



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"
Corso di Laurea in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Teorie di ordine superiore, instabilità e lagrangiane degeneri

Candidato:
Paolo Spezzati
Matricola 1054530

Relatore:
Dott. Luca Martucci

Indice

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Il Teorema di Ostrogradski | 7 |
| 1.1 | Lagrangiane non degeneri dipendenti da derivate di ordine superiore al primo | 7 |
| 1.2 | Instabilità di Ostrogradski | 10 |
| 1.2.1 | Esempio: la particella libera | 10 |
| 1.2.2 | Esempio: l'oscillatore armonico | 11 |
| 1.2.3 | Esempio: una teoria di campo | 13 |
| 2 | Sistemi completamente degeneri | 15 |
| 2.1 | Lagrangiane per EOMs del quinto ordine | 15 |
| 2.2 | Analisi con il formalismo hamiltoniano | 15 |
| 2.3 | Esempi | 17 |
| 2.3.1 | Oscillatore armonico bidimensionale modificato | 17 |
| 2.3.2 | Esempio con una teoria di campo | 19 |
| 3 | Sistemi parzialmente degeneri | 21 |
| A | L'algoritmo di Dirac-Bergmann | 29 |
| A.0.3 | Parentesi di Dirac | 31 |

Introduzione

La meccanica classica è solitamente formulata usando il principio di azione stazionaria, anche detto Principio di Hamilton. Il Principio si applica ad una azione, funzionale delle traiettorie, espressa come integrale nel tempo di una Lagrangiana dipendente dalle posizioni (o più in generale dalle coordinate del sistema) e dalle loro derivate. Una delle più grosse restrizioni che usualmente si impone a questa funzione è che dipenda solo dalle derivate prime delle coordinate e che, se siamo nell'ambito delle teorie di campo, sia locale. Queste due restrizioni sono la conseguenza di un risultato, vecchio ormai di 160 anni, dovuto ad Mikhail Vasilevich Ostrogradski. Il lavoro di Ostrogradski, pubblicato nel 1850 [1], rende conto del perchè Newton aveva ragione nel supporre le equazioni della dinamica fossero delle equazioni differenziali del secondo ordine. Infatti la costruzione di Ostrogradski del formalismo hamiltoniano a partire da quello lagrangiano mostra che la funzione Hamiltoniana, derivante da una lagrangiana con derivate superiori al primo, è inevitabilmente, senza aggiunta di nessuna ipotesi ad hoc, lineare nei momenti causando l'instabilità, detta di Ostrogradski. Potrebbe essere curioso osservare che il suo stesso scopritore non si rese conto dell'importanza di quanto aveva dimostrato a livello così fondamentale. Si noti comunque che al tempo non poteva apprezzare le conseguenze più profonde che si possono osservare considerando il comportamento quantistico che presenta la suddetta instabilità di Ostrogradski.

La tesi si propone di illustrare il passaggio definito da Ostrogradski dall'ambito lagrangiano a quello hamiltoniano, generalizzandolo per poterlo applicare anche a teorie degeneri. Verranno forniti numerosi esempi nei quali verranno mostrate le principali caratteristiche di queste teorie con derivate di ordine superiore mediante la risoluzione analitica dei sistemi, quando possibile, o con l'ausilio di simulazioni numeriche con il software *Mathematica*. Nel secondo capitolo verranno in particolare analizzate le teorie degeneri, cioè quelle teorie soggette a vincoli (di cui si farà la classificazione). L'analisi di queste teorie degeneri è giustificata dalla speranza che la presenza di vincoli nella teoria limiti le variabili che sono lineari nell'hamiltoniana curando l'instabilità. Si otterrà che se i vincoli sono di seconda classe l'insorgere dell'instabilità sarà inevitabile. Nel capitolo terzo si analizzeranno invece quelle teorie che presentano vincoli di prima classe che sottendono una libertà di gauge. La speranza nell'analizzare questo caso è che con un gauge fixing si possa evitare l'instabilità di Ostrogradski.

L'interesse nello studio di queste teorie, che si riveleranno un po' patologiche, risiede nel fatto che in vari ambiti della moderna fisica teorica, si vedano la teoria delle stringhe o le variazioni alla relatività generale di Einstein, si è abbandonato, o si è cercato di farlo, il paradigma di una teoria che dipendesse dalle sole derivate prime.

Capitolo 1

Il Teorema di Ostrogradski

1.1 Lagrangiane non degeneri dipendenti da derivate di ordine superiore al primo

In generale una lagrangiana dipendente da derivate di ordine superiore al primo è una funzione da una qualche varietà in \mathbb{R} del tipo

$$L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \quad (1.1)$$

(qui per semplicità di notazione con x si intende $x = (x_1, \dots, x_M)$ se M i gradi di libertà presenti, in generale cioè x sarà da considerarsi come un vettore ad M componenti o comunque tutto ciò che diremo sarà facilmente estendibile al caso di un vettore M dimensionale). A questo tipo di lagrangiana è associata l'azione

$$S[x] = \int_{t_0}^t L dt \quad (1.2)$$

Facendo discendere da un principio variazionale le equazioni del moto esse risultano essere:

$$\sum_{k=0}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = 0 \quad (1.3)$$

Se la lagrangiana è non degenera (si supponrà tale ipotesi per tutto il resto del primo capitolo), cioè $\det \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^{(n)} \partial x_j^{(n)}} \neq 0$, e non può essere abbassato l'ordine delle derivate che vi compaiono (tramite l'aggiunta di derivate totali), allora le equazioni del moto saranno del $2n$ ordine. Ciò implica che per ben definire il problema di Cauchy saranno necessarie $2n$ condizioni iniziali. Siccome la lagrangiana è non degenera è possibile definire una generalizzazione della trasformata di Legendre, dovuta a Ostrogradski, nel modo che descriveremo (vedi per esempio [2]). Le definizioni dei momenti date da Ostrogradski seguono la filosofia che c'è nel passaggio alla formulazione hamiltoniana da quella lagrangiana in teorie di ordine uno nelle derivate temporali. Infatti se riscriviamo le equazioni del moto ricavate sopra nella forma

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^{k-1} \frac{\partial L}{\partial x^{(k-1)}} = 0 \quad (1.4)$$

ci si accorge che, in analogia con il caso conosciuto, viene naturale definire il momento P_1 come $P_1 = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial L}{\partial x^{(k-1)}}$. Ora per tenere conto della variazione temporale insita nella definizione di P_1 ripetiamo la stessa procedura finchè non definiremo un momento P_n la cui definizione non dipende dall'evoluzione temporale. In conclusione si definiscono le nuove coordinate dello spazio delle fasi come

$$Q_i \equiv x^{(i-1)} \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^n \left(-\frac{d}{dt}\right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}} \quad (1.5)$$

Si noti che il numero di momenti definiti è n , come il numero delle coordinate che abbiamo definito, in totale $2n$ variabili coniugate come le condizioni iniziali da fissare per determinare completamente il problema di Cauchy in esame. Il fatto della non degenerazione della lagrangiana ci consente di invertire $P_n = \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}}$ e risolvere

$x^{(n)} = \dot{Q}_n = a(Q_1, \dots, Q_n, P_n)$. Questo ci consente di definire l'Hamiltoniana

$$\begin{aligned} H(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n) &= \sum_{i=1}^n P_i x^{(i)} - L(Q_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} P_i \dot{Q}_i + P_n \dot{Q}_n - \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_n, P_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} P_i Q_{i+1} + P_n a(Q_1, \dots, Q_n, P_n) - \mathcal{L}(Q_1, \dots, Q_n, P_n) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Questa definizione di momenti che ci consente di passare da un problema variazionale lagrangiano ad uno hamiltoniano è il contenuto del

Teorema (Ostrogradsky) (da [11]) Tutte le equazioni differenziali che provengono da un problema in Calcolo Variazionale, con una variabile indipendente (tempo nel nostro caso) possono essere espresse in forma Hamiltoniana.

Dmostrazione Mostriamo che le equazioni lagrangiane e hamiltoniane sono equivalenti. Calcoliamo la variazione dell'azione scritta in termini hamiltoniani $S = \int_{t_0}^t \sum_{i=0}^n (P_i \dot{Q}_i - H) dt$ e imponiamo che sia zero. Le equazioni di Hamilton che ne risultano, dopo una integrazione per parti, sono le solite

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial H}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Ora facendo la variazione di (1.6) otteniamo:

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i \delta Q_{i+1} + Q_{i+1} \delta P_i) + P_n \delta \dot{Q}_n + \dot{Q}_n \delta P_n - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_j} \delta Q_j - \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_n} \delta \dot{Q}_n \quad (1.7)$$

Ora se utilizziamo la definizione del momento $P_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_n}$ possiamo semplificare l'espressione

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n-1} (P_i \delta Q_{i+1} + Q_{i+1} \delta P_i) + \dot{Q}_n \delta P_n - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial Q_j} \delta Q_j \quad (1.8)$$

Ora la condizione per cui la variazione dell'azione è nulla è:

$$\delta H = \sum_{i=1}^n (-\dot{P}_i \delta Q_i + \dot{Q}_i \delta P_i)$$

Utilizzando questo ultimo fatto mostriamo a cosa corrispondono le equazioni di Hamilton. Le equazioni

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1$$

corrispondono alle definizioni delle coordinate che abbiamo dato

$$\dot{Q}_i = Q_{i+1} \rightarrow \dot{x}^{(i-1)} = x^{(i)}$$

Mentre l'equazione per n-esima coordinata $\dot{Q}_n = \dot{Q}_n = a(Q_1, \dots, Q_n, P_n)$ è proprio l'inversa della definizione del momento P_n . Le equazioni per i momenti

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = -P_{i-1} + \frac{\partial L}{\partial Q_i} \quad \text{per } i = 2, \dots, n$$

Sono le definizioni dei momenti (1.5) date da Ostrogradski che infatti possiamo riscrivere come

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{\partial L}{\partial x^{(n)}} \\ P_{n-1} &= \frac{\partial L}{\partial x^{(n-1)}} - \frac{d}{dt} P_n \end{aligned}$$

e così via

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}} - \frac{d}{dt} P_{j+1} \quad \text{per } j = 1, \dots, n-1$$

L'equazione per P_1 è invece proprio l'equazione di E-L infatti

$$\dot{P}_1 = \frac{\partial L}{\partial Q_1}$$

usando la definizione di P_1 e Q_1 otteniamo

$$\sum_{k=1}^n \left(-\frac{d}{dt} \right)^k \frac{\partial L}{\partial x^{(k-1)}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

□

Ora però descriveremo una procedura più generale, che ci sarà utile per ricavare una formulazione hamiltoniana del problema anche quando il sistema diventa degenere, che ci consentirà di ottenere la stessa Hamiltoniana e le sue stesse caratteristiche ed inoltre incorporerà i vincoli e le definizioni dei momenti che noi abbiamo prima imposto come dati. La procedura in esame è quella di Dirac per i sistemi vincolati, descritta da [4] (per teorie con derivate superiori al primo) e in [9],[10] che è ripresa brevemente nell'Appendice A.

Supponiamo di avere una lagrangiana generica $L(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)})$ e definiamo delle nuove variabili $Q_i = x^{(i-1)}$ $i = 1, \dots, n$ e imponiamo i vincoli

$$\dot{Q}_i - Q_{i+1} = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.9)$$

in modo da mantenere il significato fisico delle vecchie coordinate. La lagrangiana iniziale L , che dipendeva da ordini superiori al primo nelle derivate della posizione, viene sostituita da una L_T del primo ordine, con i moltiplicatori di lagrange come variabili aggiuntive, in uno spazio di coordinate più ampio (lo spazio delle configurazioni ora diventa $T^{(n-1)}Q \times \mathbb{R}^{m(n-1)}$). La nuova lagrangiana è

$$L_T(Q_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = L(Q_1, \dots, Q_n, \dot{Q}_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (\dot{Q}_i - Q_{i+1}) \quad (1.10)$$

Le equazioni del moto per questa lagrangiana sono ovviamente, per le variabili $Q_i, i = 1, \dots, n$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_T}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial L_T}{\partial Q_i} = 0 \quad (1.11)$$

mentre per le variabili $\lambda_i, i = 1, \dots, n-1$:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (1.12)$$

Si noti che gli estremali di entrambe le azioni $S = \int L dt$ e $S_T = \int L_T dt$ danno origine ad equazione di E-L equivalenti: con la semplice risoluzione del sistema di equazioni di E-L (1.11) per la lagrangiana L_T si ottengono le equazioni di E-L di L , mentre le equazioni E-L (1.12) per le λ_i otteniamo esattamente i vincoli (1.9). Ora la nostra Lagrangiana è diventata singolare possiamo quindi procedere anzitutto al sistema con il metodo standard di Dirac.

Definiamo i momenti in modo standard

$$P_i = \frac{\partial L_T}{\partial \dot{Q}_i} = \lambda_i \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.13)$$

$$P_n = \frac{\partial L_T}{\partial \dot{Q}_n} = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_n} \quad (1.14)$$

$$\pi_i = \frac{\partial L_T}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.15)$$

Perciò identifichiamo l'insieme di vincoli primari:

$$P_i - \lambda_i = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.16)$$

$$\pi_i = 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, n-1 \quad (1.17)$$

Si noti che le parentesi di Poisson di $\{\pi_i, P_j - \lambda_j\} = \delta_{ij}$ e quindi i vincoli sono tutti di seconda classe e possono essere eliminati dal formalismo. Costruendo ora la Hamiltoniana canonica o vincolata (si veda ad esempio [9]) otteniamo:

$$H_c = \sum_{i=1}^{n-1} P_i Q_{i+1} + P_n \dot{Q}_n(Q_1, \dots, Q_n, P_n) - L \quad (1.18)$$

Ora mostriamo l'equivalenza tra le equazioni del moto derivate dalla formulazione lagrangiana e da quella hamiltoniana. Le equazioni E-L (1.11) corrispondenti alla Lagrangiana L_T per le variabili $Q_i, i = 2, \dots, n$ utilizzando la definizione dei momenti e (1.16) sono equivalenti alle equazioni di Hamilton per i momenti P_i per $i = 2, \dots, n$

$$P_{i-1} = \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} P_i \quad (1.19)$$

che sono esattamente le definizioni dei momenti di Ostrogradski in forma iterativa. Se prendiamo in considerazione le equazioni E-L (1.12) per le λ_i e le equazioni di Hamilton per Q_i per $i = 1, \dots, n-1$ otteniamo esattamente i vincoli (1.9). L'equazione di Hamilton per Q_n ci dà l'inversa di (1.14). Infine l'ultima equazione di Hamilton del momento P_1

$$\frac{d}{dt} P_1 - \frac{\partial L}{\partial Q_1} = 0$$

è esattamente l'equazione di E-L per la coordinata Q_1 utilizzando la relazione (1.16). Quando sostituiamo P_1 con la sua definizione data da (1.19) otteniamo le E-L della lagrangiana originale L .

L'Hamiltoniana che ci determina l'evoluzione temporale delle coordinate e dei momenti è quella di Dirac cioè H_c con l'aggiunta dei vincoli primari tramite dei moltiplicatori (che sono funzioni anch'essi delle coordinate e dei momenti), cioè

$$H_D = H_c + \sum_{i=1}^{n-1} \eta^i (P_i - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma^i \pi_i \quad (1.20)$$

Per determinare i moltiplicatori di Lagrange η_i, λ_i imponiamo delle condizioni di consistenza: i vincoli devono essere conservati lungo le equazioni del moto. Imponendo queste condizioni otteniamo $\eta_i = 0$ per ogni i . I moltiplicatori γ_i invece risultano uguali a $\gamma_i = \{P_i, H_c\}$. Le equazioni del moto risultano quindi essere, per le coordinate P e Q :

$$\dot{Q}_i \approx \{Q_i, H_D\} \quad \dot{P}_i \approx \{P_i, H_D\} \quad (1.21)$$

(il simbolo \approx sta a significare che prima vengono compute le parentesi di Poisson e poi vengono valutati i vincoli) Da notare che quanto fatto è esattamente equivalente ad introdurre le parentesi di Dirac e definire le equazioni del moto tramite esse, cioè

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, H_c\}_D \quad \dot{P}_i = \{P_i, H_c\}_D$$

1.2 Instabilità di Ostrogradski

Dopo aver finalmente definito un metodo per passare dall'ambito lagrangiano a quello hamiltoniano, discutiamo ora il fatto principale che emerge da questa nostra trattazione:

Teorema Tutti i sistemi definiti da una Lagrangiana dipendente da derivate di ordine superiore al primo sono instabili secondo Ostrogradski. In sostanza questa instabilità ha come caratteristiche che la funzione di Hamilton non è limitata inferiormente (o superiormente) e che i gradi di libertà sono di più che in una teoria di ordine più basso. Questo fa sì che le sue curve di livello raggiungano l'infinito in tutte le variabili dimaniche. Tutto ciò permette alle variabili del sistema di evolvere verso valori arbitrariamente grandi (positivi o negativi) anche ad energia costante. Questo fatto è causato dalla linearità dell'Hamiltoniana in ≥ 1 momenti P_i .

Si noti subito la generalità di questo risultato che come unica ipotesi ha che le lagrangiane siano dipendenti da derivate di ordine superiore al primo (oltre ovviamente che sia possibile definire la trasformata di Legendre). Ciò porta all'insorgenza di soluzioni dell'equazione di Hamilton problematiche, le cosiddette *soluzioni runaway*, a delle soluzioni con energia arbitrariamente negativa (dette ghost) e ad altri tipi di anomalie, non ultima la perdita di stabilità dei punti di equilibrio anche con piccole perturbazioni. Illustriamo questi punti con un esempio.

1.2.1 Esempio: la particella libera

Prendiamo come Lagrangiana di partenza quella della particella libera in una dimensione ed aggiungiamo un termine quadratico nelle derivate seconde del tempo della posizione. Cioè

$$\mathcal{L}(\dot{x}, \ddot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\ddot{x}^2}{2} \quad (1.22)$$

Chiaramente la lagrangiana è non degenere e le equazioni di E-L sono del quarto ordine: saranno necessarie 4 condizioni iniziali per specificare completamente il moto. Essendo non degenere è quindi possibile definire il

passaggio dalla lagrangiana alla hamiltoniana tramite la definizione canonica di Ostrogradski dei momenti senza ricorrere al metodo più generale. Le nuove coordinate risultano essere:

$$Q_1 = x \quad Q_2 = \dot{x} \quad (1.23)$$

$$P_1 = \dot{x} - x^{(3)} \quad P_2 = \ddot{x} \quad (1.24)$$

E l'hamiltoniana

$$\mathcal{H}(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = \frac{P_2^2}{2} + P_1 Q_2 - \frac{Q_2^2}{2} \quad (1.25)$$

Scriviamo ora le equazioni di Hamilton e le rispettive soluzioni:

$$\dot{Q}_1 = Q_2 \quad \dot{P}_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$\dot{Q}_2 = P_2 \quad \dot{P}_2 = -P_1 + P_2 \quad (1.27)$$

con soluzioni date le condizioni iniziali $(Q_1^0, Q_2^0, P_1^0, P_2^0)$:

$$P_1(t) = P_1^0 \quad (1.28)$$

$$P_2(t) = ae^{-t} + be^t \quad (1.29)$$

$$Q_2(t) = -ae^{-t} + be^t + a - b + Q_2^0 \quad (1.30)$$

$$Q_1(t) = ae^{-t} + be^t + ct - a - b + Q_1^0 \quad (1.31)$$

$$(1.32)$$

dove $a = \frac{P_1^0 - Q_2^0 + P_2^0}{2}$, $b = \frac{Q_2^0 - P_1^0 + P_2^0}{2}$ e $c = a - b + Q_2^0$. Ora notiamo che se $b \neq 0$ il momento P_2 tende all'infinito, anche molto rapidamente; recuperando il significato cinematico di P_2 , cioè è un'accelerazione, vediamo come l'aggiunta del termine di secondo ordine ci abbia modellizzato un sistema in cui l'accelerazione diverge all'infinito (se considerassimo il punto di vista newtoniano dovremmo dire che il sistema è soggetto ad una forza esterna che non si annulla all'infinito, ma che anzi diverge). Questa situazione è poco fisica e viene detta *runaway*. Quindi in questo caso per descrivere qualcosa di fisicamente sensato dobbiamo imporre un'ulteriore condizione di consistenza, cioè $b = 0$. Vediamo inoltre che la lagrangiana (1.22) è invariante per inversione temporale, così se operassimo una tale trasformazione dovremmo imporre che anche $a = 0$ per quanto detto sopra. Notiamo anche che l'integrale primo che solitamente chiamiamo energia ora viene a dipendere non solo dalle derivate prime, ma anche da quelle di ordine superiore. Infatti l' "energia" del sistema è

$$\mathcal{E} = \frac{\ddot{x}^2 + \dot{x}^2}{2} - x^{(3)}\dot{x}$$

Questo fatto è dovuto all'ordine delle equazioni del moto, che sono del quarto, che permettono all'integrale primo di dipendere da tutti gli ordini inferiori al quarto.

1.2.2 Esempio: l'oscillatore armonico

Cerchiamo ora di dare un'idea anche di altre caratteristiche di questa instabilità. Gli equilibri stabili di alcuni sistemi perdono irrimediabilmente la loro stabilità con l'aggiunta di termini di ordine superiore pur se perturbativi. Prendiamo ad esempio il caso dell'oscillatore armonico a cui aggiungiamo un termine, magari piccolo, di ordine superiore al primo nelle derivate (per un altro esempio si veda [5]).

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \epsilon \frac{\ddot{x}^2}{2} \quad (1.33)$$

Con la solita definizione dei momenti otteniamo l'Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = P_1 Q_2 - \frac{P_2^2}{2\epsilon} - \frac{Q_2^2}{2} + \frac{Q_1^2}{2} \quad (1.34)$$

Chiamiamo $\alpha = \frac{1}{\epsilon}$ e calcoliamo i punti di equilibrio. Il campo vettoriale associato a questo sistema è:

$$X_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} Q_2 \\ -\alpha P_2 \\ -Q_1 \\ -P_1 + Q_2 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

Come si può vedere presenta un unico equilibrio nel punto $(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = (0, 0, 0, 0)$. Linearizziamo quindi il campo vettoriale hamiltoniano per studiarne la stabilità, in questo caso non serve neanche farlo perchè lo è già. Lo Jacobiano del campo risulta essere:

$$\text{Jac}X_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Il sistema lo possiamo quindi scrivere come $\dot{\vec{x}} = \text{Jac}X_{\mathcal{H}}\vec{x}$ dove $\vec{x} = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$. Gli autovalori dello jacobiano risultano essere $\lambda = \pm \sqrt{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\epsilon}}{2}}$ che hanno parte reale diversa da zero se $\alpha \neq 0$. Avendo almeno un autovalore con $\Re(\lambda) \neq 0$ per le proprietà delle matrici hamiltoniane (vedi [7]), l'equilibrio è instabile. Se $\alpha = 0$ abbiamo un'espressione con poco senso perchè significherebbe mandare l' ϵ all'infinito.

Ultime osservazioni, forse le più importanti (vedi [2],[3]). Una riguarda il fatto che, mantenendo l'energia costante, è possibile, con un certa dipendenza temporale delle variabili, mandare alcune coordinate dello spazio delle fasi a valori arbitrariamente positivi e altre coordinate a valori arbitrariamente negativi. Infatti siccome la varietà ad energia costante è illimitata possiamo scrivere una certa soluzione con le caratteristiche sopra esposte. Mostriamolo esplicitamente. Le equazioni di E-L associate al sistema considerato sono:

$$\epsilon x^{(4)} + \ddot{x} + x = 0 \quad (1.37)$$

che hanno come soluzione generale:

$$x(t) = C_+ \cos(k_+ t) + S_+ \sin(k_+ t) + C_- \cos(k_- t) + S_- \sin(k_- t) \quad (1.38)$$

Qui le frequenze sono,

$$k_{\pm} \equiv \sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - 4\epsilon}}{2\epsilon}} \quad (1.39)$$

e le costanti C_+, C_-, S_+, S_- che dipendono dai dati iniziali come:

$$C_+ = \frac{k_-^2 x_0 + \dot{x}_0}{k_-^2 - k_+^2} \quad S_+ = \frac{k_-^2 \dot{x}_0 + x_0^{(3)}}{k_+(k_-^2 - k_+^2)} \quad (1.40)$$

$$C_- = \frac{k_+^2 x_0 + \dot{x}_0}{k_+^2 - k_-^2} \quad S_- = \frac{k_+^2 \dot{x}_0 + x_0^{(3)}}{k_-(k_+^2 - k_-^2)} \quad (1.41)$$

Dopo aver dato queste definizioni, ricordando la definizione dei momenti:

$$p_1 = \dot{x} + \epsilon x^{(3)} \quad \Rightarrow \quad x^{(3)} = \frac{p_1 - q_2}{\epsilon} \quad (1.42)$$

$$p_2 = -\epsilon \ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{p_2}{\epsilon} \quad (1.43)$$

riusciamo a riscrivere l'hamiltoniana \mathcal{H} lungo le soluzioni delle equazioni del moto come:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_+^2 (C_+^2 + S_+^2) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4\epsilon} k_-^2 (C_-^2 + S_-^2) \quad (1.44)$$

Appare subito chiaro che i modi con il segno + trasportano energia positiva, mentre l'energia negative è trasportata dai modi con il segno -. In altre parole appare chiaro che se facciamo in modo di mandare i modi con il segno + ad energie arbitrariamente positive, i modi con il segno - andranno ad avere energie arbitrariamente negative. Questo a livello classico introdurrebbe la possibilità di avere dei modi (parti del sistema) ad energia negativa che in letteratura vengono indicati come ghost. Quindi la caratteristica dell'instabilità di Ostrogradski che stiamo esaminando ci consente di far esplodere verso l'infinito positivo alcuni modi del sistema e all'infinito negativo degli altri: per assurdo con due particelle o potrebbe essere possibile far raggiungere velocità elevatissime ad una e nel contempo far diventare l'altra velocità una quantità immaginaria, oppure entrambe le particelle sarebbero sovrapposizioni di modi ad energia (non frequenza) sia positiva che negativa. La cosa più drammatica si trasporterebbe nell'ambito quantistico: grazie al fenomeno di produzione di coppie ci sarebbe un proliferare nel tempo di particelle anche partendo dal vuoto.

Nell'articolo di Simon [5], che è simile al nostro esempio, il termine con la derivata seconda delle x è stato inserito come termine perturbativo (il suo coefficiente ϵ è piccolo a piacere) e quando si passa all'ambito hamiltoniano sembra che esso diventi via via sempre più dominante mano a mano che ϵ diventa piccolo: in sostanza la piccola perturbazione non si può eliminare mandando semplicemente ϵ a zero! Dovremmo quindi

concludere che, per quanto sia piccolo ϵ l'aggiunta di un termine con derivate superiori al primo è tutto fuorché un termine perturbativo. In realtà quello che succede è che se mandiamo $\epsilon \rightarrow 0$ nell'ambito hamiltoniano non stiamo facendo la stessa cosa che mandando $\epsilon \rightarrow 0$ nell'ambito lagrangiano. Infatti se mandiamo $\epsilon \rightarrow 0$ nella lagrangiana otteniamo un oscillatore armonico $\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2}$. Ora se vediamo la funzione $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})$ come funzione di x, \dot{x}, \ddot{x} passando all'ambito Hamiltoniano dobbiamo utilizzare l'algoritmo di Dirac per i sistemi degeneri (che descriveremo nel prossimo capitolo). Quello che ne risulta è che per far vivere il nostro oscillatore armonico nello stesso spazio delle fasi del sistema con $\epsilon \neq 0$ dobbiamo aggiungere dei vincoli restringendo la varietà su cui vive il sistema. Questo è dovuto al fatto che, se ricordiamo il legame con il mondo lagrangiano, la definizione stessa di $p_2 = -\epsilon \ddot{x}$ contiene la epsilon e facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$ anche $p_2 \rightarrow 0$ come epsilon e $p_2^2 \sim \epsilon^2$. Quindi facendo tendere $\epsilon \rightarrow 0$ il termine $\frac{p_2^2}{2\epsilon}$ deve sparire. Questo lo otteniamo aggiungendo i vincoli che vengono calcolati con l'algoritmo di Dirac (i vincoli sono $p_2 = 0$ e $p_1 - q_2 = 0$). Possiamo quindi riassumere che una volta passati all'ambito hamiltoniano il nostro sistema diventa un problema perturbativo, come lo era prima nell'ambito lagrangiano, solo in una sottovarietà dello spazio delle fasi! Nel resto dello spazio delle fasi, anche in un intorno vicino alla varietà su cui è un problema perturbativo, anzi presenta forti caratteri di instabilità: se faccio tendere $\epsilon \rightarrow 0$ l'Hamiltoniana diventa molto grande, il moto si riduce a quello di una particella libera (la particella 2).

1.2.3 Esempio: una teoria di campo

Mostriamo ora il manifestarsi dell'instabilità di Ostrogradski e l'utilizzo dell'algoritmo di Dirac per una teoria di campo: questo ci consentirà di mettere in evidenza alcune accortezze e accorgimenti che bisogna utilizzare per sviluppare un tale tipo di teoria. Consideriamo una Lagrangiana \mathcal{L} di questo tipo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t), \square \phi(x, t)) &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{(\square \phi)^2}{2} \\ &= \frac{\phi_t^2}{2} - \frac{\phi_x^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\phi_{tt}^2}{2} + \frac{\phi_{xx}^2}{2} - \phi_{tt} \phi_{xx} \end{aligned} \quad (1.45)$$

La nostra variabile dinamica è il campo $\phi(x, t)$ dove $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Il pedice del campo sta a significare che è derivato rispetto a t o a x . Quindi calcoliamo la variazione dell'azione:

$$\mathcal{S}[\phi(x, t)] = \iint_D \mathcal{L}(\phi(x, t), \partial_\mu \phi(x, t), \square \phi(x, t)) dx dt \quad (1.46)$$

per determinare le equazioni del moto. Dove il dominio di integrazione è $D = \mathbb{R} \times [0, t]$.

$$\delta \mathcal{S} = \iint_D \phi_t \delta \phi_t - \delta \phi_x \phi_x - m^2 \phi \delta \phi + \delta \phi_{tt} \phi_{tt} + \delta \phi_{xx} \phi_{xx} - \delta \phi_{xx} \phi_{tt} - \delta \phi_{tt} \phi_{xx} dx dt$$

Dopo alcune integrazioni per parti e assumendo che il campo e la sua derivata si annullino all'infinito spaziale e che la variazione del campo e della sua derivata siano nulle agli estremi temporali di integrazione otteniamo le equazioni del moto:

$$\phi^{(4t)}(x, t) + \phi^{(4x)}(x, t) - 2\phi_{xxtt}(x, t) - \phi_{tt}(x, t) + \phi_{xx}(x, t) - m^2 \phi(x, t) = 0 \quad (1.47)$$

Ora passiamo al formalismo hamiltoniano. Chiamiamo $\phi_t(x, t) = \psi(x, t)$, la lagrangiana con i moltiplicatori di Lagrange è:

$$\mathcal{L}_T = \frac{\psi^2}{2} - \frac{\phi_x^2}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\psi_t^2}{2} + \frac{\phi_{xx}^2}{2} - \psi_t \phi_{xx} + \lambda(x, t)(\phi_t - \psi) \quad (1.48)$$

Definiamo i momenti rispetto alla variabile tempo, questa scelta ci consente di studiare l'evoluzione del sistema nel tempo (un'altra scelta non avrebbe molto senso fisico) (Una caratteristica del formalismo lagrangiano è quella di essere simmetrico nell'utilizzo delle variabili e covariante a vista, passando in ambito hamiltoniano questa simmetria si rompe).

$$p_\phi(x, t) = \lambda(x, t) \quad p_\psi(x, t) = \psi_t(x, t) - \phi_{xx}(x, t) \quad p_\lambda(x, t) = 0 \quad (1.49)$$

Solo una delle definizioni è invertibile per ottenere un campo primario quindi abbiamo due vincoli primari:

$$\phi_\phi = p_\phi - \lambda \approx 0 \quad (1.50)$$

$$\phi_\lambda = p_\lambda \approx 0 \quad (1.51)$$

Otteniamo l'hamiltoniana canonica:

$$\mathcal{H}_c(\phi, \psi, \lambda, p_\phi, p_\psi, p_\lambda) = p_\phi \psi + \frac{p_\psi^2}{2} - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\phi_x^2}{2} + \frac{m^2 \phi^2}{2} + p_\psi \phi_{xx} \quad (1.52)$$

Quindi l'Hamiltoniana di Dirac per il sistema diventa:

$$H_D = H_c + \int v_\phi(x, t)\phi_\phi(x, t) + v_\lambda(x, t)\phi_\lambda(x, t) dx \quad (1.53)$$

dove con $H_c = \int \mathcal{H}_c dx$ e dove gli $v_\phi(x, t)$ e $v_\lambda(x, t)$ sono funzioni dei campi. Ora dovremmo fissare le condizioni di consistenza per i vincoli, ma nel fare questa operazione dobbiamo prestare molta attenzione, vedi [9].

Le equazioni che dobbiamo risolvere sono del tipo:

$$0 \approx \{\phi_\phi(x, t), H_c(y, s)\}_{t=s} + \int \sum_{q=\phi, \psi, \lambda} v_q(y, s)\{\phi_\phi(x, t), \phi_q(y, s)\}_{t=s} dy \quad (1.54)$$

$$0 \approx \{\phi_\lambda(x, t), H_c(y, s)\}_{t=s} + \int \sum_{q=\phi, \psi, \lambda} v_q(y, s)\{\phi_\lambda(x, t), \phi_q(y, s)\}_{t=s} dy \quad (1.55)$$

Tutte le parentesi di Poisson sono quelle definite per una teoria di campo: dati due funzionali $A[Q, P]$ e $B[Q, P]$ le relative parentesi di Poisson sono:

$$\{A, B\}_{x^0=y^0} = \int \sum_{i=1}^n \left(\frac{\delta A}{\delta Q_i(z)} \frac{\delta B}{\delta P_i(z)} - \frac{\delta A}{\delta P_i(z)} \frac{\delta B}{\delta Q_i(z)} \right) dz \quad (1.56)$$

Si noti che le parentesi di Poisson sono ben definite solo se sono calcolate per tempi uguali $x^0 = y^0$. Le parentesi di Poisson $\{\phi_r, \phi_s\}$ con $r, s = \phi, \lambda$ definiscono la matrice (qui $\vec{x} = (x, t)$):

$$P_{rs}(\vec{x}, \vec{y}) = \{\phi_r, \phi_s\}_{t=s} \quad (1.57)$$

Se il determinante di P_{rs} non si annulla allora la matrice ammette un inverso, che però non è unico! Infatti in generale le entrate della matrice P_{rs} sono combinazioni lineari di funzioni delta e sue derivate. Se non compare nessuna derivata delle delta allora le relazioni (1.54) e (1.55) sono algebriche e quindi non abbiamo bisogno di ulteriori condizioni per ottenere univocamente le $v_r(x, t)$. Se invece compaiono derivate della delta le relazioni che troviamo per le funzioni $v_r(x, t)$ sono equazioni differenziali e per essere univocamente determinate bisogna fissare anche le condizioni al contorno per i moltiplicatori $v_r(x, t)$.

Nel nostro caso, però, la matrice P_{rs} è:

$$P_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Essa ha $\det P_{rs} \neq 0$ e non contiene derivate della funzione delta e questo ci permette di trovare i moltiplicatori:

$$v_\phi(x, t) = 0 \quad v_\lambda(x, t) = -\phi_{xx}(x, t) - m^2\phi(x, t) - (p_\psi)_{xx}(x, t) \quad (1.59)$$

Come possiamo osservare l'hamiltoniana canonica è lineare nel momento p_ϕ , quindi il sistema è instabile: i vincoli sono tutti di seconda classe e la varietà che definiscono, su cui vive l'hamiltoniana canonica, non limita i valori che possono essere assunti dai momenti lineari nell'hamiltoniana consentendo l'insorgere dell'instabilità di Ostrogradski.

Capitolo 2

Sistemi completamente degeneri

Si potrebbe sperare che tutti i problemi che insorgono in una teoria dipendente da derivate di ordine superiore al primo, si possano evitare formulando una teoria vincolata, cioè dove la Lagrangiana sia degenera. Il nostro scopo in questo capitolo è mostrare che se la teoria è completamente degenera (in un senso che verrà specificato poi) appare l'instabilità di Ostrogradski con tutte le sue anomalie. In particolare analizzeremo il caso in cui le equazioni del moto (EOMs) siano tutte del quinto ordine. Per la trattazione di quelle del terzo ordine vedere [6]. La procedura qui impiegata si trova in quell'articolo.

2.1 Lagrangiane per EOMs del quinto ordine

Supponiamo di avere una lagrangiana degenera con derivate di ordine n .

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

Supponendo che le nostre EOMs siano tutte del quinto ordine la Lagrangiana è la seguente:

$$L(x, \dots, x^{(3)}) = \sum_{j=1}^m x_j^{(3)} f_j(x, \dot{x}, \ddot{x}) + g(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (2.2)$$

Le cui equazioni del moto sono:

$$\sum_{j=1}^m A_{ij} x_j^{(5)} + (\text{derivate più basse}) = 0 \quad (2.3)$$

dove abbiamo definito

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Siccome A_{ij} è una matrice antisimmetrica per fare in modo che tutte le EOMs siano del quinto ordine dobbiamo assumere che la dimensione di \mathbb{R}^m sia pari, altrimenti il determinante di A_{ij} sarebbe nullo. Supponiamo inoltre che $\det A_{ij} \neq 0$ così nessuna EOMs non sarà del quinto ordine. Se ci fossero EOMs di ordine inferiore al quinto l'insorgenza dell'instabilità per queste equazioni è già stata discussa in [6]. Inoltre un caso analogo verrà trattato nel prossimo capitolo.

In conclusione la Lagrangiana più generale che genera equazioni del moto del quinto ordine è (2.2) con $x \in \mathbb{R}^{2m}$ (qui c'è stato un cambio di notazione del numero di variabili per ricordare che è pari) e $\det A_{ij} \neq 0$. Sottolineiamo il fatto che per definire il problema di Cauchy è necessario in questo caso fornire $10m$ condizioni iniziali per $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i, x_i^{(3)}, x_i^{(4)}$ per $i = 1, \dots, 2m$ al tempo iniziale t_0 .

2.2 Analisi con il formalismo hamiltoniano

Utilizziamo per passare dal formalismo lagrangiano a quello hamiltoniano il procedimento descritto nel primo capitolo che comprendeva la riduzione della lagrangiana di ordine superiore al primo ad una del primo con vincoli, tramite l'introduzione dei moltiplicatori di Lagrange. Quindi trasformiamo la lagrangiana (2.2) in

$$L_T(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \lambda, \mu) = \sum_{j=1}^{2m} \left(\dot{z}_j f_j(x, y, z) + \lambda_j (\dot{x}_j - y_j) + \mu_j (\dot{y}_j - z_j) \right) + g(x, y, z) \quad (2.4)$$

Quindi definiamo i momenti in modo canonico:

$$p_{x_i} = \lambda_i \quad p_{y_i} = \mu_i \quad (2.5)$$

$$p_{z_i} = f_i(x, y, z) \quad p_{\lambda_i} = p_{\mu_i} = 0 \quad (2.6)$$

Ora siccome non possiamo invertire nessuna delle precedenti equazioni per ottenere $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\lambda}, \dot{\mu}$ in funzione delle coordinate e dei momenti abbiamo $10m$ vincoli primari, cioè:

$$\phi_{x_i} = p_{x_i} - \lambda_i \approx 0 \quad (2.7)$$

$$\phi_{y_i} = p_{y_i} - \mu_i \approx 0 \quad (2.8)$$

$$\phi_{z_i} = p_{z_i} - f_i(x, y, z) \approx 0 \quad (2.9)$$

$$\phi_{\lambda_i} = p_{\lambda_i} \approx 0 \quad (2.10)$$

$$\phi_{\mu_i} = p_{\mu_i} \approx 0 \quad (2.11)$$

Seguendo la procedura di Dirac-Bergmann (vedi Appendice A) costruiamo l'Hamiltoniana canonica H_c (da questo punto in poi useremo come notazione per tutti i momenti semplicemente la lettera p e per tutte le coordinate x, y, z, λ, μ la q)

$$\begin{aligned} H_c(p, q) &= \sum_{j=1}^{2m} \sum_{q=x, y, z, \lambda, \mu} p_{q_j} \dot{q}_j - L_T \\ &= \sum_{j=1}^{2m} (p_{x_j} y_j + p_{y_j} z_j) - g(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Possiamo ora costruire l'hamiltoniana totale o di Dirac H_D aggiungendo ad H_c i vincoli primari con i rispettivi moltiplicatori (a loro volta funzioni di (p, q)):

$$H_D(p, q) = H_c + \sum_{j=1}^{2m} \sum_{q=x, y, z, \lambda, \mu} v_{q_j} \phi_{q_j} \quad (2.13)$$

Come sappiamo le equazioni del moto date da questo sistema sono:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_{q_i}} + \sum_{j=1}^{2m} \sum_{q=x, y, z, \lambda, \mu} v_{q_j} \frac{\partial \phi_{q_j}}{\partial p_{q_i}} \quad (2.14)$$

$$\dot{p}_{q_i} = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{2m} \sum_{q=x, y, z, \lambda, \mu} v_{q_j} \frac{\partial \phi_{q_j}}{\partial q_i} \quad (2.15)$$

o in forma più compatta:

$$\dot{q}_i \approx \{q_i, H_D\} \quad (2.16)$$

$$\dot{p}_{q_i} \approx \{p_{q_i}, H_D\} \quad (2.17)$$

Anzi in generale qualunque funzione nello spazio delle fasi $\xi(p, q)$ evolve nel tempo:

$$\dot{\xi} \approx \{\xi, H_D\} \quad (2.18)$$

Perchè il tutto sia ben definito dobbiamo imporre delle condizioni di consistenza ai vincoli primari, cioè essi si devono conservare nel tempo e questo ci permetterà di determinare i moltiplicatori v_{q_j} :

$$\frac{d\phi_{q_i}}{dt} \approx \{\phi_{q_i}, H_D\} \approx 0$$

Calcoliamo quindi la matrice Δ di tutte le parentesi di Poisson dei vincoli tra loro $\{\phi_{q_i}, \phi_{\bar{q}_j}\}$. Le parentesi non nulle sono:

$$\{\phi_{x_i}, \phi_{z_j}\} = \frac{\partial f_j(x, y, z)}{\partial x_i}, \quad (2.19)$$

$$\{\phi_{x_i}, \phi_{\lambda_j}\} = -\delta_{ij} \quad (2.20)$$

$$\{\phi_{y_i}, \phi_{z_j}\} = \frac{\partial f_j(x, y, z)}{\partial y_i}, \quad (2.21)$$

$$\{\phi_{y_i}, \phi_{\mu_j}\} = -\delta_{ij} \quad (2.22)$$

$$\{\phi_{z_i}, \phi_{z_j}\} = \frac{\partial f_j(x, y, z)}{\partial z_i} - \frac{\partial f_i(x, y, z)}{\partial z_j} = A_{ji} \quad (2.23)$$

Calcoliamo ora il vettore h composto da tutte le parentesi di poisson tra i vincoli e l'hamintoniana canonica $\{\phi_{q_i}, H_c\}$

$$h = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x_i} \\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y_i} - p_{x_i} \\ \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z_i} - p_{y_i} - \sum_{j=1}^{2m} \left(y_j \frac{\partial f_i(x,y,z)}{\partial x_j} + z_j \frac{\partial f_i(x,y,z)}{\partial y_j} \right) \\ -y_i \\ -z_i \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Quindi ci ritroviamo con il sistema nelle incognite v_{q_i} seguente:

$$\Delta(v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}, v_{\lambda_i}, v_{\mu_i})^T + h \approx 0 \quad (2.25)$$

Questo sistema ammette soluzione unica perchè il $\det \Delta = \det A_{ji} \neq 0$. Si vede subito infatti scrivendo per esteso la matrice Δ e facendo il determinante a blocchi (poniamo $B = (2.19)$ e $C = (2.21)$)

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & B & -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & C & \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\ -B & -C & A_{ji} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Le conclusioni che possiamo trarre dal processo di consistenza dei vincoli primari sono che non si aggiungono vincoli secondari perchè tutti i moltiplicatori v_{q_i} sono determinati univocamente; l'algoritmo di Dirac-Begerman si ferma a questo punto. Come possiamo notare tutti i vincoli del sistema sono di seconda classe e quindi rimuovono $10m$ condizioni iniziali delle $20m$ condizioni iniziali di partenza; di conseguenza le condizioni iniziali rimaste sono $10m$ come ci aspettiamo per equazioni del quinto ordine. Inoltre sulla superficie individuata dai vincoli primari $H_D \approx H_c$ e quindi come si può vedere da (2.12) l'Hamiltoniana può variare tra $-\infty$ e $+\infty$. Non c'è nessuna restrizione dovuta a qualche gauge o vincolo per cui possiamo concludere che l'instabilità di Ostrogradski si presenta anche nei sistemi completamente degeneri.

2.3 Esempi

Vediamo ora alcuni esempi di sistemi degeneri.

2.3.1 Oscillatore armonico bidimensionale modificato

Consideriamo la Lagrangiana (che è un oscillatore armonico bidimensionale con l'aggiunta di termini del secondo ordine):

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2) = \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \ddot{x}_2 x_1 + \ddot{x}_1 x_2 \quad (2.27)$$

Le equazioni di E-L che porge sono:

$$x_2^{(3)} + \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 - x_1 = 0 \quad (2.28)$$

$$-x_1^{(3)} + \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 - x_2 = 0 \quad (2.29)$$

Ora mostriamo il passaggio all'ambito hamiltoniano. Eseguendo il solito cambio di variabili, consideriamo la lagrangiana:

$$L_T = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \dot{y}_2 x_1 + \dot{y}_1 y_2 + \lambda_1 (\dot{x}_1 - y_1) + \lambda_2 (\dot{x}_2 - y_2)$$

che ci dà i seguenti momenti:

$$p_{x_1} = \lambda_1 \quad p_{x_2} = \lambda_2 \quad (2.30)$$

$$p_{y_1} = y_2 \quad p_{y_2} = x_1 \quad (2.31)$$

$$p_{\lambda_1} = 0 \quad p_{\lambda_2} = 0 \quad (2.32)$$

nessuno di essi può essere invertito per ricavare le variabili puntate, quindi ci danno tutti dei vincoli primari

$$\phi_{x_1} = p_{x_1} - \lambda_1 \approx 0 \quad \phi_{x_2} = p_{x_2} - \lambda_2 \approx 0 \quad (2.33)$$

$$\phi_{y_1} = p_{y_1} - y_2 \approx 0 \quad \phi_{y_2} = p_{y_2} - x_1 \approx 0 \quad (2.34)$$

$$\phi_{\lambda_1} = p_{\lambda_1} \approx 0 \quad \phi_{\lambda_2} = p_{\lambda_2} \approx 0 \quad (2.35)$$

L'hamiltoniana canonica sarà quindi:

$$H_C = p_{x_1}y_1 + p_{x_2}y_2 - \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \quad (2.36)$$

e l'hamiltoniana di Dirac o totale è:

$$H_D = H_C + v_{x_1}\phi_{x_1} + v_{x_2}\phi_{x_2} + v_{y_1}\phi_{y_1} + v_{y_2}\phi_{y_2} + v_{\lambda_1}\phi_{\lambda_1} + v_{\lambda_2}\phi_{\lambda_2} \quad (2.37)$$

la matrice Δ delle parentesi di Poisson dei vincoli tra di loro ha $\det \Delta = 1$ e come uniche entrate non nulle :

$$\{\phi_{x_1}, \phi_{y_2}\} = 1 \quad \{\phi_{x_1}, \phi_{\lambda_1}\} = -1 \quad (2.38)$$

$$\{\phi_{y_1}, \phi_{y_2}\} = -1 \quad \{\phi_{x_2}, \phi_{\lambda_2}\} = -1 \quad (2.39)$$

inoltre il vettore delle parentesi di Poisson dei vincoli con l'hamiltoniana vincolata è $\neq 0$ quindi si possono determinare univocamente tutti i moltiplicatori $v_{x_1}, \dots, v_{\lambda_2}$ (si noti che dalle relazioni (2.38) (2.39) segue che tutti i vincoli sono di seconda classe):

$$v_{x_1} = v_{x_2} = 0 \quad (2.40)$$

$$v_{y_1} = p_{x_2} - y_2 + y_1 \quad v_{y_2} = -p_{x_1} + y_1 \quad (2.41)$$

$$v_{\lambda_1} = -p_{x_1} + y_1 - x_1 \quad v_{\lambda_2} = x_2 \quad (2.42)$$

Le equazioni del moto risultano quindi essere (omettiamo quelle di $\lambda_{1,2}$ perchè non sono utili per la dinamica delle p_x, p_y e delle x, y)

$$\dot{x}_1 = y_1 \quad \dot{x}_2 = y_2 \quad (2.43)$$

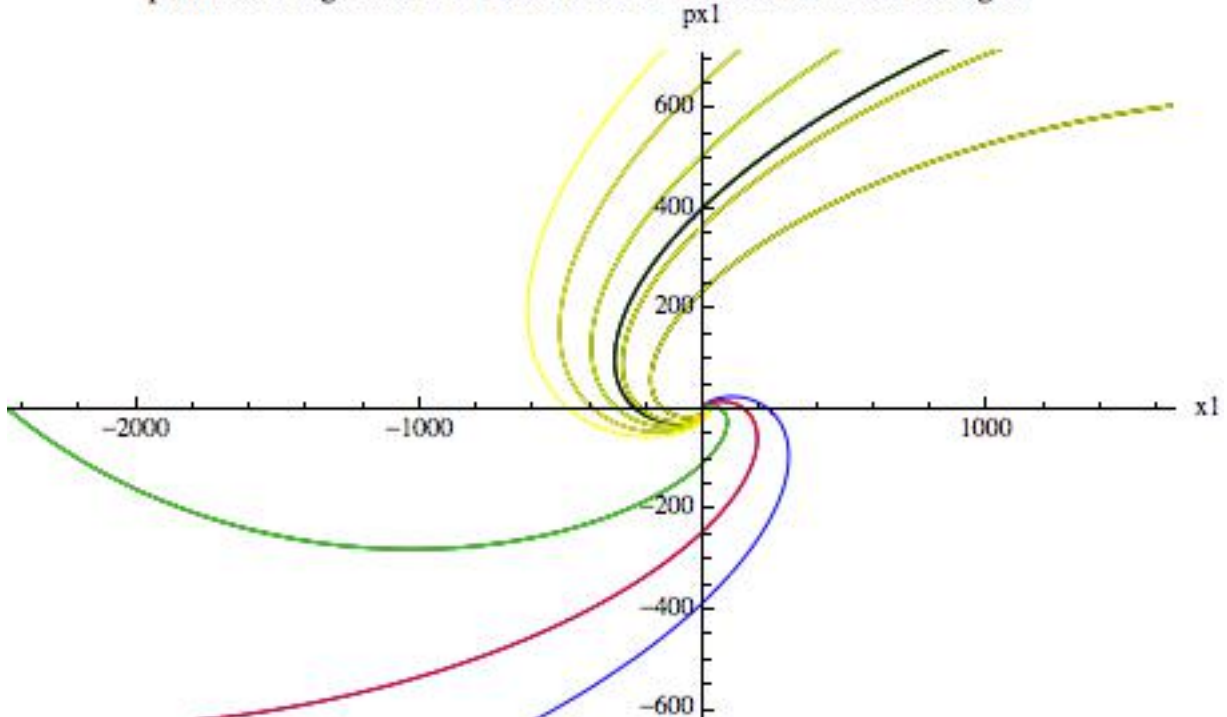
$$\dot{y}_1 = p_{x_2} - y_2 + y_1 \quad \dot{y}_2 = -p_{x_1} + y_1 \quad (2.44)$$

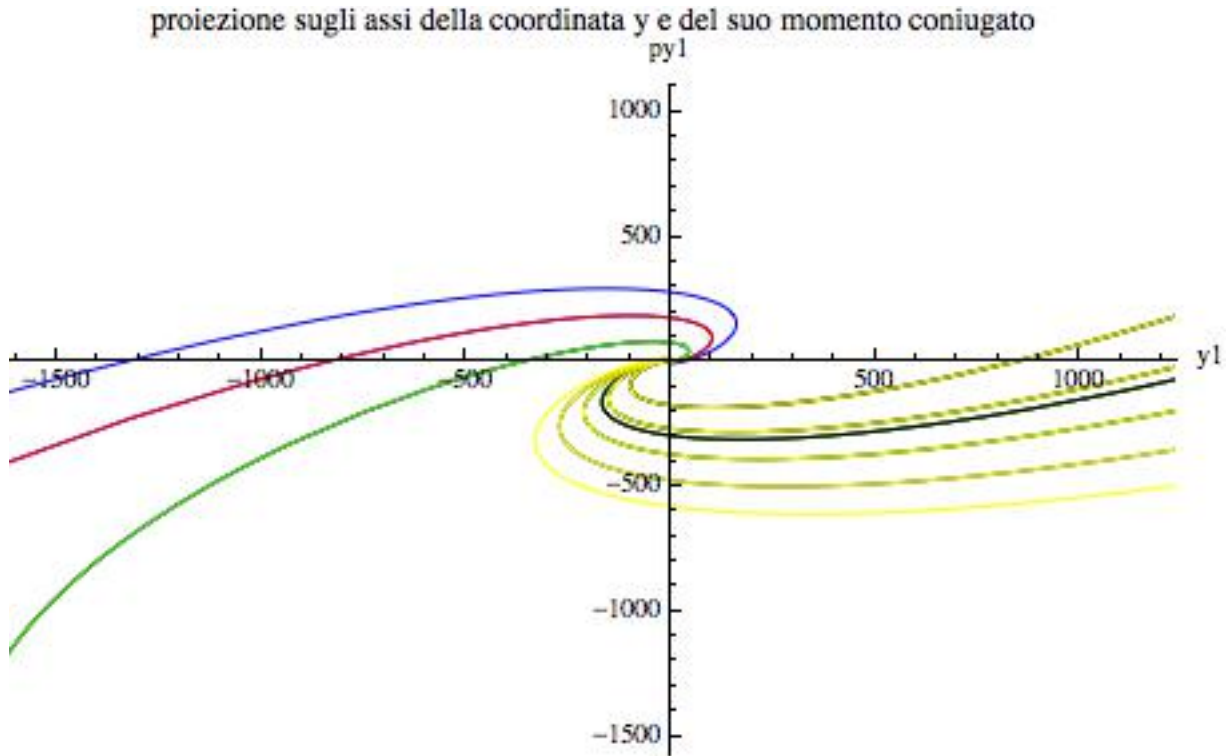
$$\dot{p}_{x_1} = -x_1 - p_{x_1} + y_1 \quad \dot{p}_{x_2} = -x_2 \quad (2.45)$$

$$\dot{p}_{y_1} = -p_{x_1} + y_1 \quad \dot{p}_{y_2} = y_1 \quad (2.46)$$

Risolviamo queste equazioni con una simulazione numerica grazie a *Mathematica*

proiezione sugli assi della coordinata x e del suo momento coniugato





Come ben si vede dalle simulazioni numeriche fatte con *Mathematica* per dati iniziali presi molto vicino al punto di equilibrio¹ (l'origine) il sistema volge rapidamente ad assumere valori molto elevati oscillando per ogni coordinata tra valori positivi e valori negativi (sono state plottate solo le proiezioni delle traiettorie in forma parametrica sui piani (x_1, p_{x_1}) e (y_1, p_{y_1}) essendo le altre proiezioni analoghe). Si ricordi che qui il significato fisico della coordinata x_1 è proprio la posizione nel sistema di partenza, mentre la coordinata y_1 ne è la relativa velocità.

2.3.2 Esempio con una teoria di campo

Riprendiamo ora l'esempio fatto 1.2.3 e mostriamo come un cambiamento di coordinate dei campi ci possa condurre ad una Lagrangiana degenere. Definiamo le coordinate (dette coordinate cono-luce in [9]) :

$$x_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + x) \quad (2.47)$$

$$x_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - x) \quad (2.48)$$

questo porge

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_+ + \partial_-) \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_+ - \partial_-)$$

Quindi la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \partial_+ \phi \partial_- \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + 2(\partial_+ \partial_- \phi)^2 \quad (2.49)$$

Questa Lagrangiana è degenere nelle $\partial_+^2 \phi(x_+, x_-)$ o $\partial_-^2 \phi(x_+, x_-)$ quindi sembra che con un semplice cambio di coordinate in una teoria di campo si possa passare da un sistema non degenere a uno degenere. Ma si ricordi che la degenerazione è una proprietà delle lagrangiane, non dei sistemi. Passiamo ora al formalismo hamiltoniano. Definiamo la \mathcal{L} introducendo le coordinate $\psi(x_-, x_+) = \partial_+ \phi(x_-, x_+)$ e utilizzando una funzione moltiplicatore di Lagrange $\lambda(x_-, x_+)$:

$$\mathcal{L}_T = \psi \partial_- \phi - \frac{m^2 \phi^2}{2} + 2(\partial_- \psi)^2 + \lambda(\partial_+ \phi - \psi) \quad (2.50)$$

Si noti come la scelta dei nuovi campi rompa la simmetria delle variabili x_-, x_+ , infatti x_+ diventa ora una variabile "dinamica" (ha lo stesso ruolo del tempo nella trattazione precedente), mentre x_- è la variabile "statica" (ha lo stesso ruolo dello spazio) cioè quella che descrive il sistema punto per punto ad un determinato valore della

¹si è considerata una griglia rettangolare attorno all'origine e si sono utilizzati come dati iniziali i nodi della griglia: l'ordine di grandezza della griglia è 10

variabile dinamica. I momenti sono così definiti:

$$\pi_\phi = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \partial_+ \phi} = \lambda \quad (2.51)$$

$$\pi_\psi = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \partial_+ \psi} = 0 \quad (2.52)$$

$$\pi_\lambda = \frac{\delta \mathcal{L}_T}{\delta \partial_+ \lambda} = 0 \quad (2.53)$$

La densità hamiltoniana diventa quindi:

$$\mathcal{H}_c = \pi_\phi \psi - \psi \partial_- \phi + \frac{m^2 \phi^2}{2} - 2(\partial_- \psi)^2 \quad (2.54)$$

e l'hamiltoniana canonica:

$$H_c = \int \mathcal{H}_c dx_+ dx_- \quad (2.55)$$

I vincoli in questo caso sono:

$$\phi_\phi = \pi_\phi - \lambda \approx 0 \quad (2.56)$$

$$\phi_\psi = \pi_\psi \approx 0 \quad (2.57)$$

$$\phi_\lambda = \pi_\lambda \approx 0 \quad (2.58)$$

Se procediamo con l'algoritmo di Dirac in questo caso viene fuori un altro vincolo, per la precisione:

$$\xi = \pi_\phi - \partial_- \phi - 4\partial_-^2 \psi \approx 0 \quad (2.59)$$

A questo punto l'algoritmo si ferma e abbiamo così un sistema di 4 vincoli di seconda classe. Notiamo che in questo caso abbiamo tre vincoli primari, mentre ne avevamo due con la coordinate precedenti. Sembra che cambiando coordinate si siano aggiunti dei vincoli e che lo spazio delle fasi ridotto abbia dimensione minore in questo caso rispetto al caso precedente. Calcoliamo ora la matrice delle parentesi di Poisson dei vincoli P_{rs} ($\vec{x} = (x_+, x_-)$):

$$P_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & \partial_- \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\partial_-^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ -\partial_- \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 & 4\partial_-^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Chiaramente $\det P_{rs} \neq 0$ e imponendo le condizioni di consistenza per i vincoli otteniamo le seguenti equazioni per i moltiplicatori di Lagrange dell'hamiltoniana di Dirac ($H_D = H_c + \int v_\phi(x_+, x_-)\phi_\phi(x_+, x_-) + v_\psi(x_+, x_-)\phi_\psi(x_+, x_-) + v_\lambda(x_+, x_-)\phi_\lambda(x_+, x_-) dx_-$):

$$v_\phi = 0 \quad v_\lambda = -\partial_- \psi - m^2 \phi_+ \quad (2.61)$$

$$4\partial_-^2 v_\psi = \pi_\phi - \partial_- \phi + 4\partial_-^2 \psi \quad (2.62)$$

Vediamo così che la (2.62) è un'equazione differenziale del secondo ordine per il moltiplicatore $v_\psi(x_-, x_+)$ e questo ci lascia la libertà di fissare le due condizioni al contorno per determinare completamente il moltiplicatore. Questo fa tornare i conti con i vincoli che sembravano differire da un set di coordinate all'altro: uno dei vincoli non restringe completamente i gradi di libertà del sistema, ma specifica solo la loro evoluzione nella variabile x_- .

Dovremmo ora discutere l'instabilità di Ostrogradski anche in questo caso. Qui la faccenda si complica. Il problema centrale, molto sottile, è quello di determinare il moltiplicatore $v_\psi(x_-, x_+)$ e quindi di fissare le condizioni al contorno per l'equazione differenziale $4\partial_-^2 v_\psi = \pi_\phi - \partial_- \phi + 4\partial_-^2 \psi$: questo problema esula degli scopi di questa tesi e per motivi di tempo e spazio non verrà discusso qui. Per trovare informazioni riguardanti questa questione si veda [9]. Va sottolineato che l'instabilità di Ostrogradski è un fatto fisico e non deve dipendere dal modo con cui descriviamo il sistema, quindi anche in questo caso dovrebbe apparire.

Capitolo 3

Sistemi parzialmente degeneri

Ricapitolando abbiamo visto nel Capitolo 1 l'insorgenza dell'instabilità di Ostrogradski nei sistemi non degeneri. Nel Capitolo 2 abbiamo invece studiato il caso di sistemi completamente degeneri. In entrambi i casi abbiamo riscontrato che l'instabilità appare sempre! Non c'è modo infatti di costringere le variabili lineari dell'Hamiltoniana (solitamente alcuni momenti) del sistema ad assumere nel tempo valori finiti per tutti i dati iniziali che si possono prendere in considerazione. In questo capitolo ci proponremo di studiare dei sistemi che sono degeneri solo in alcune delle coordinate. Proponiamo lo studio di questi sistemi nella speranza che emergano delle simmetrie di gauge e quindi vincoli di prima classe che, una volta operato il gauge fixing, limitino le variabili del sistema che generano l'instabilità.

Partiamo innanzi tutto considerando un sistema con due gradi di libertà con una simmetria di gauge e costruendo una lagrangiana che sia invariante sotto questa trasformazione. La simmetria in questione è:

$$\delta q_1(t) = \epsilon(t) \quad (3.1)$$

$$\delta q_2(t) = \epsilon(t) - \dot{\epsilon}(t) \quad (3.2)$$

dove $\epsilon(t)$ è un'arbitraria funzione continua del tempo. Possiamo così definire un mattoncino invariante di gauge con cui costruire la lagrangiana:

$$\chi = q_2 - q_1 + \dot{q}_1$$

Consideriamo quindi la lagrangiana:

$$L = \frac{\dot{\chi}^2}{2} + \frac{\chi^2}{2} \quad (3.3)$$

Scritta per esteso risulta essere (una volta eliminate le derivate totali):

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{2} + \frac{\dot{q}_2^2}{2} + \dot{q}_1^2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2 \ddot{q}_1 + q_2 \dot{q}_1 + \frac{(q_2 - q_1)^2}{2} \quad (3.4)$$

Come possiamo subito notare la nostra Lagrangiana è del secondo ordine ed è degenera (rispetto alle derivate seconde) nella coordinata q_2 mentre è non degenera nella coordinata q_1 . Seguendo la procedura che abbiamo descritto nel Capitolo 1, riportiamo il nostro studio ad un problema del primo ordine. Operando il cambio di variabili

$$\dot{q}_1 = x \quad \dot{q}_2 = y \quad (3.5)$$

e inseriamo nella lagrangiana questi vincoli tramite i moltiplicatori λ_1, λ_2 . Otteniamo perciò:

$$L_T = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x^2 - xy + y\dot{x} + q_2 x + \frac{(q_2 - q_1)^2}{2} + \lambda_1(\dot{q}_1 - x) + \lambda_2(\dot{q}_2 - y)$$

Definiamo quindi i momenti $p_x = \dot{x} + y$, $p_{q_1} = \lambda_1$, $p_{q_2} = \lambda_2$, $p_y = p_{\lambda_1} = p_{\lambda_2} = 0$ e osserviamo che otteniamo 5 vincoli primari cioè

$$\phi_y = p_y \approx 0 \quad \phi_{q_1} = p_{q_1} - \lambda_1 \approx 0 \quad (3.6)$$

$$\phi_{q_2} = p_{q_2} - \lambda_2 \approx 0 \quad \phi_{\lambda_1} = p_{\lambda_1} \approx 0 \quad \phi_{\lambda_2} = p_{\lambda_2} \approx 0 \quad (3.7)$$

L'Hamiltoniana canonica risultata invece essere:

$$H_c = \frac{p_x^2}{2} - p_x y + p_{q_1} x + p_{q_2} y - x^2 + xy - q_2 x - \frac{(q_2 - q_1)^2}{2} \quad (3.8)$$

e l'Hamiltoniana di Dirac:

$$H_D = H_c + \phi_y v_y + v_{q_1} \phi_{q_1} + v_{q_2} \phi_{q_2} + v_{\lambda_1} \phi_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} \phi_{\lambda_2} \quad (3.9)$$

Procedendo con l'algoritmo di Dirac-Bergmann troviamo altri due vincoli:

$$\psi_1 \equiv p_{q_2} + x - p_x \approx 0 \quad (3.10)$$

$$\psi_2 \equiv q_1 + x - p_{q_1} - p_x \approx 0 \quad (3.11)$$

Passiamo ora alla classificazione dei vincoli. La matrice delle parentesi di Poisson dei vincoli tra di loro è (r, s assumono i valori $\phi_y, \phi_{q_1}, \phi_{q_2}, \phi_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_2}, \psi_1, \psi_2$):

$$P_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Come possiamo subito notare questa matrice ha rango 4 quindi ci sono 3 libertà di gauge. Diagonalizziamo la matrice per trovare i vincoli di gauge. Essi risultano essere i vincoli ϕ_y e ψ_1 che avevamo già e il vincolo

$$\xi \equiv p_{\lambda_1} + p_{q_1} + p_x - x - q_1 \approx 0 \quad (3.13)$$

Dobbiamo quindi considerare l'hamiltoniana estesa con l'aggiunta (oltre a tutti i vincoli primari) anche i due vincoli, con i rispettivi moltiplicatori, che sono di prima classe. L'hamiltoniana che descrive il nostro sistema è quindi:

$$H_E = H_D + v_\psi \psi_1 + v_\xi \xi \quad (3.14)$$

Dobbiamo ora fissare la gauge cioè imporre un vincolo sulle variabili dello spazio delle fasi in modo che i vincoli di prima classe diventino di seconda classe (cioè la varietà su cui vive il sistema sia univocamente determinata e non ci siano una famiglia di soluzioni che rappresentano lo stesso stato fisico) e che siano consistenti con le equazioni del moto, cioè che funzioni dei vincoli appena imposti e vecchi non diano origine a nuovi vincoli di prima classe. La scelta naturale che viene fatta per fissare la gauge è quella di imporre come vincoli delle funzioni di variabili canonicamente coniugate ai vincoli di prima classe uguali ad una costante. Per fare ciò è conveniente trovare una trasformazione canonica che che ci porti i singoli vincoli di prima classe in un'unica variabile. La trasformazione che fa al caso nostro è:

$$\begin{cases} Q_1 = -x - q_1 + p_x + p_{q_1} + p_{\lambda_1} \\ Q_2 = x - p_x + p_{q_2} \\ Q_3 = -q_1 + p_{q_1} - p_{q_2} + p_{\lambda_1} \\ Q_4 = -2q_1 + \lambda_1 + p_{q_1} \\ P_1 = -\frac{q_2 + p_x + p_{q_1}}{2} - p_{\lambda_1} \\ P_2 = x - \frac{q_2 + p_x + p_{q_1}}{2} + p_{q_2} - p_{\lambda_1} \\ P_3 = \frac{q_2 + p_x - p_{q_1}}{2} - p_{\lambda_1} \\ P_4 = -2q_1 + \lambda_1 + p_{q_1} + p_{\lambda_1} \\ Y = y \\ P_Y = p_y \\ \Lambda = \lambda_2 \\ P_\Lambda = p_{\lambda_2} \end{cases} \quad (3.15)$$

Sotto questa trasformazione l'Hamiltoniana canonica diventa:

$$\begin{aligned} H_c = \frac{1}{8} & (-16P_3^2 - 4P_4^2 - 3Q_1^2 - 6Q_1Q_2 - 3Q_2^2 + 2Q_1Q_3 - 6Q_2Q_3 - 3Q_3^2 + \\ & + 8(P_1 - P_2)(P_4 - Q_1 - Q_4) - 16P_3(P_4 + Q_2 + Q_3 - Q_4) - 4Q_1Q_4 + \\ & + 4Q_2Q_4 + 12Q_3Q_4 - 4Q_4^2 + 4P_4(Q_1 - Q_2 - 3Q_3 + 2Q_4) + 8Q_2Y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

mentre i vincoli di prima classe diventano:

$$\phi_y = P_Y \approx 0 \quad (3.17)$$

$$\psi_1 = Q_2 \approx 0 \quad (3.18)$$

$$\xi = Q_1 \approx 0 \quad (3.19)$$

e quelli di seconda classe:

$$\phi_{q_1} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - 2P_4 \approx 0 \quad (3.20)$$

$$\phi_{q_2} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2} - \Lambda \approx 0 \quad (3.21)$$

$$\phi_{\lambda_2} = P_\Lambda \approx 0 \quad (3.22)$$

$$\phi_{\lambda_1} = P_4 - Q_4 \approx 0 \quad (3.23)$$

Si determinano facilmente quindi i moltiplicatori dei vincoli primari di seconda classe:

$$v_{q_2} = v_{q_1} = 0 \quad v_{\lambda_2} = 2P_3 + P_4 + Q_2 + Q_3 - Q_4 \quad v_{\lambda_1} = \frac{1}{2}(-4P_3 - 2P_4 - Q_1 - 3Q_2 - Q_3) + Q_4 - P_1 + P_2 \quad (3.24)$$

Fissiamo ora la gauge imponendo un vincolo sulle variabili coniugate ai vincoli di prima classe, facendoli diventare così vincoli di seconda classe:

$$P_1 = P_2 = Y = 0 \quad (3.25)$$

con la scelta di gauge (3.25) otteniamo per i moltiplicatori dei vincoli di prima classe:

$$v_y = 0 \quad (3.26)$$

$$v_\xi = \frac{1}{4}(4P_1 - 4P_2 - 2P_4 + 3Q_1 + 3Q_2 - Q_3 + 2Q_4) \quad (3.27)$$

$$v_\psi = \frac{1}{4}(8P_3 + 2P_4 + 3Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3 - 2Q_4 - 4Y) \quad (3.28)$$

Ora ricaviamo le equazioni del moto considerando le parentesi di Poisson dell'Hamiltoniana estesa H_E e poi valutando tutti i vincoli lungo le soluzioni. Ricordiamo, come abbiamo sottolineato sopra, che in questo caso se le equazioni del moto fossero ricavate considerando solo H_D si avrebbe un'incongruenza: l'energia varierebbe durante il moto e i vincoli che erano di prima classe non sarebbero conservati. Perciò si rende necessario l'introduzione dell'hamiltoniana estesa per calcolare le equazioni del moto (per una ulteriore discussione sul ruolo di H_D e H_E si veda [9]). Le stesse equazioni possono essere ottenute introducendo le parentesi di Dirac considerando come vincoli di seconda classe tutti i vincoli sia quelli che erano di prima classe, sia quelli introdotti nel gauge fixing.

Le equazioni del moto che non sono costanti delle coordinate della varietà vincolare sono:

$$\dot{Q}_3 = -4P_3 \quad \dot{Q}_4 = -4P_3 - 2Q_3 \quad (3.29)$$

$$\dot{P}_3 = 2P_3 + \frac{3}{4}Q_3 \quad \dot{P}_4 = -4P_3 - 2Q_3 \quad (3.30)$$

Osserviamo che anche il moltiplicatore Λ varia nel tempo secondo l'equazione $\dot{\Lambda} = 2P_3$, ma ciò non è interessante ai fini di valutare l'evoluzione temporale del sistema.

La soluzione più generale del sistema di equazioni differenziali (3.29) è:

$$\begin{pmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} Q_3^0 \\ Q_4^0 \\ P_3^0 \\ P_4^0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

con il vettore $Q_3^0, Q_4^0, P_3^0, P_4^0)^T$ che rappresenta le condizioni iniziali del problema di Cauchy. La matrice risolvete R è:

$$R = P^{-1} \text{diag}\{e^{t+i\sqrt{2}t}, e^{t-i\sqrt{2}t}, 1, 1\}P \quad (3.32)$$

con P che è:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(1 - 2i\sqrt{2}) & \frac{1}{3}(1 + 2i\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{12}i(5i + \sqrt{2}) & -\frac{1}{12}i(-5i + \sqrt{2}) & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Come possiamo quindi subito osservare, per alcuni valori iniziali le soluzioni esplodono all'infinito: questo comportamento è chiaramente dato dai termini $e^{t \pm i\sqrt{2}t}$ che hanno sia una parte oscillante sia una parte che va all'infinito esponenzialmente. Questo tipo di soluzioni sono caratteristiche dell'instabilità di Ostrogradski, come mostrato nel Capitolo 1.

Un'altra caratteristica dell'instabilità, connessa con quanto descritto sopra, è la non limitatezza delle superfici ad energia costante. Ora ci proponiamo di dimostrare ciò.

Se valutiamo l'energia sui vincoli (la varietà determinata dai vincoli la denotiamo Γ_c) essa risulta essere:

$$H|_{\Gamma_c} = \frac{1}{8}(-16P_3^2 - 4P_4^2 - 3Q_3^2 - 4Q_4^2 - 16P_3(P_4 + Q_3 - Q_4) + 12Q_3Q_4 + 4P_4(-3Q_3 + 2Q_4)) \quad (3.34)$$

Siccome l'energia è una forma quadratica, riscriviamo ora l'hamiltoniana $H|_{\Gamma_c}$ come $H|_{\Gamma_c} = v^T A v$ con $v = (Q_3, Q_4, P_3, P_4)^T$ e A matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} & -1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

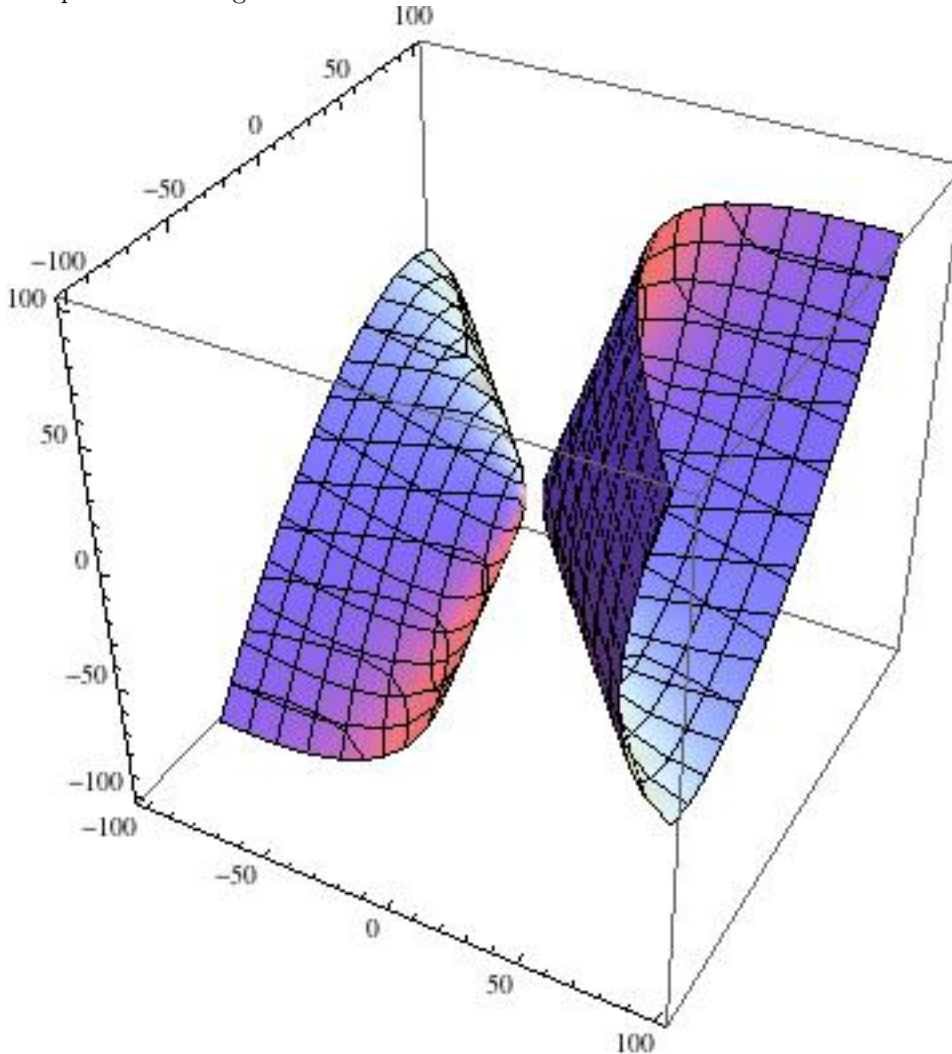
Diagonalizziamo quindi A . Gli autovalori di A sono (sono stati calcolati numericamente perchè calcolare analiticamente la soluzione è possibile, ma estremamente tedioso)

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = -3.63142 \quad \alpha_3 = 0.420238 \quad \alpha_4 = -0.163821 \quad (3.36)$$

Questo ci dice che possiamo effettuare un cambio di variabili $(Q_3, Q_4, P_3, P_4) = F(Q_3, Q_4, P_3, P_4)$ tale per cui l'hamiltoniana sia una forma quadratica con la matrice simmetrica che la rappresenta data da $diag\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Non troveremo questo cambio di coordinate perchè è proibitivo calcolarlo analiticamente e inoltre non ci fornisce le informazioni di cui abbiamo bisogno. Studiamo ora le superfici ad energia costante $H|_{\Gamma_c} = cost$. Ricordiamo che l'equazione di un iperboloidi a due falde è $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1$ mentre l'equazione di un'iperboloidi a una falda è $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{z^2}{a_3^2} = 1$. Nella base di coordinate (Q_3, Q_4, P_3, P_4) le superfici di livello sono date da:

$$-|\alpha_2|Q_4^2 + \alpha_3P_3^2 - |\alpha_4|P_4^2 = cost \quad (3.37)$$

Vediamo quindi che se $cost > 0$ otteniamo un iperboloidi a due falde, mentre se $cost < 0$ otteniamo un iperboloidi ad una falda. Per avere un'idea visiva di come sono trasformati gli iperboloidi sotto il cambio di coordinate mostriamo come appaiono le superfici ad energia costante nella base (Q_3, Q_4, P_3, P_4) . Ad esempio ponendo $Q_4 = 1$ la superficie di energia con $E = 10$ è :



Notiamo inoltre che nel nostro caso la varietà non è connessa se l'energia è positiva: questo è dovuto al fatto che l'iperboloide a due falde non è connesso e la trasformazione per passare da una base all'altra è differenziabile. Questo ci dice che se un moto comincia in una delle due metà del nostro iperboloide quadridimensionale ci rimarrà indefinitamente. Se invece $cost < 0$ allora la superficie ad energia costante è connessa perchè è diffeomorfa ad un iperboloide a una falda. Si noti che per nessun valore di $cost$ la varietà diventa compatta.

In sostanza tutto questo implica che la varietà ad energia costante non sia limitata. Ritroviamo così ancora l'instabilità di Ostrogradski anche in questo esempio con tutte le caratteristiche che abbiamo descritto nel primo capitolo. Sembra quindi sensata l'affermazione fatta da [6] per cui i gradi di libertà che compaiono al primo ordine non influiscono sull'apparire o meno dell'instabilità di Ostrogradski. C'è anche da dire che secondo [3] con un numero sufficiente di vincoli di gauge da imporre si può in alcuni casi curare l'instabilità di Ostrogradski: questo sarebbe il caso nostro infatti le tre libertà di gauge dovrebbero consentirci di limitare lo spazio delle fasi dove appare la degenerazione (si veda la (3.8) nella quale le direzioni patologiche sono date dai momenti p_{q_1}, p_{q_2}, p_y). Possiamo quindi affermare che, siccome l'instabilità di Ostrogradski è una caratteristica fisica del sistema e dovrebbe apparire o meno indipendentemente dal gauge fixing fatto, l'affermazione fatta da Woodard [3] è solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per curare l'instabilità.

Conclusione

Come sottolineato da [3] anche se non era evidente nel 1850, il teorema di Ostrogradski impone una delle più forti restrizioni che una teoria fisica deve soddisfare. La natura dell'instabilità che emerge quando questa condizione non è soddisfatta la possiamo riassumere in:

- l'instabilità di Ostrogradski comporta uno speciale comportamento delle soluzioni nel tempo, ad esempio le soluzioni runaway;
- l'instabilità è causata dall'aumento dei gradi di libertà del sistema nello spazio delle fasi;
- ogni variabile del sistema può assumere valori arbitrariamente positivi o negativi tenendo l'energia costante;
- le variabili del sistema trasportano energia negativa o energia positiva o entrambe;

Questa instabilità la possiamo riscontrare sia nei sistemi completamente degeneri che in quelli non degeneri. Infatti nei sistemi non degeneri la linearità dell'hamiltoniana (e quindi l'insorgere dell'instabilità) è intrinsecamente legata al modo in cui viene costruita la trasformata di Legendre. I sistemi non degeneri sono quindi instabili per costruzione: per tener conto dell'aumento dei gradi di libertà che si ha quando si considera una teoria di ordine superiore, si aggiungono dei termini lineari all'hamiltoniana.

Nei sistemi completamente degeneri l'iniziale speranza era che la presenza di vincoli curasse l'instabilità. Risulta però che tutti i vincoli coinvolti in questo tipo di teoria sono di seconda classe e che l'hamiltoniana canonica stessa sia lineare in qualche variabile. Come sappiamo i vincoli di seconda classe non limitano ulteriormente i valori che possono assumere le variabili del sistema una volta fissata l'energia sulla varietà vincolare. Quindi inevitabilmente essendo l'hamiltoniana canonica, che è definita sulla varietà vincolare, lineare in qualche variabile, si presenta l'instabilità di Ostrogradski anche in questi sistemi.

L'unica possibilità per curarla sembra essere quella di avere un numero sufficiente di vincoli di gauge da imporre. Come abbiamo mostrato nel terzo capitolo, libertà di gauge si presentano quando abbiamo una lagrangiana che è parzialmente degenera. Nel nostro esempio, però, pur avendo un numero di vincoli di gauge pari al numero di variabili lineari dell'hamiltoniana, si mostra che non è possibile curare l'instabilità. Possiamo quindi affermare che l'averne un numero di libertà di gauge da imporre pari al numero di variabili lineari presenti nell'hamiltoniana è una condizione necessaria per curare l'instabilità, ma non sufficiente.

Vorrei spendere due brevi parole su alcune osservazioni che non c'è stato tempo di sviluppare e trattare. Come mostrato nell'articolo di Pais e Uhlenbeck [8] le teorie con un'azione non locale possono essere ricondotte, con un opportuno sviluppo in serie, a teorie locali dipendenti da derivate superiori al primo ordine, magari fino all'ordine infinito. Queste caratteristiche che quindi abbiamo descritto per teorie locali con ordini superiori al primo sono portate anche nelle teorie non locali se lo sviluppo in serie di quest'ultime è finito o arrestato ad un'ordine finito per un'analisi perturbativa della teoria. In questa trattazione per limiti di tempo, spazio e (forse) capacità non ci siamo avventurati nella descrizione degli effetti che tali teorie hanno nel mondo quantistico. Sottolineiamo solo un'ultima cosa: la possibilità di avere stati sia con energia negativa che positiva fa sì che il vuoto possa decadere e produrre una quantità infinita di stati sempre ad energia maggiore. C'è in realtà di più: questo decadimento del vuoto è fortemente facilitato da una questione entropica!

Appendice A

L'algoritmo di Dirac-Bergmann

Supponiamo di avere una Lagrangiana generica $L(q, \dot{q})$, dove $q = (q_1, \dots, q_N)$ e $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ e N sono i gradi di libertà del nostro sistema. Per passare al formalismo hamiltoniano definiamo i momenti:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(q, \dot{q}) \quad (\text{A.1})$$

Se la matrice $W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}$ ha rango R ed è massimo ($R = N$) allora le relazioni (A.1), almeno localmente, possono essere invertite e risolte in funzione delle velocità \dot{q} . Se invece il rango $R < N$ allora solo R definizioni dei momenti possono essere invertite e posso ottenere:

$$\dot{q}^a = f^a(q, p, \dot{q}^\rho) \quad a = 1, \dots, R \quad \rho = N - R, \dots, N \quad (\text{A.2})$$

Quindi inserendo (A.2) in (A.1) otteniamo R relazioni:

$$p_a = g_a(q, p, \dot{q}^\rho) \quad (\text{A.3})$$

e $N - R$ relazioni che saranno indipendenti dalle velocità:

$$p_\rho = g_\rho(q, p_a) \quad (\text{A.4})$$

se queste relazioni fossero dipendenti dalle velocità potremmo invertirle e trovarci le rimanenti velocità \dot{q}^ρ in funzione di p e q . Definiamo quindi ora l'Hamiltoniana vincolata ¹:

$$H_c(q, p, \dot{q}^\rho) = p_i \dot{q}^i - L(q, p, \dot{q}^\rho) \quad (\text{A.5})$$

dove quando i assume i valori ρ dobbiamo sostituire $p_\rho \rightarrow g_\rho(q, p_a)$, mentre se i assume i valori a bisogna sostituire $\dot{q}^a \rightarrow f^a(q, p_a, \dot{q}^\rho)$. Le equazioni del moto di E-L diventano allora in ambito hamiltoniano:

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H_c}{\partial p_a} - \dot{q}^\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial p_a} \quad (\text{A.6})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \dot{q}^\rho \frac{\partial g_\rho}{\partial q_i} \quad (\text{A.7})$$

si noti che la forma di queste equazioni del moto è molto simile a quella hamiltoniana standard dei sistemi non degeneri, se non per il fatto che qui ci sono $N + R$ equazioni al posto di $2N$. Grazie a (A.4), che sono dei vincoli, lo spazio delle fasi totale Γ è ristretto ad un suo sottospazio Γ_c e solo in questo sottospazio è definita H_c .

Apriamo ora una piccola parentesi. Sia $F(q, p)$ una funzione definita in un intorno di Γ_c ; la sua restrizione a Γ_c si potrà avere sostituendo a p_ρ con $g_\rho(q, p_a)$:

$$F(q, p)|_{\Gamma_c} = F(q, p_a, g_\rho(q, p_a))$$

Se F è identicamente nulla dopo questa sostituzione diremo che F è debolmente zero e denoteremo ciò con $F \approx 0$ (questa nomenclatura è dovuta a Dirac [10]). Se anche il gradiente di F è identicamente nullo in Γ_c allora diremo che F è fortemente zero e scriveremo $F \simeq 0$. C'è una precisa relazione tra una funzione che è debolmente nulla sull'ipersuperficie Γ_c e i vincoli che la definiscono: la funzione che è debolmente nulla è fortemente equivalente ad una combinazione lineare dei vincoli che definiscono l'ipersuperficie.

Definiamo ora implicitamente i vincoli e quindi l'ipersuperficie Γ_c :

$$\phi_\rho = p_\rho - g_\rho(q, p_a) \approx 0 \quad (\text{A.8})$$

¹d'ora in poi tutti gli indici ripetuti nella stessa formula si considereranno sommati (convenzione di Einstein)

Estendiamo ora la nostra Hamiltoniana H_c a tutto spazio delle fasi Γ , in modo da definire l'evoluzione temporale del sistema attraverso le solite parentesi di Poisson. Così essa è definita

$$H_p = H_c + \mu^\rho \phi_\rho \quad (\text{A.9})$$

come possiamo subito notare questa Hamiltoniana è debolmente equivalente ad H_c sulla superficie Γ_c . Il significato fisico dei moltiplicatori introdotti μ^ρ è presto mostrato: essi sono infatti le $N - R$ velocità dello spazio degli atti di moto iniziali che non compaiono nelle definizioni dei momenti, per intenderci quelle degeneri, o funzioni di esse (vedi [9] e [12]). Dopo queste definizioni le equazioni del moto possono essere scritte in forma più compatta come:

$$\dot{q}^a \approx \{q^a, H_p\} \quad \dot{p}_i \approx \{p_i, H_p\} \quad (\text{A.10})$$

Anzi ogni funzione nello spazio delle fasi evolve nel tempo:

$$\dot{A}(q, p) \approx \{A, H_p\} \quad (\text{A.11})$$

Per fare in modo che quanto finora costruito sia consistente dobbiamo ora imporre che i vincoli ϕ_ρ siano conservati durante l'evoluzione temporale, dobbiamo cioè imporre che

$$0 \approx \dot{\phi}_\rho \approx \{\phi_\rho, H_p\} \approx \{\phi_\rho, H_c\} + \mu^s \{\phi_\rho, \phi_s\} \quad (\text{A.12})$$

Queste $N - R$ equazioni definiscono un sistema di equazioni lineari nelle incognite μ^ρ , che vogliamo determinare. Per discutere le implicazioni di (??) definiamo (rinomino ρ con r):

$$h_r = \{\phi_r, H_c\} \quad (\text{A.13})$$

$$P_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\} \quad (\text{A.14})$$

Distinguiamo quattro casi:

Caso 1A: $h \neq 0$ (non tutte $h_r \approx 0$), $\det P_{rs} \neq 0$. In questo caso (A.12) è un sistema non omogeneo e ha come soluzioni

$$\mu_s \approx -P_{rs}^{-1} h_r$$

quindi le μ_s sono debolmente fissate e le equazioni del moto per qualsiasi dato iniziale, che soddisfi $\phi_r = 0$, sono completamente determinate.

Caso 1B: $h \neq 0$ (non tutte $h_r \approx 0$), $\det P_{rs} \approx 0$. Perchè il sistema (A.12) abbia soluzioni alcune relazioni su h_r devono essere soddisfatte. Se il rango di P_{rs} è M allora esistono $N - R - M$ indipendenti autovettori di autovalore nullo $e^{(\alpha)}$, cioè $e_s^{(\alpha)}(q, p) P_{rs} \approx 0$, che, perchè il sistema abbia soluzione devono verificare :

$$0 \approx e_r^{(\alpha)} h_r \quad (\text{A.15})$$

Ora queste nuove relazioni o sono verificate, i.e. sono funzioni dei vincoli ϕ_r , oppure conducono a dei nuovi vincoli, che restringono ulteriormente lo spazio delle fasi a un certo Γ'_c . Vengono chiamate vincoli secondari.

Caso 2A: $h \approx 0$, $\det P_{rs} \neq 0$. C'è solo in questo caso la soluzione banale in cui tutti i μ^s sono nulli

Caso 2B: $h \approx 0$, $\det P_{rs} \approx 0$. In questo caso il sistema è omogeneo e una soluzione non banale esiste, quindi se il rango di P_{rs} è M allora $N - R - M$ μ^s sono debolmente fissati.

In conclusione possiamo vedere che ci sono due casi in cui emergono nuovi vincoli che restringono ulteriormente lo spazio della fasi. Se quindi appaiono nuovi vincoli dovremmo imporre anche a loro la condizione di consistenza e verificare che siano conservati nel tempo. La procedura di Dirac-Bergmann si ferma una volta che non compaiono più nuovi vincoli ad un determinato step. Otteniamo infine una superficie Γ'' definita da $N - R + L''$ vincoli, dove L'' è il numero di vincoli secondari che saltano fuori iterando l'algoritmo. L'ipersuperficie Γ'' su cui si svolge il moto è:

$$\phi_r \approx 0|_{\Gamma''} \quad (r = R + 1, \dots, N) \quad (\text{A.16})$$

$$\chi_\rho \approx 0|_{\Gamma''} \quad (\rho = 1, \dots, L'') \quad (\text{A.17})$$

Una volta terminato l'algoritmo ci si aspetterebbe che una volta dati i valori iniziali il moto fosse completamente determinato. Questo è vero se si riescono a determinare tutti i moltiplicatori, cioè le equazioni di consistenza di tutti vincoli, che formano un sistema lineare che ha come incognite i moltiplicatori μ^ρ , ha soluzione unica. Risulta però che in certi casi ci siano delle configurazioni che pur diverse siano fisicamente equivalenti. Questa situazione si presenta quando ci sono dei vincoli che definiamo di prima classe. Un vincolo si dice di prima classe se le sue parentesi di Poisson con gli altri vincoli sono tutte nulle. Altrimenti si dirà di seconda classe. In questi casi infatti ci sono o dei moltiplicatori che non vengono fissati, quelli cioè relativi al vincolo di prima classe, e quindi abbiamo un'arbitrarietà nell'evoluzione temporale dovuta alla particolare scelta di questi moltiplicatori, o dobbiamo aggiungere all'Hamiltoniana H_p questi vincoli (se sono di seconda classe o combinazione lineare di

vincoli) con altri moltiplicatori $\mu^{\rho'}$ che restringano ulteriormente lo spazio delle fasi per tener conto dell'equivalenza fisica di alcune soluzioni. Diverse scelte dei moltiplicatori non fissati ci devono condurre alla stessa soluzione fisica, si ha quel che si dice una libertà di gauge. Per operare quello che si chiama il gauge fixing si fissano (si aggiungono altri vincoli di seconda classe) le variabili coniugate alle variabili vincolo in modo da far diventare i vincoli di gauge di seconda classe e quindi determinare completamente il moto del sistema.

A.0.3 Parentesi di Dirac

Un altro modo per descrivere l'evoluzione temporale del sistema, al posto di introdurre un'Hamiltoniana con aggiunti dei moltiplicatori, è quello di ridefinire le parentesi di Poisson che determinano l'evoluzione temporale: vengono chiamate parentesi di Dirac. L'introduzione di queste nuove parentesi ci permette di definire una nuova struttura simplettica sullo spazio delle fasi ridotto, quello definito dai vincoli di seconda classe (anche i vincoli di prima classe rientrano in questa categoria una volta operato il gauge fixing) e di utilizzare come Hamiltoniana che descrive il sistema l'hamiltoniana vincolata H_c . Lo scopo della definizione di queste parentesi è di tagliare le componenti delle parentesi di Poisson tra le varie funzioni che farebbero uscire l'evoluzione temporale dalla varietà vincolare. Sono definite nella seguente maniera.

Se il sistema ha solo vincoli secondari e l'algoritmo di Dirac-Bergmann è giunto alla conclusione allora si possono determinare univocamente i moltiplicatori dell'hamiltoniana di Dirac H_D . Chiamando tutti i vincoli (primari e secondari) come ξ_ρ e denotando con Δ_{ij} la matrice delle parentesi di Poisson dei vincoli indipendenti tra di loro, il sistema che fissa univocamente i moltiplicatori lo possiamo scrivere come:

$$\{\xi_\rho, H_c\} + \Delta_{\rho j} v_j \approx 0 \quad (\text{A.18})$$

Chiaramente essendo $\det \Delta_{ij} \neq 0$ possiamo invertire la matrice e scrivere i moltiplicatori come:

$$v_j \approx -\Delta_{j\rho}^{-1} \{\xi_\rho, H_c\} \quad (\text{A.19})$$

Le equazioni del moto di una generica funzione A , $\dot{A} \approx \{A, H_D\} \approx \{A, H_c\} + v^j \{A, \xi_j\}$, le possiamo scrivere come:

$$\dot{A} \approx \{A, H_c\} + \{A, \xi_j\} \Delta_{j\rho}^{-1} \{\xi_\rho, H_c\} \quad (\text{A.20})$$

Dopo questa premessa, definiamo le parentesi di Dirac di due funzioni A_1, A_2 su una sottovarietà dello spazio delle fasi Γ_c definita dai vincoli ξ_ρ come:

$$\{A_1, A_2\}_{D(\Delta)} = \{A_1, A_2\} - \{A_1, \xi_\rho\} \Delta_{\rho\mu}^{-1} \{\xi_\mu, A_2\} \quad (\text{A.21})$$

Come possiamo subito notare le parentesi di Dirac non sono altro che le parentesi di Poisson a cui è stata tagliata la componente che usciva dalla sottovarietà con il termine $\{A_1, \xi_\rho\} \Delta_{\rho\mu}^{-1} \{\xi_\mu, A_2\}$.

Bibliografia

- [1] M. Ostrogradski(1850), *Mem. Ac. St. Petersbourg* , VI 4, 385
- [2] R.P.Woodard (2006), *Avoiding Dark Energy with 1/R Modifications of Gravity*
- [3] R.P.Woodard (2015), *The Theorem of Ostrogradsky*
- [4] J.M.Pons (1988), *Ostrogradski's Theorem for Higher-Order Singular Lagrangians*, *Letters in Mathematical Physics* 17 (1989) 181-189
- [5] J.Z.Simon (1990), *Higher-derivative Lagrangians, nonlocality, problems and solutions*, *Physical Review D*
- [6] Hayato Motohashi, Teruaki Suyama (2014), *Third-order equations of motion and the Ostrogradsky instability*
- [7] F.Fassò (2014), *Dispense per il corso di Istituzioni di Fisica Matematica*
- [8] A.Pais, G.E.Uhlenbeck (1950), *On Field Theories with Non-Localized Action*, *Physical Review*, Volume 79, Number 1
- [9] Kurt Sundermeyer, *Lectures Notes in Physics: Constrained Dynamics*, Spriger-Verlag, Berlin Heidelberg New York ,1982
- [10] P.A.M.Dirac (1964), *Lectures on quantum mechanics*, textslDover (2001)
- [11] E.T.Whittaker (1911), *A Treatise on the Analytical Dynamic of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press (1917)
- [12] A. Deriglazov (2010), *Classical Mechanics* Springer