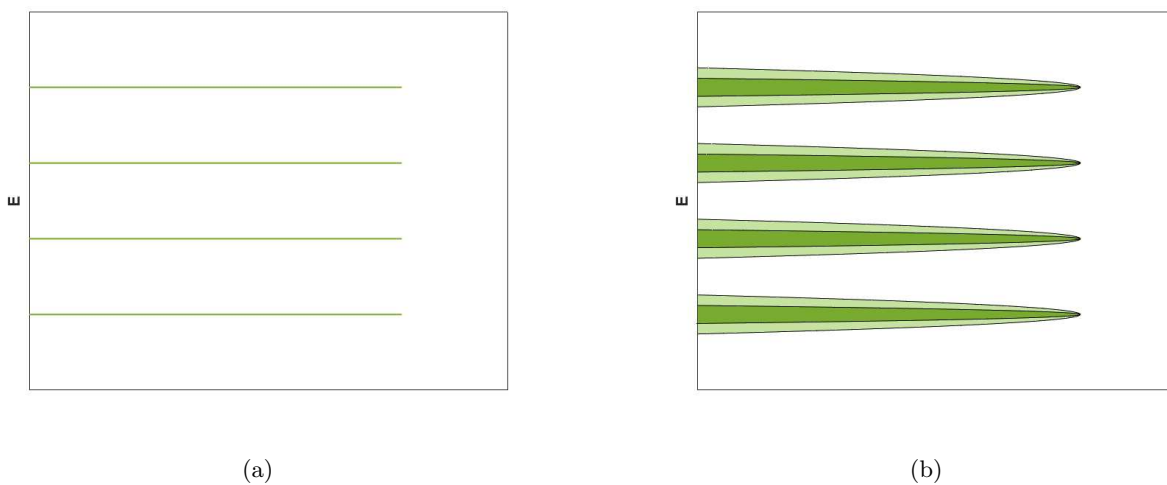


Figura 3.9: Livelli di Landau dell'Hamiltoniana imperturbata 3.9a e con l'introduzione della perturbazione del disordine 3.9b.

Si noti che per l'Hamiltoniana senza potenziale del disordine, le autofunzioni della base sono centrate attorno ad un punto  $(x_0, y_0)$ , localizzate in un'area  $A = 2\pi l^2$ . Con l'introduzione del disordine, il cui

potenziale dipende generalmente sia da  $x$  che da  $y$ , la funzione d'onda cambia. Per analizzare come di fatto il disordine agisce sulle funzioni d'onda, è necessario espandere in serie di Taylor attorno al centro del pacchetto: se il potenziale varia poco su una scala di lunghezza di ordine  $l$  si può considerare soltanto il termine lineare.

Se si considera il potenziale perturbativo come liscio, le linee equipotenziali saranno delle curve chiuse sulle quali è possibile considerare delle coordinate.

Essendo che la velocità di gruppo è ortogonale al gradiente del potenziale, il centro  $(x_0, y_0)$  del pacchetto si muove lungo le linee equipotenziali tracciate in figura 3.10; esse infatti sono le linee che in ogni punto sono ortogonali al gradiente.

L'effetto più caratteristico della perturbazione del disordine è quello di impedire ad alcuni elettroni di potersi spostare sensibilmente sul campione: stati che prima potevano muoversi lungo tutto il campione, dopo l'introduzione del disordine sono bloccati nel loro transito e rimangono localizzati nel corpo del materiale.

Si parla quindi di stati localizzati e stati estesi, rappresentati in modo intuitivo in figura 3.10. Gli stati estesi sono in grado di attraversare il campione da parte a parte, mentre quelli localizzati orbitano attorno ai massimi e ai minimi del potenziale di disordine. Nella figura 3.9b, i livelli energetici corrispondenti agli stati localizzati sono quelli riportati in verde chiaro, mentre quelli in verde scuro corrispondono agli stati estesi.

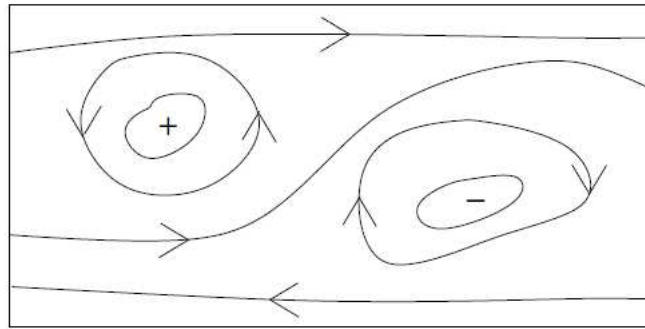


Figura 3.10: Rappresentazione grafica del moto degli stati localizzati ed estesi. Figura tratta da [9].

Siccome soltanto gli stati estesi contribuiscono al trasporto di carica, e sono garantiti esistere lungo il bordo del campione (come descritto nella precedente sezione), saranno gli unici a dare un contributo alla conduttività.

Si possono quindi giustificare i plateau quantizzati della resistività riportati in figura 2.3: supponendo di aver riempito tutti gli stati estesi occupabili per un livello di Landau fissato, diminuendo il campo magnetico, ogni livello può accomodare meno elettroni. A questo punto gli elettroni in eccesso si spostano per popolare gli stati localizzati di energia immediatamente superiore. Tuttavia, siccome questi stati non sono in grado di trasportare corrente, poichè corrispondono a stati localizzati, la conduttività non aumenta anche se gli elettroni hanno occupato livelli energetici maggiori, creando quindi i plateau osservati nell'andamento della resistività.

### 3.5 Corrente degli stati estesi

All'inizio del capitolo 3 si è svolto il calcolo della conducibilità, considerando come portatori di carica tutti gli elettroni presenti nel campione, giungendo al risultato riportato in equazione 3.24; tuttavia, dopo l'introduzione del disordine, si nota che soltanto gli elettroni che occupano stati estesi contri-

buiscono alla corrente giungendo al risultato riportato in equazione 3.30, il quale sorprendentemente coincide con il precedente.

In questa sezione si vuole quindi dimostrare, tramite considerazioni intuitive sull'azione del disordine sugli stati, il motivo per cui il calcolo della conducibilità non cambia considerando o meno gli stati localizzati [7].

Si considerino gli stati estesi sul bordo. Anche uno stato esteso può scontrarsi con il potenziale del disordine, scatterando e proseguendo poi con il suo moto. In ipotesi di scattering elastico si può sfruttare l'unitarietà del processo di scattering: in queste condizioni, la differenza tra la funzione d'onda scatterata rispetto a quella prima dello scattering con il disordine, è solo di una fase

$$\psi_{nk}^{out} = \psi_{nk}^{in} e^{i\delta(k)}. \quad (3.31)$$

Siccome è nota la funzione d'onda sia prima che dopo lo scattering, si trova la seguente relazione per il parametro  $k$  (parametro legato agli autovalori del momento angolare):

$$kL + \delta(k) = 2\pi p, \quad (3.32)$$

in cui  $p$  è un intero associato ad un valore del parametro  $k$ . E' possibile quindi indicizzare gli stati estesi tramite  $p$ .

Esiste un range per  $k$  per il quale  $\delta(k)$  non è un multiplo intero di  $2\pi$ . All'aumentare di  $k$  in questo range,  $\delta$  diminuisce di multipli di  $2\pi$ . Di conseguenza se  $\delta$  diminuisce di  $2\pi M$  con  $M \in \mathbb{N}$ , di conseguenza anche il numero delle soluzioni dell'equazione 3.32 diminuisce di  $M$  soluzioni. Poiché il numero di stati totali si deve conservare, si possono interpretare le soluzioni mancanti come quelle che rappresentano gli stati estesi che vengono vincolati ai centri di scattering diventando stati localizzati.

Si consideri ora il ritardo temporale dato dallo scattering definito come  $d\delta/dE$ . Considerando uno stato energetico al livello  $\bar{E}$  vale

$$e^{i(\delta(E)-Et)} \approx e^{i(\delta(\bar{E})-\bar{E}t)} e^{-i(E-\bar{E})(t-d\delta/dE)}. \quad (3.33)$$

Se si assume di trattare stati legati,  $d\delta/dE$  è negativo e di conseguenza si crea un fenomeno di anticipo. Si può spiegare intuitivamente il fenomeno nel seguente modo: l'aumento di stati localizzati implica che ci siano meno stati estesi che portano corrente. Tuttavia, grazie alla presenza degli stati localizzati, i pacchetti d'onda estesi compaiono prima nella zona più esterna del campione (ovvero quella più lontana dai centri scatteranti del disordine), rispetto a quando comparirebbero se non ci fossero stati localizzati.

Questo significa che, in un intorno dei centri di scattering, ci sarà una densità minore di stati estesi, rispetto alla loro densità sui bordi del campione. Tuttavia, gli stati estesi sui bordi liberi dal disordine si muovono più facilmente e quindi più velocemente, portando di conseguenza più corrente. E' ragionevole, infatti, pensare che se il potenziale del disordine è abbastanza forte da legare alcuni stati di particella, avrà abbastanza energia per generare un campo elettrico sufficiente ad aumentare la velocità di drift degli elettroni estesi.

Così si è visto intuitivamente il motivo per cui i valori di conducibilità e resistività riportati nelle equazioni 3.24 e 3.30 sono equivalenti.

Nella prossima sezione si vuole dimostrare tramite considerazioni topologiche l'equivalenza dei due risultati.

Si noti che non ci sono termini che fanno dipendere il IQHE dalla forma o grandezza del campione di reticolo utilizzato. Quindi, date queste considerazioni è ragionevole pensare che si possa arrivare alle stesse conclusioni ottenute finora cambiando la geometria, assicurandosi però di rispettare le simmetrie e le periodicità del problema.





## Capitolo 4

# Anello di Corbino

L'obiettivo di questo capitolo è dimostrare che i valori di resistività e conducibilità riportati in equazione 3.24 per  $\nu$  livelli di Landau pieni, in realtà sono risultati generali e la loro invarianza deriva da considerazioni collegate alla topologia del gruppo di gauge.

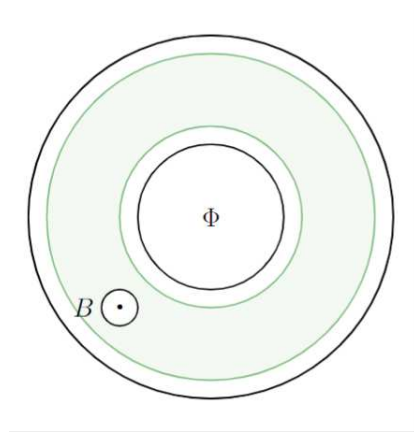


Figura 4.1: Anello di Corbino (circonferenze nere) con corona circolare (in verde) in cui è presente il disordine.

Si consideri un anello di Corbino, ovvero una corona circolare bidimensionale (figura 4.1), la quale è attraversata da un campo magnetico statico lungo  $z$  assumendo la gauge simmetrica in modo tale da poter considerare come autofunzioni dell'Hamiltoniana, riportata in equazione 4.2, quelle dell'operatore del momento angolare. Si può aggiungere anche un flusso di campo magnetico perpendicolare alla superficie, presente soltanto all'interno del buco centrale  $\Phi = AB$ , con  $A$  l'area del buco centrale. Si assuma la gauge simmetrica per il campo magnetostatico. In questa geometria, siccome lo spazio non è semplicemente connesso, è possibile definire un potenziale vettore non nullo anche dove il campo magnetico aggiunto è nullo:

$$A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{u}_\phi \quad (4.1)$$

Si ottiene che all'interno dell'anello c'è un contributo di campo magnetico che è pura gauge.

Per ora, non si consideri la presenza del disordine.

L'Hamiltoniana risulta quindi essere:

$$H_\Phi = \frac{1}{2m} \left[ -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left( -i \frac{\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{eBr}{2} + \frac{e\Phi}{2\pi r} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Se non è presente nessun potenziale che modella il disordine, è preservata la simmetria per rotazione: allora le autofunzioni dell'Hamiltoniana sono in comune con quelle del momento angolare  $L$ , ovvero si presentano come

$$\psi(r, \phi) = f(r) e^{im\phi}. \quad (4.3)$$

Per capire l'effetto che crea il termine di flusso, si consideri una particella carica che si muove lungo un cerchio,  $r$  risulta quindi fissato. La sua dinamica è legata all'Hamiltoniana seguente:

$$H = \frac{1}{2m}(p_\phi + eA_\phi)^2 = \frac{1}{2mr^2} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{e\Phi}{2\pi} \right)^2, \quad (4.4)$$

le cui autofunzioni sono quelle del momento angolare sono della forma  $\sim e^{in\phi}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ , a meno di normalizzazione. Gli autovalori risultano quindi essere

$$E = \frac{1}{2mr^2} \left( n + e \frac{\Phi}{2\pi} \right)^2 = \frac{1}{2mr^2} \left( n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2, \quad (4.5)$$

dove la dipendenza dalla carica degli elettroni è nascosta dentro al quanto di flusso magnetico poiché

$$e = \frac{h}{\Phi_0} = \frac{2\pi\hbar}{\Phi_0}. \quad (4.6)$$

Si vede quindi che il flusso del campo magnetico  $\Phi$  influisce direttamente sulla dinamica della particella in movimento se non è un multiplo intero del quanto di flusso  $\Phi_0$ . Aumentando il flusso da 0 al valore del quanto di flusso magnetico  $\Phi_0$  in un tempo  $T \gg 1/\omega_c$ , si ottiene

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{e}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \implies \frac{\Delta E}{\Delta t} = -\frac{\Phi_0}{T}. \quad (4.7)$$

Si crea quindi una forza elettromotrice  $\varepsilon$  che sposta gli elettroni carichi nei cerchi più esterni, creando una corrente radiale.

Aumentando il flusso magnetico del valore di un quanto di flusso e tenendo conto della spaziatura tra i livelli energetici, si trasforma il livello di partenza dell'elettrone in quello che in precedenza era il primo stato eccitato: l'aumento di flusso trasforma l'indicizzazione dei livelli da  $m \rightarrow m + 1$  e questo fenomeno è detto "Flusso di Spettro (Spectral Flow)".

Dopo aver analizzato come il flusso agisce sulla dinamica del singolo elettrone vincolato su un cerchio, si consideri nuovamente l'Hamiltoniana 4.2 ponendo che l'elettrone sia libero di muoversi sull'anello di Corbino, sempre in assenza di disordine. La presenza del flusso del campo magnetico non comporta una sostanziale modifica dell'autofunzione: sarà qualitativamente simile alla precedente in quanto la parte radiale delle autofunzioni  $f(r)$  risulta piccata attorno ad un raggio  $r_0$  che dipende da  $m$ . Siccome  $r_0$  deve essere compreso tra il raggio interno e quello esterno dell'anello, si devono porre dei limiti inferiori e superiori ad  $m$  (analogamente a quanto svolto in sezione 3.1.1).

Ora, avendo mostrato che la presenza del flusso non modifica l'andamento radiale delle autofunzioni, se si aumenta lentamente il valore del flusso magnetico da 0  $\Phi_0$ , come fatto nel precedente esempio della particella singola, si ottiene che l'Hamiltoniana finale e quella iniziale sono legate da una trasformazione di gauge periodica

$$\psi(r, \phi) \rightarrow e^{-ie\Phi\phi/2\pi\hbar} \psi(r, \phi). \quad (4.8)$$

Si ottiene anche in questo caso uno Spectral Flow in cui il momento angolare passa da  $m$  a  $m + 1$ . Indicando con  $n$  il numero di elettroni che vengono trasferiti in un tempo  $T$ , si ottiene la seguente espressione per la corrente radiale.

$$I_r = \frac{-ne}{T}. \quad (4.9)$$

La presenza di tale corrente, implica che sia possibile definire una resistività radiale come

$$\rho_{xy} = \frac{\mathcal{E}}{I_r} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{n}. \quad (4.10)$$

Per dimostrare che il valore della resistività riportata in 4.10 coincide con la resistività in equazione 3.24, è necessario dimostrare che il numero di elettroni trasportati coincide con il numero di livelli di Landau riempiti, ovvero che  $\nu = n$ . A tal fine si consideri un solo livello di Landau. Senza perdere di generalità, si può porre di avere elettroni soltanto al LLL.

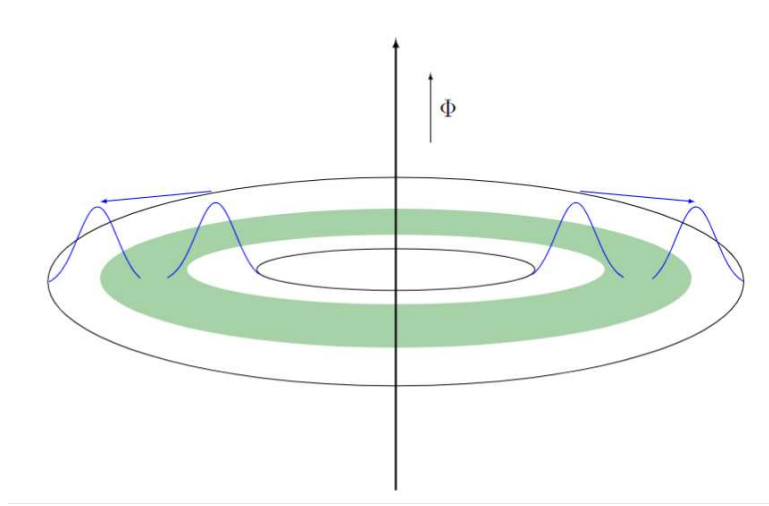


Figura 4.2: Moto degli stati degli elettroni durante l'aumento del flusso del campo magnetico.

## 4.1 Spectral Flow sul Lowest Landau Level

In questo paragrafo si analizza più in dettaglio l'azione dello Spectral Flow. Tralasciando la presenza del disordine e utilizzando la gauge simmetrica in coordinate radiali  $z = x + iy = re^{i\phi}$  le autofunzioni al LLL sono:

$$\psi_m = \left(\frac{z}{l}\right)^m e^{-|z|^2/4l^2} = e^{-im\phi} r^m e^{-r^2/4l^2}. \quad (4.11)$$

Questa forma dell'autofunzione, è ricavata imponendo l'annichilazione delle autofunzioni generiche all'applicazione degli operatori ladder opportunamente definiti per il problema. L'aumento del flusso da  $\Phi = 0$  a  $\Phi = \Phi_0$  induce lo shift  $m \rightarrow m + 1$  ovvero implica che

$$\psi_m(\Phi = \Phi_0) = \psi_{m+1}(\Phi = 0) \quad (4.12)$$

e questo consiste in uno spostamento degli elettroni dal raggio  $r = \sqrt{2ml^2}$ , al raggio  $r = \sqrt{2(m+1)l^2}$ . Il risultato è quello di spostare un singolo elettrone dall'interno verso l'esterno dell'anello ogni volta che il flusso aumenta di un'unità di quanto di flusso. Di conseguenza, considerando  $\nu$  livelli di Landau pieni di elettroni (come nell'equazione 3.24), oppure considerando il flusso di  $n$  livelli di Landau (come nell'equazione 4.10) si ottiene lo stesso risultato, proprio perchè per ogni livello di Landau un solo elettrone partecipa allo Spectral Flow.

Sembra che il teorema di evoluzione adiabatica non sia rispettato, tuttavia se l'aumento di flusso è abbastanza lento, tale teorema è applicabile e assicura che l'autostato di energia ricade nello stesso livello di Landau iniziale, ma a distanza maggiore rispetto al centro dell'anello di Corbino. Il flusso di spettro quindi consiste empiricamente in uno spostamento radiale dei livelli. E' necessario sottolineare che, sotto una trasformazione adiabatica dell'Hamiltoniana, solo gli elettroni con energia vicina all'energia di Fermi possono essere eccitati ad un altro autostato dell'Hamiltoniana, perchè se lo stato di partenza si trova molto sotto l'energia di Fermi tutti gli stati "vicini" sono già occupati da altri elettroni. Di conseguenza gli elettroni che vengono promossi per Spectral Flow si spostano sul successivo livello di Landau libero.

## 4.2 Introduzione del disordine

Si è appena dimostrato che il calcolo della resistività non dipende dal riempimento dei livelli di Landau. Quindi, è ragionevole pensare che neanche introducendo il disordine, ovvero localizzando gli stati di elettroni, il calcolo della conducibilità cambi.

In questa sezione si vuole dimostrare che i risultati trovati finora sono robusti per introduzione del disordine, inserito nell'anello di Corbino secondo l'ipotesi di Halperin, ovvero di confinarlo in una corona circolare come si vede in figura 4.1.

All'Hamiltoniana riportata in equazione 4.2 si aggiunga un termine  $V(r, \phi)$  che rappresenta gli effetti del disordine.

In questo caso non si possono considerare autofunzioni del momento angolare perchè l'invarianza di rotazione non è rispettata. Tuttavia la trasformazione di gauge riportata in equazione 4.8 che lega le Hamiltoniane che differiscono esattamente per un quanto di flusso resta valida, almeno per gli stati estesi. Di conseguenza anche in presenza di disordine si verifica uno Spectral Flow degli stati estesi che porta esattamente un elettrone per ogni livello di Landau dal cerchio interno a quello esterno.

Questo mostra che il calcolo eseguito per la resistività rimane invariato anche in presenza del disordine. In effetti, sotto l'ipotesi di Halperin, vicino al bordo dell'anello il potenziale del disordine può essere considerato indipendente da  $\phi$ : ciò implica che una autofunzione dell'Hamiltoniana con  $V = 0$  che sia localizzata vicino al bordo interno o a quello esterno dell'anello non sarà alterata sostanzialmente dal potenziale del disordine. Le autofunzioni di stati estesi saranno quindi del tipo  $\sim f(r)e^{im\phi}$  con  $m$  opportuno per essere sul bordo interno o esterno.

Soltanto gli stati estesi possono essere scritti in dipendenza del flusso magnetico, mentre gli stati locali non ne risentono, quindi soltanto gli stati estesi partecipano al flusso di spettro.

### 4.2.1 Considerazioni di gauge

In questo paragrafo si vuole analizzare in che modo le condizioni di periodicità da imporre per avere continuità delle funzioni d'onda degli stati estesi, influiscano la scelta di gauge per il sistema.

Come si è visto, gli stati estesi, che esistono per ogni valore di  $\Phi$ , orbitano attorno al centro dell'anello: il flusso del campo magnetico deve quindi rispettare la simmetria per aggiunta di fase di  $2\pi$ , ovvero  $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ . Questa periodicità è rispettata soltanto quando il flusso è un multiplo intero del quanto di flusso magnetico e ciò impone che le trasformazioni di gauge permesse sono quelle appartenenti al gruppo unitario  $U(1)$ .

Dal punto di vista dell'Hamiltoniana, applicare una gauge periodica significa applicare una trasformazione unitaria. Gli autovalori e gli autostati dell'Hamiltoniana sono invarianti sotto tali trasformazioni, di conseguenza, l'unico effetto fisico è lo Spectral Flow.

L'IQHE, di conseguenza, si basa sulle proprietà del gruppo  $U(1)$  delle trasformazioni di gauge che può essere rappresentato come un cerchio sul quale ogni punto rappresenta un elemento del gruppo, ovvero una possibile gauge, e dipende da un parametro di percorrenza del cerchio  $\phi$ . E' possibile definire una mappa che porta da  $U(1)$  ad un cerchio sull'anello di Corbino: in questo modo si può creare una corrispondenza tra il flusso scelto nella gauge e il movimento delle cariche attraverso l'anello.

## Capitolo 5

# Teoria perturbativa: conducibilità e Formula di Kubo

Nel precedente capitolo si è data una prima impressione su come la topologia del gruppo di gauge sia l'elemento chiave per stabilire l'equivalenza dei risultati delle equazioni 3.24, 3.30 e 4.10.

In questo capitolo si effettuano i calcoli estesi per arrivare alla dimostrazione di equivalenza, giungendo ad una formulazione quantistica della conducibilità nel sistema, dimostrando che il calcolo della conducibilità dipende soltanto da fattori topologici del sistema e quindi della gauge scelta [9].

### 5.1 Formula di Kubo per la conducibilità

Si definisca l'Hamiltoniana di tutti gli elettroni non interagenti come  $H_0$ , corrispondente alla somma delle Hamiltoniane di singolo elettrone riportate in equazione 3.3.

Si aggiunga il campo elettrico come una perturbazione  $\Delta H$  della forma

$$\Delta H = -\vec{J} \cdot \vec{A}, \quad (5.1)$$

in cui  $\vec{J}$  è l'operatore quantistico associato alla corrente elettrica già introdotto in equazione 3.20, associato al momento canonico  $\vec{\pi} = \vec{P} + e\vec{A}$ .

Si consideri un campo elettrico variabile nel tempo, definito come  $\vec{E}(t) = Ee^{-i\omega t}$  (risulterà più comodo ai fini della trattazione). Per tornare in condizioni di campo elettrico costante basterà prendere il limite  $\omega \rightarrow 0$ . Sotto queste ipotesi è possibile definire il potenziale vettore come:

$$\vec{A} = \frac{\vec{E}}{i\omega} e^{-i\omega t}, \quad (5.2)$$

si noti che è un operatore complesso. Questa gauge non crea complicanze dal punto di vista dell'esecuzione dei calcoli, in quanto le soluzioni sono di ordine lineare e quindi in ogni momento si può prendere la parte reale.

A questo punto si vuole calcolare il valore di aspettazione della densità di corrente sotto la perturbazione  $\Delta H$ . Si noti che ora l'Hamiltoniana dipende dal tempo: ponendo di essere in visuale di interazione, l'evoluzione temporale degli stati è data dal seguente operatore

$$U(t, t_0) = T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt' \right). \quad (5.3)$$

Si noti che è rispettata la relazione  $i\hbar dU/dt = \Delta H U$ .

Si prepari lo stato ad uno specifico autostato scelto al tempo  $t \rightarrow -\infty$  detto  $|0\rangle$  (LLL) di autovalore  $E_0$ ; allora il valore di aspettazione della densità di corrente per un tempo  $t_0 \rightarrow -\infty$  è dato da

$$\langle J(t) \rangle \approx \langle 0 | \left( \underbrace{J(t)}_{(a)} + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t [\Delta H(t'), J(t)] dt' \right) | 0 \rangle. \quad (5.4)$$

Tale equazione è ricavata espandendo l'operatore di evoluzione temporale riportato in equazione 5.3. Il termine evidenziato con (a) è trascurabile perchè rappresenta la corrente in approssimazione di campo quasi nullo e, quindi, si può assumere che sia quasi nullo a sua volta.

Inserendo le espressioni di campo elettrico e di potenziale vettore, come definite in equazione 5.2, si ottiene la seguente espressione per il valore di aspettazione di densità di corrente

$$\langle J_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' \langle 0 | [J_j(t'), J_i(t)] | 0 \rangle E_j e^{-i\omega t'} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} \left( \int_0^\infty dt'' e^{i\omega t''} \langle 0 | [J_j(0), J_i(t'')] | 0 \rangle \right) E_j e^{-i\omega t}, \quad (5.5)$$

dove nell'uguaglianza segnalata con (\*) si è sfruttato il fatto che il commutatore è invariante per traslazioni temporali e quindi la densità di corrente dipende soltanto dalla differenza temporale  $t'' = t - t'$ . Riscrivendo la dipendenza per  $t''$ , si conclude con l'uguaglianza dopo (\*) in cui il termine esponenziale in  $t$  è l'unica dipendenza esplicita dall'istante di tempo: ciò significa che, se si applica un campo elettrico alla frequenza  $\omega$ , si ottiene una risposta lineare in corrente, ovvero la corrente che si ottiene oscilla con la stessa frequenza. Siccome la risposta è lineare, ha senso parlare della costante di proporzionalità tra campo elettrico e densità di corrente, ed essa è proprio la conducibilità.

Si può, a questo punto, ricavare una formula esplicita della conducibilità in termini degli operatori quantistici definiti nel problema in esame

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle 0 | [J_y(0), J_x(t)] | 0 \rangle. \quad (5.6)$$

L'espressione riportata in equazione 5.6 è detta formula di Kubo per la conducibilità, ma allo scopo della trattazione conviene rimaneggiarla.

Si può assumere che la densità di corrente evolva nel tempo tramite l'Hamiltoniana imperturbata; inserendo una completezza nella base di  $H_0$  ed eseguendo l'integrale nel tempo, si trova la seconda formulazione di Kubo per la conducibilità

$$\sigma_{xy}(\omega) = -\frac{i}{\omega} \sum_{n \neq 0} \left[ \frac{\langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_n - E_0} - \frac{\langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle}{\hbar\omega + E_0 - E_n} \right] \quad (5.7)$$

I denominatori della precedente equazione possono essere espansi in serie di Taylor per  $\omega \rightarrow 0$ , ottenendo dei termini divergenti

$$\frac{1}{\hbar\omega + E_n + E_0} = \frac{1}{E_n - E_0} - \frac{\hbar\omega}{(E_n - E_0)^2} + O(\omega^2). \quad (5.8)$$

In generale, se i termini di conducibilità longitudinali esistono, in caso di corrente continua essi divergono e di conseguenza non ci può essere resistività longitudinale. Nel caso dell'IQHE i termini longitudinali di conducibilità non compaiono, come si può dimostrare per invarianza di gauge o per conservazione della corrente.

Ponendo  $x \rightarrow y$  e  $y \rightarrow -x$  si ottiene per campi statici ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$\sigma_{xy} = \sigma_{H,0} = i\hbar \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 | J_y | n \rangle \langle n | J_x | 0 \rangle - \langle 0 | J_x | n \rangle \langle n | J_y | 0 \rangle}{(E_n - E_0)^2} \stackrel{(**)}{=} \frac{i\hbar e^2}{A} \sum_{n \neq 0} \frac{(v_x)_{0n} (v_y)_{n0} - (v_y)_{0n} (v_x)_{n0}}{(E_n - E_0)^2}, \quad (5.9)$$

dove nel passaggio contrassegnato con (\*\*\*) si è sfruttato il legame della densità di corrente con la velocità dei portatori di carica. Si consideri questo risultato come l'espressione finale della conducibilità nella forma della formula di Kubo. Si è trovata la conducibilità per il LLL. Per generalizzare si ponga  $0 = n$  nella 5.9: si ottiene la conducibilità del  $n$ -esimo livello di Landau,  $\sigma_{H,n}$ . La conducibilità totale si ottiene pesando le conducibilità tramite delle funzioni che dipendono dal  $n$ -esimo livello di Landau:

$$\sigma_H = \sum_n f(E_n) \sigma_{H,n}. \quad (5.10)$$

A questo punto è necessario dimostrare che l'espressione della conducibilità riportata in equazione 5.9 è un invariante topologico.

## 5.2 L'invarianza topologica della conducibilità

Nel paragrafo precedente si è trovata una formulazione quantistica della conducibilità tramite gli operatori di densità di corrente riportata in equazione 5.9. In questa sezione si parte da tale risultato per dimostrarne l'invarianza.

La conducibilità di Hall rappresenta una caratteristica locale del campione, ovvero che rimane costante indipendentemente dalle dimensioni del materiale. Ad esempio, se si collega una seconda lastra al campione, raddoppiandone la lunghezza, la conducibilità non subisce significative variazioni. Pertanto non sarà influenzata neanche dalle condizioni ai margini del campione. Di conseguenza in questa sezione si può considerare il problema ponendo condizioni periodiche per le funzioni d'onda di elettrone singolo  $\psi(x + L_x) = \psi(x)$  e  $\psi(y + L_y) = \psi(y)$  (si veda equazione 5.13), ovvero si impone la topologia del toro.

Si considera la seguente Hamiltoniana includendo anche la presenza di disordine, ovvero

$$H = \frac{1}{2m} \vec{v}^2 + V = \frac{1}{2m} \left[ -i\hbar\nabla + \frac{e\vec{A}}{c} \right]^2 + V, \quad (5.11)$$

Ora si supponga di modificare l'Hamiltoniana in dipendenza di un parametro  $\vec{\lambda}$  in modo che  $v_x$  e  $v_y$  siano proporzionali alle derivate di  $H(\vec{\lambda})$  tramite i parametri  $\lambda_x, \lambda_y$ . Si ottiene quindi la seguente Hamiltoniana che dipende esplicitamente dai parametri  $\vec{\lambda}$

$$H(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2m} (\vec{v} + \vec{\lambda})^2 + V \quad (5.12)$$

Tale trasformazione può essere assorbita in una trasformazione di gauge di parametro  $\vec{\lambda} \cdot \vec{r}$ , dove  $\vec{r}$  è il vettore posizione. Questa trasformazione di gauge riporta l'Hamiltoniana a quella di partenza, ma cambia le condizioni di periodicità delle funzioni d'onda poiché si introducono le fasi riportate nelle seguenti equazioni (5.13).

$$\begin{aligned} \psi(x + L_x) &= \exp\left(-\frac{i\lambda_x L_x}{\hbar}\right) \psi(x) \stackrel{(*)}{=} \exp(-i\alpha) \psi(x) \\ \psi(y + L_y) &= \exp\left(-\frac{i\lambda_y L_y}{\hbar}\right) \psi(y) \stackrel{(*)}{=} \exp(-i\beta) \psi(y), \end{aligned} \quad (5.13)$$

dove nel passaggio contrassegnato con (\*) si sono definiti due parametri:

$$\alpha = \lambda_x \frac{L_x}{\hbar}, \quad \beta = \lambda_y \frac{L_y}{\hbar}. \quad (5.14)$$

Quindi, modificare l'Hamiltoniana tramite trasformazione di gauge tenendo le autofunzioni periodiche è equivalente a tenere l'Hamiltoniana invariata e cambiare le condizioni di periodicità delle autofunzioni.

Si noti che se si suppone che l'energia di Fermi non sia vicina al centro di uno dei livelli di Landau, ovvero sia lontana dalle energie degli stati estesi, si ottiene che gli stati vicini all'energia di Fermi non

vengono eccitati dalla variazione di gauge adiabatica perchè sono stati localizzati (e quindi indipendenti dal parametro  $\vec{\lambda}$ ). Contestualmente gli stati estesi dipendono da  $\vec{\lambda}$ , ma sono troppo lontani dall'energia di Fermi per "saltare" ad un livello energetico superiore non occupato durante la variazione adiabatica. Per questo, l'ipotesi che durante la variazione di  $\vec{\lambda}$  lo stato cambi solo di una fase è valida per gli stati elettronici.

La velocità dei portatori lungo  $x$  ed  $y$  si può scrivere come

$$v_x = \frac{L_x}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad v_y = \frac{L_y}{\hbar} \frac{\partial H}{\partial \beta}. \quad (5.15)$$

Si può quindi riscrivere la formula della conducibilità per il singolo livello di Landau riportata in equazione 5.9 come

$$\sigma_{xy} = \sigma_{H,0} = 2\pi i \frac{e^2}{\hbar} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(E_n - E_0)^2} \left\{ \langle 0 | \frac{\partial H}{\partial \alpha} | n \rangle \langle n | \frac{\partial H}{\partial \beta} | 0 \rangle - \langle 0 | \frac{\partial H}{\partial \beta} | n \rangle \langle n | \frac{\partial H}{\partial \alpha} | 0 \rangle \right\}. \quad (5.16)$$

A questo punto si introduca il proiettore sullo stato  $|0\rangle$ ,  $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ , e una funzione di Green risolvete  $G(z) = (z\mathbb{I} - H)^{-1}$ , definita su una variabile  $z$  tale che  $z \notin \sigma(H)$ . Si può definire  $R_0$  come segue

$$R_0 = G(z)(\mathbb{I} - P_0)|_{z=E_0} \stackrel{(!)}{=} \sum_{n \neq 0} |n\rangle \frac{1}{E_n - E_0} \langle n|. \quad (5.17)$$

Si può dimostrare il passaggio evidenziato con (!) nell'equazione 5.17 per calcolo esplicito:

$$R_n(z) = G(z)(\mathbb{I} - P_n) = (z\mathbb{I} - H)^{-1} \sum_{m \neq n} |m\rangle\langle m| = \sum_{m \neq n} (z\mathbb{I} - H)^{-1} |m\rangle\langle m| = \sum_{m \neq n} \frac{1}{z - E_m} |m\rangle\langle m|. \quad (5.18)$$

Si presti attenzione al fatto che si può valutare  $G(z)$  in un punto dello spettro di  $H$  soltanto dopo l'applicazione dell'operatore sullo stato  $m$ -esimo, in quanto non si crea più un polo e la funzione rimane invertibile.  $R_n$  può essere espresso come

$$R_n(E_n) = \sum_{m \neq n} \frac{1}{E_m - E_n} |m\rangle\langle m|. \quad (5.19)$$

Anche il proiettore può essere definito tramite la funzione di Green come

$$P_n = \oint_C G(z) \frac{dz}{2\pi i}, \quad (5.20)$$

in cui  $C$  corrisponde ad un cammino chiuso percorso in senso antiorario attorno al polo  $E_n$ , e tale che non contenga nessun'altra singolarità di  $G$ . Il proiettore così definito diventa quindi come un calcolo di residuo. L'equazione 5.20 viene da:

$$G(z) = (z\mathbb{I} - H)^{-1} = (z\mathbb{I} - H)^{-1} \sum_n |n\rangle\langle n| = \sum_n \frac{1}{z - E_n} |n\rangle\langle n| = \frac{1}{z - E_0} \underbrace{|0\rangle\langle 0|}_{P_0} + \frac{1}{z - E_1} \underbrace{|1\rangle\langle 1|}_{P_1} + \dots \quad (5.21)$$

A questo punto si può derivare  $P_0$  lungo il parametro  $\alpha$  ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (z\mathbb{I} - H)^{-1} = (z\mathbb{I} - H)^{-1} \left( \frac{\partial H}{\partial \alpha} (z\mathbb{I} - H)^{-1} \right) \implies \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} = \oint \frac{dz}{2\pi i} G(z) \frac{\partial H}{\partial \alpha} G(z). \quad (5.22)$$

Si può quindi riscrivere l'equazione 5.16 come

$$\sigma_{H,0} = 2\pi i \frac{e^2}{\hbar} \text{Tr} \left\{ R_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} P_0 \frac{\partial H}{\partial \alpha} R_0 - R_0 \frac{\partial H}{\partial \alpha} P_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} R_0 \right\}. \quad (5.23)$$



Dalla relazione 5.22 si ottiene una riscrittura dei termini all'interno della 5.23

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} P_0 \frac{\partial P_n}{\partial \beta} &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \oint_C \frac{dz'}{2\pi i} G(z) \frac{\partial H}{\partial \alpha} G(z) P_0 G(z') \frac{\partial H}{\partial \beta} G(z') = \\
 &= \oint_C \frac{dz}{2\pi i} \oint_C \frac{dz'}{2\pi i} G(z) \frac{\partial H}{\partial \alpha} (z - E_0)^{-1} P_0 (z' - E_0)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \beta} G(z') = \\
 &\stackrel{(!)}{=} R_0 \frac{\partial H}{\partial \alpha} P_0 \frac{\partial H}{\partial \beta} R_0,
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

dove nel passaggio contrassegnato con (!) si è utilizzata la seguente relazione valutata per  $n = 0$ :

$$R_n = \oint_C \frac{dz}{2\pi i} G(z) (z - E_n)^{-1}. \tag{5.25}$$

In questo modo il valore della conducibilità dipende soltanto dal proiettore e dalla derivata di questo lungo i parametri di gauge, assumendo l'espressione

$$\sigma_{H,0} = 2\pi i \frac{e^2}{h} \text{Tr} \left\{ P_0 \left[ \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} \frac{\partial P_0}{\partial \beta} - \frac{\partial P_0}{\partial \beta} \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} \right] \right\}. \tag{5.26}$$

Si eseguano i calcoli espliciti per la traccia riportata nella precedente equazione:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left\{ P_0 \frac{\partial P_0}{\partial \alpha} \frac{\partial P_0}{\partial \beta} \right\} &= \langle 0 | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle \langle 0 | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle + \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | 0 \rangle \langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} | 0 \rangle + \langle 0 | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle \langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} | 0 \rangle + \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | \frac{\partial n}{\partial \beta} \rangle = \\
 &= \langle 0 | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle \langle 0 | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle + \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Si ottiene quindi come formula della conducibilità la seguente espressione:

$$\sigma_{H,0} = 2\pi i \frac{e^2}{h} \left\{ \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle - \langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle \right\}. \tag{5.28}$$

Come descritto ad inizio paragrafo, poiché la conducibilità è intensiva per la scelta di condizioni al contorno, si può passare alla media della conducibilità sul campione integrando nel dominio  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .

$$\bar{\sigma}_{H,0} \frac{h}{e^2} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\beta}{2\pi i} \left\{ \langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle - \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle \right\}. \tag{5.29}$$

Si consideri allora il piano  $(\alpha, \beta)$  dei parametri di gauge; si può definire il campo vettoriale seguente, tale da poter riscrivere il termine tra parentesi graffe in equazione 5.29:

$$\vec{\mathcal{A}}_0(\alpha, \beta) = \langle \nabla 0 | 0 \rangle, \quad \langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} | \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \rangle - \langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} | \frac{\partial 0}{\partial \beta} \rangle = \nabla \times \vec{\mathcal{A}}_0 \cdot \hat{z}. \tag{5.30}$$

Applicando il teorema di Stokes si può riscrivere l'equazione 5.29 ottenendo

$$\bar{\sigma}_{H,0} \frac{h}{e^2} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\beta \frac{\nabla \times \vec{\mathcal{A}}_0 \cdot \hat{z}}{2\pi i} = \oint \frac{d\vec{l} \cdot \vec{\mathcal{A}}_0}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \oint d\vec{l} \cdot \langle \nabla 0 | 0 \rangle, \tag{5.31}$$

dove l'integrale è svolto su un dominio quadrato  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ , poiché sia  $\alpha$  che  $\beta$  devono essere periodici di periodo  $2\pi$  come visto in equazione 5.13.

Deve verificarsi, per entrambi i parametri, che passando da 0 a  $2\pi$  la fase overall debba cambiare di un fattore  $2\pi$  a sua volta, rendendo lo stato inalterato. Si ottiene di conseguenza che

$$\oint d\vec{l} \langle \nabla 0 | 0 \rangle = 2\pi i \cdot \nu. \tag{5.32}$$

La conducibilità totale del campione riportata diventa quantizzata

$$\bar{\sigma}_H = \nu \frac{e^2}{h} \quad (5.33)$$

dove  $\nu$  è la somma di tutti i  $\nu_n$  parametri associati ad ogni livello di Landau. A temperature basse, l'energia di Fermi si trova tra i livelli degli stati estesi, di conseguenza la funzione di Fermi diventa una funzione a gradino e la somma si estende su tutti i livelli di Landau completamente riempiti al di sotto dell'energia di Fermi.

### 5.3 La fase di Berry

Nel precedente paragrafo si è trovata una maniera per quantizzare la conducibilità ipotizzando soltanto che ci fosse invarianza per traslazioni lungo il campione.

Ora lo scopo è quello di dimostrare che l'equazione 5.32 corrisponde al calcolo della fase di Berry.

Si utilizzi la geometria del toro, come in equazione 5.13. I parametri di gauge sono gli unici parametri che regolano l'Hamiltoniana e di conseguenza devono sottostare alle condizioni di periodicità definite in equazione 5.16. Quando l'hamiltoniana dipende da parametri esterni, imponendo una trasformazione di tali parametri, gli stati possono subire una modifica di fase, detta fase di Berry.

Per creare la fase di Berry è necessario che questa variazione dei parametri avvenga su un percorso chiuso all'interno del loro spazio. Per il teorema adiabatico lo stato di arrivo deve essere lo stesso di quello di partenza, ma ciò non esclude la presenza di una fase (come commentato nel precedente paragrafo)

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\gamma} |\psi\rangle. \quad (5.34)$$

Questa fase non è una semplice fase overall, ma è formata da due componenti: una fase di evoluzione dinamica  $\exp\left(\frac{-iEt}{\hbar}\right)$  e, appunto, la fase di Berry.

### 5.4 Calcolo della fase di Berry e della connessione

Tenendo conto che l'Hamiltoniana dipende da parametri  $\alpha$  e  $\beta$ , nelle condizioni in esame nel paragrafo 5.2, significa che per ogni scelta di parametri è definibile uno stato fondamentale diverso. Per comodità si pensi ad un unico parametro vettoriale  $\vec{\Lambda}$  definito come vettore dei parametri dell'Hamiltoniana

$$\Lambda_x = \alpha, \quad \Lambda_y = \beta. \quad (5.35)$$

Si faccia quindi evolvere nel tempo lo stato LLL dell'Hamiltoniana, tramite una trasformazione adiabatica che modifica lo stato con una fase  $U(t)$ .

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|0(\vec{\Lambda}(t))\rangle. \quad (5.36)$$

Lo scopo è determinare come cambia la fase  $U(t)$ , dopo aver variato i parametri di gauge su un percorso chiuso.

Si calcoli il prodotto scalare della derivata secondo  $\Lambda_i$  dello stato evoluto, con lo stato non evoluto. Si ottiene la seguente relazione

$$\langle\psi|\dot{\psi}\rangle = \dot{U}U^* + \langle n|\dot{n}\rangle = 0, \quad (5.37)$$

dalla quale si ricava

$$U^*\dot{U} = -\langle n|\dot{n}\rangle = -e\langle n|\frac{\partial}{\partial\Lambda_i}|n\rangle\dot{\Lambda}_i. \quad (5.38)$$

Si può definire connessione di Berry la seguente espressione:

$$\mathcal{A}_i(\vec{\Lambda}) = -ie\langle n|\frac{\partial}{\partial\Lambda_i}|n\rangle, \quad (5.39)$$

che corrisponde ad una uno-forma nello spazio dei parametri.

Allora valgono le seguenti relazioni per la fase definita in equazione 5.36:

$$\dot{U} = -ie\mathcal{A}_i\dot{\Lambda}^i U \implies U(t) = \exp\left(-ie \int \mathcal{A}_i(\Lambda)\dot{\Lambda}^i dt\right). \quad (5.40)$$

Integrando  $U(t)$  su un percorso chiuso si ottiene la fase acquisita dallo stato dopo aver compiuto tale trasformazione nello spazio dei parametri

$$e^{i\gamma} = \exp\left(-ie \oint_C \mathcal{A}_i(\Lambda)d\Lambda^i\right), \quad (5.41)$$

e questa è detta fase di Berry. Si noti che non dipende dal tempo impiegato per effettuare la trasformazione ciclica completa, ma dipende soltanto dalla forma del percorso compiuto nello spazio dei parametri.

Si consideri quindi il tensore di curvatura definito associato alla connessione di Berry riportata in equazione 5.39:

$$\mathcal{F}_{xy} = e \left( \frac{\partial \mathcal{A}_x}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathcal{A}_y}{\partial \alpha} \right) |_{|0\rangle} = -ie^2 \left[ \left\langle \frac{\partial 0}{\partial \beta} \middle| \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial 0}{\partial \alpha} \middle| \frac{\partial 0}{\partial \beta} \right\rangle \right] \quad (5.42)$$

quest'equazione corrisponde, a meno di fattori costanti, alla conducibilità ricavata in equazione 5.28. Si può dimostrare che questo tensore è invariante sotto trasformazione di gauge, infatti vale la seguente relazione

$$\mathcal{A}'_i = \mathcal{A}_i + \frac{\partial \omega}{\partial \Lambda_i}, \quad (5.43)$$

poichè il tensore di curvatura è definito come 5.42, l'ultimo termine in equazione 5.43 si elide per una qualsiasi funzione  $\omega(\Lambda)$ .

## 5.5 Quantizzazione della conducibilità del campione

Dalla formula della conducibilità visibile nell'equazione 5.28 e sfruttando la forma del tensore di curvatura 5.42, è possibile calcolare la conducibilità media sul campione integrando i parametri  $\vec{\Lambda}$  sul toro

$$\bar{\sigma}_H = -\frac{e^2}{\hbar} \int_{T^2} \frac{d\Lambda}{(2\pi)^2} \mathcal{F}_{xy} \stackrel{(*)}{=} \frac{-e^2}{2\pi\hbar} C \quad (5.44)$$

dove  $C$  nel passaggio contrassegnato con (\*) è il primo numero di Chern  $C \in \mathbf{Z}$  anche detto invariante di TKNN (Thouless, Kohomoto, Nightingale e den Nijs), definito come

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{T^2} d^2\Lambda \mathcal{F}_{xy} \in \mathbf{Z}. \quad (5.45)$$

In questo modo si è ottenuto che se si opera la media su tutti i flussi possibili la conducibilità di Hall è necessariamente quantizzata.



# Bibliografia

- [1] Steven M. Girvin. «The Quantum Hall Effect: Novel Excitations and Broken Symmetries». In: (1999). DOI: 10.48550/ARXIV.COND-MAT/9907002. URL: <https://arxiv.org/abs/cond-mat/9907002>.
- [2] B. I. Halperin. «Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential». In: *Phys. Rev. B* 25 (4 feb. 1982), pp. 2185–2190. DOI: 10.1103/PhysRevB.25.2185. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.25.2185>.
- [3] K. v. Klitzing, G. Dorda e M. Pepper. «New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance». In: *Phys. Rev. Lett.* 45 (6 ago. 1980), pp. 494–497. DOI: 10.1103/PhysRevLett.45.494. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.494>.
- [4] L.D. Landau, E.M. Lifshitz e L.P. PitaevkiJ. «Electrodynamics of Continuous Media». In: Pergamon Press Oxford London New York Paris, 1960.
- [5] R. B. Laughlin. «Quantized Hall conductivity in two dimensions». In: *Phys. Rev. B* 23 (10 mag. 1981), pp. 5632–5633. DOI: 10.1103/PhysRevB.23.5632. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.23.5632>.
- [6] G. Morandi. «Quantum Hall Effect. Topological problems in condensed matter physics». In: Bibliopolis, 1988. Cap. 6.
- [7] R.E. Prange e S.M. Girvin. «The Quantum Hall Effect». In: Springer-Verlag, 1990. Cap. numeri.
- [8] D. J. Thouless et al. «Quantized Hall Conductance in a Two-Dimensional Periodic Potential». In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (6 ago. 1982), pp. 405–408. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.405. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.405>.
- [9] David Tong. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. 2016. DOI: 10.48550/ARXIV.1606.06687. URL: <https://arxiv.org/abs/1606.06687>.
- [10] D. C. Tsui, H. L. Stormer e A. C. Gossard. «Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit». In: *Phys. Rev. Lett.* 48 (22 mag. 1982), pp. 1559–1562. DOI: 10.1103/PhysRevLett.48.1559. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.48.1559>.