Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
Statistica per l'Economia e l'Impresa

RELAZIONE FINALE

La costruzione della frontiera efficiente in presenza di vincoli lineari, non-lineari e probabilistici

Relatore Prof. Massimiliano Caporin
Dipartimento di Scienze Statistiche

Laureando: Matilde Ballestracci
Matricola N 2037756

Anno Accademico 2023/2024

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

I mercati finanziari hanno da sempre suscitato un grande interesse per gli investitori, i quali mirano, ancora oggi, ad allocare la propria ricchezza con il fine ultimo di massimizzare l'utilità attesa. L'obbiettivo è proprio quello di individuare un portafoglio di titoli quotati in Borsa in cui investire il capitale, in modo tale che la quantità investita per ogni titolo porti ad un guadagno complessivo superiore rispetto a qualsiasi altra scelta alternativa di tali quantità.

L'analisi e gli strumenti utilizzati per tale scelta sono stati per anni il fulcro di studio per moltissimi matematici ed economisti. Uno di questi fu Harry Markowitz, che nel 1952 elaborò la cosiddetta "Modern Portfolio Theory", una teoria che di fatto rivoluzionò l'ottimizzazione di portafoglio. Tale modello affronta l'analisi di portafoglio attraverso il criterio di media-varianza, ovvero un criterio basato sul rendimento atteso e sulla matrice di covarianza dei titoli inclusi nel portafoglio. Questi fattori permettono di costruire una relazione, chiamata Frontiera Efficiente, la quale include l'insieme dei portafogli ammissibili che minimizzano il rischio garantendo un rendimento prefissato o, in modo alternativo, che massimizzano il rendimento garantendo un certo livello di rischio.

Sebbene il modello di Markowitz portò all'innovazione dell'approccio per l'individuazione di portafogli efficienti, fu spesso messo in discussione a causa delle restringenti ipotesi sottostanti, che non tengono conto delle reali esigenze degli agenti finanziari. Tra i vari assunti fondamentali della teoria moderna di portafoglio, si presuppone che gli investitori siano avversi al rischio e che l'unico scopo da raggiungere sia quello di massimizzare la ricchezza finale. In uno scenario realistico si potrebbe decidere di imporre dei vincoli di capitale massimo e minimo da assegnare a ciascun titolo o ad ogni settore presente nel portafoglio con l'intento di indurre una diversificazione minima. Una ulteriore ipotesi alla base del modello è l'assenza di costi di transizione e di imposte, che, invece, devono essere sostenuti ad ogni operazione di vendita e di acquisto. Una soluzione atta a limitare tali costi, che sono specifici per ogni asset, si trova imponendo dei vincoli di turnover, che rappresenta il rapporto percentuale tra gli acquisti e le vendite di uno strumento finanziario.

Gli esempi citati descrivono solo una piccola parte dei possibili vincoli che possono essere imposti dagli investitori nella ricerca di un portafoglio efficiente, che rispecchia le necessità che possono sorgere in un contesto svincolato dagli assiomi, spesso irrealistici, considerati nella teoria di Markowitz. La seguente tesi mira ad analizzare le scelte ottime d'investimento per l'agente, considerando i principali fattori che influiscono in tali scelte. Si studia in particolare il comportamento della frontiera efficiente in presenza di vincoli lineari, non-lineari e probabilistici, esaminati, in un secondo momento, attraverso una indagine empirica condotta con l'utilizzo del software R.

Capitolo 1

Teoria di selezione di portafoglio

L'obbiettivo degli agenti che si interfacciano al modo dei mercati finanziari è di attuare delle scelte di investimento coerenti, al fine di ottenere un profitto. Il primo passo è derivare un insieme di portafogli efficienti, ovvero dei portafogli che forniscono il più alto rendimento atteso possibile rispetto a degli specifici livelli di rischio. Tali portafogli efficienti possono essere rappresentati nello spazio definito da rischio e rendimento attraverso una funzione chiamata Frontiera Efficiente. Nel seguente capitolo si approfondirà la teoria di selezione di portafoglio elaborata da Markowitz, che utilizza delle tecniche di modellizzazione atte a quantificare i rendimenti attesi e i livelli di rischio di portafoglio accettabili, fornendo un metodo per la selezione di un portafoglio ottimo. La teoria di selezione di portafoglio tende a descrivere il comportamento standard che gli investitori dovrebbero perseguire nella costruzione di un portafoglio, piuttosto che a prevedere il comportamento reale degli investitori. Difatti uno degli assunti fondamentali è che gli investitori intendano massimizzare la ricchezza e che siano avversi al rischio.

1.1. Rischio e Rendimento atteso

In generale un portafoglio è costituito da un numero n di titoli rischiosi, ovvero titoli finanziari il cui rendimento futuro è incerto. L'ipotesi di base è che la distribuzione dei rendimenti è completamente caratterizzata dai primi due momenti, valore atteso e varianza dei rendimenti. Si può affermare, quindi, che i fattori che giocano un ruolo fondamentale nella determinazione di un portafoglio efficiente si basano sul rendimento dei titoli e sul rischio ad essi associati. La teoria di selezione di portafoglio si riferisce all'analisi della media-varianza, rappresentati per l'appunto rispettivamente dal rendimento atteso e dal rischio dell'intero portafoglio. È utile ricordare che portafogli diversi hanno diversi livelli di rendimento atteso e di rischio e che spesso ad un rendimento elevato è associato un rischio elevato; quindi, gli investitori devono attuare una scelta tra tutte le possibili combinazioni di rischio-rendimento.

1.1.1. Rendimento atteso

Il rendimento risulta uno degli aspetti più interessanti nell'analisi delle serie storiche finanziarie e non solo. Esso rappresenta uno strumento diretto per quantificare la redditività di uno specifico strumento finanziario ed è spesso utilizzato come riassunto completo e adimensionale delle opportunità di investimento. Nella sua concezione più generale il rendimento semplice uniperiodale netto è definito come l'incremento netto del prezzo che si verifica nell'arco temporale di un periodo da t-1 a t, ovvero:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1. 1}$$

Una seconda formulazione dei rendimenti consente di specificare i rendimenti logaritmici, calcolati come differenza prima della trasformazione logaritmica dei prezzi, ovvero:

$$r_t = log\ P_t - \ log\ P_{t-1} \tag{1. 2}$$

dove $P_t \in \mathbb{R}^+$ rappresenta il prezzo al tempo t $\in \mathbb{N}$ dell'attività finanziaria.

Il rendimento atteso r di una attività finanziaria è definito come il valore atteso dei rendimenti di tale attività e può essere stimato attraverso diversi approcci. Infatti, esso può essere ottenuto attraverso una semplice media, calcolata sulla serie storica dei rendimenti, attraverso una stima basata sullo smorzamento esponenziale, attraverso dei modelli econometrici/statistici oppure attraverso delle stime ottenute sulla base di teorie finanziarie, tra le quali si ritrova il capital asset pricing model. Quest'ultima teoria formalizza una relazione che dovrebbe esistere tra i rendimenti attesi e il rischio, sotto delle stringenti ipotesi che descrivono il comportamento degli investitori. Il CAPM, inoltre, permette di stimare i rendimenti attesi, basati su dati storici, che potranno essere utilizzati come input per la costruzione di un portafoglio efficiente. È importante, però, sottolineare che la teoria di selezione del portafoglio è indipendente da qualsiasi teoria riguardante l'asset pricing e che la sua validità non si basa sulla validità della teoria del CAPM.

Dopo aver determinato quali e quanti asset includere nel portafoglio, gli investitori devono scegliere come allocare la propria ricchezza tra i vari titoli. Sia n il numero di titoli rischiosi inclusi nel portafoglio e r_i il rendimento atteso associato all' i-esimo titolo del portafoglio, si definisce rendimento atteso di portafoglio:

$$\mu_P = \sum_{i=0}^{n} r_i \omega_i \tag{1. 3}$$

dove ω_i rappresenta il peso assegnato all'i-esimo titolo del portafoglio, ovvero definisce l'impatto che avrà un titolo all'interno del portafoglio.

L'equazione 1.3 può essere riscritta in forma matriciale. Sia r il vettore di dimensione $n \times 1$ contenente i rendimenti attesi degli n titoli rischiosi e ω il vettore dei pesi associati ai titoli, allora:

$$\mu_P = \omega' r \tag{1. 4}$$

1.1.2. Rischio

L'incertezza associata a un titolo rischioso è strettamente legata alla variabilità del suo rendimento rispetto al rendimento atteso. Il rischio di un'attività finanziaria, quindi, misura le fluttuazioni dei rendimenti ed è rappresentata dalla varianza, che quantifica la dispersione dei rendimenti intorno al rendimento medio o atteso. Pertanto, la varianza del rendimento del titolo i-esimo è definita come:

$$\sigma_i^2 = \mathbb{E}[r_i - \mathbb{E}(r_i)]^2 = \mathbb{E}[r_i - \mu_i]^2 \tag{1. 5}$$

La matrice di covarianza Σ dei rendimenti è una matrice di dimensione $n \times n$ che include le varianze e le covarianze dei rendimenti degli n titoli rischiosi. Essa, come nel caso del rendimento atteso, può essere ricavata attraverso diversi approcci, tra i quali ha rilevanza il capital asset pricing model, che utilizza una stima basata su dati storici.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$
(1. 6)

Dove σ_{ij} rappresenta la covarianza tra il titolo i-esimo e il titolo j-esimo, ovvero:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}(r_i))(r_j - \mathbb{E}(r_j))]$$
(1. 7)

La covarianza è una quantità che misura la variazione congiunta dei rendimenti di due titoli. Una covarianza positiva indica che i rendimenti di due attività tendono a muoversi nella stessa direzione, mentre una covarianza negativa indica che i rendimenti tendono a muoversi in direzioni opposte.

L'equazione 1.5 esprime la varianza del rendimento di un singolo titolo finanziario. La varianza di un portafoglio composto da n titoli rischiosi è più complessa da calcolare, poiché, oltre alla varianza dei singoli asset, include la covarianza tra ogni coppia di titoli. Un generico portafoglio avrà varianza pari a:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$
(1. 8)

dove ω_i è il peso associato al titolo i-esimo, σ_i^2 è la varianza del titolo i-esimo e ρ_{ij} è la correlazione tra il titolo i e il titolo j. La correlazione tra il rendimento del titolo i e il titolo j è definita come la covarianza tra i due titoli divisa per il prodotto delle loro deviazioni standard e può assumere un valore compreso tra -1 e 1. Sia $\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$ la deviazione standard del titolo i-esimo, allora la correlazione tra due titoli è:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \, \sigma_j}$$
(1. 9)

L'equazione 1.8 può essere riscritta anche in maniera compatta, attraverso l'utilizzo del calcolo matriciale:

$$\sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega$$
(1. 10)

dove ω rappresenta il vettore dei pesi associati ai titoli di portafoglio e Σ è la matrice di covarianza dei rendimenti degli n titoli rischiosi.

1.1.3. Diversificazione di portafoglio

Un concetto importante discusso nella teoria di selezione di portafoglio è il principio di diversificazione. Secondo tale principio è possibile mantenere invariato il rendimento atteso riducendo il rischio, mediante l'inclusione all'interno del portafoglio di titoli che non sono correlati positivamente. Ad esempio, si potrebbe decidere di selezionare delle attività appartenenti a settori economici differenti, i cui rendimenti si muovono in direzioni opposte. La diversificazione di Markowitz evidenzia l'importanza dell'analisi delle correlazioni tra gli asset e può essere illustrata attraverso un semplice esempio di portafoglio a due attività A e B. In questo caso la varianza di portafoglio è determinata dalla relazione $\sigma_p^2 = \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_A^2 + 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$. Questa funzione descrive, infatti, la relazione che intercorre tra la varianza di un portafoglio a due asset e la correlazione dei rendimenti di tali attività. A seconda del valore assunto dalla correlazione $\rho_{\mathrm{AB}} \in \{-1,1\}$, si ottiene una varianza più o meno elevata. Si distinguono tre casi principali, vale a dire: il caso in cui le due attività sono perfettamente correlate in modo positivo $\rho_{\mathrm{AB}} = 1$, il caso in cui le due attività sono incorrelate $\rho_{\mathrm{AB}} = 0$ e il caso in cui le due attività sono perfettamente correlate in modo negativo $\rho_{\mathrm{AB}} = -1$.

$$\sigma_p^2 = \begin{cases} \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_A^2 + 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B & se \quad \rho_{\mathrm{AB}} = 1 \\ \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_A^2 & se \quad \rho_{\mathrm{AB}} = 0 \\ \omega_A^2\sigma_A^2 + \omega_B^2\sigma_A^2 - 2\omega_A\omega_B\sigma_A\sigma_B & se \quad \rho_{\mathrm{AB}} = -1 \end{cases} \tag{1. 11}$$

Si dimostra, quindi, che al diminuire della correlazione tra il titolo A e il titolo B, diminuisce anche la varianza del rendimento atteso del portafoglio. Infatti, la diversificazione descritta da Markowitz afferma che al decrescere della correlazione (covarianza) tra i rendimenti delle attività incluse nel portafoglio, decresce anche la varianza del portafoglio, ovvero il rischio si riduce. Una simile asserzione risulta fondamentale per la costruzione di un portafoglio efficiente, poiché suggerisce che gli investitori hanno la possibilità di ridurre il rischio del portafoglio combinando attività con correlazioni basse, preferibilmente negative, ottenendo lo stesso rendimento atteso. Tuttavia, non è frequente trovare delle attività che abbiano una correlazione bassa o addirittura negativa.

1.2. Scelta in condizione di incertezza

Come detto in precedenza, gli agenti finanziari, che intendono investire il proprio capitale in un set di titoli quotati nel mercato, devono attuare delle scelte che hanno natura intertemporale. La "teoria della scelta" economica, ampiamente usufruita nei vari ambiti dell'economia, utilizza il concetto di funzione di utilità per descrivere il modo in cui gli operatori prendono delle decisioni quando si trovano di fronte a un insieme di scelte. Una funzione di utilità assegna un valore numerico a tutte le scelte possibili, in modo tale che un valore più alto venga associato ad una scelta che garantisce un'utilità maggiore. Nell'ambito della teoria di portafoglio, questo concetto è la traduzione delle preferenze degli investitori rispetto al rischio percepito e alle combinazioni di rendimento atteso. Utilizzando l'utilità attesa di Von Neumann e Morgenstern si ha che, data una funzione $U(W_1)$ dove $W_1 = W_0(1 + r_p)$ è il valore dell'investimento al tempo 1 e assumendo che $\mathrm{U}'(\mathrm{W}_1) > 0$, ovvero che l'investitore è razionale, l'utilità attesa è:

$$\mathbb{E}[U(W_1)] = \sum_{i=1}^{S} p_i U(W_{1,i}) \tag{1. 12}$$

dove S rappresenta il numero di possibili esiti per W_1 e p_i rappresenta la probabilità di ottenere un'utilità pari a $\mathrm{U}(\mathrm{W}_{1,\mathrm{i}})$, tale che $\sum_{i=1}^{S} p_i = 1$.

Nel caso in cui un soggetto è avverso al rischio si ha che, tra un portafoglio privo di rischio con rendimento pari a μ e un portafoglio con rischio specifico diverso da zero e rendimento atteso pari a μ, la scelta ricade nel portafoglio privo di rischio. È utile determinare il certo-equivalente, ossia la quantità monetaria associata all'attività priva di rischio che fornisce una utilità pari a quella di un investimento rischioso. Il certo-equivalente è sempre inferiore al valore atteso di un investimento rischioso se l'agente è avverso al rischio $\mathrm{U}(\mathrm{CE}) = \mathrm{E}[\mathrm{U}(\mathrm{W}_1)] < \mathrm{U}(\mathrm{E}[\mathrm{W}_1])$. Un agente potrebbe essere disposto a pagare una certa somma per evitare il rischio di un investimento. Tale quantità è chiamata premio al rischio e rappresenta la remunerazione ottenuta per essersi esposti a uno specifico rischio. Essa può essere espressa come differenza tra il valore atteso dell'investimento rischioso e l'equivalente certo $\lambda(W_1) = \mathbb{E}[W_1] - CE$.

L'equivalente certo può essere espresso anche come:

$$U(CE) = U(\mathbb{E}[W_1] - \lambda(W_1)) \tag{1. 13}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor in un intorno di $\mathbb{E}[W_1]$, si ottiene che il certo-equivalente è approssimativamente pari alla differenza tra valore atteso e la varianza di una attività priva di rischio e considera anche il livello di avversione al rischio:

$$CE \approx \mathbb{E}[W_1] - \frac{\eta}{2}\mathrm{Var}[W_1] \tag{1. 14}$$

dove η rappresenta il coefficiente di avversione al rischio.

L'espressione 1.14 risulta esatta se la funzione di utilità dell'agente è una funzione esponenziale negativa, ovvero se $U(x) = e^{-x\eta}$, e se i rendimenti seguono una distribuzione normale.

1.2.1. Dominanza stocastica

La dominanza stocastica è un concetto legato alle scelte effettuate da un agente razionale e avverso al rischio. Nella teoria della dominanza stocastica vengono stabilite le condizioni analitiche che assicurano la dominanza di una distribuzione di probabilità rispetto a un'altra, considerando delle funzioni di utilità che possono essere di diverso tipo. Più semplicemente tale teoria rappresenta un metodo per valutare le preferenze e analizza la funzione di utilità, che caratterizza uno specifico investitore, in relazione alla distribuzione dei rendimenti dei titoli rischiosi. Esistono diversi criteri della dominanza stocastica classificati in base alle condizioni dell'ordinamento delle attività rischiose.

La dominanza stocastica di primo ordine esprime un ordinamento tra un investimento A e un investimento B, quando la funzione di utilità è non decrescente e sotto l'ipotesi che gli investimenti sono tra loro indipendenti. Secondo codesto criterio, l'investimento A domina l'investimento B se e solo se $\mathbb{E}[U(A)] \geq \mathbb{E}[U(B)]$ ed esiste almeno un valore x per il quale la disuguaglianza vale in senso stretto. La precedente affermazione è equivalente a dire che A domina B se $\mathrm{F(x)} \leq \mathrm{G(x)}$ per un qualsiasi x, dove F è la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento A e G è la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento B, ed esiste almeno un valore di x per il quale la disuguaglianza vale in senso stretto.

La dominanza stocastica di secondo ordine esprime un ordinamento tra un investimento A e un investimento B, quando la funzione di utilità è non decrescente e concava, e considera anche il caso in cui le funzioni di ripartizione, che caratterizzano gli investimenti, si intersecano. Secondo codesto criterio, l'investimento A domina l'investimento B se e solo se $\mathbb{E}[\mathrm{U(A)}] \geq \mathbb{E}[\mathrm{U(B)}]$ ed esiste almeno un valore x per il quale la disuguaglianza vale in senso stretto. È equivalente dire che l'investimento A domina l'investimento B se e solo se $\int_{-\infty}^{x} [G(z) - F(z)] \partial z \geq 0 \ \forall x$, dove F è la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento A e G è la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento B, ed esiste almeno un valore x per il quale la disuguaglianza vale in senso stretto. Molto spesso, però, il criterio di ordinamento così definito tende a preferire investimenti contraddistinti da una varianza elevata.

La dominanza stocastica di terzo ordine afferma che A domina B se e solo se $\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} [G(z) - F(z)] \partial z \partial y \geq 0 \ \forall x$ ed esiste almeno un valore di x per il quale la disuguaglianza vale in senso stretto. F rappresenta la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento A e G rappresenta la funzione di ripartizione cumulata associata all'investimento B.

La dominanza stocastica di secondo ordine ha delle importanti implicazioni nel criterio di media-varianza che distingue la teoria moderna di portafoglio. Infatti, si può dimostrare che, se i rendimenti di due investimenti A e B hanno la stessa distribuzione di probabilità tale da essere completamente specificata dai primi due momenti (valore atteso e varianza), A domina B se $\mathbb{E}[\mathrm{A}] \geq \mathbb{E}[\mathrm{B}]$ e, se le funzioni di ripartizione cumulata dei due investimenti si intersecano, allora A domina B se $\mathrm{Var[A]} \leq \mathrm{Var[B]}$. Quest'ultimo teorema vale anche quando le funzioni di ripartizione non si intersecano.

1.3. Il modello di Markowitz

Nel 1952 Harry Markowitz elaborò la teoria di selezione di portafoglio, chiamata "Teoria moderna di portafoglio", spesso nota come analisi di media-varianza. Il concetto alla base, che portò a una nuova visione dell'analisi dei portafogli, è che il rischio e il rendimento di un asset non dovrebbero essere valutati separatamente, ma piuttosto si dovrebbe indagare in che maniera i due fattori contribuiscono nel rischio e nel rendimento complessivi di un portafoglio. I principi fondamentali su cui si erge tale teoria sono molteplici: gli investitori sono razionali e avversi al rischio, il periodo di investimento è unico, i costi di transizione e le imposte sono nulli, il valore atteso e la deviazione standard sono gli unici fattori che guidano la scelta, il mercato è perfettamente concorrenziale.

1.3.1. Criterio media e varianza

La teoria moderna di portafoglio prevede che la ricerca di un portafoglio ottimale debba essere ottenuta come risultato di una procedura di ottimizzazione di portafoglio volta a generare il rapporto rischio-rendimento più elevato. Ciò significa ricercare tra i portafogli ammissibili, ossia tra i portafogli raggiungibili dall'investitore data una dotazione iniziale monetaria, quello che risulta essere anche efficiente. Un portafoglio efficiente è tale da garantire un rendimento obbiettivo, minimizzando il livello di rischio o, in egual modo, di garantire uno specifico livello di rischio massimizzando il rendimento. L'idea di base, quindi, è che tra un portafoglio A e un portafoglio B, A è preferibile a B se $\mu_A \geq \mu_B$ e $\sigma_A \leq \sigma_B$ e una delle due disuguaglianze può valere in senso stretto. Qualora tali ipotesi non siano verificate, non è possibile garantire un ordinamento in modo diretto.

In un'impostazione di media-varianza, la scelta del portafoglio ottimo da parte di un investitore, caratterizzato da una funzione di utilità in cui le preferenze sono descritte dai primi due momenti delle attività rischiose, si ottiene massimizzando l'utilità attesa. Precedentemente, si è definita la funzione di utilità di un agente, sotto l'ipotesi di normalità dei rendimenti e di funzione di utilità quadratica o esponenziale negativa, come:

$$U(CE) = \mathbb{E}[U(W_1)] = \mathbb{E}[W_1] - \frac{\gamma}{2} Var[W_1]$$

(1. 15)

dove $W_1 = W_0(1 + R_p)$ è la ricchezza a tempo 1 e R_p è il rendimento di portafoglio, ovvero $R_p = \sum_{i=1}^{N} \omega_i R_i$. Dall'equazione 1.15, supponendo che $W_0 = 1$ e che per semplicità si considera $W_1 = R_p$, si ricava la seguente espressione:

$$\mathbb{E}[U(W_1)] \propto \mathbb{E}[R_p] - \frac{\gamma}{2} Var[R_p]$$

(1. 16)

dove γ rappresenta il coefficiente di avversione al rischio, $\mathbb{E}[\mathrm{Rp}] = \omega' \mathrm{r}$ con r vettore dei rendimenti attesi dei titoli rischiosi inclusi nel portafoglio e $\mathrm{Var}[\mathrm{Rp}] = \omega' \Sigma \omega$ con Σ matrice di covarianza dei rendimenti.

Il problema di ottimizzazione si traduce nel massimizzare l'utilità attesa dell'investitore considerando come variabile di controllo il vettore ω, ossia il vettore di ponderazione ottimale assegnato agli n titoli rischiosi inclusi nel portafoglio:

$$\max_{\omega} \omega' \mathrm{r} - \frac{\gamma}{2} \omega' \Sigma \omega$$
$$\mathrm{s.t.} \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$$

(1. 17)

Si evince che, al variare del coefficiente di avversione al rischio, si possono determinare i portafogli che possono essere raggiunti dall'investitore. Il problema di massimizzazione dell'utilità vale se e solo se è verificato il vincolo di ammissibilità, ovvero se la somma dei pesi associati ai titoli rischiosi è pari a 1. Dalla risoluzione del problema precedente, però, si possono ottenere delle combinazioni dominate rispetto ad altre, ovvero dei portafogli che portano allo stesso rendimento ma con varianza superiore. Risulta, quindi, necessario definire la frontiera efficiente.

1.3.2. Frontiera efficiente

Il modello di Markowitz prevede l'individuazione di un insieme di portafogli efficienti tali per cui non esistono ulteriori portafogli che garantiscono lo stesso rendimento con rischio inferiore o che garantiscono rendimento maggiore con lo stesso rischio. Il problema di ottimizzazione di portafoglio può, quindi, essere risolto attraverso due approcci parametrici differenti. Il primo approccio consiste nel minimizzare la varianza di portafoglio rispetto a un rendimento dato, chiamato rendimento obbiettivo μ_p. Esso si trova risolvendo:

$$\begin{aligned} \min_{\omega} \sigma_p^2 &= \min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ \text{s.t.} \quad & \omega' 1_n = 1 \\ & \mu_p = \omega' r \end{aligned}$$

(1. 18)

Attraverso l'applicazione della teoria dei moltiplicatori di Lagrange, una tecnica atta a ricercare il massimo e il minimo vincolati di una funzione, si definisce una relazione fondamentale che lega il rendimento atteso di portafoglio μ_p e la varianza del portafoglio σ_p.

$$\min_{\omega} L(\omega) = \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega - \lambda_1 (\omega' r - \mu_p) - \lambda_2 (\omega' 1_n - 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \omega'} = \Sigma \omega - \lambda_1 r - \lambda_2 1_n = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \omega' r - \mu_p = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \omega' 1_n - 1 = 0 \end{cases}$$

(1. 19)

Si ricava il vettore dei pesi come: $\omega = \frac{A\Sigma^{-1}1_n - B\Sigma^{-1}r}{\Delta} + \frac{C\Sigma^{-1}r - B\Sigma^{-1}1_n}{\Delta} \mu_p$, dove $A = r'\Sigma^{-1}r$, $B = 1_n'\Sigma^{-1}r$,$C = 1_n'\Sigma^{-1}1_n$ e $\Delta = AC - B^2$. Attraverso la conoscenza del vettore dei pesi è possibile definire la seguente relazione, che permette di rappresentare l'insieme dei portafogli efficienti:

$$\sigma_p^2 = \frac{A}{\Delta} - 2\frac{B}{\Delta}\mu_p + \frac{C}{\Delta}\mu_p^2$$

(1. 20)

Tale relazione è chiamata Frontiera Efficiente e include l'insieme dei portafogli efficienti che hanno varianza minima dato un rendimento e che hanno rendimento massimo per un dato livello di rischio. Formulata in termini di media-varianza del rendimento di portafoglio, la frontiera efficiente è descritta da una parabola, in cui la variabile esplicative è μ_p e la variabile dipendente è σ_p^2.

Nello spazio (μ_p, σ_p^2) tale funzione individua tutti i punti associati ai portafogli efficienti.

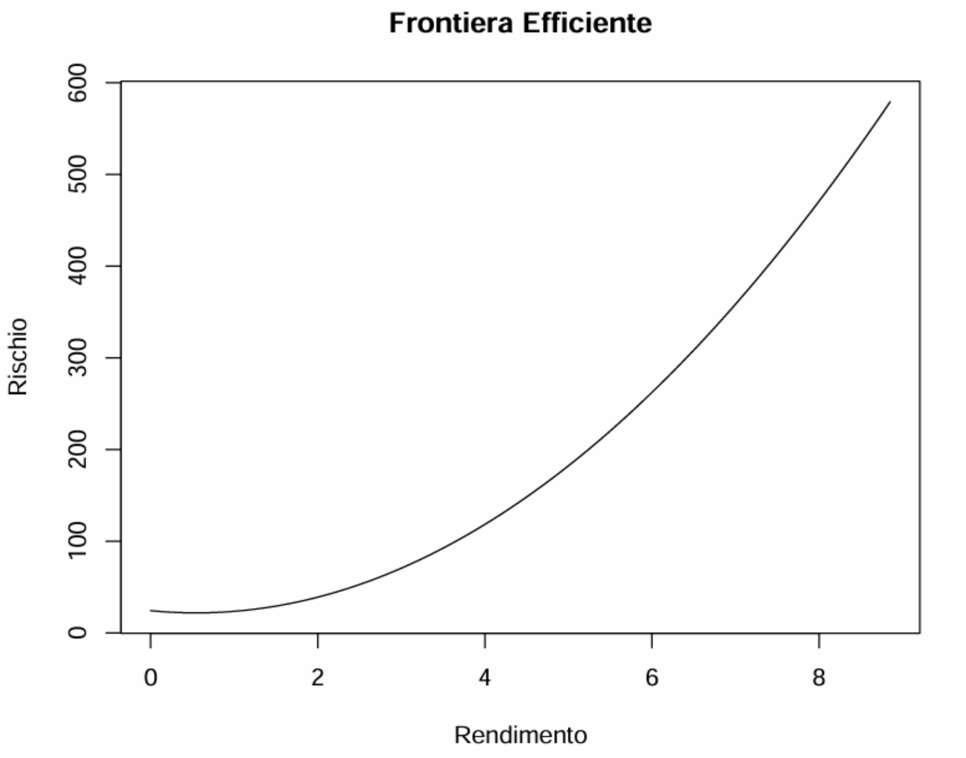


Figura 1

La frontiera efficiente si può ricavare anche con un secondo approccio parametrico, ovvero risolvendo il problema di ottimizzazione del portafoglio che massimizza il rendimento del portafoglio rispetto a un livello di rischio dato.

$$
\begin{aligned}
&\max_{\omega} \mu_p = \max_{\omega} \omega' r \\
&\text{s.t.} \qquad \omega' 1_n = 1 \\
&\qquad\qquad \sigma_p^2 = \omega' \Sigma \omega
\end{aligned}
$$

(1. 21)

Normalmente, però, la frontiera efficiente è definita nello spazio (σ_p, μ_p), poiché la volatilità, quantificata mediante la deviazione standard, possiede la stessa unità di misura dei rendimenti. Tale caratteristica porta una migliore interpretabilità dei risultati. Nello spazio (σ_p, μ_p) la frontiera efficiente è descritta da un ramo di iperbole che individua i portafogli efficienti solamente nella porzione del ramo destro che si trova sopra al vertice, in quanto quella inferiore è caratterizzata da portafogli dominati, che hanno lo stesso rischio ma rendimento minore. Il ramo di iperbole che caratterizza la frontiera efficiente ha vertice nel punto $\left(\frac{1}{\sqrt{C}}, \frac{B}{C}\right)$ e asintoti pari a $\mu_p = \frac{B}{C} \pm \sigma_p \sqrt{\frac{\Delta}{C}}$. I portafogli efficienti posso essere interpretati in modo alternativo come dei compromessi in termini di rischio e rendimento. Infatti, spostandosi da sinistra verso destra sulla frontiera efficiente, il rischio aumenta, ma aumenta anche il rendimento atteso.

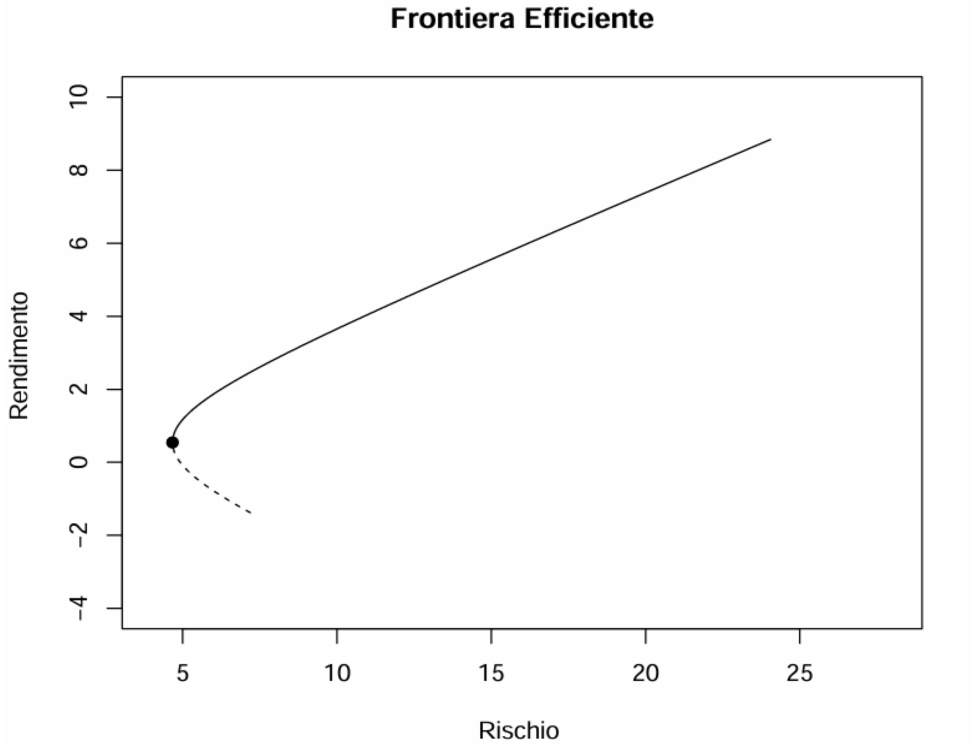


Figura 2

Esistono due portafogli particolari che possiedo un ruolo peculiare: il portafoglio di Minima Varianza Globale e il portafoglio di Massimo Trade-Off. Il portafoglio di Minima Varianza Globale si colloca sul vertice della frontiera efficiente e può essere ottenuto mediante la risoluzione del seguente problema:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$
$$\omega' 1_n = 1$$

(1. 22)

Da cui si ricava che il vettore dei pesi è pari a $\widehat{\omega}_V = \frac{\Sigma^{-1} r}{1_n{}' \Sigma^{-1} 1_n}$, il rendimento è pari a $\mu_V = \frac{r' \Sigma^{-1} 1_n}{1_n{}' \Sigma^{-1} 1_n} = \frac{B}{C}$ e volatilità pari a $\sigma_V = \frac{1}{\sqrt{C}}$. Esso rappresenta il portafoglio efficiente che garantisce il minor rischio tra i portafogli individuati dalla frontiera efficiente.

Il portafoglio di Massimo Trade-Off, invece, può essere ottenuto risolvendo il seguente problema:

$$\max_{\omega} \frac{\omega' \mathrm{r}}{\sqrt{\omega' \Sigma \omega}}$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$

(1. 23)

Da cui si ricava che il vettore dei pesi è pari a $\widehat{\omega}_T = \frac{\Sigma^{-1} r}{1_n{}' \Sigma^{-1} r}$, il rendimento è pari a $\mu_T = \frac{r' \Sigma^{-1} r}{1_n{}' \Sigma^{-1} r} = \frac{A}{B}$ e volatilità pari a $\sigma_T = \frac{\sqrt{A}}{|B|}$. Esso rappresenta il portafoglio efficiente che garantisce il rendimento maggiore tra tutti i portafogli individuati dalla frontiera efficiente.

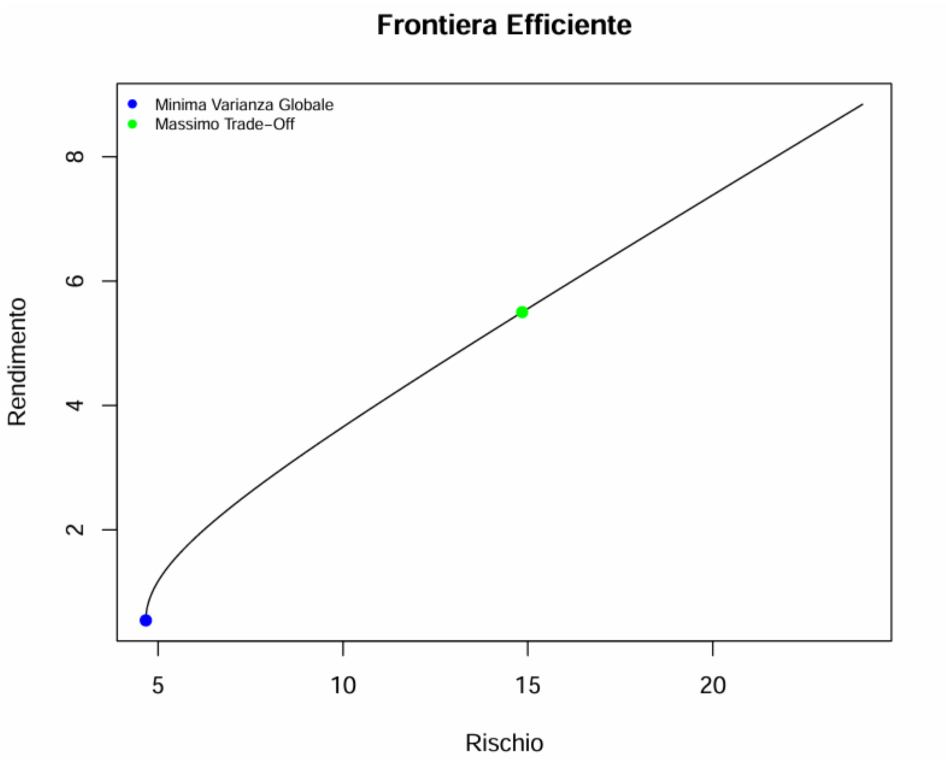


Figura 3

Dopo aver definito la frontiera efficiente considerando n titoli rischiosi inclusi nel portafoglio, il passo successivo è determinare il portafoglio ottimale per un investitore. Infatti, il set di portafogli efficienti non dipende dalle aspettative dell'agente, né dalla sua avversione al rischio. La scelta di come allocare la ricchezza tra le attività rischiose è intrapresa in modo da considerare le preferenze rispetto ai portafogli individuati dalla frontiera efficiente. Come spiegato in precedenza, questa preferenza può essere espressa in termini di funzione di utilità.

Quindi, la ricerca di un portafoglio efficiente ottimale per l'agente si traduce nel problema di massimizzazione dell'utilità sotto il vincolo di ammissibilità:

$$\max_{\omega} \mathrm{U} = \max_{\omega} \omega'\mathrm{r} - \frac{\gamma}{2}\,\omega'\Sigma\omega$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$

(1. 24)

Utilizzando sempre il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, si ottiene che il vettore dei pesi è pari a $\omega = \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}r - \frac{B-\gamma}{C}\frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1}1_n$, che è equivalente a scrivere:

$$\omega = \frac{B}{\gamma}\widehat{\omega}_T - \frac{B-\gamma}{\gamma}\widehat{\omega}_V$$

(1. 25)

Il portafoglio ottimo risulta essere una combinazione del portafoglio di minima varianza globale e del portafoglio di massimo trade-off. Il portafoglio così ottenuto dipende dal coefficiente di avversione al rischio e varia al variare di tale coefficiente. Se si considerano i due casi estremi, allora la soluzione ottima per un investitore infinitamente avverso al rischio $\gamma \rightarrow \infty$ converge verso $\widehat{\omega}_V$, mentre per un investitore infinitamente propenso al rischio $\gamma \rightarrow 0$ la soluzione ottima è un portafoglio estremo che ha posizione lunga su $\widehat{\omega}_T$ e posizione corta su $\widehat{\omega}_V$. L'agente, quindi, seleziona il portafoglio situato nel punto di tangenza tra le curve di indifferenza e la frontiera efficiente.

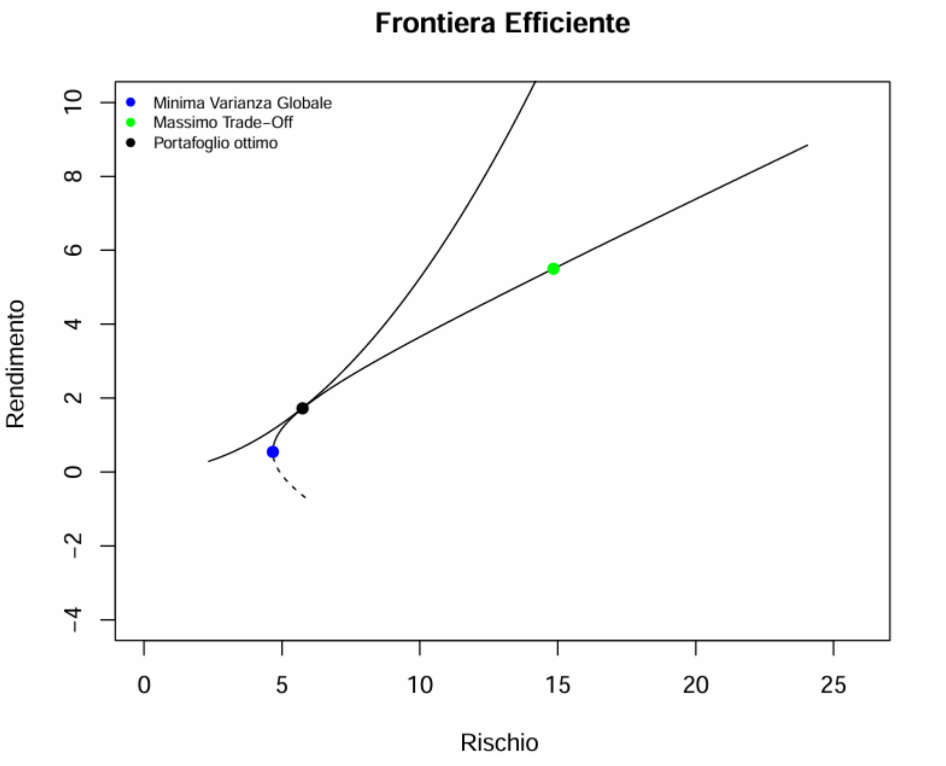


Figura 4

Il “Teorema dei due fondi”, chiamato anche “Teorema di separazione”, generalizza quanto dichiarato precedentemente. Infatti, il teorema afferma che è possibile costruire un portafoglio efficiente a partire da una combinazione ammissibile di due portafogli efficienti qualsiasi A e B. Il portafoglio selezionato avrà un vettore dei pesi pari a $\omega = \delta\omega_A + (1-\delta)\omega_B$.

Molto spesso è utile inserire all'interno di un portafoglio un titolo privo di rischio, ovvero un'attività che possiede una varianza pari a zero e non è correlata con le altre attività. Un esempio di asset privo di rischio è il Titolo di Stato, poiché ha una remunerazione fissa pari a un tasso di interesse e ha una probabilità di insolvenza trascurabile. Il problema di ottimo diviene:

$$\min_{\omega} \omega' \sum \omega$$
$$\mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r} + (1 - \omega' 1_n) r_f$$

(1. 26)

dove r_f rappresenta il risk-free. Si nota che, a differenza di un portafoglio che comprende solo titoli rischiosi, il vincolo di ammissibilità è implicito nel vincolo che definisce il rendimento obbiettivo. Inoltre, in questo caso $\omega' 1_n \neq 1$ in quanto viene introdotto un ulteriore titolo, il risk-free. La soluzione al problema si ottiene attraverso i moltiplicatori di Lagrange:

$$\min_{\omega} L(\omega) = \frac{1}{2} \omega' \sum \omega + \lambda \left(\omega' r + (1 - \omega' 1_n) r_f - \mu_p \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \omega'} = \sum \omega + \lambda \left(r - \mathrm{r_f} \right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \omega' r + (1 - \omega'^{1n}) \mathrm{r_f} - \mu_p = 0 \end{cases}$$

(1. 27)

Si ottiene così la frontiera efficienti in presenza del titolo privo di rischio, che nel piano $(\sigma_{\mathrm{p}}, \mu_{\mathrm{p}})$ corrisponde a una retta.

$$\mu_p = r_f + \sigma_p \sqrt{A - 2Br_f + Cr_f^2}$$

(1. 28)

È possibile investire tutta la dotazione iniziale nel titolo privo di rischio, ottenendo un portafoglio con rendimento pari a r_f. Spostandosi da sinistra verso destra lungo la frontiera efficiente, si ottiene un portafoglio che seleziona anche i titoli rischiosi.

Esiste un punto per il quale la somma dei pesi dei titoli rischiosi risulta unitaria. In questo caso il portafoglio è composto da soli titoli rischiosi e si situa nel punto di tangenza tra le frontiere efficienti in assenza e in presenza del tasso privo di rischio. Il portafoglio di tangenza ha un vettore di pesi pari a:

$$\widehat{\omega} = \frac{\Sigma^{-1}(\mathrm{r} - 1_n r_f)}{1_n' \Sigma^{-1}(\mathrm{r} - 1_n r_f)} = \widehat{\omega}_T \tag{1. 29}$$

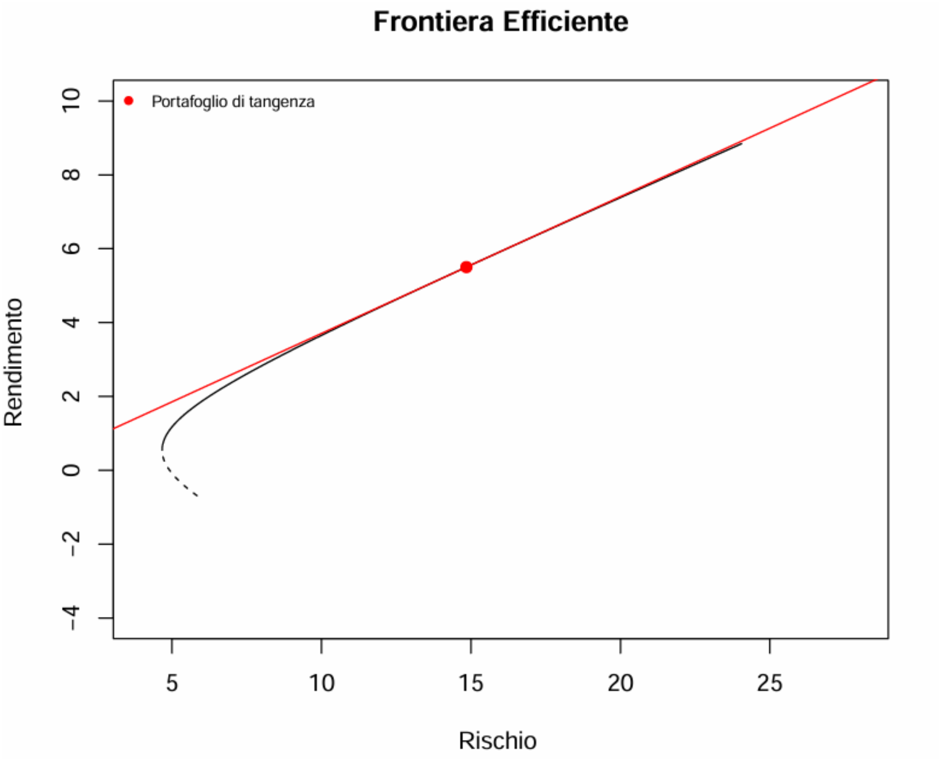


Figura 5

1.4. Limiti del modello di Markowitz

Dalla pubblicazione della teoria moderna di portafoglio, ci sono stati numerosi tentativi di migliorare il modello, in particolare impiegando ipotesi più realistiche. Nonostante si possano stimare i rendimenti seguendo la teoria del Capital Asset Pricing Model, che consente, attraverso l'equilibrio di mercato, di selezionare dei portafogli ragionevoli, le soluzioni che si ottengono dall'applicazione del modello di Markowitz conducono a portafogli caratterizzati dalla presenza di posizioni estreme, non sempre raggiungibili in un contesto realistico. Il problema è radicato nelle stime dei valori attesi, delle varianze e delle covarianze dei rendimenti dei titoli rischiosi, che risultano soggette a errori di stima. Infatti, l'ottimizzazione attraverso il criterio di media-varianza tende a sovrastimare i titoli con un alto rendimento atteso e una correlazione negativa e a sottostimare quelli con un basso rendimento atteso e correlazione positiva, che sono soggetti a errori di stima più elevati. Gli errori di stima sono una conseguenza indiretta dell'utilizzo delle serie storiche dei dati per calcolare il rendimento atteso, il quale, però, potrebbe dipendere da elementi non inclusi in codesti dati. Inoltre, si dimostra che piccoli cambiamenti nei rendimenti attesi di un gruppo di asset, anche ristretto, comporta dei cambiamenti drastici, non solo ai pesi associati a tale gruppo, ma anche a quelli associati a titoli il cui rendimento atteso è rimasto invariato. Si genera, così, un portafoglio totalmente diverso rispetto a quello inizialmente selezionato. Un ulteriore critica mossa al modello si basa sul fatto che non vengano presi in considerazione i pesi di capitalizzazione di mercato delle varie attività. Il modello potrebbe, quindi, associare un peso elevato all'interno del portafoglio alle attività con un basso livello di capitalizzazione che presentano rendimenti attesi elevati e correlazioni negative. In molti casi, però, il mercato potrebbe non essere sufficientemente liquido e profondo per assorbire l'ordine dell'investitore, con possibili conseguenze sui prezzi dell'attività e, quindi, sul portafoglio costruito. In uno scenario realistico, gli investitori potrebbero trovarsi di fronte a delle restrizioni sul capitale massimo o minimo da assegnare a ogni attività oppure potrebbero preferire detenere all'interno del portafoglio un numero limitato di attività, garantendo però una diversificazione minima o uno specifico livello di rischio per ogni asset. Una soluzione si ritrova imponendo al problema di ottimizzazione del portafoglio dei vincoli sui pesi o su altre quantità che contribuiscono nella scelta. Si conclude, quindi, che il modello proposto da Markowitz non può essere applicato direttamente, ma risulta indispensabile imporre dei vincoli, garantendo agli investitori di selezionare un portafoglio che prenda in considerazione sia elementi che incidono sul capitale, come i costi di transizione e le imposte, sia le loro necessità.

Capitolo 2

Vincoli lineari

La teoria moderna di portafoglio si basa sul risolvere il problema di ottimizzazione attraverso il criterio di media-varianza, in cui l'obbiettivo è determinare il valore dei pesi ω_i associati a ogni titolo incluso nel portafoglio con il fine di minimizzare il rischio rispetto a un rendimento dato. I pesi, però, sono definiti nello spazio $\mathbb{R}^n$ e quindi possono assumere valori negativi o estremi. Se dal punto di vista teorico il portafoglio così ottenuto risulta efficiente, dal punto di vista pratico tale portafoglio potrebbe essere non raggiungibile dall'investitore. In questo capitolo si analizzerà l'impatto dei vincoli lineari sui pesi applicati alla teoria di selezione di portafoglio.

Si considera un universo di n titoli rischiosi e si specifica il seguente problema di ottimo:

$$\min_{\omega} \frac{1}{2} \omega' \Sigma \omega$$

$$\begin{cases} \omega' 1_n = 1 \\ \omega \in \Omega \cap \mathcal{C} \end{cases}$$

(2. 1)

dove ω è il vettore dei pesi del portafoglio e Ω è lo spazio di ricerca. Per esempio, se $\Omega = \mathbb{R}^n$, la soluzione del problema coincide con il portafoglio di minima varianza globale. Se, invece, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^n : \mu' \omega \geq \mu^*\}$, si ottiene un portafoglio efficiente dove μ^* è il rendimento atteso desiderato dall'investitore. $\mathcal{C}$ è l'insieme dei vincoli imposti sui pesi. Si possono considerare due definizioni di $\mathcal{C}$:

- $\mathcal{C}$ è uguale a $\mathbb{R}^n$. In questo caso la soluzione è non vincolata e si definisce con la notazione $\omega^*(\mu, \Sigma)$.
- Si impongono dei limiti ai pesi di ciascun titolo $\omega_i^- \leq \omega_i \leq \omega_i^+$. In questo caso, $\mathcal{C}$ è definito da tali vincoli $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\omega^-, \omega^+)$.

Risolvere il problema di minima varianza globale applicando dei vincoli sui pesi è equivalente a utilizzare una stima di contrazione della matrice di covarianza. Da un punto di vista finanziario, la stima del restringimento della matrice di covarianza dei rendimenti delle attività rischiose può essere interpretata come una matrice di covarianza implicita del gestore del portafoglio.

2.1. Vincoli di positività

In questa sezione si considera la strategia long-only, nella quale i pesi associati ai titoli sono positivi, quindi limitati a $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0\,,1\,)$, ovvero $0 \leq \omega_i \leq 1$. Questa prima soluzione permette implicitamente di eliminare, dalla selezione, portafogli estremi.

$$\begin{gathered}\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\ \mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r} \\ \omega' 1_{\mathrm{n}} = 1 \\ \omega_i \geq 0 \quad i = 1,2, \dots, n\end{gathered} \tag{2. 2}$$

In questo caso, il vettore dei pesi ottimi deve essere stimato attraverso l'uso di un algoritmo di ottimizzazione numerica, poiché la soluzione analitica non esiste. Non è richiesto di esplicitare un limite superiore, in quanto il vincolo di ammissibilità, utilizzato di norma nel modello di Markowitz, impone implicitamente che i pesi non possono assumere valori maggiori di 1. La frontiera efficiente può, comunque, essere rappresentata graficamente, partendo da un insieme di portafogli ottimi.

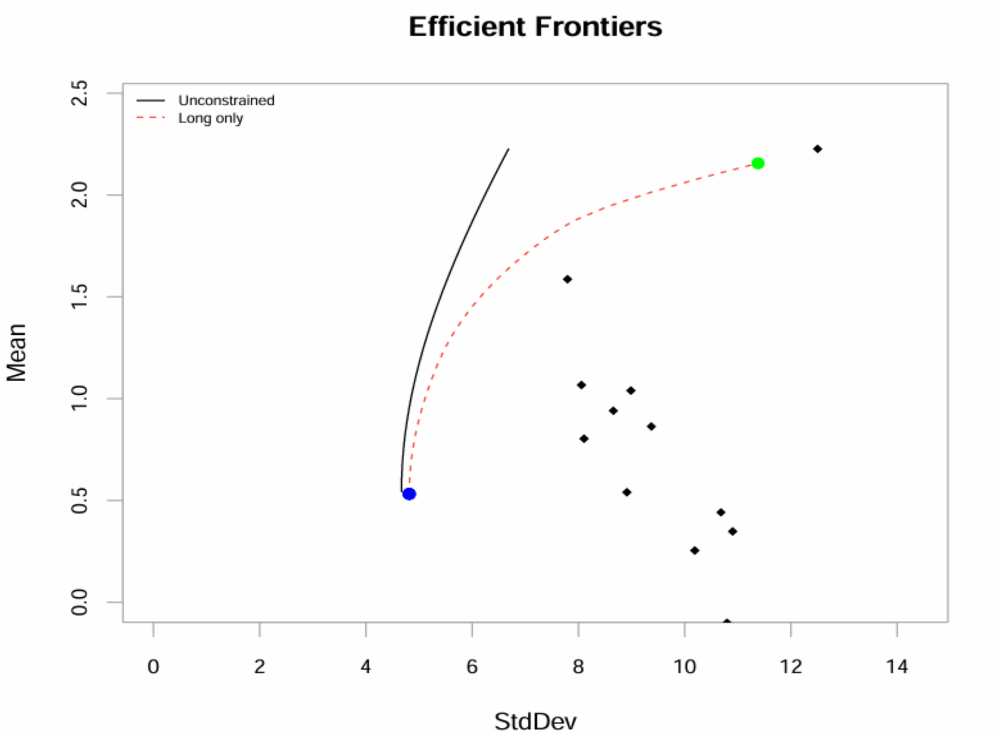


Figura 6

La frontiera efficiente in presenza di vincoli di positività sui pesi è limitata sia superiormente che inferiormente. Il limite superiore è individuato dal portafoglio costituito da un singolo titolo, che corrisponde a quello che restituisce il rendimento atteso più elevato tra i titoli inclusi nel portafoglio. Il limite inferiore, invece, può essere individuato dal portafoglio costituito da un singolo titolo che restituisce il rendimento atteso minore oppure da portafoglio di minima varianza sotto l'ipotesi di assenza di vendite allo scoperto. Quindi si ottiene che:

$$max\mu_p = max\{r_1, r_2, \dots r_n\}$$
$$min\mu_p = max(r_V, min\{r_1, r_2, \dots r_n\})$$

(2. 3)

I portafogli, ottenuti mediante l'applicazione di vincoli di positività sui pesi, sono concentrati su pochi titoli e non permettono la vendita allo scoperto. Ciò implica che la selezione di tali portafogli, di norma, risulta vantaggiosa qualora l'investitore abbia l'intenzione di attuare un investimento a lungo termine sulla base di forti convinzioni riguardo l'andamento futuro delle attività.

2.2. Limiti superiori e inferiori

L'introduzione di vincoli di positività potrebbe non risolvere completamente il problema di ottimizzazione del portafoglio, in quanto porta alla costruzione di portafogli concentrati su un gruppo ristretto di asset, con m<<n posizioni. Questa caratteristica compromette i benefici dati dalla diversificazione del portafoglio. Infatti, se si diminuiscono i titoli da n a m all'interno del portafoglio, i portafogli ammissibili non potranno mai aumentare e di conseguenza la frontiera efficiente non potrà mai spostarsi verso destra, a condizione che il periodo temporale di osservazione rimanga invariato. In generale, se il portafoglio si concentra solo su pochi titoli, il vertice della frontiera efficiente si allontana dall'asse delle ordinate e l'ampiezza diminuisce, poiché diminuiscono i portafogli ammissibili.

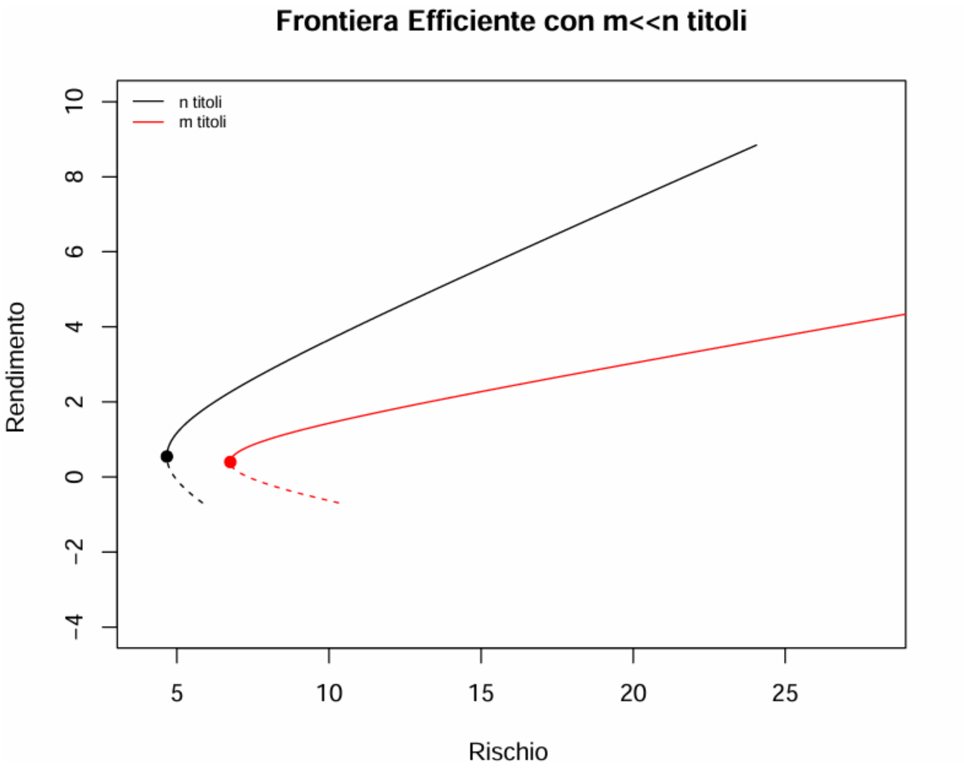


Figura 7

È possibile assegnare un capitale massimo da investire in ciascun titolo limitando superiormente i pesi dei singoli titoli, in modo tale che $\mathcal{C} = \mathcal{C}(0\,, u\,)$. Il problema di ottimizzazione si ottiene mediante un insieme di disequazioni lineari che impongo un valore massimo assunto dal peso di ciascun asset:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$
$$\mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r}$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$
$$0 \leq \omega_i \leq \mathrm{u} \quad i = 1,2, \dots, n$$

(2. 4)

Il valore del limite superiore u deve essere scelto in base al numero di attività incluse nel modello di allocazione oppure al numero minimo di posizioni che si desidera avere all'interno del portafoglio ottimo (1/u). In questo caso la frontiera efficiente presenta dei limiti superiori e inferiori che dipendono dall'ordine dei rendimenti attesi $r_{[1]} < r_{[2]} < \cdots < r_{[n]}$. Assumendo che 1/u=k è un numero intero si ottiene:

$$max\mu_p = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{K}} \frac{1}{\mathrm{u}} r_{[n-j+1]}$$
$$min\mu_p = max\left(\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{K}} \frac{1}{\mathrm{u}} r_{[j]}, r_v \right)$$

(2. 5)

La frontiera efficiente costruita in presenza di vincoli superiori avrà ampiezza minore e sarà spostata verso destra rispetto alla frontiera efficiente in presenza di vincoli di positività.

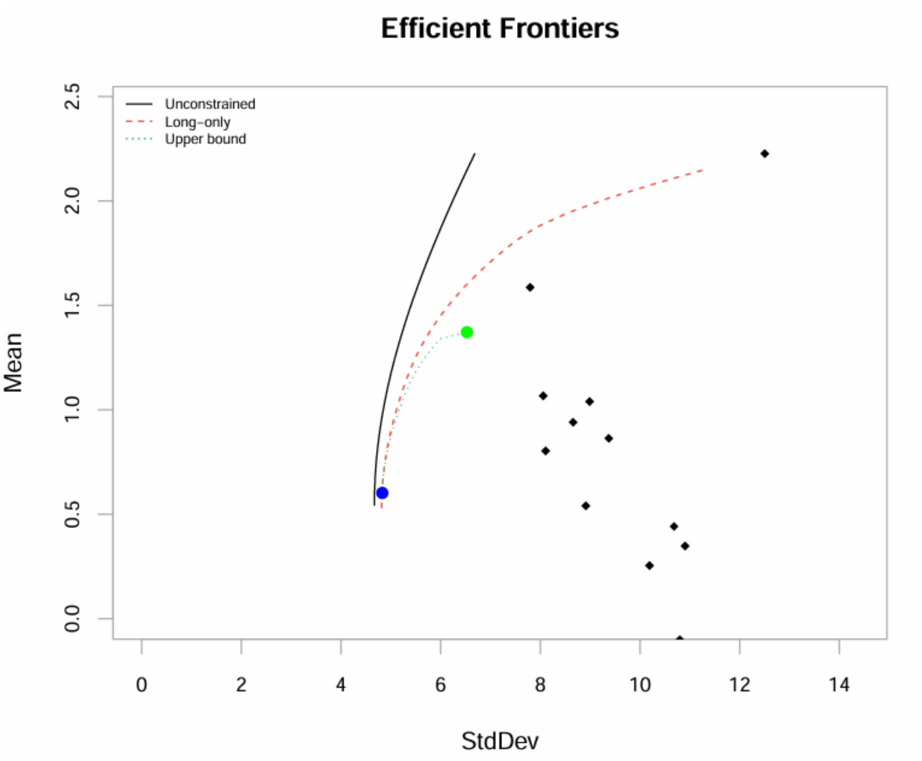


Figura 8

Una soluzione che garantisce un livello di diversificazione minimo può essere raggiunta introducendo, oltre ai vincoli superiori, anche i limiti inferiori ai pesi delle singole attività, in modo tale da poter assegnare ad ogni titolo un investimento minimo. I vincoli inferiori sono utili per eliminare posizioni piccole e per consentire posizioni corte limitate. In questo caso $\mathcal{C} = \mathcal{C}(l\,, u\,)$ e il problema di ottimizzazione diventa:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$
$$\mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r}$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$
$$\mathrm{l} \leq \omega_i \leq \mathrm{u} \quad i = 1,2, \dots, n$$

(2. 6)

Si possono distinguere due casi, ovvero $l < 0$ e $l > 0$. Nel primo caso è consentito assegnare ai pesi dei valori negativi, ovvero, a differenza dei portafogli costruiti considerando la positività dei pesi, sono consentite, seppur in quantità limitata, le vendite allo scoperto. Codesto modello di ottimizzazione segue una strategia long-short, nella quale si combinano investimenti di breve periodo con investimenti di lungo periodo. In generale, tale modello permette di ottenere rendimento atteso più elevato per un determinato livello di rischio. Inoltre, l'identificazione del rendimento massimo e minimo dell'insieme di portafogli efficienti in presenza di limiti superiori e inferiori (negativi) avviene mediante la risoluzione di specifici problemi di ottimizzazione. Il rendimento minimo è definito dal seguente problema:

$$\min_{\omega} \omega' \mathrm{r}$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$
$$0 \leq \omega_i \leq \mathrm{u} \quad i = 1,2, \dots, n$$

(2. 7)

Mentre il rendimento massimo si ottiene con $\max_{\omega} \omega' \mathrm{r}$, sotto gli stessi vincoli specificati nel problema precedente 2.7. Inoltre, la frontiera efficiente può essere rappresentata graficamente.

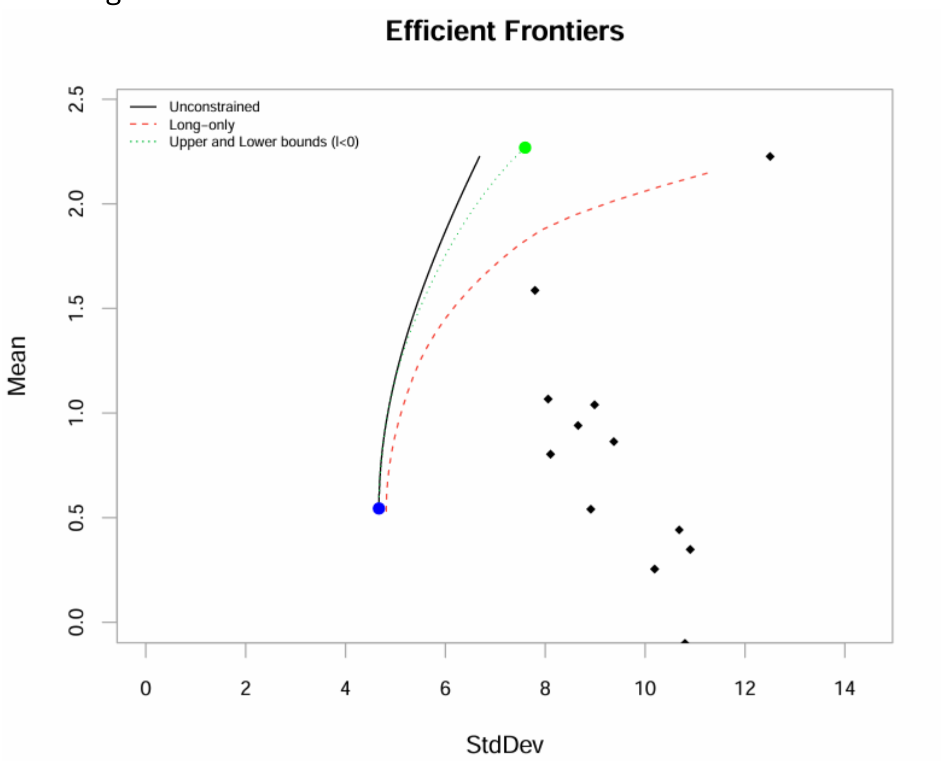


Figura 9

Se si considera il secondo caso, ovvero vincoli inferiori positivi $l > 0$, la stima dei portafogli ottimali, per diversi valori di rendimento obbiettivo, risulta impegnativa dal punto di vista computazionale. Infatti, i pesi ottimali ω_i associati ai titoli possono assumere valori compresi nell'insieme $[\mathrm{l}, \mathrm{u}]$ oppure $\omega_i = 0$, in quanto si può investire al massimo in $[1/l]$ titoli. Per risolvere il problema di ottimizzazione si possono utilizzare dei metodi numerici che non sono basati sulle derivate, come, per esempio, gli algoritmi genetici. Non sempre esiste una soluzione, in quanto non sono permesse vendite allo scoperto. Esiste, però, un approccio per la stima di un portafoglio sub-ottimale che consiste nel determinare i pesi considerando solo il limite superiore. Qualora vi siano attività il cui peso associato è minore del limite inferiore l, allora, partendo dall'attività con peso più basso, è possibile ridistribuire il suo peso alle attività il cui peso è minore del limite superiore, in modo proporzionale rispetto al loro peso. Si procede fino a quando tutti i titoli avranno un peso maggiore o uguale al limite inferiore.

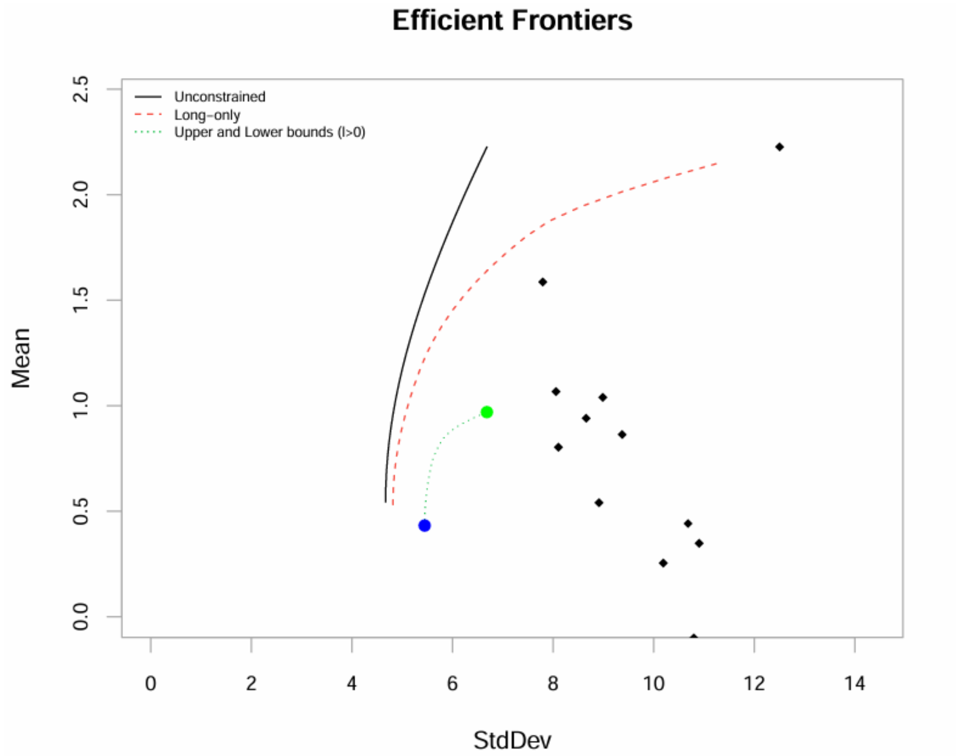


Figura 10

Un metodo per garantire l'esistenza di una soluzione ottimale può essere raggiunto imponendo un ulteriore vincolo lineare, chiamato vincolo di cardinalità.

2.3. Vincoli di cardinalità

Gli investitori potrebbero decidere di controllare il numero di attività su cui investire in base a delle considerazioni personali. Si desidera, quindi, imporre dei vincoli di cardinalità al problema di ottimizzazione del portafoglio. Il vincolo di cardinalità restringe il numero di asset nel portafoglio mediante l'introduzione di una variabile binaria z_i che denota se un particolare titolo viene selezionato o meno. All'usuale problema di ottimo si associano i seguenti vincoli:

$$z'1_n \leq K$$
$$z_i \in \{0,1\}$$

(2. 8)

dove K rappresenta il numero massimo di titoli permessi all'interno del portafoglio. La variabile z_i assume valore pari a 1 se il titolo i-esimo è incluso e pari a 0 altrimenti. L'imposizione del vincolo di cardinalità pone, quindi, un limite ai potenziali benefici che si potrebbero ottenere dalla diversificazione. In generale i vincoli di cardinalità sono imposti al problema di ottimizzazione del portafoglio in concomitanza dei vincoli di quantità, che assegnano un limite inferiore e un limite superiore ai pesi di ogni specifico titolo.

Il problema di ottimizzazione del portafoglio diventa:

$$\begin{gathered}
\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega \\
\mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r} \\
\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1 \\
z_i l \leq \omega_i \leq u z_i \quad i = 1,2,\ldots,n \\
z' 1_n \leq K \\
z_i \in \{0,1\}
\end{gathered}$$

(2. 9)

Nonostante codesta formulazione consenta una flessibilità aggiuntiva, comparta un costo computazionale piuttosto elevato. Gli algoritmi, utilizzati per giungere ad un portafoglio efficiente a cui sono stati imposti tali vincoli, appartengono a due categorie distinte: l'insieme degli algoritmi esatti, il cui obbiettivo è ricercare la soluzione esatta al problema, e l'insieme degli algoritmi euristici, che tentano di cercare una soluzione in un tempo ragionevole senza, però, garantire che la soluzione sia ottima. Un particolare algoritmo euristico, chiamato algoritmo genetico, applica, a una popolazione iniziale di soluzioni possibili, dei metodi di replicazione, mutazione, perturbazione e riflessione, modificando i membri della popolazione nello spazio di definizione dei parametri, al fine di ottimizzare la funzione vincolata.

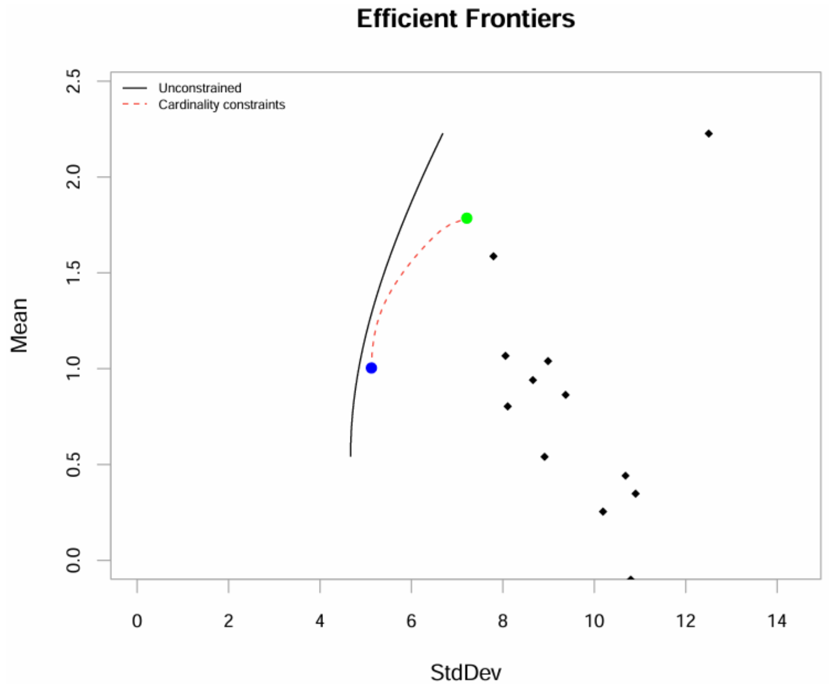


Figura 11

2.4. Vincoli di classe

I vincoli di classe sono utilizzati per limitare la proporzione totale investita in quelle attività che presentano delle caratteristiche comuni, con l'obbiettivo di costruire un portafoglio maggiormente diversificato e sicuro. Le classi dei titoli sono considerate in modo tale da essere mutualmente esclusive, ciò significa che un titolo appartiene a una sola classe $C_i \cap C_j = \emptyset$ per ogni titolo $i \neq j$. Si richiede la selezione di almeno un titolo per ogni classe, in modo tale che $n \geq M$, dove M è il numero di classi. In generale, le classi sono scelte in base ai settori economici di appartenenza delle n attività incluse nel portafoglio oppure in base all'area geografica in cui esse si collocano. Si assegnano i limiti inferiori e superiori, con il fine di specificare la quantità di capitale investito per ogni classe. La soluzione si ottiene risolvendo:

$$\min_{\omega} \omega' \Sigma \omega$$
$$\mu_{\mathrm{p}} = \omega' \mathrm{r}$$
$$\omega' 1_{\mathrm{n}} = 1$$
$$l_m \leq \sum_{i \in C_m} w_i \leq u_m \qquad m = 1,2, \dots, M$$

(2. 10)

Il numero di classi dovrebbe ridurre la difficoltà del problema, in quanto il problema di ottimizzazione del portafoglio viene suddiviso in sotto-problemi di dimensione inferiore.

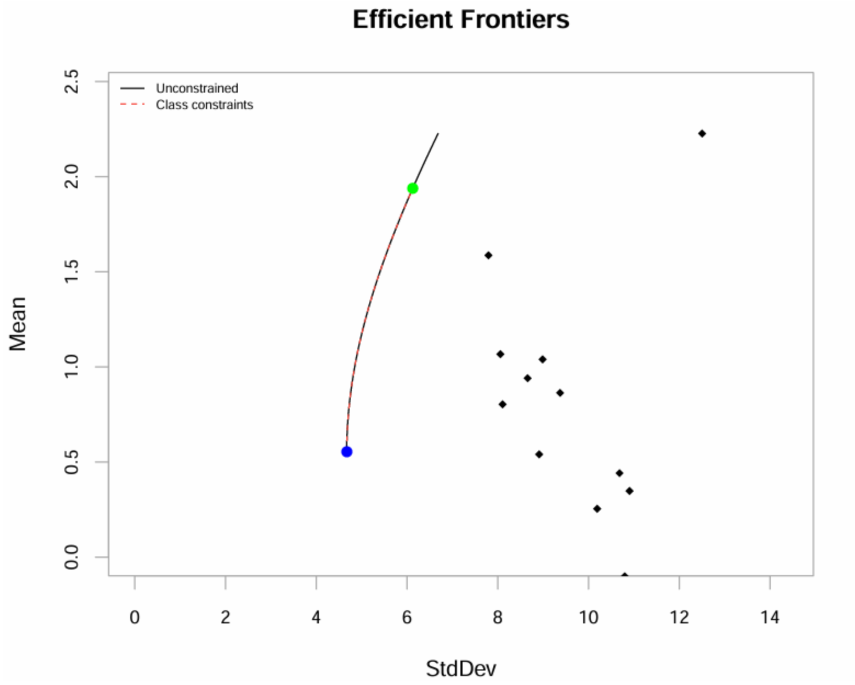


Figura 12

2.5. Vincoli di turnover

Uno dei presupposti del modello di Markowitz è l'assenza di costi di transizione e imposte. In uno scenario realistico, ogni azione di acquisto e di vendita da parte degli investitori è soggetta a degli specifici costi di transizione, che possono influenzare la composizione del portafoglio. Risulta, quindi, necessario imporre al problema di ottimizzazione dei vincoli che limitano l'impatto dei costi di transizione sul portafoglio.

$$\mathcal{C}(\omega|\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot |\omega_i - \tilde{\omega}_i| \tag{2. 11}$$

dove c_i rappresenta il costo unitario di transizione associato al titolo i-esimo e $\tilde{\omega}_i$ è il vettore dei pesi del portafoglio corrente. Una migliore formulazione consente di distinguere i prezzi di domanda e di offerta:

$$\mathcal{C}(\omega|\tilde{\omega}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^- \cdot max(\tilde{\omega}_i - \omega_i, 0) + \sum_{i=1}^{n} c_i^+ \cdot max(\omega_i - \tilde{\omega}_i, 0) \tag{2. 12}$$

dove c_i^- e c_i^+ sono rispettivamente i costi unitari di vendita e di acquisto associati al titolo i-esimo. Poiché i costi di transizione sono specifici per ogni attività, si utilizza il turnover che rappresenta una misura del cambiamento del portafoglio tra due istanti temporali diversi t e t+1. L'insieme dei vincoli, formulato sulla base del turnover, è definito dalla norma L1 (distanza di Manhattan) tra il vettore ω dei pesi di portafoglio e il vettore $\tilde{\omega}$ dei pesi dell'attuale portafoglio:

$$\mathcal{C}(\omega|\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}|\omega_i - \tilde{\omega}_i|$$

(2. 13)

$\tilde{\omega}$ può anche essere sostituito con il vettore dei pesi di un portafoglio di riferimento, come un benchmark. Il problema di ottimizzazione del portafoglio sotto il vincolo di turnover risulta:

$$\begin{gathered}\min_{\omega} \omega'\Sigma\omega \\ \mu_{\mathrm{p}} = \omega'\mathrm{r} \\ \omega'1_{\mathrm{n}} = 1 \\ \frac{1}{2}|\omega - \tilde{\omega}|'1_n \leq \tau\end{gathered}$$

(2. 14)

dove τ è il turnover massimo, che impone una sorta di limite all'attività di negoziazione o alla rotazione del portafoglio.

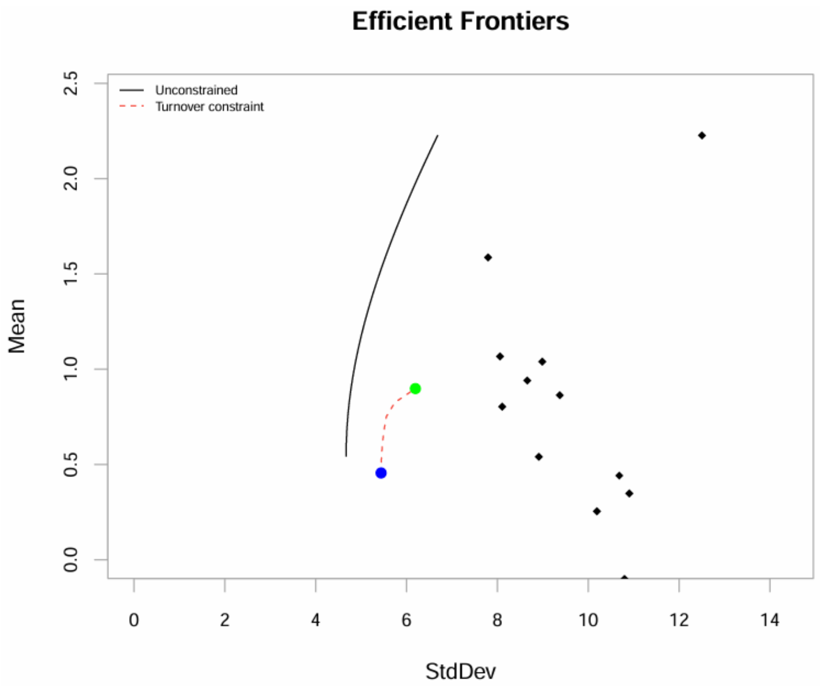


Figura 13

Capitolo 3

Vincoli non-lineari

Utilizzando metodi che restringono il numero di asset o che impongono dei vincoli sui pesi, si introducono delle decisioni discrezionali nella selezione del portafoglio. In questo caso, l'efficacia di un metodo di allocazione può essere molto differente a seconda della scelta dei valori dei vincoli considerati. Risulta, quindi, complicato determinare se un metodo di allocazione è migliore di un altro a causa della tipologia di vincoli o a causa dei valori che l'investitore associa ai vincoli.

3.1. Risk Budgeting

Il risk budgeting è un metodo di allocazione che richiede meno input discrezionali e definisce dei portafogli in cui si impone un risk budget, ovvero si impone un vincolo al contributo al rischio di ogni titolo sul rischio totale. Il rischio è misurato da un singolo numero che non aiuta a comprendere la diversificazione del portafoglio. È utile, quindi, definire il contributo al rischio con il fine di proporre un metodo di allocazione del rischio. Sia $\mathcal{R}(\omega)$ la misura del rischio del portafoglio definito dal vettore dei pesi ω, allora $\mathcal{R}$ si dice "coerente" se soddisfa le seguenti proprietà:

1. Sub-additività: $\mathcal{R}(\omega_1 + \omega_2) \leq \mathcal{R}(\omega_1) + \mathcal{R}(\omega_2)$. Il rischio di due portafogli considerati in modo congiunto è minore rispetto alla somma del rischio di due portafogli separati.
2. Omogeneità: $\mathcal{R}(\lambda\omega) = \lambda\mathcal{R}(\omega)\ se\ \lambda \geq 0$. L'aumento o la riduzione del leverage influisce sulla misura del rischio con la stessa intensità.
3. Monotonia: se $\omega_1 \prec \omega_2$ allora $\mathcal{R}(\omega_1) \geq \mathcal{R}(\omega_2)$. Se il portafoglio ω_2 ha un rendimento migliore del portafoglio ω_1 in ogni possibile scenario, allora il rischio $\mathcal{R}(\omega_1)$ è maggiore del rischio $\mathcal{R}(\omega_2)$.
4. Invarianza rispetto a traslazioni: se $m \in \mathbb{R}$, allora $\mathcal{R}(\omega + m) \leq \mathcal{R}(\omega) - m$. L'aggiunta di un ammontare pari a m al portafoglio riduce il rischio di m.

Anziché considerare le proprietà di sub-additività e omogeneità, è possibile definire una misura di rischio "coerente" attraverso una condizione meno restringente chiamata convessità. Tale condizione verifica che una maggiore diversificazione di portafoglio non aumenta il rischio, ossia $\mathcal{R}(\lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) \leq \lambda\mathcal{R}(\omega_1) + (1-\lambda)\mathcal{R}(\omega_2)$.

Gli investitori potrebbero essere maggiormente interessati a minimizzare la possibile perdita del portafoglio piuttosto che minimizzare la volatilità. Considerando la perdita come l'opposto del rendimento di portafoglio $L(\omega) = -R(\omega)$, è possibile definire diverse misure di rischio associate alla perdita.

- La volatilità della perdita di portafoglio $\mathcal{R}(\omega) = \sigma\big(L(\omega)\big) = \sigma(\omega)$ corrisponde alla volatilità del portafoglio.
- La deviazione standard basata sul rischio si ottiene attraverso una trasformazione di scala della volatilità di un fattore $c > 0$ e sottraendo il rendimento atteso del portafoglio $\mathcal{R}(\omega) = SD_c(\omega) = \mathbb{E}[L(\omega)] + c \cdot \sigma\big(L(\omega)\big) = -\mu(\omega) + c \cdot \sigma(\omega)$.
- Il Value-at-Risk misura la perdita potenziale di un investimento in un intervallo di tempo con un certo livello di confidenza $\mathcal{R}(\omega) = VaR_\alpha(\omega) = inf\{\,\ell : Pr\,\{\,L(\omega) \leq \ell\} \geq \alpha\,\}$, ovvero rappresenta il quantile α della distribuzione della perdita.
- L'Expected Shortfall corrisponde alla media dei VaR calcolati a livelli maggiori di α $\mathcal{R}(\omega) = ES_\alpha(\omega) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(\omega)\,\partial u$, o equivalentemente rappresenta il valore atteso della perdita di portafoglio condizionata a valori della perdita maggiori del VaR $\mathcal{R}(\omega) = ES_\alpha(\omega) = \mathbb{E}[L(\omega)\,|L(\omega) \geq VaR_\alpha(\omega)]$.

3.1.1. Allocazione del rischio

Il passo successivo nella gestione del rischio di portafoglio consiste nella scomposizione del rischio in un totale di contributi al rischio delle attività. Questa fase è chiamata allocazione del rischio ed è fondamentale per individuare le concertazioni e comprendere il profilo di rischio del portafoglio. Il metodo, maggiormente utilizzato per determinare il contributo al rischio di un titolo, segue il principio di Eulero. Sia $\Pi = -\mathrm{L}$ una misura del profitto e della perdita di un portafoglio composto da n titoli rischiosi, allora:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \tag{3. 1}$$

dove Π_i è la misura del profitto e della perdita dell'i-esimo titolo del portafoglio.

Sia $\mathcal{R}(\Pi)$ la misura del rischio associata al portafoglio, è possibile considerare la misura della performance aggiustata del rischio:

$$\mathrm{RAMP}(\Pi) = \frac{\mathbb{E}(\Pi)}{\mathcal{R}(\Pi)} \tag{3. 2}$$

Se si considera la misura di RAMP dell'i-esimo titolo incluso nel portafoglio la relazione 3.2 diventa:

$$RAMP(\Pi_i|\, \Pi) = \frac{\mathbb{E}(\Pi_i)}{\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi)} \tag{3. 3}$$

Dal punto di vista economico è desiderabile che i contributi al rischio seguano due proprietà basate sul concetto di RAMP:

- I contributi al rischio $\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi)$ dei titoli sul rischio totale del portafoglio $\mathcal{R}(\Pi)$ soddisfano la proprietà di allocazione se $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) = \mathcal{R}(\Pi)$.
- I contributi al rischio $\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi)$ sono compatibili con la misura di RAMP se esistono alcuni $\varepsilon_i > 0$ tali che $RAMP(\Pi_i|\, \Pi) > \mathrm{RAMP}(\Pi) \Rightarrow RAMP(\Pi + h\Pi_i) > \mathrm{RAMP}(\Pi)\ \ \forall\, 0 < h < \varepsilon_i$. Questa proprietà indica che i titoli con una performance aggiustata di rischio migliore rispetto al portafoglio continuano ad avere un RAMP migliore se la loro allocazione aumenta di una proporzione piccola pari a h.

Se i contributi al rischio seguono tali proprietà, allora essi sono determinati univocamente come:

$$\mathcal{R}(\Pi_i|\, \Pi) = \frac{\partial}{\partial h}\mathcal{R}(\Pi + h\Pi_i)|_{\,h=0} \tag{3. 4}$$

L'equazione 3.4 può essere riformulata in termini di misura del rischio del portafoglio associato a un vettore di pesi ω. Si afferma che il contributo al rischio del titolo i-esimo è univocamente definito come:

$$\mathcal{RC}_i = \omega_i \frac{\partial \mathcal{R}(\omega)}{\partial \omega_i} \tag{3. 5}$$

e la misura di rischio soddisfa la decomposizione di Eulero:

$$\mathcal{R}(\omega_i) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \omega_i \frac{\partial \mathcal{R}(\omega)}{\partial \omega_i} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathcal{RC}_i \tag{3. 6}$$

Nel caso in cui i rendimenti delle attività seguono una distribuzione Normale, le misure di rischio come il Value-at-Risk e l'Expected Shortfall sono calcolate mediante la volatilità del portafoglio. Se si considera un portafoglio composto da soli due titoli, la volatilità del portafoglio è pari a:

$$\sigma(\omega) = \sqrt{\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2\sigma_{12}} \tag{3. 7}$$

Applicando le formule 3.5 e 3.6 si ottengono i contributi al rischio dei due titoli:

$$\begin{gathered} \mathcal{RC}_1 = \omega_1 \frac{\omega_1\sigma_1^2 + \omega_2\sigma_{12}}{\sigma(\omega)} \\ \mathcal{RC}_2 = \omega_2 \frac{\omega_2\sigma_2^2 + \omega_1\sigma_{12}}{\sigma(\omega)} \\ \mathcal{RC}_1 + \mathcal{RC}_2 = \sigma(\omega) \end{gathered} \tag{3. 8}$$

Le osservazioni precedenti possono essere estese ad un portafoglio con n>2 titoli, in cui la volatilità è definita da $\sigma(\omega) = \sqrt{\omega'\Sigma\omega}$. Nel caso generale il contributo al rischio del titolo i-esimo incluso nel portafoglio è:

$$\mathcal{RC}_i = \omega_i \frac{(\Sigma\omega)_i}{\sqrt{\omega'\Sigma\omega}} \tag{3. 9}$$

Il contributo al rischio può essere interpretato sulla base di un'analisi marginale. Questo approccio, proposto da Litterman e Garman, è associato all'analisi della sensibilità della misura del rischio. Infatti, il rischio marginale del titolo i-esimo del portafoglio è definito da:

$$\frac{\partial \mathcal{R}(\omega)}{\partial \omega_i} = \lim_{h \to 0} \frac{\mathcal{R}(\omega + h\boldsymbol{e_i}) - \mathcal{R}(\omega)}{h}$$

(3. 10)

dove e_i è un vettore che assume valore 1 nell'elemento i e 0 altrimenti. Se h è piccolo, allora:

$$\mathcal{R}(\omega + h\boldsymbol{e_i}) \simeq \mathcal{R}(\omega) + h \frac{\partial \mathcal{R}(\omega)}{\partial \omega_i}$$

(3. 11)

La precedente relazione dimostra che, se il peso del titolo i-esimo aumenta di una quantità pari a h, la misura del rischio di portafoglio aumenta di una proporzione pari al prodotto tra h e il rischio marginale del titolo i, ovvero $\mathcal{MR}_i = \frac{\partial \mathcal{R}(\omega)}{\partial \omega_i}$.

3.1.2. Portafoglio di risk budgeting

I metodi di risk budgeting si basano sui contributi al rischio ottenuti come prodotto del rischio marginale per l'esposizione alle singole attività. Si considera un insieme di risk budgets $\{B_1, \dots, B_n\}$, ovvero di importi monetari che rappresentano il rischio di ogni specifico strumento finanziario incluso nel portafoglio. Poiché il rischio è calcolato mediante la volatilità, B_i è espresso nella medesima unità di misura dei rendimenti. Inoltre, se si considera il contributo al rischio $\mathcal{RC}_i(\omega_1, \dots, \omega_n)$ del titolo i-esimo in rapporto al portafoglio, è possibile definire il portafoglio di risk budgeting attraverso i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} \mathcal{RC}_1(\omega_1, \dots, \omega_n) = B_1 \\ \vdots \\ \mathcal{RC}_n(\omega_1, \dots, \omega_n) = B_n \end{cases}$$

(3. 12)

Il portafoglio così costruito mette in relazione il contributo al rischio di ciascun titolo con il risk budget corrispondente. Tale portafoglio differisce da un portafoglio ottenuto mediante l'utilizzo del modello di Markowitz. Infatti, il portafoglio di risk budgeting non si basa sull'ottimizzazione di una funzione critica e non dipende in modo esplicito dalla performance attesa del portafoglio. Al contrario dell'approccio utilizzato da Markowitz, in questo caso si considera solo il rischio, in quanto l'idea di base è evitare l'impatto degli errori di stima e l'incertezza dei rendimenti che influiscono sulla costruzione di un portafoglio ottimo. Inoltre, i portafogli di risk budgeting risultano più robusti rispetto ai portafogli ottimizzati con il criterio media-varianza, che, invece, sono sensibili ai parametri passati come input. Per semplificare il problema, i risk budgets possono essere rappresentati come percentuali del rischio totale di portafoglio, ossia $B_i = b_i\mathcal{R}(\omega)$. Inoltre, la tecnica utilizzata per il risk budgeting mira a costruire dei portafogli altamente diversificati. Quindi, il fatto che alcuni titoli possano avere un contributo al rischio negativo implica che il rischio è concentrato negli altri titoli del portafoglio. Una soluzione, tale da garantire una diversificazione minima, si trova imponendo il vincolo di positività ai contributi al rischio dei titoli. In generale si preferisce seguire una strategia long-only che impedisce le vendite allo scoperto.

Quindi, il problema di costruzione di un portafoglio di risk budgeting deve essere risolto attraverso il seguente sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{cases} \mathcal{RC}_\mathrm{i} = b_i\mathcal{R}(\omega) \\ b_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,\mathrm{n} \\ \omega_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,\mathrm{n} \\ \sum_{i=1}^{n} b_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \end{cases}$$

(3. 13)

Assegnare a un titolo un risk budget pari a zero, significa escludere tale titolo dall'universo di investimento. Inoltre, i pesi sono strettamente positivi se le correlazioni sono tutte positive. Ad eccezioni di alcuni casi più semplici, non è possibile trovare una soluzione analitica al problema. Tuttavia, esiste una soluzione numerica che può essere ottenuta mediante approcci diversi. Un primo approccio consiste nel trasformare il sistema di equazioni non lineari nel seguente problema di ottimizzazione:

$$\omega^* = \min_{\omega} f(\omega, b)$$
$$\omega' 1_n = 1$$
$$\omega_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,\mathrm{n}$$

(3. 14)

dove $f(\omega, b)$ rappresenta la funzione target che può essere definita in diversi modi, come per esempio:

$$f(\omega, b) = \sum_{i=1}^{n}\left(\omega_i \frac{\partial\mathcal{R}(\omega)}{\partial\omega_i} - b_i\mathcal{R}(\omega)\right)^2$$

(3. 15)

Da un punto di vista puramente matematico, il problema può essere riformulato come:

$$\tilde{\omega} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}}\, \mathcal{R}(\omega)$$
$$\sum_{i=1}^{n} b_i \, ln(\omega_i) \geq c$$
$$\omega_i \geq 0$$

(3. 16)

Il vettore ottimo dei pesi si ottiene normalizzando il vettore $\tilde{\omega}$, in quanto non viene preso in considerazione il vincolo di ammissibilità. Esiste un particolare portafoglio di risk budgeting, chiamato portafoglio di "Equal risk contribution". Ogni titolo incluso nel portafoglio ERC è caratterizzato dallo stesso contributo al rischio, ovvero i risk budgets assumono valori pari a $b_i = \frac{1}{n}$. Esso può essere visto come un portafoglio neutrale, utilizzato quando l'investitore non ha opinioni riguardo i risk budgets. Nella maggior parte degli esempi empirici, il rischio del portafoglio ERC si colloca tra il rischio del portafoglio di minima varianza globale GMV e il rischio del portafoglio equipesato EW.

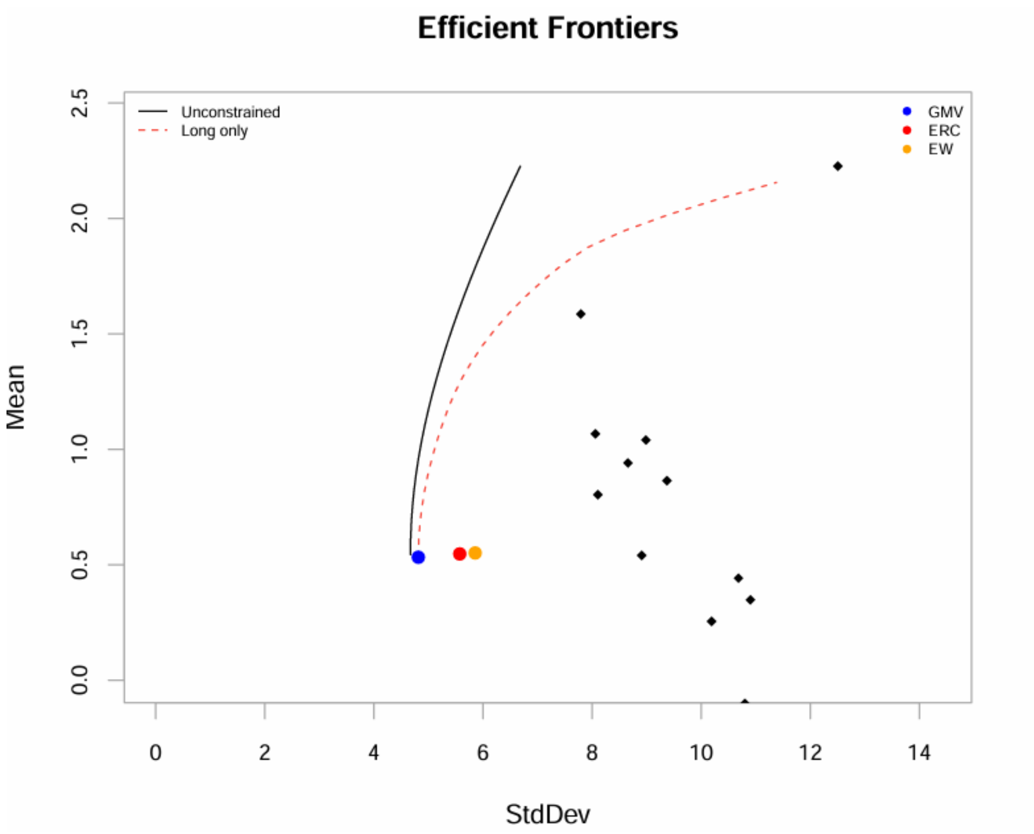


Figura 14

Capitolo 4

Vincoli probabilistici

Il quadro classico del criterio di media-varianza si basa sulla perfetta conoscenza dei rendimenti attesi delle attività e della loro matrice di covarianza. Tuttavia, questi fattori non sono direttamente osservabili e ottenere delle stime accurate risulta molto complicato. Inoltre, gli errori di stima possono influenzare le decisioni degli investitori, in quanto la composizione del portafoglio ottimale è molto sensibile al valore atteso e alla matrice di covarianza dei rendimenti e anche piccoli cambiamenti nei valori dei rendimenti possono dare luogo alla costruzione di portafogli molto diversi. Spesso gli agenti preferiscono rinunciare ad un rendimento elevato per un portafoglio più sicuro che ha un comportamento ottimale in presenza di un'ampia gamma di realizzazioni delle variabili casuali. In questa sezione si propongono degli approcci che tengono conto della casualità dei parametri che descrivono il modello. Il punto centrale è l'incertezza associata alla stima dei rendimenti attesi, poiché si è dimostrato che l'errore di stima del portafoglio è causato principalmente da una stima errata dei rendimenti attesi dei titoli e non tanto dagli errori di stima della matrice di covarianza. Si assume che il rendimento atteso abbia natura stocastica e sia caratterizzato da una distribuzione di probabilità. Inoltre, si richiede che il livello di confidenza, associato alla probabilità che il rendimento atteso del portafoglio sia superiore a un rendimento dato, sia elevato. Si considera un portafoglio costituito da n titoli rischiosi, caratterizzati da un vettore ξ casuale di rendimenti. Il vettore ξ possiede una distribuzione n-variata con media pari a:

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^{\mathrm{T}}$$
$$\mu_j = \mathbb{E}(\xi_j) \quad \mathrm{j} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$$

(4. 1)

e matrice di covarianza pari a:

$$\Sigma = \mathbb{E}[(\xi - \mu)(\xi - \mu)^T]$$

(4. 2)

Il vincolo probabilistico è definito come:

$$\mathcal{P}(\omega'\xi \geq R_{min}) \geq p \tag{4. 3}$$

dove le variabili del vettore ξ ,che moltiplica il vettore ω dei pesi, sono stocastiche e non necessariamente indipendenti. Tale vincolo garantisce che il valore atteso del portafoglio $\mu_p = \omega'\xi$ sia superiore al livello minimo prescritto di rendimento R_{min} con una elevata probabilità p, in genere definita in [0.7,1). Quindi, la versione stocastica del problema di ottimizzazione del portafoglio risulta essere:

$$\begin{gathered} \min_{\omega} \omega'\Sigma\omega \\ \mathcal{P}(\omega'\xi \geq R_{min}) \geq p \\ \omega' 1_n = 1 \\ \omega_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n \end{gathered} \tag{4. 4}$$

In questo modello, si assume che i pesi siano positivi e che non siano permesse le vendite allo scoperto. Il vincolo di positività può essere rimosso senza che ciò influisca sulla natura del problema.

4.1. Equivalente deterministico

Si può dimostrare che l'equivalente deterministico del modello probabilistico di ottimizzazione del portafoglio corrisponde a un problema di ottimizzazione non lineare. Si definisce la variabile casuale normalizzata, ossia la variabile con media nulla e varianza unitaria, del rendimento atteso di portafoglio come $\psi = \frac{\omega'\xi - \omega'\mu}{\sqrt{\omega'\Sigma\omega}}$.

Quindi, segue che:

$$\mathcal{P}(\omega'\xi \geq R_{min}) = \mathcal{P}\left(\psi \geq \frac{R_{min} - \omega'\mu}{\sqrt{\omega'\sum\omega}}\right) = 1 - F\left(\frac{R_{min} - \omega'\mu}{\sqrt{\omega'\sum\omega}}\right) \tag{4. 5}$$

dove F è la distribuzione di probabilità cumulata del rendimento atteso (normalizzato) del portafoglio e F^{-1} è il suo inverso. Pertanto, il vincolo probabilistico diviene:

$$1 - F\left(\frac{R_{\min} - \omega'\mu}{\sqrt{\omega' \sum \omega}}\right) \geq p$$
$$\Leftrightarrow F\left(\frac{R_{\min} - \omega'\mu}{\sqrt{\omega' \sum \omega}}\right) \leq 1 - p$$
$$\Leftrightarrow \omega'\mu + F^{-1}(1-p)\sqrt{\omega'\Sigma\omega} \geq R_{min}$$

(4. 6)

dove $F^{-1}(1-p)$ è il quantile $(1-p)$ di F.

Quindi, il problema di ottimizzazione sotto il vincolo probabilistico 4.4 equivale al seguente problema di ottimizzazione non lineare:

$$\min_{\omega} \omega'\textstyle\sum\omega$$
$$\omega'\mu + F^{-1}(1-p)\sqrt{\omega'\Sigma\omega} \geq R_{\min}$$
$$\omega' 1_n = 1$$
$$\omega_i \geq 0 \quad i = 1,2,\dots,n$$

(4. 7)

4.2. Vincoli di shortfall

Molti problemi associati alla dispersione dei rendimenti possono essere espressi in termini di vincolo di shortfall, in cui si considera un rendimento minimo che deve essere superato con una data probabilità. Questo approccio, che mira a vincolare in parte le perdite, può fornire una descrizione più significativa del rischio, adeguata a realtà di investimento diverse. In generale, tale procedura è utilizzata quando la capacità di chi gestisce il portafoglio è giudicata rispetto a un portafoglio di riferimento. Si inserisce, quindi, nel contesto di una gestione attiva, in cui il gestore, tramite l'utilizzo della metodologia di costruzione del portafoglio in concomitanza con le informazioni raccolte e le proprie aspettative, è in grado di fornire una migliore remunerazione del rischio rispetto a quanto fatto dal mercato o dal benchmark. Il problema di ottimo per l'agente si traduce in massimizzare l'utilità attesa sotto un vincolo probabilistico:

$$\max_{\omega} \mathrm{U} = \max_{\omega} r_f + \omega'(\mu - r_f) - \frac{\gamma}{2}\omega'\Sigma\omega$$
$$\mathcal{P}(\mu_p \leq R_{\min}) \leq \alpha$$

(4. 8)

dove γ indica il coefficiente di avversione al rischio dell'investitore, μ_p rappresenta il rendimento atteso di portafoglio e $\alpha = (1-p)$ è il livello di significatività nominale. Si nota che in questo caso il portafoglio è composto da n titoli rischiosi e un titolo privo di rischio con rendimento pari a r_f. Il vincolo di shortfall, quindi, dipende dal rendimento minimo che si vuole garantire, dalla probabilità di violare tale rendimento minimo e dalla distribuzione dei rendimenti dei titoli rischiosi. Tali elementi possono, inoltre, essere legati all'avversione al rischio. Il vincolo impone un limite al rischio che può essere assunto da un investitore. Se si ipotizza che i rendimenti del portafoglio abbiano distribuzione Normale, si può utilizzare una semplice formula per identificare i portafogli che soddisfano il "limite di confidenza" imposto. Infatti, i portafogli che hanno una probabilità pari a $p = (1 - \alpha)$ di superare un rendimento pari a R_{min} sono ottenuti da una combinazione di rendimento atteso e rischio tale che:

$$\mu_p + z_\alpha \sigma_p = R_{min} \tag{4. 9}$$

In questo caso i portafogli ammissibili si collocano tra la frontiera efficiente e la retta 4.9, dove la variabile esplicativa è σ_p e la variabile dipendente è μ_p.

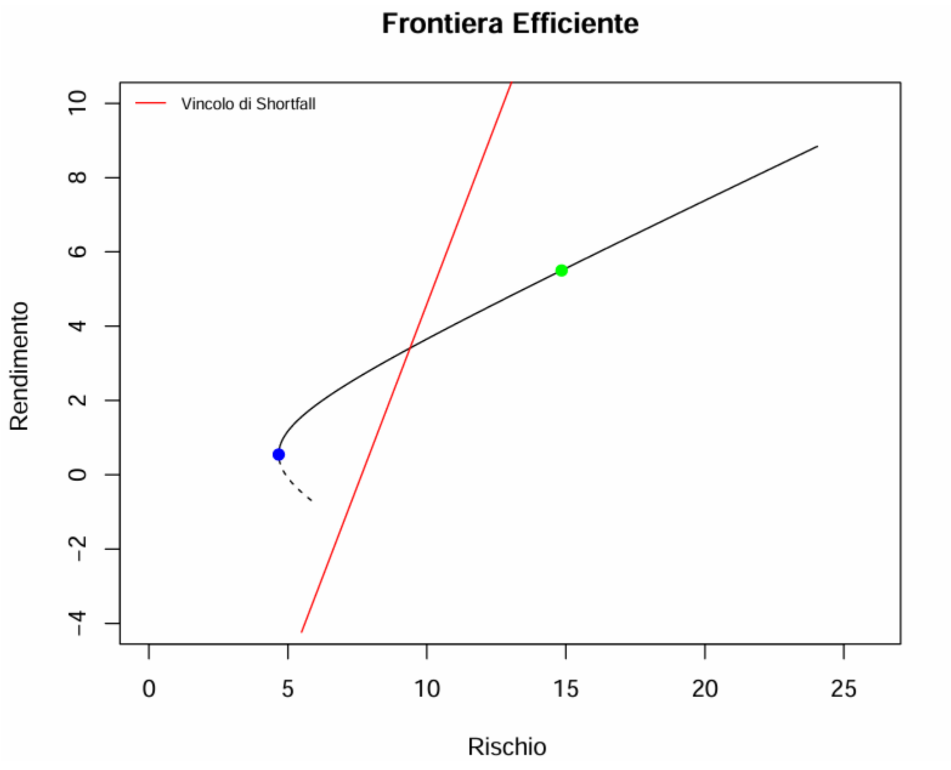


Figura 15

Il vincolo descritto limita, dunque, le combinazioni ammissibili e quelle efficienti. In conclusione, si può affermare che il punto di forza del modello di shortfall risiede nella capacità di catturare l'impatto dell'allocazione della tolleranza al rischio dichiarata in uno o più orizzonti d'investimento. Questo approccio dovrebbe aiutare i gestori del portafoglio a risolvere il delicato problema di trovare un equilibrio tra la ricerca di guadagni a lungo termine e la difesa contro il rischio di prestazioni negative.

Capitolo 5

Analisi empirica

La seguente analisi ha lo scopo di valutare la composizione di un portafoglio costituito da 15 titoli rischiosi prendendo in considerazione le possibili restrizioni lineari, non-lineari e probabilistiche che si possono applicare al metodo classico di selezione di portafoglio elaborato da Markowitz. L'analisi si basa sui prezzi di chiusura mensili forniti dal provider Refinitive dal 30/12/1999 al 28/06/2024.

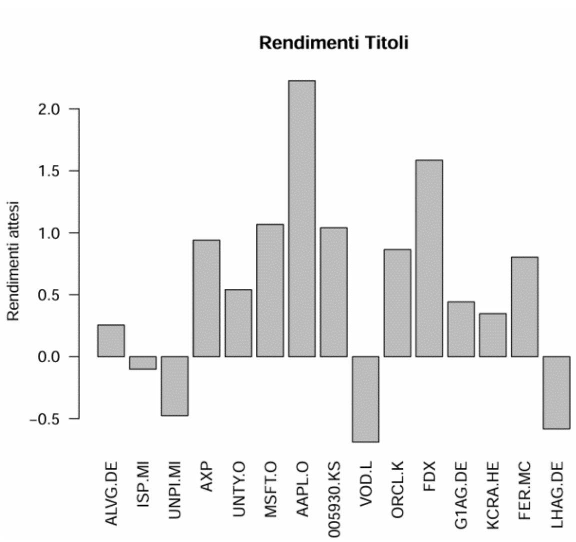
Il portafoglio è composto da 15 titoli rischiosi appartenenti a tre settori economici differenti:

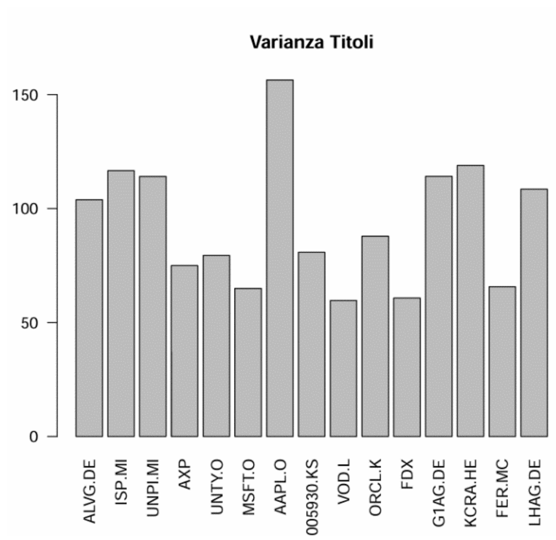
- Settore "Financials": ALVG.DE (Allianz Bank), ISP.MI (Intesa Sanpaolo), UNPI.MI (Gruppo Unipol), AXP (American Express Company), UNTY.O (Unity Bancorp);
- Settore "Technology": MSFT.O (Microsoft), AAPL.O (Apple), 005930.KS (Samsung Electronics Co), VOD.L (Vodafone), ORCL.K (Oracle Corp);
- Settore "Industrials": FDX (FedEx Corporation), G1AG.DE (Gea Group), KCRA.HE (Konecranes), FER.MC (Ferrovial), LHAG.DE (Lufthansa).

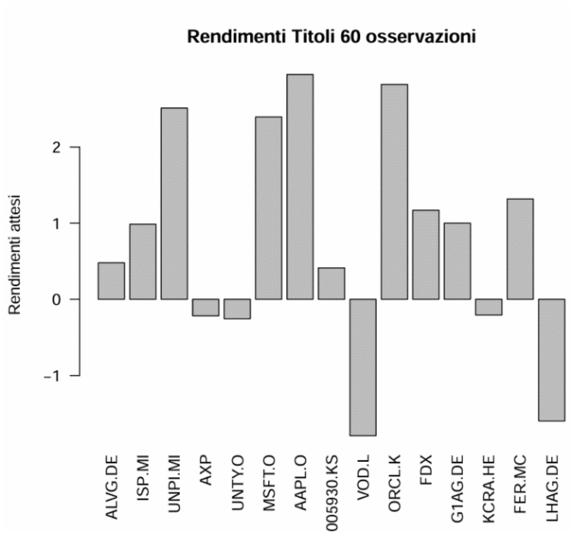
L'analisi sarà effettuata mediante l'intero campione disponibile e con una finestra rolling di 60 osservazioni a frequenza mensile, corrispondenti a 5 anni di osservazioni.

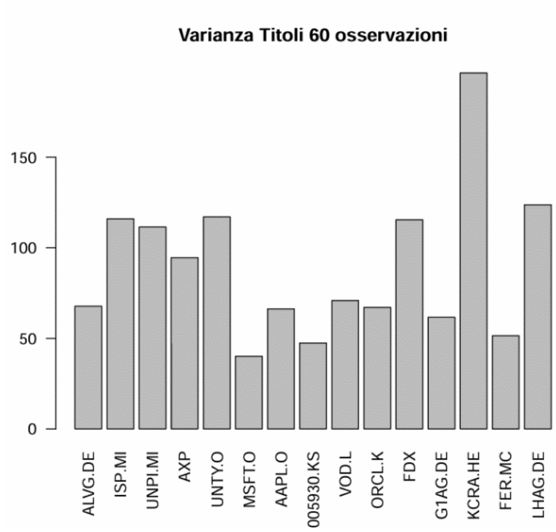
5.1. Rendimento atteso e varianza dei titoli

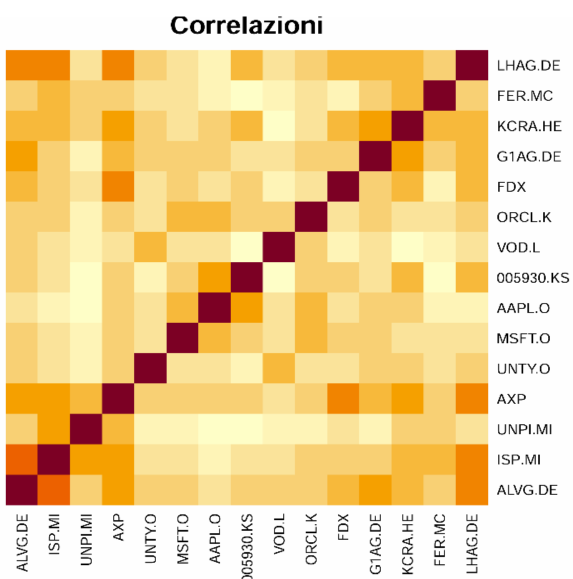
Dai grafici seguenti si nota una differenza notevole soprattutto nei rendimenti attesi dei titoli del settore "Financials" tra i due diversi orizzonti temporali. Infatti, i rendimenti dei titoli ISP.MI e UNPI.MI hanno avuto un evidente crescita nell'ultimo periodo di cinque anni, viceversa i rendimenti dei titoli AXP e UNTY.O hanno subito un notevole calo. Inoltre, si verifica una diminuzione della varianza nel settore "Technology", in particolare per i titoli MSFT.O e AAPL.O, e di conseguenza una riduzione del rischio. Di seguito sono riportati i grafici dei rendimenti attesi, delle varianze e delle correlazioni dei titoli nei due orizzonti temporali.

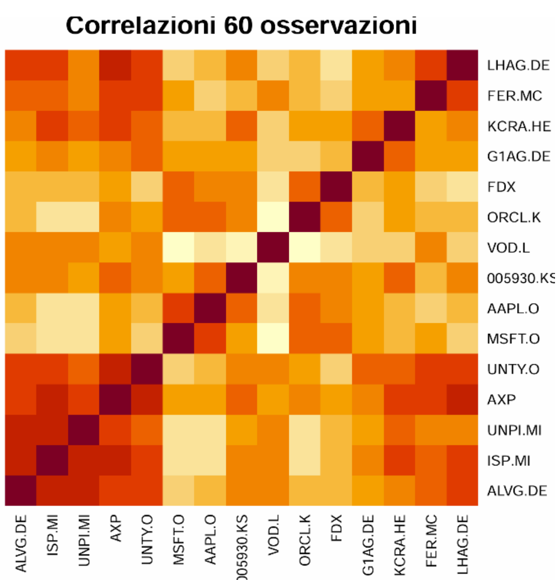






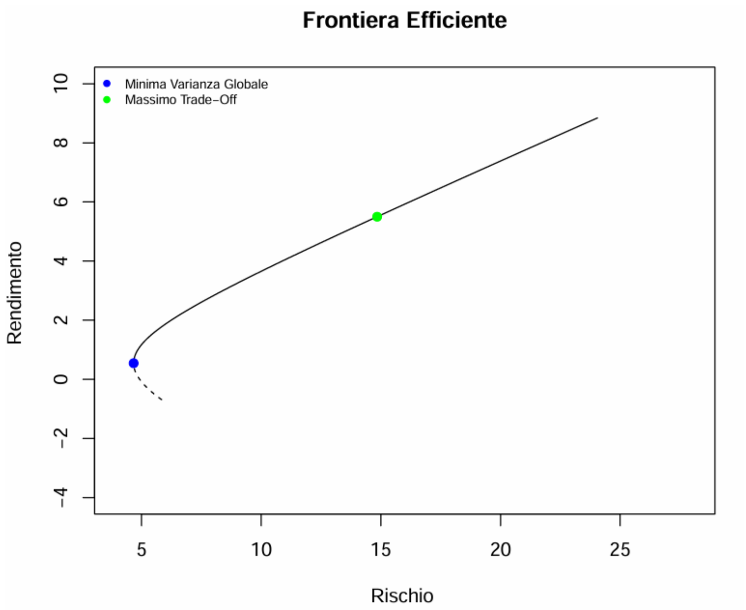


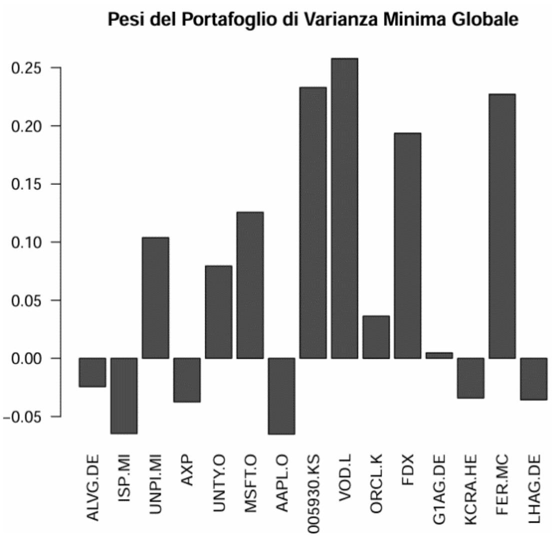


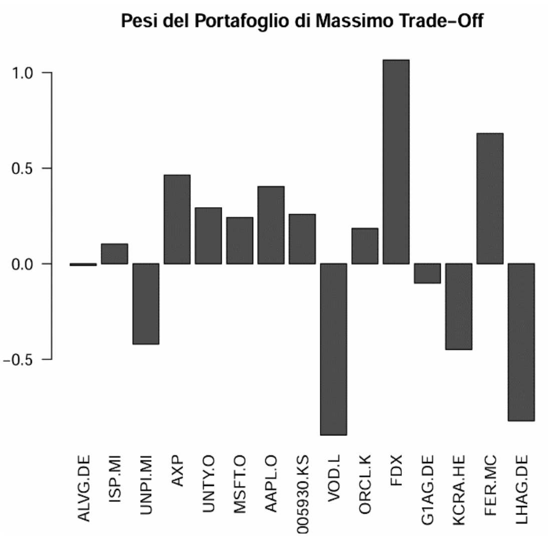


5.2. Allocazione di portafoglio

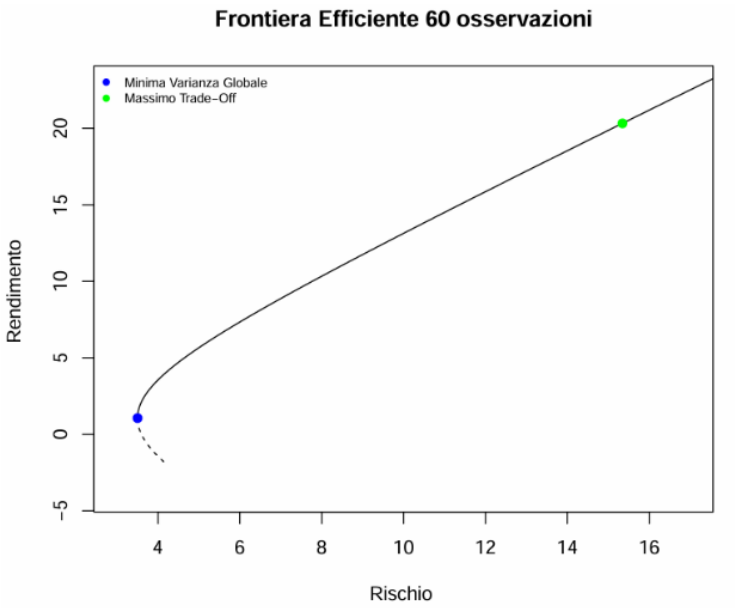
Si considera, quindi, il portafoglio costituito dai 15 titoli rischiosi e si individua la frontiera efficiente in assenza di vincoli, ovvero si individua l'insieme dei portafogli efficienti in base al criterio media-varianza.

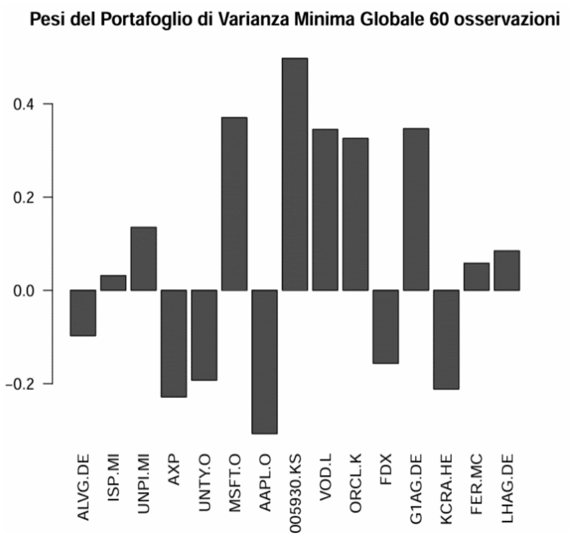


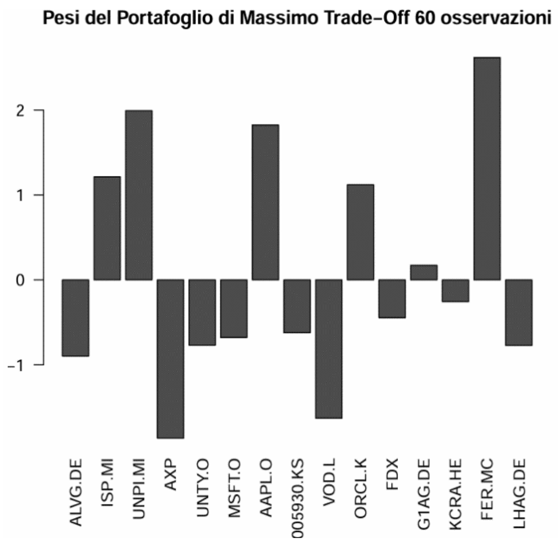




I grafici precedenti mostrano le composizioni dei portafogli di Minima Varianza Globale e di Massimo Trade-Off. Si osserva che i titoli con un valore della varianza minore, come VOD.L e FDX, hanno un peso maggiore nel portafoglio di minima varianza globale, mentre i tioli con varianza maggiore, come AAPL.O e ISP.MI, hanno un peso minore all'interno di tale portafoglio. Esso presenta un rendimento atteso pari allo 0,54 % e un rischio pari al 4,67 %. In linea con quanto dichiarato, il portafoglio di minima varianza globale rappresenta un portafoglio efficiente tale da garantire un livello di rischio minimo. Il portafoglio di massimo trade-off tende ad associare un peso maggiore ai titoli con un rapporto tra rendimento e rischio più elevato, come nel caso del titolo FDX. Esso presenta un rendimento atteso pari al 5,5% e un rischio pari al 14,85 %. Naturalmente, un rendimento di portafoglio maggiore comporta un livello di rischio maggiore.

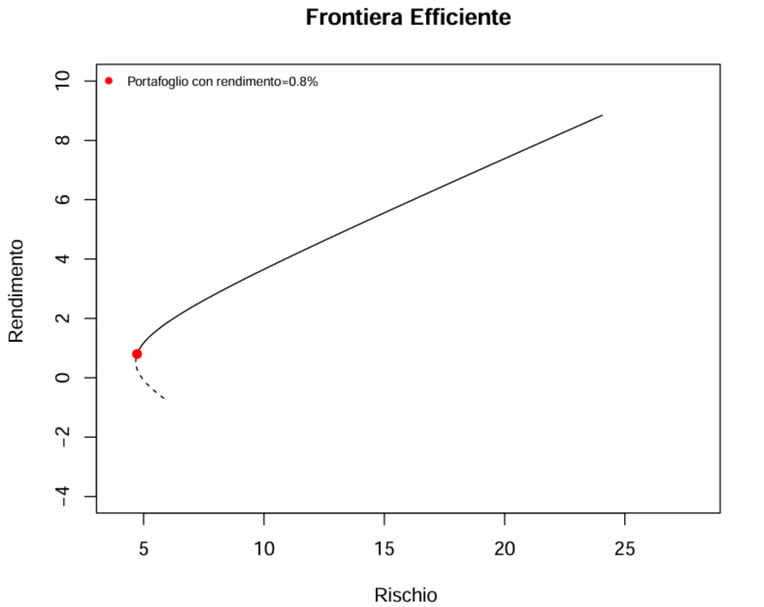


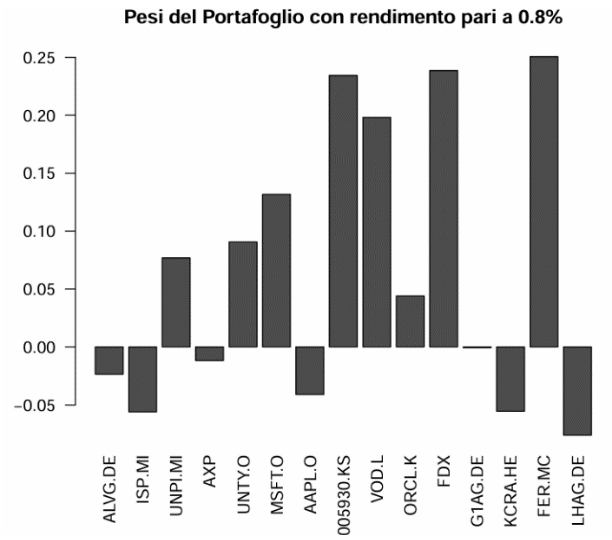




Si può notare che la frontiera efficiente calcolata su una finestra di 60 osservazioni risulta spostata verso l'asse delle ordinate nonostante non siano stati introdotti ulteriori titoli. Questo risultato è dato da un probabile aumento generale dei rendimenti e/o da una riduzione del rischio. Infatti, in questo caso il portafoglio di minima varianza globale ha rendimento atteso pari al 1,06% e un rischio pari al

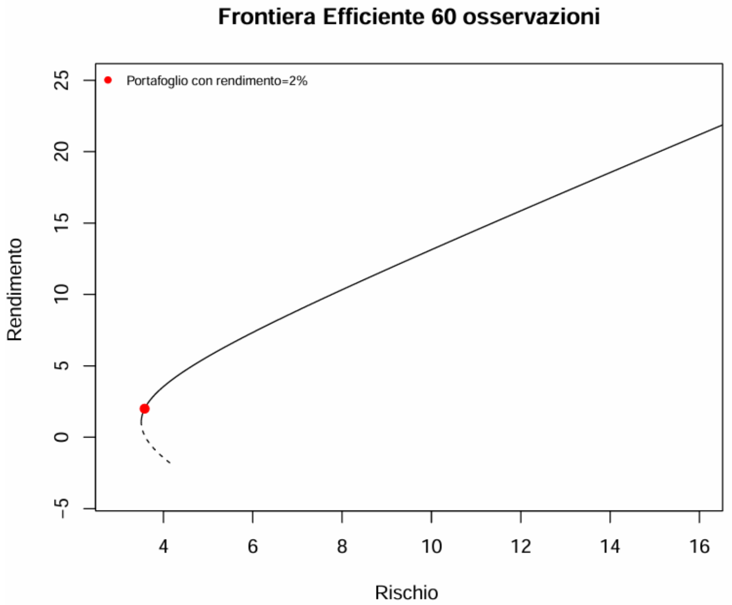
3,5%, mentre il portafoglio di massimo trade-off ha rendimento atteso pari al 20,32% e un rischio pari al 15,35%. Si conclude, quindi, che a seconda dell'orizzonte temporale considerato non solo la composizione di portafoglio assume un aspetto differente, ma anche le aspettative sul rendimento atteso e sul rischio del portafoglio cambiano. Ipotizzando che si voglia raggiungere un rendimento obbiettivo pari allo 0,8 %, si individua il seguente portafoglio ottimo:

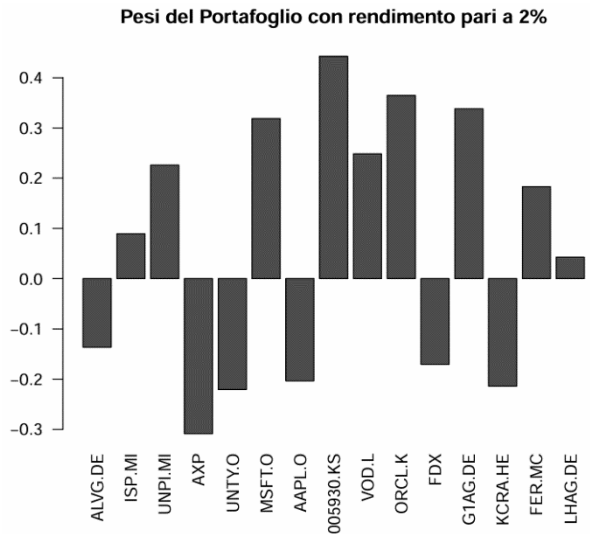




Invece, se si considera la finestra di 60 osservazioni, poiché il rendimento del portafoglio di minima varianza globale è pari al 1,06%, si può ipotizzare di voler raggiungere un rendimento pari al 2%.

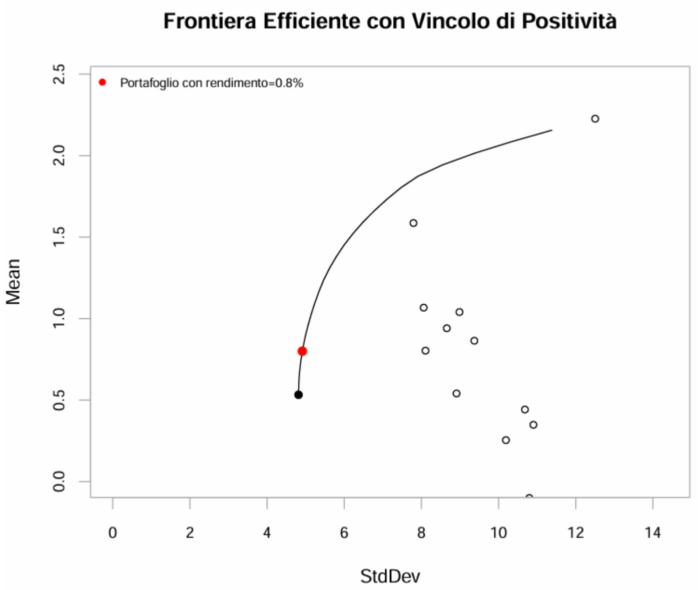
Si individua, quindi, il seguente portafoglio ottimo:

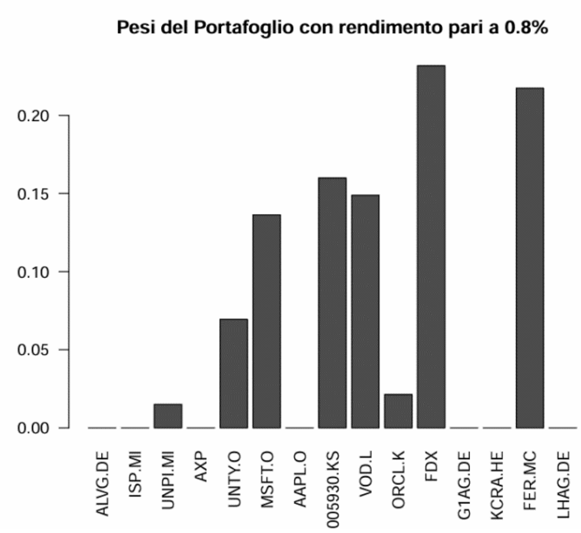




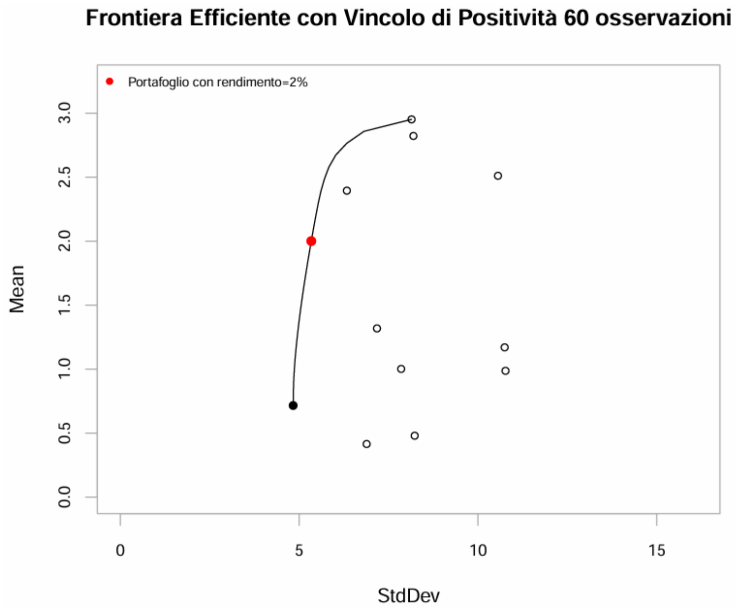
5.3. Vincoli sui pesi

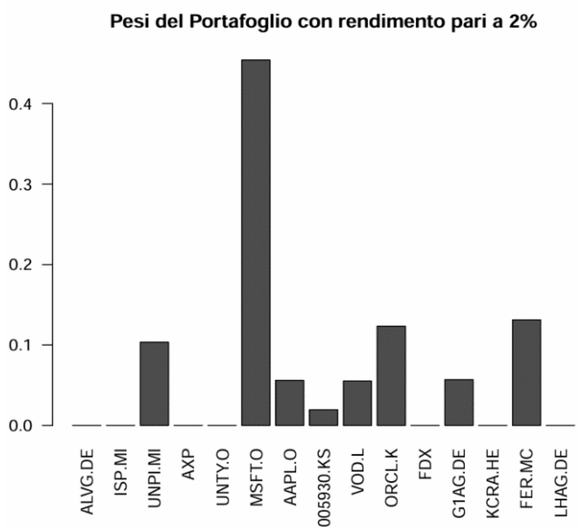
I portafogli precedenti prevedono una strategia long-short, ovvero ammettono anche le vendite allo scoperto. Qualora si volesse evitare la vendita allo scoperto è necessario imporre ai pesi un vincolo di positività. In questo caso, ipotizzando sempre che il rendimento target sia pari allo 0,8% si ottiene il seguente portafoglio ottimo:





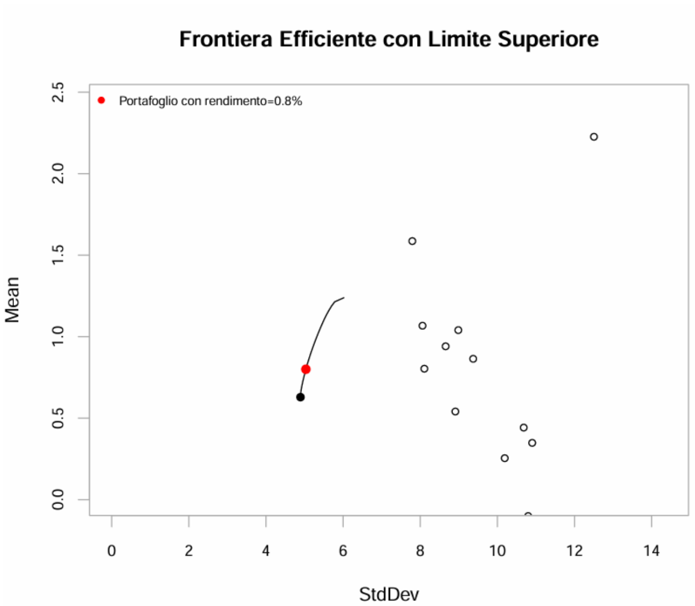
Si nota che il portafoglio costruito imponendo il vincolo di positività si concentra su un gruppo ristretto di titoli. La soluzione suggerisce di investire solo su 8 titoli dei 15 considerati, rendendo meno efficaci i benefici portati dalla diversificazione. Infatti, a parità di rendimento il rischio aumenta dal 4,73% del portafoglio non vincolato al 4,91%. Se si considera la finestra di 60 osservazioni e si ipotizza di voler raggiungere un rendimento target del 2% si ottiene il seguente portafoglio ottimo:

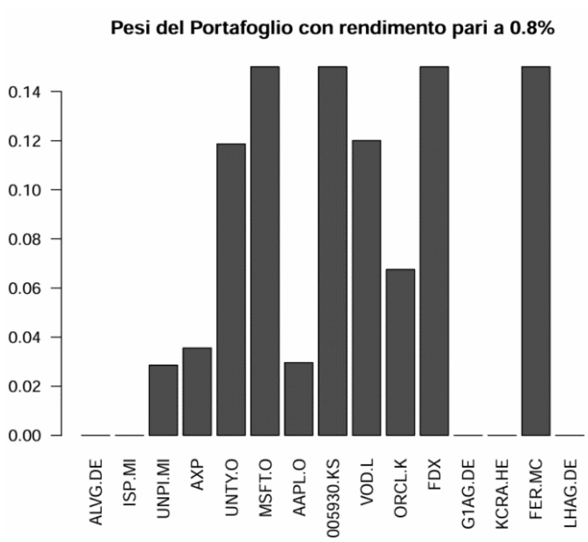




Anche in questo caso il portafoglio è concentrato su pochi titoli, in particolare su quelli appartenenti al settore Technology. Inoltre, la perdita di efficacia della diversificazione è ancora più evidente rispetto al caso in cui si considera l'intero dataset disponibile. Infatti, a parità di rendimento (2%), il rischio aumenta dal 3,58% del portafoglio non vincolato al 5,34 %.

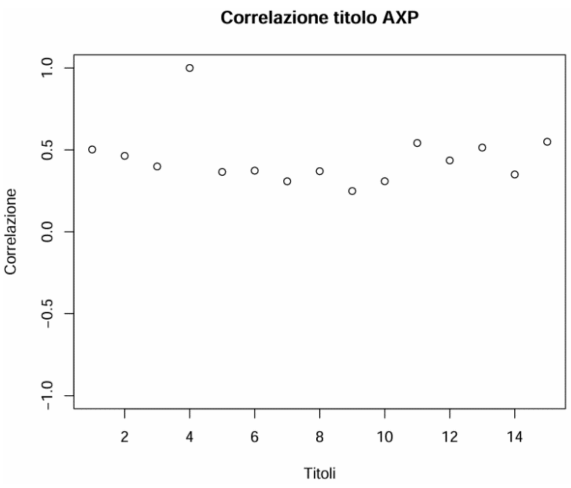
Se si ipotizza, inoltre, di voler assegnare un capitale massimo ad ogni titolo, è possibile vincolare superiormente i pesi. La scelta del limite superiore u deve essere presa in base al numero di titoli inclusi nel portafoglio. Considerando, quindi, un modello di allocazione basata su 15 titoli, un valore ragionevole di u potrebbe essere $u = 0{,}15$, mentre imporre un limite superiore pari a $u = \frac{1}{15}$ potrebbe indurre a un portafoglio equipesato. Il portafoglio ottimo che si ottiene imponendo un vincolo superiore dei pesi pari a 0,15, ipotizzando che il rendimento target sia pari allo 0,8%, è:

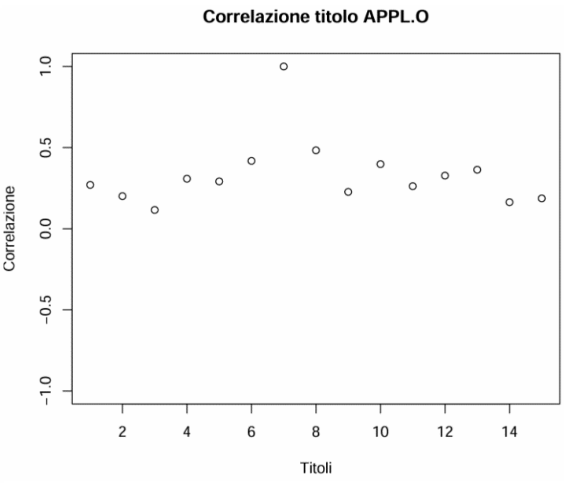




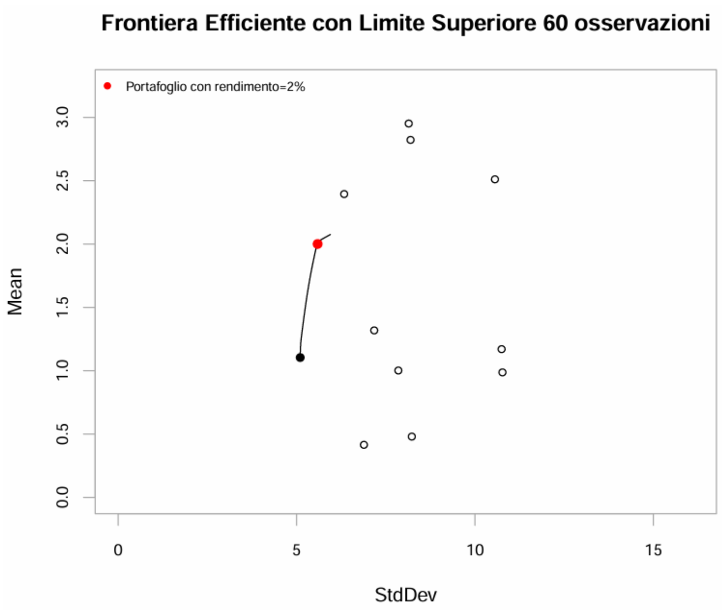
Il portafoglio, a differenza di quello costruito imponendo solo il vincolo di positività, include un numero maggiore di titoli, ovvero include 10 titoli rispetto agli 8 visti in precedenza. Nonostante ciò, si verifica un incremento del rischio che risulta pari al 5,03%. Il motivo di tale aumento risiede nella correlazione dei titoli a cui si è obbligati ad investire se si vuole limitare superiormente i pesi, mantenendo come obbiettivo il raggiungimento di un rendimento pari allo 0,8%.

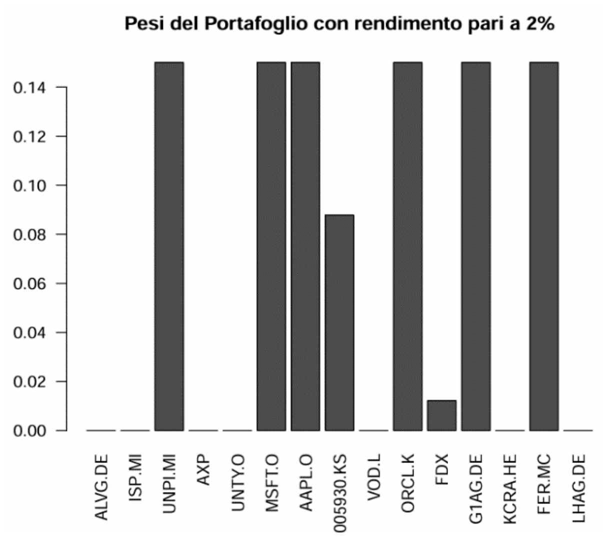
I due titoli aggiunti al portafoglio, rispetto al portafoglio vincolato positivamente, sono AXP e AAPL.O. Si analizzano le correlazioni tra questi titoli e i restanti titoli del portafoglio.



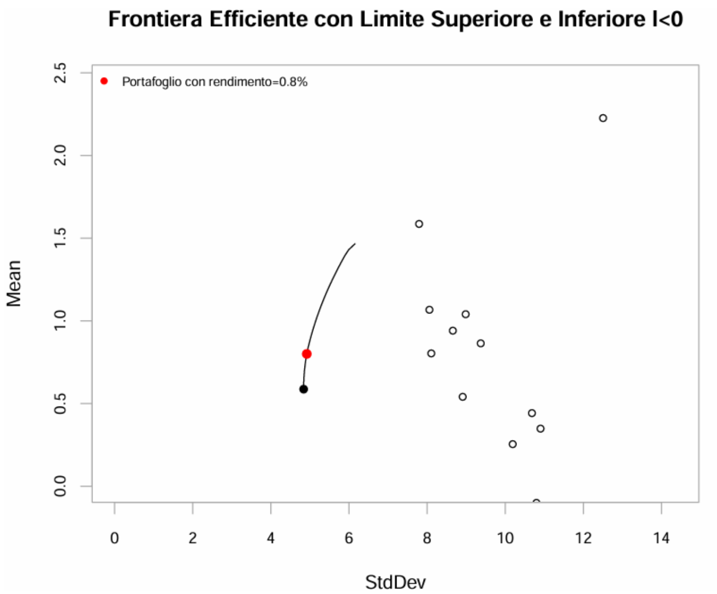


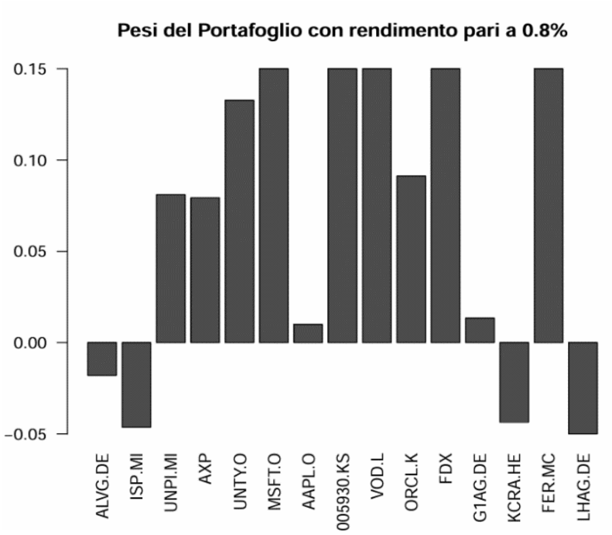
In linea con le aspettative, le correlazioni dei titoli AXP e AAPL.O sono tutte positive. Quindi, nonostante il numero di titoli sia aumentato, i valori positivi, assunti dalle correlazioni dei titoli aggiunti al portafoglio limitato superiormente, provocano un aumento del rischio totale di portafoglio. Imponendo un limite superiore $u = 0{,}15$ ai pesi del portafoglio realizzato sulla base di una finestra di 60 osservazioni, il portafoglio ottimo avente un rendimento target del 2% è:



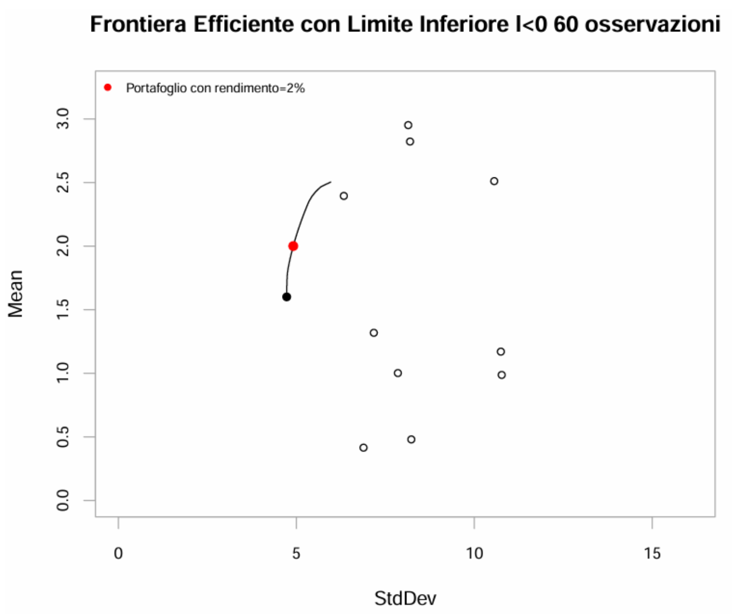


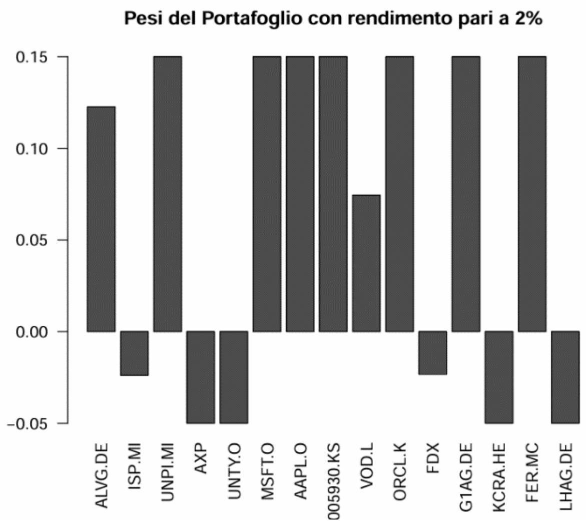
In questo caso il numero dei titoli in cui investire non aumenta, ma la maggior parte dei pesi associati ai titoli raggiungono il limite imposto, ovvero $\omega_i = 0{,}15$. Il rischio del portafoglio aumenta dal 5,34% del portafoglio vincolato positivamente al 5,59%. Per indurre una maggiore diversificazione del portafoglio è possibile introdurre, oltre al limite superiore, un limite inferiore ai pesi. Esistono, però, due tipi di scelte del limite inferiore l. La prima scelta prevede un limite inferiore negativo $l < 0$, che ammette le vendite allo scoperto. La seconda scelta prevede un limite inferiore positivo $l > 0$, nella quale è possibile adottare solamente una strategia di tipo long-only. Si considera il primo caso e si impone un limite inferiore sui pesi pari a $l = -0{,}05$, un valore che permette di controllare le vendite allo scoperto. Pertanto, il portafoglio ottimo che tiene conto dei limiti sui pesi del tipo $-0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$ e che raggiunge un rendimento target dello 0,8% è:



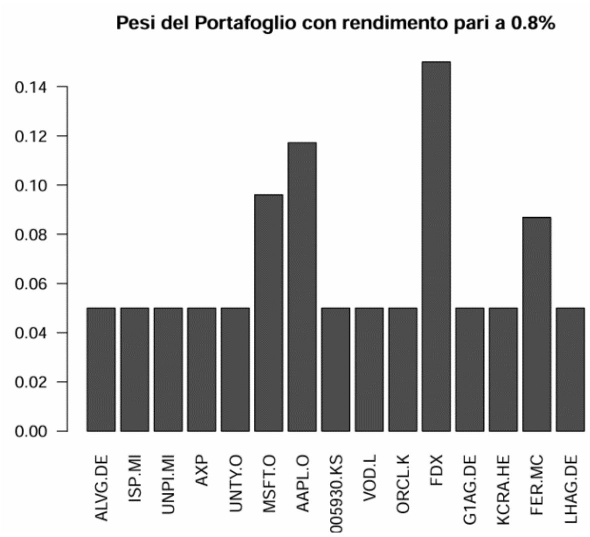


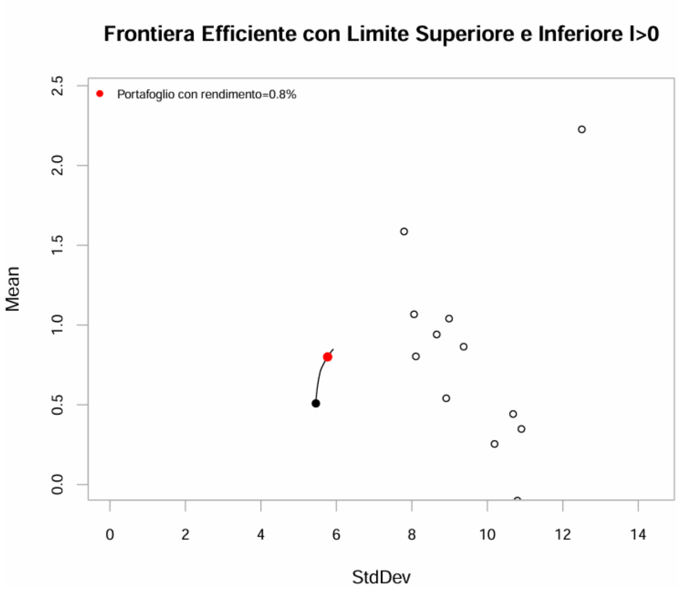
Il portafoglio ha un rischio pari al 4,92%, un livello molto simile a quello ottenuto imponendo i vincoli di positività. Al contrario del portafoglio con vincoli positivi sui pesi, il risultato consente di investire in più titoli e non solo in un gruppo ristretto. Inoltre, a differenza del portafoglio non vincolato, i pesi assumono dei valori ridotti, risultando meno estremi. In qualche modo, quindi, i pesi che nel portafoglio non vincolato assumevano un valore maggiore di 0,15 vengono redistribuiti negli altri titoli. Questo effetto è accentuato nel portafoglio ottimo basato su una finestra di 60 osservazioni che tiene conto dei limiti sui pesi del tipo $-0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$ e che raggiunge un rendimento target del 2%.



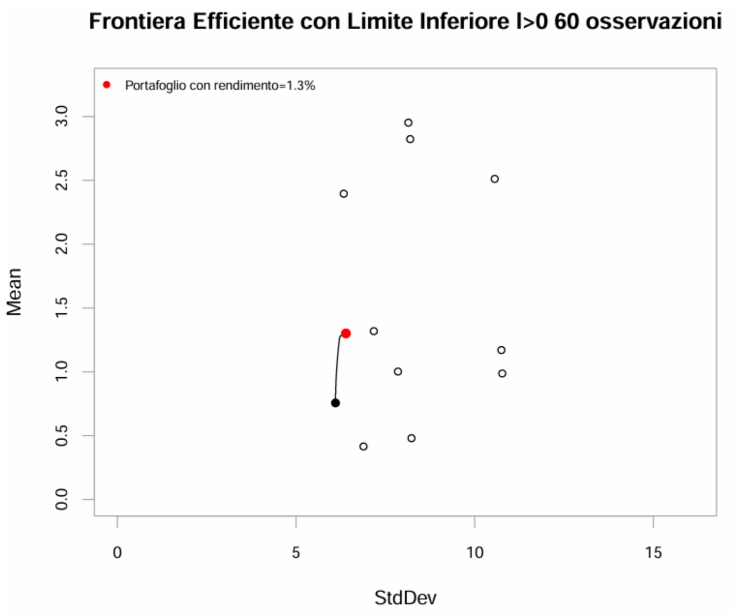


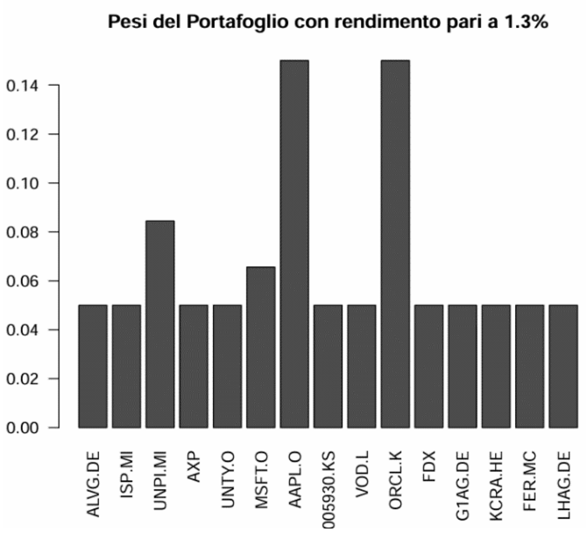
Si osserva, infatti, che 7 titoli sono associati a un peso pari al limite superiore, ovvero $\omega_i = 0{,}15$, e 4 titoli sono associati a un peso pari al limite inferiore, ovvero $\omega_i = -0{,}05$. Così facendo si limita l'azione di vendita allo scoperto. Infatti, il titolo AXP, che nel portafoglio non vincolato era associato ad un peso di $\omega_i = -0{,}31$, ora risulta associato a un peso $\omega_i = -0{,}05$. Il portafoglio ottimo vincolato sia superiormente che inferiormente raggiunge un livello di rischio pari al 4,91%, nettamente inferiore al livello di rischio che si deve sostenere se si seleziona il portafoglio vincolato positivamente (5,34%). Si considera il secondo caso in cui i vincoli inferiori assumono un valore positivo $l > 0$, in particolare si impone un limite inferiore ai pesi pari a $l = 0{,}05$. In questo modo è possibile investire un livello di capitale minimo in tutti e 15 titoli considerati. Il portafoglio ottimo che raggiunge un rendimento target dello 0,8% in presenza di vincoli del tipo $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$ è:





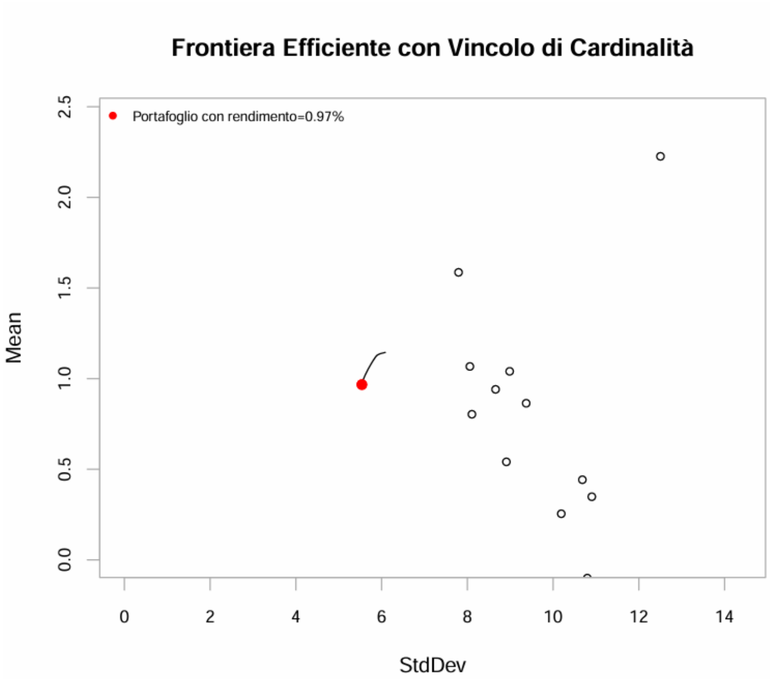
Il portafoglio presenta un rischio pari al 5,77%, un livello molto elevato rispetto a tutti i portafogli selezionati precedentemente. I vincoli imposti, nonostante tengano in considerazioni le varie esigenze riguardo l'allocazione di capitale tra i titoli, restringono molto le possibili combinazioni di rischio-rendimento per un portafoglio efficiente. Infatti, nel caso del portafoglio basato sulla finestra di 60 osservazioni a cui si impongono i vincoli del tipo $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$, non è possibile ottenere un rendimento del 2%. Pertanto, si analizza il portafoglio ottimo vincolato che raggiunge il rendimento più alto possibile, che risulta essere pari al 1,3%.

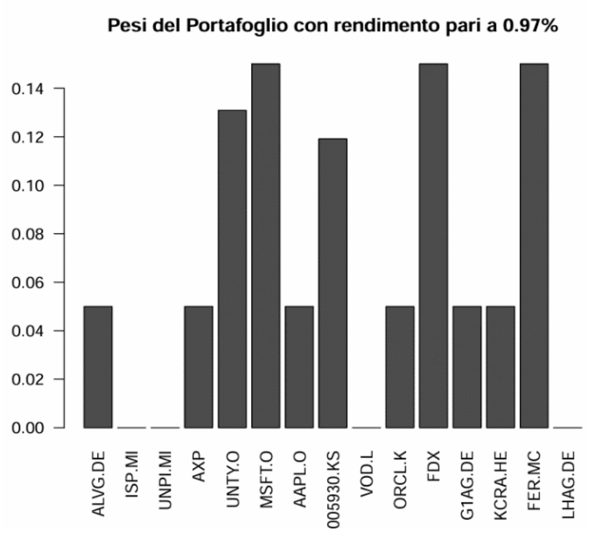




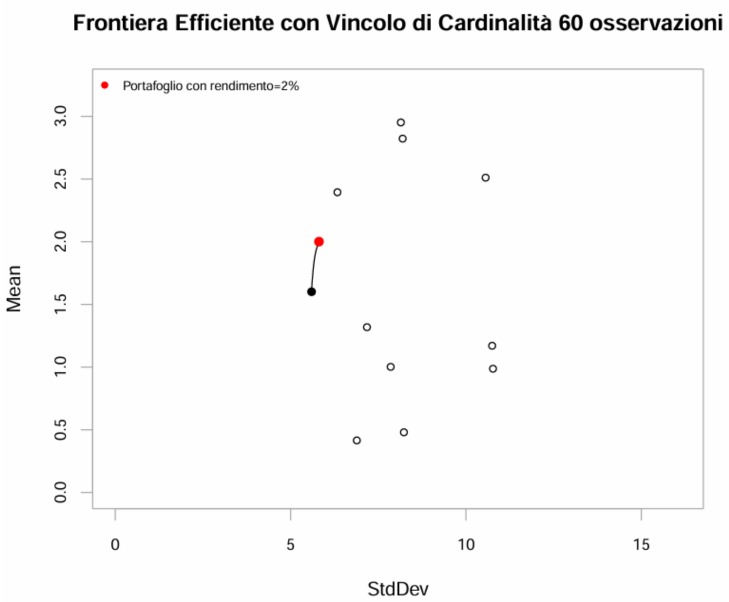
Il portafoglio risulta avere un rischio pari al 6,4%. Attuando un confronto tra quest'ultimo portafoglio e quello vincolato positivamente, si nota un aumento del rischio e una diminuzione del rendimento di portafoglio non indifferente. Dunque, è ragionevole, in termini di risultati di rischio e rendimento, preferire un portafoglio concentrato in pochi titoli, come nel caso del portafoglio in presenza di vincoli di positività, piuttosto che un portafoglio che suggerisce di investire una quota minima in ogni titolo.

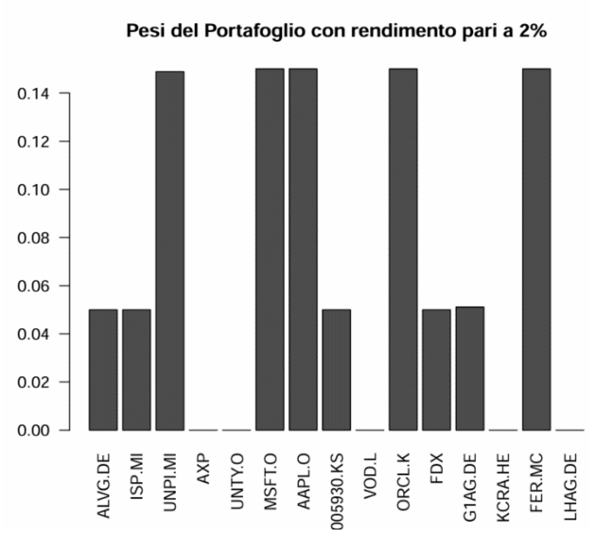
Per restringere il numero di attività all'interno del portafoglio e investire un capitale minimo per ogni titolo, è possibile utilizzare il vincolo di cardinalità e al tempo stesso imporre dei limiti superiori e inferiori ai pesi. Il primo passo è individuare il numero di titoli che si vogliono considerare. Supponiamo di escludere i titoli aventi un rendimento atteso negativo, ovvero si associa alla variabile binaria z_i un valore pari a zero per i titoli ISPI.MI, UNPI.MI, VOD.L e LHAG.DE. Si impone indirettamente un numero massimo di 11 titoli, ai quali vengono imposti dei limiti superiori e inferiori del tipo $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$. In questo caso la frontiera efficiente è limitata inferiormente da un portafoglio con rendimento pari allo 0,97%. Il portafoglio ottimo che raggiunge un rendimento dello 0,97% e include il vincolo di cardinalità è:



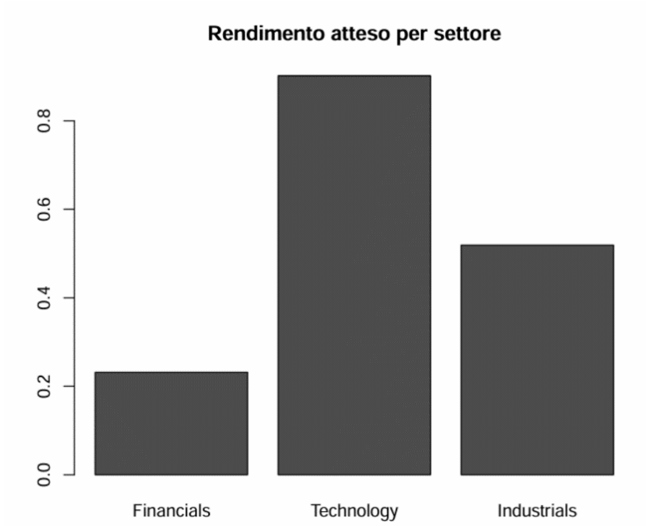


A differenza del portafoglio costruito con i soli limiti superiori e inferiori positivi avente rischio pari al 5,77% e rendimento atteso pari allo 0,8%, il portafoglio che introduce anche il vincolo di cardinalità presenta un rischio minore pari al 5,54% e al tempo stesso raggiunge un rendimento atteso maggiore pari allo 0,97%. Si prosegue allo stesso modo per il portafoglio basato su una finestra di 60 osservazioni, escludendo dal portafoglio i titoli con rendimento atteso negativo, ovvero AXP, UNTY.O, VOD.L, KCRA.HE e LHAG.DE. Si impone indirettamente un numero massimo di titoli pari a 10, a quali vengono imposti dei limiti superiori e inferiori del tipo $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$. Il portafoglio ottimo che raggiunge un rendimento del 2% e include il vincolo di cardinalità è:

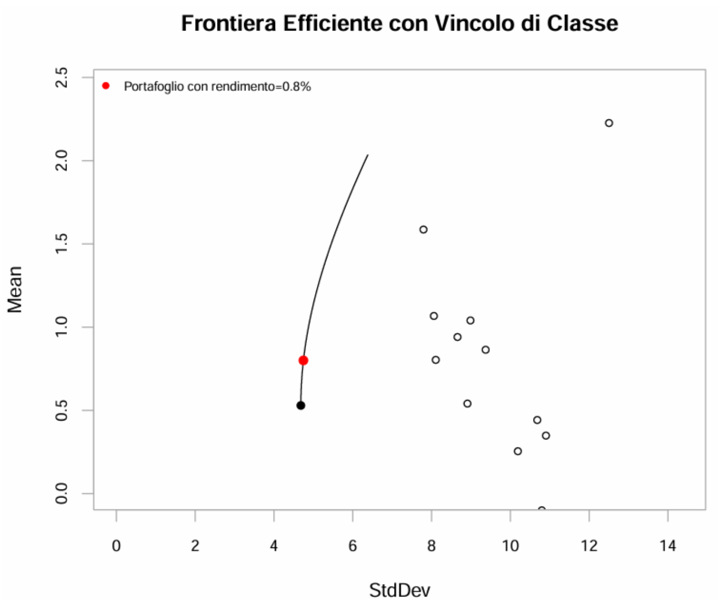


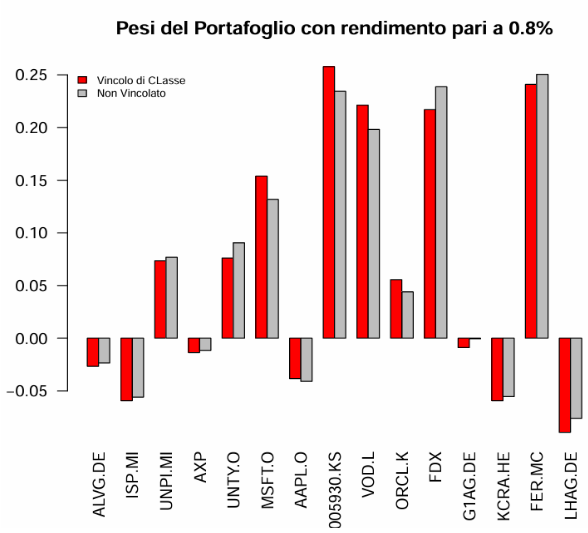


Si nota che tale portafoglio limita superiormente la frontiera efficiente costruita imponendo il vincolo di cardinalità. Anche questo portafoglio, come quello precedente basato sull'intero dataset disponibile, presenta un rischio minore pari al 5,81% e un rendimento atteso maggiore pari al 2% rispetto al rischio del 6,4% e al rendimento atteso del 1,3% del portafoglio che considera solo i limiti superiori e inferiori positivi. Sembrerebbe, quindi, necessario che l'investitore tenga in considerazione il numero massimo di titoli da includere nel portafoglio, in quanto un portafoglio a cui si impone una quota di investimento minima per ciascun titolo è caratterizzato da una combinazione rischio-rendimento molto diversa a seconda che venga introdotto o meno il vincolo di cardinalità. In particolare, si nota un peggioramento in termini prestazioni nel caso in cui non si tenga conto del vincolo di cardinalità. Un ulteriore opzione, utilizzata per limitare la proporzione totale investita nelle attività che presentano caratteristiche comuni, consiste nell'imporre dei vincoli di classe. Si potrebbe decidere di suddividere i titoli in base ai diversi settori economici di appartenenza. In questo modo si può associare ai titoli del settore economico che possiede un rendimento atteso minore dei pesi complessivamente più bassi e, viceversa, associare ai titoli del settore economico con rendimento atteso più elevato dei pesi complessivamente più alti. Di seguito si riportano i rendimenti attesi di ciascun settore:

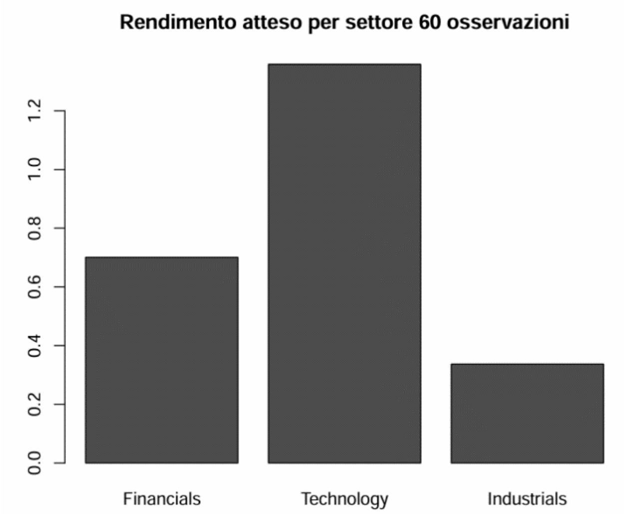


Supponiamo, quindi, di considerare i seguenti vincoli: al settore "Financials" si impone $-0{,}05 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0{,}05$; al settore "Technology" si impone $0{,}5 \leq \sum_{i \in T} \omega_i \leq 0{,}7$; al settore "Industrials" si impone $0{,}2 \leq \sum_{i \in I} \omega_i \leq 0{,}3$. Il portafoglio ottimo che segue tali vincoli e che raggiunge un rendimento atteso pari allo 0,8% è:

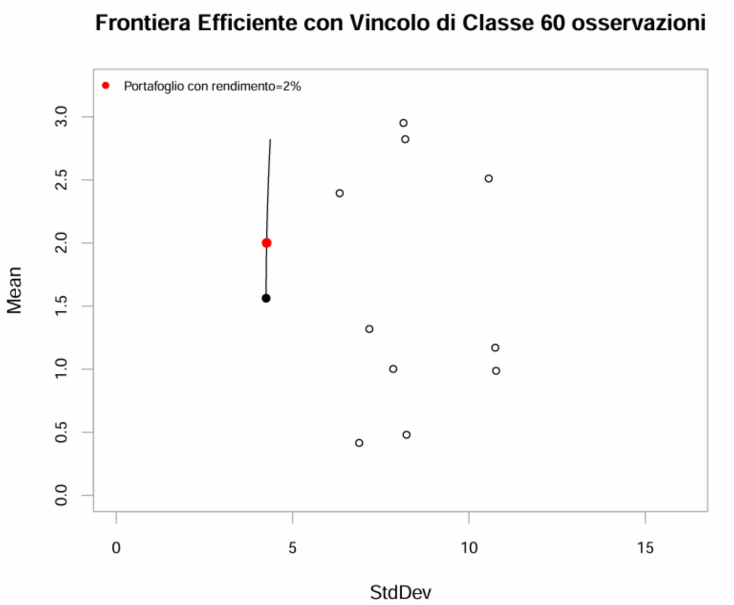


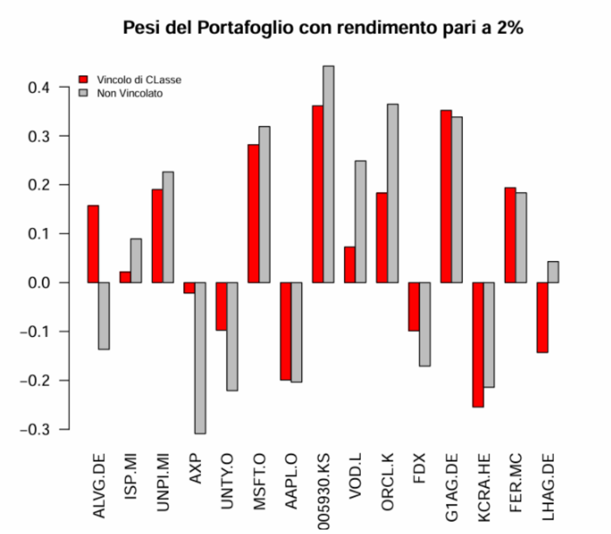


Il portafoglio presenta un livello di rischio pari al 4,75%. Come si può notare dai grafici soprastanti, la composizione del portafoglio rispetto al portafoglio non vincolato cambia. Infatti, i pesi del settore "Technology" sono più elevati, mentre i restanti si sono ridotti. Questo tipo di vincolo permette all'investitore di dare maggiore o minore rilevanza all'interno del portafoglio a delle classi di titoli predefinite. In particolare, si ottiene che la somma dei pesi del settore "Financials" è pari a $\sum_{i \in F} \omega_i = 0{,}05$, la somma dei pesi del settore "Technology" è pari a $\sum_{i \in T} \omega_i = 0{,}65$ e la somma dei pesi del settore "Industrials" è pari a $\sum_{i \in I} \omega_i = 0{,}30$. Si prosegue ad analizzare i rendimenti di ciascun settore sulla base della finestra di 60 osservazioni.

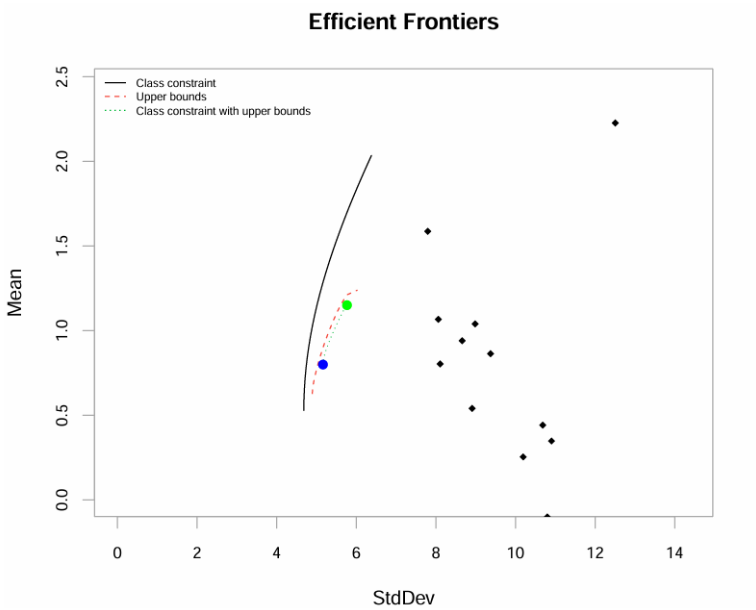


Supponiamo, quindi, di considerare i seguenti vincoli: al settore "Financials" si impone $0,2 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0,3$; al settore "Technology" si impone $0,5 \leq \sum_{i \in T} \omega_i \leq 0,7$; al settore "Industrials" si impone $-0,05 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0,05$. Il portafoglio ottimo che segue tali vincoli e che raggiunge un rendimento atteso pari al 2% è:

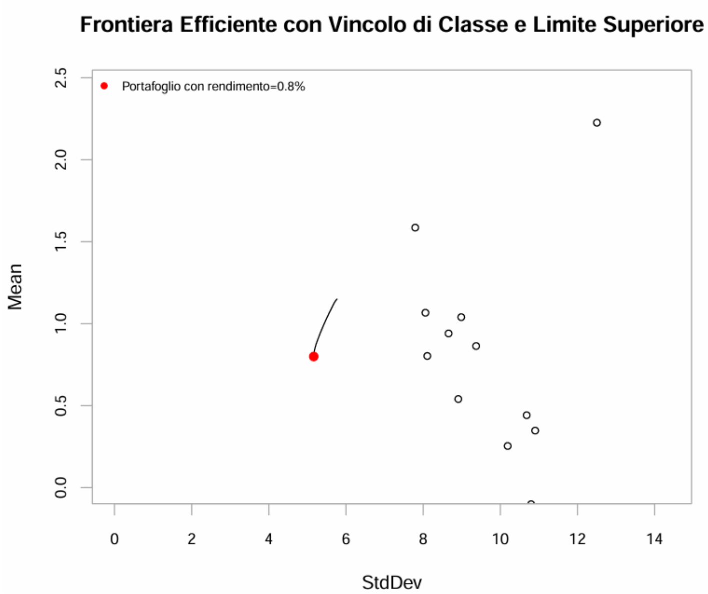


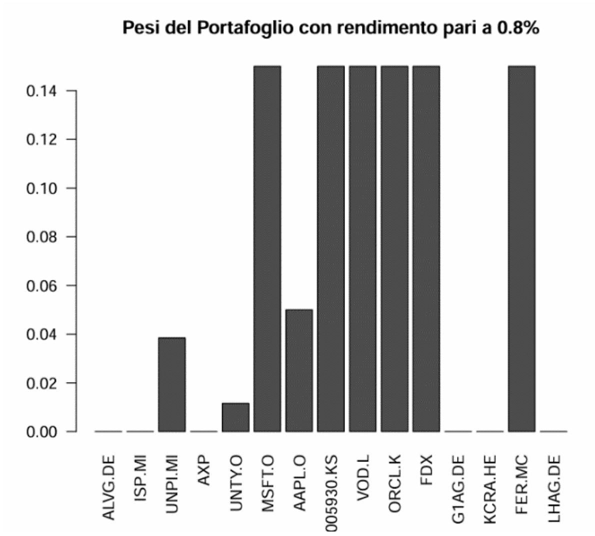


Il portafoglio ha un livello di rischio pari al 4,27%. Inoltre, si osserva che la somma dei pesi del settore "Financials" è pari a $\sum_{i \in F} \omega_i = 0,25$, la somma dei pesi del settore "Technology" è pari a $\sum_{i \in T} \omega_i = 0,7$ e la somma dei pesi del settore "Industrials" è pari a $\sum_{i \in I} \omega_i = 0,05$. In questo caso il vincolo di classe porta ad ottenere dei pesi molto diversi rispetto a quelli del portafoglio non vincolato. I portafogli ottenuti seguono una strategia long-short e associano ai pesi dei valori negativi abbastanza elevati. Pertanto, l'investitore potrebbe decidere di associare ai pesi solo valori positivi. Inoltre, potrebbe essere utile imporre, oltre al vincolo di classe, un limite superiore ai pesi in modo da introdurre un livello di investimento massimo per ciascun titolo. La frontiera efficiente che considera contestualmente il vincolo di classe e il limite superiore ai pesi pari a 0,15 si colloca a destra rispetto alla frontiera efficiente costruita con i soli vincoli di classe:

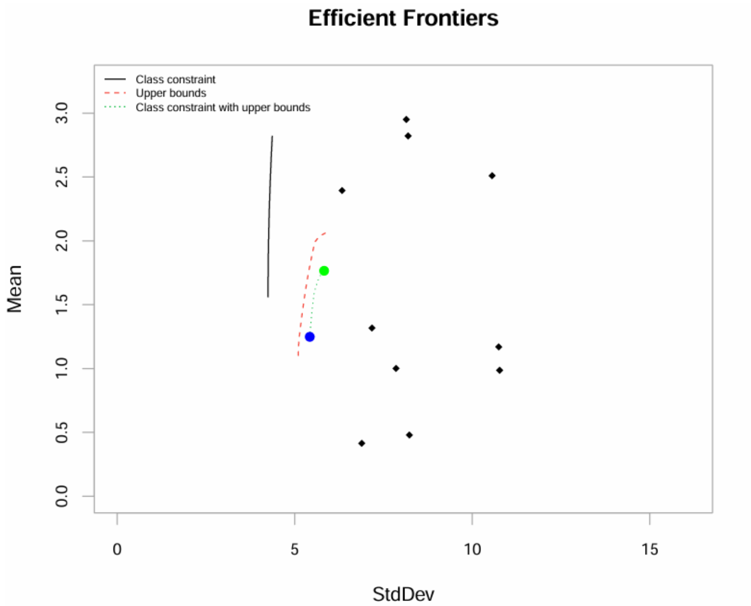


Supponiamo, quindi, di considerare i seguenti vincoli: al settore "Financials" si impone $0 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0{,}05$; al settore "Technology" si impone $0{,}5 \leq \sum_{i \in T} \omega_i \leq 0{,}7$; al settore "Industrials" si impone $0{,}2 \leq \sum_{i \in I} \omega_i \leq 0{,}3$; a ciascun titolo si impone $0 \leq \omega_i \leq 0{,}15$. Il portafoglio ottimo che segue tali vincoli e che raggiunge un rendimento atteso pari allo 0,8% è:



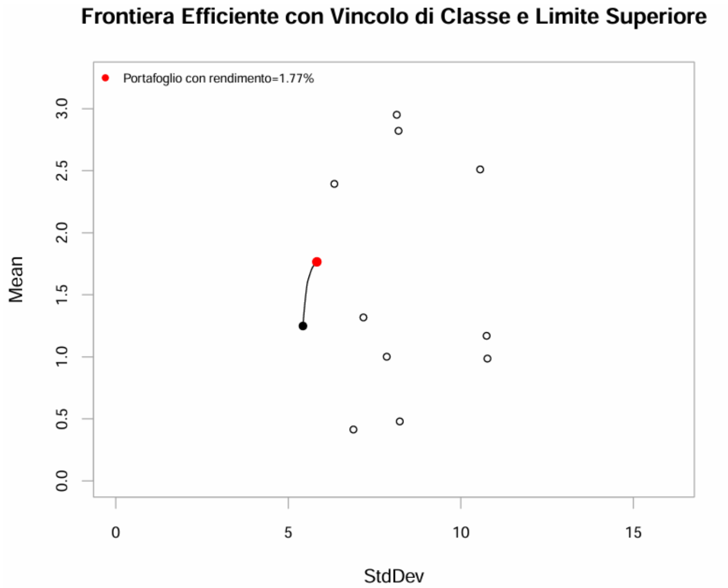


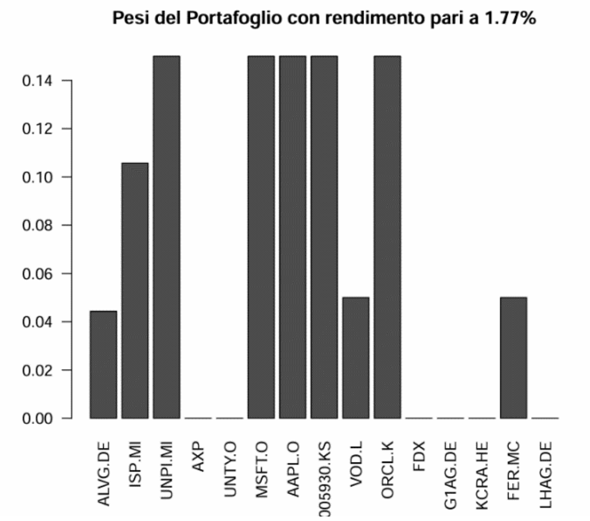
Come si può notare dal grafico dei pesi, introducendo un limite superiore, il portafoglio risulta completamente diverso da quello che considera solamente il vincolo di classe. Infatti, il portafoglio è concentrato su pochi titoli e presenta un livello di rischio pari al 5,16%. In questo modo, però, non si è obbligati ad eseguire delle operazioni di vendita allo scoperto. Anche nel caso della frontiera efficiente che considera il vincolo di classe con limiti superiori ai pesi basata su 60 osservazioni, si nota uno spostamento verso destra rispetto alla frontiera efficiente che considera il solo vincolo di classe:



Applicando più vincoli contemporaneamente, il numero di portafogli efficienti si riduce. Infatti, in questo caso la frontiera efficiente è limitata superiormente dal portafoglio che raggiunge un rendimento pari al 1,77%.

Supponiamo, quindi, di considerare i seguenti vincoli: al settore "Financials" si impone $0{,}2 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0{,}3$; al settore "Technology" si impone $0{,}5 \leq \sum_{i \in T} \omega_i \leq 0{,}7$; al settore "Industrials" si impone $0 \leq \sum_{i \in F} \omega_i \leq 0{,}05$; a ciascun titolo si impone $0 \leq \omega_i \leq 0{,}15$. Il portafoglio ottimo che segue tali vincoli e che raggiunge un rendimento atteso pari al 1,77% è:

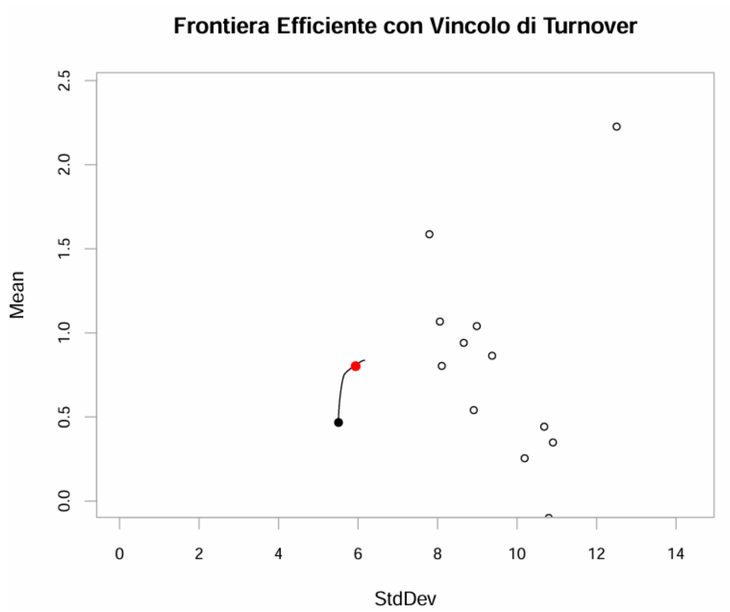


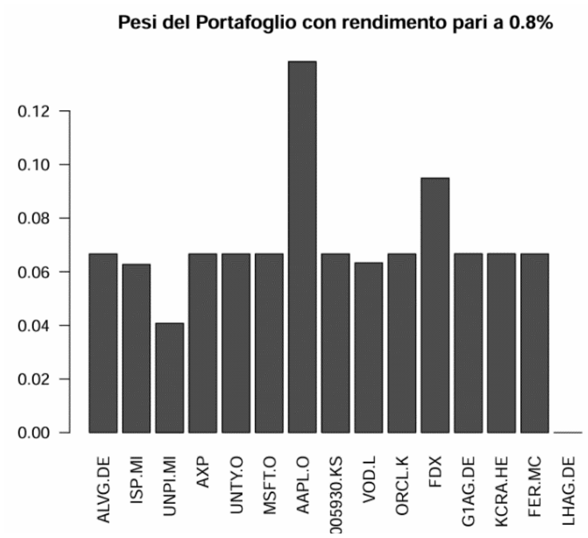


Il portafoglio presenta un rischio pari al 5,83%. Nonostante il rischio dei portafogli costruiti mediante il vincolo di classe e il limite superiore ai pesi sia più elevato rispetto ai portafogli che considera solamente il vincolo di classe, l'investitore non è obbligato ad eseguire delle operazioni di vendita allo scoperto.

5.4. Vincolo di Turnover

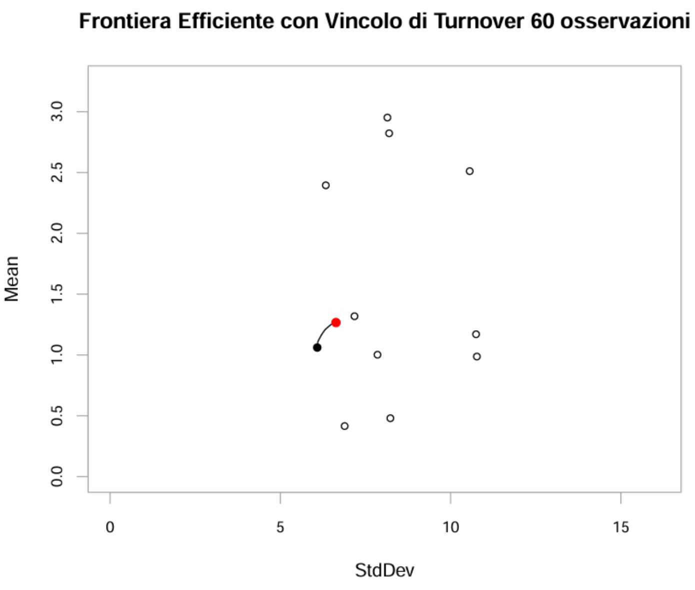
Per ridurre i costi di transizione, si può decidere di vincolare il portafoglio rispetto a uno specifico livello di turnover, limitando così la rotazione del portafoglio, ovvero il numero di operazioni. Un valore del turnover pari al 20% implica operazioni pari al 40% del valore del portafoglio. Se si impone un turnover massimo pari al 20%, allora il portafoglio ottimo che raggiunge un rendimento pari allo 0,8% e che non prevede l'operazione di vendita allo scoperto è:

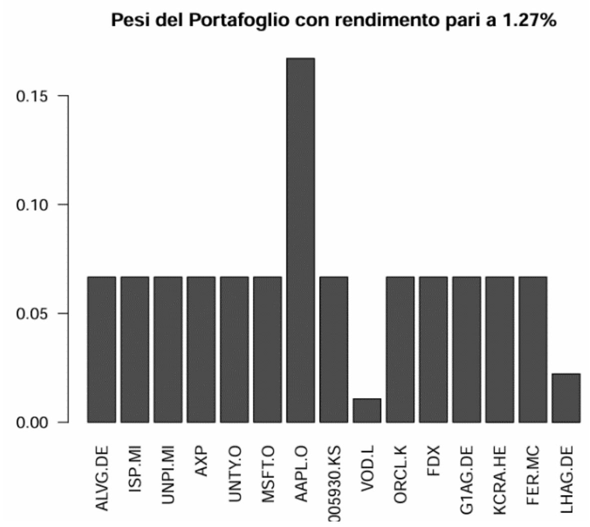




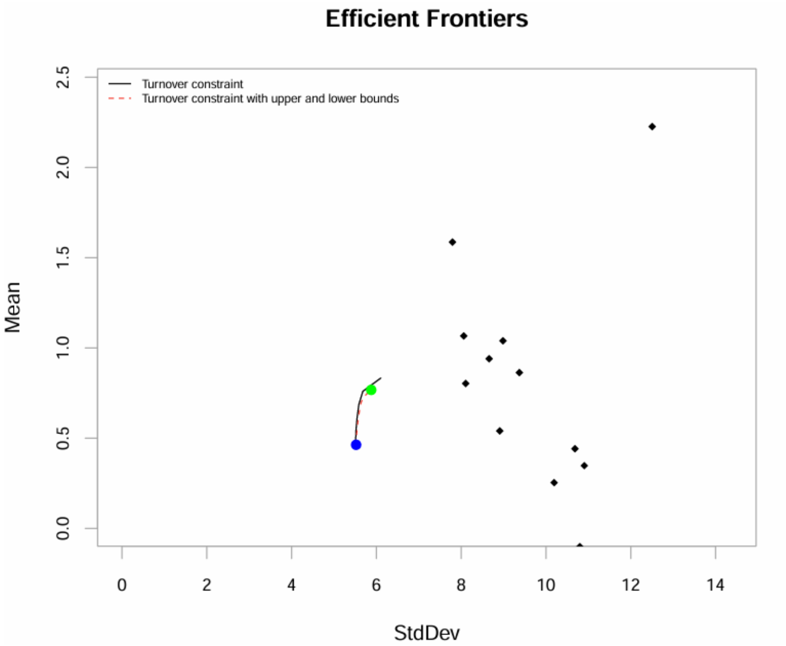
Il portafoglio ha un rischio pari al 5,94% e la maggior parte dei pesi tendono ad assumere un valore omogeneo.

Nel caso del portafoglio basato su una finestra di 60 osservazioni, la frontiera efficiente in presenza del vincolo di turnover pari al 20% è limitata superiormente da un portafoglio che raggiunge un rendimento pari al 1,27%.

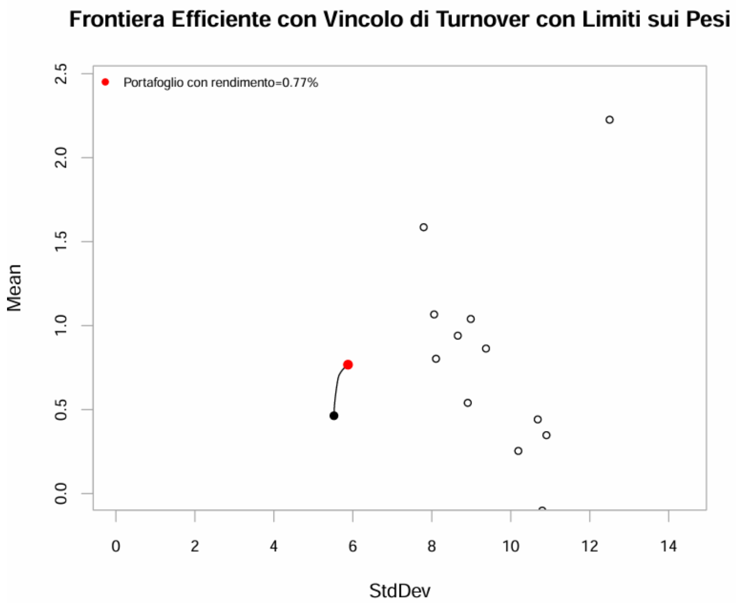


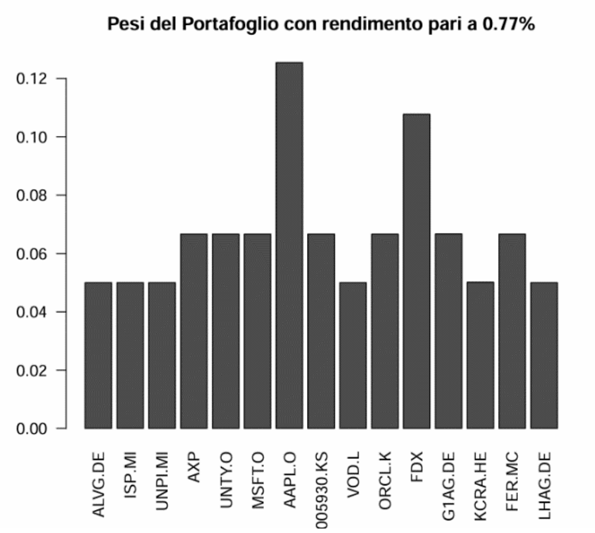


Il portafoglio presenta un rischio del 5,94%. Anche in questo caso il portafoglio tende ad associare, alla maggior parte dei titoli, dei pesi circa uguali. Nonostante la combinazione rischio-rendimento sia peggiorato rispetto ai casi precedenti, è importante sottolineare che questo portafoglio è l'unico tra quelli proposti che cerca di limitare i costi di transizioni, i quali, se non controllati, potrebbero avere un impatto significativo sull'effettivo rendimento del portafoglio. Il vincolo di turnover potrebbe essere imposto in concomitanza con i limiti superiori e inferiori sui pesi, con l'obbiettivo di garantire una diversificazione minima e un investimento massimo per ciascun titolo considerato. Si considera, quindi, la frontiera efficiente in presenza di un vincolo di turnover pari al 20% e dei limiti inferiori e superiori tali che $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$:

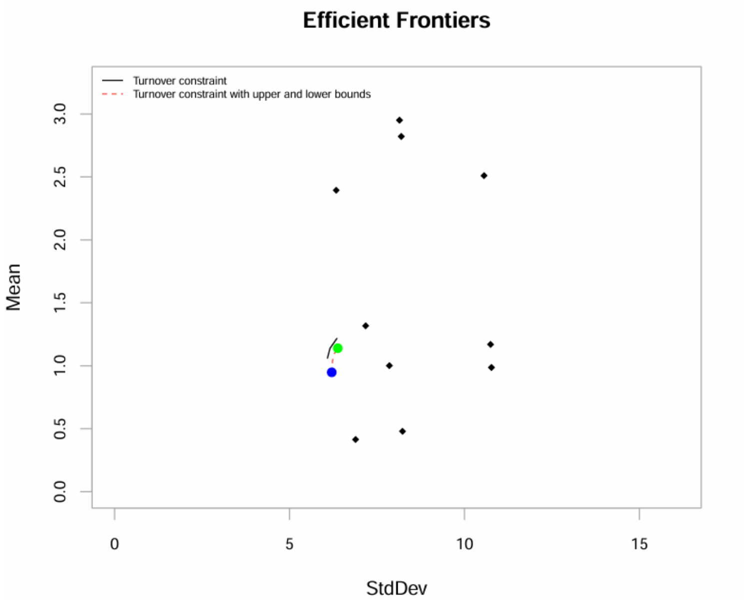


Come già detto in precedenza, se si applicano più vincoli contemporaneamente il numero di portafogli efficienti tende a ridursi. In questo caso la frontiera efficiente è limitata superiormente da un portafoglio che raggiunge un rendimento pari allo 0,77%:

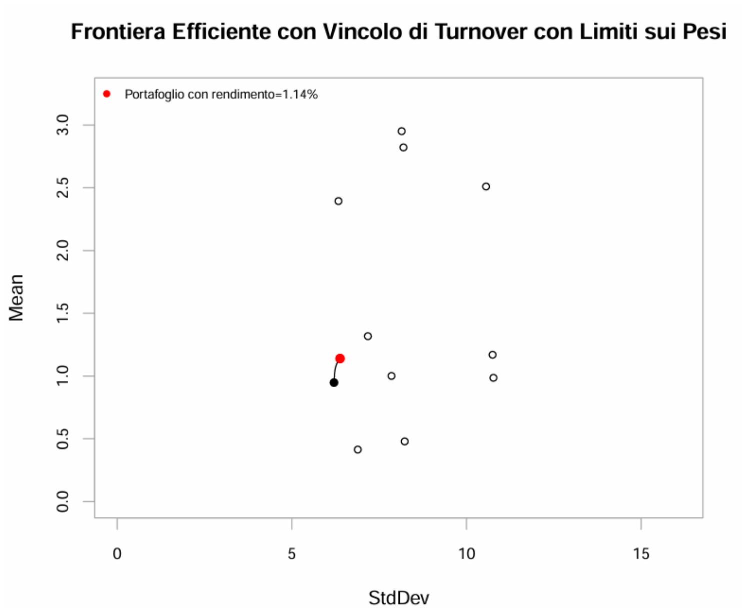


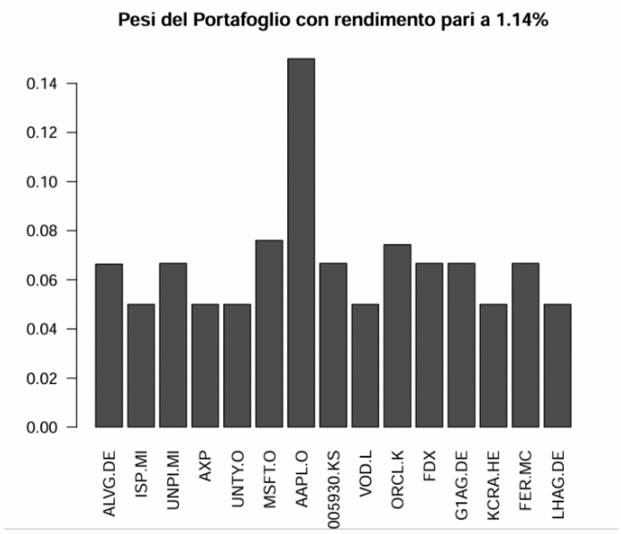


Il portafoglio presenta un rischio pari al 5,88%. Si prosegue a considerare la frontiera efficiente sulla base di 60 osservazioni in presenza del vincolo di turnover pari al 20% e dei limiti inferiori e superiori tali che $0{,}05 \leq \omega_i \leq 0{,}15$:



Anche in questo caso la frontiera efficiente risulta spostata a destra rispetto a quella che considera solo il vincolo di turnover. Inoltre, la frontiera è limitata superiormente da un portafoglio che raggiunge un rendimento pari al 1,14% e rischio pari al 6,38%:

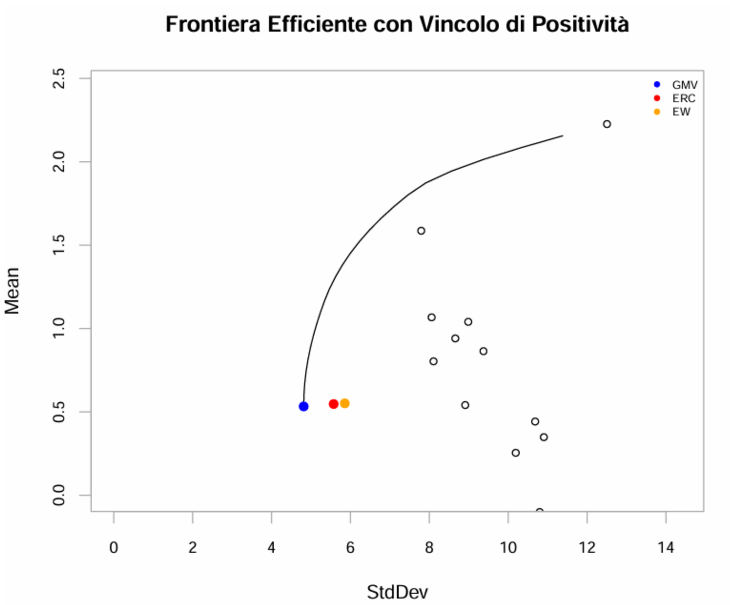




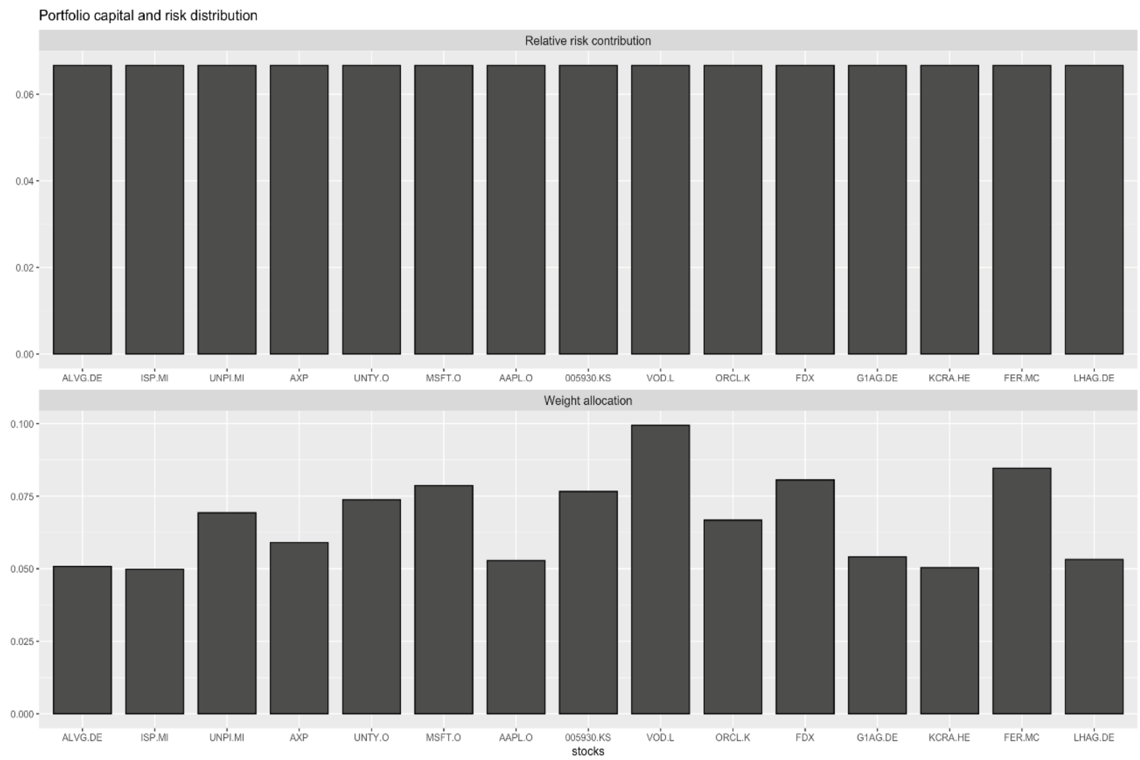
5.5. Portafoglio ERC

Si analizza il portafoglio di pari contributo al rischio ("Equal Risk Contribution"), ovvero il portafoglio in cui il contributo al rischio è uguale per ciascun titolo. Pertanto, il contributo al rischio di ciascun titolo è pari a $\mathcal{RC}_{\mathrm{i}} = b_i \mathcal{R}(\omega)$ con $b_i = \frac{1}{15}$ per ogni $i = 1,\ldots,15$.

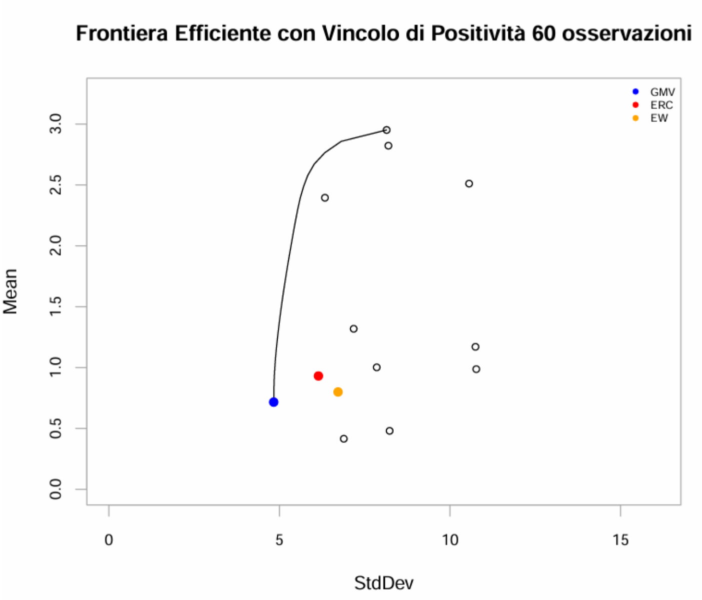
Il portafoglio ha un rendimento atteso dello 0,55% e un rischio del 5,57%. Dal grafico seguente si nota che il portafoglio ERC si colloca a destra della frontiera efficiente vincolata positivamente ed ha un livello di rischio compreso tra quello ottenuto dal portafoglio di minima varianza globale (4,82%) e quello ottenuto dal portafoglio equipesato (5,86%).



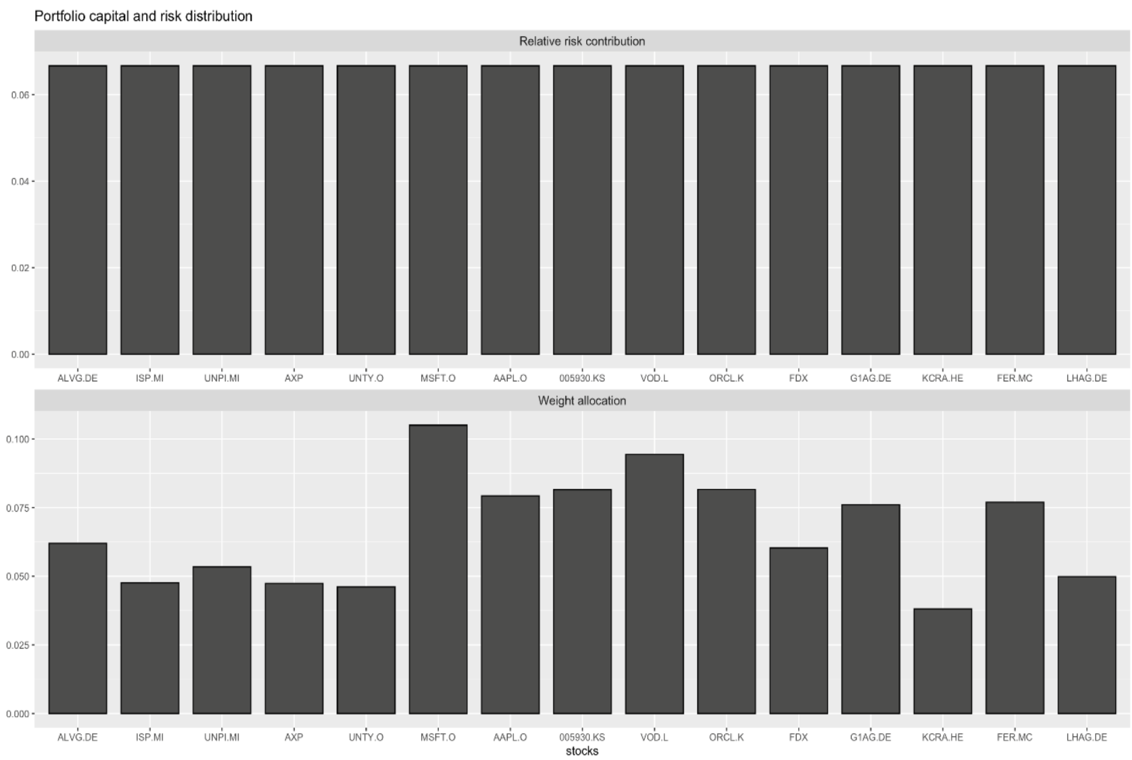
In generale, si nota che i titoli con una varianza elevata, come AAPL.O, ISP.MI e KCRA.HE, sono associati a pesi minori, viceversa i titoli con varianza minore, come VODL.O e FER.MC, sono associati a pesi maggiori.



Il portafoglio ERC basato sulla finestra di 60 osservazioni è:



Il portafoglio ha un rendimento atteso dello 0,93% e un rischio del 6,14%. Dal grafico precedente si nota che il portafoglio ERC si colloca a destra della frontiera efficiente vincolata positivamente ed ha un livello di rischio compreso tra quello ottenuto dal portafoglio di minima varianza globale (4,83%) e quello ottenuto dal portafoglio equipesato (6,72%).



In generale, si nota che i titoli con una varianza elevata, come KCRA.HE e UNTY.O, sono associati a pesi minori, viceversa i titoli con varianza minore, come MSFT.O e

VODL.O, sono associati a pesi maggiori. Inoltre, il portafoglio costruito mediante l'approccio di risk budgeting non fa parte dell'insieme dei portafogli efficienti, in quanto non viene ricercato mediante l'ottimizzazione basata sul criterio media-varianza e non dipende dalla performance attesa del portafoglio.

5.6. Vincolo di Shortfall

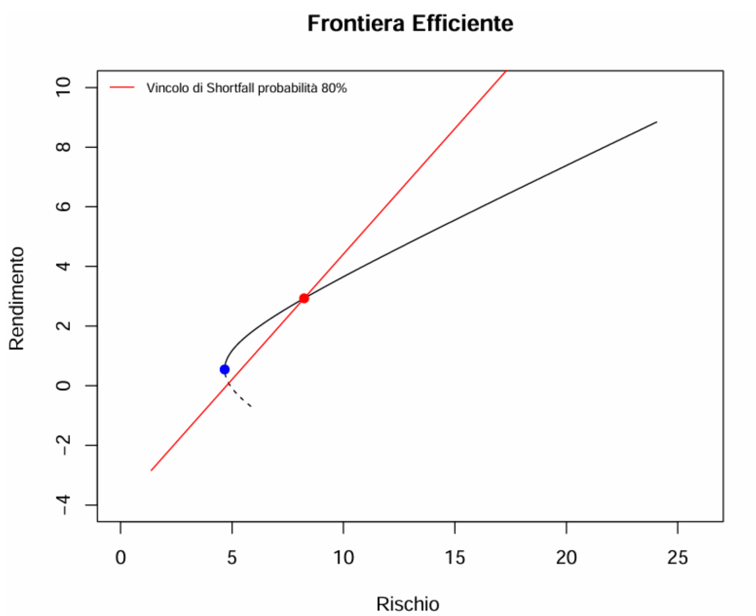
Un metodo utilizzato per limitare le perdite consiste nel considerare che il rendimento atteso abbia natura stocastica. Si assume che il rendimento sia caratterizzato da una distribuzione di probabilità Normale. Si vogliono individuare tutti i portafogli efficienti tali da garantire un rendimento superiore a $R_{min} = -4\%$ con una probabilità pari a $p = 80\%$. Pertanto, il vincolo di Shortfall è individuato dalla retta:

$$\mu_p - z_{0.8}\sigma_p = -4\%$$

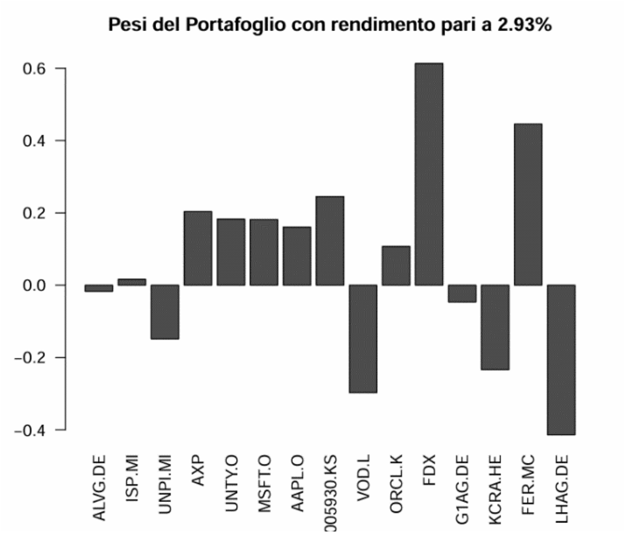
dove $-z_{0.8} = -0{,}84$ è il quantile di ordine $\alpha = 0{,}2$ della distribuzione. Tale retta interseca la frontiera efficiente in un punto che corrisponde al portafoglio con rendimento atteso pari a:

$$\mu_p = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

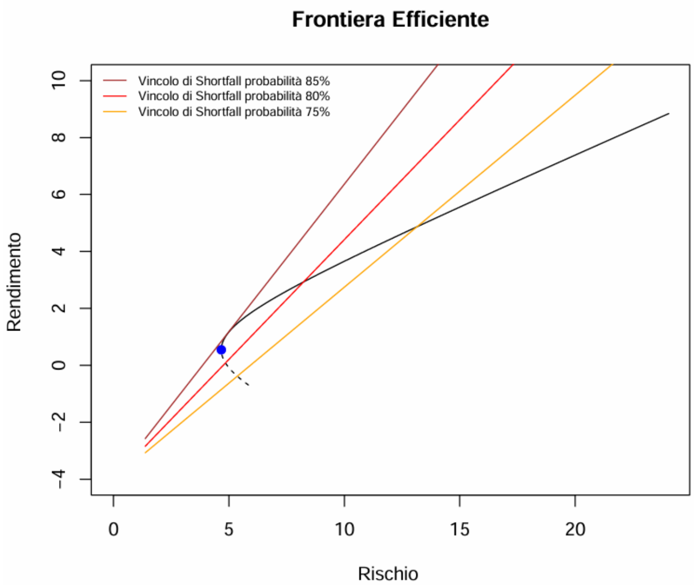
dove $a = \frac{C}{\Delta} z_{\alpha}^2 - 1$, $b = 2\left(R_{min} - \frac{B}{\Delta} z_{\alpha}^2\right)$ e $c = \frac{A}{\Delta} z_{\alpha}^2 - R_{min}^2$.



Quindi, l'insieme dei portafogli efficienti che ha una probabilità del 80% di superare un rendimento del -4% corrisponde all'insieme dei portafogli collocati nella frontiera efficiente e situati tra il portafoglio di minima varianza globale e il portafoglio di rendimento atteso pari al 2,93% e rischio pari al 8,23%.

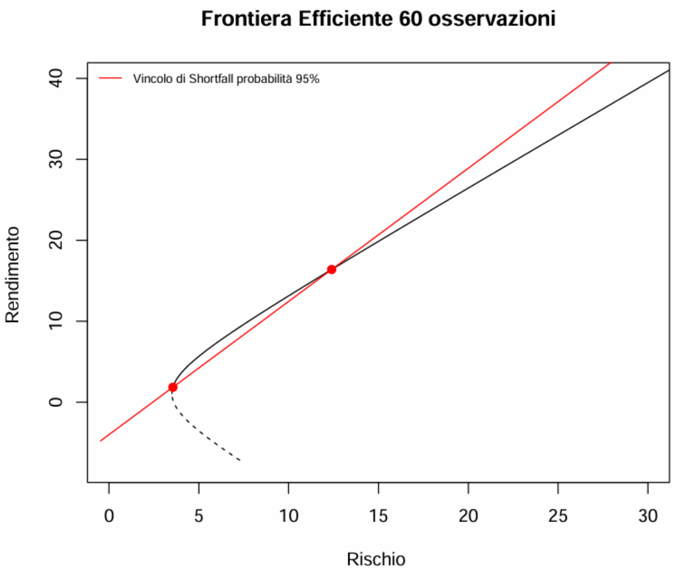


Inoltre, si osserva che, aumentando la probabilità di ottenere un portafoglio con rendimento superiore al -4%, il numero di portafogli efficienti che garantiscono tale vincolo diminuisce. Al contrario, se si riduce la probabilità di ottenere un portafoglio con rendimento superiore al -4%, il numero di portafogli efficienti che garantiscono tale vincolo aumenta.

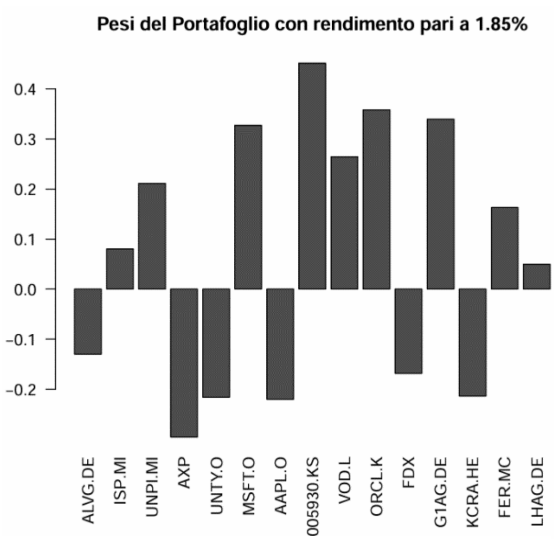


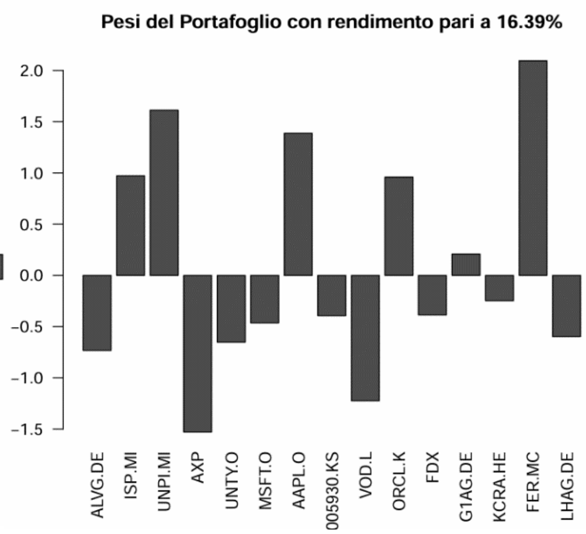
In particolare, si osserva che non esistono portafogli efficienti che garantiscono un rendimento superiore al -4% con una probabilità del 85%.

Si attua lo stesso procedimento considerando la finestra di 60 osservazioni. In questo caso, però, si associa al vincolo di shortfall una probabilità del 95% di ottenere un portafoglio con rendimento superiore al -4%.

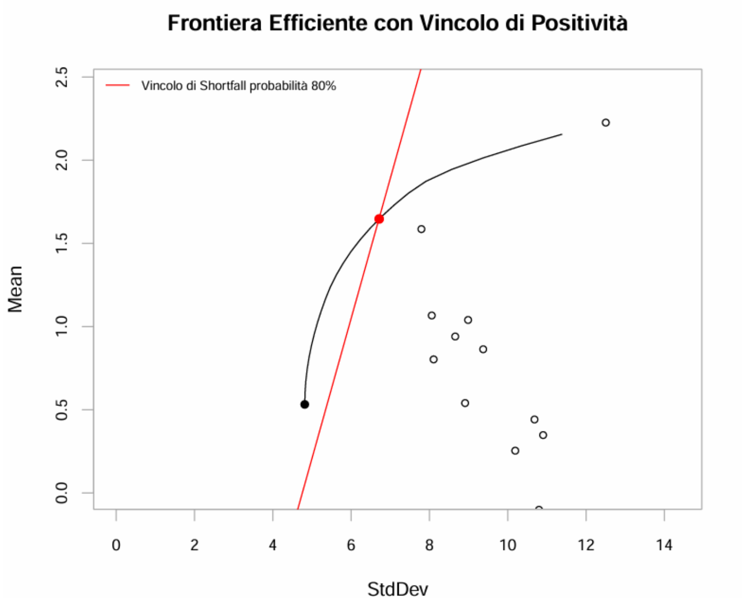


In questo caso, il portafoglio di minima varianza globale può garantire solamente il -4,7% con una probabilità del 95%. Pertanto, l'insieme dei portafogli efficienti, che ha una probabilità del 95% di superare un rendimento del -4%, corrisponde all'insieme dei portafogli collocati nella frontiera efficiente e situati tra il portafoglio di rendimento atteso pari al 1,85% e rischio pari al 3,55% e il portafoglio di rendimento atteso pari al 16,39% e rischio pari al 12,4%.

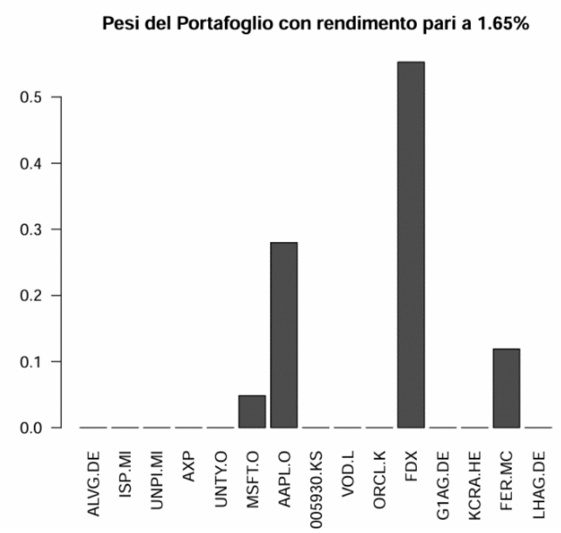




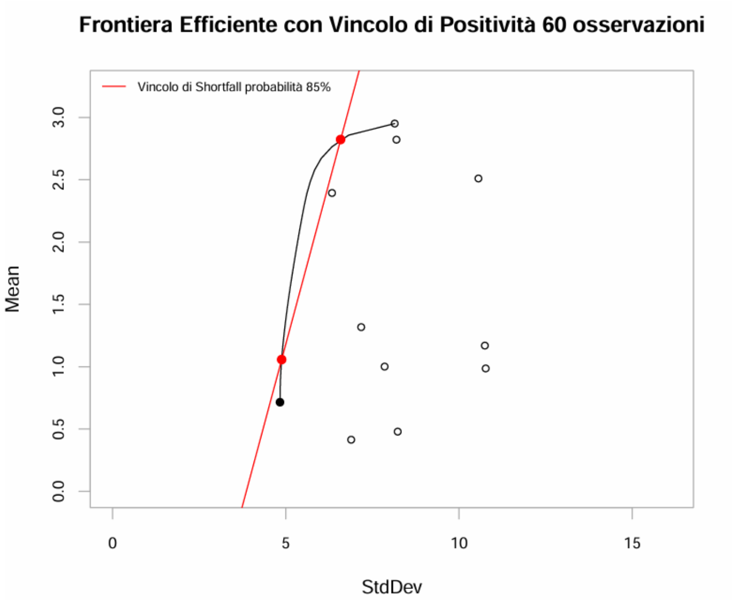
Il vincolo di shortfall può essere applicato anche in un contesto di strategia long-only, in cui si escludono le vendite allo scoperto. Per raggiungere tale scopo è necessario imporre ai pesi del portafoglio il vincolo di positività.



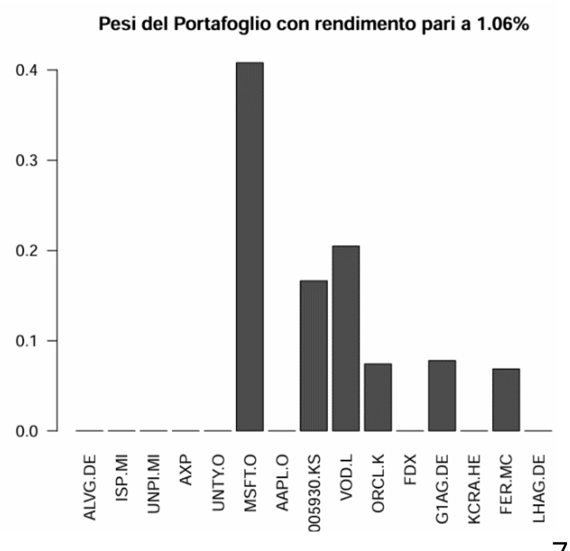
Quindi, l'insieme dei portafogli efficienti, che ha una probabilità del 80% di superare un rendimento del -4% e che garantisce una strategia long-only, corrisponde all'insieme dei portafogli collocati nella frontiera efficiente in presenza del vincolo di positività e situati tra il portafoglio che limita inferiormente la frontiera e il portafoglio che presenta un rendimento atteso del 1,65% e un rischio del 6,72%.

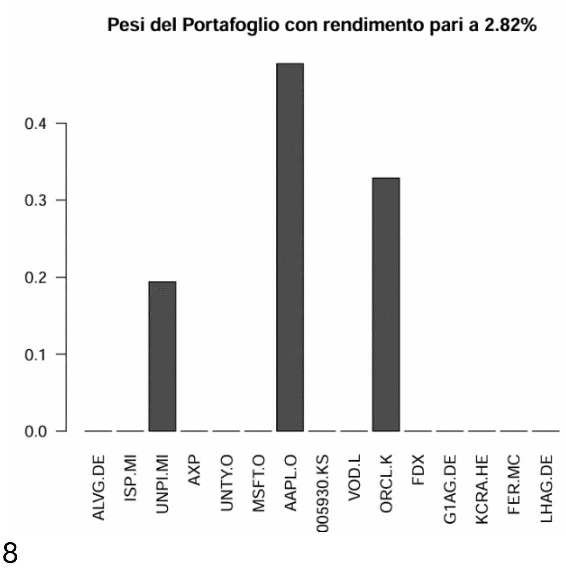


Allo stesso modo si considera il vincolo di shortfall applicato alla frontiera efficiente in presenza del vincolo di positività sulla base di 60 osservazioni. A differenza del caso in cui si considerava solo il vincolo di shortfall, non vi è nessun portafoglio efficiente che garantisce un rendimento superiore al -4% con una probabilità del 95%. Riducendo la probabilità all' 85% di raggiungere un rendimento superiore al -4%, si ottiene la seguente rappresentazione grafica:

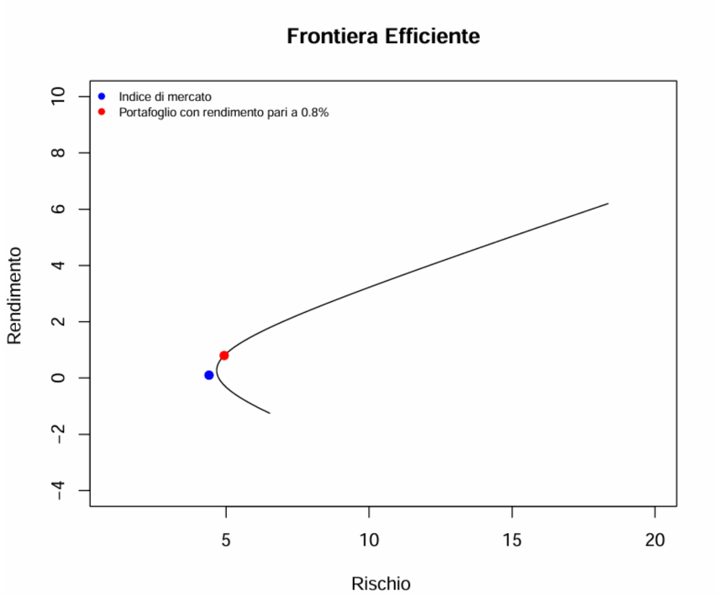


L'insieme dei portafogli efficienti, che ha una probabilità del 85% di superare un rendimento del -4% e che garantisce una strategia long-only, corrisponde all'insieme dei portafogli collocati nella frontiera efficiente in presenza del vincolo di positività e situati tra il portafoglio di rendimento atteso pari al 1,06% e rischio pari al 3,55% e il portafoglio di rendimento atteso pari al 2,82% e rischio pari al 4,87%.





Il vincolo di shortfall è utilizzato in un contesto di gestione attiva. L'obbiettivo dell'investitore è fornire una remunerazione del rischio migliore di quella fornita dal mercato. Si considera l'indice di mercato EuroStoxx 600 che include 600 delle principali capitalizzazioni del mercato europeo. In questo particolare caso, si prende in esame una finestra rolling di ampiezza pari a 12 osservazioni e si costruisce un portafoglio con un rendimento pari al 0,8%.



Confrontando il portafoglio che raggiunge un rendimento atteso pari allo 0,8% all'indice di mercato, si ottiene che la probabilità che tale portafoglio superi effettivamente il rendimento dell'indice di mercato, che risulta essere pari al 0,1%, è del 55,63%, sotto l'ipotesi di normalità dei rendimenti.

5.7. Interpretazione dei risultati

La valutazione delle prestazioni di un portafoglio può essere attuata mediante l'indice di Sharpe, che misura l'efficienza rispetto alla combinazione di rischio-rendimento del portafoglio in esame. Questa performance aggiustata per il rischio valuta l'extra-rendimento del portafoglio rispetto al risk-free e si ottiene dalla seguente formula:

$$Sh_p = \frac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} \tag{5. 1}$$

dove r_f rappresenta il risk-free.

Nelle tabelle 1 e 2 sono riportati i valori dell’indice di Sharpe di ciascun portafoglio considerato nell’analisi precedente, calcolati rispetto al tasso Euribor. Un valore maggiore di tale indice indica una performance di portafoglio migliore.

***Tabella 1**: Performance attese di Portafoglio*

Portafoglio	*Rendimento atteso %*	*Rischio %*	*Indice di Sharpe*
Non vincolato	0,8	4,73	0,1689
Equipesato	0,55	5,86	0,0936
Vincolo di positività	0,8	4,91	0,1627
Limite superiore	0,8	5,03	0,1588
Limite superiore e inferiore negativo	0,8	4,92	0,1623
Limite superiore e inferiore positivo	0,8	5,77	0,1384
Vincolo di cardinalità	0,97	5,54	0,1749
Vincolo di classe	0,8	4,75	0,1681
Vincolo di classe con limiti superiori	0,8	5,16	0,1548
Vincolo di Turnover	0,8	5,94	0,1345
Vincolo di Turnover con limiti superiori e inferiori	0,77	5,88	0,1307
ERC	0,55	5,57	0,0985
Vincolo di Shortfall	2,93	8,23	0,3559
Vincolo di Shortfall con vincolo di positività	1,65	6,72	0,2453

Il portafoglio con un valore dell’indice di Sharpe maggiore risulta essere il portafoglio ottenuto mediante l’imposizione del vincolo di shortfall. È utile sottolineare, però, che tale portafoglio ha un rischio molto elevato rispetto alle altre soluzioni e si inserisce in un contesto di strategia long-short. Pertanto, se si vuole perseguire una strategia long-only è preferibile il portafoglio ottenuto mediante il vincolo di cardinalità.

***Tabella 2**: Performance Attese di Portafoglio su una finestra di 60 osservazioni*

Portafoglio	*Rendimento atteso %*	*Rischio %*	*Indice di Sharpe*
Non vincolato	2	3,58	0,5579
Equipesato	0,8	6,72	0,1186
Vincolo di positività	2	5,34	0,3740
Limite superiore	2	5,59	0,3573
Limite superiore e inferiore negativo	2	4,91	0,4068
Limite superiore e inferiore positivo	1,3	6,45	0,2011
Vincolo di cardinalità	2	5,81	0,3438
Vincolo di classe	2	4,26	0,4688
Vincolo di classe con limiti superiori	1,77	5,83	0,3031
Vincolo di Turnover	1,27	6,63	0,1911
Vincolo di Turnover con limiti superiori e inferiori	1,14	6,38	0,1782
ERC	0,93	6,14	0,1510
Vincolo di Shortfall	16,39	12,34	1,3280
Vincolo di Shortfall con vincolo di positività	2,82	4,87	0,5785

Il portafoglio con un valore dell'indice di Sharpe maggiore risulta essere il portafoglio ottenuto mediante l'imposizione del vincolo di shortfall. A differenza del caso precedente, la migliore soluzione, se si vuole perseguire una strategia long-only, è rappresentata dal portafoglio ottenuto mediante il solo vincolo di positività. Tali risultati sono validi solo per i portafogli presi in esame, ma non valutano in generale quale approccio è preferibile. Esistono diverse misure che valutano la strategia adottata rispetto all'approccio classico. Una di queste misure è chiamata Average Percentage Error (APE), ovvero l'errore percentuale medio, che misura la distanza relativa tra la frontiera efficiente vincolata e la frontiera efficiente non vincolata. Valori minori della distanza indicano delle soluzioni migliori.

L'APE si ottiene dalla seguente formula:

$$APE = \frac{1}{\mathrm{p}} \cdot \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{p}} \frac{f_i^r(x^*) - f_i^r(x)}{f_i^r(x)} \tag{5. 2}$$

dove x^* e x rappresentano rispettivamente i portafogli della frontiera efficiente vincolata e della frontiera efficiente non vincolata, f_i^r denota il valore del rischio ottenuto e p è il numero di portafogli considerati. I valori di tale misura sono riportati nella tabella 3.

***Tabella 3**: Average Percentage Error*

Frontiera Efficiente	*APE*	*APE (finestra di 60 osservazioni)*
Non vincolato	0	0
Vincolo di positività	0,0353	0,4079
Limite superiore	0,0563	0,4636
Limite superiore e inferiore negativo	0,0379	0,3652
Limite superiore e inferiore positivo	0,1932	0,7631
Vincolo di cardinalità	0,1996	0,6523
Vincolo di classe	0,0036	0,2148
Vincolo di classe con limiti superiori	0,1184	0,5555
Vincolo di Turnover	0,2107	0,2445
Vincolo di Turnover con limiti superiori e inferiori	0,1899	0,2764

In entrambi i campioni l'approccio migliore è quello che considera il vincolo di classe. Invece, se si vogliono escludere le vendite allo scoperto si ottengono dei risultati differenti a seconda dell'orizzonte temporale considerato. Se si considera l'intero campione la strategia migliore è quella che considera il solo vincolo di positività, mentre se si considera la finestra di 60 osservazioni la strategia migliore è quella ottenuta mediante il vincolo di turnover.

Conclusione

Nel corso di questo elaborato, si sono definiti i principali vincoli di natura lineare, non-lineare e probabilistica, applicati al problema di ottimizzazione del portafoglio. Dall'analisi empirica proposta, risulta evidente che le performance attese, del rendimento e del rischio di un portafoglio selezionato mediante l'approccio classico elaborato da Markowitz, appaiono migliori rispetto a quelle ottenute applicando i diversi vincoli. È importante ricordare, però, che tali risultati hanno delle implicazioni solo a livello teorico, poiché si basano su degli assunti non realistici. Pertanto, la scelta del portafoglio ottimo da parte dell'investitore deve tenere conto di molteplici fattori, che possono riguardare sia decisioni personali rispetto al tipo di investimento che si vuole perseguire (ad esempio Long-Short o Long-Only), sia limiti esterni indotti dal regolamento giuridico.

La scelta della strategia da adottare e, quindi, del vincolo da considerare nel processo di selezione del portafoglio dipende dalle decisioni discrezionali dell'investitore. Alcune soluzioni, però, risultano preferibili ad altre. Infatti, potrebbe dimostrarsi necessario applicare al problema di ottimizzazione del portafoglio più vincoli contemporaneamente. Nel caso in cui l'investitore decida di imporre un limite inferiore positivo ai pesi, ovvero di allocare una quota di capitale minimo a ciascun titolo, sarebbe opportuno considerare anche il vincolo di cardinalità, in quanto le performance attese potrebbero rivelarsi migliori. Inoltre, bisogna tenere presente che, nel caso in cui si impone un vincolo, si verifica un restringimento della frontiera efficiente o, più in generale, diminuisce il numero dei possibili portafogli efficienti che possono essere selezionati. Di conseguenza, non è sempre possibile riuscire a ottenere un portafoglio efficiente che raggiunge un particolare rendimento obbiettivo e che verifica uno specifico vincolo.

In conclusione, si può affermare che, nonostante la combinazione di rischio-rendimento dei portafogli efficienti non vincolati risultino migliori, in uno scenario realistico è fondamentale controllare i diversi parametri che influiscono nella selezione di un portafoglio ottimo, attraverso l'introduzione di vincoli specifici.

Bibliografia

Andrea Castiglione, “Gli uomini che hanno scritto la storia della finanza”, https://www.performancetrading.it/Documents/Uomini/SF_I_principi_base.htm .

Bill Chen, Yangbin Lin, Wenhua Zeng, Hang Xu, Defu Zhang (2017), “The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem using a local research-based multi-objective evolutionary algorithm”, Springer, pp. 507-509.

Franco Molinari, Enrico Fagiuli, “Criteri di sensitività in problemi di dominanza stocastica”.

Frank J. Fabozzi, Harry M. Markowitz, “The Theory and Practice of Investment Management”, John Wiley & Sons, pp. 45-78.

Martin L. Leibowitz, Roy D. Henriksson, “Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk”.

Martin L. Leibowitz, Stanley Kongelman, “Asset allocation under shortfall constraints”.

P. Bonami, M.A. Lejeune, “An Exact Solution Approach for Portfolio Optimization Problems under Stochastic and Integer Constraints”.

Pierre Chen, Edmond Lezmi, Thierry Roncalli, Jiali Xu (2019), “A note on Portfolio Optimization with Quadratic Transition Costs”, Amundi Asset Management, Paris.

Thierry Roncalli (2010), “Understanding the Impact of Weights Constraints in Portfolio Theory”, Lyxor Asset Management, Paris.

Thierry Roncalli (2013), “Introduction to Risk Parity and Budgeting”, CRC Press LLC pp. 71-130.

W. Brent Lindquist, Svetlozar T. Rachev, Yuan Hu, Abootaleb Shirvani, “Advanced REIT Portfolio Optimization”, Springer, pp. 50-63.

Yan Jin, Rong Qu, Jason Atkin, “Constrained Portfolio Optimisation: The state-of-the-Art Markowitz Models”, ASAP Group, The University of Nottingham.