



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

L'elettrodinamica classica dei campi di gauge massivi

Relatore

Prof. Kurt Lechner

Laureando

Fabio Taccani

Anno Accademico 2023/2024

Indice

1	Introduzione	2
2	Lagrangiana massiva	4
2.1	Cosa sono i gradi di libertà in una teoria di campo classica	4
2.2	Lagrangiana dell'elettrodinamica classica	4
2.3	Lagrangiana di un campo di gauge massivo	5
2.4	Formalismo di Stueckelberg	7
3	Tensore energia-impulso	9
4	Soluzione di onda piana	10
5	Potenziale alla Yukawa	14
6	Radiazione	17
7	Introduzione alla gravità massiva	22
7.1	Azione di Hilbert-Einstein	22
7.2	Gravità massiva	23
8	Meccanismo di Higgs per una teoria di gauge U(1)	27
8.1	Simmetria di gauge U(1)	27
8.2	Meccanismo di Higgs	28

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio dei campi di gauge massivi in ambito classico, trascurando termini di interazione tra i campi di gauge A^μ , che nella lagrangiana vanno come potenze di ordine terzo e quarto. Tali termini sono infatti presenti nelle teorie di Yang Mills che descrivono le interazioni deboli e forti utilizzando gruppi di Lie non abeliani. Questa analisi metterà in luce le differenze tra due delle quattro interazioni fondamentali. Si sa infatti che il modello standard delle particelle, uno dei più grandi contributi alla Fisica del novecento, definisce tre interazioni come fondamentali : l'elettromagnetismo, l'interazione debole, l'interazione forte, alle quali è da aggiungere l'interazione gravitazionale per la quale non abbiamo neancora una teoria quantistica. Alle prime tre interazioni sono associate delle particelle che mediano l'interazione, queste particelle sono bosoni e sono in ordine: fotoni, W^\pm e Z^0 , gluoni; solo i bosoni dell'interazione debole risultano massivi. Le prime due interazioni sono state unificate nell'interazione elettrodebole dal lavoro di Glashow, Weinberg, Salam (GWS) mentre si cercano ancora delle teorie che sappiano unificare anche la cosiddetta cromodinamica quantistica (QCD), come le GUT, per unire all'interazione elettrodebole quella forte. Inoltre mentre le particelle delle prime tre forze sono state osservate ¹, non è ancora stato rilevato il gravitone che la teoria della relatività pone con massa nulla e si teorizza che abbia spin 2 con due stati di polarizzazione.

In questa tesi si studieranno gli effetti di una massa non nulla del potenziale vettore in una teoria elettrodinamica a livello classico, con lo scopo di evidenziarne le conseguenze e confrontarle con quelle di una teoria priva di massa ovvero "l'elettrodinamica tradizionale". Si osserveranno: la differenza tra i gradi di libertà e di polarizzazione, 3 nel primo caso e 2 nel secondo. Infatti mentre nel caso massivo abbiamo 2 polarizzazioni trasversali e una longitudinale, tutte con significato fisico, nel caso senza massa abbiamo solo quelle trasversali. L'elicità per il caso privo di massa assume valori $h = \pm 1$ mentre nel caso massivo è presente anche il valore $h = 0$. Si vedrà come i gradi di libertà in una teoria di campo siano collegati ai bosoni che mediano le interazioni. Si studierà anche l'andamento del potenziale elettromagnetico statico, privo di massa, che va come $\sim \frac{1}{r}$, ed è a lungo raggio, mentre

¹I gluoni vengono osservati solo indirettamente in quanto, secondo la QCD, sono soggetti al fenomeno del cosiddetto confinamento.

per il caso massivo il potenziale avrà un andamento, a corto raggio, simile a quello di Yukawa $\sim \frac{e^{-Mr}}{r}$. Il termine M è collegato alla massa m dei bosoni vettori attraverso la relazione $m = \hbar M$ ed è un parametro con la dimensione dell'inverso di una lunghezza, che è l'inverso della lunghezza di Compton delle particelle.

Dopo aver ripreso la definizione di grado di libertà per una teoria di campo, ed accennato al loro legame con i mediatori, si presenterà, nel capitolo 2, la lagrangiana massiva per un campo di gauge A^μ , detta azione di Proca. Si mostrerà come per il caso privo di massa la lagrangiana goda dell'invarianza di gauge $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ e come il termine di massa rompa questa invarianza e come si possa riottenerla attraverso il formalismo di Stueckelberg. Nel capitolo 3 si introdurrà il tensore energia-impulso simmetrico $T^{\mu\nu}$ nel caso massivo per poi continuare nel capitolo 4 con la soluzione di onda piana delle equazioni del moto per il potenziale vettore A^μ . Si presenterà nel capitolo 5 il potenziale nel caso di sorgente statica ed a supporto compatto e si mostrerà come il suo andamento mimici quello presentato da Yukawa per le interazioni forti. Si analizzerà nel capitolo 6 le equazioni della radiazione e si deriverà in particolare la formula per la radiazione che generalizza la formula di Larmor. Si mostrerà anche come nell'ambito di una teoria dell'elettrodinamica classica massiva non sia possibile il fenomeno delle divergenze infrarosse, ovvero l'emissione di un numero infinito di particelle con energie che tendono a zero. In conclusione si introdurrà una teoria della gravità massiva, mostrando come l'aggiunta di un termine di massa porti alla perdita della simmetria per diffeomorfismi nel capitolo 7, e per ultimo si mostrerà nel capitolo 8 i principali sviluppi della teoria di gauge massiva nell'ambito della teoria dei campi classica facendo riferimento al meccanismo di Higgs e al modo in cui il fotone acquisisce massa attraverso la rottura spontanea di simmetria.

Capitolo 2

Lagrangiana massiva

2.1 Cosa sono i gradi di libertà in una teoria di campo classica

La definizione dei gradi di libertà per una teoria di campo è diversa da quella usata nella meccanica classica, infatti se si utilizzassero le stesse regole i campi avrebbero un numero infinito di gradi di libertà. Per tale ragione è utile introdurre un modo diverso di contarli. Un campo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ è detto avere un grado di libertà (del secondo ordine) se dati i valori di $\varphi(\mathbf{x}, 0)$ e $\partial_0\varphi(\mathbf{x}, 0) \forall \mathbf{x}$ il campo viene determinato dalle equazioni che lo governano per ogni t e \mathbf{x} . In questa tesi si farà riferimento a gradi di libertà del secondo ordine. Di seguito si userà la metrica di Minkowski $(+, -, -, -)$ e si porrà la velocità della luce uguale a 1.

2.2 Lagrangiana dell'elettrodinamica classica

Prima di analizzare il caso massivo si presenta la densità di lagrangiana dell'elettrodinamica classica

$$\mathcal{L} = -A^\mu J_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

in cui A^μ rappresenta il campo di gauge, J^μ la quadricorrente che si considera conservata $\partial_\mu J^\mu = 0$ e $F^{\mu\nu}$ è il tensore antisimmetrico di Maxwell, che si può mettere in relazione con A^μ attraverso $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Si noti che nella lagrangiana non sono presenti i termini di ordine terzo e quarto che invece compaiono nell'azione di Yang-Mills [1]

$$\mathcal{S}_{\text{YM}} \equiv -\frac{1}{4} \int_M \text{tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu}), \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (2.2)$$

dove A^μ è un campo vettoriale a valori nell'algebra di Lie \mathcal{G} di un gruppo compatto G , ovvero $A^\mu = A^\mu_\alpha T^\alpha$ dove T^α sono i generatori del gruppo G . La forma della lagrangiana (2.1) è dettata dalle equazioni della dinamica che si possono ricavare attraverso le equazioni di Eulero-Lagrange. Infatti

applicando il metodo variazionale alla \mathcal{L} (2.1) si ottiene

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (2.3)$$

che è l'equazione di Maxwell. Si nota che la lagrangiana (2.1) non è determinata in modo univoco, infatti essendo interessati alle equazioni della dinamica, la lagrangiana può essere definita a meno di termini moltiplicativi e di quadridivergenze, elementi che non hanno ripercussioni sui fenomeni che si possono realmente osservare. Oltre a ciò la lagrangiana \mathcal{L} gode anche di una simmetria di gauge. Infatti si può trasformare A^μ in $A^\mu(x)' = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$, dove Λ è un campo scalare. Il fatto che la lagrangiana sia invariante per trasformazioni di gauge permetterà di concludere, grazie al teorema di Noether, che la carica si conserva e ricorda che A^μ non è un'osservabile. Grazie all'invarianza di gauge si può dimostrare che A_μ ha due gradi di libertà fisici. Infatti analizzando il caso senza corrente $J^\mu = 0$ e imponendo la gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ l'equazione (2.3) diventa

$$\square A^\mu = 0. \quad (2.4)$$

Utilizzando la gauge di Lorenz e la trasformazione $A^\mu(x)' = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$ si trova

$$\square \Lambda = 0. \quad (2.5)$$

Nonostante A^μ abbia 4 componenti questi due vincoli (2.4) (2.5) abbassano i gradi di libertà a 2.

2.3 Lagrangiana di un campo di gauge massivo

La dinamica di un campo scalare $\phi(x)$ in interazione con una sorgente esterna $\rho(x)$ è descritta dalla densità di lagrangiana di Klein-Gordon

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi(x) \partial_\mu \phi(x) - \frac{1}{2} M^2 \phi(x)^2 + \rho(x) \phi(x), \quad (2.6)$$

in cui M è un parametro con le dimensioni dell'inverso di una lunghezza e sarà identificato con l'inverso della lunghezza Compton della particella del campo. Come si può vedere si arriva all'equazione di Klein-Gordon

$$(\square + M^2)\phi(x) = \rho(x), \quad (2.7)$$

dalla quale, considerando il caso di campo libero $\rho(x) = 0$ e onda piana $\phi(x) = \phi_0 e^{ikx} + c.c. = \phi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + c.c.$, si arriva alla relazione di dispersione

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 - M^2 = 0. \quad (2.8)$$

A questo punto si possono utilizzare le relazioni di Planck-Einstein, $E = \hbar\omega$ che lega l'energia alla pulsazione, e la relazione di de Broglie $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Quantizzando il campo, ovvero ipotizzando che sia composto da particelle con massa $m = \hbar M$, si arriva all'equazione che lega l'energia al momento e alla massa delle particelle associate al campo $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$.

Se a differenza di quanto succede nell'elettrodinamica classica tradizionale, in cui il mediatore ha massa nulla, si ipotizza un mediatore massivo con massa $m = M\hbar$ e si assume che la quadricorrente si conservi, $\partial_\mu J^\mu = 0$, si giunge alla lagrangiana proposta da Proca [2]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - A_\mu J^\mu + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu. \quad (2.9)$$

Si nota come a differenza della controparte priva di massa questa lagrangiana non manifesta la simmetria di gauge ed è proprio il termine massivo a rompere questa simmetria. Nonostante ciò si riuscirà a ricondursi ad una lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge accoppiandola con un campo scalare $B(x)$, il campo di Stueckelberg, come si vedrà dopo.

Cercando le equazioni del moto della lagrangiana di Proca (2.9) si trova

$$\begin{aligned} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\partial_\mu F^{\mu\nu}, & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= -J^\nu + M^2 A^\nu, \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} + M^2 A^\nu &= J^\nu. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Applicando la quadridivergenza ∂_ν a (2.10) ed utilizzando la conservazione della quadricorrente si trova un'equazione che corrisponde formalmente alla gauge di Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.11)$$

Tuttavia questo vincolo non è stato imposto, come nel caso dell'elettrodinamica tradizionale, per fissare la gauge, bensì è risultato dalle equazioni del moto.

Inserendo la (2.11) in (2.10) si ottiene il sistema

$$(\square + M^2)A^\mu(x) = J^\mu(x), \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (2.12)$$

La prima equazione ha 4 gradi di libertà mentre la seconda impone un vincolo e abbassa i gradi di libertà per la lagrangiana di Proca a 3. Invece per l'elettrodinamica tradizionale si è visto che si hanno 4 componenti di A^μ che comportano 2 gradi di libertà. Nel capitolo 4 si risolverà questo sistema per il caso privo di sorgente $J^\mu = 0$ mentre nel capitolo 5 si affronterà il sistema nel caso di corrente generica.

2.4 Formalismo di Stueckelberg

Come anticipato, l'azione di Proca non gode di simmetria di gauge; tuttavia attraverso l'accoppiamento con un campo scalare $B(x)$ si può riottenerla. Questa idea è stata proposta da Stueckelberg [3] per rendere gauge-invariante l'azione di Proca. Compiendo la sostituzione $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \frac{B}{M}$ nella (2.9), dove M è il parametro che compare nella lagrangiana di Proca (2.9), mentre B è il campo scalare di Stueckelberg, si ottiene la lagrangiana di Stueckelberg

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \left(A_\mu + \partial_\mu \frac{B}{M}\right) J^\mu + \frac{1}{2}M^2 \left(A^\mu + \partial^\mu \frac{B}{M}\right) \left(A_\mu + \partial_\mu \frac{B}{M}\right), \quad (2.13)$$

in cui $F^{\mu\nu}$ rimane il tensore di Maxwell ed il termine $(\partial_\mu B) \frac{J^\mu}{M}$ può essere trascurato perché utilizzando la conservazione della corrente è uguale a una derivata totale.

Questa lagrangiana è invariante per le trasformazioni di gauge di Pauli [4]

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (2.14)$$

$$B \rightarrow B' = B - M\Lambda. \quad (2.15)$$

Infatti applicando queste trasformazioni alla lagrangiana di Stueckelberg (2.13) il termine $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ non varia mentre

$$A'^\mu + \partial^\mu \frac{B'}{M} = A^\mu + \partial^\mu \Lambda + \partial^\mu \frac{B - M\Lambda}{M} = A^\mu + \partial^\mu \frac{B}{M}.$$

Si può fissare la trasformazione di gauge di Pauli (2.15), scegliendo $\Lambda = \frac{B}{M}$ si ottiene $B' = 0$ che corrisponde alla lagrangiana di Proca (2.9).

Si presenta adesso un procedimento alternativo per dimostrare che la dinamica della lagrangiana di Stueckelberg (2.13) è equivalente a quella della lagrangiana di Proca (2.9). L'equazione del moto per la lagrangiana di Stueckelberg (2.13) per A^ν è

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu - M^2 \left(A^\nu + \partial^\nu \frac{B}{M}\right) \quad (2.16)$$

e per B

$$M\partial_\mu A^\mu + \square B = 0. \quad (2.17)$$

In questo caso si impone il gauge fixing dell'invarianza di Pauli $(\partial_\mu A^\mu - MB) = 0$. Se si inserisce la gauge scelta nell'equazione del moto di B (2.17) si trova

$$(\square + M^2)B = 0, \quad (2.18)$$

che vincola il campo di Stueckelberg e facendo lo stesso per l'equazione del moto di A (2.16) si trova

$$(\square + M^2)A^\nu = J^\nu. \quad (2.19)$$

Tuttavia il gauge fixing $(\partial_\mu A^\mu - MB) = 0$ non fissa completamente la gauge ma lascia una gauge residua. Per determinarla imponiamo

$$\partial_\mu A^{\mu'} - MB' = \partial_\mu A^\mu + \square\Lambda - MB + M^2\Lambda = 0,$$

dalla quale si ricava un vincolo per Λ

$$(\square + M^2)\Lambda = 0. \quad (2.20)$$

Siccome anche B soddisfa la stessa equazione (2.18) si può effettuare una trasformazione di gauge (2.15) e imporre $B = 0$. In questo modo si riottiene il sistema di equazioni trovato per la lagrangiana di Proca (2.12).

Capitolo 3

Tensore energia-impulso

Possiamo applicare il teorema di Noether alla lagrangiana di Proca (2.9) che in questo capitolo si considera senza sorgente $J^\mu = 0$. Se le equazioni del moto discendono da un'azione, valgono le equazioni di Eulero-Lagrange, e la lagrangiana è invariante per il gruppo di Lorentz, allora il teorema di Noether definisce un tensore energia-impulso canonico $\tilde{T}^{\mu\nu}$ conservato, $\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0$. Nel caso massivo si ottiene in questo modo

$$\tilde{T}_m^{\mu\nu} = -F^{\mu\alpha} \partial^\nu A_\alpha + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} M^2 A^\mu A_\mu \right). \quad (3.1)$$

Tuttavia questo tensore non è simmetrico. Sfruttando l'invarianza per l'intero gruppo di Poincaré si può rendere simmetrico il tensore energia-impulso aggiungendogli la quadridivergenza di un termine $\phi^{\rho\mu\nu}$ antisimmetrico in ρ e μ

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} + \partial_\rho \phi^{\rho\mu\nu}. \quad (3.2)$$

In questo caso $T^{\mu\nu}$ e $\tilde{T}^{\mu\nu}$ hanno lo stesso quadrimpulso P^ν . Si trova [5] $\phi^{\rho\mu\nu} = -F^{\rho\mu} A^\nu$ e si arriva a

$$T_m^{\mu\nu} = \tilde{T}_m^{\mu\nu} - \partial_\rho (F^{\rho\mu} A^\nu) = F^{\mu\alpha} F_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + M^2 \left(A^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A^\alpha A_\alpha \right). \quad (3.3)$$

Ponendo $M = 0$ otteniamo il tensore energia-impulso per l'elettrodinamica tradizionale.

Capitolo 4

Soluzione di onda piana

In questo capitolo si risolverà il sistema (2.12) trovato per la lagrangiana di Proca (2.9) nel caso di sorgente nulla $J^\mu = 0$. A tale scopo si utilizza la proprietà della trasformata di Fourier

$$\widehat{(\partial_\mu \varphi)} = ik_\mu \widehat{\varphi},$$

dove con $\widehat{\varphi}$ si intende la trasformata di Fourier di φ . Le due equazioni del sistema (2.12) diventano

$$(-k^2 + M^2)\widehat{A^\mu(k)} = 0, \quad k_\mu \widehat{A^\mu(k)} = 0. \quad (4.1)$$

La prima ha come soluzione

$$\widehat{A^\mu(k)} = \delta(k^2 - M^2) f^\mu(k), \quad (4.2)$$

in cui $\widehat{A^{\mu*}(k)} = \widehat{A^\mu(-k)}$. Quindi vale $f^{\mu*}(k) = f^\mu(-k)$. Si può scrivere

$$\begin{aligned} \delta(k^2 - M^2) &= \delta((k^0)^2 - (M^2 + |\mathbf{k}|^2)) = \delta((k^0)^2 - \omega^2) \\ &= \frac{\delta(k^0 - \omega) + \delta(k^0 + \omega)}{2\omega}, \end{aligned}$$

dove si è definita la frequenza

$$\omega(\mathbf{k}) = \sqrt{M^2 + |\mathbf{k}|^2}. \quad (4.3)$$

La trasformata del campo di gauge $\widehat{A^\mu}$ (4.2) diventa, se si definisce il vettore polarizzazione come $\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) = f^\mu(\omega, \mathbf{k})$,

$$\widehat{A^\mu(k)} = \frac{\delta(k^0 - \omega)\varepsilon^\mu(\mathbf{k}) + \delta(k^0 + \omega)\varepsilon^{\mu*}(-\mathbf{k})}{2\omega}. \quad (4.4)$$

Effettuando l'antitrasformata di (4.4) si arriva a

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3k}{2\omega} (e^{ik \cdot x} \varepsilon^\mu(\mathbf{k}) + c.c.), \quad (4.5)$$

in cui $k^0 = \omega(\mathbf{k})$, dove $\omega(\mathbf{k})$ è definito dalla (4.3). Nel caso dell'elettrodinamica tradizionale il campo di gauge A^μ ha un'espressione simile in cui però $\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|$.

Dalla seconda relazione in (4.1) e da (4.4) si trova che $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$. Si nota allora che la soluzione (4.5) è una sovrapposizione di onde elementari date da

$$A_{el}^\mu = \varepsilon^\mu e^{ik \cdot x} + c.c., \quad k_\mu \varepsilon^\mu = 0, \quad k^0 = \omega, \quad k^2 = M^2. \quad (4.6)$$

Si può riscrivere $k \cdot x$ come

$$k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}.$$

Si trova allora che per ogni \mathbf{k} le onde elementari (4.6) sono onde monocromatiche con velocità di fase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$. Tuttavia la relazione che lega ω e k non è lineare, dunque la velocità di fase e quella di gruppo differiscono. Si calcola la velocità di gruppo $V = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$

$$V^i = \frac{\partial \omega}{\partial k^i} = \frac{k^i}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + M^2}} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}. \quad (4.7)$$

Dalla seconda e terza delle (4.6) si trova invece che

$$k_\mu \varepsilon^\mu = \omega \varepsilon^0 - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \varepsilon^0 = \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (4.8)$$

Segue che solo le componenti spaziali della polarizzazione possono essere scelte in modo arbitrario e dunque gli stati fisici di polarizzazione sono tre e non due come nell'elettrodinamica tradizionale. Questo giustamente torna con quanto trovato sul numero dei gradi di libertà. Si può scomporre la polarizzazione rispetto al vettore d'onda \mathbf{k} come ortogonale o parallela

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_\parallel + \boldsymbol{\varepsilon}_\perp. \quad (4.9)$$

A questo punto la componente ortogonale $\boldsymbol{\varepsilon}_\perp$ può essere suddivisa a sua volta in due componenti ortogonali fra loro. Si hanno dunque 3 possibili livelli di polarizzazione mentre nel caso privo di massa si osservavano solo due componenti ortogonali. A livello classico si può definire una grandezza detta elicità che tiene conto del modo in cui la polarizzazione trasforma rispetto ad una rotazione attorno a \vec{k} . Ovvero della trasformazione

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{ih\theta}, \quad (4.10)$$

dove h può essere intero o semintero. Il nuovo grado di libertà $\boldsymbol{\varepsilon}_\parallel$ resta invariante sotto rotazioni attorno a \vec{k} . Si può dimostrare che a livello quantistico h corrisponde all'elicità quantistica definiti da

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{k}}{|\vec{k}|}, \quad (4.11)$$

in cui \vec{S} corrisponde allo spin. Le due polarizzazioni ortogonali dell'elettrodinamica tradizionale hanno elicità ± 1 , mentre per il caso massivo, essendoci anche una polarizzazione longitudinale, le elicità sono ± 1 e 0 . Le particelle associate, a livello quantistico, alle onde elementari (4.6) hanno autovalori di spin $\pm \hbar$ e 0 .

Si analizza ora il contributo energetico di ogni onda elementare (4.6) utilizzando la formula del tensore energia-impulso massivo (3.3). Si definisce

$$\widetilde{A}^\mu = i\varepsilon^\mu e^{ik \cdot x} + c.c. \quad (4.12)$$

Si può riscrivere il sistema (4.6) come

$$\partial_\mu A_{el}^\nu = k_\mu \widetilde{A}^\nu, \quad k_\mu \widetilde{A}^\mu = 0, \quad k^2 = M^2. \quad (4.13)$$

A questo punto, ponendo $A_{el}^\mu \equiv A^\mu$, si utilizza quanto appena trovato insieme al tensore energia-impulso $T_m^{\mu\nu}$ (3.3) e si arriva a

$$\begin{aligned} T_m^{\mu\nu} &= (\partial^\mu A^\alpha - \partial^\alpha A^\mu)(\partial_\alpha A^\nu - \partial^\nu A_\alpha) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) + M^2(A^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}A^\alpha A_\alpha) \\ &= (k^\mu \widetilde{A}^\alpha - k^\alpha \widetilde{A}^\mu)(k_\alpha \widetilde{A}^\nu - k^\nu \widetilde{A}_\alpha) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(k^\alpha \widetilde{A}^\beta - k^\beta \widetilde{A}^\alpha)(k_\alpha \widetilde{A}_\beta - k_\beta \widetilde{A}_\alpha) + M^2(A^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}A^\alpha A_\alpha) \\ &= k^\mu k_\alpha \widetilde{A}^\alpha \widetilde{A}^\nu - k^\mu k^\nu \widetilde{A}^2 - k^2 \widetilde{A}^\mu \widetilde{A}^\nu + k^\alpha k^\nu \widetilde{A}^\mu \widetilde{A}_\alpha + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}(k^2 \widetilde{A}^2 - k^\alpha k_\beta \widetilde{A}^\beta \widetilde{A}_\alpha - k^\beta k_\alpha \widetilde{A}^\alpha \widetilde{A}_\beta + k^2 \widetilde{A}^2) \\ &\quad + M^2(A^\mu A^\nu - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}A^2) \\ &= -k^\mu k^\nu \widetilde{A}^2 + M^2(A^\mu A^\nu - \widetilde{A}^\mu \widetilde{A}^\nu) + \frac{1}{2}M^2\eta^{\mu\nu}(\widetilde{A}^2 - A^2). \end{aligned}$$

Mediando in un volume di dimensioni maggiori della lunghezza d'onda

$$\begin{aligned} \langle T_m^{\mu\nu} \rangle &= \langle -k^\mu k^\nu \widetilde{A}^2 + M^2(A^\mu A^\nu - \widetilde{A}^\mu \widetilde{A}^\nu) + \frac{1}{2}M^2\eta^{\mu\nu}(\widetilde{A}^2 - A^2) \rangle \\ &= -2k^\mu k^\nu (\varepsilon^{\alpha*} \varepsilon_\alpha) \end{aligned} \quad (4.14)$$

dal momento che $\langle A^\mu A^\nu \rangle = \langle \widetilde{A}^\mu \widetilde{A}^\nu \rangle = \varepsilon^{\mu*} \varepsilon^\nu + \varepsilon^{\nu*} \varepsilon^\mu$. Utilizzando la relazione tra le polarizzazioni (4.8) si può riscrivere la (4.14) come

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = 2k^\mu k^\nu (|\boldsymbol{\varepsilon}|^2 - |\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}|^2) \quad (4.15)$$

ed utilizzando la decomposizione della polarizzazione nelle componenti ortogonali e parallele (4.9) si ottiene

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = 2k^\mu k^\nu (|\boldsymbol{\varepsilon}_\perp|^2 + (1 - \mathbf{V}^2)|\boldsymbol{\varepsilon}_\parallel|^2). \quad (4.16)$$

Si noti che per alte frequenze, ovvero energie, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2} \gg M$, $|\mathbf{V}|$ tende ad 1 si veda (4.7),

la velocità della luce, e la componente parallela viene attenuata. Quindi un bosone vettore massivo ultrarelativistico si comporta come una particella priva di massa. Dunque nel limite ultrarelativistico, a parità di intensità, l'energia è immagazzinata prevalentemente nei modi trasversali e risulta come se la componente longitudinale si disaccoppiasse. Infatti è come se avesse solo componenti ortogonali, come nella formula ricavata per il caso senza massa

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = 2k^\mu k^\nu |\epsilon_\perp|^2,$$

in quanto quella longitudinale contribuiscono in maniera trascurabile.

Capitolo 5

Potenziale alla Yukawa

Trovata l'equazione per il campo $A^\mu(x)$ senza corrente (4.5), si analizzerà adesso il problema generico con una sorgente J^μ . Bisogna risolvere il sistema

$$(\square + M^2)A^\mu(x) = J^\mu(x), \quad \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (5.1)$$

Si utilizza il metodo della funzione di Green per trovare la soluzione non omogenea. Si cerca una soluzione della forma

$$A^\mu(x) = \int G_M(x-y)J^\mu(y)d^4y \quad (5.2)$$

dove $G_M(x)$ è la funzione di Green per il caso massivo. Utilizzando la (5.1) si ottiene

$$(\square + M^2)A^\mu(x) = \int (\square + M^2)G_M(x-y)J^\mu(y)d^4y = J^\mu(x)$$

che porta a

$$(\square + M^2)G_M(x-y) = \delta^4(x-y). \quad (5.3)$$

Bisogna cercare una funzione di Green, G_M , che soddisfi alle condizioni

$$(\square + M^2)G_M(x-y) = \delta^4(x-y), \quad G_M(\Lambda x) = G_M(x) \quad \forall \Lambda \in SO(1,3)_c, \quad G_M(x) = 0 \quad \forall t < 0, \quad (5.4)$$

che quindi sia anche invariante per trasformazioni di Lorentz proprie e mantenga la causalità. Si può dimostrare che questo sistema ammette un'unica soluzione [5]. Questa soluzione può essere scritta attraverso rappresentazioni equivalenti che mettono in risalto proprietà diverse [5]. Scrivendo G_M come

$$G_M = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{ik \cdot x} (P \frac{1}{k^2 - M^2} + i\pi \text{sign}(k^0) \delta(k^2 - M^2)),$$

dove P è la parte principale, si mette in risalto che è Lorentz-invariante, oppure attraverso la rappresentazione

$$G_M = \frac{H(t)}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} H(\omega^2 - M^2) (e^{-i\omega r \sqrt{1-M^2/\omega^2}} - e^{i\omega r \sqrt{1-M^2/\omega^2}})$$

si evidenzia come nel limite $M \rightarrow 0$ ci si riconduca alla funzione di Green trovata per l'elettrodinamica classica $G = \frac{H(t)}{2(2\pi)^2 r} \int d\omega (e^{i\omega(t-r)} - e^{i\omega(t+r)}) = \frac{\delta(t-r)}{4\pi r}$. Si presenta ora la dimostrazione della rappresentazione che verrà usata in seguito. Effettuando la trasformata di Fourier temporale della funzione di Green massiva si ottiene

$$G_M(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{G}_M(\omega, \mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Effettuando la trasformata dell'equazione (5.3) si trova

$$(\nabla^2 + \omega^2 - M^2) \tilde{G}_M(\omega, \mathbf{x}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta^3(\mathbf{x}), \quad (5.6)$$

Questa equazione ammette soluzioni del tipo

$$\begin{aligned} \tilde{G}_M(\omega, \mathbf{x}) = \frac{1}{r} [& H(\omega^2 - M^2) (a_1 e^{-i\omega r \sqrt{1-M^2/\omega^2}} + a_2 e^{i\omega r \sqrt{1-M^2/\omega^2}}) \\ & + H(M^2 - \omega^2) (b_1 e^{-r\sqrt{M^2-\omega^2}} + b_2 e^{r\sqrt{M^2-\omega^2}})]. \end{aligned}$$

Con a_1, a_2, b_1, b_2 parametri arbitrari. Cercando una soluzione con a_1, a_2, b_1, b_2 costanti, con $b_2 = 0$, ed utilizzando l'identità

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\vec{x}), \quad (5.7)$$

si trova che, $b_1 = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}$ e $a_1 + a_2 = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}$. Tuttavia si è imposto in (5.4) che la funzione di Green G_M si annulli per t negativi e si può dimostrare che questo comporta che $a_2 = 0$. Si trova la rappresentazione

$$G_M(x) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \left(H(\omega^2 - M^2) e^{-i\omega r \sqrt{1-M^2/\omega^2}} + H(M^2 - \omega^2) e^{-r\sqrt{M^2-\omega^2}} \right) d\omega. \quad (5.8)$$

Si è posto $r = |\vec{x}|$ e H è la funzione di Heaviside. Considerando una corrente che soddisfa alle equazioni

$$J^0(t, \mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}), \quad \rho(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{per } r > l, \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5.9)$$

quindi una sorgente statica e con supporto compatto, si riscrive la (5.2) come

$$A^0(\mathbf{x}) = \int d^3y \int dy^0 G_M(x^0 - y^0, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.10)$$

Effettuando la sostituzione $y^0 \rightarrow T = x^0 - y^0$ in (5.2), A^μ diventa

$$A^0(\mathbf{x}) = \int d^3y \int dT G_M(T, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}), \quad \mathbf{A}(x) = 0. \quad (5.11)$$

Ricordando che $\frac{\int e^{i\omega T} dT}{2\pi} = \delta(\omega)$ ed inserendo la (5.8) in (5.11) si arriva a

$$\begin{aligned} A^0 &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi\delta(\omega)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \left(H(\omega^2 - M^2) e^{-i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\sqrt{1-M^2/\omega^2}} + H(M^2 - \omega^2) e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\sqrt{M^2-\omega^2}} \right) \rho(\mathbf{y}) d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|M}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rho(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Se si assume che la sorgente sia una carica nell'origine, $\rho(\mathbf{x}) = Q\delta^3(\mathbf{x})$, si trova un potenziale

$$A^0 = \frac{Qe^{-Mr}}{4\pi r}, \quad (5.13)$$

da confrontare con

$$A^0 = \frac{Q}{4\pi r},$$

il potenziale nel caso dell'elettrodinamica tradizionale. Se si analizza la (5.12) a grandi distanze, nella zona delle onde, ovvero per $r = |x| \gg y$, dove valgono gli sviluppi

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}.$$

Si arriva ad

$$A^0 = \frac{e^{-rM}}{4\pi r} \int e^{M\mathbf{n}\cdot\mathbf{y}} \rho(\mathbf{y}) d^3y + o\left(\frac{e^{-rM}}{r^2}\right). \quad (5.14)$$

A grandi distanze la soluzione con sorgente nell'origine (5.12) e quella nella zona delle onde (5.14) sono simili a meno di un fattore moltiplicativo. A differenza del potenziale privo di massa, che risulta a lungo raggio, il caso massivo presenta un andamento a corto raggio rappresentato da un esponenziale decrescente. Si può allora definire un raggio d'azione $L = \frac{\hbar}{m} = \frac{1}{M}$ che è anche uguale alla lunghezza di Compton della particella mediatrice.

Si noti che il potenziale trovato nell'equazione (5.13) ha lo stesso andamento che Yukawa aveva proposto per spiegare le interazioni forti [6]. Imponendo un raggio d'azione dell'ordine del fermi, lunghezza tipica del nucleo, aveva calcolato una massa per i bosoni mediatori di circa 200 volte quella dell'elettrone, ovvero ~ 100 Mev. Adesso è noto che quelli che pensava fossero i mediatori delle interazioni forte sono i pioni $\pi^\pm \sim 140$ Mev e $\pi^0 \sim 135$ Mev, i quali non sono particelle elementari ma sono a loro volta composti da un quark e un antiquark, mentre i mediatori delle interazioni forti sono otto gluoni privi di massa.

Capitolo 6

Radiazione

In questo capitolo si vuole analizzare la radiazione emessa da una sorgente j^μ a supporto compatto.

Effettuando la trasformata di Fourier temporale della corrente si trova

$$j^\mu(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{x}). \quad (6.1)$$

Inserendo questa equazione nella (5.2) si trova

$$A^\mu(x) = \int d\omega e^{i\omega t} \int d^3y \tilde{G}_M(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{y}).$$

Utilizzando la trasformata di Fourier della funzione di Green massiva (5.8) si arriva a

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \int d\omega e^{i\omega t} \int d^3y \frac{H(\omega^2 - M^2) e^{-i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\sqrt{1-M^2/\omega^2}} + H(M^2 - \omega^2) e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\sqrt{M^2-\omega^2}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{x}). \quad (6.2)$$

Analizzando questa equazione nella zona delle onde, per $r \rightarrow \infty$, con gli sviluppi trovati in precedenza

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{y}, \quad \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \rightarrow \frac{1}{r}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r},$$

si arriva a

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}r} \int d\omega e^{i\omega t} \int d^3y \left[H(\omega^2 - M^2) e^{-i\omega(r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})\sqrt{1-M^2/\omega^2}} + H(M^2 - \omega^2) e^{-(r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{y})\sqrt{M^2-\omega^2}} \right] \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{y}).$$

Il secondo termine, che si annulla nel caso di massa nulla, va a zero esponenzialmente per grandi distanze, quindi non porta un contributo nella zona delle onde. Con queste considerazioni il potenziale

si può riscrivere come

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}r} \int_{|\omega| \geq M} d\omega e^{i\omega(t-r\sqrt{1-M^2/\omega^2})} \int d^3y e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \sqrt{1-M^2/\omega^2}} \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{y}). \quad (6.3)$$

Si introduce la trasformata di Fourier in frequenza del potenziale

$$A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} \tilde{A}^\mu(\omega, \mathbf{x}). \quad (6.4)$$

Avendo osservato da (6.3) che il potenziale è non nullo solo per $\omega \geq M$, si può riscrivere $e^{i\omega t} \tilde{A}^\mu(\omega, \mathbf{x}) = \varepsilon^\mu e^{ik \cdot x}$ in queste condizioni. Dal confronto con (6.3) si definisce

$$k^\mu = (\omega, \mathbf{n}\omega\sqrt{1-M^2/\omega^2}), \quad \varepsilon^\mu = \frac{1}{4\pi r} \int d^3y e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} \sqrt{1-M^2/\omega^2}} \tilde{j}^\mu(\omega, \mathbf{y}). \quad (6.5)$$

Da queste equazioni si trova che $k^2 = M^2$ e utilizzando la conservazione della quadricorrente si arriva a $k_\mu \varepsilon^\mu = 0$. Si vede come solo una corrente con frequenza $\omega \geq M$ può generare un campo di radiazione, a livello quantistico corrisponde al fatto che può essere emessa solo radiazione con energia maggiore della massa dei bosoni vettori, $\hbar\omega \geq m$. Inoltre una corrente di frequenza ω genera una radiazione i frequenza ω come nel caso tradizionale. Si vuole ora analizzare l'irraggiamento, in funzione della frequenza e orientazione. Si riporta la formula dell'irraggiamento

$$\frac{d^2 P^\mu}{d\Omega dt} = r^2 n^i T_M^{\mu i} \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (6.6)$$

Si considera un moto non periodico, e si integra sui tempi

$$\frac{dP^\mu}{d\Omega} = r^2 n^i \int dt T^{\mu i} \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (6.7)$$

Conoscendo il tensore energia-impulso (3.3) ed utilizzando il teorema di Plancherel si può trasformare l'integrale sul tempo di (6.7) in un integrale sulle frequenze. Utilizzando le definizioni in (6.5) si trova, trascurando termini che vanno come $1/r^2$,

$$\partial^\mu A^\nu = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega e^{i\omega t} k^\mu \tilde{A}^\nu(\omega, \mathbf{y}). \quad (6.8)$$

Per il teorema di Plancherel si ha che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta dt = \int k^\mu k^\alpha \tilde{A}^{\nu*} \tilde{A}^\beta d\omega.$$

Sfruttando che $k_\mu \tilde{A}^\mu = 0$ si arriva a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} T^{\mu\nu} dt &= \int F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + M^2 (A^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A^2) dt \\ &= - \int d\omega k^\mu k^\nu \tilde{A}_\alpha^* \tilde{A}^\alpha, \end{aligned} \quad (6.9)$$

dove il termine $M^2 (A^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} A^2)$ si cancella con gli altri contributi grazie alla relazione $k^2 = M^2$.

La (6.7) diventa

$$\frac{d^2 P^\mu}{d\Omega d\omega} = -2r^2 n^i k^i k^\mu (\tilde{A}_\alpha^* \tilde{A}^\alpha). \quad (6.10)$$

Si può definire $V = \sqrt{1 - \frac{M^2}{\omega^2}}$ e riscrivere la (6.10) come

$$\frac{d^2 P^\mu}{d\Omega d\omega} = -2r^2 \omega V k^\mu (\varepsilon *_{\alpha} \varepsilon^\alpha). \quad (6.11)$$

Si può anche riscrivere la polarizzazione ε^μ trovata in (6.5). Effettuando la trasformata di Fourier di $j^\mu(x)$ e introducendo la trasformata quadridimensionale $J^\mu(k)$ si trova

$$J^\mu(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-ik \cdot x} j^\mu(x) d^4x = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{j}^\mu(k^0, \mathbf{x}) d^3x, \quad (6.12)$$

dove si è utilizzato la delta di Dirac. Si noti che grazie alla conservazione della quadricorrente, $\partial_\mu j^\mu = 0$ vale la relazione $k_\mu J^\mu = 0$. Si arriva a

$$\varepsilon^\mu = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\pi}{2}} J^\mu(k). \quad (6.13)$$

Riscrivendo l'equazione (6.11) e ponendo $\mu = 0$ si ottiene per l'energia emessa nell'unità di angolo solido e per unità di frequenza

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\Omega d\omega} = -\pi \omega^2 V (J *_{\alpha} J^\alpha). \quad (6.14)$$

Utilizzando che $k_\mu J^\mu = 0$ diventa

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\Omega d\omega} = \pi \omega^2 V (|\mathbf{J}|^2 - |\mathbf{V} \cdot \mathbf{J}|^2). \quad (6.15)$$

A differenza di quanto accade nell'elettrodinamica classica la radiazione può essere emessa solo per $\omega > M$ e non in soglia, perché se $\omega = M$ si trova $V = 0$. Mentre per frequenze ω molto più grandi della massa M si nota che $V = \sqrt{1 - \frac{M^2}{\omega^2}} \rightarrow 1$ e ci si riconduce al caso senza massa

$$\frac{d^2 \varepsilon}{d\Omega d\omega} = \pi \omega^2 |\mathbf{n} \times \mathbf{J}|^2 = \pi \omega^2 (|\mathbf{J}|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}|^2). \quad (6.16)$$

Tuttavia valori troppo alti dell'energia darebbero luogo al fenomeno della produzione di coppia, ovvero

la formazione di una particella e la sua antiparticella. Questo fenomeno non è spiegabile a livello classico quindi bisogna imporre un limite alla frequenza. Deve valere che

$$\hbar M < \hbar \omega < 2m_p. \quad (6.17)$$

Dove m_p è la massa della particella carica. Partendo dall'equazione della radiazione (6.15) si può scomporla nella componente perpendicolare e parallela a \mathbf{V} . Da (6.13) si vede che ε^μ e J^μ hanno lo stesso orientamento. Si può definire

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{V}}{V} \quad J^\parallel = \mathbf{n} \cdot \mathbf{J} \quad \mathbf{J}^\perp = \mathbf{J} - J^\parallel \mathbf{n}. \quad (6.18)$$

Utilizzando queste relazioni si può riscrivere la formula (6.15) nelle due componenti

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varepsilon^\perp}{d\Omega d\omega} &= \pi \omega^2 V |\mathbf{J}^\perp|^2, \\ \frac{d^2 \varepsilon^\parallel}{d\Omega d\omega} &= \pi M^2 V |\mathbf{J}^\parallel|^2 \end{aligned}$$

dove si è utilizzato che $V = \sqrt{1 - \frac{M^2}{\omega^2}}$. Queste espressioni rappresentano l'energia emessa per unità di angolo solido e per frequenza nella direzione perpendicolare e parallela a \mathbf{V} . Si nota come, per frequenze paragonabili alla massa M i due contributi sono comparabili, mentre per valori alti delle frequenze, $\omega \gg M$, la componente longitudinale diventa irrilevante, mentre si annulla nel limite di $M \rightarrow 0$ e ci si riconduce al caso classico.

Si analizza il caso specifico di una singola particella in moto. Questa genera una corrente spaziale

$$\mathbf{j} = e \mathbf{v}(\mathbf{t}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}(\mathbf{t})).$$

Inserendo questa equazione nella formula della trasformata della quadricorrente (6.12) si ottiene

$$\mathbf{J} = \frac{e}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - \mathbf{V} \cdot \mathbf{y}(t))} \mathbf{v}(t) dt. \quad (6.19)$$

Riscrivendo l'esponente come

$$t - \mathbf{V} \cdot \mathbf{y}(t) = -\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}(0) + \int_0^t (1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}(t')) dt',$$

si può analizzarlo nel caso non relativistico $|\mathbf{v}| \ll 1$. Ricordando che $V = \sqrt{1 - \frac{M^2}{\omega^2}}$, si trova che $1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{v}(t') \sim 1$. Si può riscrivere la corrente spaziale (6.19) come

$$\mathbf{J} = \frac{e}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \mathbf{v}(t) dt = \frac{e \mathbf{v}(\omega)}{(2\pi)^{3/2}} = -\frac{i e \mathbf{a}(\omega)}{(2\pi)^{3/2} \omega}, \quad (6.20)$$

in cui si è usata la definizione di delta di Dirac, di derivata di trasformata di Fourier ed è stata ignorata una fase derivante da $-\mathbf{V} \cdot \mathbf{y}(\mathbf{0})$. $\mathbf{v}(\omega)$ e $\mathbf{a}(\omega)$ rappresentano la trasformata di Fourier della velocità e dell'accelerazione. L'energia emessa per unità di angolo solido e per frequenza (6.15) diventa

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2 V}{8\pi^2} (|\mathbf{a}(\omega)|^2 - V^2 |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}(\omega)|^2). \quad (6.21)$$

Per frequenze comparabili con la massa, ovvero $V \sim 0$, la radiazione è emessa in modo isotropo. Per alte frequenze è maggiore nella direzione ortogonale all'accelerazione, come accade per il caso classico

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{8\pi} |\mathbf{n} \times \mathbf{a}(\omega)|^2 = \frac{e^2}{8\pi^2} (|\mathbf{a}(\omega)|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}(\omega)|^2). \quad (6.22)$$

Integrando l'equazione (6.21) sugli angoli si trova la generalizzazione della formula di Larmor

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\omega} &= \int d\phi \int \frac{e^2 V}{8\pi^2} (|\mathbf{a}(\omega)|^2 - V^2 |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}(\omega)|^2) d\cos(\theta) \\ &= 2\pi \frac{e^2 V}{8\pi^2} \int_{-1}^1 (|\mathbf{a}(\omega)|^2 - V^2 |\mathbf{a}(\omega)|^2 \cos^2(\theta)) d\cos(\theta) = \\ &= V(3 - V^2) \frac{e^2 |\mathbf{a}(\omega)|^2}{6\pi}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Per frequenze $\omega \gg M$, ovvero $V \rightarrow 1$, la (6.23) diventa

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} \approx \frac{e^2 |\mathbf{a}(\omega)|^2}{3\pi},$$

come nel caso senza massa.

Da quanto osservato si nota che la radiazione, per il caso massivo, può essere emessa solo per energie $\hbar\omega$ maggiori della massa m del bosone vettore. Per la meccanica quantistica ogni particella che compone la radiazione avrà un'energia di $\hbar\omega$. In questo caso l'energia minima sarà $\hbar M$. Quindi per una certa energia ε emessa potranno essere emesse solo n particelle

$$n \leq \frac{\varepsilon}{\hbar M}. \quad (6.24)$$

A differenza di quanto succede nell'elettrodinamica classica, dove non c'è un limite inferiore all'energia dei fotoni, non avviene l'emissione di un numero infinito di particelle con energia infinitesima, fenomeno che viene chiamato catastrofe infrarossa.

Capitolo 7

Introduzione alla gravità massiva

In questo capitolo si introdurrà una teoria della gravitazioni con un gravitone massiva. Inizialmente si presenterà la teoria della relatività generale e la sua forma linearizzata. Successivamente si analizzerà l'aggiunta di un termine massivo dovuto a Fierz-Pauli.

7.1 Azione di Hilbert-Einstein

Si introduce l'azione totale per la relatività generale¹, data dall'azione di Hilbert-Einstein per il campo gravitazionale e dall'azione della sorgente

$$S_{HE} + S_M = \int (R[g] \frac{c^4}{16\pi G} + \mathcal{L}_M) \sqrt{-g} d^4x, \quad (7.1)$$

in cui R è il tensore curvatura scalare, collegato al tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ da $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$, e g è il determinante della metrica $g^{\mu\nu}$. Calcolando la variazione di (7.1) si può ottenere l'equazione di campo di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (7.2)$$

dove

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (7.3)$$

è il tensore energia-impulso. La relatività generale è invariante sotto il gruppo dei diffeomorfismi, quindi se si applica un cambio di variabili $x_\mu \rightarrow x'_\mu(x)$, ovvero un diffeomorfismo, si giunge alle stesse equazioni della dinamica.

Si studierà il caso linearizzato, detto anche gravità debole, con un tensore metrico

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x). \quad (7.4)$$

¹In questo capitolo si utilizzerà la convenzione $\eta^{\mu\nu} = (-, +, +, +)$, quindi un campo scalare massivo avrà equazione $(\square - m^2)\phi = 0$

Si sta analizzando uno spaziotempo piatto con piccole perturbazione $||h_{\mu\nu}|| \ll 1$. Calcolando $R\sqrt{-g}$ in queste condizioni si può arrivare al termine cinetico per $h_{\mu\nu}$. Si riportano le espansioni

$$\begin{aligned}
g^{\mu\nu}(x) &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x), \\
\Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\alpha}(\partial_\nu h_{\alpha\mu} + \partial_\mu h_{\alpha\nu} - \partial_\alpha h_{\mu\nu}), \\
R_{\sigma\mu\nu}^\rho &= \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho, \\
&= \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_\mu \partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\nu\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma h_{\alpha\mu} + \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\sigma}), \\
R &= \partial_\mu \partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h, \\
\sqrt{-g} &= 1 + \frac{1}{2}h,
\end{aligned}$$

dove si intende $h = h_\mu^\mu$. Si può riscrivere il termine $\sqrt{-g}R[g]$ come, a meno di derivate totali,

$$\sqrt{-g}R[g] = (1 + \frac{1}{2}h)(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu})\frac{1}{2}(\partial_\nu \partial_\rho h_\mu^\rho - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h + \partial_\mu \partial_\rho h_\nu^\rho) \quad (7.5)$$

$$= -h^{\mu\nu}(\frac{1}{2}\partial_\rho \partial_\nu h_\mu^\rho - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu \partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu}) + \frac{1}{4}h(2\partial_\rho \partial_\nu h^{\nu\rho} - 2\square h). \quad (7.6)$$

Che diventa, a meno di un fattore moltiplicato $\frac{1}{4}$, il termine cinetico

$$\mathcal{L}_{kin}^{spin-2} = \frac{1}{8}h^{\mu\nu}(\square h_{\mu\nu} - 2\partial_\alpha \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\alpha + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta})). \quad (7.7)$$

Questo termine risulta invariante per la trasformazione dei diffeomorfismi linearizzati

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \chi_\nu + \partial_\nu \chi_\mu. \quad (7.8)$$

Si vede che $h_{\mu\nu}$ è un campo simmetrico con 10 componenti ma grazie a questa invarianza si arriva a 2 [7].

7.2 Gravità massiva

Si vuole assegnare una massa al gravitone senza perdere l'invarianza per trasformazioni di Lorentz. Il termine più generico da aggiungere è della forma

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{8}m^2(h_{\mu\nu}^2 - \alpha h^2), \quad (7.9)$$

e la lagrangiana diventa $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{spin-2} + \mathcal{L}_m$, dove α è un parametro adimensionale. Aggiungendo questo termine la lagrangiana totale perde l'invarianza per diffeomorfismi e passerebbe da 2 gradi di libertà a 6, come si vedrà successivamente. Tuttavia si presenta anche un grado di libertà con energia negativa, detto ghost che si può dimostrare corrispondere a h [8] [9]. Per un valore generico di α nella

(7.9) l'equazione del moto totale risulta

$$\square h_{\mu\nu} - 2\partial_\alpha \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\alpha + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) = m^2(h_{\mu\nu} - \alpha h \eta_{\mu\nu}). \quad (7.10)$$

Applicando la quadridivergenza ∂^μ a questa equazione si trova che il lato sinistro si cancella e rimane

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \alpha \partial_\nu h. \quad (7.11)$$

Inserendo questa nella equazione del moto (7.10) si ottiene

$$\square h_{\mu\nu} + (1 - 2\alpha)\partial_\mu \partial_\nu h + (\alpha - 1)\eta_{\mu\nu}\square h = m^2(h_{\mu\nu} - \alpha \eta_{\mu\nu} h). \quad (7.12)$$

Prendendo la traccia di questa si giunge a

$$(2\alpha - 2)\square h = m^2 h(1 - 4\alpha). \quad (7.13)$$

Che può essere riscritto come

$$\left(\square - m^2 \frac{1 - 4\alpha}{2\alpha - 2} \right) h = 0. \quad (7.14)$$

Segue che per avere invarianza per trasformazioni di Lorentz e non generare ghost l'unica scelta possibile è porre $\alpha = 1$, che comporta dalla (7.13) $h = 0$, Il termine massivo dovuto a Fierz-Pauli risulta [10]

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{8}m^2(h^{\mu\nu}h_{\mu\nu} - h^2). \quad (7.15)$$

Con il termine di Fierz-Pauli si elimina il grado di libertà ghost e come si farà vedere si ottiene una teoria della gravità massiva linearizzata con 5 gradi di libertà, in accordo con la classificazione di Wigner. Per analizzare i gradi di libertà si studia l'equazione del moto della lagrangiana $\mathcal{L}_{kin}^{spin-2} + \mathcal{L}_m$ in modo simile a quanto fatto per il caso di α generico. Si ricava l'equazione

$$\square h_{\mu\nu} - 2\partial_\alpha \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\alpha + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) = m^2(h_{\mu\nu} - h \eta_{\mu\nu}). \quad (7.16)$$

Applicando la quadridivergenza ∂^μ all'equazione, il lato sinistro si elimina per l'identità di Bianchi. Si ottiene

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = \partial_\nu h. \quad (7.17)$$

Prendendo la traccia dell'equazione del moto (7.16) si ottiene

$$\square h - 2\partial_\alpha \partial^\mu h_\mu^\alpha + \square h - 4(\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta}) = -3m^2 h. \quad (7.18)$$

Utilizzando l'espressione (7.17) si trova che $h = 0$. La (7.17) diventa

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (7.19)$$

I vincoli $h = 0$ e (7.19) rimuovono in totale 1+4 gradi di libertà, lasciando una teoria della gravità massiva con 5 gradi di libertà, 3 in più rispetto a quella priva di massa, in accordo con la classificazione di Wigner che per una particella di spin 2

A questo punto si vuole controllare se la teoria di Fierz-Pauli nel limite $m \rightarrow 0$ e la relatività generale conducano agli stessi risultati. Per fare questo si considera anche il contributo dato da un termine di interazione $\frac{1}{2M_P^2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$, in cui $M_P = \frac{1}{\sqrt{G}}$ è la massa di Planck. La lagrangiana totale è

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{spin-2} + \mathcal{L}_m + \frac{1}{2M_P^2} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (7.20)$$

L'equazione del moto risulta

$$\frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} - 2\partial_\alpha \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\alpha + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta})) - \frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) = -\frac{1}{M_P^2} T_{\mu\nu}. \quad (7.21)$$

Si può riscriverla come

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}(h_{\mu\nu} - h\eta_{\mu\nu}) = \frac{1}{M_P^2} T_{\mu\nu}. \quad (7.22)$$

Prendendo la traccia dell'equazione (7.22) risulta

$$-R - \frac{3}{2}m^2 h = \square h - \partial_\alpha \partial_\beta h^{\alpha\beta} - \frac{3}{2}m^2 h = \frac{1}{M_P^2} T, \quad (7.23)$$

dove $T = \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$. Applicando la quadridivergenza, ∂^μ , alla (7.22) si trova

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = \frac{2}{m^2 M_P^2} \partial^\mu T_{\mu\nu}. \quad (7.24)$$

Se si assume che la sorgente sia conservata anche per la teoria di Fierz-Pauli, $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, si ottiene $\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = 0$. Utilizzando questo vincolo nella (7.23) si arriva a

$$h = -\frac{2}{3m^2 M_P^2} T. \quad (7.25)$$

Si riscrive la traccia (7.23) come

$$-R - \frac{3}{2}m^2 h = -R + \frac{1}{M_P^2} T = \frac{1}{M_P^2} T. \quad (7.26)$$

Per il caso non massivo, $m = 0$, prendendo la traccia dell'equazione (7.2) si ottiene, in unità naturali, $-R = \frac{T}{M_P^2}$. Mentre dalla (7.26) si nota che $R = 0$, in opposizione con quanto vale per la teoria della

relatività generale. Si conclude che la teoria della gravita massiva di Fierz-Pauli nel limite $m \rightarrow 0$ non porta agli stesi risultati della teoria linearizzata classica di Einstein. Questa condizione viene chiamata discontinuità di vDVZ è deriva dagli autori van Dam, Veltman e Zakharov [11] [12] . Per risolverla è necessario espandere la teoria oltre la linearità [13].

Capitolo 8

Meccanismo di Higgs per una teoria di gauge U(1)

In questo capitolo si affronterà il meccanismo con cui un campo di gauge non massivo acquisisce massa attraverso la rottura spontanea della simmetria.

8.1 Simmetria di gauge U(1)

In questa sezione si presenta la simmetria U(1), che sarà utilizzata successivamente. Come si è visto nel capitolo (2) un campo scalare reale massivo è descritto dalla lagrangiana (2.6). Un campo scalare complesso $\phi(x)$ ha una lagrangiana simile

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - M^2 \phi \phi^*. \quad (8.1)$$

Questa lagrangiana è invariante per la trasformazione globale

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \phi(x). \quad (8.2)$$

Tuttavia se si promuove questa trasformazione da globale a locale, ovvero

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)} \phi(x), \quad (8.3)$$

si perde l'invarianza. Per riottenere l'invarianza locale si può effettuare una sostituzione minimale, definendo la derivata covariante \mathcal{D}_μ

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (8.4)$$

dove $A_\mu(x)$ è un campo di gauge. La lagrangiana totale dovrà contenere anche un termine di campo cinetico per A_μ ed è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi)(\mathcal{D}^\mu\phi)^* - M^2\phi\phi^*, \quad (8.5)$$

dove $F^{\mu\nu}$ è il tensore di Maxwell. Dall'equazione (8.2), ricordando che $e^{i\theta(x)} = U(x)$, con U matrice 1×1 unitaria, si vede che la lagrangiana finale (8.5) è invariante rispetto al gruppo di simmetria $U(1)$, purché A^μ trasformi come $A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta$. Dal momento che $U(1)$ è un gruppo abeliano questa simmetria è anche detta simmetria di gauge abeliana.

8.2 Meccanismo di Higgs

In seguito si presenterà il meccanismo di Higgs per una teoria di gauge $U(1)$, detto modello di Higgs abeliano, mostrando come un campo di gauge possa acquisire massa. Si analizza la lagrangiana (8.5) del campo di gauge A^μ associata con un campo scalare complesso $\phi(x)$ con un potenziale $V(\phi)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu\phi)(\mathcal{D}^\mu\phi)^* - V(\phi). \quad (8.6)$$

Il potenziale è $V(\phi) = -\mu^2(\phi^*\phi) + \lambda(\phi^*\phi)^2$ ed μ e λ sono due costanti reali. Il potenziale V ammette minimi per

$$|\phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \neq 0. \quad (8.7)$$

Si può sfruttare la simmetria del potenziale e riscrivere il campo scalare complesso come $\phi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\chi(x)}{v}}$, dove ρ e χ sono due campi scalari reali. A questo punto si può svilupparlo attorno ad un minimo, rompendo la simmetria, e si ottiene

$$\phi(x) = \frac{h(x) + v}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\chi(x)}{v}}. \quad (8.8)$$

Il campo χ è detto campo di Goldstone mentre il campo scalare reale h è una perturbazione rispetto allo stato di minimo, anche detto stato di vuoto, ed è il campo di Higgs. Si riscrive la lagrangiana (8.6) in funzione dei due campi χ e h

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{e^2v^2}{2}A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu h\partial^\mu h - 2\mu^2h^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi \\ & - evA_\mu\partial^\mu\chi + \{\text{termini di interazione } h, \chi\}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

La lagrangiana descrive: un campo di gauge A^μ con massa

$$m_A = ev, \quad (8.10)$$

un campo di Higgs h con massa

$$m_h = \sqrt{2}\mu, \quad (8.11)$$

un campo di Goldstone χ privo di massa ed un termine di interazione tra il campo A^μ e il campo χ . Tuttavia il bosone di Goldstone non è associato a nessuna particella esistente e può essere eliminato [14]. Infatti si può riscrivere la lagrangiana (8.9) come

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu h\partial^\mu h - 2\mu^2 h^2) + \frac{e^2 v^2}{2} \left(A_\mu - \frac{\partial_\mu \chi}{ev} \right)^2 \\ & + \{ \text{termini di interazione } h, \chi \}. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Si nota che si può assorbire il bosone di Goldstone effettuando la trasformazione di gauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{ev}\partial_\mu \chi. \quad (8.13)$$

Con questa scelta della gauge, detta gauge unitaria, si elimina il bosone di Goldstone e rimangono solo il campo di gauge massivo A_μ ed il campo scalare massivo h di massa $m_h = \sqrt{2}\mu$ [15].

Bibliografia

- [1] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003.
- [2] Alexandru Proca. Sur la theorie ondulatoire des electrons positifs et negatifs. *J. Phys. Radium*, 7:347–353, 1936.
- [3] ECG Stueckelberg. Forces of interaction in electrodynamics and in the field theory of nuclear forces.(parts ii and iii). *Helv. Phys. Acta*, 11:299–328, 1938.
- [4] W. Pauli. Relativistic field theories of elementary particles. *Rev. Mod. Phys.*, 13:203–232, Jul 1941.
- [5] Kurt Lechner. *Elettrodinamica classica*. Springer Milan, 2014.
- [6] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles I. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, 17:48–57, 1935.
- [7] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [8] Eugenia Boffo. *Theories of Massive Gravity*. Università di Padova, Padova, 2016.
- [9] Hayato Motohashi and Teruaki Suyama. Third order equations of motion and the Ostrogradsky instability. *Phys. Rev. D*, 91(8):085009, 2015.
- [10] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 173:211–232, 1939.
- [11] H. van Dam and M. Veltman. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. *Nuclear Physics B*, 22(2):397–411, September 1970.
- [12] V. I. Zakharov. Linearized Gravitation Theory and the Graviton Mass. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 12:312, January 1970.
- [13] Claudia de Rham. Massive Gravity. *Living Rev. Rel.*, 17:7, 2014.
- [14] J. Goldstone. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961.

- [15] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.