

Sommario

La rigidità strutturale della motocicletta nel suo complesso e quella di ogni suo singolo componente (in particolare forcelle anteriori, telaio e forcellone) sono un fattore critico nel definire le prestazioni in relazione alla manovrabilità ed alla maneggevolezza della motocicletta.

Le motociclette moderne possiedono telai, forcelle e forcelloni più rigidi rispetto ai veicoli più datati. Oltre certi valori di rigidità laterale e torsionale del telaio, le proprietà della stabilità del veicolo non dipendono più in maniera significativa dalle caratteristiche strutturali. Valori elevati delle rigidità garantiscono precisione nella traiettoria, risposta rapida ai comandi del pilota, ma presentano anche alcuni svantaggi.

In questa tesi si andranno dunque ad analizzare alcune metodologie di valutazione della rigidità applicate in campo motociclistico sia in fase di progettazione che in fase di verifica.

SOMMARIO	1
INTRODUZIONE	7
PRESENTAZIONE DELL'APPARATO DI MISURA DENOMINATO "MOTOSTIFFMETER"	15
1.1 DESCRIZIONE SOMMARIA:	15
1.1.1 CONSIDERAZIONI SUL VINCOLO:	16
1.2 DETTAGLIO COMPONENTI MOTOStIFFMETER:	16
1.2.2 SENSORI LASER	17
1.3 ACQUISIZIONE DEL VALORE DI SPOSTAMENTO:	19
1.4 SISTEMA DI RIFERIMENTO:	20
CAPITOLO 2	21
METODOLOGIE DI MISURAZIONE	21
2.1 MISURAZIONE DI TELAI MOTOCICLISTICI	21
2.1.1 METODO DEL VINCOLO SULLO STERZO	21
2.1.2 METODO DEL VINCOLO SUL PERNO FORCELLONE	22
2.2 MISURAZIONE DI FORCELLONI MOTOCICLISTICI	22
2.3 MISURAZIONE DEL SISTEMA TELAIO-FORCELLONE	23
2.4 CONSIDERAZIONI SUI COMPONENTI COLLEGATI	23
CAPITOLO 3	25
VALIDAZIONE SPERIMENTALE DELLA MACCHINA DI MISURA.	25
3.1 DIMENSIONI DEL CAMPIONE DI PROVA	26
3.1.1 DATI PER LA STIMA DELLA RIGIDEZZA LATERALE:	26
3.2 ANALISI FEM ESEGUITA CONSIDERANDO INFINITAMENTE RIGIDA LA ZONA DEL VINCOLO	27
3.3 MISURA SPERIMENTALE DEL CAMPIONE DI PROVA	28
3.4 ANALISI FEM CONSIDERANDO LA STRUTTURA DEL VINCOLO	29
3.5 ANALISI FEM DI UN FORCELLONE MOTOCICLISTICO	30
3.5.1 VINCOLO INFINITAMENTE RIGIDO	30
3.5.2 MISURA SPERIMENTALE DEL FORCELLONE	30
3.5.3 ANALISI FEM DEL FORCELLONE CONSIDERANDO LA CEDEVOLEZZA DEL VINCOLO	31
3.6 STIMA DELLA RIGIDEZZA TORSIONALE	32
3.7 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE SULLA PROCEDURA DI VALUTAZIONE DELLE RIGIDEZZE	33
3.8 VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI MISURA	34

CAPITOLO 4 **35**

CARATTERIZZAZIONE DINAMICA: ANALISI MODALE **35**

4.1 L'ANALISI MODALE	35
4.1.1 CENNI DI TEORIA	36
4.2 METODI DI MISURA PER L'ANALISI MODALE	37
4.2.1 TERMINOLOGIA	38
4.3 APPLICAZIONE AD UN COMPONENTE DI TIPO MOTOCICLISTICO	38
4.3.1 ANALISI MODALE ANALITICA DELLA COLONNA	39
4.3.2 ANALISI TRAMITE FEM DELLA COLONNA	44
4.3.3 ANALISI MODALE SPERIMENTALE DELLA COLONNA	47
4.3.4 EFFETTO DELL'APPLICAZIONE DI UNA MASSA CONCENTRATA SULLA COLONNA	53
4.3.4.1 MASSA CONCENTRATA SULL'ASSE VERTICALE DELLA COLONNA	53
4.4 ANALISI MODALE SU UN FORCELLONE MOTOCICLISTICO	57
4.5 ANALISI MODALE SPERIMENTALE DEL FORCELLONE	61
4.6 CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE SULL'ANALISI MODALE SPERIMENTALE ESEGUITA CON L'AUSILIO DELLA STRUTTURA DI VINCOLO DELLA MOTOStiffMeter	65

METODOLOGIE DI CONFRONTO E CORRELAZIONE TRA ANALISI MODALE SPERIMENTALE E ANALISI NUMERICA **67**

5.1 CONFRONTO DELLE FREQUENZE NATURALI	67
5.1.1 ANALISI MODALE SPERIMENTALE VS COLONNA FEM CON VITI TRA INCASTRO E BASE	68
5.1.2 ANALISI MODALE SPERIMENTALE VS COLONNA FEM MODELLO CON INCASTRO INFINITAMENTE RIGIDO	68
5.1.3 ANALISI FEM COLONNA CON VITI VS ANALISI FEM CANTILEVE	69
5.2 MODE SCALE FACTOR (MSF)	69
5.2.1 MODI DELLA COLONNA FEM CON VITI VS MODI DELLA COLONNA RICAVATI SPERIMENTALMENTE	70
5.3 CORRELAZIONE TRA L'ANALISI MODALE DEL FORCELLONE E L'ANALISI FEM	71

LA SCREW THEORY **75**

PER LA STIMA DELLE RIGIDENZE. **75**

6.1 DEFINIZIONI	75
6.2 NOTAZIONE	76
6.3 INTRODUZIONE	77
6.4 PROBLEMA AGLI AUTOVALORI	78
6.4.1 EIGENWRENCH PROBLEM	79
6.4.2 EIGENTWIST PROBLEM	81

6.5 ESEMPI APPLICATIVI DELLA TEORIA DELLA VITE	83
6.5.1 TRAVE A SEZIONE QUADRATA	83
6.5.2 DUE BARRE CON LA STESSA SEZIONE CIRCOLARE CAVA MA CON MATERIALI DIVERSI.	86
6.5.3 STRUTTURA NON SIMMETRICA	89
6.6 IL TWIST AXIS	92
6.6.1 DEFINIZIONE DI TWIST AXIS	92
<u>APPLICAZIONE SCREW THEORY</u>	<u>93</u>
7.1 DATI DEL MODELLO FEM:	93
7.2 APPLICAZIONE SCREW THEORY AL TELAIO	94
7.2.1 CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI OTTENUTI PER IL TELAIO	96
7.3 SCREW THEORY APPLICATA AL FORCELLONE	97
7.6 IL CENTRO DI TAGLIO	103
7.6.1 APPLICAZIONE DELLA SCREW THEORY PER LA DETERMINAZIONE DEL CENTRO DI TAGLIO.	104
7.6.2 IL CENTRO DI TAGLIO DEL SISTEMA TELAIO-FORCELLONE	105
7.6.3 CONSIDERAZIONI SULLA RIGIDEZZA LATERALE:	107
<u>CONCLUSIONI</u>	<u>109</u>
<u>APPENDICE</u>	<u>111</u>
A1 CODICE DI CALCOLO PER LA SCREW THEORY	111
A1.1 CODICI SECONDARI: EIGENWRENCH	118
A1.2 CODICI SECONDARI: EIGENTWIST	119
<u>A2 DESCRIZIONE DEGLI ELEMENTI USATI PER LE ANALISI FEM</u>	<u>121</u>
A2.1 ELEMENTO TET4	121
A2.2 ELEMENTO SPIDER RIGIDO	122
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	<u>123</u>

Introduzione

La Teoria dell'Elasticità Lineare prevede che un corpo deformabile sollecitato da una forza modifichi la propria configurazione in maniera proporzionale alla forza stessa. Tale coefficiente di proporzionalità è la “rigidezza” del corpo; è una proprietà riassuntiva sulla tendenza di un corpo a non deformarsi, in quanto essa dipende contemporaneamente dal materiale, dalla conformazione del corpo, dalla modalità di applicazione dei carichi e da come il corpo è vincolato. In maniera duale si può parlare della “cedevolezza” di un corpo, ovvero della sua tendenza deformarsi quando sottoposto a carichi. Tra le due grandezze intercorre un rapporto di reciprocità.

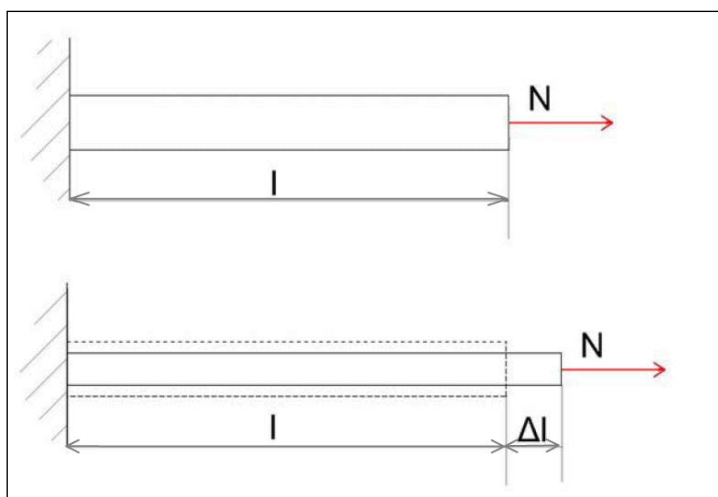


FIGURA 1

Poiché a definire la rigidezza (o la cedevolezza) di un corpo contribuiscono anche i carichi ed i vincoli è evidente come non si possa parlare in maniera univoca di questa grandezza per un dato oggetto, ma sia sempre necessario precisare come essa è definita, oltre ovviamente al fatto che per uno stesso corpo è possibile avere più rigidezze.

Si consideri il caso di una trave incastrata ad un'estremità sollecitata da una forza assiale N posta nel baricentro dell'altra estremità. Sotto questo carico la trave si allungherà e

l'estremità libera subirà uno spostamento Δl . Secondo la Teoria dell'Elasticità Lineare forza e deformazione sono legate dalla relazione

$$N = K_A \cdot \Delta l$$

dove K_A è la rigidezza assiale della trave. Misurate forza e allungamento la si può agevolmente calcolare come

$$K_A = \frac{N}{\Delta l}$$

In termini di cedevolezza invece la relazione che lega forza e allungamento è

$$\Delta l = \alpha_A \cdot N$$

La cedevolezza assiale α_A si calcola come

$$\alpha_A = \frac{\Delta l}{N}$$

e perciò tra le due vale la relazione

$$K_A = \frac{1}{\alpha_A}$$

In maniera analoga si può definire la rigidezza torsionale della trave, applicando un momento torcente M_T diretto lungo l'asse e rilevando la conseguente rotazione φ dell'estremità libera

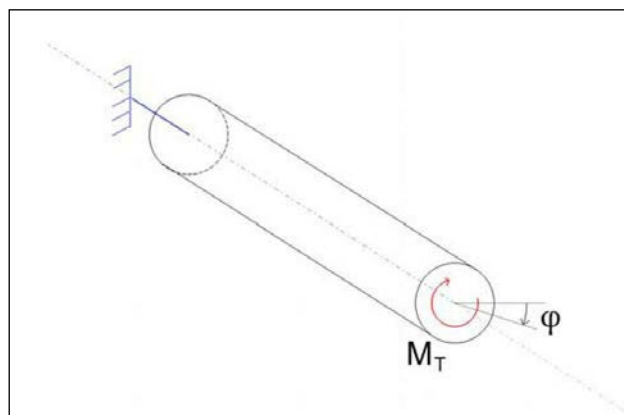


FIGURA 2

Anche in questo caso precedente si possono calcolare la rigidità torsionale K_T o la cedevolezza torsionale α_T

$$K_T = \frac{M_T}{\varphi} \qquad \alpha_T = \frac{\varphi}{M_T}$$

È possibile anche che schemi di carico e spostamenti tra loro non omogenei si

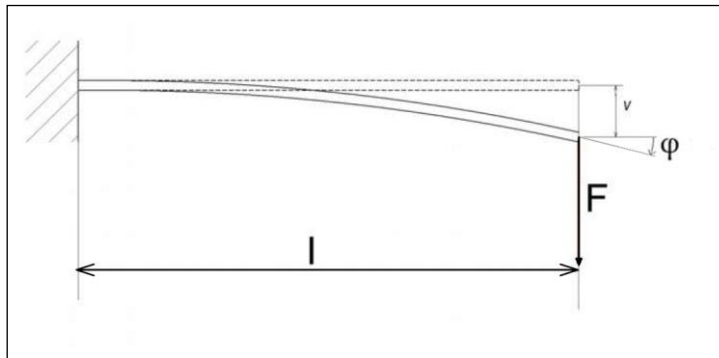


FIGURA 3

accoppino tra di loro: il più semplice esempio è quello della deflessione di una trave incastrata a sbalzo.

Caricata all'estremità libera con una forza F , si avrà uno spostamento verticale v accompagnato da una rotazione φ . Alternativamente si può pensare di caricare la trave con un momento puro M che darà luogo anch'esso a uno spostamento verticale e a una rotazione dell'estremità libera

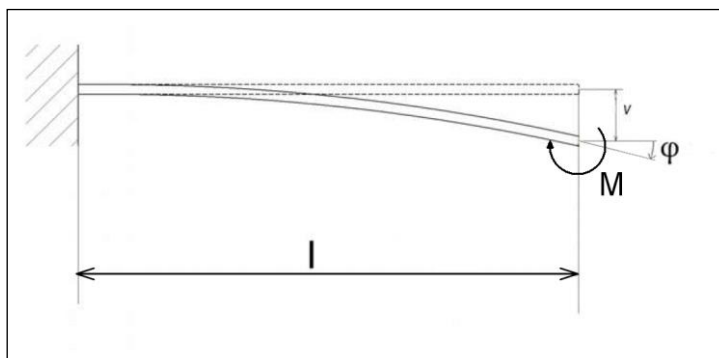


FIGURA 4

Carichi e deformazioni sono ora tra loro legati non da un coefficiente di proporzionalità ma attraverso una matrice di coefficienti

$$\begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Fv} & K_{F\varphi} \\ K_{Mv} & K_{M\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

o in termini di cedevolezza

$$\begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{Fv} & \alpha_{Mv} \\ \alpha_{F\varphi} & \alpha_{M\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F \\ M \end{Bmatrix}$$

Tra le due vale la relazione

$$[K] = [\alpha]^{-1}$$

Mentre nei casi precedenti era indifferente ragionare in termini di rigidità o di cedevolezza, essendo una il reciproco dell'altra, ora è necessario, nell'ottica di poter calcolare queste proprietà, riferirsi alle cedevolezza. La spiegazione di ciò sta nel fatto che si ha un accoppiamento delle deformazioni. Considerando di applicare una sola forza verticale

$$F = K_{Fv} \cdot v + K_{F\varphi} \cdot \varphi$$

$$0 = K_{Mv} \cdot v + K_{M\varphi} \cdot \varphi$$

Non è possibile isolare un termine di rigidità se non in funzione degli altri, rendendo di fatto impossibile il calcolo. L'unico modo di procedere sarebbe impedire una delle due deformazioni, ottenere la rigidità cercata e poi ripetere l'operazione per l'altra rigidità.

Supponendo di impedire la rotazione ($\varphi = 0$) e considerando la prima equazione

$$F = K_{Fv} \cdot v + K_{F\varphi} \cdot 0$$

$$F = K_{Fv} \cdot v$$

$$K_{Fv} = \frac{F}{v}$$

Bisognerebbe poi ripetere ulteriormente il procedimento per il caso di un momento puro per calcolare le rimanenti due rigidezze, rendendo notevolmente scomoda tale procedura (e sperimentalmente anche problematica a soprattutto per quanto concerne l'imposizione dei vincoli).

Ragionando in termini di cedevolezza è sufficiente invece applicare un solo carico alla volta e rilevare le conseguenti deformazioni; dal punto di vista sperimentale è nettamente più agevole agire così che del consentire una sola deformazione alla volta.

Applicando una sola forza verticale

$$v = \alpha_{Fv} \cdot F + \alpha_{Mv} \cdot 0$$

$$\varphi = \alpha_{F\varphi} \cdot F + \alpha_{M\varphi} \cdot 0$$

Dalle quali si possono isolare le due cedevolezza

$$\alpha_{Fv} = \frac{v}{F}$$

$$\alpha_{F\varphi} = \frac{\varphi}{F}$$

Applicando al posto della forza F un momento puro M si ricavano le rimanenti due cedevolezza

$$\alpha_{Mv} = \frac{v}{M}$$

$$\alpha_{M\varphi} = \frac{\varphi}{M}$$

In accordo con la Teoria dell'Elasticità Lineare, la matrice di cedevolezza ottenuta risulta essere simmetrica e definita positiva. Mediante inversione si ottiene la matrice di rigidezza cercata, anch'essa simmetrica e definita positiva.

È noto che per questi semplici casi monodimensionali esistono espressioni analitiche esatte per quantificare la rigidezza; si è preferito tuttavia mostrare quale sia l'iter per poterle calcolare anche sperimentalmente, poiché per modelli più complessi, come appunto un telaio motociclistico, è assolutamente impensabile poter modellare completamente il complesso comportamento elastico, in particolare nell'accoppiamento di differenti schemi di carico e modi di deformazione.

Per estensione di questi semplici casi si può passare ad un caso tridimensionale completo, dove all'estremità libera della trave possono essere applicati fino a tre forze e tre momenti ai quali sono associati tre spostamenti e tre rotazioni

La relazione che intercorre tra deformazioni e sollecitazioni applicate pertanto in termini di cedevolezza assume la forma

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

Anche in questo caso applicando un carico per volta e rilevando le corrispettive deformazioni è possibile calcolare le diverse colonne della matrice

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \alpha_{36} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} & \alpha_{46} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} & \alpha_{56} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \alpha_{63} & \alpha_{64} & \alpha_{65} & \alpha_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \end{bmatrix} \cdot F_x \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \\ \alpha_{61} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{F_x}$$

Note tutte le colonne, mediante inversione si ottiene la matrice di rigidezza come la matrice di cedevolezza essa è costituita da 36 elementi dei quali però solo 21 sono indipendenti a causa della simmetria.

Va ricordato a questo punto che la maggior parte dei software per gli elementi finiti non considera le unità di misura per cui un errore in cui è facile incorre soprattutto se non si ha molta dimestichezza col software o con la teoria degli elementi finiti è di non usare unità di misura congruenti, è quindi sempre conveniente tenere come sistema di unità di misura quello SI in particolare traslazioni in metri e rotazioni in radianti.

Una modalità semplificata con cui studiare un telaio prevede di assimilarlo ad una trave a sezione costante incastrata e caricata ad un'estremità, in virtù del fatto che usualmente è una struttura sviluppata prevalentemente in una direzione;

Nel caso più generale possibile, per una trave a sezione costante vincolata e caricata in questo modo la matrice di cedevolezza è strutturata nel seguente modo

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \varphi_x \\ v_y \\ \varphi_y \\ v_z \\ \varphi_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{AXIAL} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{SC} & 0 & \boxed{SC} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{FLEX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-Y & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{SC} & 0 & 0 & \boxed{FLEX} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X-Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_x \\ M_x \\ F_y \\ M_y \\ F_z \\ M_z \end{Bmatrix}$$

È evidente come numerosi termini siano nulli, ciò denota un modesto accoppiamento tra i vari modi deformativi. I termini indicati con "SC" compaiono qualora la trave venga caricata al di fuori del centro di taglio della sezione; essi legano le forze lungo Y e Z alle rotazioni attorno ad X (asse della trave), in quanto la trave sarebbe sottoposta anche a torsione a causa delle coppie di trasporto.

Per ragioni di calcolo che verranno successivamente spiegate la matrice di cedevolezza della struttura una volta ricavata viene riassembleta in modo da ottenere per carichi e deformazioni l'ordinamento

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}$$

Capitolo 1

Presentazione dell'apparato di misura denominato "MotoStiffMeter"

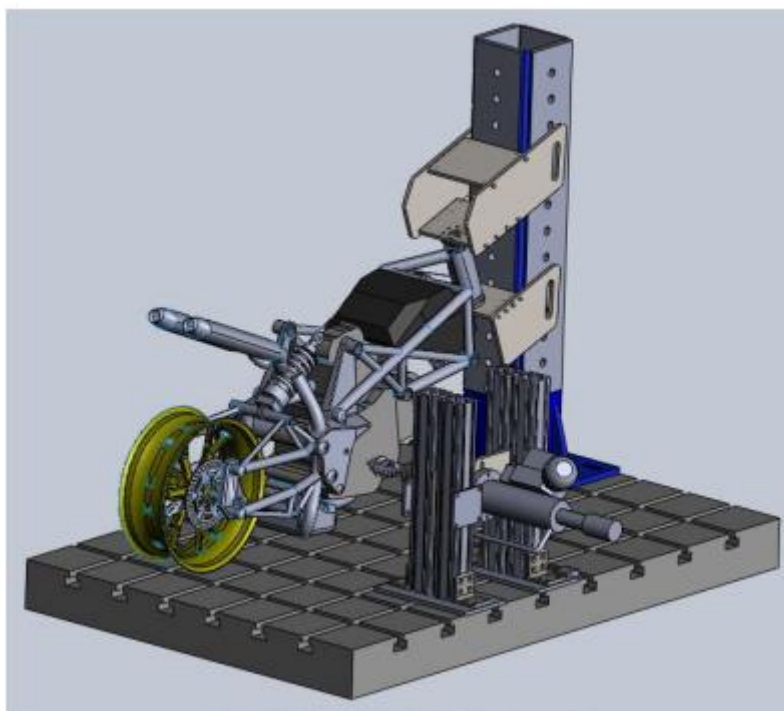


FIGURA 5

1.1 Descrizione sommaria

Per quanto riguarda il sistema Hardware, la macchina è un sistema molto semplice:

Vi è un basamento di ghisa di dimensioni 1500x2000 e massa approssimativamente 1000kg, tra il suolo del capannone e il basamento è interposto uno strato di gomma dura dello spessore di 15mm per attenuare i possibili rumori provenienti dall'ambiente circostante; al basamento è collegata mediante 4 bulloni M14 una colonna cava di acciaio alta 1300mm pesante circa 130kg a sezione rettangolare. Sulla colonna vengono posti sempre tramite giunti bullonati, tutti i vari supporti che andranno a compiere il ruolo di vincolo di incastro per il componente che verrà misurato. La forza viene applicata tramite

un attuatore oleodinamico che viene controllato in forza tramite una cella di carico interposta tra attuatore e componente da misurare. Lo spostamento del punto di applicazione della forza viene misurato con l'ausilio di una serie di laser, tutti i segnali, sia di input che di output sono gestiti con un software LabView autoprodotta.

1.1.1 Considerazioni sul vincolo

Poiché si sta lavorando con un sistema reale, per ottenere una misura quanto più possibile attendibile non si può pensare che il sistema di vincolo sia un incastro “perfetto” per questo motivo oltre alla misura dello spostamento del punto di applicazione della forza, viene misurata sempre attraverso laser, la cedevolezza del vincolo che verrà poi valutata in sede di elaborazione dei dati.

1.2 Dettaglio componenti MotoStiffMeter

1.2.1 Attuatore

Dati tecnici forniti dal costruttore (MOOG):

Il servo attuatore è un dispositivo di conversione della potenza idraulica in potenza meccanica. Esso sviluppa una forza applicata ad un movimento lineare dello stelo. Il movimento è controllato da una servovalvola di cui il componente è fornito.

Il corpo dell'attuatore è ottenuto dalla lavorazione di acciaio ad alta resistenza. Il pistone è realizzato in lega di acciaio ad alta resistenza, è cromato e ha un grado di finitura di 0.2 Ra.

Il servo attuatore è dotato di:

- Tenute dinamiche su stelo e pistone a basso attrito
- Trasduttore di posizione ad alta precisione installato all'interno dello stelo

Le caratteristiche tecniche del servo attuatore sono:

- Corsa totale 100mm
 - Corsa di lavoro 90 mm
 - Diametro del cilindro 31 mm
 - Diametro dello stelo 25 mm
 - Frenatura su entrambi i lati 5 mm
 - Pressione nominale 210 bar
 - Pressione di prova 315 bar
-

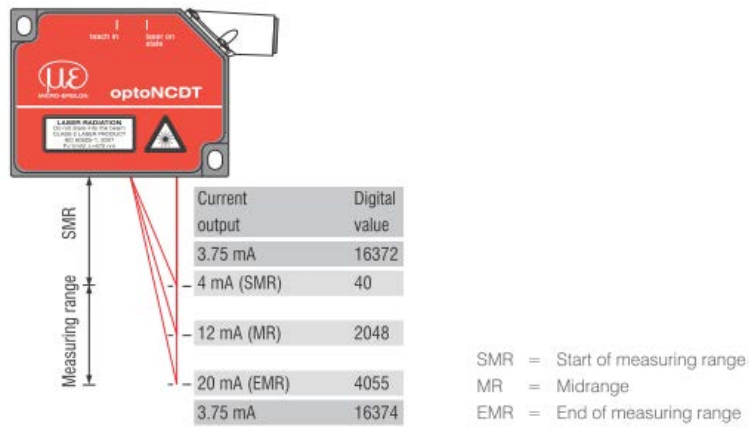
- Peso 35 kg
- Carico in stallo in estensione e retroazione 5.4 kN

1.2.2 Sensori Laser

Il modello dei sensori laser per la misura di spostamento è optoNCDT 1302 fornito da Micro Epsilon.

Datasheet:

Measuring Range, Start of Measuring Range



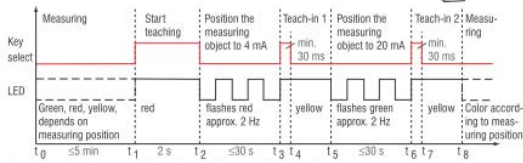
Type	ILD 1302-	20	50	100	200
Measuring range	mm	20	50	100	200
Start of measuring range	mm	30	45	50	60
End of measuring range	mm	50	95	150	260

FIGURA 6

Output Scaling

The "teaching" scales the analog output (4 to 20 mA) for a part of the measuring range. This allows you to optimize the resolution for the analog measurement range. Only the current and error output will be affected by the 2 point calibration. Therefore you define a new start and end for the measurement range. This "teaching" procedure can be performed live via the select key or via pin 9 of the connector.

Timing:



Scaling is also available via the software tool.

Factory Setting

- Current output
- Measurement frequency: 750 Hz
no average
- Interface: 115.2 kbaud, binary
- Measuring range:
 - 100 % FSO: I = 20 mA , digital 4055
 - 0 % FSO: I = 4 mA, digital 40
- Maximum output value (101 % FSO):
20.16 mA / digital 4095
- Minimum output value (-1 % FSO):
3.84 mA / digital 0

FSO = Full scale output
SMR = Start of measuring range
EMR = End of measuring range

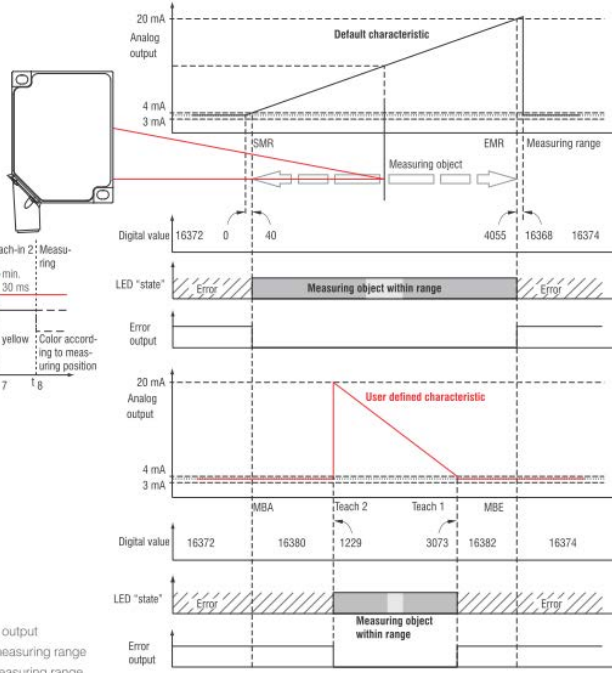


FIGURA 7

1.3 Acquisizione del valore di spostamento

Se si considera l'idea di base della macchina ovvero la trave incastrata è evidente che il punto di applicazione della forza subirà una traslazione ed una rotazione, per individuare entrambi questi spostamenti viene posizionato sull'asse di applicazione della forza un piattello di alluminio, solidale al componente misurato che farà da target a 4 laser, vedi figura seguente:

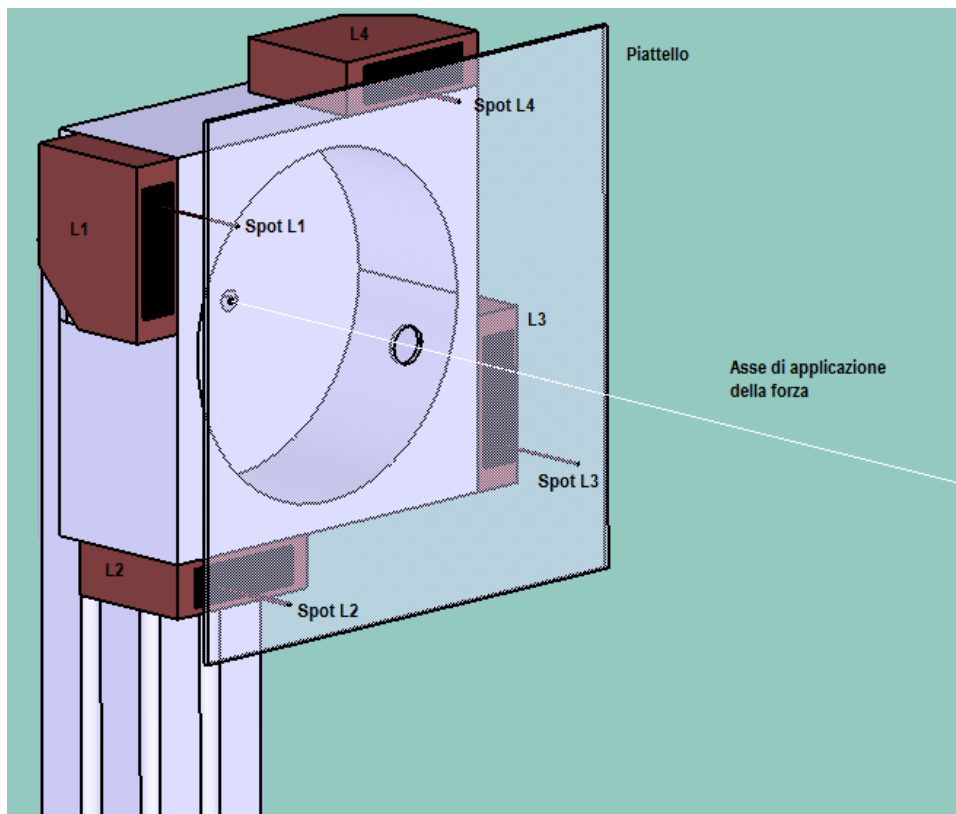


FIGURA 8

I 4 spot individuano, in maniera ridondante, un piano. Dopo l'applicazione del carico il piano risulterà posizionato in maniera diversa dalla sua configurazione indeformata è quindi possibile conoscere con semplici calcoli sia la rotazione che lo spostamento del componente nel punto di applicazione della forza, è inoltre noto che il twist axis è proprio l'intersezione tra il piano nella posizione deformata e il piano nella posizione indeformata.

Lo stesso sistema viene impiegato per misurare il cedimento del vincolo, in totale quindi la macchina è composta da 8 Laser, 4 per il vincolo e 4 per il punto di applicazione della forza.

1.4 Sistema di riferimento

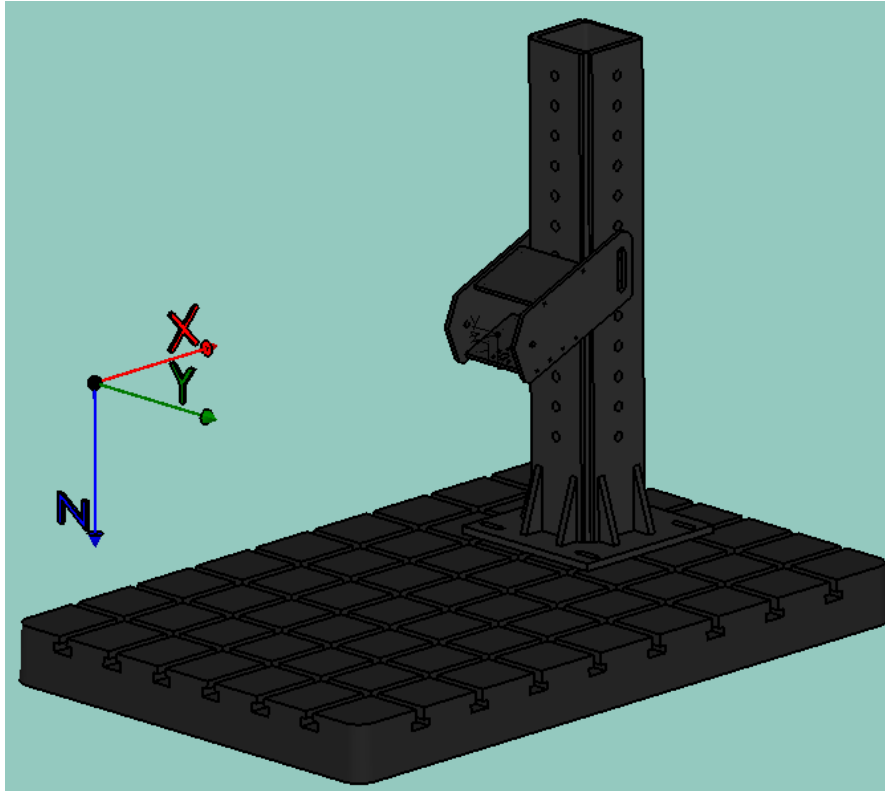


FIGURA 9

Con riferimento alla figura sopra il sistema di riferimento si può posizionare a piacimento sul componente ma gli assi saranno paralleli a quelli in figura i quali sono congruenti con la terna SAE che prevede X come direzione di avanzamento del veicolo, Z asse verticale rivolto verso il basso e Y di conseguenza secondo la regola della mano destra.

Capitolo 2

Metodologie di misurazione

2.1 Misurazione di telai motociclistici

Si deve subito far notare che le metodologie di misurazione della rigidità dei telai motociclistici non sono standardizzate, ogni costruttore ha sviluppato le proprie, verranno quindi ora presentate alcune delle metodologie maggiormente utilizzate, ovviamente trattandosi di strutture complesse è logico aspettarsi che i risultati ricavati con una particolare metodologia non saranno direttamente confrontabili con i risultati ricavati con una metodologia diversa.

2.1.1 Metodo del vincolo sullo sterzo

Questa metodologia prevede di bloccare il telaio nella zona dello sterzo ed andare ad applicare delle forzanti sulla zona posteriore in particolare dove il telaio si collega al forcellone.

Questo metodo viene utilizzato quando si vuole studiare il comportamento del telaio partendo dall'idea che le forze principali arrivino dalla ruota posteriore (la ruota motrice).

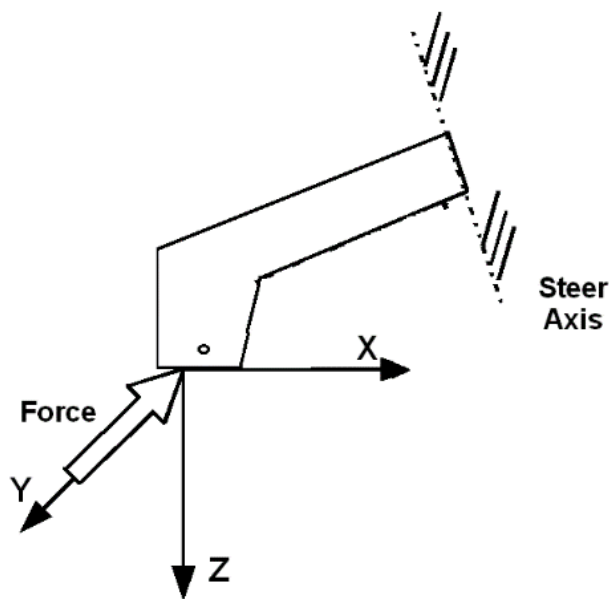


FIGURA 10

2.1.2 Metodo del vincolo sul perno forcellone

Questa metodologia prevede di bloccare il telaio nella zona di collegamento con il forcellone ed andare ad applicare delle forzanti nella zona dello sterzo.

Questo metodo viene utilizzato quando si vuole conoscere il comportamento del telaio quando questo è soggetto alle forze che derivano dalla ruota anteriore.

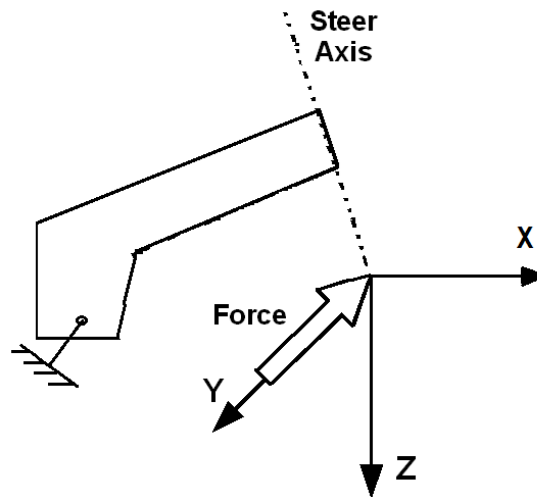


FIGURA 11

2.2 Misurazione di forcelloni motociclistici

Per quanto riguarda le metodologie di misurazione dei forcelloni motociclistici la questione è più semplice in quanto si tratta di un componente facente parte del retrotreno della motocicletta si può quindi assumere che tutte le forze che vi passano siano provenienti dalla ruota posteriore, per questo motivo lo schema di vincolo maggiormente utilizzato e che sarà quello di default per questa tesi, prevede di incastrare il forcellone nella zona di collegamento al telaio e di applicare delle forzanti nella zona di collegamento della ruota posteriore.

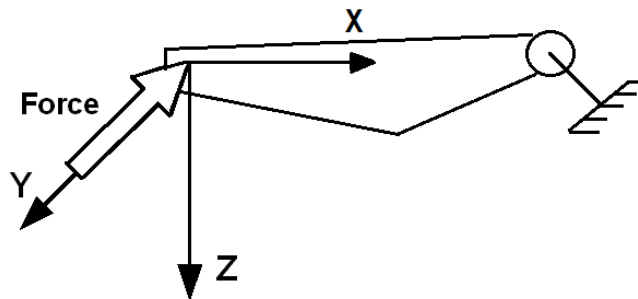


FIGURA 12

2.3 Misurazione del sistema Telaio-Forcellone

Questa metodologia prevede di considerare il sistema completo telaio più forcellone vincolato sullo sterzo ed andare ad applicare forzanti al forcellone nel punto di collegamento con la ruota posteriore.

Questo metodo si usa quando si vuole andare a valutare come si comporta il sistema globale alle forze che provengono dalla ruota motrice, va detto però che ai fini progettuali una prova con tale metodologia può svolgere il compito di verifica finale in quanto non dà indicazioni sul contributo in termini di rigidità globale dato da ciascun componente.

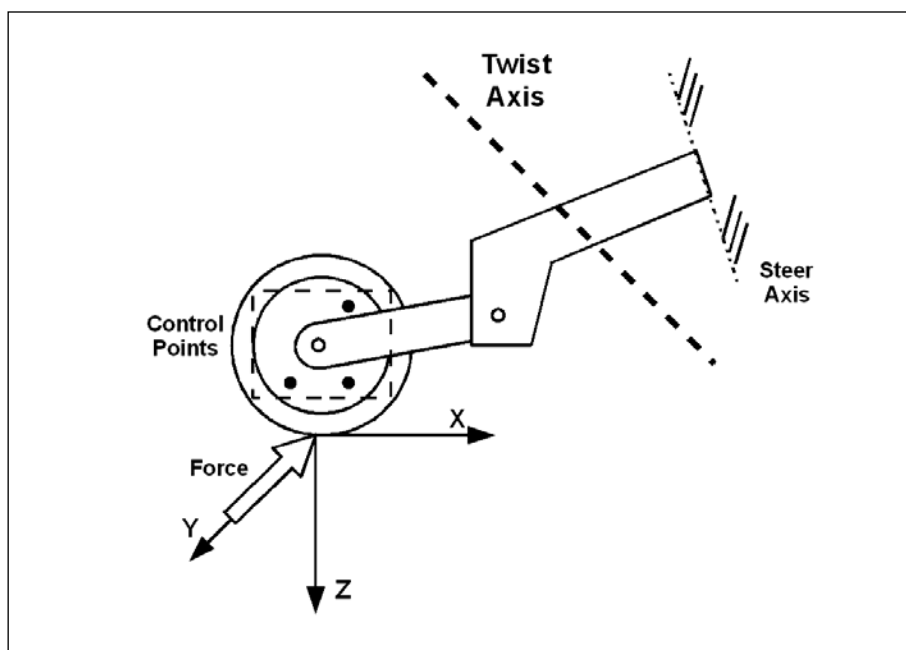


FIGURA 13

2.4 Considerazioni sui componenti collegati

In questo paragrafo si vuole far notare come vi sia un rilevante contributo in termini di rigidità della struttura offerto dai componenti ad essa collegati, uno su tutti il motore il quale viene vincolato all'interno del telaio in genere in almeno 3 punti e si può considerare come un corpo rigido che collega quindi tre zone del telaio, è semplice osservare quindi che una misurazione del telaio senza tener conto dell'effetto del motore potrebbe portare a risultati fuorvianti, sempre rimanendo in ambito di misura di un telaio è importante notare come l'effetto del forcellone funga anche esso da elemento di collegamento tra 2 lati del telaio, è importante quindi, quando si effettuano le prove utilizzare tutti gli accorgimenti necessari per testare il componente nelle condizioni il più possibile simili a quelle reali.

Capitolo 3

Validazione sperimentale della macchina di misura

Per conoscere l'effettiva bontà della misura con il sistema impiegato si è messo a punto un campione di prova del quale sono completamente note le caratteristiche geometriche e di massa, tale campione è stato modellato al CAD 3D e successivamente analizzato con il metodo degli elementi finiti. Il risultato in termini di spostamento del punto di applicazione della forza verrà paragonato con quello misurato dal componente reale sulla MotoStiffMeter.

In questo capitolo verranno riportati i risultati di varie analisi svolte con lo scopo di ricondursi il più possibile al caso reale.

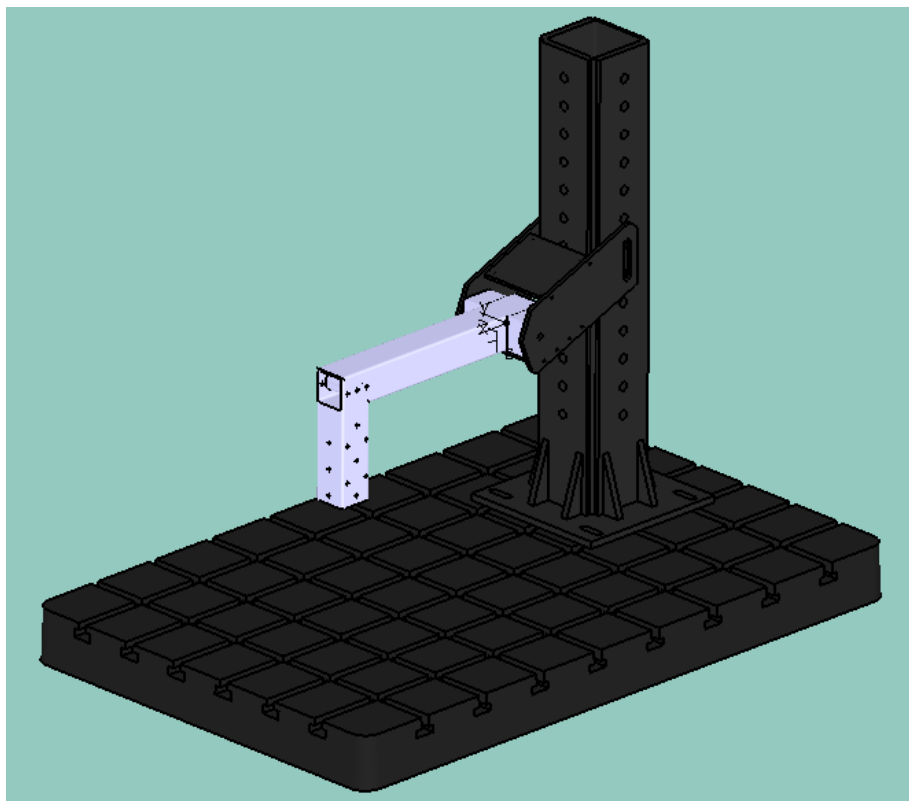


FIGURA 14

3.1 Dimensioni del campione di prova

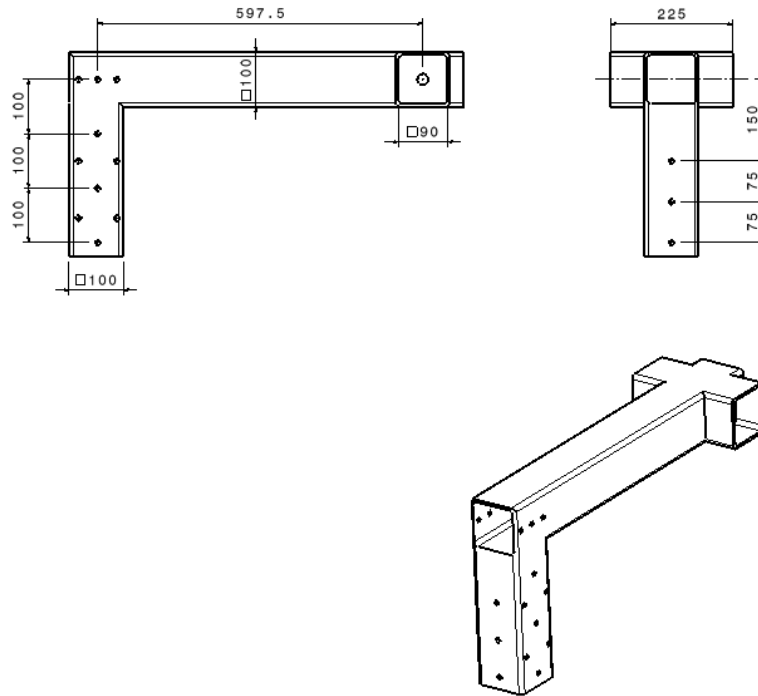


FIGURA 15

3.1.1 Dati per la stima della rigidezza laterale

Momento di inerzia $J=2.87e6 \text{ mm}^4$

Modulo di elasticità $E=198000 \text{ MPa}$

Lunghezza libera di inflessione $L=547.5 \text{ mm}$

Carico applicato $P=600 \text{ N}$

3.2 Analisi FEM eseguita considerando infinitamente rigida la zona del vincolo

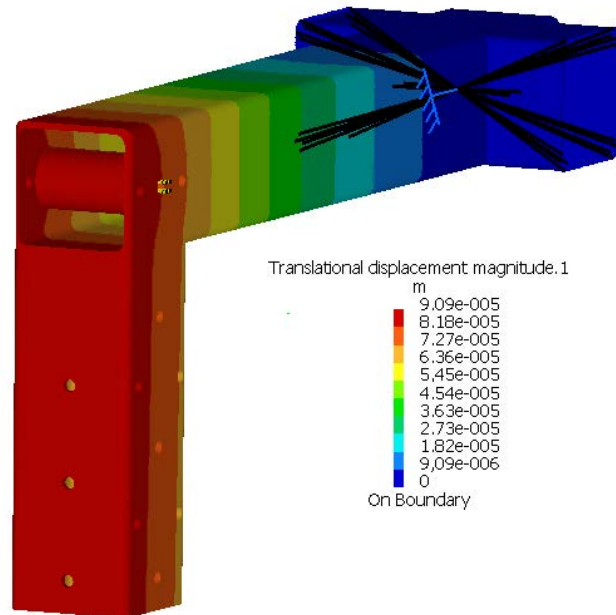


FIGURA 16

Il software predice uno spostamento del punto di applicazione della forza pari a 0.09mm la rigidezza laterale stimata vale quindi:

$$k = \frac{P}{f} = \frac{600}{0.09} \cong 6660 \frac{N}{mm}$$

3.3 Misura sperimentale del campione di prova

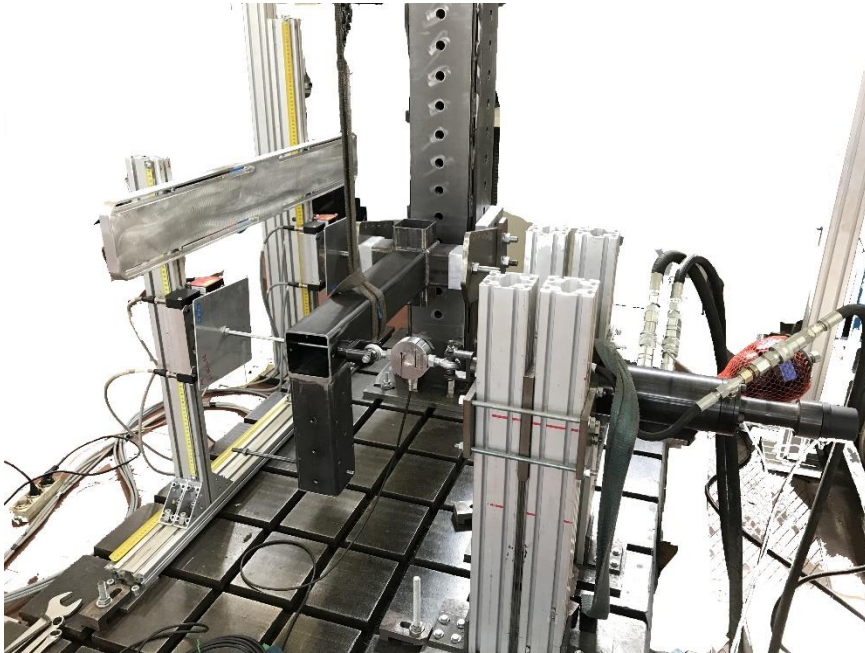


FIGURA 17

La prova viene fatta applicando un carico P di 600N, lo spostamento misurato dai laser nella zona del vincolo è pari a 0.2035 mm;

Tenendo conto dell'ipotesi di lineare elasticità è possibile comparare il risultato dell'analisi agli elementi finiti con l'analisi reale:

Spostamento predetto dal FEM per un carico di 600N = 0.08mm

Si osserva quindi che non tenendo conto della cedevolezza del vincolo il valore predetto dal FEM risulta sovrastimato del 55%.

3.4 Analisi FEM considerando la struttura del vincolo

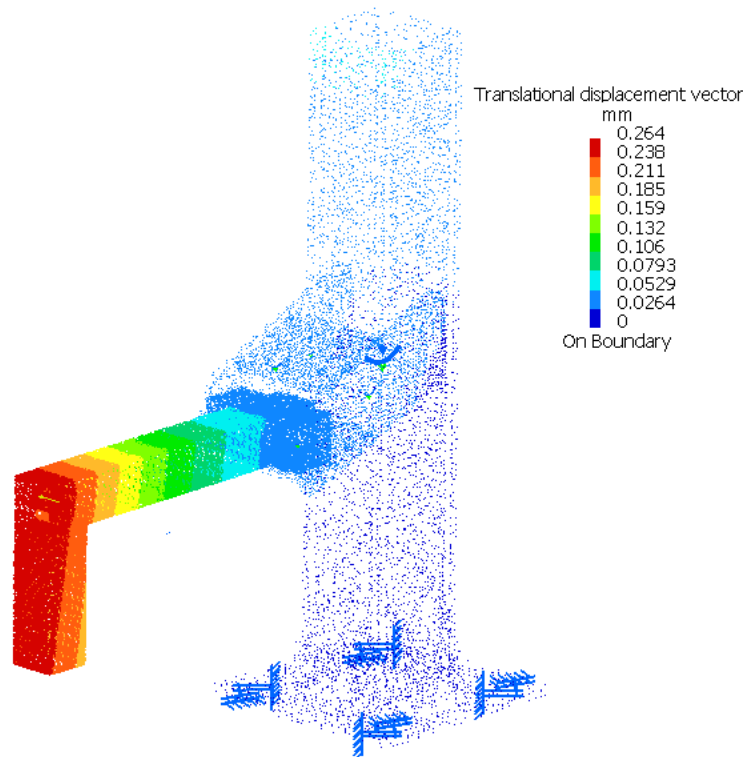


FIGURA 18

Per tener conto della cedevolezza del vincolo nell'ambiente FEM si procede inserendo nell'analisi anche la struttura reale di supporto e di vincolo, il campione è collegato alle piastre tramite un collegamento di tipo spider rigido, la descrizione dell'elemento fornita dalla guida del software si trova in appendice; il vincolo del sistema si applica nella piastra di base della colonna dove questa viene avvitata al basamento.

Il software predice adesso uno spostamento laterale del punto di applicazione della forza pari a 0.264 mm contemporaneamente ad uno spostamento della zona del vincolo di circa 0.03 mm.

Tenendo conto quindi della cedevolezza del vincolo nell'analisi FEM si osserva che vi è un errore per quanto riguarda la rigidità rispetto a quella misurata del 12%.

Nonostante i risultati siano già buoni di per sé si osserva che il campione misurato presenta una rigidità di circa un ordine di grandezza più grande rispetto a quella dei componenti di solito misurati.

Si è scelto quindi di effettuare una verifica finale misurando un braccio oscillante di una moto di piccola cilindrata del quale è nota esattamente la geometria e il modello CAD e con una rigidità stimata di circa 1/10 di quella del campione misurato.

3.5 Analisi FEM di un forcellone motociclistico

3.5.1 Vincolo infinitamente rigido

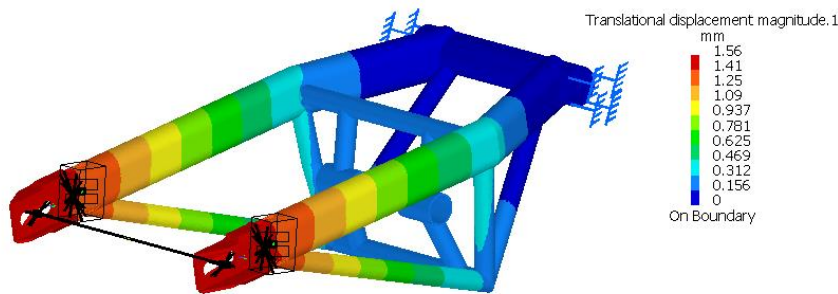


FIGURA 19

Il modello FEM prevede l'impiego elementi tetragonali a 4 nodi di dimensione massima 1,2mm per la mesh, l'applicazione di una parte virtuale rigida tipo spider tra i due longheroni nella zona di collegamento della ruota a simulare il perno ruota e l'applicazione di un vincolo di tipo incastro all'asse del perno di collegamento al telaio da qui in poi definito perno forcellone.

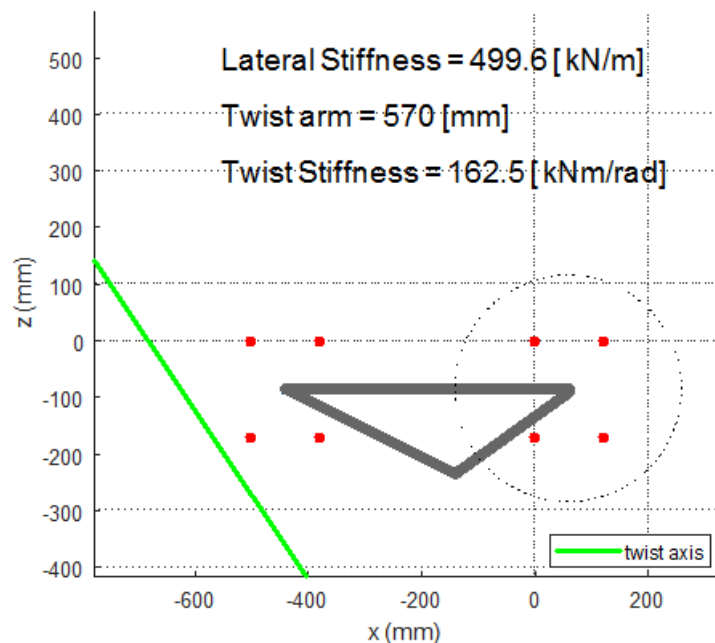
Rigidezza laterale predetta dal software senza considerare il vincolo:

$$k_{lat} = 640 \frac{N}{mm}$$

3.5.2 Misura sperimentale del forcellone



FIGURA 20



Rigidezza laterale misurata tramite StiffMeter: $k_{lat} = 500 \frac{N}{mm}$

Differenza percentuale tra la rigidezza calcolata e la rigidezza misurata:

$$diff_{\%} = \frac{640 - 500}{640} \cong 20 \%$$

Come si può osservare, da questo risultato, la misura di un componente con rigidezza molto minore rispetto al campione utilizzato in precedenza porta ad uno scostamento del risultato reale con quello calcolato tramite analisi agli elementi finiti del 20% valore questo, che date le evidenti semplificazioni che si devono impiegare per svolgere un'analisi numerica rimanendo dentro tempi accettabili e con l'impiego di calcolatori non esageratamente costosi, si può considerare già buono.

3.5.3 Analisi FEM del forcellone considerando la cedevolezza del vincolo

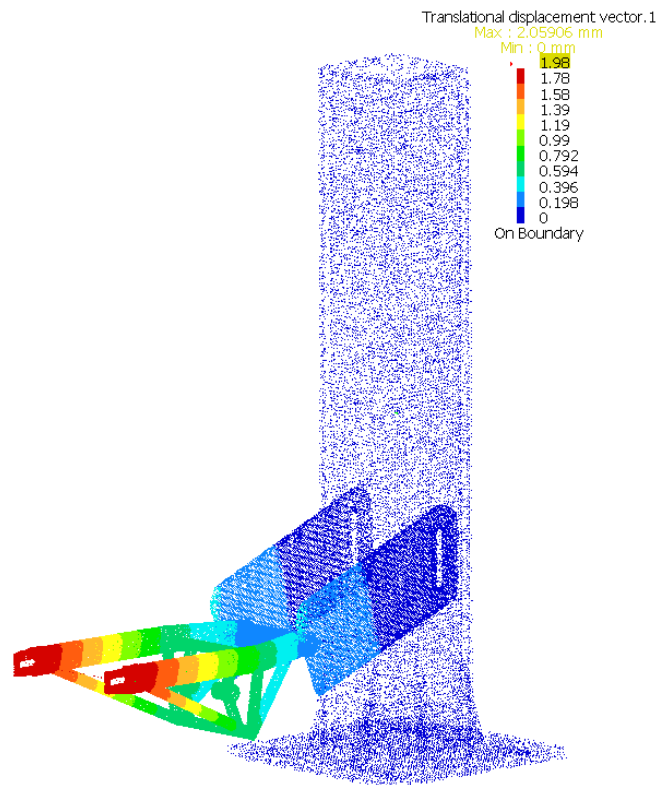


FIGURA 21

$$k_{lat} = \frac{1000N}{1.99mm} = 502 \frac{N}{mm}$$

Differenza percentuale tra la rigidezza calcolata e la rigidezza misurata:

$$diff_{\%} = \frac{500 - 502}{500} \cong 0.4 \%$$

Si può quindi considerare validato il risultato ottenuto mediante l'impiego della MotoStiffMeter per quanto concerne la prova per la definizione della rigidezza laterale. Inoltre, come si è dimostrato nei paragrafi precedenti si può affermare che affinché i risultati sperimentali siano in buon accordo con quelli numerici è importante tenere in considerazione la cedevolezza del vincolo in particolare per quei componenti che presentano una rigidezza elevata come può essere ad esempio un telaio di una supersportiva.

3.6 Stima della rigidezza torsionale

La prova per la misurazione della rigidezza laterale dà anche informazioni sulla rigidezza torsionale in quanto, grazie all'utilizzo dei 4 laser posizionati sul piattello posto sull'asse di applicazione della forza è possibile conoscere, oltre allo spostamento, anche la rotazione del piano deformato, è quindi possibile ricavare un valore per la rigidezza torsionale del componente misurato moltiplicando il valore della rigidezza laterale per il quadrato della distanza tra la retta ottenuta intersecando il piano deformato con il piano indeformato e l'asse di applicazione della forza.

Per validare questo valore si prende in esame ancora una volta il braccio oscillante impiegato per la validazione della rigidezza laterale, con lo stesso schema di vincolo, le stesse proprietà di connessione tra i vari componenti dell'assieme. Si aggiunge, per valutare il piano indeformato, il piattello di riscontro dei laser e si andrà a valutare lo spostamento di tre punti per i quali passerà il piano deformato.

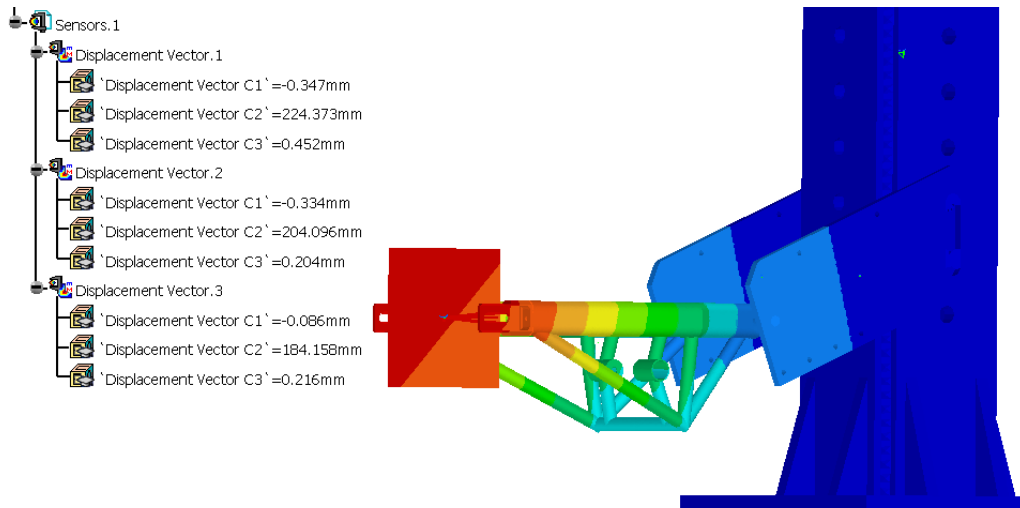


FIGURA 22

come si può osservare dalla figura i 3 punti di controllo sul piattello hanno una componente di spostamento predominante identificata dal software come C2 e come si può facilmente intuire è quella relativa allo spostamento lungo Y.

Con semplici calcoli si può quindi ricavare il piano deformato ed intersecandolo con il piano indeformato si ottiene:

Distanza dell'asse di applicazione della forza dall'asse appena calcolato $\cong 472 \text{ mm}$ ed un'inclinazione di tale asse rispetto all'orizzontale di $\cong 65^\circ$

Il valore stimato dal software per la rigidità torsionale è quindi:

$$k_{tors} = k_{lat} \cdot d^2 = 502 \cdot 472^2 = 111392000 \frac{Nmm}{rad}$$

Utilizzando il sistema di unità di misura SI: $k_{tors} = 111 \frac{Nm}{rad}$

La misura sperimentale della distanza d risulta pari a 570 mm con una

$k_{tors \text{ SPERIMENTALE}} = 162 \frac{Nm}{rad}$ si ha quindi uno scostamento tra il valore sperimentale e il valore calcolato del 30%, questo scostamento è elevato poiché la rigidità torsionale calcolata con questo metodo varia con il quadrato della distanza.

3.7 Considerazioni conclusive sulla procedura di valutazione delle rigidità

Grazie alle analisi appena svolte si è dimostrato come l'apparato di misura messo a punto per la valutazione delle rigidità di telai e forcellone di veicoli a due ruote produca valori che sono in buon accordo con i valori calcolati si può quindi affermare che se si dispone delle matematiche 3D di un componente, se ne possono studiare e prevedere le caratteristiche di rigidità utilizzando il modello ad elementi finiti presentato nei paragrafi precedenti, e demandando al mero scopo di verifica finale l'analisi sperimentale attraverso la MotoStiffMeter.

3.8 Valutazione dell'incertezza di misura

Al termine di questo capitolo si esegue una breve analisi dell'incertezza con la quale si presentano i risultati ricavati.

Si considerano come riferimento 3 prove eseguite sul forcellone, i valori di output di ciascuna prova per la rigidezza laterale sono:

Prova 1: $K_{lat}=494$ kN/m

Prova 2: $K_{lat}=505$ kN/m

Prova 3: $K_{lat}=498$ kN/m

Considero come % di incertezza il rapporto tra il valore massimo ed il valore minimo:
 $i_l=2\%$

Si considera inoltre un termine di incertezza del 12% dovuto allo scostamento dei dati sperimentali da quelli numerici per quanto riguarda il caso peggiore di componente misurato con rigidezza comparabile a quella del vincolo

Per quanto riguarda i laser di misura dal datasheet si ricava come valore di incertezza ± 0.001 mm che rapportato all'ordine di grandezza delle altre misure è ininfluenza.

Si combinano quadraticamente i risultati e si ottiene che l'incertezza della misura di K_{lat} vale $i = \sqrt{0.12^2 + 0.02^2} = 0.122 \rightarrow 13\%$.

Per quanto riguarda invece la rigidezza torsionale calcolata considera come termini di incertezza quella della K_{lat} appena calcolata e lo scostamento dei dati sperimentali con quelli numerici pari al 30%, si combinano ancora quadraticamente i risultati ottenuti e si ottiene: $i_{Kt} = \sqrt{0.13^2 + 0.3^2} = 0.33 \rightarrow 33\%$ il motivo per cui questa incertezza è così elevata come si è già scritto in precedenza è dovuto al fatto che la definizione dell'asse di torsione non è molto accurata ed inoltre il calcolo di k_t dipende dal quadrato della distanza del punto di applicazione della forza e di misura dello spostamento e l'asse di torsione.

Capitolo 4

Caratterizzazione dinamica: Analisi modale

4.1 L'analisi modale

La maggior parte delle strutture vibrano: durante il normale funzionamento, qualsiasi macchina, veicolo o struttura è sottoposto a delle forze dinamiche che causano delle vibrazioni. In tutti questi casi la risposta strutturale deve essere quantificata, in modo da poterne verificare le implicazioni su fattori quali le prestazioni e la fatica. Spesso queste vibrazioni devono essere studiate in quanto creano un problema immediato, oppure perché la struttura deve rispondere a delle norme di costruzione o di collaudo.

Tutte le strutture presentano un comportamento modale che dipende da come sono realizzate le strutture, in particolare dipende dalla distribuzione di massa e di rigidità della struttura.

Mediante tale analisi si definisce la risposta della struttura in progetto a forzanti con diversi contenuti armonici. Gli scopi possono essere vari, per esempio evitare fenomeni di risonanza meccanica oppure valutare gli stati di sforzo/deformazione indotti dalle stesse forzanti.

Prima di imbarcarsi in descrizioni dettagliate dell'argomento, è importante ricordare che nessun test singolo o procedura di analisi è "migliore" per tutti i casi e quindi è molto importante un chiaro obiettivo definito prima che venga effettuato qualsiasi test.

Questo processo è meglio affrontato considerando in dettaglio le seguenti domande:

- qual è il risultato desiderato dallo studio di cui il test modale è parte?
- in quale forma sono richiesti i risultati per essere di uso massimo?

L'applicazione per cui l'analisi modale è più comunemente usata è la misura delle proprietà di vibrazione di una struttura per poterla confrontare con i dati corrispondenti prodotti da un modello ad elementi finiti o un modello teorico. Questa applicazione è spesso sostenuta da un bisogno o da un desiderio di convalidare il modello teorico prima del suo effettivo utilizzo per poter prevedere la risposta del sistema misurato con un buon livello di confidenza.

Molti casi di confronto tra teoria e esperimento si fermano allo stadio di ottenimento di un insieme di risultati e semplice confronto. A volte, verrà effettuato un tentativo per regolare o correggere il modello teorico per avvicinare le sue proprietà modali ai risultati misurati.

4.1.1 Cenni di teoria

Il numero di gradi di libertà di un sistema dinamico è uguale al numero di coordinate indipendenti necessarie a descrivere il moto del sistema, ed è quindi un indicatore, anche se parziale, della complessità del suo moto. Le oscillazioni libere avvengono alle frequenze naturali del sistema e ogni sistema ha un numero di frequenze naturali pari al numero di gradi di libertà.

Quando il sistema oscilla armonicamente nel tempo e il moto è caratterizzato da una unica frequenza propria, si dice che il sistema oscilla in un modo normale o principale di vibrare. Anche i modi di vibrare sono pari al numero di gradi di libertà.

Se il sistema è lineare la soluzione completa delle oscillazioni libere si può costruire sovrapponendo oscillazioni con le frequenze naturali del sistema.

Si considera per semplicità un sistema a 2 gdl non smorzato, si può scrivere:

$$[M]\ddot{x} + [K]x = 0$$

Dove $[M]$ è la matrice di massa 2×2 , diagonale e $[K]$ è la matrice di rigidità.

Siano:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \cos(\omega t) \\ x_2 &= a_2 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

le soluzioni oscillanti del sistema con a_i ampiezza della risposta i -esima

Sostituendo quindi nel sistema gli x_1 e x_2 e rispettive derivate si arriva a calcolare le 2 frequenze di risonanza del sistema ω_n .

Si può quindi scrivere:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} [-\omega_n^2 [M] + [K]] = 0$$

Sostituendo quindi ad ω_n il valore ricavato in precedenza si determinano 2 vettori del tipo:

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} a_1(\omega_{ni}) \\ a_2(\omega_{ni}) \end{Bmatrix}_{i=1,2}$$

è consuetudine nella pratica, assegnare valore unitario ad una delle ampiezze, Si dice, in questo caso, che i modi sono stati normalizzati all'unità.

I vettori $\{u_i\}$ si dicono vettori modali ed hanno la caratteristica di essere ortogonali alle matrici di massa e rigidità:

$$\{u_1\}^T [m] \{u_2\} = \{0\} \quad \{u_1\}^T [k] \{u_2\} = \{0\}$$

La matrice $[u] = [\{u_1\} \quad \{u_2\}]$ è detta matrice modale.

4.2 Metodi di misura per l'analisi modale

Essenzialmente, ci sono tre aspetti del processo di misurazione che richiedono un'attenzione particolare per assicurare l'acquisizione di dati di alta qualità che sono necessari per la fase successiva: l'analisi dei dati. Questi sono:

- gli aspetti meccanici del vincolo ed il modo di eccitare la struttura;
- la corretta trasduzione delle quantità da misurare: forza in input e spostamento in output;
- l'elaborazione del segnale appropriata al tipo di test usato.

Nella prima categoria, incontriamo domande su come il test dovrebbe essere sospeso o supportato e come dovrebbe essere eccitato.

Di solito, per il supporto viene scelta una delle tre opzioni:

1. libero (che di solito significa sospeso su molle molto morbide);
2. messa a terra, che richiede il suo serraggio rigido in determinati punti;
3. provino collegato ad un'altra struttura o componente che presenta un attacco non rigido.

La scelta si farà tenendo in considerazione vari fattori, a volte contrastanti. Tra questi possono essere il desiderio di correlare i risultati del test con la teoria e in questo caso si dovrebbe ricordare che i confini liberi sono molto più facili da simulare nelle condizioni del test rispetto a quando sono bloccati o messi a terra.

I meccanismi dell'eccitazione sono raggiunti collegando il sistema ad un generatore di vibrazioni, o shaker, o usando qualche forma di input transitorio, come un colpo di martello o rilascio improvviso da una posizione deformata. Entrambi gli approcci presentano vantaggi e svantaggi può essere molto importante scegliere il migliore in ciascun caso.

Le FRF possono essere ottenute direttamente dall'applicazione di un'eccitazione armonica e quindi misurazione del risultato come risposta armonica. Questo tipo di test viene spesso definito "sine test" e richiede l'attacco di uno shaker alla struttura.

L'intervallo di frequenza è coperto passando da una frequenza all'altra successivamente, o spostando lentamente la frequenza continuamente, in entrambi i casi consentendo di raggiungere condizioni quasi stazionarie.

In alternativa una metodologia di eccitazione ora ampiamente utilizzata è quella definita 'Transitoria' si utilizzano segnali di eccitazione impulsivi, resi pratici dall'esistenza di complessi analizzatori di elaborazione del segnale che sono in grado di risolvere il problema nel dominio della frequenza utilizzando l'analisi di 'Fourier'. Queste eccitazioni 'transitorie' possono essere applicate senza la necessità di collegare uno shaker alla struttura consentendo quindi di risparmiare nel tempo e nella produzione di fissaggi appositi;

La stragrande maggioranza dello sforzo dell'analisi modale comporta l'adattamento o "curve fitting" di una curva come l'equazione:

$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^N \frac{r A_{jk}}{\lambda_r^2 - \omega^2}$$

sopra alle FRF misurate e quindi la ricerca dei parametri modali appropriati.

I metodi curve fitting non sono oggetto di questa tesi, per le analisi delle FRF verranno infatti impiegati i metodi forniti direttamente dal software di analisi.

4.2.1 Terminologia:

-[H(w)]: Frequency Response Matrix

- l'elemento H_{jk} (a) rappresenta la risposta armonica, X_j , in uno dei gradi di libertà, j, causato da una singola forza armonica, F_k , applicata a un diverso grado di libertà, k.

- λ_r^2 è l'autovalore associato all' r-esimo modo di vibrare (la sua frequenza naturale combinata con il coefficiente di smorzamento).

- $r A_{jk}$ è definito "Costante modale" e deriva dalla matrice degli autovettori detta "matrice modale"

- N è il numero di gradi di libertà.

4.3 Applicazione ad un componente di tipo motociclistico

Poiché una motocicletta è un oggetto che lavora essenzialmente in campo dinamico la caratterizzazione di un componente motociclistico non può dirsi completa senza la valutazione delle sue caratteristiche modali, l'apparato di misura MotoStiffMeter viene utilizzato ora con il solo scopo di supporto del componente si andrà quindi a realizzare la configurazione Incastro-Libero e come metodo di eccitazione si sceglie l'eccitazione impulsiva applicata tramite l'ausilio di un martello strumentato.

Come modello di riferimento si è scelto ancora una volta il forcellone impiegato per la validazione statica.

Le singole FRF vengono acquisite mediante l'impegno di accelerometri piezoelettrici di tipo mono-assiale sicché con una singola eccitazione si ottengono 3 FRF per ogni accelerometro impiegato.

Poiché le componenti di rigidità e di massa del sistema di vincolo impiegato si devono considerare non trascurabili si eseguirà dapprima una caratterizzazione del singolo sistema di vincolo e successivamente verrà presentata l'analisi sul forcellone per la validazione dei risultati ottenuti mediante simulazione numerica.

4.3.1 Analisi modale analitica della colonna

I moderni software FEM permettono di ricavare agevolmente i primi N modi di vibrare della struttura in esame sia per quanto riguarda i casi libero-libero, incastro-incastro e casi intermedi, in particolare l'analisi della colonna che verrà ora presentata fa parte del caso particolare incastro-libero del quale esiste anche la soluzione analitica presente sottoforma di coefficienti tabellati.

Dalla teoria dei sistemi continui è noto che ci sono 3 tipi di modi di vibrare:






- Flessionale
- Estensionale o Longitudinale
- Torsionale

4.3.1.1 Analisi delle prime frequenze proprie flessionali con il metodo analitico:

Dalla teoria delle vibrazioni flessionali per i sistemi continui si ha che per una trave incastrata ad una estremità e libera all'altra vale la relazione:

$$\omega_n = (\chi_n L)^2 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}}$$

Dove L è la lunghezza della trave, E il modulo di elasticità del materiale J momento di inerzia della sezione, ρ è la densità del materiale, A è l'area della sezione e χ_n^L è un coefficiente tabellato che vale:

End conditions of beam	Frequency equation	Mode shape (normal function)	Value of $\beta_n l$
	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x]$	$\beta_{1l} = \pi$ $\beta_{2l} = 2\pi$ $\beta_{3l} = 3\pi$ $\beta_{4l} = 4\pi$
	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_{1l} = 4.730041$ $\beta_{2l} = 7.853205$ $\beta_{3l} = 10.995608$ $\beta_{4l} = 14.137165$ ($\beta l = 0$ for rigid body mode)
	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n[\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_{1l} = 4.730041$ $\beta_{2l} = 7.853205$ $\beta_{3l} = 10.995608$ $\beta_{4l} = 14.137165$
	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_{1l} = 1.875104$ $\beta_{2l} = 4.694091$ $\beta_{3l} = 7.854757$ $\beta_{4l} = 10.995541$
	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n[\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x + \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left(\frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_{1l} = 3.926602$ $\beta_{2l} = 7.068583$ $\beta_{3l} = 10.210176$ $\beta_{4l} = 13.351768$

Dal modello CAD si ricavano i valori di A e J:

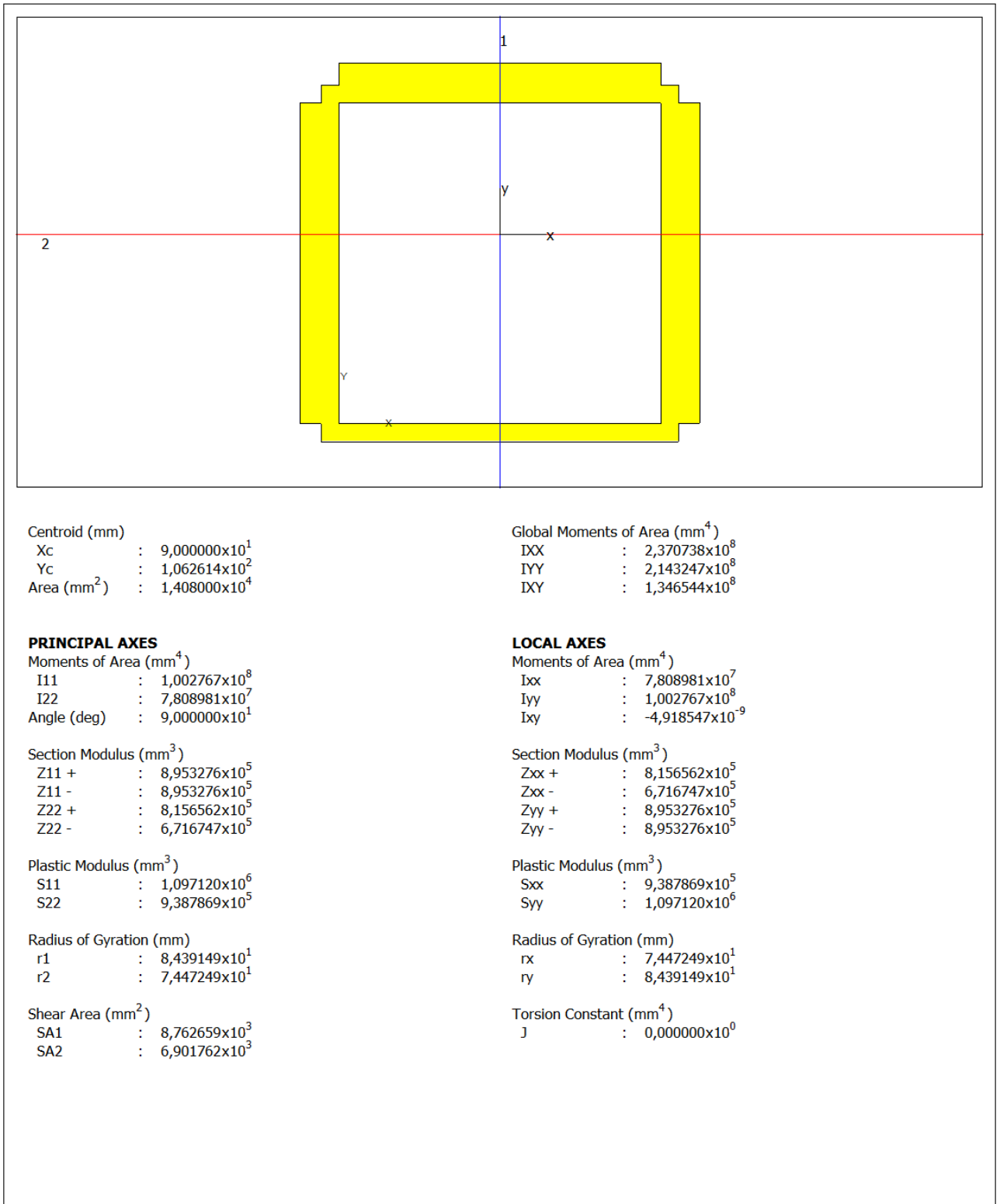


FIGURA 23

Andamento della deformata secondo il metodo analitico:

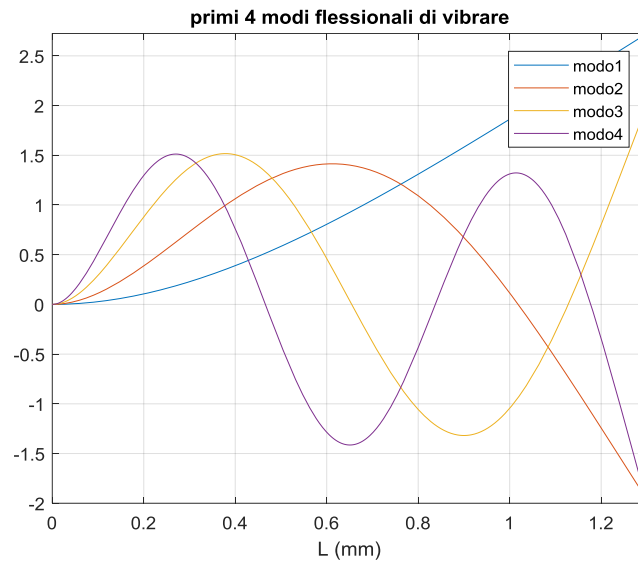


FIGURA 24

Dopo aver svolto i calcoli si ottiene quindi:

- Piano X-Z (SAE):



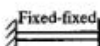
	wn rad/s	fn (Hz)
1	999,4416	159,0661
2	6263,845	996,922
3	17540,71	2791,691
4	34373,55	5470,72

- Piano Y-Z (SAE):

	wn rad/s	fn (Hz)
1	783,7052	124,7305
2	4911,751	781,7294
3	13754,43	2189,085
4	26953,78	4289,827

4.3.1.2 Analisi delle frequenze proprie longitudinali

La seguente tabella riporta le espressioni delle pulsazioni naturali e delle forme modali per alcune condizioni di vincolo.

	End conditions of bar	Bounty conditions	Frequency equation	Mode shape (normal function)	Natural frequencies
$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$		$u(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\cos \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi c}{2l};$ $n = 0, 1, 2, \dots$
		$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 0, 1, 2, \dots$
		$u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$	$\sin \frac{\omega l}{c} = 0$	$U_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n = \frac{n\pi c}{l};$ $n = 1, 2, 3, \dots$

Nel nostro caso, si ha che (unita SI):

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2e+11}{7860}} = 5.0443e+3$$

E quindi:

n	wn (rad/s)	fn(Hz)
0	6095,052239	970,05769
1	18285,15672	2910,1731
2	30475,2612	4850,2885
3	42665,36568	6790,4038

4.3.1.3 Analisi delle frequenze proprie torsionali

Dalla teoria dei sistemi continui è noto che per le vibrazioni torsionali valgono le stesse relazioni scritte per le vibrazioni longitudinali avendo cura però di porre:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{2e+11}{2(1+0.27)7860}} = \sqrt{\frac{7.87e+10}{7860}} = 3.17e+3$$

E quindi:

n	wn (rad/s)	fn(Hz)
0	3824,4007	608,6723
1	11473,202	1826,017
2	19122,004	3043,361
3	26770,805	4260,706

Ricapitolando quindi i risultati l'analisi analitica ha portato ai seguenti primi 5 modi di vibrare:

n	Frequenza (Hz)	Descrizione:
1	125	1° Flessione sul piano (Y-Z SAE)
2	159	1° Flessione sul piano (X-Z SAE)
3	609	1° Torsione
4	781	2° Flessione sul piano (Y-Z)
5	970	1° Longitudinale (lungo Z SAE)

4.3.2 Analisi tramite FEM della colonna

A seguito dell'analisi modale tramite gli elementi finiti sono stati dunque individuati i primi 10 modi di vibrare:

n	Frequenza (Hz)
1	49
2	57
3	247
4	473
5	499
6	509
7	663
8	769
9	1113
10	1138

Quello che si osserva subito si vanno ora a mostrare in termini di deformata i vari modi di vibrare restituiti dal software:

- 1 Modo: 49 Hz, si tratta di un pendolamento “rigido” della colonna dovuto alla cedevolezza della base.

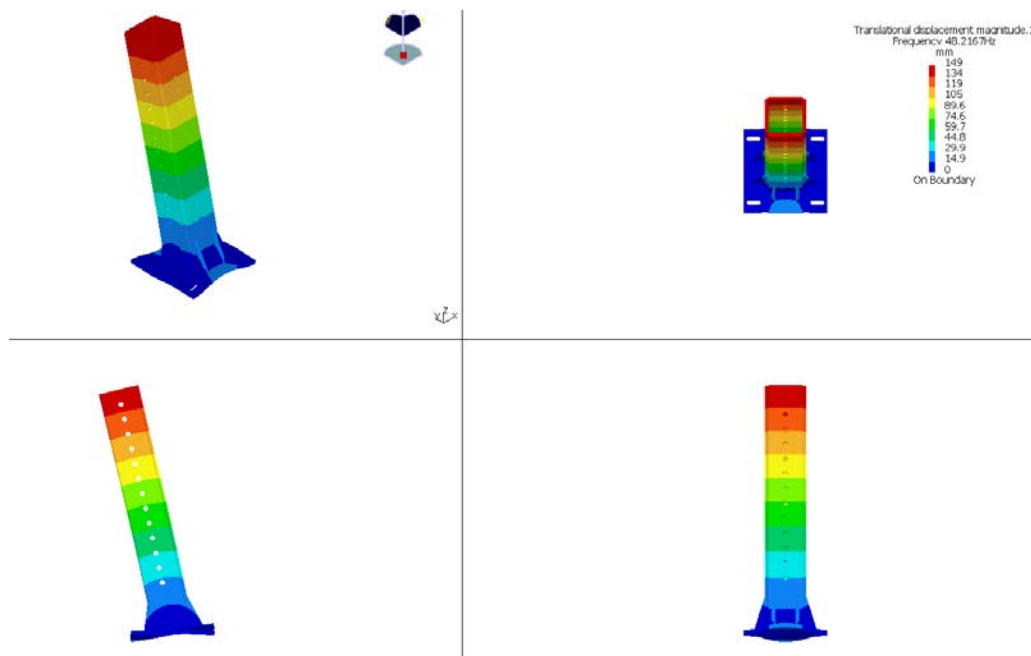


FIGURA 25

- 2 modo di vibrare: 57 Hz, si tratta anche in questo caso di un pendolamento rigido della colonna dovuto ancora alla cedevolezza della base.

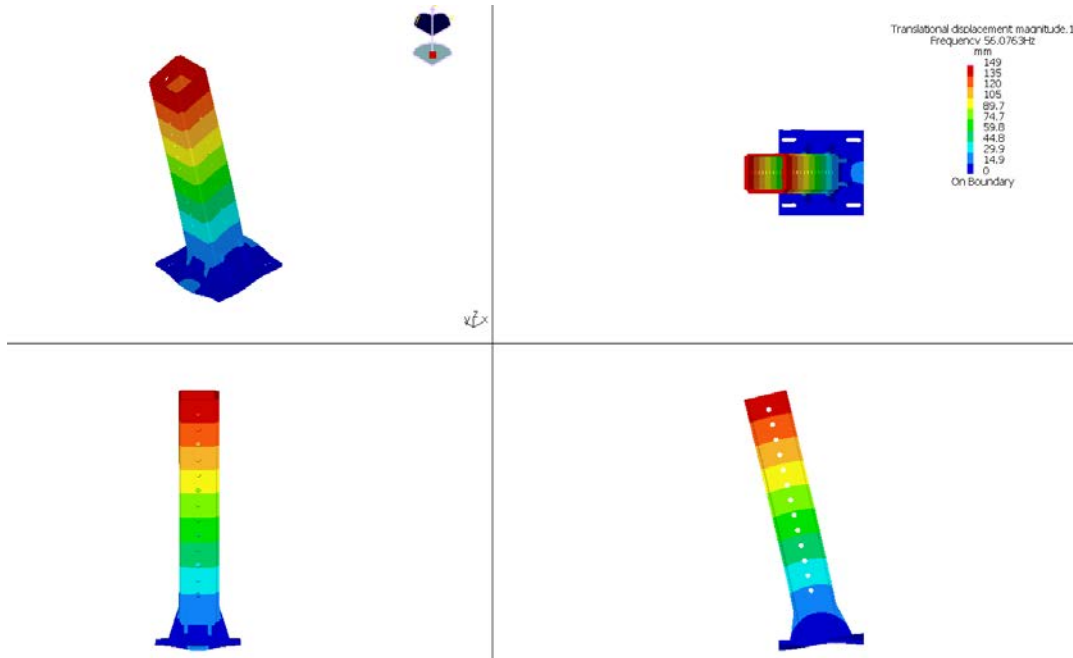


FIGURA 26

- 3 modo di vibrare: 247 Hz, ancora una volta si evidenzia l'effetto della cedevolezza della base.

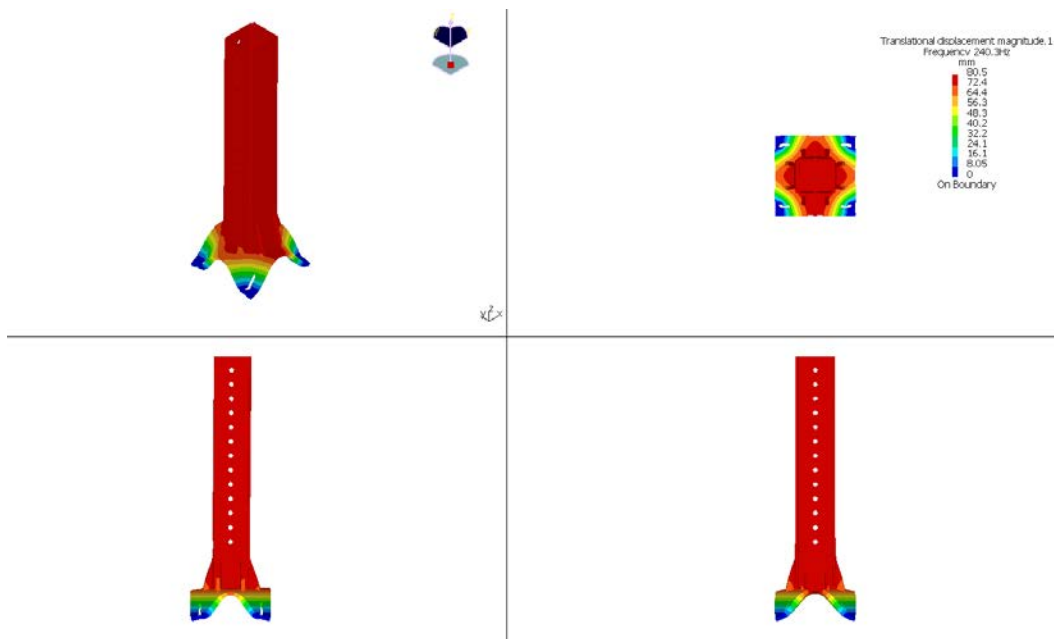


FIGURA 27

- 4 Modo di vibrare: 473 Hz, a tale frequenza inizia ad essere eccitata la colonna, si tratta in particolare di un modo laterale, si fa notare che per quanto riguarda il modo flessionale, vi è un secondo picco molto vicino relativo alla frequenza proprio flessionale nell'altro piano le cui deformata è identica a quella di figura, tale frequenza vale 499Hz.

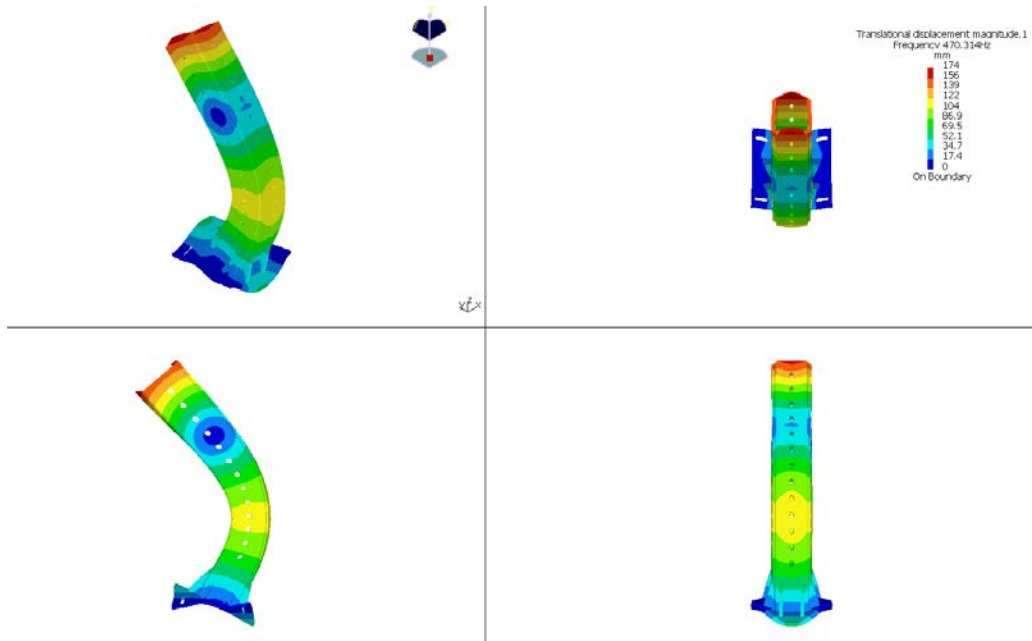


FIGURA 28

- 6 Modo di vibrare: 509 Hz: si tratta in questo caso di un modo torsionale della colonna:

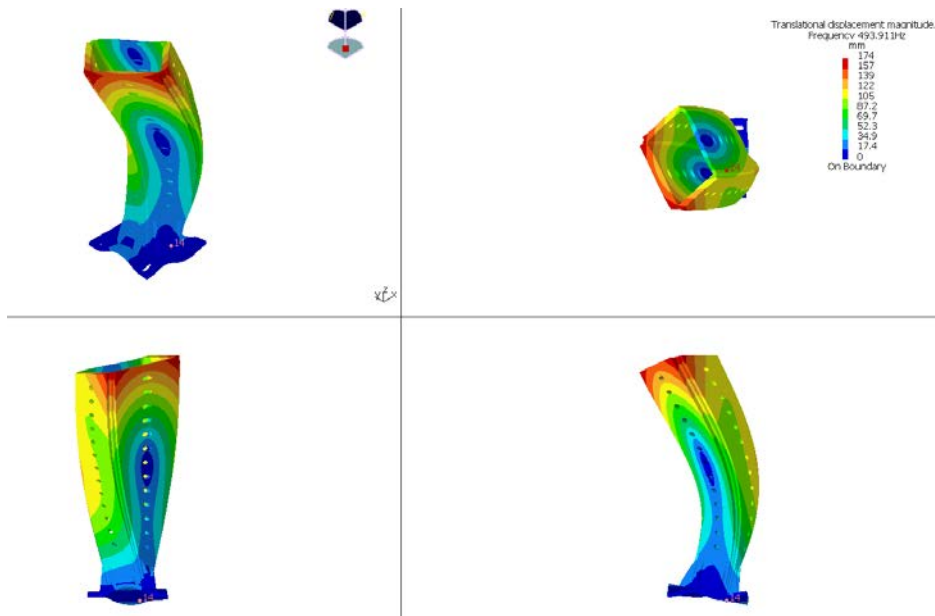


FIGURA 29

Per quanto riguarda i modi successivi 7,8,9,10 si tratta di modi ad alta frequenza non interessanti nel campo motociclistico per cui non verranno trattati in questa sede.

Ricapitolando quindi si è ricavato:

n	Frequenza (Hz)	Descrizione
1	49	Base
2	57	Base
3	247	Base
4	473	Flessionale (Y-Z SAE)
5	499	Flessionale (X-Z SAE)
6	509	1° Torsionale

Quello che si può affermare a questo punto è l'effetto predominante della base della colonna rispetto al resto nel campo di frequenza di interesse per l'ambito motociclistico che si può considerare compreso nell'intervallo [0-400 Hz].

Noti questi risultati si passa all'analisi modale sperimentale.

4.3.3 Analisi modale sperimentale della colonna

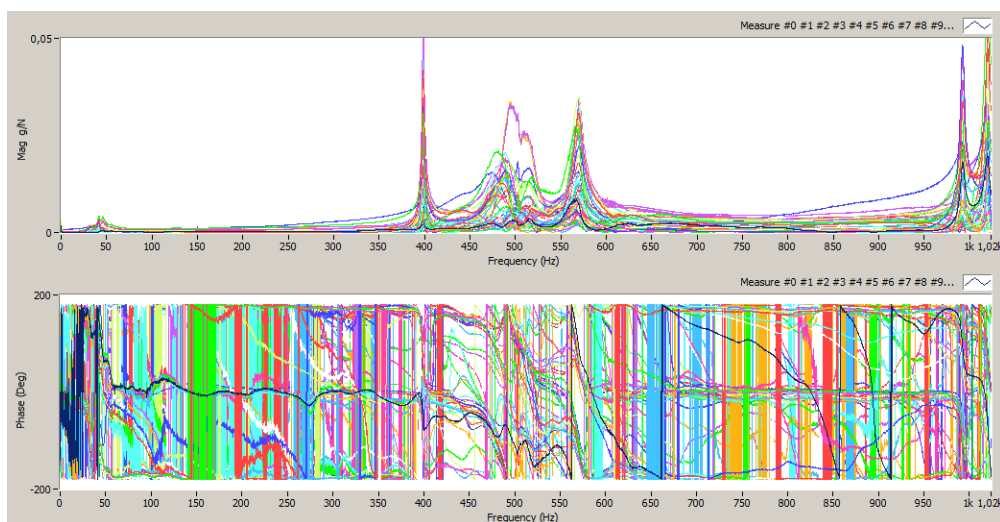


FIGURA 30

Si ricorda che l'analisi viene svolta con l'ausilio di accelerometri triassiali, la figura mostra le FRF acquisite nelle 3 direzioni per tutto l'intervallo di campionamento, si può subito notare che vi è la presenza di picchi di ampiezza elevata per l'intervallo di

frequenza da circa 400 a circa 600 Hz, tuttavia ci sono dei modi ad ampiezza minore nella zona 0-100 Hz.

Un primo risultato molto interessante dell'analisi sperimentale è proprio nella zona a "bassa frequenza":

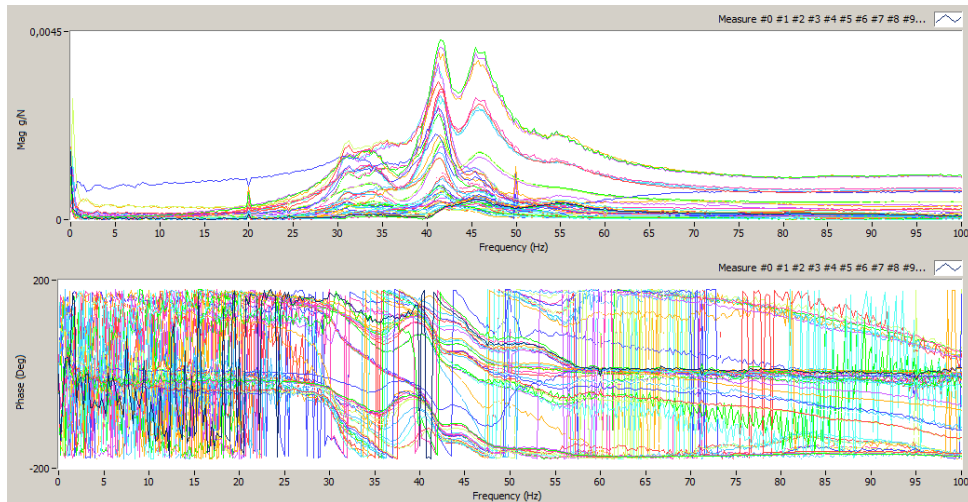


FIGURA 31

Si nota subito la presenza di due picchi ravvicinati per le frequenze di 41 e 45 Hz, tale doppio picco si riscontrava anche nell'analisi numerica per le frequenze di 49 e 57 Hz.

Si va quindi ad analizzare la deformata prodotta da questi due modi di vibrare:

- Modo a 41Hz:

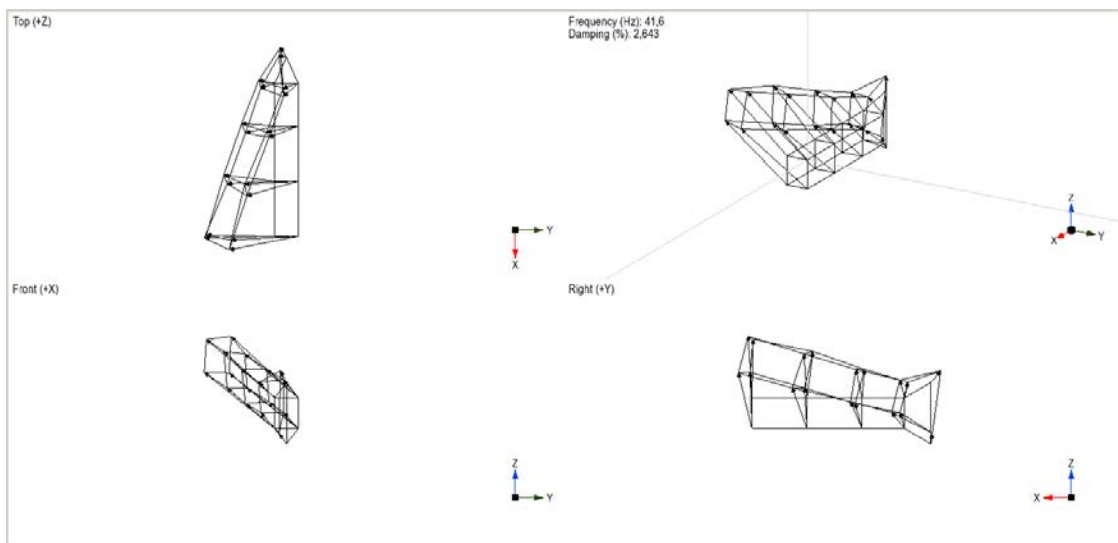


FIGURA 32

Si può osservare senza difficoltà che si tratta di evidente pendolamento della colonna dovuto al movimento accentuato di nodi posti alla base della colonna.

- Modo a 45 Hz:

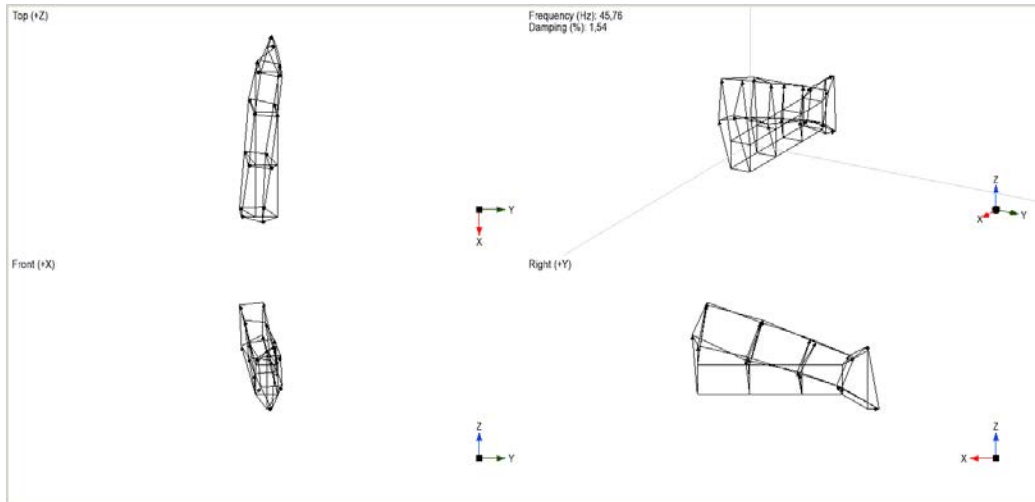


FIGURA 33

Proprio come si era visto nell'analisi modale analitica il secondo picco mostra sempre un pendolamento della colonna unito ad uno spostamento accentuato della zona del vincolo.

Si presentano ora i risultati della ricerca degli altri nodi che sono stati predetti dall'analisi analitica:

per quanto riguarda il terzo modo ipotizzato si ricerca nella zona di frequenza 100-300 Hz:

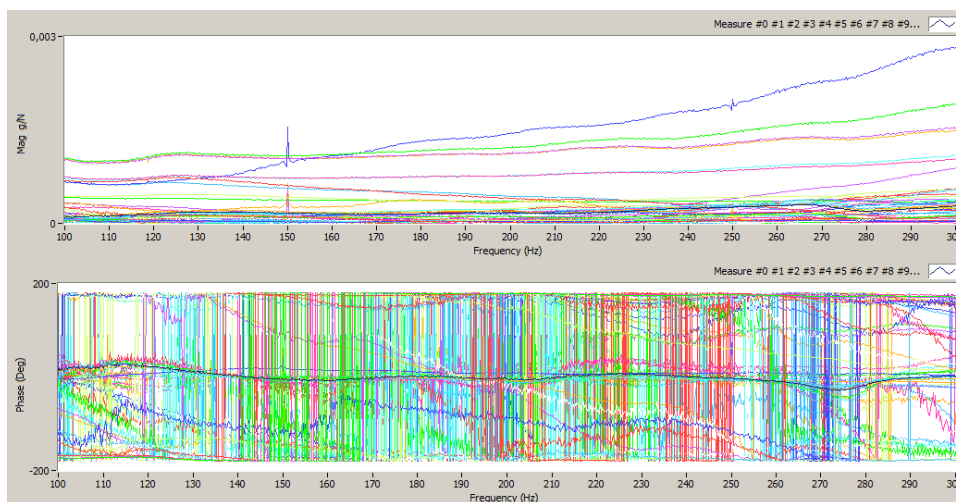


FIGURA 34

Come è possibile osservare a parte qualche nodo che mostra un piccolo picco nella zona dei 150 Hz molto probabilmente riconducibile a rumore, le FRF per questo intervallo di analisi presentano un andamento abbastanza piatto, il modo a 240 Hz previsto, prevalentemente a carattere di spostamento verticale non si evidenzia in questa analisi, va detto però che la direzione di eccitazione esterna è ortogonale alla direzione di spostamento data da questo modo di vibrare, questa potrebbe essere una spiegazione valida del motivo per cui non si individua tale modo.

- Modi della colonna: i valori previsti dal FEM per i modi propri della colonna sono: 470 e 493 Hz, ci si aspetta quindi di vedere dei picchi nell' intervallo 300-600 Hz:

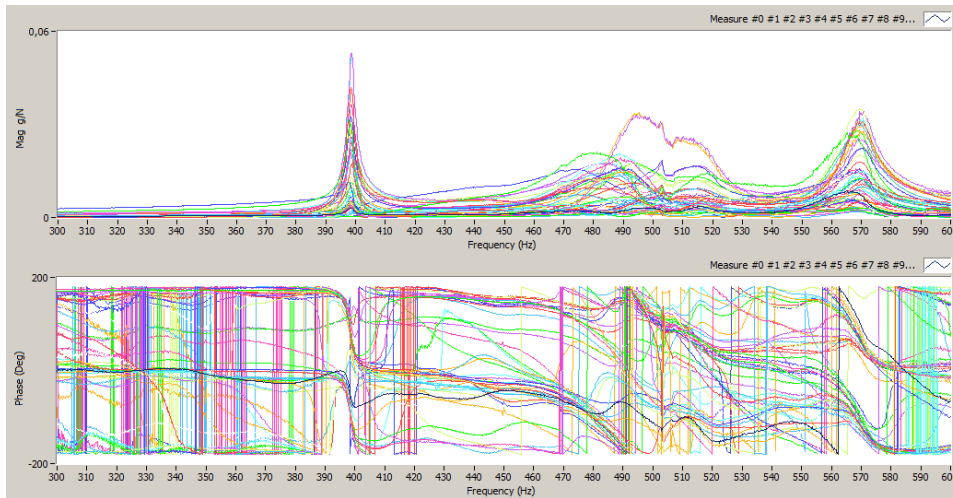


FIGURA 35

Osservando le FRF nell'intervallo “ad alta frequenza” si vede come vi sia la presenza di un picco molto netto e separato per una frequenza di 400 Hz, dalla deformata si vede che si tratta di un modo torsionale della colonna:

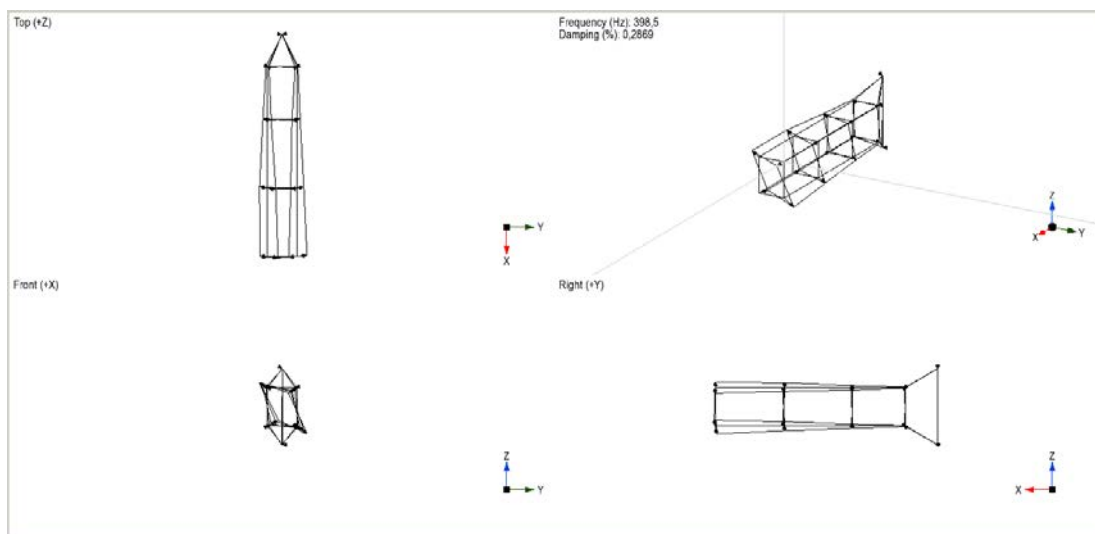


FIGURA 36

Giunti a questo punto occorre osservare che le analisi sperimentali mostrano una certa somiglianza con le analisi analitiche tuttavia lo scostamento dei risultati ottenuti da quelli previsti fa pensare che il modello utilizzato per l'analisi agli elementi finiti presenti un livello di approssimazione troppo elevato infatti tutti i modi di vibrare previsti sono più alti rispetto a quelli riscontrati sperimentalmente per questo motivo, tenendo conto della deformata prodotta dal software si è deciso di ripetere l'analisi andando ad agire nella zona del vincolo in particolare si è deciso di simulare anche l'effetto delle viti che collegano la colonna al basamento, si tratta di 4 viti M14 in acciaio che si comportano quindi come 4 molle interposte tra la colonna e il basamento.

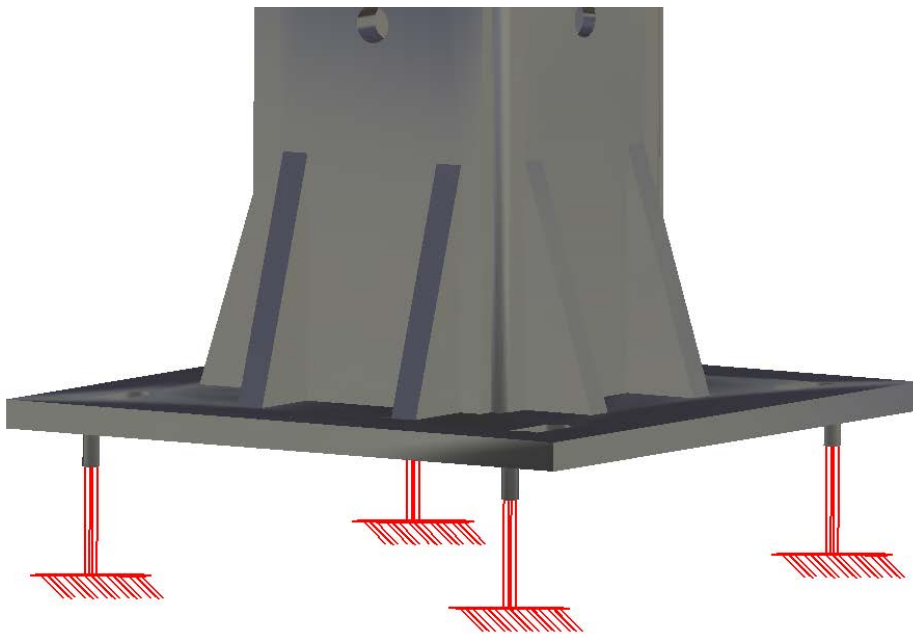


FIGURA 37

La nuova analisi agli elementi finiti da come primi 6 modi di vibrare le seguenti frequenze:

Frequenza (Hz):	Descrizione:
39	Cedevolezza della base
45	Cedevolezza della base
168	Cedevolezza della base
295	Laterale colonna

313 Laterale colonna

353 Torsionale colonna

si può quindi notare che ora le prime due frequenze naturali previste e le prime due riscontrate sperimentalmente sono in ottimo accordo, per quanto riguarda la terza frequenza naturale a 168 Hz valgono le ipotesi precedenti, la 5° frequenza naturale prevista riferita al modo torsionale è stata individuata sperimentalmente nella frequenza di 353Hz, rimane quindi da ricercare la 4 e la 5° Frequenza naturale che dovrebbero trovarsi tra i 200 e i 400 Hz:

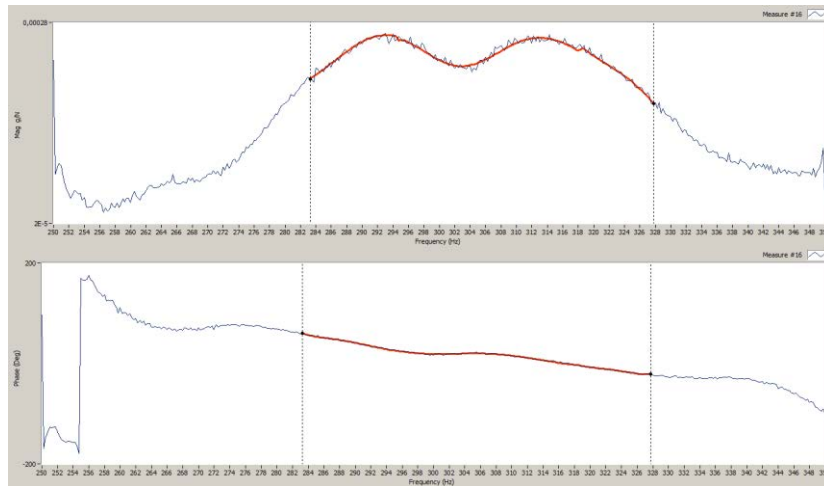


FIGURA 38

Come si può vedere dalle FRF si possono osservare abbastanza distintamente due picchi non molto distinti tuttavia, tenendo conto dei modi che si sta ricercando, si è giunti a individuare i picchi a 296 e 313 Hz:

- Deformata del modo a 296 Hz:

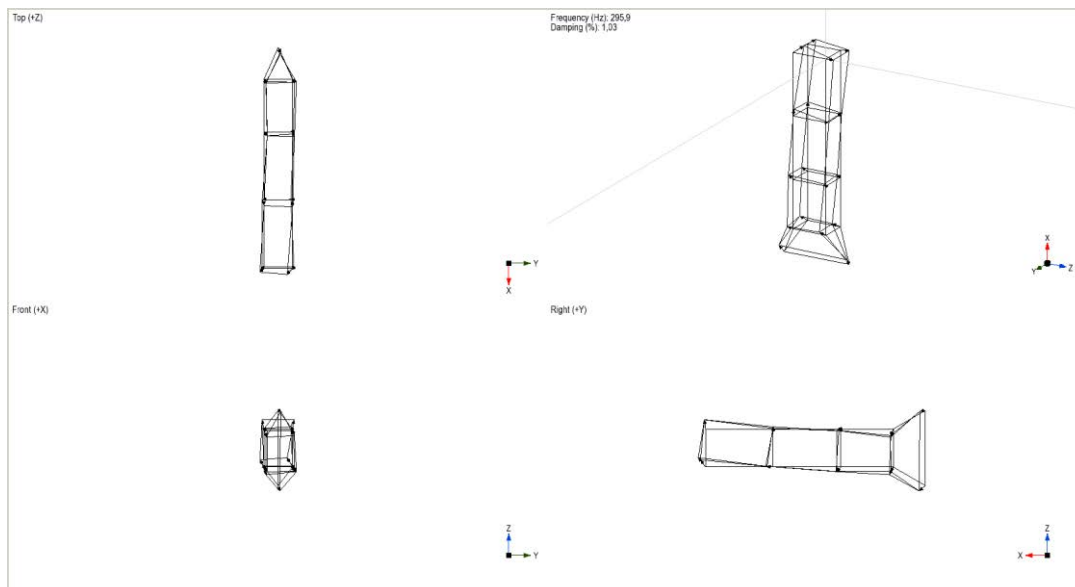


FIGURA 39

- Deformata del modo a 313 Hz

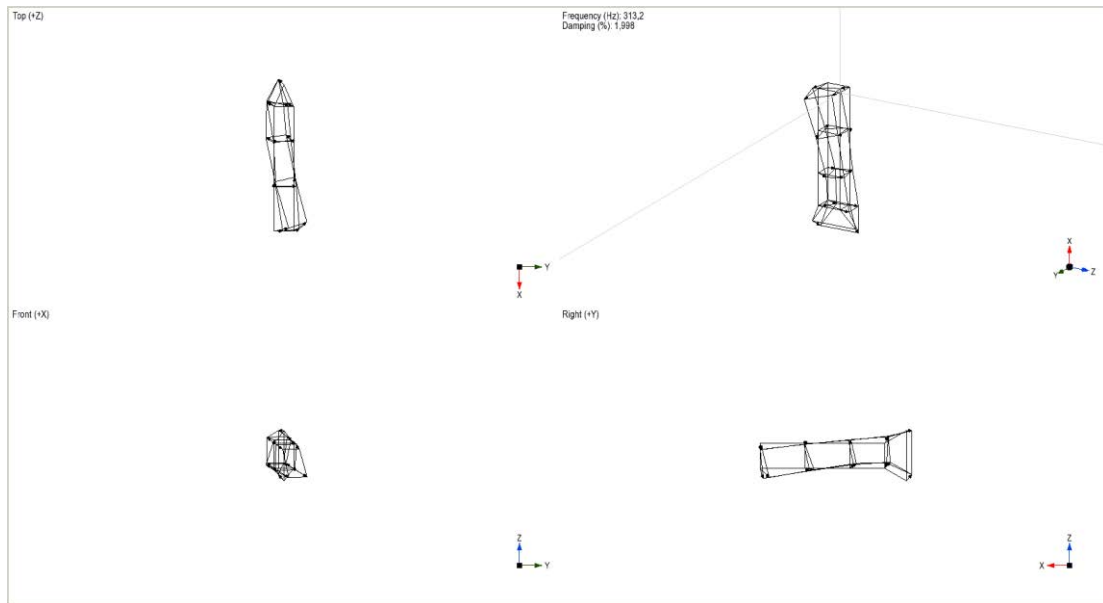


FIGURA 40

4.3.4 Effetto dell'applicazione di una massa concentrata sulla colonna

Si considera il modello 3D della colonna con viti interposte tra la base il punto di vincolo, si vuole andare a vedere come cambiano i modi della colonna se si applicano masse ed inerzie concentrate, dapprima si presenteranno i risultati dell'analisi nel capitolo successivo sarà presentata la comparativa con gli altri modelli.

4.3.4.1 Massa concentrata sull'asse verticale della colonna

Il primo modello di riferimento considera una sola massa concentrata di 10 kg (approssimativamente il peso del sistema di piastre e del forcellone), applicata nel baricentro della sezione della colonna, si andrà inoltre a vedere come variano i modi al variare dell'altezza della massa concentrata rispetto alla base.

Modello FEM:

- Elementi TET4: tetragonale a 4 nodi lineare.
- Dimensione Mesh: 5mm



FIGURA 41

L (m)	1.3	1	0.68	0.44	0.28
1° Flex y-z	35.75	37.24	38.42	39.03	39.28
1° Flex x-z	41.18	42.90	44.26	44.96	45.25
1° Long	165.73	165.76	165.84	165.92	165.98
2° Flex y-z	305.82	317.59	313.83	307.37	304.99
2° Flex x-z	313.57	324.15	320.68	314.148	311.37
1° Tors	355.38	360.09	362.68	365.266	367.08

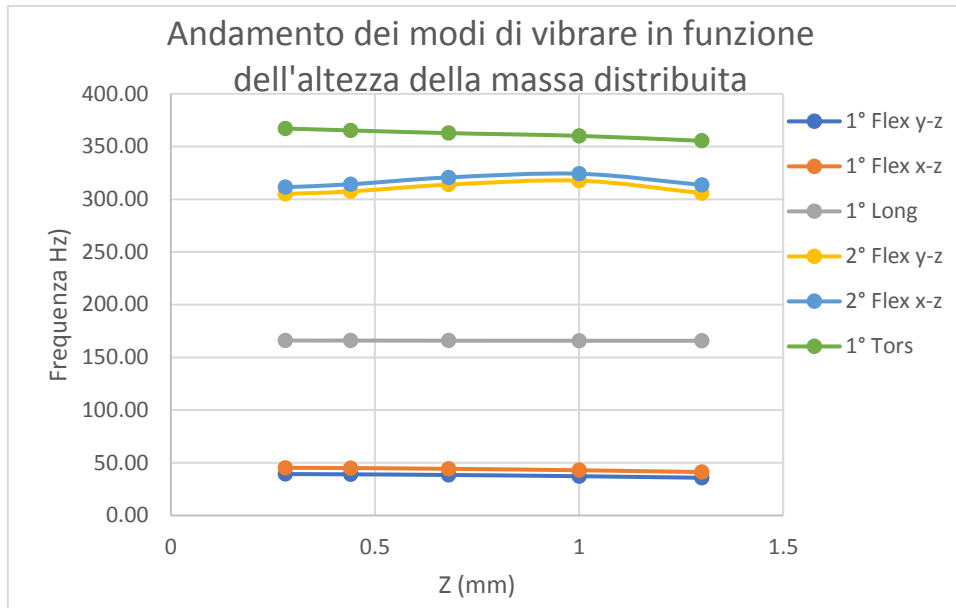


FIGURA 42

Si può quindi osservare che questo modello non è particolarmente influenzato dalla posizione della massa.

4.3.4.2 Massa a sbalzo per simulare l'applicazione di un componente

Secondo modello: si applica la massa concentrata di 10kg questa volta non sul baricentro della sezione della colonna ma con uno sbraccio di 400mm, anche in questo caso si esegue l'analisi per varie altezze rispetto alla base.

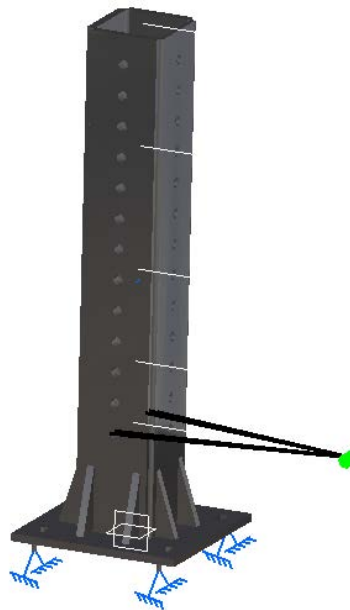


FIGURA 43

L (m)	1.3	1	0.68	0.44	0.28
1° Flex y-z	34.9753	36.3657	37.4985	38.1164	38.4061
1° Flex x-z	40.9191	42.838	44.1347	44.8836	45.2123
1° Long	164.18	159.45	160.083	161.253	161.38
1° Tors	188.287	185.904	196.083	208.949	223.974
2° Flex y-z	270.673	219.906	231.16	236.957	234.17

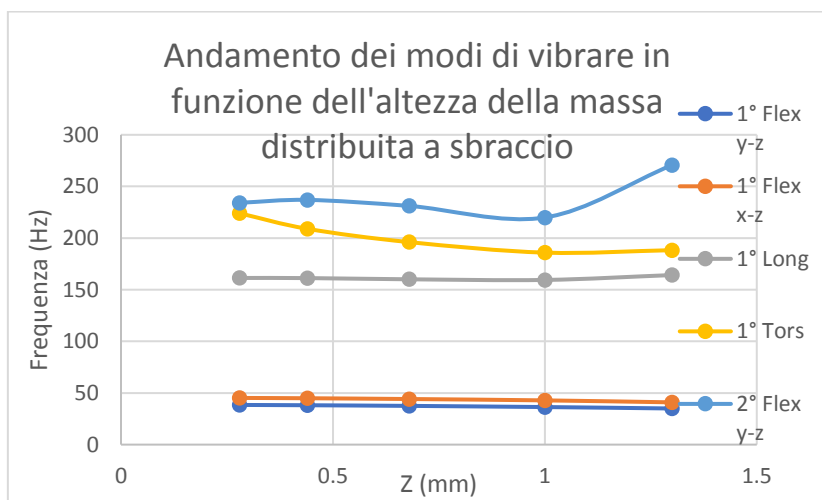


FIGURA 44

Al termine di questa analisi è possibile concludere che i modi a “bassa frequenza” della colonna sono poco influenzati da quello che vi viene collegato mentre i modi a frequenza più elevata risentono lievemente della variazione di altezza in particolare il modo torsionale per il modello con massa concentrata a sbalzo si abbassa in maniera considerevole passando dalla posizione più alta alla posizione più bassa.

Una seconda conclusione a cui portano i grafici mostrati in quest’ultima analisi è che lo spazio “di lavoro” nel quale un ipotetico componente dovrebbe risultare meno influenzato dall’effetto della struttura di vincolo, considerando i range di frequenza che sono tipici dei telai-forcelloni motociclistici, dovrebbe essere tra i 50 e 150 Hz.

Si nota inoltre come l’applicazione a sbalzo faccia crollare la frequenza per il modo torsionale da circa 350Hz per il modello con massa sull’asse della colonna a circa 200 Hz. per il modello appena analizzato, si va quindi ad analizzare l’effetto della massa sulla frequenza

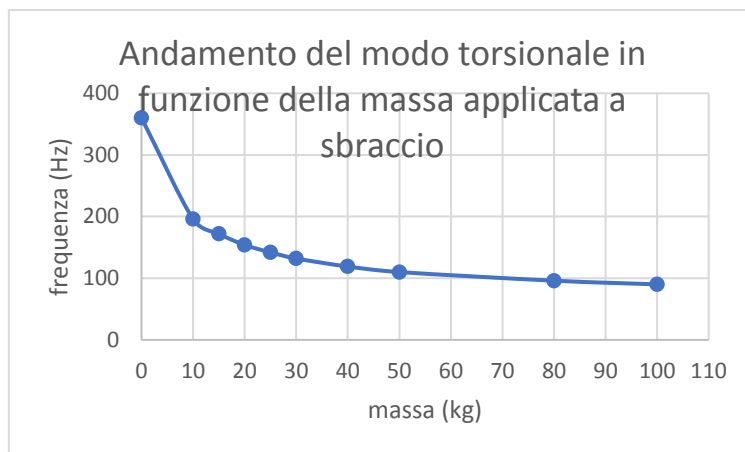


FIGURA 45

Dal grafico appena presentato si evince come la frequenza crolli rapidamente per poi stabilizzarsi attorno ad una frequenza di circa 100 Hz.

Si è quindi caratterizzata dinamicamente la colonna che farà da vincolo per le successive analisi modali dei componenti motociclistici.

4.4 Analisi modale su un forcellone motociclistico

Una volta validato il sistema di vincolo si è dimostrato come la struttura non sia particolarmente adatta all'analisi modale in quanto i modi di vibrare propri del sistema di vincolo giacciono nel range di frequenze tipici per i componenti motociclistici, verranno ora presentati i risultati di un'analisi modale eseguita sia sperimentalmente che numericamente sul forcellone motociclistico adottato per la validazione statica della MotoStiffMeter.

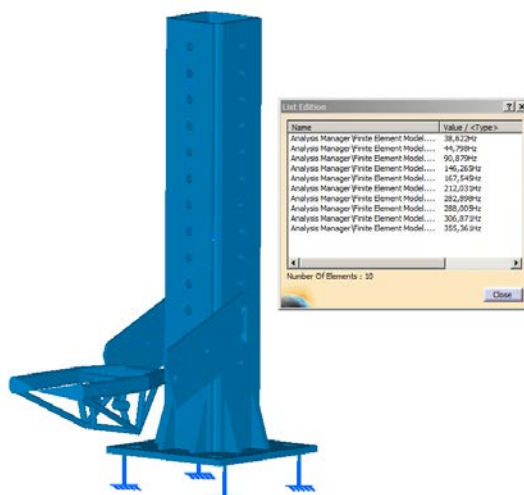


FIGURA 46

Il modello FEM è:

- mesh tetragonale a 4 nodi per tutti i componenti
- connessioni tipo rigido per tutti i collegamenti tra i componenti
- parte virtuale rigida tipo spider per simulare il perno ruota
- modello della colonna con viti ovvero con 4 molle tra l'incastro e la base

Si visualizzano i primi 10 modi di vibrare dell'intera struttura composta da forcellone e sistema di vincolo, che risultano 38, 45, 90, 146, 212, 282, 288, 306, 355 Hz.

Dalle analisi del vincolo si sa che le zone dove il vincolo non influenza la misura sono circa [0-30Hz], [50-200Hz] e [250-300Hz] infatti andando a visualizzare le deformate per i primi due modi 38 e 45 si vede subito come tutto il vincolo sia eccitato.

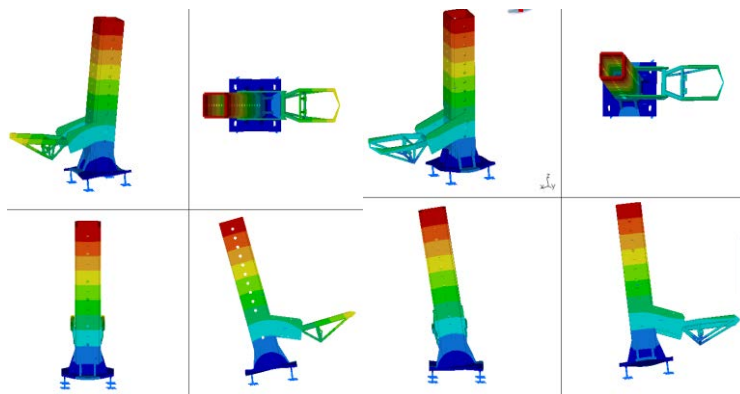


FIGURA 47

Dopo i primi due modi chiaramente del vincolo si hanno 5 modi che stanno dentro la zona di misura: 90-146 e 212,282 e 288 Hz:

- Modo a 90 Hz

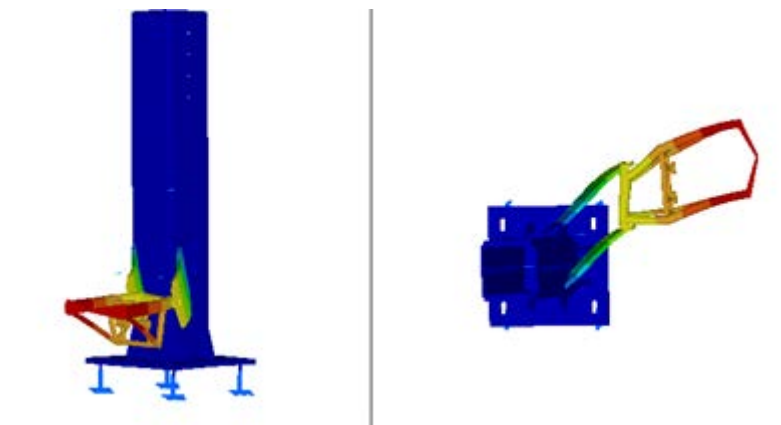


FIGURA 48

Osservando la deformata si osserva come vi sia un evidente sbandamento laterale delle piastre di supporto, elemento che non era stato preso in considerazione nelle analisi della colonna.

- Modo a 146 Hz

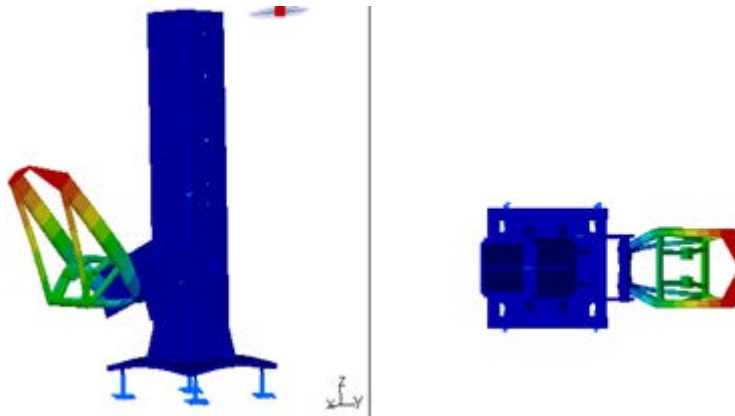


FIGURA 49

Questo modo, osservando la deformata, coinvolge principalmente il forcellone, in particolare si potrebbe classificare come un modo flessionale longitudinale.

- Modo a 212 Hz

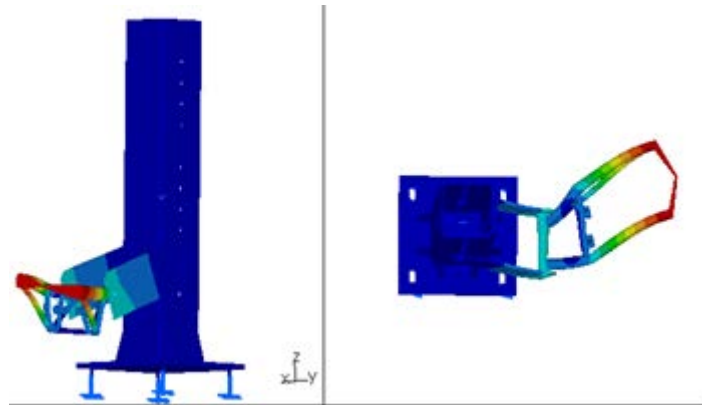


FIGURA 50

In questo caso si osserva dalla deformata come il forcellone si sposti lateralmente si potrebbe quindi trattare del modo laterale.

- Modo a 282 Hz:

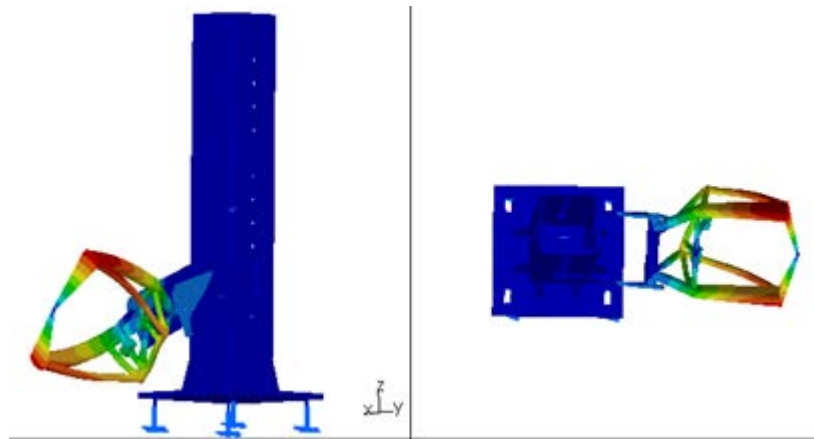


FIGURA 51

Osservando ancora una volta la deformata si può considerare il modo come quello torsionale del forcellone.

- Modo a 288 Hz

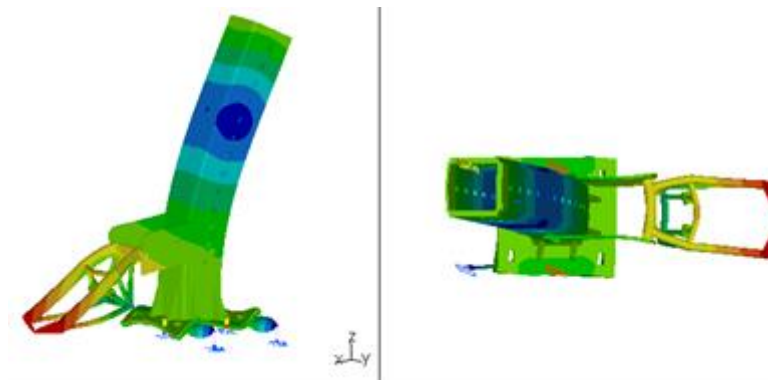


FIGURA 52

In questo caso si tratta di un modo che coinvolge tutta la struttura del resto ci si trova molto a ridosso del limite della zona di misura che è stata individuata.

Gli altri modi individuati dal FEM non rientrano nella zona di misura e non vengono riportati.

Sono stati quindi individuati i 3 modi principali del forcellone:

Frequenza (Hz)	Descrizione
146	Modo flessionale longitudinale
212	Modo flessionale laterale
282	Modo Torsionale

4.5 Analisi modale sperimentale del forcellone

Si riportano di seguito i risultati ottenuti sperimentalmente sul sistema di prova, l'analisi è stata eseguita con il software dedicato ModalView prodotto da ABSignal, il braccio oscillante è stato discretizzato mediante 20 nodi (10 per lato), la metodologia di analisi utilizzata è quella definita Roving Resposne la quale consiste essenzialmente nel fissare un nodo ed una relativa direzione nella quale si andrà ad eccitare la struttura per mezzo di un martello strumentato, e una volta eccitato quel nodo in quella direzione si va a registrare la risposta della struttura in termini di accelerazione.

Poiché l'analisi è svolta utilizzando accelerometri del tipo triassiale, andando ad eccitare il sistema in una certa direzione si otterrà la risposta dello stesso non solo in quella direzione ma, di riflesso, anche nelle altre due direzioni non eccitate esternamente, è chiaro tuttavia che in questo modo si andrà ad esercitare un'azione che si potrebbe definire "di filtro" poiché si andranno ad eccitare molto di più quei modi che sono propri della direzione di eccitazione esterna mentre si ecciteranno molto poco i modi di vibrare ortogonali alla direzione di eccitazione esterna, per questo motivo quando si va ad eseguire un'analisi modale si andranno a scegliere le direzioni di eccitazione in funzione del modo che si vuole andare a cercare, in particolare per l'analisi che si sta compiendo si è fissata come direzione di eccitazione per ricercare il modo laterale la direzione Y mentre per ricercare il modo longitudinale e quello laterale si è scelta la direzione Z.

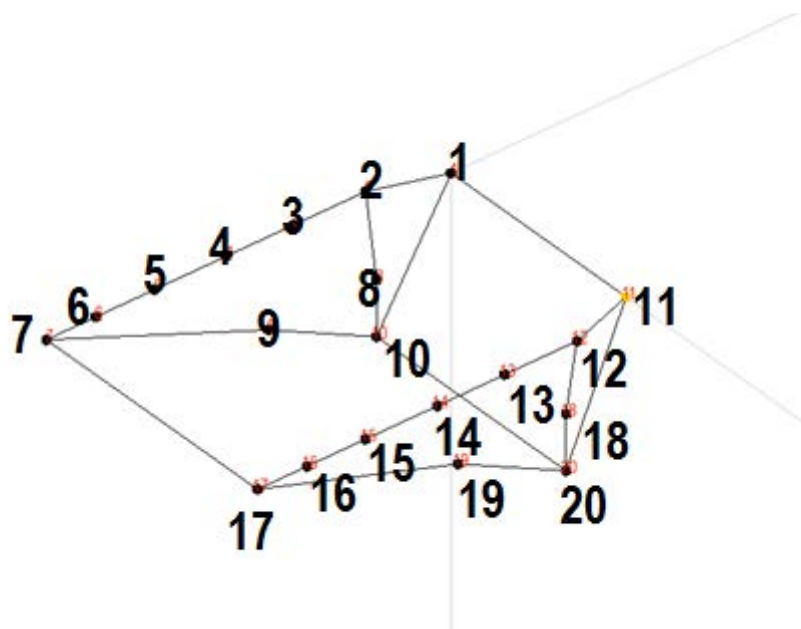


FIGURA 53

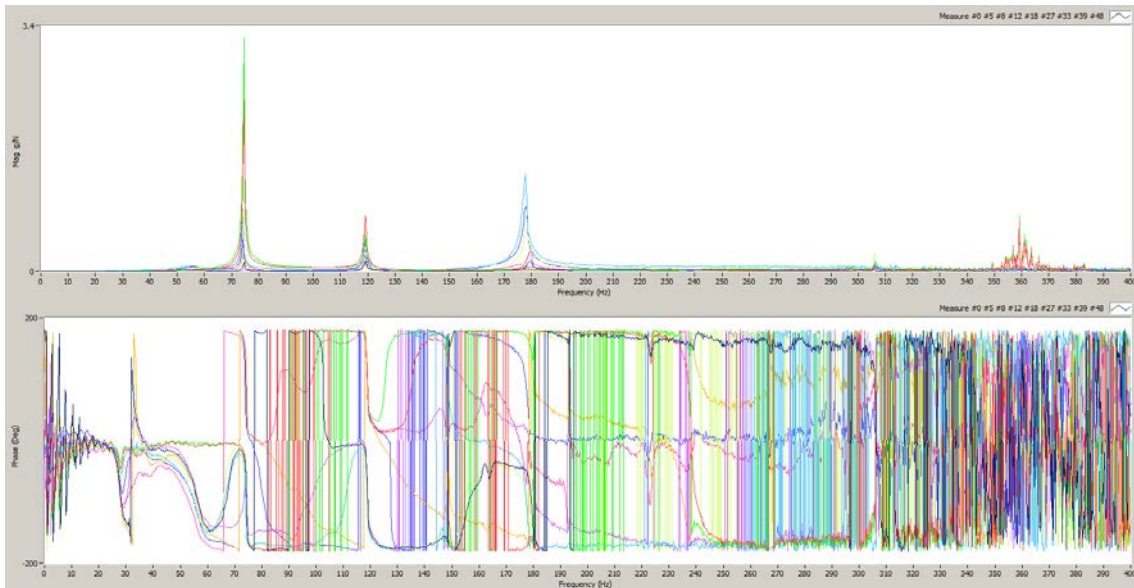


FIGURA 54

La figura mostra le FRF acquisite dei 20 nodi dopo l'esecuzione dell'analisi si distinguono immediatamente 4 picchi principali per le frequenze di 75Hz, 120 Hz, 180 Hz e 360Hz tuttavia non ci si può fermare a questo stato con l'analisi in quanto si deve tenere conto che a causa dell'ampiezza dei picchi principali altri picchi secondari possono essere nascosti dal sistema di scalatura del grafico.

Come prima azione di post processing si vanno comunque ad analizzare i picchi principali.

- Modo a 75Hz:

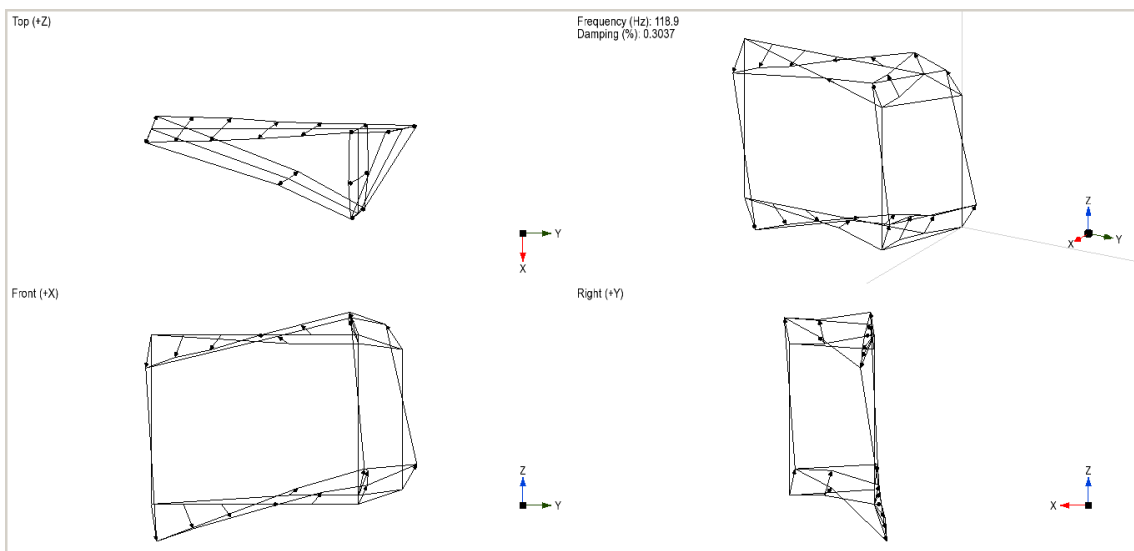


FIGURA 55

Dalla deformata si vede come il forcellone sbandi lateralmente tuttavia grazie alle analisi numeriche si ricorda come vi fosse la presenza di un modo dovuto alle piastre di vincolo

per una frequenza calcolata pari a 90 Hz, a sostegno di questa tesi si fa notare come vi sia uno spostamento dello stesso ordine di grandezza dei nodi dove giace il vincolo rispetto ai nodi dell'estremità libera.

Un'ulteriore prova del fatto che si tratti di un modo non solo del forcellone si può avere se si vanno a considerare gli spostamenti solo nel piano X-Y che è quello dove si compie il maggior spostamento dei nodi.

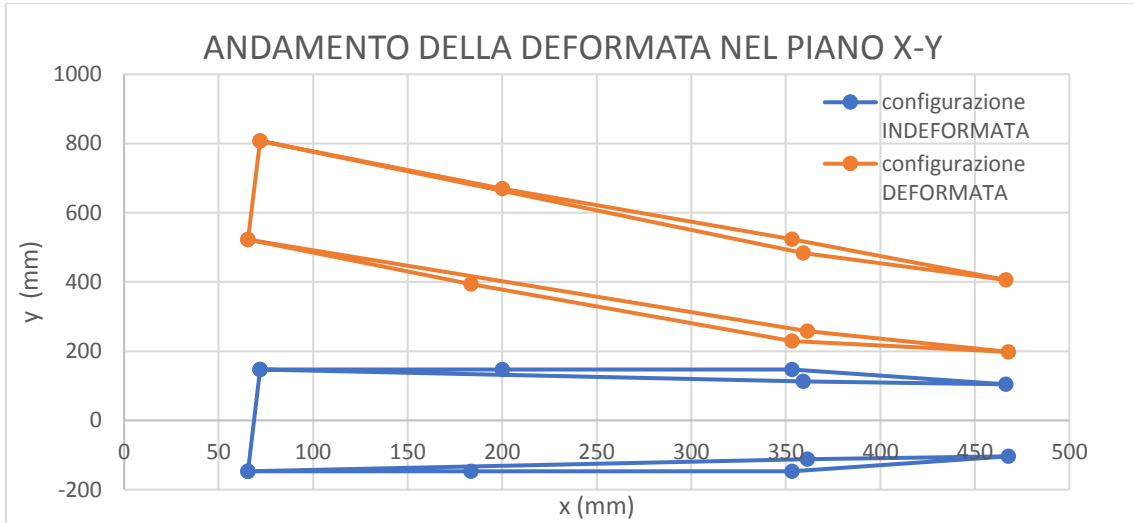


FIGURA 56

La figura mostra chiaramente come, con la dovuta amplificazione degli spostamenti, il vincolo trasli lateralmente di conseguenza non è possibile considerare questo modo come proprio del forcellone.

- Modo a 120 Hz

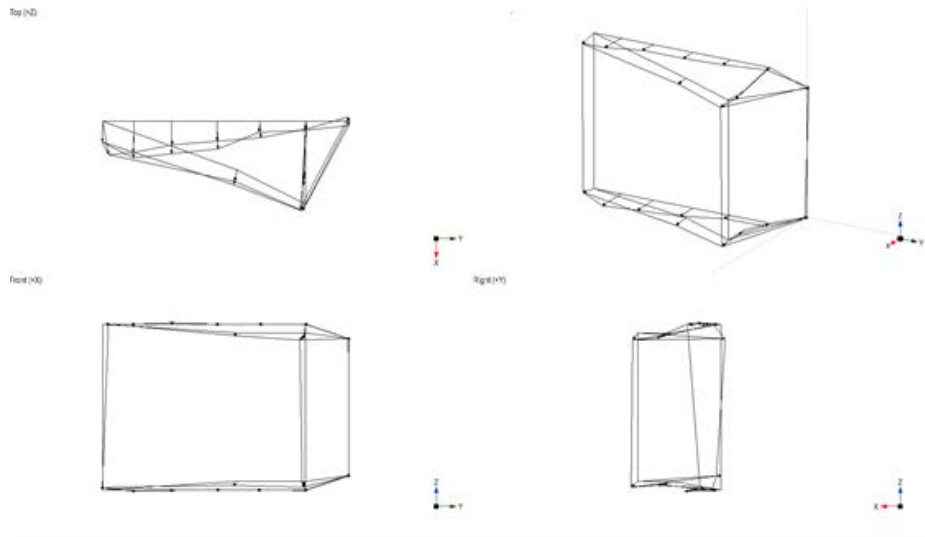


FIGURA 57

Dall'analisi numerica si sa che vi è un modo flessionale longitudinale del forcellone per una frequenza di 146Hz, andando ad osservare la deformata prodotta dal software si vede come effettivamente ci siano spostamenti verticali uniti a nodi del vincolo che restano fermi.

- Modo a 175 Hz

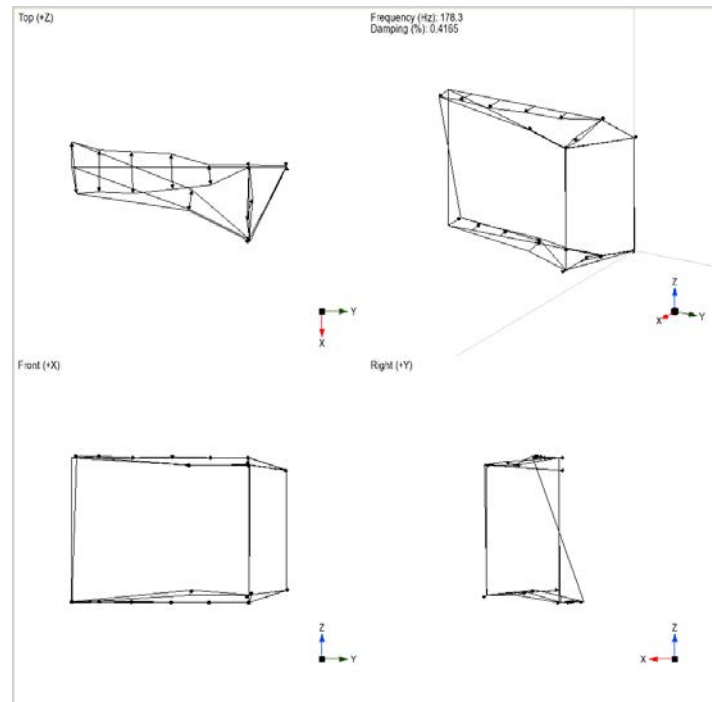


FIGURA 58

Dalla figura che mostra la deformata per il modo a 175 Hz risulta chiaro che il forcellone si sta comportando come se si trattasse di modo torsionale, dalle analisi svolte numericamente era stato riscontrato questo modo a frequenza molto più alta, tuttavia occorre far notare come questa frequenza cada nella zona dove si è dimostrato esserci l'influenza del vincolo per questo motivo non è possibile affermare con assoluta certezza che si tratti effettivamente di modo torsionale proprio del forcellone,

Conoscendo il range di frequenza alla quale dovrebbe trovarsi il modo torsionale del forcellone: 282 Hz si va a effettuare una ricerca mirata del modo

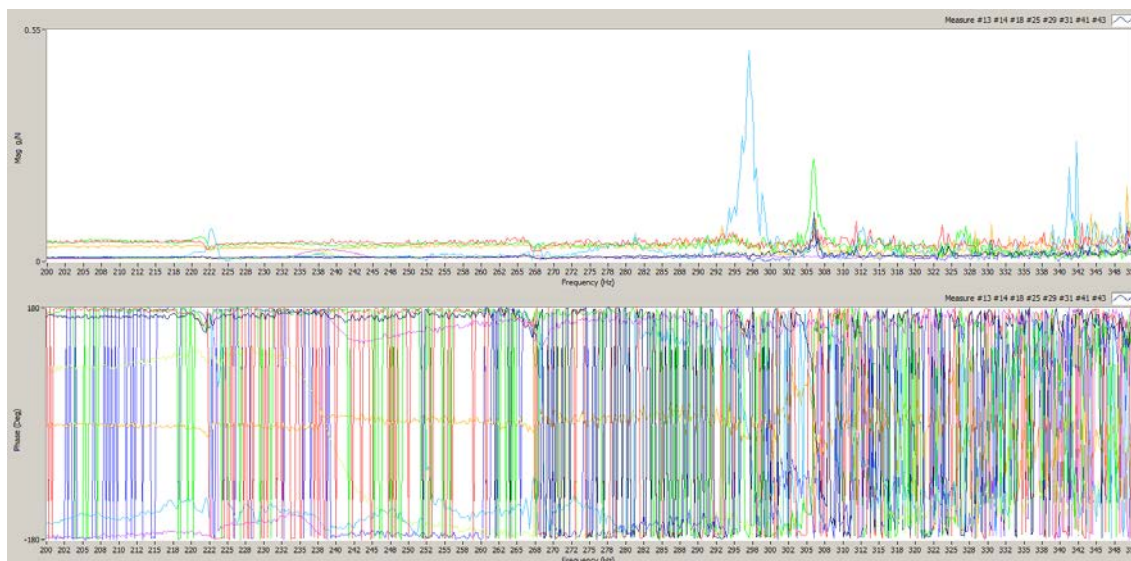


FIGURA 59

Come si può osservare per frequenze così elevate la misurazione risulta molto disturbata si notano dei picchi per valori attorno a 300 Hz ma relativi a singole FRF di conseguenza si conclude l'analisi affermando che il modo torsionale non è individuabile con questa metodologia di prova.

4.6 Considerazioni conclusive sull'analisi modale sperimentale eseguita con l'ausilio della struttura di vincolo della MotoStiffMeter

Si è dimostrato come la prova sperimentale per quanto riguarda l'analisi modale utilizzando la struttura di vincolo della MotoStiffMeter non sia di facile interpretazione a causa dell'elevata influenza dei modi di vibrare propri della struttura utilizzata come vincolo per questi motivi si suggerisce di effettuare analisi modali utilizzando il modello "libero-libero" come suggerito anche da Ewings in [2] in quanto la correlazione con le analisi numeriche risulta molto più agevole

Un'ulteriore indicazione di come sia conveniente usare la configurazione Libero-libero si trova in [3], se ne riporta un breve estratto:

I risultati dell'analisi modale strutturale sono utili sia dal punto di vista della maneggevolezza della moto sia da quello della stabilità se possono essere confrontati direttamente con le modalità di vibrazione del veicolo in rettilineo (armatura, oscillazione) e in curva. Per questo motivo, è stata effettuata l'analisi modale strutturale dell'intero veicolo, piuttosto che dei sottosistemi del veicolo.

I vincoli che non sono presenti quando la motocicletta è in moto e, quindi, alterano i risultati dell'analisi modale, devono essere evitati.

Dal punto di vista della stabilità e della gestione, le modalità strutturali laterali (fuori dal piano) sono le più importanti perché possono influenzare direttamente il wobble e il wave. Le modalità strutturali nel piano di simmetria del veicolo (modalità nel piano) possono influenzare la stabilità in curva.

In base a queste considerazioni, l'analisi modale è stata effettuata sospendendo la motocicletta da un telaio mediante funi e molle flessibili (condizioni free-free), perché in questa condizione le modalità fuori piano erano quasi non vincolate come è il caso durante il movimento reale sulla strada.

A questo punto è quindi chiaro come sia conveniente studiare la risposta dinamica dell'intero sistema motocicletta nel caso libero piuttosto che addentrarsi nelle complesse interpretazioni dei risultati ottenuti vincolando rigidamente la struttura.

Capitolo 5

Metodologie di confronto e correlazione tra analisi modale sperimentale e analisi numerica

5.1 Confronto delle frequenze naturali

Questo metodo consiste nel plottare in un grafico le frequenze naturali ottenute sperimentalmente vs le frequenze naturale ottenuti per via analitica, ovviamente i punti plottati devono essere riferiti al modo corrispondente es. modo laterale.

In questo modo è possibile vedere non solo il grado di correlazione tra le due serie di risultati, ma anche la natura (e la possibile causa) di eventuali discrepanze esistenti. Una volta ordinati, i punti dovrebbero trovarsi su o vicino a una linea retta di pendenza 1. Se si trovano vicino a una linea di una pendenza diversa, allora quasi certamente la causa della discrepanza è una proprietà materiale errata usata nelle previsioni.

Se i punti sono sparsi ampiamente attorno a una retta da 45°, probabilmente c'è un serio fallimento del modello nel rappresentare la struttura del test e si richiede una rivalutazione. Se la dispersione è piccola e distribuita casualmente su una linea da 45° allora il modello simula in maniera sufficientemente adeguata la realtà.

Tuttavia, un caso di particolare interesse è dove i punti si discostano leggermente dalla linea ideale ma in modo sistematico piuttosto che casuale, poiché questa situazione suggerisce che esiste una caratteristica specifica responsabile della deviazione e che questo non può essere semplicemente attribuito a errori sperimentali.

Si presentano ora una serie di comparazioni tra le analisi della colonna di vincolo effettuate nel capitolo precedente.

5.1.1 Analisi modale sperimentale Vs Colonna FEM con viti tra incastro e base

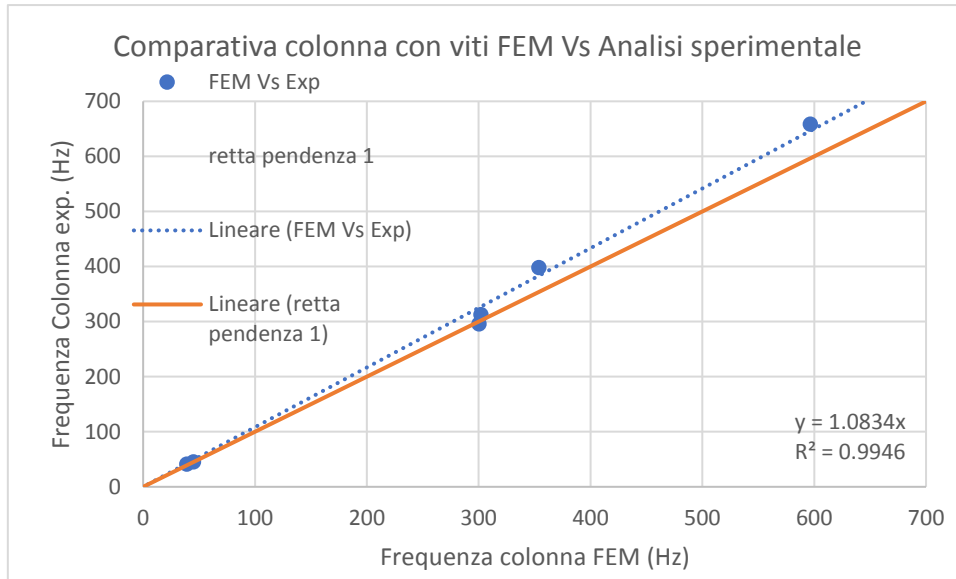


FIGURA 60

Si vede come le analisi sperimentali siano in buon accordo con i risultati numerici il modello numerico quindi, secondo questa metodologia di confronto è sufficientemente accurato.

5.1.2 Analisi modale sperimentale Vs Colonna FEM modello con incastro infinitamente rigido

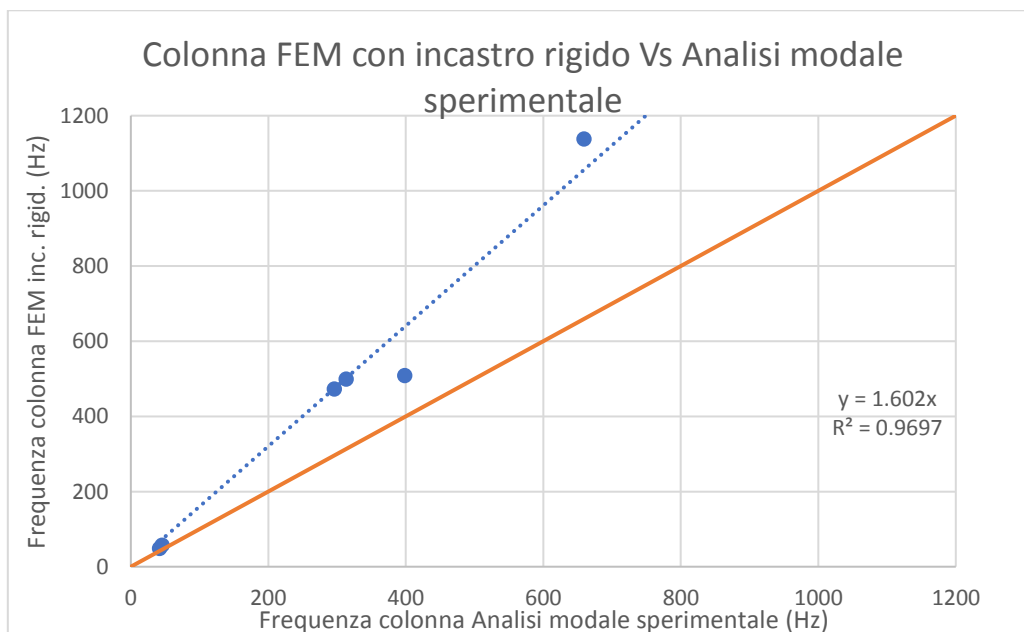


FIGURA 61

In questo caso si può osservare che a differenza del modello precedente questo fallisce, e come è stato riportato in precedenza, poiché i punti sono ordinati lungo una retta con pendenza diversa da 1 [] suggerisce che si tratti di un problema sulla definizione del materiale, l'effetto molla dato dai tiranti e quindi una caratteristica imprescindibile affinché la verifica vada a buon fine.

5.1.3 Analisi FEM colonna con viti Vs Analisi FEM cantilever

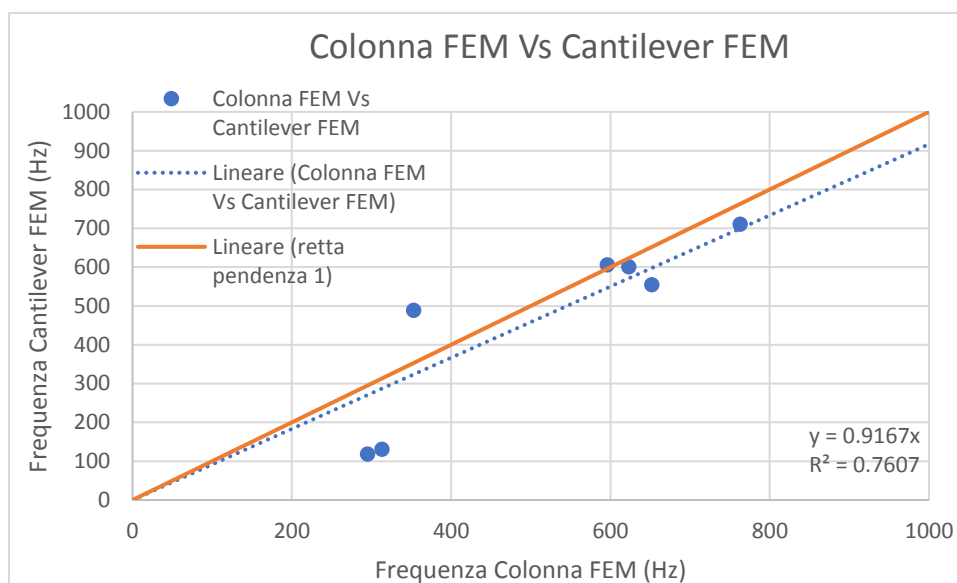


FIGURA 62

A questo punto è interessante notare come i modelli tendano a convergere per i modi a frequenza via via più alta mentre divergono per i modi a bassa frequenza, questo trend è dovuto all'effetto della cedevolezza della piastra alla base della colonna.

5.2 Mode Scale Factor (MSF)

Rappresenta la 'pendenza' della retta che interpola i punti ed è definito come:

$$MSF(X, A) = \frac{\sum_{j=1}^n (\psi_X)_j (\psi_A)_j^*}{\sum_{j=1}^n (\psi_A)_j (\psi_A)_j^*}$$

Dove $(\psi_X)_j$ è l'autovettore che rappresenta il j-esimo modo di vibrare ricavato sperimentalmente mentre $(\psi_A)_j$ si riferisce al j-esimo autovettore ottenuto analiticamente.

Va notato che questo parametro non dà alcuna indicazione sulla qualità del fitting dei punti rispetto alla retta; semplicemente la sua pendenza.

Questo metodo, a differenza del precedente considera gli spostamenti/accelerazioni dei nodi riferiti al singolo modo di vibrare individuato.

5.2.1 Modi della colonna FEM con viti Vs modi della colonna ricavati sperimentalmente

- Modo a 39 (Hz) Pendolamento colonna dovuto alla base.

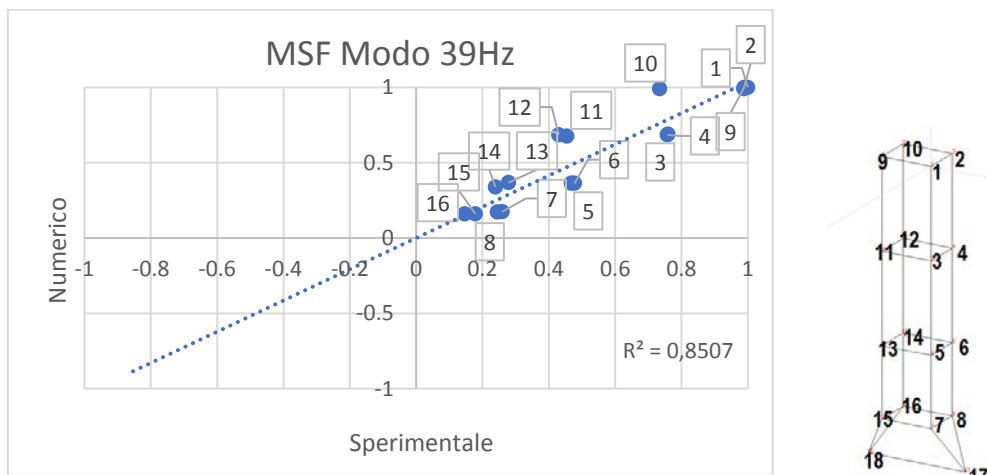


FIGURA 63

Come si può vedere dal grafico le ampiezze in termini di spostamenti normalizzati rispetto al nodo n°1, sono in buon accordo tra dati sperimentali e dati numerici.

- Modo a 45 (Hz) Pendolamento della base nel piano ortogonale a quello di oscillazione per il modo a 39 Hz.

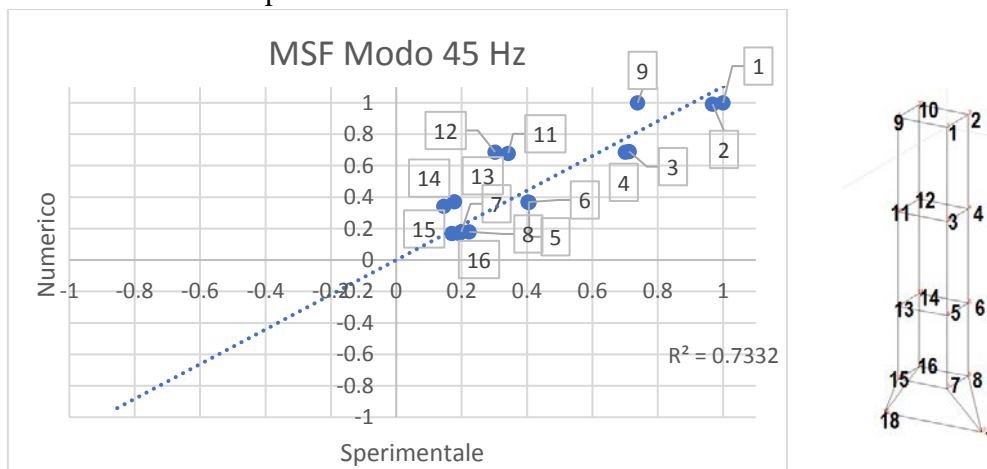


FIGURA 64

Anche per il modo a 45 Hz le ampiezze sono in buon accordo tra le analisi numerica e sperimentale.

- Modo 1° Torsionale: 353Hz dall'analisi numerica, 398 Hz dall'analisi sperimentale

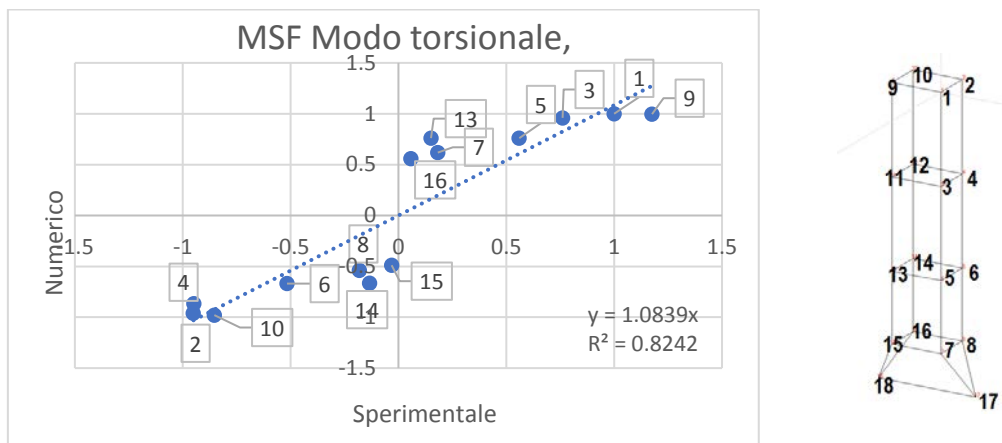


FIGURA 65

In questo modo di torsione si può osservare che oltre all'ampiezza un parametro di notevole importanza per l'interpretazione dei risultati è la fase infatti per questo modo si può apprezzare la direzione di torsione della colonna.

5.3 Correlazione tra l'analisi modale del forcellone e l'analisi FEM

Come si è visto in precedenza l'analisi modale eseguita sulla struttura della MotoStiffMeter da scarsi risultati, si è riusciti ad individuare due sole frequenze proprie del forcellone per questo il metodo di correlazione attraverso le frequenze naturali non dà particolari informazioni, l'MSF invece poiché considera il singolo modo può dare informazioni almeno per quanto riguarda i tre modi a 75,146 e 175 Hz che si sono evidenziati dalle analisi sperimentali.

- Modo 75 Hz sperimentale, modo a 90 Hz numerico (modo dovuto alle piastre del vincolo)

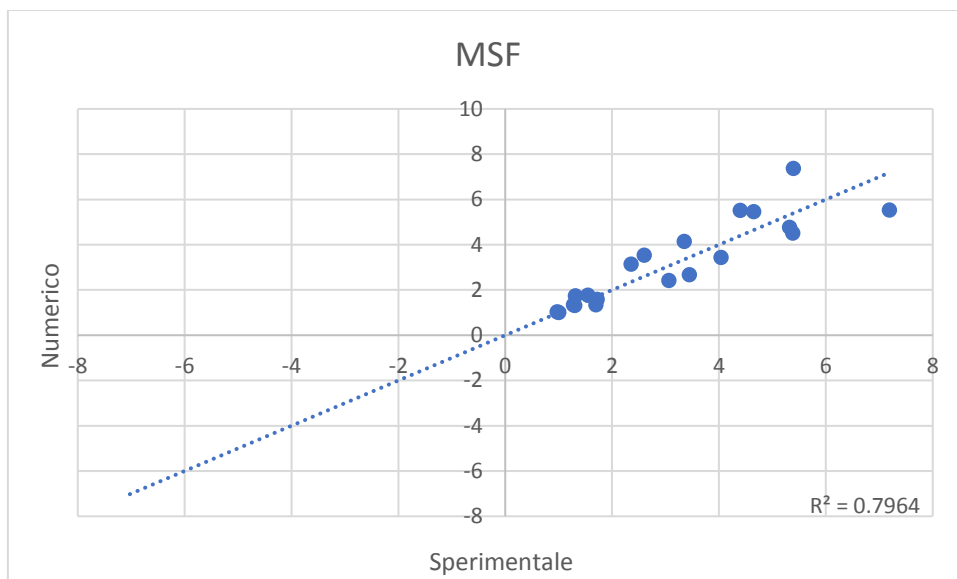
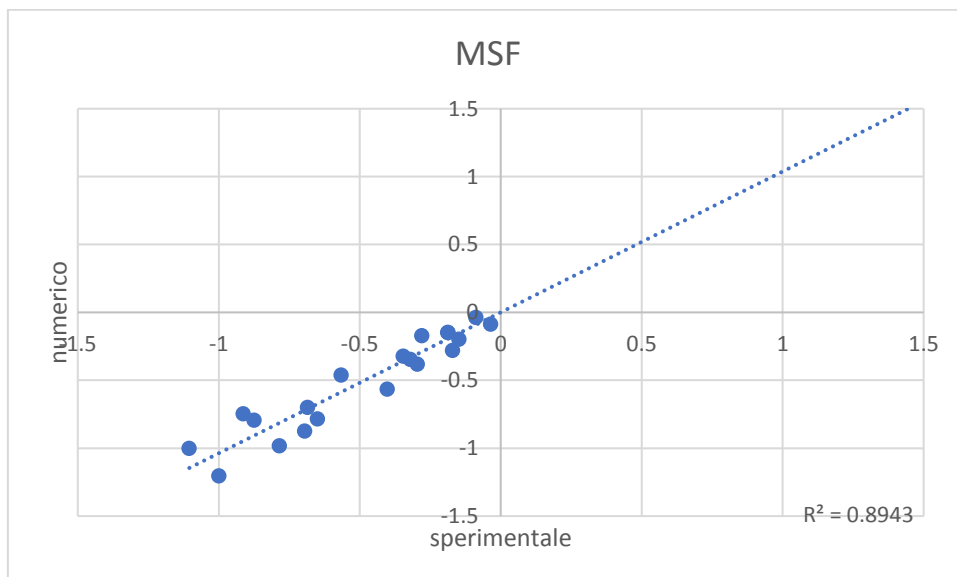


FIGURA 66

- Modo 120 Hz sperimentale, 146 Hz numerico (modo flessionale longitudinale del forcellone)



Per quanto riguarda il modo a 175 Hz, come si vede dalla deformata sembrerebbe trattarsi di un modo torsionale del forcellone, in questo caso però il modo numerico corrispondente è a 100Hz più in alto non si ritiene significativo quindi il calcolo dell'per questo modo.

Per quanto riguarda invece i modi a 75 e 120 Hz ricavati sperimentalmente, dall' MSF si vede come le ampiezze calcolate sui nodi e le ampiezze misurate siano in buon accordo.

Capitolo 6

La Screw theory

per la stima delle rigidzze.

L'idea di poter definire in maniera generale il comportamento elastico di un telaio, a prescindere dal contesto di prova in cui viene collocato sta alla base dell'impiego della *screw theory* per caratterizzarne la rigidzza.

La teoria delle viti (*screw-theory* in seguito) è un concetto di moto che pone in relazione rotazioni e traslazioni di un corpo, in maniera analoga a come l'avvitamento di una vite ne causa l'avanzamento.

È una procedura più complessa per quanto concerne i dati di input necessari, infatti è richiesta l'intera matrice di cedevolezza di una struttura, nonostante ciò essa fornisce una descrizione più rigorosa del comportamento elastico della stessa. Inoltre, può essere vista come un importante strumento per ottenere indicazioni generali su come misurare poi effettivamente le rigidzze di un telaio in modo che esse siano il meno possibile legate allo schema di test, anche senza la stretta necessità di avere una matrice di cedevolezza per ogni singolo telaio in prova ma essendone, a tale scopo, sufficiente una per ogni tipologia di telaio.

6.1 Definizioni

Screw: uno *screw* è definito nello spazio 3D da un asse e da un *pitch*, che lega rotazioni e traslazioni lungo l'asse;

Pitch: è l'equivalente del passo di una filettatura, cioè il rapporto tra traslazione e rotazione lungo l'asse, $P = \frac{\text{traslazione}}{\text{radianti}}$

il segno del pitch segue la regola della mano destra;

Screw axis: lo *screw axis* è una linea nello spazio 3D definita utilizzando le coordinate di Plücker. Questo set di coordinate definisce una linea nello spazio attraverso un vettore unitario che ne stabilisce la direzione e il prodotto vettoriale del vettore unitario con il vettore posizione di un qualsiasi punto della linea in modo da definirne la collocazione nello spazio;

Twist: un *twist* è uno *screw* moltiplicato per una *twist velocity*; la *twist velocity* è una grandezza scalare che da misura della velocità di rotazione attorno allo *screw axis*, espressa in [rad/sec];

la velocità angolare s e la velocità lineare v sono legate dal *pitch* P secondo la relazione

$$v = s \cdot P$$

Wrench: un *wrench* è uno *screw* moltiplicato per una *wrench force*; la *wrench force* è una grandezza scalare che da misura della forza lineare agente lungo lo *screw axis*, espressa in [N];

La forza lineare f e la coppia t sono legate dal *pitch* P secondo la relazione

$$t = f \cdot P$$

6.2 Notazione

Uno *screw* viene definito attraverso il suo asse, rappresentato da un vettore a sei componenti in coordinate di Plücker, dove le prime tre sono le componenti del vettore unitario (direzione) mentre le seconde tre sono le componenti del vettore momento ottenuto dal prodotto vettoriale, e il suo *pitch*. È possibile condensare queste due informazioni in una forma più compatta, aggiungendo l'informazione relativa al passo direttamente all'interno del vettore a sei componenti

$$S = \left[\frac{\vec{u}}{\vec{b} \times \vec{u} + P(S) \cdot \vec{u}} \right]$$

dove S è lo *screw*, u è il vettore unitario, b il vettore momento e $P(S)$ è il *pitch* dello *screw*.

Per uno *screw* o un *twist* il vettore unitario u definisce l'asse di rotazione, mentre invece per un *wrench* il vettore u definisce l'asse di traslazione.

Ponendo

$$\vec{l} = \vec{b} \times \vec{u} + P(S) \cdot \vec{u}$$

è possibile compattare la notazione nella forma

$$S = \left[\frac{\vec{u}}{\vec{l}} \right]$$

La direzione dell'asse è direttamente definita dal vettore unitario u ; il passo può essere agevolmente estratto attraverso il prodotto scalare tra le prime tre componenti e le seconde tre

$$(\vec{b} \times \vec{u} + P(S) \cdot \vec{u}) \cdot \vec{u} = P(S)$$

Più articolata è invece l'estrazione delle informazioni per il posizionamento dell'asse nello spazio. Le coordinate di ogni punto dell'asse sono implicitamente contenute nel vettore l .

Organizzando la seconda terzina di coordinate in forma di sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_x - P(S) \cdot u_x \\ l_y - P(S) \cdot u_y \\ l_z - P(S) \cdot u_z \end{Bmatrix}$$

risolvendolo per le incognite b_x, b_y, b_z si ottengono le coordinate di un punto dell'asse. Un sistema di questo tipo è indeterminato in quanto le coordinate di uno qualsiasi degli infiniti punti dell'asse lo risolvono. Si rende necessario quindi fissare arbitrariamente una delle tre variabili.

6.3 Introduzione

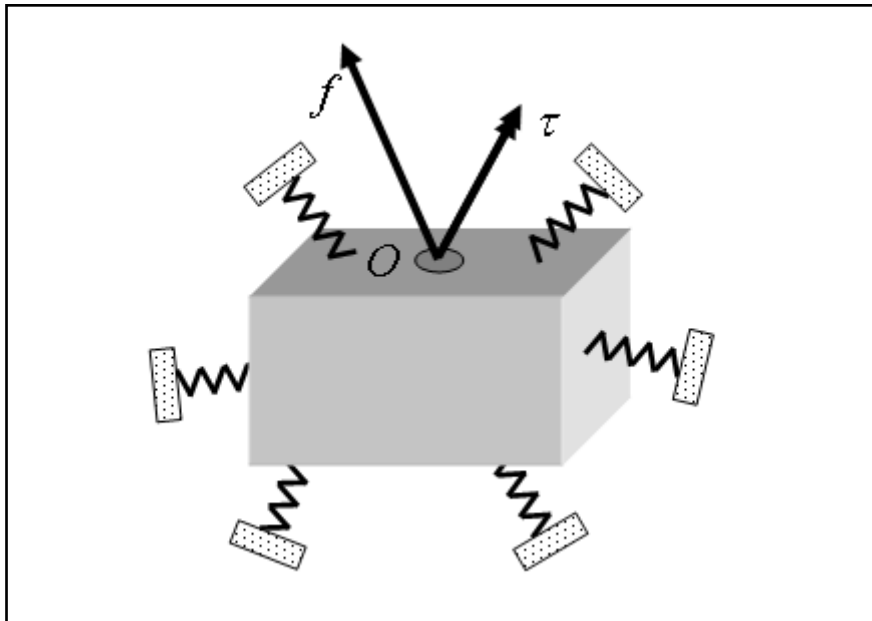


FIGURA 67

Considerando un corpo rigido elasticamente sospeso esso possiede sei gradi di libertà, tre traslazioni e tre rotazioni, e può essere sollecitato con sei carichi, tre forze e tre momenti.

È pertanto possibile, per ogni punto del corpo rigido, definire una matrice di rigidezza 6×6 che rappresenta la risposta elastica che il sistema di vincoli esercita sul corpo. È lecito ritenere che mediante un'opportuna combinazione di forze e momenti è possibile imprimere al corpo una pura traslazione o una pura rotazione; la determinazione degli assi attorno a cui questi moti avvengono però, in caso di sistemi elastici che non

presentano particolari simmetrie, può non risultare intuitiva da visualizzare. Mediante un'analisi della matrice di rigidezza è possibile calcolare questi assi e le corrispettive rigidezze di rotazione e di traslazione.

Prima di procedere oltre è necessario precisare che per poter applicare questa teoria allo studio delle rigidezze di un telaio, esso va considerato come l'insieme degli elementi elastici che tengono in sospensione il corpo rigido, il quale invece viene fatto coincidere con il punto di applicazione delle forze (O riferendosi alla figura). Non viene perciò analizzato come effettivamente si deforma il telaio o che sollecitazioni lo interessano, le informazioni che si ottengono sono invece relative alla risposta elastica che esso fornisce in un punto (il punto rispetto a cui è riferita la matrice di rigidezza) a seguito dell'applicazione di un carico, con un approccio che si può definire "black-box" rispetto a come internamente risponde il telaio alle diverse forze applicate. Allo stesso modo gli assi che si andranno nel seguito a definire sono sempre riferiti al punto di definizione della matrice di rigidezza.

Il processo prevede la risoluzione di due problemi agli autovalori, indicati come *eigenwrench problem* e *eigentwist problem*. Il primo può essere descritto come la determinazione del carico (forze e momenti) necessario ad imprimere al corpo una pura traslazione; il secondo invece è descritto come la determinazione dello spostamento (traslazioni e rotazioni) che causano come reazioni vincolari esclusivamente momenti paralleli al moto rotazionale. Gli autovalori ricavati da questi due problemi individuano 6 rigidezze principali, tre lineari per gli *eigenwrench* e tre alla rotazione per gli *eigentwist*.

6.4 Problema agli autovalori

Si considera nota la matrice di rigidezza relativa ad un punto del corpo rigido, O

È possibile definire la relazione

$$\vec{w} = [K_o] \cdot \vec{T}$$

oppure in maniera equivalente

$$\vec{T} = [C_o] \cdot \vec{w}$$

w è un vettore di carichi 6×1 , T è un vettore di spostamenti 6×1 mentre K_o e C_o sono le matrici di rigidezza e di cedevolezza rispettivamente. Entrambe sono matrici quadrate 6×6 , simmetriche. Tra le due sussiste la relazione:

$$[K_o] = [C_o]^{-1}$$

Entrambe possono essere suddivise in quattro sottomatrici quadrate 3x3:

$$K_o = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \quad C_o = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12}^T & C_{22} \end{bmatrix}$$

w rappresenta un *wrench* mentre T è uno *screw*:

$$\vec{w} = \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{Bmatrix} \quad \vec{T} = \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix}$$

dove f è un vettore forza 3x1, τ è un vettore momento 3x1 (del tutto generale, con una componente parallela ad f ed un ortogonale al vettore forza), δ è un vettore spostamento 3x1 e γ è un vettore rotazione 3x1; le rotazioni sono organizzate in un vettore in quanto si considerano esclusivamente piccoli spostamenti e godono quindi della proprietà commutativa.

Si analizzano ora i due problemi agli autovalori.

6.4.1 Eigenwrench Problem

Esso consiste nella determinazione dei *wrench* che applicati al corpo ne causano esclusivamente la traslazione in direzione parallela a quella del carico.

Si tratta di determinare $\vec{w} = \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ \vec{\tau} \end{Bmatrix}$ tale da indurre $\vec{T} = \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix}$.

Richiamando la relazione che lega *wrench* e *screw* attraverso la matrice di cedevolezza, è possibile scrivere

$$[C_o] \cdot \vec{w} = \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

richiamando la Teoria dell'Elasticità Lineare il vettore degli spostamenti è legato al vettore delle forze f attraverso la relazione

$$\vec{f} = k_f \cdot \vec{\delta}$$

dove lo scalare k_f è la rigidità alla traslazione nella direzione del vettore f .

Sostituendo questa espressione nella precedente

$$[C_o] \cdot \vec{w} = \frac{1}{k_f} \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Essa può essere riscritta in termini di matrice di rigidità, essendo $[K_o] = [C_o]^{-1}$

$$k_f \cdot \vec{w} = [K_o] \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_f \cdot \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ \vec{t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

È possibile scindere il problema in due sottoproblemi

$$k_f \cdot \vec{f} = [K_{11}] \cdot \vec{f}$$

$$k_f \cdot \vec{\tau} = [K_{12}^T] \cdot \vec{f}$$

Il primo è il tipico problema agli autovalori posto in forma standard; risolvendolo si ottengono i tre autovettori f e i corrispondenti tre autovalori k_j . Risolto il problema agli autovalori, si può procedere sostituendo le coppie autovalore-autovettore all'interno del secondo sottoproblema per ricavare i tre vettori τ

$$\vec{\tau} = \frac{1}{k_f} \cdot [K_{12}^T] \cdot \vec{f}$$

Poiché tutti i vettori f e τ sono definiti è possibile combinarli per ottenere i tre *wrench* cercati ai quali corrispondono tre rigidità alla traslazione definite dai tre k_j .

In realtà i tre vettori 6x1 ottenuti non sono propriamente *eigenwrench* in quanto il vettore momento in generale ha sia una componente allineata alla direzione di f sia una componente ad essa ortogonale, mentre invece, secondo definizione, il vettore momento dovrebbe essere allineato al vettore forza, il quale definisce la direzione stessa del *eigenwrench*.

Considerando uno dei tre vettori ottenuti, esso rappresenta un sistema di forze costituito da un vettore forza e un vettore momento, legati esclusivamente dallo scalare che definisce il *pitch*.

Risolvendo il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_x - P(S) \cdot u_x \\ l_y - P(S) \cdot u_y \\ l_z - P(S) \cdot u_z \end{Bmatrix}$$

è possibile determinare un punto nello spazio per cui fare passare il vettore in modo che la componente del vettore momento ortogonale alla forza sia nulla ed esso presenti esclusivamente componente allineata al vettore forza, ottenendo effettivamente un *eigenwrench*.

La risoluzione del sistema lineare sovrastante è equivalente quindi alla determinazione dell'asse centrale del sistema di forze rappresentato dal vettore 6×1 .

Ripetendo questa operazione per i rimanenti due vettori si definiscono completamente i tre *eigenwrench* cercati e la loro collocazione nello spazio.

6.4.2 Eigentwist Problem

Esso consiste nella determinazione dei *twist* (intesi come combinazione di traslazione e rotazione, e non come combinazione di velocità di traslazione e velocità di rotazione) che applicati provocano delle forze reattive costituite esclusivamente da coppie con asse parallelo a quelli degli *screw* stessi.

Si tratta di determinare $\vec{T} = \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix}$ tale da indurre $\vec{w} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{Bmatrix}$.

In maniera duale all'*eigenwrench problem* è possibile scrivere

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\tau} \end{Bmatrix} = [K_0] \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix}$$

mentre tra coppia e rotazione sussiste la relazione

$$\vec{\tau} = k_\tau \cdot \vec{\gamma}$$

dove lo scalare k_τ è una rigidità alla rotazione.

Sostituendo questa espressione nella precedente

$$k_\tau \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix} = [K_0] \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix}$$

$$k_\tau \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12}^T & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\delta} \\ \vec{\gamma} \end{Bmatrix}$$

È nuovamente possibile scindere il problema in due sotto problemi

$$0 = [K_{11}] \cdot \vec{\delta} + [K_{12}] \cdot \vec{\gamma}$$

$$k_{\tau} \cdot \vec{\gamma} = [K_{12}^T] \cdot \vec{\delta} + [K_{22}] \cdot \vec{\gamma}$$

Riorganizzando i termini del primo sistema nella forma

$$\vec{\delta} = -[K_{11}]^{-1} \cdot [K_{12}] \cdot \vec{\gamma}$$

e sostituendoli nel secondo sistema si ottiene

$$k_{\tau} \cdot \vec{\gamma} = ([K_{22}] - [K_{12}^T] \cdot [K_{11}]^{-1} \cdot [K_{12}]) \cdot \vec{\gamma}$$

Esso costituisce un nuovo problema agli autovalori in forma generalizzata. Una volta noti gli autovettori è possibile sostituirne i valori nel precedente sistema ed ottenere $\vec{\gamma}$.

Combinando le componenti $\vec{\delta}$ e $\vec{\gamma}$ si ottengono i tre *twist* cercati ai quali sono associate tre rigidità rotazionali.

Similmente all'*eigenwrench problem*, per ottenere gli *eigentwist* è necessario procedere al loro posizionamento nello spazio in modo da annullare per ognuno la componente di traslazione perpendicolare al proprio asse. Questa operazione prevede di risolvere un sistema lineare analogo a quello visto nel problema precedente. Va ricordato che per i *twist* l'informazione relativa alla direzione dell'asse è contenuta nel vettore delle rotazioni, perciò i *twist* sono espressi in *axis coordinates*; prima di risolvere il sistema lineare per collocarli nello spazio è necessario esprimerli in *ray coordinates* mediante la permutazione delle due terzine.

Questi assi sono tutti riferiti al punto rispetto a cui è stata calcolata la matrice di rigidità e perciò le eventuali sollecitazioni o spostamenti che agiscono lungo di essi, non si devono ritenere applicati direttamente al telaio, ma sono applicate al punto in questione, e solo attraverso di esso si trasmettono al telaio (del quale, si ricorda, si sta analizzando solamente la risposta elastica in un punto e non l'insieme di deformazioni che lo interessano).

6.5 Esempi applicativi della teoria della vite

Si presentano ora una serie di esempi applicativi risolvibili anche numericamente per poter comprendere al meglio la screw theory.

6.5.1 Trave a sezione quadrata

Si considera una trave a sezione quadrata di dimensioni 50x50 lunga 500 mm, incastrata ad una estremità e libera sull'altra, si ricava la matrice di cedevolezza al nodo libero semplicemente andando ad applicare in sequenza alla trave un carico unitario nelle 3 direzioni x, y,z e successivamente un momento unitario sempre attorno x,y e z, va detto che per i calcoli tutte le unità di misura devono essere nel sistema SI e quindi spostamenti in metri e rotazioni in radianti.

La matrice di cedevolezza o *Compliance* per la trave vale:

1,00E-09	0	0	0	0	0
0	4,03E-07	0	0	0	1,20E-06
0	0	4,03E-07	0	-1,20E-06	0
0	0	0	7,19E-06	0	0
0	0	-1,20E-06	0	4,80E-06	0
0	1,20E-06	0	0	0	4,80E-06

Ed una volta invertita si ricava la matrice di rigidezza:

1E+09	0	0	0	0	0
0	9708738	0	0	0	-2427184
0	0	9708738	0	2427184	0
0	0	0	139062,7	0	0
0	0	2427184	0	815129,4	0
0	-2427184	0	0	0	815129,4

Dalla teoria si poteva anche effettuare l'operazione al contrario sapendo che la matrice di rigidezza vale:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

dove

L = lunghezza della trave

A = area della sezione

E = modulo di Young

G = modulo di rigidezza tangenziale

I_z, I_y = momenti d'inerzia della sezione rispetto ai due assi trasversali

J = momento d'inerzia polare della sezione

Note le due matrici si applica la teoria della vite, quello che si otterrà saranno 3 autovettori (6x1) definiti *eigenwrench* e 3 autovettori (6x1) definiti *eigentwist*.

Eigenwrench ed *eigentwist* si dispongono perfettamente secondo gli assi di simmetria della struttura e sono tutti caratterizzati da *pitch* nullo (anche nei casi a rigidezza non uniforme) ; essendo le direzioni descritte da questi *screw* direzioni lungo le quali sono concesse in un'unica deformazione od un'unica sollecitazione di reazione, è evidente come essi possano venire a collocarsi esclusivamente in quelle posizioni tali per cui le componenti non “desiderate” di deformazione/sollecitazione tengono ad annullarsi reciprocamente e questo sicuramente avviene lungo gli assi di simmetria.

W1	W2	W3
0	0	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0
0	0,25	0
-0,25	0	0

T1	T2	T3
0	0	0
0	0	0,25
0	-0,25	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Si possono quindi ricavare le tre rigidezze lineari dai 3 eigenwrench:

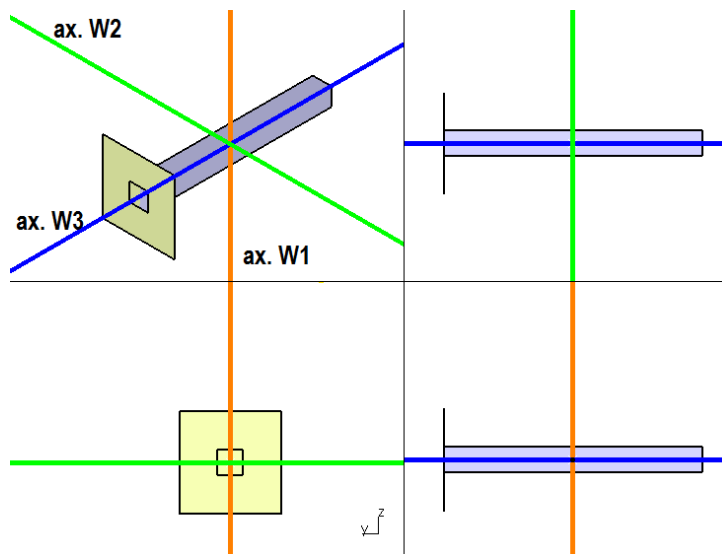


FIGURA 68

Kw1 (N/m)	9708738
Kw2 (N/m)	9708738
Kw3(N/m)	1E+09

E le tre rigidezze torsionali:

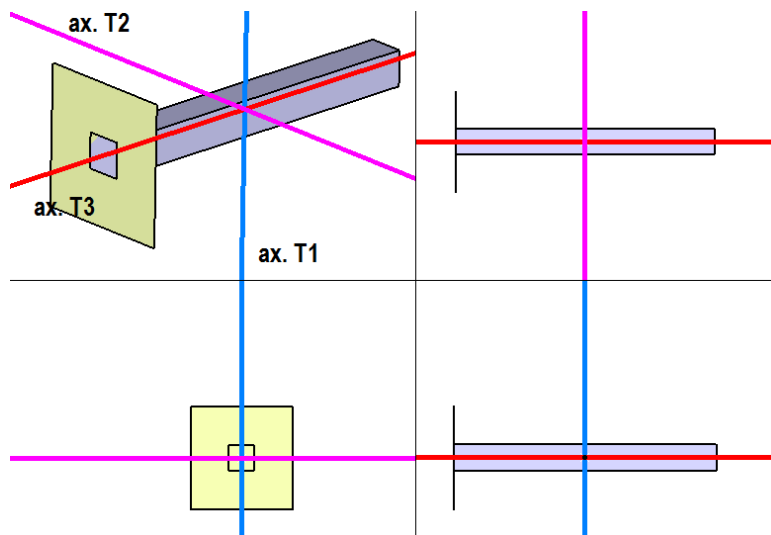


FIGURA 69

kt1 (Nm/rad)	139062,7
kt2 (Nm/rad)	208333,3
kt3 (Nm/rad)	208333,3

6.5.2 Due barre con la stessa sezione circolare cava ma con materiali diversi

Si consideri ora una struttura composta da due barre a sezione circolare cava diametro esterno 50mm spessore 5mm lunghe 500mm e con gli assi che distano tra loro 500mm, una di Acciaio e una di Alluminio, collegate tra loro rigidamente all'estremità libera.

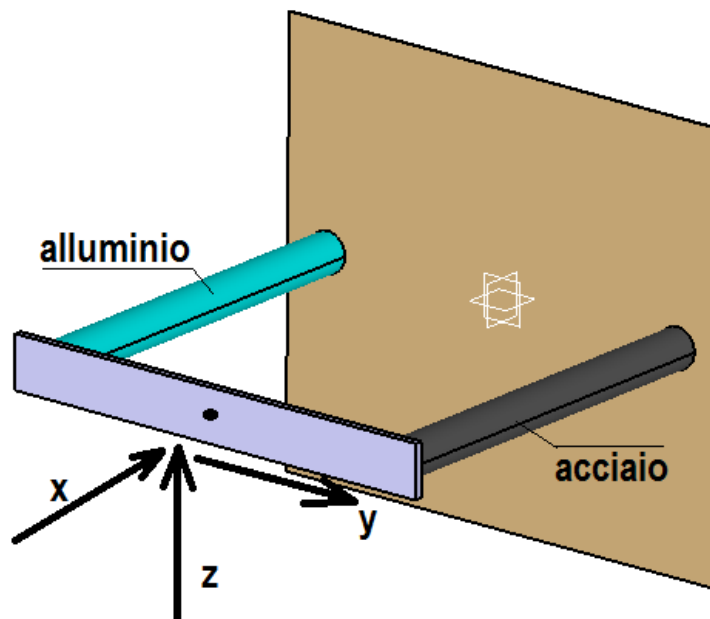


FIGURA 70

Modulo elastico acciaio: $E_{acc} = 198000 \text{ MPa}$

Modulo elastico alluminio $E_{all} = 75000 \text{ MPa}$

La struttura che si sta studiando è ancora geometricamente simmetrica.

Matrice delle Compliance:

8,48E-10	4,02E-10	0	0	0	1,61E-09
4,02E-10	1,70E-08	0	0	0	3,34E-09
0	0	6,00E-08	-2,97E-08	-1,60E-07	0
0	0	-2,97E-08	2,45E-07	-7,28E-23	0
0	0	-1,60E-07	-3,64E-23	6,39E-07	0
1,61E-09	3,34E-09	0	0	0	1,34E-08

Matrice delle rigidezze:

1,53E+09	41762,36	0	0	0	-1,8E+08
5905,431	61861091	0	0	0	-1,5E+07
0	0	60689420	7372089	15167606	0
0,00E+00	0	7377053	4986088	1843686	0
0	0,00E+00	15167606	1842445	5355660	0,00E+00
-1,8E+08	-1,5E+07	0,00E+00	0	0,00E+00	1,01E+08

I pitch sono ancora una volta nulli dato che la struttura è simmetrica.

Eigenwrench:

W1	W2	W3
1	-2,85E-05	0
4,03E-06	1	0
0	0	1
0	0	0,121472
0	0	0,249922
-0,12052	-0,24993	0

Eigentwist:

T1	T2	T3
0	0	0,120509
0	0	0,25
-0,12147	-0,24986	0
1	0,00049	0
0	1	0
0	0	1

Rigidezze lineari ottenute:

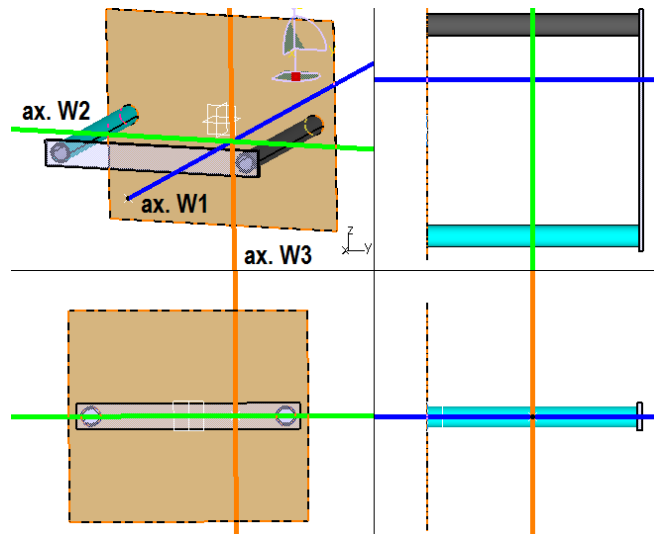


FIGURA 71

$kw1(N/m)$	1,53E+09
$kw2(N/m)$	61861091
$kw3(N/m)$	60689420

Rigidezze torsionali ottenute:

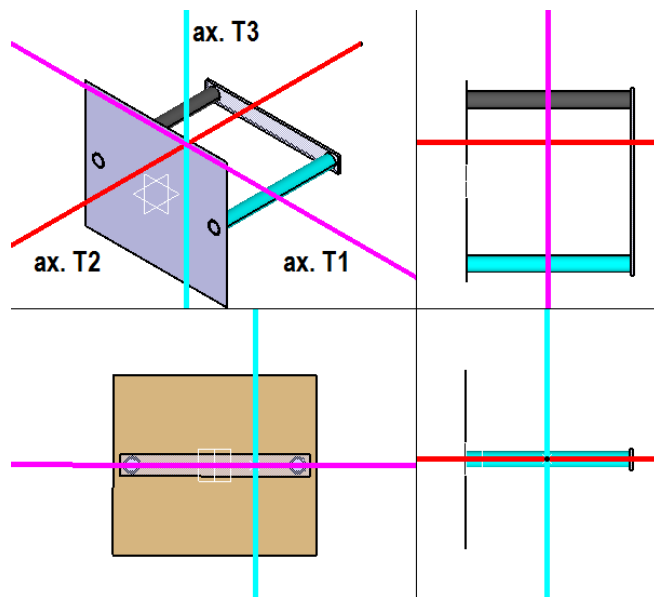


FIGURA 72

$kt1(Nm/rad)$	4090583
$kt2(Nm/rad)$	1,56E+06
$kt3(Nm/rad)$	74821585

Osservando la disposizione degli assi relativi alle rigidezze lineari e rotazionali si osserva che pur rimanendo paralleli ai piani di simmetria la loro intersezione non giace più nel

piano nell'intersezione dei piani di simmetria ma si sposta verso la barra con modulo elastico più alto.

Questo comportamento è in linea con quanto ottenuto da Raines e Thorpe in [1] a riguardo del posizionamento dell'asse di torsione in una semplice struttura test a tubi paralleli: l'asse di torsione tende ad avvicinarsi agli elementi caratterizzati dalla maggiore rigidezza torsionale. Le corrispettive rigidzze aumentano in maniera congrua.

Infine, si fa notare che nel caso la struttura fosse stata composta da 2 tubi di ugual modulo elastico si sarebbe ritornati al caso del paragrafo 5.5.1 in quanto la struttura si sarebbe potuta assimilare ad un'unica trave equivalente.

6.5.3 *Struttura non simmetrica*

Come ultimo esempio si considera il caso di una struttura composta da 4 tubi cilindrici ad assi paralleli ma non simmetrica in termini di modulo elastico: i tubi rossi sono in alluminio mentre i tubi azzurri sono in acciaio.

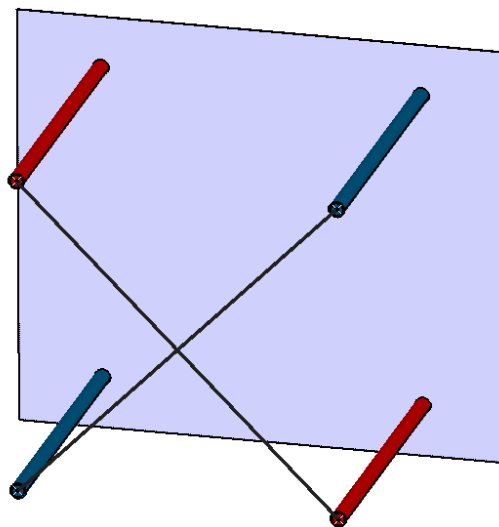


FIGURA 73

Le dimensioni sono:

- Tubi diametro esterno 25mm spessore 2.5mm
- Lunghezza dei tubi 500mm
- Distanza orizzontale tra gli assi dei tubi 500mm

-Distanza verticale tra gli assi dei tubi 500mm

-Modulo elastico alluminio 70000 Mpa

-Modulo elastico acciaio 200000 MPa

La matrice delle Compliance vale:

0,000001	0	0	0	0	0
0	0,000115	-8,12E-07	0	3,25E-06	6,78E-06
0	-8,12E-07	0,000115	0	-6,78E-06	-3,25E-06
0	0	0	7,95E-04	0	0
0	3,25E-06	-6,78E-06	0	2,71E-05	1,30E-05
0	6,78E-06	-3,25E-06	0	1,30E-05	2,71E-05

La matrice della rigidezza vale:

1000000	0	0	0	0	0
0	8825,629	0,027093	0	0,125445	-2205,98
0	0,027093	8825,629	0	2205,976	-0,12544
0	0	0	1257,387	0	0
0	0,125445	2205,976	0	48452,97	-22970,2
0	-2205,98	-0,12544	0	-22970,2	48452,97

I pitch non sono più nulli.

Wrench:

W1	W2	W3
0	0	1
-0,70711	0,707107	0
0,707107	0,707107	0
0	0	0
0,176733	0,176752	0
0,176733	-0,17675	0

Twist:

T1	T2	T3
0	0	0
0	-0,17673	0,176752
0	0,176733	0,176752
1	0	0
0	-0,70711	-0,70711
0	-0,70711	0,707107

Rigidezze lineari:

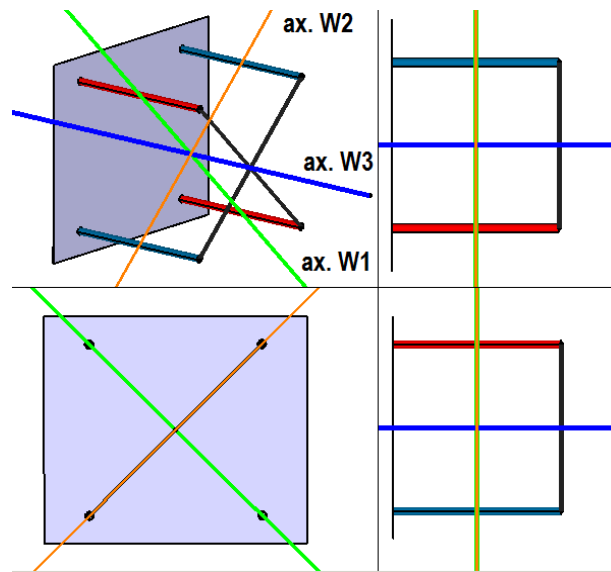


FIGURA 74

$kW1(N/m)$	8825,602
$kW2(N/m)$	8825,656
$kW3(N/m)$	1000000

Rigidezze torsionali:

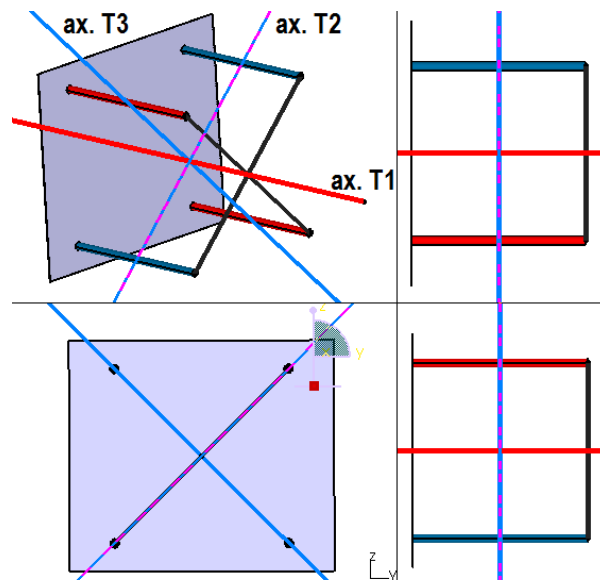


FIGURA 75

$kT1(Nm/radd)$	1257,387
$kT2(Nm/rad)$	24931,44
$kT3(Nm/rad)$	70871,72

Nel caso di asimmetria rispetto a due piani quindi, non solo gli assi traslano nella direzione dell'elemento a maggior modulo elastico ma inoltre variano il proprio orientamento, disponendosi lungo la diagonale (questo vale per i due *eigenwrench* a rigidezza minore, quello a rigidezza maggiore rimane orientato secondo la direzione predominante della struttura, che anche intuitivamente rimane quella caratterizzata dalla maggiore rigidezza; per gli *eigentwist* si assiste allo stesso fenomeno ma in questo caso riferito ai due caratterizzati da rigidezza maggiore, in quanto il terzo, con la più piccola rigidezza torsionale, rimane orientato lungo l'asse longitudinale delle travi, che idealmente è quella più cedevole dal punto di vista torsionale).

6.6 Il Twist Axis

Alla fine di questo capitolo si introduce il concetto di *twist axis* per chiarire ancora di più il motivo per cui l'applicazione della screw theory in fase di progettazione e non solo come metodologia di verifica possa essere utile per la corretta definizione delle caratteristiche dinamiche del veicolo che si sta progettando.

6.6.1 Definizione di Twist Axis

Qualsiasi definizione di rigidezza torsionale deve essere qualificata dalla definizione dell'asse attraverso il quale avviene la torsione. Se si considera infatti una barra uniforme di sezione circolare si può senza grossi problemi affermare che l'asse di torsione coincide con l'asse longitudinale della barra, questa affermazione non può essere fatta con la stessa leggerezza quando si parla di asse di torsione di una struttura più complessa come può essere un telaio motociclistico.

Per conoscere il twist axis di una struttura complessa si può partire considerando la definizione classica di centro di taglio per una generica sezione ovvero quel punto in cui, applicata una coppia torsionale non presenta spostamento ma solo rotazione o in alternativa il punto in cui applicato un carico laterale, si ha solo flessione senza torsione.

Si osserva quindi che se il twist axis passa per il punto di applicazione del carico, il telaio potrebbe avere rigidezza torsionale anche 0 ovvero rigidezza torsionale effettiva infinita.

Se il twist axis si muove in avanti rispetto al punto di applicazione del carico (in generale si considera il CoG per le forze di inerzia e il punto di contatto della ruota posteriore per le forze provenienti dalla strada) allora la rigidezza torsionale effettiva diminuisce e con essa le caratteristiche di stabilità.

È quindi molto importante essere in grado di determinare la posizione del twist axis in fase di progettazione e poterne predire l'effetto in caso di modifiche sul design.

Capitolo 7

Applicazione Screw theory

Nel capitolo precedente si è introdotta una metodologia numerica per la ricerca delle rigidzze principali di un componente motociclistico, si vuole ora applicare tale teoria ad un telaio a telaio a traliccio in acciaio del quale sono note le matematiche CAD, questa affermazione sebbene possa sembrare scontata non lo è, non è facile infatti essere in possesso un CAD affidabile di un componente motociclistico in quanto le case costruttrici difficilmente tendono a darlo all'esterno.

7.1 Dati del modello FEM

- mesh tetragonale a 4 nodi
- dimensione della mesh 1.3mm
- SAG proporzionale
- Incastro sul canotto dove giacciono i cuscinetti dello sterzo
- Connessione rigida tipo “spider” applicata per simulare il perno forcellone
- Connessione rigida tipo “spider” tra i punti di attacco del motore, questo considerando che l'ordine di grandezza della rigidzza del componente Motore sia n-volte superiore a quella del telaio.
- Punto di applicazione della forza e quindi di calcolo della Compliance: Perno forcellone
- Sistema di riferimento: Asse Z verso il basso, asse X fronte marcia Y di conseguenza secondo la regola della mano destra, Origine del sistema di riferimento: intersezione tra l'asse del perno forcellone e il piano verticale di simmetria del telaio.
- Unità di misura: Sistema SI

7.2 Applicazione Screw Theory al telaio

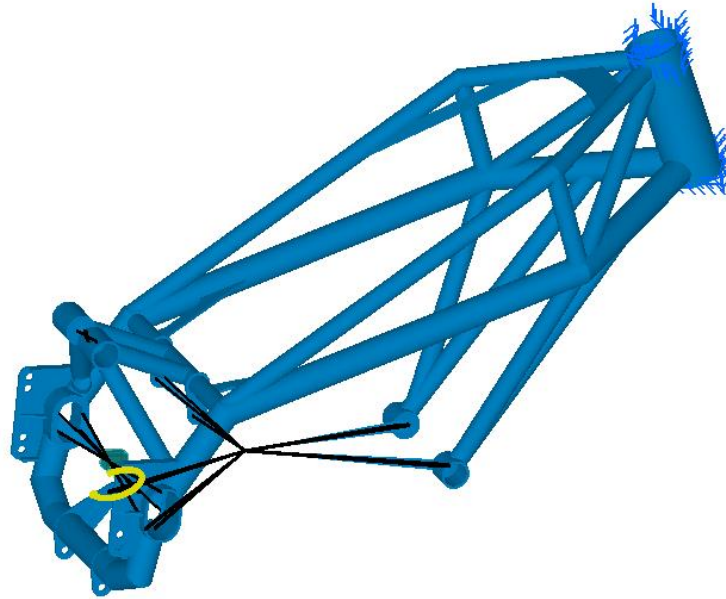


FIGURA 76

Matrice Compliance:

2,61E-07	6,72E-12	-3,94E-07	1,20E-10	-9,49E-07	2,16E-12
6,72E-12	3,50E-06	-4,99E-11	-1,72E-07	1,64E-10	-4,64E-06
-3,94E-07	-4,99E-11	7,04E-07	-9,88E-11	1,43E-06	6,42E-11
1,20E-10	-1,72E-07	-9,88E-11	6,00E-06	-5,15E-10	2,00E-06
-9,49E-07	1,64E-10	1,43E-06	-5,15E-10	8,00E-06	-2,24E-10
2,16E-12	-4,64E-06	6,42E-11	2,00E-06	-2,24E-10	9,00E-06

Matrice di Rigidezza ottenuta invertendo la matrice CC:

27398233	193,111	13686587	-275,242	798508,6	76,48103
193,111	1029322	144,7632	-159401	-18,5957	566209,4
13686587	144,7632	9072285	-133,026	-1798,1	36,20251
-275,242	-159401	-133,026	204693,4	4,052888	-127714
798508,6	-18,5957	-1798,1	4,052888	220125,5	-5,19048
76,48103	566209,4	36,20251	-127714	-5,19048	431467,3

Wrench ottenuti:

W1	W2	W3
-1,73E-05	0,470998	0,882134
-1	-5,00E-05	7,08E-06
4,74E-05	-0,88213	0,470998
0,15486	-2,45E-06	-8,83E-06
4,57E-06	0,214033	0,020272
-0,55008	-1,37E-05	2,55E-06

Twist ottenuti:

T1	T2	T3
1,49E-06	-2,60E-05	-0,11869
-0,38459	0,422683	-0,00012
-1,10E-05	2,95E-05	0,179258
-0,89435	-0,44737	-1,13E-05
-0,00012	0,000215	1
0,447371	-0,89435	0,000246

Rigidezze lineari (Wrench):

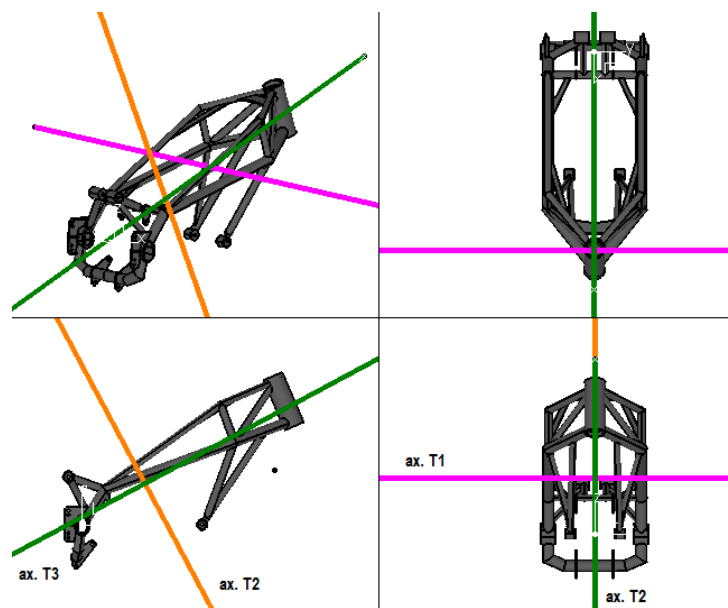


FIGURA 77

W1 (kN/m)	1029,322
W2 (kN/m)	1764,595
W3 (kN/m)	34705,923

Rigidezze torsionali (Twist):

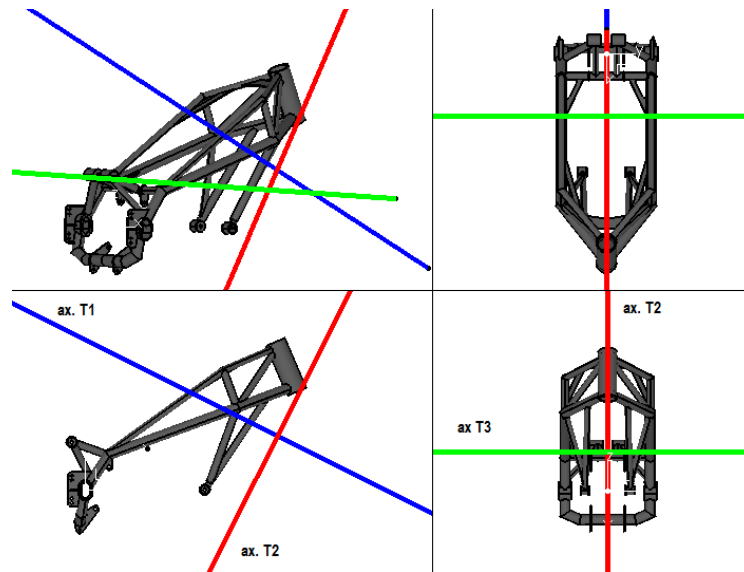


FIGURA 78

T1 (kNm/rad)	200,0327
T2 (kNm/rad)	99,98269
T3 (kNm/rad)	125,0268

7.2.1 Considerazioni sui risultati ottenuti per il telaio

Poiché il telaio è simmetrico due *eigenwrench* giacciono sul piano di simmetria verticale del telaio, con uno dei due allineato secondo la direzione in cui è maggiormente sviluppato il telaio (la rigidezza che compete ad esso può perciò essere intesa come una rigidezza a compressione/trazione del telaio, risultando correttamente la più elevata). Il terzo asse si dispone invece ortogonalmente a questo piano. Oltre alla rigidezza a

compressione/trazione menzionata (in verde nelle illustrazioni), gli altri due *eigenwrench* possono essere ricondotti ad una rigidezza a flessione (in arancio) e ad una rigidezza laterale (in rosa), mantenendo un'analogia con la nomenclatura usuale per le rigidezze caratterizzanti un telaio.

Anche per *eigentwist* si assiste alla disposizione di due di essi sul piano di simmetria verticale, a testimonianza di come le proprietà elastiche del telaio siano equamente ripartite sui due lati, si nota inoltre che il twist con la più piccola rigidezza torsionale (T2), è orientato lungo l'asse longitudinale delle travi, che idealmente è quella più cedevole dal punto di vista torsionale).

7.3 Screw Theory applicata al forcellone

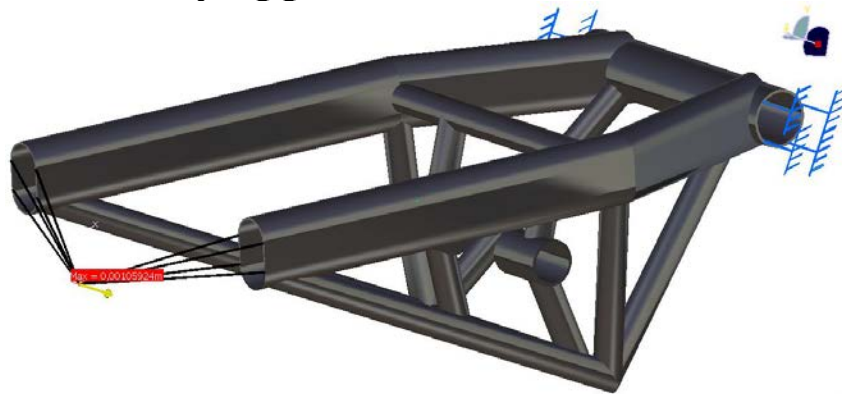


FIGURA 79

ModelloFEM:

- Elemento tetragonale a 4 nodi
- Dimensione mesh 1.2mm
- Connessione rigida tipo spider alle estremità libere del forcellone per simulare la presenza del perno ruota
- Incastro nella zona di ancoraggio del forcellone sul telaio
- Sistema di riferimento: X fronte marcia, Z verso l'alto Y di conseguenza con la regola della mano destra

Matrice Compliance:

8E-09	-3,81E-11	-1,5E-08	1,18E-10	-5,29E-08	-7,91E-11
-3,81E-11	1,07628E-06	8,16E-10	4,99E-07	1,67E-09	-8,62E-07
-1,5E-08	8,16E-10	1,53573E-06	-3,60E-09	3,51E-06	3,47E-09
1,18E-10	4,99E-07	-3,60E-09	1,40E-05	-1,08E-08	-2,46E-07
-5,29E-08	1,67E-09	3,51449E-06	-1,08E-08	1,10E-05	1,10E-08
-7,91E-11	-8,62E-07	3,47E-09	-2,46E-07	1,10E-08	1,00E-06

Matrice Rigidezza:

1,29E+08	21764,74	-595325	-1005,84	811773,9	21898,88
21764,74	3052852	-1984,03	-62939	-2395,66	2616142
-595325	-1984,03	2424918	71,53422	-777630	-1625,9
-1005,84	-62939	71,53422	73033,99	89,58461	-36282,1
811773,9	-2395,66	-777630	89,58461	343270	-3045,03
21898,88	2616142	-1625,9	-36282,1	-3045,03	3245463

Wrench ottenuti:

0,00469323	-0,00018653	-0,999988969
0,0029836	0,999995534	-0,000172529
0,999984536	-0,002982757	0,004693766
-4,99E-05	-0,020616361	7,87E-06
-0,31947864	-7,45E-05	-0,006308486
0,002593773	0,856945989	-0,000172971

Twist ottenuti:

-2,00E-05	2,23E-05	0,004809018
-0,85640654	0,036838249	-0,000239415
-0,000380996	-0,001178476	-0,31950069
0,018934765	0,99981397	-0,003674121
-0,001076433	-0,003654392	-0,999992743
0,999820142	-0,018938583	-0,001007037

Rigidezze lineari:

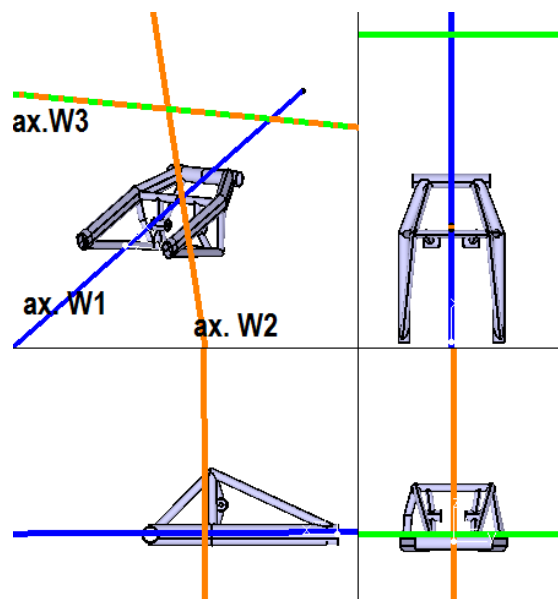


FIGURA 80

$kW1(kN/m)$	1,29E+05
$kW2(kN/m)$	2422109
$kW3(kN/m)$	3052854

Rigidezze torsionali:

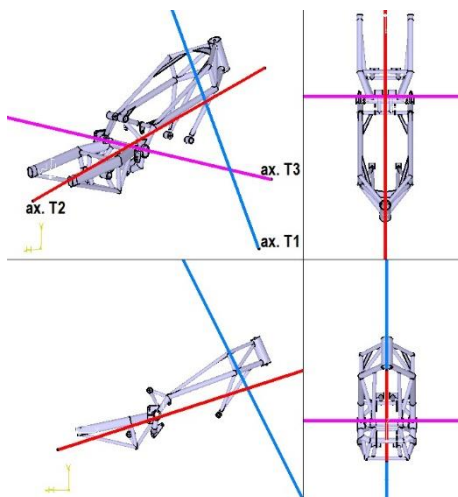


FIGURA 81

$kT1(kNm/rad)$	1003,894
$kT2(kNm/rad)$	71,402
$kT3(kNm/rad)$	90,91

7.5 Screw Theory applicata al sistema telaio-forcellone



FIGURA 82

Il modello agli elementi finiti presenta le seguenti caratteristiche:

- Mesh tetragonale a 4 nodi
- Size 1,5 mm
- Incastro su sede cuscinetti sterzo
- Parte rigida Spider su attacchi telaio per simulare la rigidità del motore
- Sospensione posteriore rigida
- Sistema di riferimento: Asse X fronte marcia, parallelo ai longheroni del forcellone, Asse Z verso l'alto e Y di conseguenza secondo la regola della mano destra.
- Punto di applicazione della forza: intersezione tra il piano di simmetria verticale e l'asse del perno ruota posteriore.

Matrice delle compliance CC

2,66E-07	5,59E-11	-7,91E-07	6,12E-11	-8,74E-07	1,82E-11
5,59E-11	1,01E-05	2,00E-09	-2,00E-06	6,49E-09	-9,00E-06
-7,91E-07	2,00E-09	4,76E-06	-3,16E-09	8,00E-06	4,79E-10
6,12E-11	-2,00E-06	-3,16E-09	2,00E-05	-1,20E-08	3,00E-06
-8,74E-07	6,49E-09	8,00E-06	-1,20E-08	1,90E-05	1,63E-09
1,82E-11	-9,00E-06	4,79E-10	3,00E-06	1,63E-09	1,00E-05

Matrice di rigidità

10250304	-808,796	3107857	-10,1484	-836841	-755,655
-808,796	503438,3	112,9511	-18450,8	-307,805	458629,7
3107857	112,9511	1659354	-89,6017	-555649	134,1739
-10,1484	-18450,8	-89,6017	53032,26	79,82315	-32515,4
-836841	-307,805	-555649	79,82315	248076,8	-313,357
-755,655	458629,7	134,1739	-32515,4	-313,357	522521,4

Wrench

W1	W2	W3
0,951362	-0,30807	0,0008
-6,83E-05	0,002385	0,999997
0,308074	0,95136	-0,00225
-3,20E-06	-0,00019	-0,03665
-0,08593	-0,41475	0,00054
-6,30E-05	0,002227	0,910992

Twist

T1	T2	T3
-4,64E-05	0,000258	-0,04602
0,887722	-0,20785	-0,00125
0,000282	-0,00247	0,421045
0,266934	0,963698	0,005723
0,000486	-0,00607	0,999981
-0,96371	0,266926	0,002089

Rigidezze lineari (Wrench):

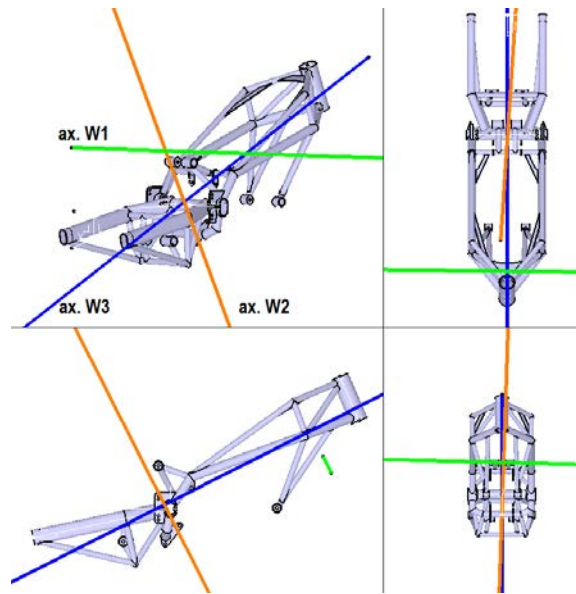


FIGURA 83

W1 (kN/m)	606,85
W2 (kN/m)	619,4
W3 (kN/m)	56983

Rigidezze torsionali (Twist):

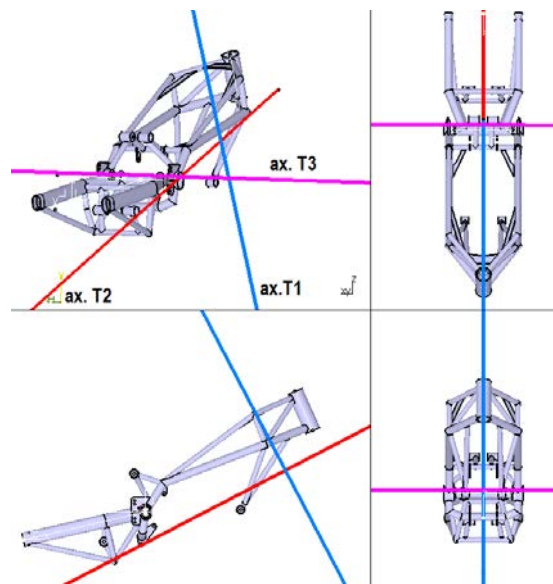


FIGURA 84

kT1(kNm/rad)	125
kT2(kNm/rad)	43,48
kT3(kNm/rad)	52,63

Ovviamente questa analisi non è rappresentativa del comportamento dinamico globale in quanto il forcellone è libero di ruotare attorno al perno forcellone tuttavia questo tipo di analisi può essere utile come verifica finale per valutare come si posizionano gli assi in determinate posizioni reciproche di telaio e forcellone.

7.6 Il centro di taglio

Giunti a questo punto dell'analisi è chiaro come la rigidità laterale che viene calcolata con la MotoStiffMeter non è una rigidità laterale pura ma l'effetto di una forza e di una coppia, questo perché il twist axis non passa per il punto di applicazione della forza, per questo motivo un'ulteriore informazione che dà la Srew Theory è la quota Z del centro di taglio rispetto al punto di applicazione della forza, come si è già fatto notare in precedenza questa quota è di notevole importanza poiché più è vicina al terreno e quindi al reale punto di applicazione della forza, più piccolo sarà il braccio della forza che genera la torsione del forcellone-telaio.

Poiché come si è visto la posizione del twist axis e quindi del centro di taglio è influenzata dalla rigidità e della geometria è facilmente intuibile che per abbassare tale punto è conveniente adottare soluzioni strutturali che tendano a portare verso terra il CT, una delle soluzioni più adottate ultimamente è l'utilizzo di forcelloni a capriata verso il basso, tale osservazione è facilmente verificabile se si guarda alle competizioni di alto livello es. SBK dove le moto di serie vengono migliorate in termini di performance:



FIGURA 85



FIGURA 86

Come si può vedere dalle immagini sopra, (fig. 84) il modello stradale, per ragioni di ingombro dovute alla necessità di utilizzare scarichi omologati per l'uso stradale il costruttore è ricorso ad un forcellone con capriata rivolta verso l'alto, nella fig.85 invece si può osservare la stessa moto nella versione da competizione con il forcellone con capriata rivolta verso il basso.

7.6.1 Applicazione della screw theory per la determinazione del centro di taglio

Si considera dapprima il singolo forcellone, il twist axis viene definito con il secondo twist:

T2
0,000258
-0,20785
-0,00247
0,953698
-0,00607
0,296926

Dalla definizione di twist si sa che le ultime tre componenti del vettore sono le componenti di un vettore unitario, la posizione per cui passa l'asse si ottiene sempre applicando la teoria della vite ed in questo caso risulta:

X (m)	0.09565
Y (m)	0.001153
Z (m)	-0,032185

Tale punto è proprio il centro di taglio. A conferma della validità dei risultati si esegue un'analisi FEM nella quale si va ad applicare una forzante ortogonale a varie altezze Z dal perno ruota, e si va a vedere come varia la rotazione di quel punto.

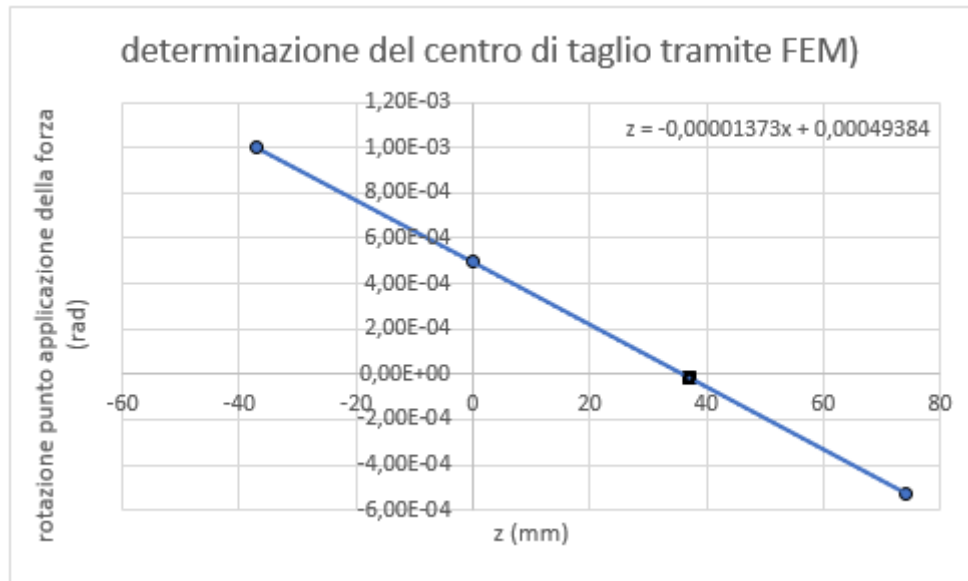


FIGURA 87

Risolvendo l'equazione della retta per cui passano i punti si ottiene ancora $Z=0.036$ m come ci si aspettava.

7.6.2 Il centro di taglio del sistema telaio-forcellone

Si considera ora il centro di taglio dell'intero sistema telaio-forcellone, il twist di riferimento è ancora una volta il secondo:

T2
0.000287
-0.21388
-0.00115
0.894424
-0.00294
0.447211

La posizione che definisce l'asse di torsione nello spazio fornita dalla screw theory è:

	P2
x (m)	0.0956
y (m)	0.001153
z (m)	-0.191

Conoscendo quindi la geometria della motocicletta si calcola la posizione del centro di taglio nella sezione del perno ruota posteriore:

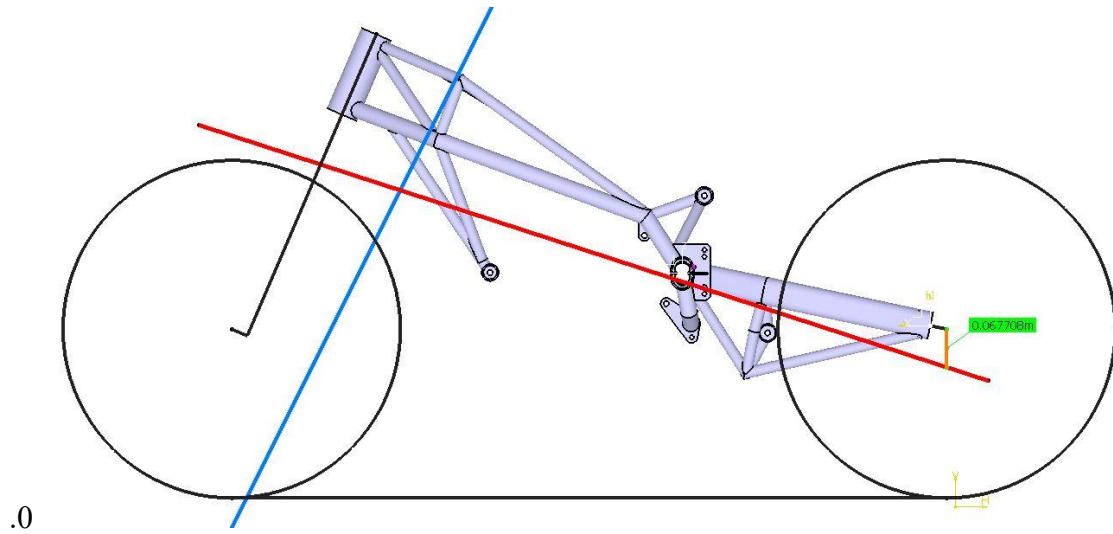


FIGURA 88

Il centro di taglio si trova quindi a 67 mm in basso rispetto al perno ruota.

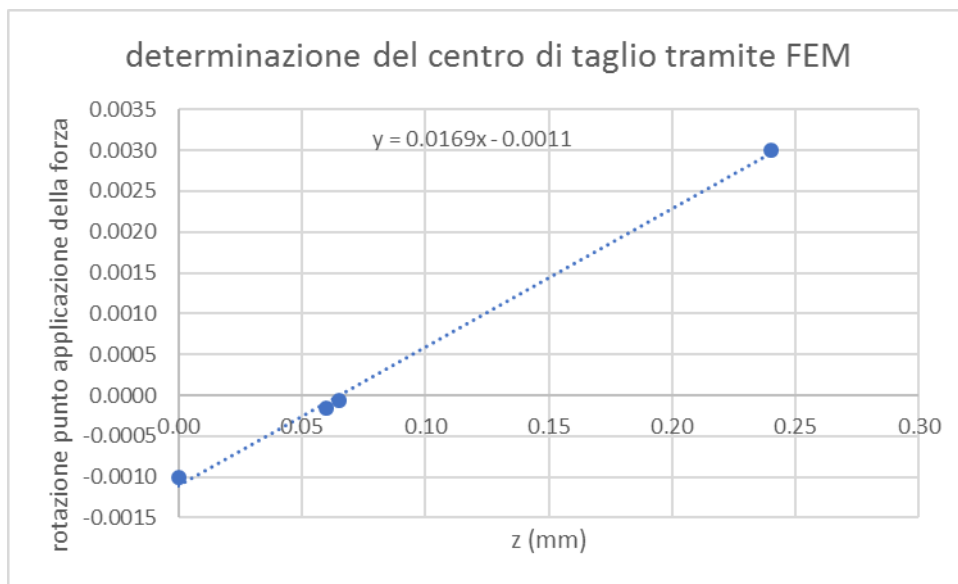


FIGURA 89

Anche in questo caso si effettua la verifica al FEM per validare il risultato ottenuto con la screw theory, risolvendo l'equazione della retta interpolante i punti si ottiene $Z=66$ mm come ci si aspettava.

7.6.3 Considerazioni sulla rigidezza laterale

Dalle considerazioni fatte in merito alla posizione del centro di taglio risulta a questo punto chiaro che la rigidezza laterale determinata per via sperimentale e validata nel capitolo precedente anche tramite software FEM si in realtà l'effetto dell'applicazione di una forza e di una coppia per cui non si può parlare in maniera assoluta di rigidezza laterale, si può però, grazie alla matrice delle compliance ricavare il valore effettivo della K_{lat} , sempre facendo riferimento al sistema di assi posizionati secondo la terna SAE la K_{lat} non sarà altro che l'inverso dell'elemento (2,2) della matrice delle compliance:

$$K_{lat} = \frac{1}{CC(2,2)} = \frac{1}{1.077E-6} = 928510 \frac{N}{m} = 928.5 \frac{kN}{m} = \frac{N}{mm}$$

Rispetto al valore ricavato tramite FEM con la procedura standard pari a 640 kN/m. Andando quindi a ripetere la prova laterale nel modello ad elementi finiti si ottiene:

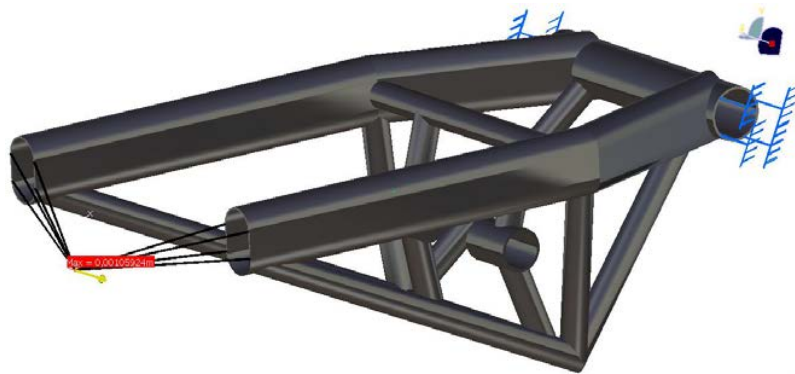


FIGURA 90

Applicando 1kN al centro di taglio ricavato con la screw theory, in direzione laterale, si ottiene uno spostamento di 0.00105924 m equivalente ad una K_{lat} pari a:

$$K_{lat} = \frac{1}{0.00105924} = 944 \frac{kN}{m}$$

Differenza con il valore calcolato con la screw theory: 1.5%.

Conclusioni

In questo elaborato sono stata presentate una serie di metodologie di prova e validazione delle 2 strutture principali di una motocicletta: il telaio ed il forcellone.

Le prove sperimentali sono state svolte utilizzando la macchina per la misura della rigidità denominata MotoStiffMeter, messa a punto dal laboratorio di ricerca di meccanica applicata e ing. Motociclistica del dipartimento di Ingegneria Industriale di Padova.

Essendo la macchina di recente costruzione uno dei principali risultati di questa tesi è la validazione della stessa per quanto riguarda le prove statiche per la determinazione delle rigidità laterale e torsionale e la messa a punto di un modello ad elementi finiti che permetta di simulare i risultati sperimentali.

Un ulteriore risultato importante sempre per quanto riguarda la macchina di prova è la caratterizzazione dinamica della struttura di vincolo, si è infatti dimostrato come la configurazione attuale influisca in maniera estremamente rilevante sui risultati delle analisi modali eseguite.

Al termine della validazione statica e dinamica della macchina per la misura delle rigidità è stata presentata una metodologia di determinazione numerica delle caratteristiche principali di rigidità basata sulla Screw theory applicata dapprima su strutture elementari per testarne le potenzialità e infine su un telaio ed un forcellone di una motocicletta da competizione progettata e realizzata all'interno del laboratorio di ricerca. I risultati ottenuti con questa teoria sono stati valutati utilizzando il modello ad elementi finiti messo a punto per la validazione della macchina di prova evidenziando un ottimo accordo dei risultati e permettendo quindi una previsione attendibile dei risultati sperimentali.

Appendice

A1 Codice di calcolo per la Screw theory

Il codice è composto da un main script che va a richiamare due function per il calcolo rispettivamente degli eigendwrench e degli eigentwist.

Codice Principale:

```
% %2017 MASSARO FOLADOR
% %2019 MODIFIED ROVARIN
%
% -----
%
% %Notes:
% %beam axle is along x
% %(0,0,0) is the point where the K is calculated
% %-----
%
%
% close all;
% clear all;
% clear
% clc;
%
% %-----
%
% % Import data (stiffness matrix) from Nastran file .pch
% %-----
%
% format longg; % Per avere tutte le cifre dopo la virgola
%
%***** DA QUI MODIFICATO DA AR: prende in pasto la matrice delle
%compliance da un file .mat chiamato CC.mat in origine partiva dalla
%matrice di rigidezza e calcolava la compliance invertendola io do in
%pasto
%direttamente la compliance e la matrice di rigidezza
%
%-----
%
% Extract Lateral Stiffness (Y-direction when Fy)
%-----
%
% load('KK.mat'); %MOD AR
% CC=inv(KK);
% load('CC.mat'); %MOD AR
% Klat=1/CC(2,2);
% disp(['Klat=',num2str(Klat/1000,'%5.1f'),' kN/m'])
```

```

%-----
%-----
% Decomposition
%-----
%-----

% EigenWrench

[lin_stiff,wrench,pos_w,vec_w] = EigenWrench(KK)

% EigenTwist

[rot_stiff,twist,pos_t,vec_t] = EigenTwist(KK);

%-----
%-----
% Plot wrench
%-----
%-----

figure(1),clf
hold on
grid on
plot3(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'or', 'LineWidth', 2)
plot3(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2), 'or', 'LineWidth', 2)
plot3(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3), 'or', 'LineWidth', 2)
plot3([pos_w(1,1)-vec_w(1,1) pos_w(1,1)+vec_w(1,1)], [pos_w(2,1)-
vec_w(2,1) pos_w(2,1)+vec_w(2,1)], [pos_w(3,1)-vec_w(3,1)
pos_w(3,1)+vec_w(3,1)], 'r')
plot3([pos_w(1,2)-vec_w(1,2) pos_w(1,2)+vec_w(1,2)], [pos_w(2,2)-
vec_w(2,2) pos_w(2,2)+vec_w(2,2)], [pos_w(3,2)-vec_w(3,2)
pos_w(3,2)+vec_w(3,2)], 'r')
plot3([pos_w(1,3)-vec_w(1,3) pos_w(1,3)+vec_w(1,3)], [pos_w(2,3)-
vec_w(2,3) pos_w(2,3)+vec_w(2,3)], [pos_w(3,3)-vec_w(3,3)
pos_w(3,3)+vec_w(3,3)], 'r')
text(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'Pos_W 1', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2), 'Pos_W 2', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3), 'Pos_W 3', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,1)+vec_w(1,1),pos_w(2,1)+vec_w(2,1),pos_w(3,1)+vec_w(3,1)
, 'Ax. W1', 'Color', [1 0 0])
text(pos_w(1,2)+vec_w(1,2),pos_w(2,2)+vec_w(2,2),pos_w(3,2)+vec_w(3,2)
, 'Ax. W2', 'Color', [1 0 0])
text(pos_w(1,3)+vec_w(1,3),pos_w(2,3)+vec_w(2,3),pos_w(3,3)+vec_w(3,3)
, 'Ax. W3', 'Color', [1 0 0])
view(0,0)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Front view');

figure(2)
plot3(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'or', 'LineWidth', 2)
grid on
hold on

```



```

plot3(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2),'or','LineWidth',2)
plot3(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3),'or','LineWidth',2)
plot3([pos_w(1,1)-vec_w(1,1) pos_w(1,1)+vec_w(1,1)],[pos_w(2,1)-
vec_w(2,1) pos_w(2,1)+vec_w(2,1)],[pos_w(3,1)-vec_w(3,1)
pos_w(3,1)+vec_w(3,1)], 'r')
plot3([pos_w(1,2)-vec_w(1,2) pos_w(1,2)+vec_w(1,2)],[pos_w(2,2)-
vec_w(2,2) pos_w(2,2)+vec_w(2,2)],[pos_w(3,2)-vec_w(3,2)
pos_w(3,2)+vec_w(3,2)], 'r')
plot3([pos_w(1,3)-vec_w(1,3) pos_w(1,3)+vec_w(1,3)],[pos_w(2,3)-
vec_w(2,3) pos_w(2,3)+vec_w(2,3)],[pos_w(3,3)-vec_w(3,3)
pos_w(3,3)+vec_w(3,3)], 'r')
text(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'Pos_W 1', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2), 'Pos_W 2', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3), 'Pos_W 3', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,1)+vec_w(1,1),pos_w(2,1)+vec_w(2,1),pos_w(3,1)+vec_w(3,1)
, 'Ax. W1', 'Color',[1 0 0])
text(pos_w(1,2)+vec_w(1,2),pos_w(2,2)+vec_w(2,2),pos_w(3,2)+vec_w(3,2)
, 'Ax. W2', 'Color',[1 0 0])
text(pos_w(1,3)+vec_w(1,3),pos_w(2,3)+vec_w(2,3),pos_w(3,3)+vec_w(3,3)
, 'Ax. W3', 'Color',[1 0 0])
view(-90,0)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Left view')

```

```

figure(3)
plot3(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1),'or','LineWidth',2)
grid on
hold on
plot3(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2),'or','LineWidth',2)
plot3(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3),'or','LineWidth',2)
plot3([pos_w(1,1)-vec_w(1,1) pos_w(1,1)+vec_w(1,1)],[pos_w(2,1)-
vec_w(2,1) pos_w(2,1)+vec_w(2,1)],[pos_w(3,1)-vec_w(3,1)
pos_w(3,1)+vec_w(3,1)], 'r')
plot3([pos_w(1,2)-vec_w(1,2) pos_w(1,2)+vec_w(1,2)],[pos_w(2,2)-
vec_w(2,2) pos_w(2,2)+vec_w(2,2)],[pos_w(3,2)-vec_w(3,2)
pos_w(3,2)+vec_w(3,2)], 'r')
plot3([pos_w(1,3)-vec_w(1,3) pos_w(1,3)+vec_w(1,3)],[pos_w(2,3)-
vec_w(2,3) pos_w(2,3)+vec_w(2,3)],[pos_w(3,3)-vec_w(3,3)
pos_w(3,3)+vec_w(3,3)], 'r')
text(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'Pos_W 1', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2), 'Pos_W 2', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3), 'Pos_W 3', 'Color',[1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,1)+vec_w(1,1),pos_w(2,1)+vec_w(2,1),pos_w(3,1)+vec_w(3,1)
, 'Ax. W1', 'Color',[1 0 0])
text(pos_w(1,2)+vec_w(1,2),pos_w(2,2)+vec_w(2,2),pos_w(3,2)+vec_w(3,2)
, 'Ax. W2', 'Color',[1 0 0])
text(pos_w(1,3)+vec_w(1,3),pos_w(2,3)+vec_w(2,3),pos_w(3,3)+vec_w(3,3)
, 'Ax. W3', 'Color',[1 0 0])
view(0,-270)
xlabel('X')
ylabel('Y')

```

```

xlabel('Z')
title('Upper view')

figure(4)
plot3(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1),'or','LineWidth',2)
grid on
hold on
plot3(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2),'or','LineWidth',2)
plot3(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3),'or','LineWidth',2)
plot3([pos_w(1,1)-vec_w(1,1) pos_w(1,1)+vec_w(1,1)], [pos_w(2,1)-
vec_w(2,1) pos_w(2,1)+vec_w(2,1)], [pos_w(3,1)-vec_w(3,1)
pos_w(3,1)+vec_w(3,1)], 'r')
plot3([pos_w(1,2)-vec_w(1,2) pos_w(1,2)+vec_w(1,2)], [pos_w(2,2)-
vec_w(2,2) pos_w(2,2)+vec_w(2,2)], [pos_w(3,2)-vec_w(3,2)
pos_w(3,2)+vec_w(3,2)], 'r')
plot3([pos_w(1,3)-vec_w(1,3) pos_w(1,3)+vec_w(1,3)], [pos_w(2,3)-
vec_w(2,3) pos_w(2,3)+vec_w(2,3)], [pos_w(3,3)-vec_w(3,3)
pos_w(3,3)+vec_w(3,3)], 'r')
text(pos_w(1,1),pos_w(2,1),pos_w(3,1), 'Pos_W 1', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,2),pos_w(2,2),pos_w(3,2), 'Pos_W 2', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_w(1,3),pos_w(2,3),pos_w(3,3), 'Pos_W 3', 'Color', [1 0
0], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_w(1,1)+vec_w(1,1),pos_w(2,1)+vec_w(2,1),pos_w(3,1)+vec_w(3,1)
, 'Ax. W1', 'Color', [1 0 0])
text(pos_w(1,2)+vec_w(1,2),pos_w(2,2)+vec_w(2,2),pos_w(3,2)+vec_w(3,2)
, 'Ax. W2', 'Color', [1 0 0])
text(pos_w(1,3)+vec_w(1,3),pos_w(2,3)+vec_w(2,3),pos_w(3,3)+vec_w(3,3)
, 'Ax. W3', 'Color', [1 0 0])
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('3D view')

set(gcf, 'Name', ['Ax. W1: ', num2str(lin_stiff(1)/1000, '%5.1f'), ' kN/m,
Ax. W2: ', num2str(lin_stiff(2)/1000, '%5.1f'), ' kN/m, Ax. W3:
', num2str(lin_stiff(3)/1000, '%5.1f'), ' kN/m']);

%-----
% Plot twist
%-----

figure(5), clf

plot3(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1), 'ob', 'LineWidth', 2)
hold on;
grid on;
plot3(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2), 'ob', 'LineWidth', 2)
plot3(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3), 'ob', 'LineWidth', 2)
plot3([pos_t(1,1)-vec_t(1,1) pos_t(1,1)+vec_t(1,1)], [pos_t(2,1)-
vec_t(2,1) pos_t(2,1)+vec_t(2,1)], [pos_t(3,1)-vec_t(3,1)
pos_t(3,1)+vec_t(3,1)], 'b')

```

```

plot3([pos_t(1,2)-vec_t(1,2) pos_t(1,2)+vec_t(1,2)], [pos_t(2,2)-
vec_t(2,2) pos_t(2,2)+vec_t(2,2)], [pos_t(3,2)-vec_t(3,2)
pos_t(3,2)+vec_t(3,2)], 'b')
plot3([pos_t(1,3)-vec_t(1,3) pos_t(1,3)+vec_t(1,3)], [pos_t(2,3)-
vec_t(2,3) pos_t(2,3)+vec_t(2,3)], [pos_t(3,3)-vec_t(3,3)
pos_t(3,3)+vec_t(3,3)], 'b')
text(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1), 'Pos_T 1', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2), 'Pos_T 2', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3), 'Pos_T 3', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_t(1,1)+vec_t(1,1),pos_t(2,1)+vec_t(2,1),pos_t(3,1)+vec_t(3,1)
, 'Ax. T1', 'Color', [0 0 1])
text(pos_t(1,2)+vec_t(1,2),pos_t(2,2)+vec_t(2,2),pos_t(3,2)+vec_t(3,2)
, 'Ax. T2', 'Color', [0 0 1])
text(pos_t(1,3)+vec_t(1,3),pos_t(2,3)+vec_t(2,3),pos_t(3,3)+vec_t(3,3)
, 'Ax. T3', 'Color', [0 0 1])
view(0,0)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Front view');

```

```

figure(6)
plot3(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1), 'ob', 'LineWidth', 2)
hold on;
grid on;
plot3(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2), 'ob', 'LineWidth', 2)
plot3(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3), 'ob', 'LineWidth', 2)
plot3([pos_t(1,1)-vec_t(1,1) pos_t(1,1)+vec_t(1,1)], [pos_t(2,1)-
vec_t(2,1) pos_t(2,1)+vec_t(2,1)], [pos_t(3,1)-vec_t(3,1)
pos_t(3,1)+vec_t(3,1)], 'b')
plot3([pos_t(1,2)-vec_t(1,2) pos_t(1,2)+vec_t(1,2)], [pos_t(2,2)-
vec_t(2,2) pos_t(2,2)+vec_t(2,2)], [pos_t(3,2)-vec_t(3,2)
pos_t(3,2)+vec_t(3,2)], 'b')
plot3([pos_t(1,3)-vec_t(1,3) pos_t(1,3)+vec_t(1,3)], [pos_t(2,3)-
vec_t(2,3) pos_t(2,3)+vec_t(2,3)], [pos_t(3,3)-vec_t(3,3)
pos_t(3,3)+vec_t(3,3)], 'b')
text(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1), 'Pos_T 1', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2), 'Pos_T 2', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Top')
text(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3), 'Pos_T 3', 'Color', [0 0
1], 'VerticalAlignment', 'Bottom')
text(pos_t(1,1)+vec_t(1,1),pos_t(2,1)+vec_t(2,1),pos_t(3,1)+vec_t(3,1)
, 'Ax. T1', 'Color', [0 0 1])
text(pos_t(1,2)+vec_t(1,2),pos_t(2,2)+vec_t(2,2),pos_t(3,2)+vec_t(3,2)
, 'Ax. T2', 'Color', [0 0 1])
text(pos_t(1,3)+vec_t(1,3),pos_t(2,3)+vec_t(2,3),pos_t(3,3)+vec_t(3,3)
, 'Ax. T3', 'Color', [0 0 1])
view(-90,0)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Left view')

```

```

figure(7)

```

```

plot3(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1),'ob','LineWidth',2)
hold on;
grid on;
plot3(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2),'ob','LineWidth',2)
plot3(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3),'ob','LineWidth',2)
plot3([pos_t(1,1)-vec_t(1,1) pos_t(1,1)+vec_t(1,1)],[pos_t(2,1)-
vec_t(2,1) pos_t(2,1)+vec_t(2,1)],[pos_t(3,1)-vec_t(3,1)
pos_t(3,1)+vec_t(3,1)],'b')
plot3([pos_t(1,2)-vec_t(1,2) pos_t(1,2)+vec_t(1,2)],[pos_t(2,2)-
vec_t(2,2) pos_t(2,2)+vec_t(2,2)],[pos_t(3,2)-vec_t(3,2)
pos_t(3,2)+vec_t(3,2)],'b')
plot3([pos_t(1,3)-vec_t(1,3) pos_t(1,3)+vec_t(1,3)],[pos_t(2,3)-
vec_t(2,3) pos_t(2,3)+vec_t(2,3)],[pos_t(3,3)-vec_t(3,3)
pos_t(3,3)+vec_t(3,3)],'b')
text(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1),'Pos_T 1','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Bottom')
text(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2),'Pos_T 2','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Top')
text(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3),'Pos_T 3','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Bottom')
text(pos_t(1,1)+vec_t(1,1),pos_t(2,1)+vec_t(2,1),pos_t(3,1)+vec_t(3,1)
,'Ax. T1','Color',[0 0 1])
text(pos_t(1,2)+vec_t(1,2),pos_t(2,2)+vec_t(2,2),pos_t(3,2)+vec_t(3,2)
,'Ax. T2','Color',[0 0 1])
text(pos_t(1,3)+vec_t(1,3),pos_t(2,3)+vec_t(2,3),pos_t(3,3)+vec_t(3,3)
,'Ax. T3','Color',[0 0 1])
view(0,-270)
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('Upper view')

```

```

figure(8)
plot3(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1),'ob','LineWidth',2)
hold on;
grid on;
plot3(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2),'ob','LineWidth',2)
plot3(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3),'ob','LineWidth',2)
plot3([pos_t(1,1)-vec_t(1,1) pos_t(1,1)+vec_t(1,1)],[pos_t(2,1)-
vec_t(2,1) pos_t(2,1)+vec_t(2,1)],[pos_t(3,1)-vec_t(3,1)
pos_t(3,1)+vec_t(3,1)],'b')
plot3([pos_t(1,2)-vec_t(1,2) pos_t(1,2)+vec_t(1,2)],[pos_t(2,2)-
vec_t(2,2) pos_t(2,2)+vec_t(2,2)],[pos_t(3,2)-vec_t(3,2)
pos_t(3,2)+vec_t(3,2)],'b')
plot3([pos_t(1,3)-vec_t(1,3) pos_t(1,3)+vec_t(1,3)],[pos_t(2,3)-
vec_t(2,3) pos_t(2,3)+vec_t(2,3)],[pos_t(3,3)-vec_t(3,3)
pos_t(3,3)+vec_t(3,3)],'b')
text(pos_t(1,1),pos_t(2,1),pos_t(3,1),'Pos_T 1','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Bottom')
text(pos_t(1,2),pos_t(2,2),pos_t(3,2),'Pos_T 2','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Top')
text(pos_t(1,3),pos_t(2,3),pos_t(3,3),'Pos_T 3','Color',[0 0
1],'VerticalAlignment','Bottom')
text(pos_t(1,1)+vec_t(1,1),pos_t(2,1)+vec_t(2,1),pos_t(3,1)+vec_t(3,1)
,'Ax. T1','Color',[0 0 1])
text(pos_t(1,2)+vec_t(1,2),pos_t(2,2)+vec_t(2,2),pos_t(3,2)+vec_t(3,2)
,'Ax. T2','Color',[0 0 1])
text(pos_t(1,3)+vec_t(1,3),pos_t(2,3)+vec_t(2,3),pos_t(3,3)+vec_t(3,3)
,'Ax. T3','Color',[0 0 1])

```

```
xlabel('X')
ylabel('Y')
zlabel('Z')
title('3D view')

set(gcf, 'Name', ['Ax. T1: ', num2str(rot_stiff(1)/1000, '%5.1f'), '
kNm/rad,      Ax. T2: ', num2str(rot_stiff(2)/1000, '%5.1f'), ' kNm/rad,
Ax. T3: ', num2str(rot_stiff(3)/1000, '%5.1f'), ' kNm/rad']);
```

A1.1 Codici secondari: Eigenwrench

```
function [ei_w,w,b_w,ev_w] = EigenWrench(KK)
%KK : 6x6 stiffness matrix (order:3 displacements followed by 3
rotations)
%ei_w: principal linear stiffness
%w : wrench in plucker-ray <unit vector,moment>
%b_w : point on the principal axes
%ev_w: unit vectors of principal axes

K11 = KK(1:3,1:3);
K12 = KK(1:3,4:6);

% EigenWrench Problem

[ev_w,ei_w]=eig(K11);%(4.74)
ei_w=diag(ei_w);
% ev_w=ev_w';
% ei_w=ei_w';

for ii = 1:3

    kf = ei_w(ii);
    f_x = ev_w(1,ii);
    f_y = ev_w(2,ii);
    f_z = ev_w(3,ii);
    F = [f_x; f_y; f_z];
    et_w(:,ii) = 1/kf*K12'*F;%tau in (4.40)

end

w1 = [ev_w(1:3,1); et_w(:,1)];
w2 = [ev_w(1:3,2); et_w(:,2)];
w3 = [ev_w(1:3,3); et_w(:,3)];

w = [w1 w2 w3];

for ii = 1:3
    pt_w(ii)=dot(w(4:6,ii),w(1:3,ii));
end

% each coloumn of b_w contains the vector [b_x b_y b_z]

for ii = 1:3

    %ev_w cross b_w = et_w
    %ev_w cross (ev_w cross b_w) = ev_w cross et_w
    b_w(:,ii) = cross(ev_w(:,ii),et_w(:,ii));

end
```

```

if norm(pt_w(ii)) ~= 0
    fprintf('\n');
    fprintf('WARNING: WRENCH PITCH IS NOT NULL \n');
    fprintf('\n');

    b_w(:,ii) = cross(ev_w(:,ii),et_w(:,ii)-pt_w(ii)*ev_w(:,ii));

end

end

```

A1.2 Codici secondari: Eigentwist

```

function [ei_t,T,b_t,ev_t]=EigenTwist(KK)
%KK : 6x6 stiffness matrix (order:3 displacements followed by 3
rotations)
%ei_t: principal rotation stiffness
%w : twist in plucker-axis <moment,unit vector>
%b_t : point on the principal axes
%ev_t: unit vectors of principal axes

K11 = KK(1:3,1:3);
K12 = KK(1:3,4:6);
K22 = KK(4:6,4:6);

M = K22-K12'/(K11)*K12;

[ev_t,ei_t]=eig(M);
ei_t=[ei_t(1,1) ei_t(2,2) ei_t(3,3)];
%ei_t=ei_t';

for ii = 1:3

    kf = ei_t(ii);
    gamma_x = ev_t(1,ii);
    gamma_y = ev_t(2,ii);
    gamma_z = ev_t(3,ii);
    Gamma = [gamma_x; gamma_y; gamma_z];
    et_t(:,ii) = -inv(K11)*K12*Gamma;

end

t1 = [et_t(:,1); ev_t(:,1)];
t2 = [et_t(:,2); ev_t(:,2)];
t3 = [et_t(:,3); ev_t(:,3)];

T = [t1 t2 t3];

```

```

RR = [zeros(3,3),diag(ones(1,3));diag(ones(1,3)),zeros(3,3)];

for ii = 1:3
    xi(:,ii) = RR*T(:,ii);
end

for ii = 1:3
    pt_t(ii)=xi(4:6,ii)'*xi(1:3,ii);
end

% each coloumn of b_t contains the vector [b_x b_y b_z]

for ii = 1:3
    b_t(:,ii) = cross(ev_t(1:3,ii),et_t(:,ii));
end

if norm(pt_t) ~= 0
    fprintf('\n');
    fprintf('WARNING: TWIST PITCH IS NOT NULL \n');
    fprintf('\n');
    b_t(:,ii) = cross(ev_t(:,ii),et_t(:,ii)-pt_t(ii)*ev_t(:,ii));
end
end

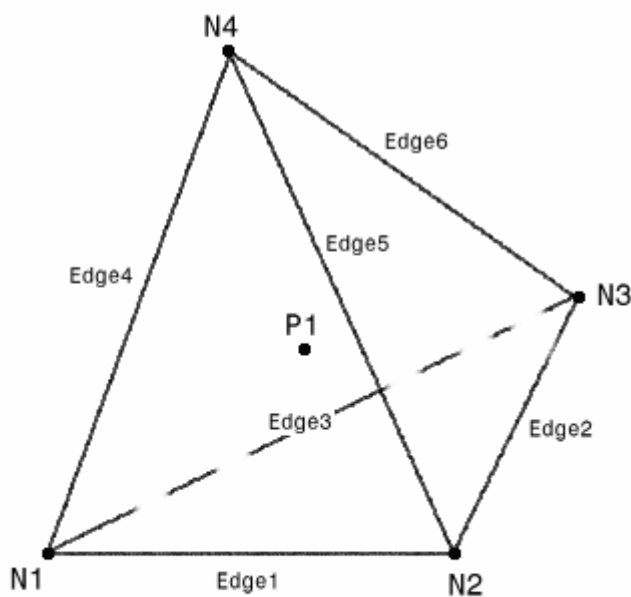
```


A2 Descrizione degli elementi usati per le analisi FEM

A2.1 Elemento TET4

Linear Tetrahedron is a four-nodes isoparametric solid element.

Type	solid element
Physical property	solid
Mesh connectivity	TE4
Number of nodes	4
Degrees of freedom (per node)	3 (translations)
Type of behavior	elastic

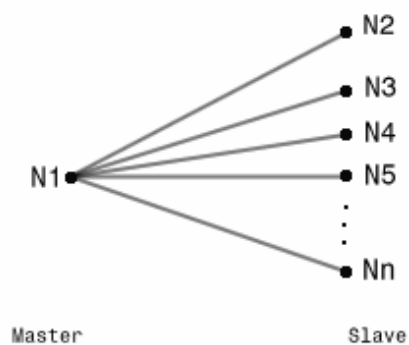


This element has only one gauss point: the gravity center (**P1**) of the tetrahedron. There are only three translations.

A2.2 Elemento spider rigido

Rigid Spider connects a node to a set of nodes in a rigid fashion.

Type	spider element
Physical property	rigid body motion
Mesh connectivity	SPIDER
Number of nodes	1 master, n-1 slaves
Degrees of freedom (per node)	6 (3 translations and 3 rotations)
Type of behavior	kinematics



The degrees of freedom of the master node (N1) are linked to the degrees of freedom of each slave node (N2 to Nn) according to rigid body equations.

As a consequence, the displacements of slave nodes are linked among themselves according to rigid body motion.

Any direction can be relaxed in the rigid body equations.

If there is only one slave node, the rigid spider element becomes the traditional rigid beam element.

Bibliografia

- [1] **M. Raines, T.E. Thorpe.** *The relationship between twist axis and effective torsional stiffness of a frame motorcycle.* IMechE 1986 Vol. 200 No. D1 069-073 0265-1904/86

- [2] **V.Cossalter, A.Doria, L.Mitolo.** *Inertial and modal properties of a racing motorcycles.* SAE Indianapolis, 2002.

- [3] **Patterson T., Lipkin H.,** *Structure of Robot Compliance,* Journal of Mechanical Design Vol.115, September 1993

- [4] **V.Cossalter.** *Motorcycle Dynamics.* 2006

- [5] **G.Verzini,** *Criteri per l'identificazione dei parametri di rigidità dei telai motociclistici.* Tesi di laurea, Università degli Studi di Padova. 2010.

- [6] **D.J.Ewins.** *Modal Testing, theory practice and application.* Research studies press LTD.

- [7] **Atzori B.,** *Metodi e Procedimenti di Calcolo nella Progettazione Meccanica,* Edizioni Universitarie della Libreria Laterza, 2004

- [8] **A.Doria, L.Taraborrelli,** *The modal twist axis: a method for describing the dynamical characteristics of single track vehicles.* DETC2015-46266