

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Astronomia

Tesi di Laurea

An Exact Gravitational Plane-Wave Solution

Una Soluzione Esatta delle Onde Piane Gravitazionali

Relatore

Dott. Daniele Bertacca

Laureando

Nicolò Aimone Braidà

Anno Accademico 2023/2024

A mia mamma.

Abstract

Albert Einstein in 1916 predicted the existence of gravitational waves within the framework of linearized Einstein theory. In the following years, many different exact solutions of gravitational waves in the fully non-linear Einstein theory were provided. As a consequence of the high degree of non-linearity of the gravitational field equations, theory predicts non-linear interaction between two waves passing through each other. Studying exact solutions allows us to investigate such effects and to scrutinize the non linear interaction between gravitational waves. The aim of this thesis is to show some important results in the study of exact gravitational waves. At first we will discuss a solution of the linearized Einstein equations in weak field approximation, assuming that the metric deviates slightly from the Minkowski flat space. Then we will show that such equations admit plane waves as solution. Finally, we will look at an exact plane gravitational wave solution of the full vacuum Einstein equations and we will discuss the approximate cases of sandwich gravitational waves and impulsive plane gravitational.

Nel 1916 Albert Einstein predisse l'esistenza delle onde gravitazionali all'interno della teoria linearizzata delle equazioni di campo di Einstein e, negli anni successivi, diverse soluzioni esatte per le onde gravitazionali vennero ricavate a partire dalla teoria completa non lineare. Il carattere non lineare delle equazioni di Einstein prevede che due onde gravitazionali che passano l'una attraverso l'altra interagiscano tra di loro in modo non lineare. Lo studio di soluzioni esatte permette quindi di investigare tali effetti e fornire modelli di interazione tra onde gravitazionali. L'obiettivo di questa tesi consiste nel riportare alcuni importanti risultati ottenuti nell'ambito dello studio delle onde gravitazionali. Per cominciare si discuterà una soluzione delle equazioni di Einstein linearizzate nel vuoto in approssimazione di campo debole, assumendo che il tensore metrico dello spazio tempo sia pari a quello dello spazio piatto di Minkowski più una piccola perturbazione, e si mostrerà che tali equazioni ammettono come soluzione onde piane. Successivamente si analizzerà una soluzione esatta di onde gravitazionali piane per le equazioni di campo di Einstein nel vuoto e, infine, si studieranno due casi approssimati corrispondenti alle *sandwich waves* e alle onde gravitazionali piane con profilo impulsivo.

Indice

Notazioni e Convenzioni	vii
Introduzione	1
1 Breve Storia della Teoria delle Onde Gravitazionali	3
2 Cenni di Relatività Generale	7
2.1 I principi della relatività generale	7
2.2 Le equazioni di Einstein	8
3 Equazioni di Einstein Linearizzate	11
3.1 Equazioni di Einstein linearizzate: approssimazione di campo debole	11
3.2 Trasformazioni infinitesime e invarianza di <i>gauge</i>	13
3.3 Soluzioni delle equazioni linearizzate nel vuoto	15
3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali	17
4 Una Soluzione Esatta delle Equazioni di Einstein: Onde Gravitazionali Piane	21
4.1 Onde gravitazionali e simmetrie	21
4.2 Onde piane come soluzioni esatte delle equazioni di Einstein	23
4.3 <i>Sandwich waves</i> e onde gravitazionali piane impulsive	27
5 Conclusioni	31
Bibliografia	34

Notazioni e Convenzioni

Nella seguente tesi si userà l'indice 0 per indicare la coordinata temporale, mentre gli indici 1,2,3 indicheranno le coordinate spaziali. Con le lettere greche $\mu = 0, 1, 2, 3$ si indicheranno le coordinate spazio-temporali, mentre le lettere latine $i = 1, 2, 3$ indicheranno le sole coordinate spaziali. Per la metrica $g_{\mu\nu}$ dello spazio-tempo curvo si adotterà la segnatura con autovalore temporale positivo $(+, -, -, -)$.

Le convenzioni sugli oggetti geometrici sono le seguenti:

- simbolo di Christoffel

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\rho,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma});$$

- equazione della geodetica (nulla)

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\rho}}{ds} = 0;$$

- tensore di Riemann

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\mu}_{\alpha\sigma};$$

- tensore di Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu};$$

- scalare di Ricci (o scalare di curvatura)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu};$$

- tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R;$$

- identità di Bianchi (contratta)

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0;$$

- tensore di Weyl¹

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}R_{\sigma\mu} - g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}R_{\rho\mu}) + \frac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})R.$$

¹Il tensore di Weyl descrive la parte della curvatura dello spaziotempo che non è legata direttamente alla materia o all'energia presenti, ma piuttosto alla deformazione intrinseca dello spazio-tempo stesso. Esso è *trace-free* e gode delle stesse proprietà di simmetria del tensore di Riemann.

Con la virgola si è indicata la derivata parziale (indicata anche con la notazione equivalente ∂_μ), mentre con il punto e virgola si è indicata la derivata covariante

$$\nabla_\nu T^\mu \equiv T^\mu_{;\nu} = T^\mu_{,\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} T^\alpha.$$

L'operatore d'Alambertiano è definito come

$$\square := \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

dove ∇^2 è l'operatore laplaciano.

Gli indici racchiusi in parentesi tonde oppure quadre soddisfano, rispettivamente, le proprietà di simmetria o antisimmetria

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \quad \text{e} \quad T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}).$$

Si lavorerà in unità relativistiche e quindi la velocità della luce nel vuoto e la costante di gravitazione saranno rispettivamente $c = 1$ e $G = 1$.

Introduzione

All'interno della teoria della relatività generale di Einstein, le onde gravitazionali sono definite come delle soluzioni tempo-dipendenti delle equazioni di campo di Einstein che corrispondono a perturbazioni della curvatura dello spazio-tempo. Esse si propagano alla velocità della luce e trasportano energia sotto forma di radiazione gravitazionale. La loro esistenza fu ipotizzata da Einstein subito dopo la pubblicazione della teoria della relatività generale nel 1916, ma la possibilità che esse potessero rappresentare un fenomeno fisico reale o comunque misurabile fu messa subito in dubbio. Per quasi un secolo le onde gravitazionali rimasero al centro del dibattito scientifico e solo verso la fine degli anni '60 si riuscì a dimostrare la loro esistenza. Ciò diede il via alla ricerca sperimentale per la rilevazione di tali onde; tale ricerca si avvale del supporto di strumentazioni sempre più precise e, nel 2015, venne misurato il primo segnale ad opera di VIRGO e LIGO.

Le onde gravitazionali sono un campo di ricerca scientifico estremamente attuale che potrebbe aprire nuove frontiere nello studio dell'universo e della sua evoluzione. Rispetto alla radiazione elettromagnetica, finora principale mezzo di osservazione astronomica, le onde gravitazionali hanno una natura totalmente diversa e permetterebbero di osservare aspetti dell'universo finora inaccessibili. Per esempio, potrebbero fornire informazioni sui primi istanti successivi al Big Bang, inesplorabili per mezzo della radiazione elettromagnetica a causa dell'epoca della ricombinazione.

La trattazione affrontata nella seguente tesi è strutturata nel seguente modo: nel primo capitolo verranno brevemente ripercorsi i principali passaggi storici che hanno portato alla dimostrazione dell'esistenza della radiazione gravitazionale; nel secondo capitolo si riporteranno brevi cenni di relatività generale, ponendo l'attenzione sul carattere non lineare delle equazioni di Einstein e sulla conseguente difficoltà nel trovare soluzioni analitiche; nel terzo capitolo si illustrerà la teoria linearizzata delle equazioni di campo gravitazionale in approssimazione di campo debole e si mostrerà che ammettono soluzioni nella forma di onde piane; nel quarto capitolo verrà riportata una soluzione esatta delle equazioni di Einstein corrispondente a onde gravitazionali piane e infine si discuteranno due soluzioni approssimate corrispondenti alle *sandwich waves* e alle onde gravitazionali piane impulsive.

Capitolo 1

Breve Storia della Teoria delle Onde Gravitazionali

Il primo a parlare di onde gravitazionali fu Henri Poincaré nel 1905 che, in un articolo [28] in cui s'interrogava sull'analogia tra il campo elettromagnetico e quello gravitazionale, coniò il termine *onde gravifique*. Per cercare di spiegare l'anomala precessione del perielio di Mercurio, in un secondo articolo [27] del 1908 Poincaré suggerì l'esistenza di ipotetiche onde gravitazionali, che comporterebbero una perdita di energia sufficiente a spiegare il moto del pianeta. I conti svolti da Poincaré non portarono però a risultati soddisfacenti.

Qualche anno dopo, nel 1912, le onde gravitazionali furono discusse da Max Abraham all'interno della teoria relativistica della gravitazione che stava sviluppando in dichiarata opposizione alle contemporanee ricerche di Einstein. L'importanza della discussione di Abraham era la sua dimostrazione, essenzialmente valida, dell'inesistenza del momento di dipolo nelle onde gravitazionali. Supponendo un'analogia tra campo elettromagnetico e gravitazionale, tale risultato lo portò erroneamente ad affermare che le onde gravitazionali non potessero esistere.

Il concetto di onde gravitazionali fu ripreso qualche anno più tardi da Einstein, subito dopo aver formulato la teoria della relatività generale [12] nel 1916. Egli dimostrò [13] che, all'interno della teoria linearizzata in approssimazione di campo debole, le equazioni di campo gravitazionale ammettono soluzioni in cui le perturbazioni dello spazio-tempo piatto corrispondono ad onde piane, che si propagano alla velocità della luce (cfr. § 3). Essendo la teoria lineare, tali soluzioni possono essere sovrapposte per ottenere onde con qualsiasi fronte d'onda desiderato. Egli dimostrò inoltre che esse trasportano energia e trovò, in analogia con il caso elettromagnetico, una formula per la perdita di energia in termini del momento di quadrupolo delle sorgenti. Einstein era però dubbioso sul fatto che tali soluzioni potessero essere fisiche, ma che fossero piuttosto una conseguenza della linearizzazione delle equazioni di campo.

Nel 1923 il matematico H. W. Brinkmann [9], analizzando le equazioni di campo gravitazionale nel vuoto, giunse alla definizione di una classe di metriche (cfr. Eq. 4.35) con proprietà radioattive, definite successivamente *pp-waves* (*plane-fronted waves with parallel rays*). I risultati allora ottenuti avevano però valore puramente matematico e non trovarono subito un'interpretazione fisica.

Un primo tentativo di definire un'onda gravitazionale piana nella teoria della relatività generale non lineare è dovuto ad Einstein e Rosen nel 1937. Essi trovarono una soluzione nel vuoto che rappresentava un'onda gravitazionale polarizzata piana, che però conclusero non essere fisica in quanto presentava delle singolarità. Il lavoro fu successivamente revisionato da Howard P. Robertson (1937), che riconobbe nelle singolarità incontrate da Einstein e Rosen semplicemente una errata scelta delle coordinate. Utilizzando i corretti sistemi di coordinate, la soluzione poteva essere interpretata come un'onda cilindrica, ovunque non singolare tranne che sull'asse di simmetria. Tale asse corrisponderebbe alla sorgente (lineare e infinita in estensione) del campo. A seguito delle correzioni suggerite da Robertson, Einstein e Rosen pubblicarono i loro risultati in un articolo [1] nel 1937, ma rimasero

comunque scettici e non ritennero che tali soluzioni potessero essere fisicamente accettabili. Sempre nello stesso anno, Rosen pubblicò un secondo articolo [29] dove discuteva una soluzione esatta di onde gravitazionali piane con proprietà trasversali e trovava un sistema di coordinate in cui la metrica (cfr. Eq. 4.11) era priva di singolarità nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda [33]. Tale lavoro si dimostrò fondamentale e permise una maggiore comprensione del fenomeno delle onde gravitazionali.

Le onde gravitazionali cilindriche trovate da Einstein e Rosen furono successivamente riprese nel 1957 da J. Weber e J. A. Wheeler [20]. Essi sovrapposero tali soluzioni per creare un'onda cilindrica con profilo impulsivo. Analizzando questa soluzione, Webber e Wheeler dimostrarono che essa non presentava singolarità e trasportava energia, contrariamente alle opinioni iniziali di Einstein e Rosen. Tali soluzioni esatte rappresentavano quindi una soluzione fisica delle equazioni di campo gravitazionale.

Sempre nel 1957, Pirani pubblicò un articolo [26] dove definì un'onda gravitazionale in termini puramente geometrici dello spazio-tempo curvo, affermando che la radiazione gravitazionale dovesse essere descritta dal tensore di Riemann. Inoltre, egli ricavò che lo spazio-tempo nella regione di propagazione dell'onda gravitazionale (*wave zone*) è caratterizzato da un tensore di Weyl algebricamente speciale (secondo la classificazione di Petrov) e quindi almeno due delle quattro direzioni nulle principali (PNDs) del tensore sono coincidenti. Tuttavia egli non specificò se nella *wave zone* il campo gravitazionale fosse di tipo II, III, D o N poiché a quel tempo non si aveva ancora una definizione completa della classificazione di Petrov (fornita poi da Roger Penrose [24] nel 1960). Nel 1958, Andrzej Trautman riformula le condizioni radioattive al contorno di Sommerfeld per una generica teoria dei campi [35] e applica questo approccio alla relatività generale [36], trovando le condizioni al contorno da imporre all'infinito per campi gravitazionali dovuti a sorgenti limitate. In particolare, egli mostrò che soluzioni approssimate delle equazioni di Einstein ottenute assumendo il campo debole ed espandendo in serie di potenze la metrica portavano al secondo ordine a una violazione delle condizioni radioattive di Sommerfeld. In analogia con il caso elettromagnetico, suggerì invece che per studiare il carattere asintotico del campo gravitazionale proveniente da una sorgente isolata bisognasse operare un'espansione di multipolo della metrica. A partire dai risultati ottenuti da Pirani e Trautman, nel 1961 Ray Sachs [30] sviluppa il *peeling-off-theorem*, dimostrando che, lontano dalle sorgenti del campo, il tensore di Weyl associato allo spazio-tempo in presenza di radiazione gravitazionale è di Tipo N (cioè tutte e quattro le PNDs coincidono), ovvero corrisponde ad onde gravitazionali piane trasversali.

Una tappa fondamentale nell'ambito della teoria delle onde gravitazionali fu rappresentata dai lavori di Herman Bondi, Felix Pirani e Ivor Robinson, che confluirono in un articolo [16] pubblicato nel 1959. Essi definirono le onde gravitazionali piane come *soluzioni non piatte delle equazioni di campo di Einstein in uno spazio-tempo vuoto che ammettono lo stesso numero di simmetrie delle onde elettromagnetiche piane*. Conclusero che la classe di metriche che obbedisce a tale definizione dipende da due funzioni libere in una variabile, interpretabili come l'ampiezza dell'onda e la direzione di polarizzazione. A partire da questo risultato, Bondi, Pirani e Robinson ottennero quella che viene definita una *sandwich wave* (cfr. §4.3), ossia un'onda gravitazionale che differisce dallo spazio-tempo di Minkowski solo in una sottile regione quadridimensionale e che si muove in una data direzione alla velocità della luce. Studiando poi l'effetto del passaggio di tale onda su un sistema di particelle di prova, dimostrarono che essa ne influenza il moto e che quindi le onde gravitazionali piane trasportano energia. Nello stesso anno, Asher Peres pubblicò un articolo [25] riguardante le *pp-waves* in cui derivò una nuova classe di soluzioni delle equazioni di Einstein. Rispetto alle precedenti soluzioni di onde piane e cilindriche, esse mostravano un minore grado di simmetria e quindi una maggiore generalità. Nello specifico analizzò i casi di onde monocromatiche piane e di pacchetti d'onde che si propagano alla velocità della luce.

Nel 1962, Robinson e Trautman pubblicarono due articoli [19, 18] in cui trovavano una vasta classe di soluzioni esatte che soddisfano le equazioni di Einstein nel vuoto. Tali soluzioni descrivono onde gravitazionali con fronti d'onda chiusi e che trasportano energia. Alcune di esse possono essere considerate come semplici rappresentazioni di una radiazione sferica, tra le quali sono presenti soluzioni che non ammettono alcun campo di Killing.

Infine, nel 1965 K. Thorne pubblicò un articolo [34] dove fornisce una precisa descrizione dell'energia associata a sistemi a simmetria cilindrica e invarianti sotto riflessioni rispetto all'asse di simmetria e all'angolo altazimutale (*whole cylinder symmetry*). Egli analizzò il problema sia in prossimità della sorgente sia lontano da essa e fornì un modello per spiegare la radiazione gravitazionale trasportata dalle onde cilindriche di Einstein e Rosen.

I lavori svolti da Bondi, Pirani, Robinson e Trautman chiarirono definitivamente i dubbi sull'esistenza o meno delle onde gravitazionali e i loro risultati diedero il via alla ricerca sperimentale. A partire dagli anni '60, i fisici si mobilitarono per ottenere prove sperimentali sulla loro esistenza. Il primo rivelatore fu costruito da Joseph Weber, che nel 1968 affermò di aver captato dei segnali interpretabili come onde gravitazionali. Tuttavia, tali misure si rivelarono errate e dovute solamente al rumore e agli errori di analisi dei dati della strumentazione usata. Un'importante prova indiretta dell'esistenza delle onde gravitazionali arrivò nel 1974 per opera dei fisici Russell Hulse e Joseph Taylor. Studiando il sistema binario di pulsar PSR 1913+16, si accorsero che la velocità con cui le due stelle orbitavano l'una attorno all'altra era talmente elevata che il sistema poteva essere usato come banco di prova per la relatività generale. I due fisici riuscirono così a dimostrare che il periodo del moto orbitale delle stelle diminuiva in accordo con i modelli che ammettevano l'emissione di onde gravitazionali. A seguito dei lavori di Weber e le scoperte di Hulse e Taylor, si iniziarono a costruire nuovi rivelatori, che divennero sempre più precisi nel tempo fino ad arrivare alla rilevazione del primo segnale proveniente dalla fusione di uno sistema binario di due buchi neri ad opera degli interferometri LIGO e VIRGO nel 2015 [2].

Nei capitoli successivi verranno analizzate in modo più dettagliato alcune delle soluzioni delle equazioni di Einstein sopra esposte. In particolare si discuteranno le soluzioni nella forma di onde piane all'interno della teoria linearizzata in approssimazione di campo debole (cfr. §3) e una soluzione esatta delle equazioni di Einstein non lineari corrispondente ad onde gravitazionali piane (cfr. §4) e le relative approssimazioni a *sandwich waves* e onde gravitazionali piane impulsive.

Capitolo 2

Cenni di Relatività Generale

Nel seguente capitolo verranno introdotti alcuni cenni di relatività generale allo scopo di riportare sia i principi cardine alla base della teoria sia le equazioni di campo di Einstein che rappresenteranno il punto di partenza per la trattazione successiva. Verrà inoltre evidenziato il carattere non lineare e la complessità del sistema di equazioni differenziali che descrivono il campo gravitazionale, giustificando la necessità di porsi in casi approssimativi o idealizzati per poter trovare delle soluzioni. A partire dalle equazioni di Einstein qui riportate, la tesi si propone di perseguire, attraverso le argomentazioni che verranno esposte nei capitoli successivi, l'obiettivo di discutere delle soluzioni corrispondenti ad onde gravitazionali piane che si propagano nello spazio-tempo vuoto.

2.1 I principi della relatività generale

Il principio chiave della teoria della relatività generale è il *principio di equivalenza*, che nella sua forma *debole* afferma che [3]

la massa gravitazionale m_g di un corpo e la sua massa inerziale m_i sono uguali.

La validità di tale principio è stata verificata sperimentalmente nel corso del tempo con sempre maggiore accuratezza [40]. Alla fine dell'Ottocento, l'uguaglianza tra massa gravitazionale ed inerziale fu misurata da Roland von Eötvös con una precisione di cinque parti su un miliardo [3]; nel 1964 Dicke migliorò ulteriormente i risultati giungendo a una precisione di meno di una parte su 10^{12} [22].

Come conseguenza del principio di equivalenza debole, in una regione limitata dello spazio-tempo in cui il campo gravitazionale risulti statico e omogeneo, la forza gravitazionale è indistinguibile da una forza inerziale che agisce in un sistema di riferimento accelerato. È possibile quindi, con un opportuno cambio di coordinate, trovare un sistema di riferimento in cui la forza inerziale annulla gli effetti della gravità e il sistema risulta inerziale. A partire da tale osservazione, Einstein formulò il principio di equivalenza *forte* stabilendo che [3]

per ogni evento dello spazio-tempo, è sempre possibile scegliere un sistema di coordinate localmente inerziali, cioè tali che in un intorno sufficientemente piccolo dell'evento, le leggi della fisica abbiano la stessa forma che hanno in un sistema di riferimento inerziale, ovvero obbediscano alla relatività speciale.

È importante sottolineare il carattere locale di tale affermazione, che consente di considerare il campo gravitazionale statico e omogeneo. Se il campo gravitazionale non dovesse soddisfare queste condizioni, una accelerazione globale del sistema di coordinate non potrebbe annullarlo completamente e rimarrebbero delle forze residue di marea.

Un altro importante principio alla base della teoria della relatività generale è il *principio di covarianza generale*. Esso segue dall'asserzione fatta dallo stesso Einstein che tutti gli osservatori, inerziali e non, siano equivalenti e che quindi [3]

le leggi fisiche devono essere scritte in forma tensoriale, per garantire l'equivalenza di tutti i sistemi di coordinate.

In altre parole la teoria della relatività generale è una teoria covariante e quindi lo stesso spazio-tempo fisico può essere espresso (almeno localmente) in modo equivalente da diverse rappresentazioni di coordinate [15]. A livello pratico ciò permette scegliere il sistema più adatto al caso fisico in esame in modo da semplificare la struttura matematica delle equazioni e trovarne agevolmente una soluzione. I risultati ottenuti avranno validità generale e varranno per tutti i sistemi di riferimento. Un esempio di applicazione di tale proprietà è discusso nel paragrafo 3.2, dove con un opportuno cambio di coordinate sarà possibile riscrivere le equazioni di Einstein linearizzate nella forma di equazioni delle onde.

A partire dai principi sopra riportati, Einstein concluse che la gravità non dovesse più essere considerata come una forza nel senso convenzionale, come la fisica newtoniana suggeriva, ma piuttosto come una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo indotta dalla presenza della materia e dell'energia. Tale assunzione permise di fornire una descrizione relativistica della gravità, portando Einstein alla formulazione delle equazioni di campo gravitazionale, che verranno nel seguente paragrafo.

2.2 Le equazioni di Einstein

L'assunzione che una distribuzione di massa e energia incurvi lo spazio-tempo generando il campo gravitazionale porta a dover riformulare il concetto stesso di spazio-tempo, che non potrà più essere piatto e statico come quello di Minkowski. Nella relatività generale esso è concepito come uno spazio curvo e dinamico in cui la distanza infinitesima tra due punti è descritta dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$, che racchiude le informazioni sulla curvatura locale e può variare da punto a punto in presenza di masse o energia. In uno spazio-tempo curvo, la traiettoria di una particella libera segue una geodetica

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0. \quad (2.1)$$

Ci si propone ora di ricavare le equazioni di Einstein a partire da semplici considerazioni euristiche, sfruttando il fatto che le equazioni di campo gravitazionale esatte devono poter essere ricondotte a quelle di Newton. Seguendo l'approccio utilizzato nel Barone [3], si osserva che i termini che compaiono nell'equazione della geodetica 2.1 possono essere interpretati come l'azione inerziale (il primo) e quella gravitazionale (il secondo). Il fatto che nel secondo termine compaia il simbolo di Christoffel (che dipende dalle sole derivate prime della metrica), unito all'asserzione che la gravità sia una manifestazione della curvatura dello spazio-tempo (descritta da $g_{\mu\nu}$), porta alla conclusione che il campo gravitazionale sia rappresentato in termini della metrica $g_{\mu\nu}$ e che essa corrisponda al potenziale gravitazionale.

Per rendere il discorso più quantitativo e ricavare le equazioni di campo gravitazionale, ci si pone nel *limite newtoniano* (ovvero nelle condizioni in cui la relatività generale si riduce alla meccanica classica di Newton) assumendo che:

- valga l'approssimazione di *campo debole*, ovvero il tensore $g_{\mu\nu}$ devii di poco dal tensore metrico di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}, \quad |\varepsilon| \ll 1; \quad (2.2)$$

- la metrica sia *stazionaria*, ovvero non evolva nel tempo

$$g_{\mu\nu,0} = 0; \quad (2.3)$$

- valga il *limite non relativistico* per le velocità

$$v \ll c. \quad (2.4)$$

Sotto tali assunzioni, l'equazione della geodetica 2.1 di una particella libera si riduce alla forma [3]

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial h_{00}}{\partial x_i}. \quad (2.5)$$

D'altra parte, le equazioni di Newton in presenza di un campo gravitazionale valgono

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad (2.6)$$

dove Φ è il potenziale gravitazionale nella teoria della gravitazione newtoniana. Confrontando l'equazione 2.5 con la 2.6 e ricordando che nel limite non relativistico $ds \approx cdt$, si ottiene

$$h_{00} = \frac{2\Phi}{\varepsilon c^2}, \quad (2.7)$$

e quindi dall'equazione 2.2

$$g_{00} = 1 + \varepsilon h_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (2.8)$$

La componente g_{00} della metrica, nei limiti imposti, è quindi strettamente legata al potenziale gravitazionale newtoniano Φ .

Nella teoria newtoniana la sorgente del campo, espressa dalla densità di massa ρ , e il potenziale Φ sono legati dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.9)$$

e sostituendo l'equazione 2.8 nella 2.9 si ottiene

$$\nabla^2 g_{00} = 8\pi G \frac{\rho}{c^2}. \quad (2.10)$$

Dal membro di sinistra, poiché le equazioni esatte del campo gravitazionale devono ricondursi nel *limite newtoniano* all'equazione 2.9, si richiede che esse siano come l'equazione di Poisson lineari nelle derivate parziali del secondo ordine nel potenziale, ovvero $g^{\mu\nu}$. Nel membro di destra, invece, si osserva che il termine ρ/c^2 corrisponde ad una densità di energia. Tale quantità può essere interpretata come la componente T^{00} del *tensore energia-impulso* [32] (vedi figura 2.1), che descrive la densità di energia e di momento e le rispettive densità di flusso. È possibile quindi identificare $T_{\mu\nu}$ come la sorgente del campo gravitazionale nella teoria della relatività generale.

A seguito delle considerazioni fatte sul tensore metrico e sulla sorgente del campo, si è indotti a ipotizzare che le equazioni di campo gravitazionale abbiano una forma del tipo

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

dove $G_{\mu\nu}$ è un tensore formato con le derivate prime e seconde di $g_{\mu\nu}$ e lineare nelle derivate seconde, κ è una costante e $T_{\mu\nu}$ è il *tensore energia-impulso*, che sostituisce la ρ come sorgente del campo gravitazionale. Si può dimostrare che gli unici tensori di rango due che contribuiscono a $G_{\mu\nu}$ sono il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ e $g_{\mu\nu}R$, dove R è lo scalare di curvatura. $G_{\mu\nu}$ assume quindi una forma del tipo

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}R, \quad (2.12)$$

con λ costante. Combinando l'equazione 2.12 con la 2.11, si ottiene

$$R_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

La λ può essere determinata usando l'equazione di continuità per il tensore energia-impulso ($T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$) [21]. La κ , invece, si ricava dal limite statico (ovvero il campo gravitazionale non cambia nel tempo) dell'equazione 2.13 [33]. Si giunge così alle equazioni di campo gravitazionale (in unità relativistiche)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.14)$$

dove si osserva che il tensore $G_{\mu\nu}$ definito arbitrariamente in precedenza corrisponde alla definizione del tensore di Einstein. L'equazione 2.14 rappresenta un sistema 4×4 di sedici equazioni differenziali non lineari (di cui solo dieci indipendenti per via delle simmetrie del tensore di Einstein) che descrivono la relazione tra la curvatura dello spazio-tempo e la distribuzione di energia e momento. La non linearità delle equazioni si traduce in una influenza reciproca tra la sorgente del campo e il campo stesso: la curvatura dello spazio-tempo influenza il tensore energia-impulso, che a sua volta influenza la curvatura dello spazio-tempo, portando ad un effetto retroattivo. Le equazioni di campo di Einstein risultano essere dunque complesse e, unito al fatto che il tensore $T_{\mu\nu}$ è spesso difficile da determinare, risulta estremamente difficile trovare delle soluzioni analitiche. Per poter risolvere le equazioni 2.14 sarà quindi necessario supporre determinate condizioni fisiche che ne semplificano la struttura, come per esempio l'approssimazione di campo debole (si veda § 3) o la simmetria piana della metrica (si veda § 4).

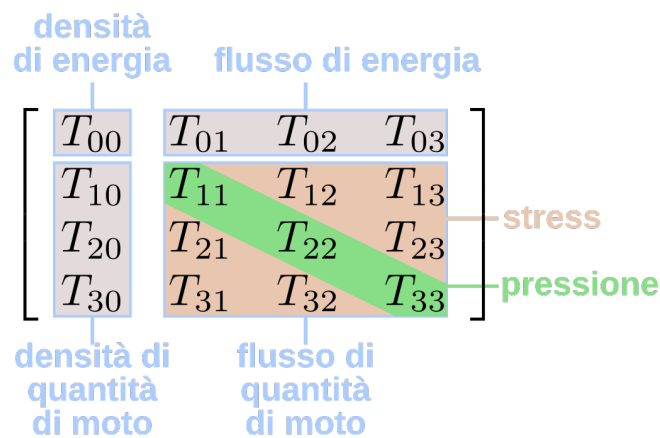


Figura 2.1: Componenti del tensore energia-impulso.[Fonte: Wikipedia, https://it.wikipedia.org/wiki/Tensore_energia_impulso]

Capitolo 3

Equazioni di Einstein Linearizzate

A causa della non linearità delle equazioni di campo gravitazionale, le loro possibili soluzioni risultano essere analiticamente complesse e difficili da ricavare ed è pertanto necessario porsi in situazioni ideali che ne semplifichino la struttura. Il primo approccio utilizzato per trovare una soluzione fu quello di linearizzare le equazioni di Einstein ponendosi in approssimazione di campo debole, sviluppando la cosiddetta *teoria linearizzata della gravità*.

Nei seguenti paragrafi si analizzerà nel dettaglio tale teoria, procedendo a linearizzare le equazioni di campo di Einstein e mostrando che, attraverso le appropriate scelte di *gauge*, esse possono essere ricondotte alle equazioni delle onde e che ammettono come soluzione le onde piane. Studiando infine l'azione che tali onde hanno su delle particelle di prova, si vedrà che le onde gravitazionali sono trasverse (ovvero le particelle oscillano perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda) e possiedono due stati di polarizzazione.

3.1 Equazioni di Einstein linearizzate: approssimazione di campo debole

La teoria linearizzata della gravità è una teoria perturbativa e si basa sull'assunzione che la metrica dello spazio-tempo devii di poco da quella piatta di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (3.1)$$

dove ε è un parametro adimensionale piccolo e $h_{\mu\nu}$ è una generica funzione in x che descrive la perturbazione. Sotto tali assunzioni, è possibile sviluppare al primo ordine in ε le equazioni di Einstein e trascurare tutti i contributi non lineari.

Per procedere a linearizzare le equazioni di campo gravitazionale, è utile definire il tensore controvariante $h^{\mu\nu}$ a partire da $h_{\mu\nu}$ usando, per convenzione, la metrica dello spazio-tempo piatto $\eta^{\mu\nu}$ per alzare e abbassare gli indici

$$h^{\mu\nu} := \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} h_{\rho\sigma}. \quad (3.2)$$

Tali funzioni soddisfano la seguente relazione

$$\begin{aligned} (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} - \varepsilon h^{\nu\rho}) &= \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} \varepsilon h^{\nu\rho} + \eta^{\nu\rho} \varepsilon h_{\mu\nu} + o(\varepsilon^2) \\ &= \delta_{\mu}^{\rho} - \varepsilon h_{\mu}^{\rho} + \varepsilon h_{\mu}^{\rho} + o(\varepsilon^2) \\ &\approx \delta_{\mu}^{\rho}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

dove δ_{μ}^{ρ} è la delta di Kronecker e i termini non-lineari in ε sono stati trascurati. Moltiplicando ambo i membri della 3.3 per $g^{\sigma\mu}$, ricorrendo all'equazione 3.1 e ricordando che la metrica soddisfa la relazione $g^{\sigma\mu} g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\sigma}$, si ottiene

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu}, \quad (3.4)$$

che corrisponde alla forma controvariante della metrica $g_{\mu\nu}$.

Restano ora da calcolare i tensori di Riemann e Ricci e determinare le equazioni di campo gravitazionale nell'approssimazione di campo debole. Poiché la metrica $\eta_{\mu\nu}$ è una costante, il simbolo di Christoffel si riduce a

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\rho,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma}) \\ &\approx \frac{1}{2}\varepsilon\eta^{\mu\sigma} (h_{\sigma\rho,\nu} + h_{\sigma\nu,\rho} - h_{\nu\rho,\sigma}) \\ &\approx \frac{1}{2}\varepsilon (h^\mu_{\rho,\nu} + h^\mu_{\nu,\rho} - h_{\nu\rho}{}^\mu),\end{aligned}\quad (3.5)$$

dove, in virtù del fatto che $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ deve essere dello stesso ordine di ε , usando le equazioni 3.1 e 3.4 si sono alzati e abbassati gli indici con la metrica di Minkowski, trascurando i contributi non-lineari in ε . Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per i tensori di Riemann, Ricci e Einstein e anche in questo caso gli indici potranno essere alzati e abbassati semplicemente con la metrica di Minkowski. Infatti, usare la metrica $g_{\mu\nu}$ per alzare e abbassare gli indici introduce termini al secondo ordine in ε che verrebbero trascurati. Sostituendo la 3.5 nella definizione del tensore di Riemann si ottiene

$$\begin{aligned}R^\mu_{\nu\rho\sigma} &= \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\alpha\sigma} \\ &\approx \Gamma^\mu_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\mu_{\nu\rho,\sigma} \\ &\approx \frac{1}{2}\varepsilon (h^\mu_{\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho}{}^\mu{}_\sigma - h^\mu_{\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma}{}^\mu{}_\rho),\end{aligned}\quad (3.6)$$

dove i termini $\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\Gamma^\mu_{\alpha\rho}$ e $\Gamma^\alpha_{\nu\rho}\Gamma^\mu_{\alpha\sigma}$ sono trascurabili in quanto non lineari in ε . Abbassando gli indici con la metrica di Minkowski, è possibile riscrivere il tensore di curvatura come

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon (h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}).\quad (3.7)$$

Il tensore di Ricci vale invece

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu} &= R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon (h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} + h_{\mu\alpha}{}^\alpha{}_\nu - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon (h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} + h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu}),\end{aligned}\quad (3.8)$$

dove si è definita la contrazione di $h_{\mu\nu}$ come

$$h := \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h^\mu{}_\mu.\quad (3.9)$$

Nell'ultimo passaggio dell'equazione 3.8 si è riscritto il secondo termine del membro di destra, ricorrendo alle simmetrie della metrica e degli operatori di derivazione, come

$$h_{\mu\alpha}{}^\alpha{}_\nu = h_{\alpha\mu,\nu}{}^\alpha = \eta_{\alpha\beta} h^\beta_{\mu,\nu}{}^\alpha = h^\beta_{\mu,\nu\beta}.\quad (3.10)$$

Successivamente si ricava lo scalare di curvatura contraendo il tensore di Ricci dell'equazione 3.8

$$R = R^\beta{}_\beta = \varepsilon (h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \square h).\quad (3.11)$$

Infine, sostituendo i valori del tensore e dello scalare di curvatura trovati nella definizione del tensore di Einstein si ottiene

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}\varepsilon \left(h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - \eta_{\mu\nu} \square h \right).\quad (3.12)$$

Di conseguenza, le equazioni di Einstein in approssimazione di campo debole risultano valere

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(h^\alpha_{\mu,\nu\alpha} + h^\alpha_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu} \square h \right) = 8\pi T_{\mu\nu}.\quad (3.13)$$

3.2 Trasformazioni infinitesime e invarianza di gauge

Attraverso opportune trasformazioni, è possibile trovare un sistema di riferimento in cui le equazioni di Einstein linearizzate assumono la forma di una equazione delle onde. Si supponga di effettuare un cambio di coordinate dato dalla trasformazione infinitesima

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu(x) \quad \text{con} \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (3.14)$$

dove le ξ^μ sono delle funzioni arbitrarie espresse in termini di x . Invertendo l'equazione 3.14, esplicitando la coordinata x^μ e derivando rispetto a x'^ν si ricava la relazione

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta_\nu^\mu - \varepsilon \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x'^\nu}, \quad (3.15)$$

che se sostituita nella formula di trasformazione della metrica tra i due sistemi di coordinate restituisce

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \\ &\stackrel{3.15}{=} g_{\rho\sigma} \left(\delta_\mu^\rho - \varepsilon \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma - \varepsilon \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x'^\nu} \right) \\ &= g_{\rho\sigma} \left(\delta_\mu^\rho - \varepsilon \frac{\partial \xi^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \right) \left(\delta_\nu^\sigma - \varepsilon \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \right) \\ &\stackrel{3.17}{=} g_{\rho\sigma} (\delta_\mu^\rho - \varepsilon \partial_\alpha \xi^\rho \delta_\mu^\alpha) (\delta_\nu^\sigma - \varepsilon \partial_\beta \xi^\sigma \delta_\nu^\beta) + o(\varepsilon^2) \\ &= g_{\rho\sigma} (\delta_\mu^\rho - \varepsilon \partial_\mu \xi^\rho) (\delta_\nu^\sigma - \varepsilon \partial_\nu \xi^\sigma) + o(\varepsilon^2) \\ &= (g_{\mu\sigma} - \varepsilon \partial_\mu \xi_\sigma) (\delta_\nu^\sigma - \varepsilon \partial_\nu \xi^\sigma) + o(\varepsilon^2) \\ &= g_{\mu\nu} - \varepsilon \partial_\nu \xi_\mu - \varepsilon \partial_\mu \xi_\nu + o(\varepsilon^2) \\ &= g_{\mu\nu} - 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} + o(\varepsilon^2) \\ &= \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} - 2\varepsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (3.16)$$

dove si è usata la relazione

$$\partial'_\mu x^\alpha = \partial'_\mu (x'^\alpha - \varepsilon \xi^\alpha) = \delta_\mu^\alpha + o(\varepsilon). \quad (3.17)$$

La metrica $g_{\mu\nu}$ definita dalla 3.1 trasforma quindi come

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon (h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,\nu)}) \quad (3.18)$$

dove si sono trascurati tutti i termini di ordine superiore al primo in ε . Si osservi che il tensore metrico è ancora nella forma espressa dall'equazione 3.1 da cui, essendo la metrica $\eta_{\mu\nu}$ invariante, si deduce facilmente che il tensore $h_{\mu\nu}$ trasforma come

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,\nu)}. \quad (3.19)$$

In analogia con l'elettromagnetismo, la 3.14 rappresenta quindi una trasformazione di gauge di $h_{\mu\nu}$.

Applicando ora l'equazione 3.19 al tensore di Riemann 3.7, si osserva che la trasformazione 3.14 lascia invariate le componenti del tensore

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2} \varepsilon [h'_{\mu\sigma,\nu\rho} + h'_{\nu\rho,\mu\sigma} - h'_{\mu\rho,\nu\sigma} - h'_{\nu\sigma,\mu\rho}] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon [(h_{\mu\sigma} - 2\xi_{(\mu,\sigma)})_{,\nu\rho} + (h_{\nu\rho} - 2\xi_{(\nu,\rho)})_{,\mu\sigma} - (h_{\mu\rho} - 2\xi_{(\mu,\rho)})_{,\nu\sigma} - (h_{\nu\sigma} - 2\xi_{(\nu,\sigma)})_{,\mu\rho}] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon [h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}] + \frac{1}{2} \varepsilon [-\xi_{\mu,\sigma\nu\rho} - \xi_{\sigma,\mu\nu\rho} - \xi_{\nu,\rho\mu\sigma} - \xi_{\rho,\nu\mu\sigma} + \\ &\quad + \xi_{\mu,\rho\nu\sigma} + \xi_{\rho,\mu\nu\sigma} + \xi_{\nu,\sigma\mu\rho} + \xi_{\sigma,\nu\mu\rho}] \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon [h_{\mu\sigma,\nu\rho} + h_{\nu\rho,\mu\sigma} - h_{\mu\rho,\nu\sigma} - h_{\nu\sigma,\mu\rho}] = R_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Il tensore di Riemann e le sue contrazioni sono dunque invarianti di *gauge* e di conseguenza anche il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$, essendo composto da contrazioni di $R_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Ritornando alle equazioni di campo, è possibile semplificare la loro scrittura definendo la nuova quantità

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.21)$$

Sostituendo l'equazione 3.21 nelle equazioni 3.8, 3.11 e 3.12, i tensori di Ricci e di Einstein e lo scalare di curvatura sono riscrivibili come

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\bar{h}^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + \bar{h}^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} \right), \quad (3.22)$$

$$R = \frac{1}{2}\varepsilon (2\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \square h), \quad (3.23)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon \left(\bar{h}^{\alpha}_{\mu,\nu\alpha} + \bar{h}^{\alpha}_{\nu,\mu\alpha} - \square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} \right). \quad (3.24)$$

L'ultima relazione suggerisce che le equazioni di campo gravitazionale nella teoria linearizzata possano essere ricondotte alle equazioni d'onda se si impone

$$\bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} = 0, \quad (3.25)$$

o in termini di $h_{\mu\nu}$, dall'equazione 3.21

$$h^{\mu}_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}h_{,\nu} = 0. \quad (3.26)$$

La condizione rappresentata dall'equazione 3.25 è chiamata *gauge di Lorenz* o *gauge armonica* e si può ottenere sfruttando la trasformazione infinitesima 3.14. In particolare, si applica la trasformazione di *gauge* espressa dall'equazione 3.19 alla definizione 3.21 di $\bar{h}_{\mu\nu}$ ottenendo

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\mu\nu} &= h'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h'^{\alpha}_{\alpha} \\ &= h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h^{\alpha}_{\alpha} - 2\xi^{\alpha}_{,\alpha}) \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\alpha}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

da cui

$$\bar{h}'_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,\nu)} + \eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\alpha}. \quad (3.28)$$

Alzando gli indici con $\eta^{\beta\mu}$ e derivando rispetto a x^{β} , dall'equazione 3.28 si ricava

$$\begin{aligned} \bar{h}'^{\beta}_{\nu,\beta} &= \bar{h}^{\beta}_{\nu,\beta} - \xi^{\beta}_{,\nu\beta} - \xi_{\nu,\beta} + \eta^{\beta\mu}\eta_{\mu\nu}\xi^{\alpha}_{,\alpha\beta} \\ &= \bar{h}^{\beta}_{\nu,\beta} - \xi^{\beta}_{,\nu\beta} - \square\xi_{\nu} + \delta_{\nu}^{\beta}\xi^{\alpha}_{,\alpha\beta} \\ &= \bar{h}^{\beta}_{\nu,\beta} - \xi^{\beta}_{,\nu\beta} - \square\xi_{\nu} + \xi^{\alpha}_{,\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

da cui, semplificando le ξ rinominando gli indici contratti dell'ultimo termine e sfruttando le proprietà di simmetria dell'operatore di derivazione, si ottiene

$$\bar{h}'^{\mu}_{\nu,\mu} = \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu} - \square\xi_{\nu}. \quad (3.30)$$

Essendo ora la funzione $\xi_{\nu}(x)$ una funzione arbitraria, essa può essere scelta in modo tale che valga

$$\bar{h}'^{\mu}_{\nu,\mu} = 0, \quad (3.31)$$

ovvero deve soddisfare la condizione

$$\square\xi_{\nu} = \bar{h}^{\mu}_{\nu,\mu}. \quad (3.32)$$

Tale condizione non rimuove del tutto la *gauge*, ma è possibile effettuare una ulteriore trasformazione tale che

$$\square \xi_\nu = 0, \quad (3.33)$$

lasciando inalterato il tensore $\bar{h}^\mu_{\nu,\mu}$ e preservando la *gauge* e riconducendo così l'equazione 3.32 alla 3.25. Infine, imponendo la *gauge* di Lorenz 3.31 al tensore di Einstein espresso dall'equazione 3.24 e rimuovendo gli apici del cambio di coordinate, le equazioni di campo gravitazionale assumono la forma di una equazione d'onda del tipo

$$\frac{1}{2}\varepsilon\square\bar{h}_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.34)$$

che nel vuoto si riduce a

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.35)$$

Considerando ora l'equazione 3.34, alzando gli indici e derivando ambo i termini rispetto x^μ si ottiene la seguente condizione sul tensore energia-impulso [21]

$$\frac{1}{2}\varepsilon\partial_\mu\partial_\alpha\partial^\alpha\bar{h}^{\mu\nu} = -8\pi\partial_\mu T^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

e, osservando che il termine di sinistra è nullo per la *gauge* di Lorenz 3.25, si ricava

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \quad (3.37)$$

che esprime la condizione di conservazione dell'energia e dell'impulso nello spazio-tempo di Minkowski. Non comparando alcuna derivata covariante nell'equazione 3.37, nella teoria linearizzata il campo gravitazionale non ha alcuna influenza sulla materia che produce il campo stesso. Ciò può portare a descrizioni del campo che si discostano considerevolmente da quelle esatte della teoria non lineare se il moto delle sorgenti del campo non corrisponde (a causa dell'influenza del loro stesso campo gravitazionale) a quello ipotizzato. Bisogna quindi essere cauti con le conclusioni che si possono trarre dal caso approssimativo qualora non fosse nota la corrispondente soluzione esatta. In conclusione, le proprietà dei campi gravitazionali che si possono ricavare dalla teoria linearizzata risultano affidabili solo se si ha una buona conoscenza del moto delle sorgenti e il campo gravitazionale da esse generato risulti (localmente) debole.

3.3 Soluzioni delle equazioni linearizzate nel vuoto

Considerando il caso nel vuoto e imponendo la *gauge* di Lorenz, le equazioni di campo gravitazionale linearizzate si riducono all'equazione 3.35. Le soluzioni di tale equazione differenziale sono ben note e corrispondono a onde piane monocromatiche

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.38)$$

dove $A_{\mu\nu}$ è un tensore simmetrico costante che descrive l'ampiezza dell'onda e k_α corrisponde al quadrivettore d'onda, le cui componenti sono costanti reali. Una soluzione fisica corrispondente a onde gravitazionali piane che si propagano nel vuoto può essere ottenuta prendendo la parte reale dell'equazione 3.38

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= \Re \left[A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(A_{\mu\nu}e^{ik_\alpha x^\alpha} + (A_{\mu\nu})^*e^{-ik_\alpha x^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

che si nota essere una combinazione lineare di due onde piane nella forma 3.38.

Il vettore d'onda k_α e il tensore $A_{\mu\nu}$ soddisfano le seguenti proprietà

$$k_\alpha k^\alpha = 0, \quad (3.40)$$

$$A_{\mu\nu}k^\nu = 0. \quad (3.41)$$

In particolare, l'equazione 3.40 esprime il fatto che il quadrivettore d'onda sia un vettore nullo e si ricava sostituendo l'equazione 3.38 nella 3.35. Tale proprietà comporta che l'onda gravitazionale si propaghi alla velocità della luce. L'equazione 3.41, invece, si ricava dalla *gauge* di Lorenz 3.25 e esprime il carattere trasversale delle onde piane monocromatiche.

Resta ora da determinare la struttura del tensore $A_{\mu\nu}$. Essendo esso simmetrico $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$, delle sedici componenti solo dieci sono indipendenti. Inoltre, affinché la *gauge* di Lorenz sia rispettata, deve valere la 3.41, che impone ulteriori quattro vincoli sul tensore $A_{\mu\nu}$ riducendo le componenti libere a sei. Considerando infine la *gauge* residua 3.33, è possibile ridurre le componenti indipendenti a due.

Si procede ora a ricavare formalmente quanto detto. Senza perdere di generalità, ci si pone in un sistema di riferimento in cui l'onda piana risulta propagarsi lungo la direzione dell'asse z . Il quadrivettore d'onda assume così la forma

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

con ω costante corrispondente alla frequenza dell'onda. Essa è legata alle componenti del vettore d'onda $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z) = (0, 0, k)$ secondo la relazione

$$\omega = k^0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k \quad (3.43)$$

Dall'equazione 3.41, sostituendo la 3.42, si ricava la condizione

$$A_{\mu 3} = A_{\mu 0}, \quad (3.44)$$

che assieme le condizioni di simmetria del tensore ampiezza, implica che le componenti indipendenti di $A_{\mu\nu}$ si riducano a sei e la matrice associata valga

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{00} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & A_{01} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{02} \\ A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{00} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Si può ora procedere ad applicare la trasformazione infinitesima del tensore $h_{\mu\nu}$ 3.19 per ottenere un'ulteriore semplificazione del tensore ampiezza $A_{\mu\nu}$. Perché la *gauge* di Lorenz sia preservata, deve essere soddisfatta la condizione 3.33. Una trasformazione che soddisfa tali condizioni è data da una funzione d'onda del tipo [21]

$$\xi_\mu = \epsilon_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}, \quad (3.46)$$

dove ϵ_μ è un quadrivettore le cui componenti sono costanti e possono essere scelte arbitrariamente. Sostituendo le equazioni 3.38 e 3.46 nella trasformazione infinitesima del tensore $\bar{h}_{\mu\nu}$ 3.28, semplificando i termini esponenziali, si ottiene che sotto il cambio di coordinate il tensore $A_{\mu\nu}$ trasforma come

$$A'_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} - i\epsilon_\mu k_\nu - i\epsilon_\nu k_\mu + i\eta_{\mu\nu} \epsilon_\alpha k^\alpha. \quad (3.47)$$

Sostituendo ora l'equazione 3.42 nella trasformazione 3.47, si ricavano le seguenti condizioni sul tensore ampiezza

$$\begin{aligned} A'_{00} &= A_{00} - ik(\epsilon_0 + \epsilon_3), & A'_{11} &= A_{11} - ik(\epsilon_0 - \epsilon_3), \\ A'_{01} &= A_{01} - ik\epsilon_1, & A'_{12} &= A_{12}, \\ A'_{02} &= A_{02} - ik\epsilon_2, & A'_{22} &= A_{22} - ik(\epsilon_0 - \epsilon_3). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Si può sfruttare ora l'arbitrarietà delle componenti del quadrivettore ϵ_μ per semplificare ulteriormente la struttura del tensore ampiezza richiedendo che valga [21]

$$A'_{00} = A'_{01} = A'_{02} = 0 \quad \text{e} \quad A'_{11} = -A'_{22}. \quad (3.49)$$

Le componenti di ϵ devono quindi valere

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= -i(2A_{00} + A_{11} + A_{22})/(4k), & \epsilon_1 &= -iA_{01}/k, \\ \epsilon_2 &= -iA_{02}/k, & \epsilon_3 &= -i(2A_{00} - A_{11} - A_{22})/(4k).\end{aligned}\quad (3.50)$$

Rimuovendo gli apici, la prima condizione dell'equazione 3.49 dice che solo le componenti A_{11} , A_{12} e A_{22} sono diverse da zero mentre dalla seconda condizione si evince che solo due di esse sono indipendenti. È possibile quindi riscrivere $A_{\mu\nu}$ nel seguente modo

$$A_{\mu\nu}^{TT} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

definita *Trasversal Traceless gauge* o per semplicità *TT gauge*, essendo la traccia di tale matrice nulla. Tornando infine al tensore $\bar{h}_{\mu\nu}$ espresso dall'equazione 3.38, imponendo la *TT gauge* e ricordando la definizione 3.21 si giunge alla relazione

$$\bar{h}^{TT} = h^{TT} = 0, \quad (3.52)$$

dove con l'apice *TT* si è indicato il fatto che ci si è posti in un sistema di riferimento in cui valga la *TT gauge*. Dall'equazione 3.52 si vede che le tracce di $\bar{h}_{\mu\nu}$ e $h_{\mu\nu}$ sono entrambe nulle e quindi, dalla definizione 3.21 di $\bar{h}_{\mu\nu}$, imposta la *TT gauge* si ottiene l'equivalenza tra le due onde piane $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}$

$$\bar{h}_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \xrightarrow{h^{TT}=0} \bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (3.53)$$

Analizzando l'equazione 3.51, si nota che è possibile definire due tensori di rango due corrispondenti alle due direzioni di polarizzazione lineare

$$\epsilon_{\mu\nu}^{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \epsilon_{\mu\nu}^{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

tali che

$$A_{\mu\nu}^{TT} = a\epsilon_{\mu\nu}^{xx} + b\epsilon_{\mu\nu}^{xy}. \quad (3.55)$$

In generale è quindi possibile scrivere il tensore di ampiezza nella *TT gauge* di un'onda che viaggia in direzione z come combinazione lineare dei tensori di polarizzazione sopra definiti. Da tale risultato segue che tutte le possibili polarizzazioni delle onde gravitazionali possono essere ottenute come composizione lineare di due polarizzazioni, con le relative ampiezze e fasi.

3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali

Si è visto che le onde gravitazionali, in approssimazione di campo debole, si propagano alla velocità della luce (in accordo con la definizione generale di onde gravitazionali), sono trasverse e hanno due gradi di polarizzazione. Si pone ora l'attenzione sui due stati di polarizzazione di tali onde. Considerando un sistema di coordinate tale che l'onda si propaghi nella direzione dell'asse z e per cui valga la *TT-gauge*, il tensore $h_{\mu\nu}$ che descrive la perturbazione della metrica dello spazio-tempo piatto risulta

$$h_{\mu\nu}^{TT}(t-z) = h_{xx}\epsilon_{\mu\nu}^{xx} + h_{xy}\epsilon_{\mu\nu}^{xy} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx} & h_{xy} & 0 \\ 0 & h_{xy} & -h_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.56)$$

le cui componenti h_{xx} e h_{xy} sono funzioni d'onda del tipo 3.39

$$\begin{aligned} h_{xx}(t-z) &= A_{11} \cos(k_\alpha x^\alpha + \varphi) = A_{11} \cos(kt - kz + \varphi), \\ h_{xy}(t-z) &= A_{12} \cos(k_\alpha x^\alpha + \phi) = A_{12} \cos(kt - kz + \phi), \end{aligned} \quad (3.57)$$

con ϕ e φ costanti di fase arbitrarie. L'elemento di linea dello spazio-tempo in approssimazione di campo debole associato alla metrica 3.1 nel sistema di coordinate considerato vale quindi

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - (1 - \varepsilon h_{xx}) dx^2 - (1 + \varepsilon h_{xx}) dy^2 + 2\varepsilon h_{xy} dx dy - dz^2. \quad (3.58)$$

È possibile considerare separatamente i due stati di polarizzazione e definire le h_{xx} -waves e le h_{xy} -waves, ponendo rispettivamente a zero i termini h_{xy} e h_{xx} nell'equazione 3.58. I corrispondenti elementi di linea valgono

$$ds^2 = dt^2 - (1 - \varepsilon h_{xx}) dx^2 - (1 + \varepsilon h_{xx}) dy^2 - dz^2, \quad (3.59)$$

$$ds^2 = dt^2 + 2\varepsilon h_{xy} dx dy - dz^2. \quad (3.60)$$

Ci si chiede ora cosa accade quando un'onda gravitazionale interagisce con una particella di prova inizialmente in quiete [21]. La quadrivelocità della particella vale

$$u^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

e seguirà una geodetica di equazione

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0, \quad (3.62)$$

dove con τ si è indicato il tempo proprio della particella. Dall'equazione 3.61, l'equazione della geodetica 3.62 si riduce a

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{00} = 0. \quad (3.63)$$

Sostituendo ora i valori del tensore $h_{\mu\nu}^{TT}$ nell'equazione 3.5 che descrive il simbolo di Christoffel nella teoria linearizzata, si ottiene che $\Gamma^\mu_{00} = 0$ e quindi

$$\frac{du^\mu}{d\tau} = 0, \quad (3.64)$$

ovvero una singola particella, se inizialmente in quiete, risulta in quiete anche dopo il passaggio di un'onda gravitazionale [21].

Per poter apprezzare l'effetto delle onde gravitazionali, è necessario considerare un insieme di particelle di prova e studiare l'accelerazione relativa tra di esse al passaggio dell'onda. Si consideri dunque il *campo relativistico mareale* definito come [5]

$$\mathcal{E}_{ij} = R_{i0j0}, \quad (3.65)$$

e che produce l'accelerazione relativa tra le particelle. Il termine di destra dell'equazione 3.65 si ottiene sostituendo i valori del tensore $h_{\mu\nu}^{TT}$ nel tensore di Riemann, che nella TT -gauge assume la forma

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon (h_{\mu\sigma, \nu\rho}^{TT} + h_{\nu\rho, \mu\sigma}^{TT} - h_{\mu\rho, \nu\sigma}^{TT} - h_{\nu\sigma, \mu\rho}^{TT}). \quad (3.66)$$

Osservando che le componenti h_{00}^{TT} , h_{i0}^{TT} e h_{0j}^{TT} sono nulle, si ottiene che l'unico termine diverso da zero del tensore R_{i0j0} corrisponde a $h_{ij,00}^{TT}$. L'equazione 3.65 si riduce quindi a

$$\mathcal{E}_{ij} = R_{i0j0} = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}, \quad (3.67)$$

dove con il doppio punto si è indicata la derivata seconda rispetto alla coordinata temporale. Considerando separatamente i due diversi stati di polarizzazione, è possibile riscrivere il tensore \mathcal{E}_{ij} nelle due componenti

$$\mathcal{E}_{xx} = -\mathcal{E}_{yy} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{xx}(t-z), \quad \mathcal{E}_{xy} = +\mathcal{E}_{yx} = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{yy}(t-z). \quad (3.68)$$

Resta ora da analizzare l'azione dell'onda su un sistema di particelle. Si consideri il caso ideale di una nube inizialmente in quiete e di forma sferica, composta da particelle di prova libere nello spazio. Si scelga come sistema di riferimento quello comovente riferito alla particella al centro della nube. In tale sistema, la posizione di una generica particella sarà individuata dal vettore spostamento ζ^j di componenti

$$\zeta^j = x^j + \delta x^j, \quad (3.69)$$

dove x^j è la coordinata spaziale della particella prima del passaggio dell'onda e δx^j è lo spostamento prodotto dall'onda. Inserendo l'elemento 3.69 nell'equazione della deviazione della geodetica [5]

$$\frac{d^2\zeta^j}{dt^2} = -R_{j0k0}\zeta^k, \quad (3.70)$$

si ottiene

$$\frac{d^2\delta x^j}{dt^2} = -R_{j0k0}x^k = -\mathcal{E}_{jk}x^k = \frac{1}{2}\ddot{h}_{jk}^{TT}x^k, \quad (3.71)$$

dove al membro di destra non si è tenuto conto dei termini δx^k , essendo trascurabili rispetto a x^k . L'equazione 3.71 descrive l'*accelerazione mareale dell'onda gravitazionale*, che muove avanti e indietro le particelle relativamente tra loro. Essa può essere integrata due volte ottenendo la relazione

$$\delta x^j = \frac{1}{2}h_{jk}^{TT}x^k, \quad (3.72)$$

che lega lo spostamento dovuto al passaggio dell'onda al termine perturbativo h_{jk}^{TT} e la posizione iniziale della particella.

Si consideri ora lo stato di polarizzazione descritto dal tensore $\epsilon_{\mu\nu}^{xx}$ e corrispondente ad una *h_{xx} -wave* ($h_{xy} = 0$). Sostituendo le componenti del tensore $h_{xx}\epsilon_{\mu\nu}^{xx}$ nell'equazione 3.72 si ricava

$$\delta x = \frac{1}{2}h_{xx}x, \quad \delta y = -\frac{1}{2}h_{xx}y, \quad \delta z = 0. \quad (3.73)$$

La terza condizione dell'equazione 3.73 descrive il carattere trasversale dell'onda: mentre il campo gravitazionale associato alla *h_{xx} -wave* oscilla all'interno della nube, essa resta indisturbata lungo la direzione z (direzione di propagazione dell'onda). Dalle prime due condizioni si ricava che nel piano trasversale la nube viene deformata in un'ellisse, allungata prima lungo l'asse x ($h_{xx} > 0$), poi lungo l'asse y ($h_{xx} < 0$), come riportato in figura 3.1. Essendo $\mathcal{E}_{xx} = -\mathcal{E}_{yy}$, l'ellisse viene compressa lungo un asse della stessa quantità con cui viene allungata lungo l'altro, ossia l'area dell'ellisse è preservata durante le oscillazioni. Lo stato di polarizzazione associato alle *h_{xx} -waves* è definito *polarizzazione +*.

Considerazioni analoghe per le *h_{xy} -waves* ($h_{xx} = 0$) portano alle relazioni

$$\delta x = \frac{1}{2}h_{xy}y, \quad \delta y = \frac{1}{2}h_{xy}x, \quad \delta z = 0. \quad (3.74)$$

Come per il caso precedente, la nube resta indisturbata lungo la direzione z , confermando il carattere trasversale dell'onda. Nel piano trasversale, la nube viene deformata in un'ellisse in modo del tutto analogo al precedente, ma lungo assi ruotati di 45° rispetto a quelli delle *h_{xy} -waves*, come riportato in figura 3.1. Lo stato di polarizzazione associato alle *h_{xy} -waves* è definito *polarizzazione \times* .

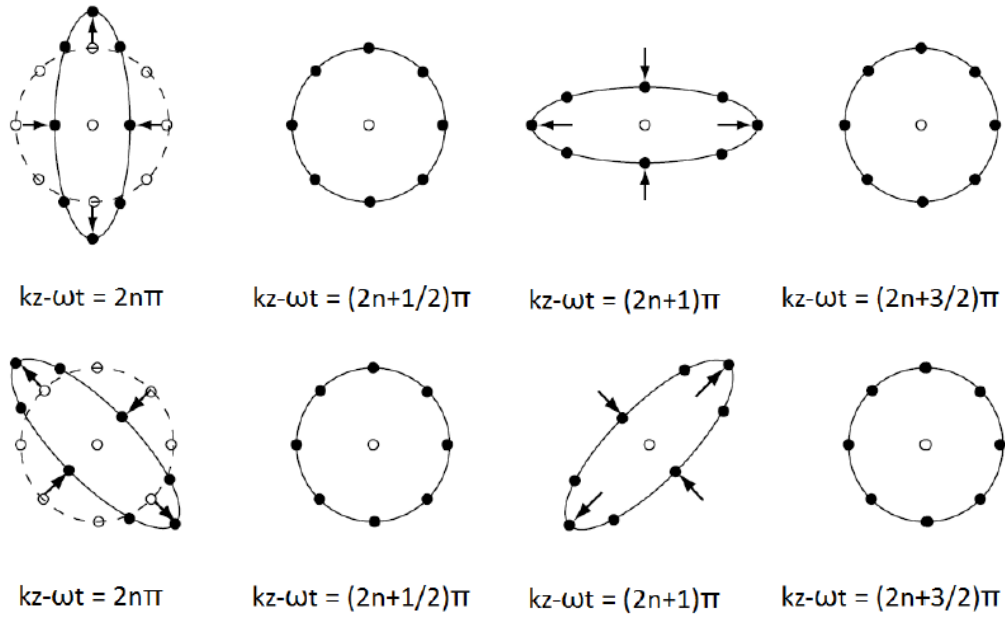


Figura 3.1: Sequenza temporale che mostra l'effetto trasversale di un'onda gravitazionale piana lineare con polarizzazione + (sopra) e con polarizzazione \times (sotto) su un anello circolare di particelle di prova. [da [21], figure 18.2 e 18.3]

Capitolo 4

Una Soluzione Esatta delle Equazioni di Einstein: Onde Gravitazionali Piane

La teoria della relatività generale di Einstein descrive il campo gravitazionale attraverso un set di equazioni differenziali che legano la curvatura dello spazio-tempo alla distribuzione di energia e materia rappresentata dal tensore energia-impulso, sorgente del campo stesso. Come per qualsiasi teoria fisica, anche per la relatività generale bisogna innanzitutto risolvere il problema di analizzare l'insieme di tali equazioni differenziali e trovare il maggior numero possibile di soluzioni esatte, o una soluzione generale il più completa possibile. Successivamente, si devono interpretare sia a livello matematico che fisico le soluzioni ottenute.

Nel corso degli anni si è trovato un gran numero di soluzioni esatte, ma solo poche di esse descrivono problemi fisici reali. Inoltre, sono state tutte ottenute imponendo delle restrizioni alle equazioni di Einstein [10], come per esempio supporre un elevato grado di simmetria della metrica associata allo spazio-tempo (cfr. §4.1). Nonostante ciò, le soluzioni esatte hanno ricoperto ruoli molto importanti nella discussione di diversi problemi fisici. Per esempio, le soluzioni di Schwarzschild e Kerr hanno permesso di descrivere i buchi neri, quelle di Friedmann hanno fornito un modello cosmologico che descrive un universo isotropo e omogeneo e quelle d'onda gravitazionale piana hanno risolto alcune delle controversie sull'esistenza della radiazione gravitazionale (cfr. §1). Un altro importante campo in cui le soluzioni esatte si dimostrano di fondamentale importanza è quello dei metodi perturbativi o numerici nella relatività generale. A causa della non linearità delle equazioni di Einstein, tali metodi approssimati possono portare a risultati che si discostano dal caso fisico reale e il confronto con le corrispondenti soluzioni esatte si dimostra fondamentale [10].

Nel seguente capitolo si analizzerà una particolare soluzione esatta alle equazioni di Einstein nel vuoto, corrispondente a onde gravitazionali piane. Dopo una breve digressione sui vettori di Killing, si analizzeranno alcune delle possibili assunzioni di simmetria della metrica per trovare soluzioni esatte delle equazioni di campo gravitazionale. In particolare, la successiva trattazione si concentrerà sul caso a simmetria piana, analizzando una soluzione esatta di onde gravitazionali piane per le equazioni di Einstein nel vuoto nella teoria completa, perseguendo l'obiettivo della tesi. Infine si riporteranno due casi particolari approssimati di tali soluzioni esatte, corrispondenti alle cosiddette *sandwich waves* e alle onde gravitazionali piane impulsive.

4.1 Onde gravitazionali e simmetrie

A causa della complessità delle equazioni di campo di Einstein, perché esse possano essere risolte in modo esatto è necessario assumere che la metrica abbia un elevato grado di simmetria, così da semplificarne la struttura e trovare una soluzione esatta. Si lavora quindi con dei casi altamente idealizzati e spesso irrealistici, che descrivono proprietà locali del campo gravitazionale e possono anche portare a soluzioni prive di significato fisico. Nonostante ciò, interpretando determinate soluzioni

esatte come il limite asintotico di casi fisici reali, si è riusciti ad indagare fenomeni complessi che derivano dalla non linearità delle equazioni di campo di Einstein, quali, per esempio, le occorrenze di singolarità o le interazioni non lineari tra onde gravitazionali. Per poter procedere con la presentazione delle possibili simmetrie che si possono assumere per semplificare la forma della metrica, è necessaria una breve digressione sui vettori di Killing, strettamente legati al concetto di simmetria negli spazi curvi.

4.1.1 Simmetrie negli spazi di Riemann e vettori di Killing

La nozione di simmetria negli spazi curvi di Riemann può essere ricavata a partire dal caso noto delle simmetrie nello spazio piatto di Minkowski. In tale spazio, il concetto di simmetria di un sistema è espresso dal fatto che, sotto una traslazione lungo certe linee o su certe superfici, le variabili fisiche non cambiano. Tale ragionamento può essere esteso agli spazi riemanniani e definire così una simmetria dello spazio come una varietà *s-dimensionale*, con $1 \leq s \leq 4$, di punti fisicamente equivalenti, ovvero tali che sotto un'operazione di simmetria, cioè un movimento che trasforma questi punti l'uno nell'altro, la metrica non cambia.

Bisogna ora formalizzare quanto detto qualitativamente a livello matematico. Si consideri una trasformazione infinitesima

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x) \quad \text{con} \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad (4.1)$$

dove ε è una quantità adimensionale arbitrariamente piccola e X^μ è un campo vettoriale. Applicando la legge di trasformazione alla metrica

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(\tilde{x}(x)), \quad (4.2)$$

imponendo che essa resti invariata e trascurando i termini al secondo ordine in ε , si giunge all'equazione [38]

$$\mathcal{L}_X g_{\mu\nu} = \nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = 0, \quad (4.3)$$

dove con \mathcal{L}_X si è indicata la derivata di Lie rispetto a X e si sono sostituite alle derivate parziali le derivate covarianti ∇_μ e ∇_ν . Queste equazioni sono chiamate *equazioni di Killing* e ogni loro soluzione è detta *campo vettoriale di Killing* X^μ . I *vettori di Killing* appartenenti a tale spazio caratterizzano una particolare proprietà di simmetria dello spazio di Riemann e sono i generatori della isometria infinitesima 4.1.

La congruenza delle *world-line* ¹ associata al *campo vettoriale di Killing*, cioè la famiglia di quelle curve che collegano punti che possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante operazioni di simmetria, si ottiene integrando le equazioni del tipo

$$\frac{dx^\mu}{du} = X^\mu(x), \quad (4.4)$$

dove u è un parametro associato alla determinata curva. Il campo vettoriale di Killing è dunque tangente in ogni punto alla congruenza delle *world-line* (vedi figura 4.1).

¹La congruenza delle *world-line* è una *congruenza di curve*. Si definisce *congruenza di curve* una famiglia di curve che copre una varietà in modo tale che attraverso ogni punto della regione considerata passi esattamente una sola curva della famiglia.

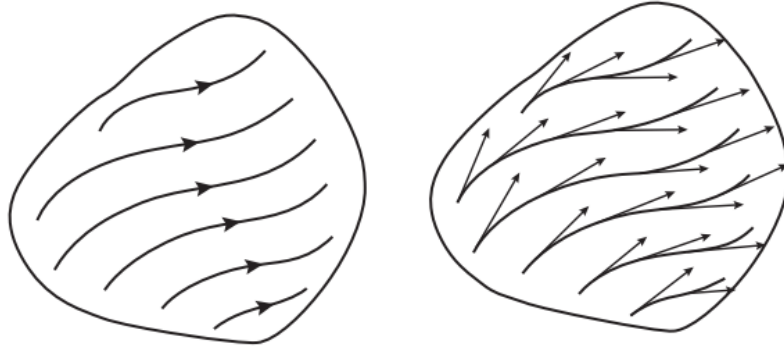


Figura 4.1: Congruenza di curve su una varietà e campo vettoriale tangente ad esse. [da [38], figura 6.2]

4.1.2 Simmetrie dello spazio-tempo per soluzioni di campo esatte

Il caso più semplice e intuitivo di simmetria che si potrebbe considerare è quello di una metrica a simmetria sferica. Le metriche a simmetria sferica possiedono tre vettori di Killing di tipo spazio indipendenti che generano le rotazioni attorno agli assi e a cui è associato uno spazio 2-dimensionale. Tuttavia, per campi a simmetria sferica vale il seguente teorema, enunciato dal matematico G. D. Birkhoff (1923) [38]

Teorema. (*Teorema di Birkhoff*) ogni soluzione a simmetria sferica delle equazioni di campo di Einstein nel vuoto è stazionaria.

Segue che, per uno spazio-tempo a simmetria sferica, le soluzioni risultano essere necessariamente statiche al di fuori della regione della sorgente. Ciò implica che non si possa produrre un'onda gravitazionale.

Un'altra possibile assunzione di simmetria è che esistano due vettori di Killing di tipo spazio indipendenti V e W , a cui è associato uno spazio 2-dimensionale [38]. Come visto nel paragrafo 4.1.1, le orbite dei due vettori di Killing V e W formano una superficie e quindi essi commuteranno

$$[V, W] = 0. \quad (4.5)$$

Si può infatti dimostrare che la condizione $[V, W] = 0$ è condizione sufficiente e necessaria perché il campo vettoriale formi una superficie. Sotto tali assunzioni di simmetria, è possibile trovare due differenti esempi di soluzioni esatte delle equazioni di campo nel vuoto, a seconda della topologia delle curve integrali associate ai vettori di Killing. Il primo caso, dove le curve integrali di V e W hanno entrambi topologia \mathbb{R} , corrisponde a onde gravitazionali a simmetria piana. Il secondo caso invece, in cui le curve integrali di V e W hanno rispettivamente topologia S^1 (spazio topologico che descrive un cerchio unidimensionale chiuso) e \mathbb{R} , corrisponde a onde gravitazionali a simmetria cilindrica, dette anche per motivi storici *onde di Einstein-Rosen* (cfr. §1). Per tali onde, è possibile associare al vettore V di topologia S^1 una funzione 2π -periodica in ϕ e definire il vettore di Killing $V \stackrel{*}{=} \partial/\partial\phi$ ², ovvero V è un generatore delle rotazioni. Analogamente, si può definire la componente W con topologia \mathbb{R} come $W \stackrel{*}{=} \partial/\partial z$, ovvero il generatore delle traslazioni lungo l'asse di simmetria. In questa tesi non verrà trattato il caso a simmetria cilindrica, ma si analizzerà solamente una soluzione esatta per il caso di una metrica dello spazio-tempo a simmetria piana.

4.2 Onde piane come soluzioni esatte delle equazioni di Einstein

Soluzioni esatte nella forma di onde piane possono essere ricavate a partire dalla teoria completa delle equazioni di Einstein seguendo diversi approcci. Una strada possibile è quella seguita da Hans Stephani [33], partendo dalla definizione di *pp-waves* (*plane-fronted waves with parallel rays*) e imponendo le condizioni

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad k_\mu k^\mu = 0, \quad k_{\mu;\nu} = 0. \quad (4.6)$$

²Con il simbolo $\stackrel{*}{=}$ si indica che l'uguaglianza è valida solo in un determinato sistema di coordinate.

Le prime due equazioni corrispondono alle condizioni di equazioni di campo nel vuoto e vettore d'onda nullo. La terza invece generalizza agli spazi-tempi curvi la proprietà delle onde piane nello spazio-tempo piatto di possedere raggi paralleli, a cui è associato un quadrivettore nullo k^μ . A partire da tali assunzioni, è possibile ricavare la metrica dello spazio-tempo corrispondente alla classe di soluzioni esatte corrispondente alle cosiddette *pp-waves* (*plane-fronted waves with parallel rays*), scoperte per la prima volta da Brinkmann [9] nel 1923. Un altro possibile approccio è quello seguito da Ray d'Inverno [38], che tenta di generalizzare i risultati ottenuti dalla teoria linearizzata in approssimazione di campo debole alla teoria completa. Nella successiva trattazione verrà analizzato solamente quest'ultimo metodo.

Nel paragrafo 4.1.2 si sono discusse diverse possibili simmetrie della metrica e in particolare si è visto che, assumendo l'esistenza di due vettori di Killing di tipo spazio e indipendenti con topologia \mathbb{R} , la metrica è caratterizzata da una simmetria piana. Ci si chiede dunque se le soluzioni di onde gravitazionali piane ottenute nel capitolo 3 possano essere generalizzate alle equazioni di campo non lineari e fornire una soluzione esatta delle equazioni di Einstein. Assumendo che l'onda si propaghi nella direzione dell'asse z , i vettori di Killing possono essere associati alle traslazioni lungo gli assi x e y , ovvero $V \doteq \partial/\partial x$ e $W \doteq \partial/\partial y$. Le traslazioni nel piano xy lasceranno dunque invariata la metrica dello spazio-tempo.

Per cominciare, si consideri l'elemento di linea ricavato nel caso lineare per le h_{xx} -waves che si propagano nella direzione z con verso positivo, corrispondente all'equazione 3.59, e si introducano due nuove coordinate

$$u = t - z \quad \text{e} \quad v = t + z, \quad (4.7)$$

di modo che la nuova base (u, v, x, y) rappresenti un sistema di coordinate del cono luce. Poiché x e y sono di tipo spazio, u e v formano una coppia di coordinate nulle, ovvero, lungo le direzioni corrispondenti a queste coordinate, l'elemento di linea è nullo. Infatti, differenziando l'equazione 4.7

$$du = dt - dz \quad \text{e} \quad dv = dt + dz, \quad (4.8)$$

sostituendo nell'equazione 3.59 e ponendo $dx = 0$ e $dy = 0$, si ottiene che

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 = dudv. \quad (4.9)$$

Di conseguenza, muovendosi lungo la direzione u , si ha $dv = 0$ e quindi $ds^2 = 0$. Viceversa, muovendosi nella direzione v , si ha $du = 0$ e quindi $ds^2 = 0$. Effettuando ora il cambio di coordinate

$$(t, x, y, z) \quad \rightarrow \quad (u, v, x, y), \quad (4.10)$$

sostituendo l'equazione 4.9 nella 3.59, si ricava che l'elemento di linea di una generica h_{xx} -wave vale

$$ds^2 = dudv - f^2(u)dx^2 - g^2(u)dy^2, \quad (4.11)$$

dove si sono definite le funzioni $f(u)$ e $g(u)$ come

$$f^2(u) = 1 - \varepsilon h_{xx}(u), \quad g^2(u) = 1 + \varepsilon h_{xx}(u). \quad (4.12)$$

Le funzioni f e g sono elevate al quadrato per garantire la corretta segnatura della metrica³, che nel nuovo sistema di coordinate assume la forma

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^2(u) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/f^2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/g^2(u) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

³Per il caso lineare, la questione non si poneva. Essendo $\varepsilon \ll 1$, la corretta segnatura era automaticamente garantita.

La metrica risulta quindi dipendere solamente da u ed è indipendente dalle altre coordinate. Calcolando gli autovalori di $g_{\mu\nu}$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f^2(u) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g^2(u) - \lambda \end{pmatrix} = (f^2 + \lambda)(g^2 + \lambda)(\lambda^2 - 1) = 0, \quad (4.14)$$

si ottiene $\lambda = \{\pm 1, -f^2(u), -g^2(u)\}$ e quindi la segnatura $(1, 3)$ è garantita.

Scelta l'equazione 4.11 come ansatz e sostituiti i valori della metrica 4.13 nelle equazioni di campo gravitazionale non lineari, resta ora da verificare se è possibile risolvere le equazioni di Einstein e trovare una soluzione esatta nella forma di onde piane. Per cominciare si calcolano i valori assunti dal simbolo di Christoffel. Si nota che gli unici valori non nulli della metrica sono g^{01} , g^{10} , g^{22} e g^{33} . In virtù del fatto che le uniche componenti della metrica che dipendono da u sono g_{22} e g_{33} , le componenti del simbolo di Christoffel in termini della metrica valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma} g_{\sigma\rho,\nu} &\rightarrow g^{\mu\sigma} g_{\sigma\rho,0} = g^{22} g_{2\rho,0} + g^{33} g_{3\rho,0} \\ &\rightarrow \begin{cases} 2\dot{f}/f & \text{per } \rho = 2, \\ 2\dot{g}/g & \text{per } \rho = 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu,\rho} &\rightarrow g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu,0} = g^{22} g_{2\nu,0} + g^{33} g_{3\nu,0} \\ &\rightarrow \begin{cases} 2\dot{f}/f & \text{per } \nu = 2, \\ 2\dot{g}/g & \text{per } \nu = 3, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$g^{\mu\sigma} g_{\nu\rho,\sigma} = g^{\mu 0} g_{\nu\rho,0} \rightarrow g^{10} g_{\nu\rho,0} = \begin{cases} -4f\dot{f} & \text{per } \nu, \rho = 2, \\ -4g\dot{g} & \text{per } \nu, \rho = 3, \end{cases} \quad (4.17)$$

dove con il punto si è indicata la derivata rispetto a u . Sostituendo le equazioni 4.15, 4.16 e 4.17 nella definizione del simbolo di Christoffel, si osserva dunque che le uniche componenti non nulle sono

$$\Gamma^1_{22} = 2f\dot{f}, \quad \Gamma^1_{33} = 2g\dot{g}, \quad \Gamma^2_{02} = \dot{f}/f \quad \text{e} \quad \Gamma^3_{03} = \dot{g}/g. \quad (4.18)$$

Sostituendo i risultati ottenuti nella definizione del tensore di Riemann, si ottiene che esso ha solamente due componenti indipendenti e valgono rispettivamente

$$R_{0202} = R_{2020} = f\ddot{f} \quad \text{e} \quad R_{0303} = R_{3030} = g\ddot{g}, \quad (4.19)$$

dove si sono usate le proprietà di simmetria del tensore di Riemann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (4.20)$$

Dall'equazione 4.19, segue che il tensore di Ricci vale

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu} = g^{22} R_{2\mu 2\nu} + g^{33} R_{3\mu 3\nu}, \quad (4.21)$$

e di conseguenza l'unica componente diversa da zero è

$$R_{00} = g^{22} R_{2020} + g^{33} R_{3030} = -\frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\ddot{g}}{g}. \quad (4.22)$$

Lo scalare di Ricci risulta invece essere nullo

$$R = g^{00} R_{00} = 0. \quad (4.23)$$

Infine, l'unica componente diversa da zero del tensore di Einstein è

$$G_{00} = R_{00} = -\frac{\ddot{f}}{f} - \frac{\ddot{g}}{g}, \quad (4.24)$$

che sostituita nelle equazioni di campo gravitazionale nel vuoto impone la seguente condizione sulle funzioni $f(u)$ e $g(u)$

$$\frac{\ddot{f}}{f} + \frac{\ddot{g}}{g} = 0. \quad (4.25)$$

Si noti che l'equazione 4.25 comporta che sia il tensore di Einstein sia quello di Ricci siano nulli, in accordo con l'assunzione di spazio vuoto, dove le equazioni di campo si riducono a $R_{\mu\nu} = 0$. Si definisca ora una nuova generica funzione $h(u)$ tale che

$$h(u) = \frac{\ddot{f}}{f}. \quad (4.26)$$

Perché l'equazione di campo 4.25 sia soddisfatta deve valere

$$\frac{\ddot{g}}{g} = -h(u). \quad (4.27)$$

Integrando le equazioni 4.26 e 4.27 si possono ottenere f e g in funzione di h , a meno di una costante di integrazione. Si ha quindi che, qualunque sia la funzione arbitraria $h(u)$, essa fornirà una soluzione delle equazioni nel vuoto. Queste soluzioni esatte sono chiamate onde gravitazionali piane con polarizzazione lineare e si propagano nella direzione z . Esse hanno valore generale, astratte da qualsiasi sorgente.

L'elemento di linea 4.11 è stato ricavato per la prima volta da Rosen (1937) [29] e può essere generalizzato alla forma

$$ds^2 = \ell dudv - f^2 dx^2 - g^2 dy^2, \quad (4.28)$$

dove ℓ , f e g sono funzioni in u e v . Tale forma permette di considerare onde che si propagano lungo z in entrambe le direzioni.

L'elemento di linea 4.11 può essere riscritto in modo da esplicitarne la dipendenza dalla funzione arbitraria $h(u)$ effettuando il cambio di coordinate

$$U = u, \quad V = v + x^2 f \dot{f} + y^2 g \dot{g}, \quad X = fx \quad \text{e} \quad Y = gy. \quad (4.29)$$

Differenziando l'equazione 4.29, si ottiene

$$\begin{aligned} dU &= du, \\ dV &= dv + (x^2 f \ddot{f} + y^2 g \ddot{g} + x^2 (\dot{f})^2 + y^2 (\dot{g})^2) du + 2x f \dot{f} dx + 2y g \dot{g} dy, \\ dX &= f dx + x \dot{f} du, \\ dY &= g dy + y \dot{g} du. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Invertendo le relazioni ed esplicitando i termini dv , dx e dy , si ha

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dX - x \dot{f} dU}{f} = \frac{dX - (X/f) \dot{f} dU}{f}, \\ dy &= \frac{dY - y \dot{g} dU}{g} = \frac{dY - (Y/g) \dot{g} dU}{g}, \\ dv &= dV - (x^2 f \ddot{f} + y^2 g \ddot{g} + x^2 (\dot{f})^2 + y^2 (\dot{g})^2) dU - 2x f \dot{f} dx - 2y g \dot{g} dy. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Segue che

$$\begin{aligned} f^2 dx^2 &= dX^2 + (\dot{f}/f)^2 X^2 dU^2 - 2(\dot{f}/f) X dX dU, \\ g^2 dy^2 &= dY^2 + (\dot{g}/g)^2 Y^2 dU^2 - 2(\dot{g}/g) Y dY dU, \\ dudv &= dV dU - A dU^2 - B dU, \end{aligned} \quad (4.32)$$

dove

$$\begin{aligned} A &= X^2 (\ddot{f}/f) + Y^2 (\ddot{g}/g) + X^2 (\dot{f}/f)^2 + Y^2 (\dot{g}/g)^2 \\ &= X^2 h(U) - Y^2 h(U) + X^2 (\dot{f}/f) + Y^2 (\dot{g}/g), \\ B &= 2X (\dot{f}/f) dX - 2X^2 (\ddot{f}/f) dU + 2Y g \dot{g}/f dY - 2Y^2 (\dot{g}/g) dU. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Sostituendo infine nella metrica 4.11 si ricava

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dudv - f^2 dx^2 - g^2 dy^2 \\
 &= dVdU - \left[X^2 h(U) - Y^2 h(U) + X^2 (\dot{f}/f) + Y^2 (\dot{g}/g) \right] dU^2 + \\
 &\quad - \left[2X (\dot{f}/f) dX - 2X^2 (\dot{f}/f) dU + 2Y g \dot{g}/f dY - 2Y^2 (\dot{g}/g) dU \right] dU + \\
 &\quad - dX^2 + (\dot{f}/f)^2 X^2 dU^2 - 2(\dot{f}/f) X dX dU - dY^2 + (\dot{g}/g)^2 Y^2 dU^2 - 2(\dot{g}/g) Y dY dU \\
 &= dUdV - h(U)(X^2 - Y^2) dU^2 - dX^2 - dY^2.
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Si è così ottenuto l'elemento di linea

$$ds^2 = h(u)(Y^2 - X^2) dU^2 + dUdV - dX^2 - dY^2, \tag{4.35}$$

detto anche *elemento di linea nella forma di Brinkmann* [8] e dove la dipendenza dalla funzione arbitraria $h(u)$ ⁴ è esplicitata. Si può dimostrare che tale funzione rappresenta l'ampiezza dell'onda gravitazionale.

Sebbene tali soluzioni siano estremamente idealizzate e prive di valore fisico, essendo i fronti d'onda piani infiniti in estensione, esse possono descrivere alcune proprietà delle onde gravitazionali reali prodotte da sorgenti molto lontane. In particolare, esse permettono di studiare il fenomeno di interferenza non lineare delle onde gravitazionali. A differenza della teoria elettromagnetica, dove la linearità della teoria implica che le onde elettromagnetiche si attraversino senza alterarsi, in generale non esiste un principio di sovrapposizione nella relatività generale a causa della non linearità delle equazioni di campo. Nel caso in esame, tuttavia, si può vedere dall'equazione 4.35 che sussiste un principio di sovrapposizione limitato. In particolare, se si considerano due onde piane che si muovono nella stessa direzione, è possibile sovrapporle semplicemente sommando le loro corrispondenti funzioni $h(u)$ e non si assiste dunque ad alcun processo di interazione non lineare tra le due onde gravitazionali. Per mostrare fenomeni di *scattering* è necessario considerare due onde che si muovono in direzioni diverse. In questo caso, date due onde polarizzate linearmente che collidono con un certo angolo, dalla relatività speciale si sa che è sempre possibile trovare una classe di osservatori per i quali la collisione avviene frontalmente. Infatti, considerati due sistemi di riferimento S e \tilde{S} che si muovono a velocità relativa v , dalla formula dell'aberrazione

$$\cos(\tilde{\theta}) = \frac{\cos(\theta) - v/c}{1 - (v/c) \cos(\theta)}, \tag{4.36}$$

dove θ e $\tilde{\theta}$ sono rispettivamente gli angoli del vettore d'onda con la direzione del moto in S e \tilde{S} , si ricava che affinché $\tilde{\theta} = \pi/2$ basta imporre $v = c \cos(\theta)$. Porsi in un tale sistema di riferimento in cui la collisione è frontale permette di semplificare notevolmente l'analisi del fenomeno fisico.

4.3 Sandwich waves e onde gravitazionali piane impulsive

In questa sezione si riportano due casi approssimati di una soluzione esatta di onda gravitazionale piana, corrispondenti alle cosiddette *sandwich waves* e alle onde gravitazionali piane impulsive. Entrambi i modelli hanno ricoperto un importante ruolo nello studio delle onde gravitazionali all'interno della teoria della relatività generale. Le prime sono state definite nel 1959 da Bondi, Pirani e Robinson [16], i quali, studiando l'effetto del loro passaggio su un sistema di particelle di prova, dimostrarono che le onde gravitazionali trasportano energia (cfr. §1). Le seconde, invece, hanno permesso a Khan e Penrose (1971) [23] di fornire una delle prime soluzioni esatte delle equazioni di Einstein che descrivono lo *scattering* tra onde gravitazionali: partendo dalla metrica 4.28, essi hanno analizzato la collisione e la successiva interazione di due onde gravitazionali piane impulsive, evidenziando gli effetti non lineari previsti dalla relatività generale. A seguito di questo lavoro pionieristico, sono state ottenute molte altre soluzioni esatte relative al fenomeno di *scattering*, ma presentavano quasi tutte sostanzialmente lo stesso carattere della soluzione originale di Khan e Penrose.

⁴Si noti che dall'equazione 4.29 si ha che $u = U$ ed è quindi indifferente utilizzare il carattere maiuscolo o minuscolo per indicare tale coordinata. Per comodità, l'argomento delle funzioni h , f e g verrà sempre indicato con il carattere minuscolo.

4.3.1 Sandwich Waves

Le *sandwich waves* [16] sono un particolare tipo di onde gravitazionali piane per cui la funzione $h(u)$ che compare nell'equazione 4.35 è non nulla solo su un intervallo finito di valori di u . Un esempio di *sandwich waves* può essere costruito assumendo che la funzione $h(u)$ sia descritta da una funzione a doppio gradino del tipo [37]

$$h(u) = \Pi(u) = \begin{cases} 0 & u < 0 \quad \text{e} \quad u > a^2 \\ a^{-2} & 0 \leq u \leq a^2, \end{cases} \quad (4.37)$$

dove a è una costante. Le corrispondenti funzioni f e g dell'elemento di linea nella forma di Rosen [1] 4.11 tali che $\ddot{f}/f = -\ddot{g}/g = h(u)$ sono

$$f(u) = \begin{cases} 1 & u < 0, \\ \cos(u/a) & 0 \leq u \leq a^2, \\ -u \sin a/a + \cos a + a \sin a & u > a^2, \end{cases} \quad (4.38)$$

$$g(u) = \begin{cases} 1 & u < 0, \\ \cosh(u/a) & 0 \leq u \leq a^2, \\ u \sinh a/a + \cosh a - a \sinh a & u > a^2. \end{cases} \quad (4.39)$$

La funzione $h(u)$ così definita soddisfa l'equazione 4.25 e rappresenta quindi, per quanto discusso nel paragrafo 4.2, un'onda gravitazionale piana. L'equazione 4.37 è non nulla solamente sull'intervallo limitato $I(u) = [0, a^2]$ e l'elemento di linea nella forma di Brinkmann [8] 4.35 assume la forma

$$ds^2 = \Pi(u)(Y^2 - X^2)dU^2 + dUdV - dX^2 - dY^2, \quad (4.40)$$

che per $u \notin I(u)$ si riduce all'elemento di linea dello spazio-tempo di Minkowski con due coordinate nulle

$$ds^2 = dUdV - dX^2 - dY^2. \quad (4.41)$$

Facendo riferimento alla figura 4.2, lo spazio-tempo risulta così suddiviso in tre regioni:

- una regione II detta *wave-zone* in cui lo spazio-tempo è curvo, compresa tra le due ipersuperfici nulle e piane $u = 0$ e $u = a^2$;
- due regioni I e III piatte, corrispondenti rispettivamente alla regione prima e dopo il passaggio dell'onda.

Un osservatore che si muove lungo una geodetica risentirà del passaggio dell'onda per un periodo finito di tempo, quando si sposta dalla regione I attraverso la regione II fino a giungere nella regione III. Le particelle di prova investite dall'onda saranno accelerate trasversalmente alla direzione di propagazione dell'onda, similmente a quanto discusso precedentemente per il caso delle h_{xx} -waves.

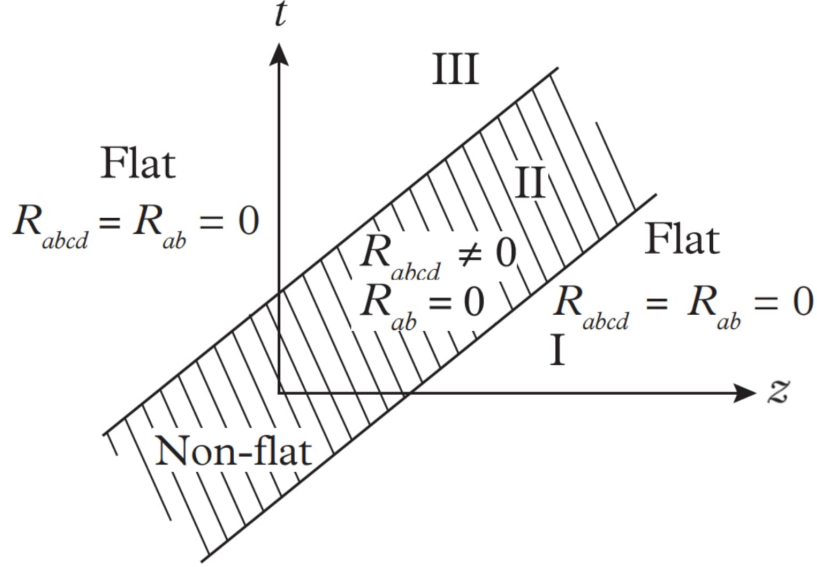


Figura 4.2: Rappresentazione grafica nello spazio-tempo di una *sandwich wave*. Sono state omesse due dimensioni spaziali. L'onda suddivide lo spazio-tempo in tre regioni, di cui quella compresa tra le due ipersuperfici associate ai fronti d'onda risulta essere non piatta. [da [38], figura 22.3]

4.3.2 Onde Gravitazionali Impulsive

A partire dalle *sandwich waves*, è possibile definire le *onde gravitazionali impulsive* (o *onda d'urto*) come il limite di una *sandwich wave* per a che tende a zero, ovvero la funzione $h(u) = \Pi(u)$ tende alla delta di Dirac. Per costruire un'onda gravitazionale piana impulsiva, si assume che le funzioni f e g che compaiono nell'elemento di linea di Rosen dell'equazione 4.11 siano nella forma

$$f(u) = 1 + u\theta(u), \quad g(u) = 1 - u\theta(u), \quad (4.42)$$

dove $\theta(u)$ è la funzione a gradino di Heaviside

$$\theta(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 0, \\ 1 & \text{se } u > 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Derivando due volte l'equazione 4.42 rispetto a u si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{f}(u) &= \theta(u) + u\delta(u) = \theta(u), & \ddot{f}(u) &= \delta(u), \\ \dot{g}(u) &= -\theta(u) - u\delta(u) = -\theta(u), & \ddot{g}(u) &= -\delta(u), \end{aligned} \quad (4.44)$$

dove si sono usate le seguenti relazioni per la funzione di Heaviside e la delta di Dirac

$$\dot{\theta}(u) = \delta(u) \quad \text{e} \quad f(u)\delta(u) = f(0)\delta(u). \quad (4.45)$$

Dalle equazioni 4.44 si ricava che i rapporti tra le derivate seconde e le rispettive funzioni valgono

$$\begin{aligned} \ddot{f}/f &= \frac{\delta(u)}{1 + \theta(u)} = \delta(u), \\ \ddot{g}/g &= \frac{-\delta(u)}{1 - \theta(u)} = -\delta(u), \end{aligned} \quad (4.46)$$

e si vede che f e g soddisfano la relazione $\ddot{f}/f = h(u) = -\ddot{g}/g$ e pertanto sono una soluzione dell'equazione 4.25 e la $h(u)$ corrisponde effettivamente alla delta di Dirac. Per quanto discusso nel paragrafo 4.2, $h(u) = \delta(u)$ è dunque una soluzione delle equazioni di campo gravitazionale rappresentata da

onde piane polarizzate linearmente. Sostituendo le equazioni 4.44 e 4.46 nell'equazione 4.19, si ottiene che le uniche componenti indipendenti e diverse da zero del tensore di Riemann sono

$$\begin{aligned} R_{0202} &= f\ddot{f} = [1 + u\theta(u)]\delta(u) = \delta(u), \\ R_{0303} &= g\ddot{g} = [1 - u\theta(u)](-\delta(u)) = -\delta(u). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Il tensore di Riemann risulta essere in funzione della sola delta di Dirac e pertanto sar  diverso da zero solamente per $u = 0$. Per $u \neq 0$, invece, lo spazio-tempo risulter  piatto. Quest'ultimo risultato   evidente se si applica la sostituzione $h(u) = \delta(u)$ all'elemento di linea nella forma di Brinkmann 4.35

$$ds^2 = \delta(u)(Y^2 - X^2)dU^2 + dUdV - dX^2 - dY^2, \quad (4.48)$$

che per $u \neq 0$ si riduce all'elemento di linea dello spazio-tempo di Minkowski con due coordinate nulle

$$ds^2 = dUdV - dX^2 - dY^2. \quad (4.49)$$

Si ha quindi che per le onde gravitazionali piane e impulsive il campo   concentrato solo sull'ipersuperficie corrispondente al valore $u = 0$, dividendo lo spazio-tempo in due regioni entrambe piatte, come rappresentato in figura 4.3. Sebbene le onde impulsive siano un'altra idealizzazione, si rivelano pi  facili da trattare rispetto alle onde piane pi  generali, permettendo comunque di indagare fenomeni complessi che seguono dalla non linearit  delle equazioni di campo. Per esempio, nei lavori di Khan e Penrose (1971) [23] tali onde hanno permesso di indagare il fenomeno di *scattering* tra onde gravitazionali.

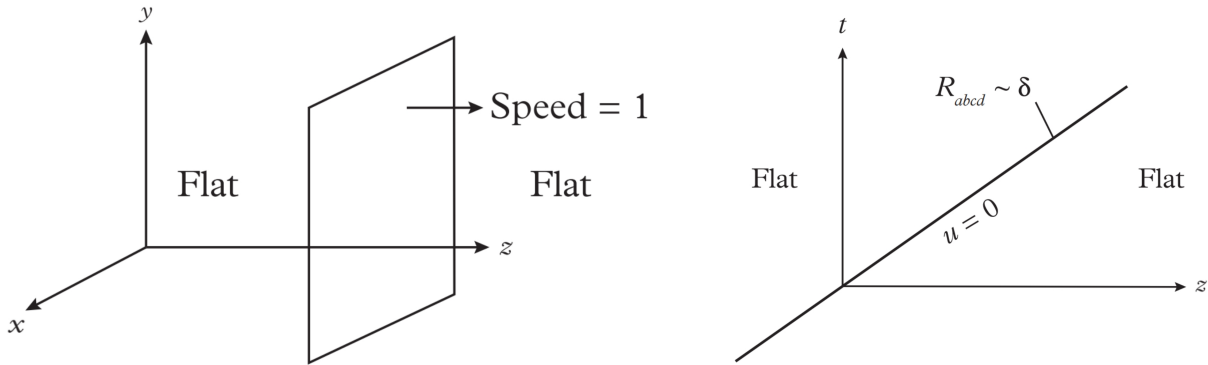


Figura 4.3: *A destra:* rappresentazione nello spazio tridimensionale di un'onda gravitazionale impulsiva che si propaga nella direzione z . *A sinistra:* rappresentazione nello spazio-tempo, con due dimensioni spaziali soppresse, di un'onda gravitazionale piana impulsiva. [da [38], figure 22.1 e 22.3]

Capitolo 5

Conclusioni

Nel corso della trattazione di questa tesi, si è fornito un quadro generale del lungo percorso di studio e analisi delle equazioni di campo di Einstein, che portarono alla dimostrazione dell'esistenza delle onde gravitazionali. Tali risultati teorici sono stati di cruciale importanza per lo sviluppo della ricerca scientifica degli ultimi anni, dando il via libera alla costruzione di apparati strumentali atti alla misurazione di tali onde. La prima evidenza empirica che dimostrò l'esistenza e la possibilità di misurare le onde gravitazionali arrivò nel 2015, fornendo una conferma della teoria sviluppata a partire dalle equazioni di campo di Einstein e aprendo le porte a un metodo di indagine dell'universo completamente nuovo e inesplorato, permettendo di studiare fenomeni finora inaccessibili con il solo studio della radiazione elettromagnetica.

Si è inoltre posta particolare attenzione sulla complessità ed elevata non linearità delle equazioni di Einstein, evidenziando come ciò renda estremamente difficile trovare delle soluzioni analitiche senza prima supporre determinate condizioni fisiche o di simmetria, in modo da semplificarne la struttura. Perseguendo gli obiettivi della tesi, si sono dunque analizzati due possibili approcci per ricavare delle soluzioni corrispondenti a onde gravitazionali piane, ovvero l'approssimazione di campo debole e l'assunzione di simmetria piana della metrica dello spazio-tempo curvo. La prima permette di linearizzare le equazioni di campo e giungere ad una soluzione nella forma di onde piane e si è mostrato che esse possiedono due gradi di polarizzazione e si propagano alla velocità della luce. Tuttavia, sotto tali assunzioni, si perdono gli effetti non lineari caratteristici della teoria completa e le onde possono essere sovrapposte esattamente come per il caso elettromagnetico. Inoltre, le condizioni per cui tale soluzione possa essere utilizzata per interpretare i dati sono affetti da delle limitazioni, quali la conoscenza accurata del moto delle sorgenti e l'effettiva possibilità di considerare il campo debole. Il secondo approccio, invece, permette di ricavare una soluzione esatta delle equazioni di campo gravitazionale non lineari nella forma di onde piane. A partire da tale soluzione esatta si sono riportate poi due soluzioni approssimate, le *sandwich waves* e le onde gravitazionali piane impulsive, che permettono di indagare i fenomeni fisici legati all'interazione tra onde. Nel corso della trattazione si è inoltre sottolineata l'importanza ricoperta dalle soluzioni esatte nello studio delle equazioni di campo gravitazionale e nella descrizione di determinati problemi fisici. In particolare, sebbene risultino idealizzate e spesso non fisiche, le soluzioni esatte di onde piane gravitazionali hanno comunque fornito importanti risultati sugli effetti non lineari delle interazioni tra onde previsti dalla relatività generale.

Bibliografia

- [1] N. Rosen A. Einstein. «On Gravitational waves». In: *Journal of the Franklin Institute* 223 (1937), pp. 43–45. DOI: [10.1016/S0016-0032\(37\)90583-0](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(37)90583-0).
- [2] B. P. Abbott. «Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger». In: *Phys. Rev. Lett.* 116 (2016). DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- [3] Vincenzo Barone. *Relatività, principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2004.
- [4] Daniele Bertacca. *Exploring the Universe with Gravitational Waves*. Lezioni tenuta al corso di dottorato in Fisica, Università di Padova. Slide di presentazione. 2024.
- [5] Roger D. Blandford e Kip S. Thorne. *Applications of classical physics*. 2012. URL: <http://www.pmaweb.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/1225.1.K.pdf>.
- [6] Roger D. Blandford e Kip S. Thorne. *Applications of classical physics*. 2012. URL: <http://www.pmaweb.caltech.edu/Courses/ph136/yr2012/1227.1.K.pdf>.
- [7] H. Bondi e F. A. E. Pirani. «Gravitational Waves in General Relativity. 13: Caustic Property of Plane Waves». In: *Proc.Roy.Soc.Lond.A* 421 (1989), pp. 395–410. DOI: [10.1098/rspa.1989.0016](https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0016).
- [8] H. Brinkman. «Einstein spaces which are mapped conformally on each other». In: *Mathematische Annalen* 94 (1925), pp. 119–145. DOI: [10.1007/BF01208647](https://doi.org/10.1007/BF01208647).
- [9] H. W. Brinkmann. «On Riemann Spaces Conformal to Euclidean Space». In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 9 (1923), pp. 1–3. URL: <http://www.jstor.org/stable/84062>.
- [10] H. Stephani e D. Kramer e M. A. H. MacCallum e C. Hoenselaers e E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. 2^a ed. Cambridge university press, 2003.
- [11] A. Einstein. «Gravitationswellen». In: *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (parte 1) (1918), pp. 154–167. DOI: [10.12691/ijp-4-4-3](https://doi.org/10.12691/ijp-4-4-3).
- [12] A. Einstein. «Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». In: *Annalen der Physik* 49 (1916), pp. 769–822. DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702).
- [13] A. Einstein. «Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation». In: *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* (parte 1) (1916), pp. 688–696. DOI: [10.34663/9783945561317-04](https://doi.org/10.34663/9783945561317-04).
- [14] J. B. Griffiths. *Colliding plane waves in general relativity*. Oxford University Press, 1991.
- [15] J. B. Griffiths e J. Podolsky. *Exact space-times in einstein's general relativity*. 2^a ed. Cambridge university press, 2009.
- [16] F. A. E. Pirani H. Bondi e I. Robinson. «Gravitational waves in general relativity III. Exact plane waves». In: *Proc.Roy.Soc.Lond.A* 251 (1959), pp. 519–533. DOI: [10.1098/rspa.1959.0124](https://doi.org/10.1098/rspa.1959.0124).
- [17] C. Denson Hill e Pawel Nurowski. *How the green light was given for gravitational wave search*. 2016. arXiv: [1608.08673](https://arxiv.org/abs/1608.08673) [[physics.hist-ph](https://arxiv.org/abs/1608.08673)]. URL: <https://arxiv.org/abs/1608.08673>.
- [18] A. Trautman I. Robinson. «Some spherical gravitational waves in general relativity». In: *Proc. Roy. Soc. London A* 265 (1962), pp. 463–473. DOI: [10.1098/rspa.1962.0036](https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0036).
- [19] A. Trautman I. Robinson. «Spherical gravitational waves». In: *Phys. Rev. Lett.* 4 (1960), pp. 431–432. DOI: [10.1103/PhysRevLett.4.431](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.4.431).
- [20] J. Weber e J. A. Wheeler. «Reality of the Cylindrical Gravitational Waves of Einstein and Rosen». In: *Rev. Mod. Phys.* 29 (1957), pp. 509–515. DOI: [10.1103/RevModPhys.29.509](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.29.509).
- [21] M. P. Hobson; G. Efstathiou; A. N. Lasenby. *Relativity. An Introduction to Special and General Relativity*. Cambridge University Press, 2006.

- [22] R. Krotkov e R.H. Dicke P.G. Roll. «Gravitational Signature of Matter-Antimatter Interaction». In: *Annals of Physics* 26 (1964). DOI: [10.1016/0003-4916\(64\)90259-3](https://doi.org/10.1016/0003-4916(64)90259-3).
- [23] K. Khan; R. Penrose. «Scattering of Two Impulsive Gravitational Plane Waves». In: *Nature* 229 (1971), pp. 185–186. DOI: <https://doi.org/10.1038/229185a0>.
- [24] Roger Penrose. «A spinor approach to general relativity». In: *Annals of Physics* 10 (1960), pp. 171–201. DOI: [10.1016/0003-4916\(60\)90021-X](https://doi.org/10.1016/0003-4916(60)90021-X).
- [25] Asher Peres. «Some Gravitational Waves». In: *Phys. Rev. Lett.* 3 (1959), pp. 571–572. DOI: [10.1103/PhysRevLett.3.571](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.3.571).
- [26] F. A. E. Pirani. «Invariant Formulation of Gravitational Radiation Theory». In: *Phys. Rev.* 105 (1957), pp. 1089–1099. DOI: [10.1103/PhysRev.105.1089](https://doi.org/10.1103/PhysRev.105.1089).
- [27] H. Poincaré. «La dynamique de l'électron». In: *Revue générale des sciences pures et appliquées* 19 (1908), pp. 386–402. URL: <http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/chp/hp-pdf/hp1908rg.pdf>.
- [28] H. Poincaré. «Sur la dynamique de l'électron». In: *Académie des Sciences de Paris* Volume 18 (2017) no. 9-10 (1905), pp. 551–562. DOI: [10.1016/j.crhy.2017.10.006](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2017.10.006).
- [29] N. Rosen. «Plane polarized waves in the general theory of relativity». In: *Phys. Z. Sowjetunion* 12 (1937).
- [30] R. K. Sachs. «Gravitational Waves in General Relativity. VIII. Waves in Asymptotically Flat Space-Time». In: *Proc. Roy. Soc. London* A270 (1962), pp. 103–126. DOI: [10.1098/rspa.1962.0206](https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0206).
- [31] Maura Sandri. *Intervista a Roberto Lalli. Relatività e onde gravitazionali, una storia lunga*. 2018. URL: <https://www.media.inaf.it/2018/10/30/onde-gravitazionali-relativita/>.
- [32] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. 2^a ed. Cambridge university press, 2009.
- [33] Hans Stephani. *General Relativity. An Introduction for Physicists*. 3^a ed. Cambridge University Press, 2004.
- [34] K. S. Thorne. «Energy of Infinitely Long, Cylindrically Symmetric Systems in General Relativity». In: *Phys. Rev.* 138 (1965), B251–B266. DOI: [10.1103/PhysRev.138.B251](https://doi.org/10.1103/PhysRev.138.B251).
- [35] A. Trautman. «Boundary conditions at infinity for physical theories». In: *Bull. Acad. Polon. Sci.* 6 (1958), pp. 403–406. DOI: [10.48550/arXiv.1604.03144](https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.03144).
- [36] A. Trautman. «Radiation and boundary conditions in the theory of gravitation». In: *Bull. Acad. Polon. Sci.* 6 (1958), pp. 407–412. DOI: [10.48550/arXiv.1604.03145](https://doi.org/10.48550/arXiv.1604.03145).
- [37] J. Podolský; K. Veselý. «New examples of sandwich gravitational waves and their impulsive limit». In: *Czechoslovak Journal of Physics* 48 (1998), pp. 871–878. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1022869004605>.
- [38] Ray d'Inverno; Vickers James. *Introducing Einstein's Relativity, A Deeper Understanding*. 2^a ed. Oxford University Press, 2022.
- [39] C. W. Misner; K. S. Thorne; J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [40] C. M. Will. «The Confrontation between General Relativity and Experiment». In: *Living Rev. Relativ.* 17 (2014). DOI: [10.12942/lrr-2014-4](https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4).