

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA



FACOLTA' DI INGEGNERIA

**STATI DI PRETENSIONAMENTO IN
TESSUTI DI ORGANI CAVI:
ANALISI COSTITUTIVA E STRUTTURALE**

Relatore: Ch.mo Prof. ARTURO N. NATALI

Correlatore: Ing. Emanuele L. Carniel

Laureando: Stefano Mandija

Corso di laurea Magistrale in Bioingegneria

Anno Accademico 2012/2013

*A mio nonno
Giovanni,*

Abstract

In questo elaborato è descritto uno studio finalizzato all'analisi del comportamento biomeccanico di organi cavi con particolare riferimento al tratto gastrointestinale.

Per caratterizzare la risposta meccanica di tessuti e strutture biologiche, nonché analizzare i processi di interazione tra un bolo che scorre nella cavità di queste strutture e la parete dei tessuti stessi si rende necessario valutarne lo stato tenso-deformativo in riferimento allo stato in cui un tessuto non risulta deformato da forze esterne o interne (stato di zero-stress). A tal proposito risulta necessaria la formulazione di modelli costitutivi per i tessuti biologici costituenti il tratto gastrointestinale, ossia modelli matematici in grado di descrivere la correlazione tra stato tensionale e storia deformativa.

L'obiettivo ultimo di questo studio è proprio quello di definire delle formulazioni per il tessuto esofageo, riproponibili con alcune modifiche anche per altri tratti del condotto gastrointestinale, atte a valutare l'influenza del pretensionamento indotto dalle deformazioni residue sulla tensione indotta dal passaggio di un bolo.

Si è quindi proceduto con la formulazione matematica di alcuni modelli interpretativi il comportamento meccanico dei tessuti biologici costituenti la parete dell'esofago, in considerazione dello stato di pretensionamento, al fine di ottenere un modello sufficientemente complesso che consideri gli aspetti più importanti che caratterizzano tale distretto. Simulato poi il passaggio di un bolo, sulla base di questi modelli si è osservato l'andamento delle tensioni indotte nella parete esofagea al fine di valutare appunto l'influenza dello stato di pretensionamento indotto dalle deformazioni residue ivi presenti.

Indice

Abstract	5
Indice.....	7
Introduzione	11
Capitolo 1	15
DEFINIZIONE DEL CONCETTO DI DEFORMAZIONE RESIDUA IN RIFERIMENTO ALLO STATO DI ZERO-STRESS E RELATIVE IMPLICAZIONI DELLA SUA PRESENZA A LIVELLO FISIOLÓGICO	15
1.1 Introduzione.....	15
1.2 Definizione di deformazione residua in relazione allo stato di zero-stress	16
1.3 Caratterizzazione geometrica di un settore circolare nello stato di zero-stress.....	19
1.4 Distribuzione delle deformazioni residue in un organo tubolare	24
1.5 Effetti della muscolatura liscia sull'angolo di apertura e sulle deformazioni residue.....	31
1.6 Implicazioni delle deformazioni residue a livello fisiologico	33
Capitolo 2.....	37
VERIFICA DELLA COMPATIBILITÀ STATICA DEL PROFILO DELLE DEFORMAZIONI RESIDUE, IN CONSIDERAZIONE DELLA PRESENZA DI DIFFERENTI TIPOLOGIE TESSUTALI.....	37
2.1 Introduzione.....	37
2.2 Un materiale elastico lineare con profilo di deformazione residua lineare	39
2.3 Due materiali elastici lineari con profilo di deformazione residua lineare	41
2.4 Un materiale elastico lineare con profilo di deformazione residua non lineare	42
2.5 Due materiali elastici lineari con profilo di deformazione residua non lineare	43
2.6 Un materiale iperelastico con profilo di deformazione residua lineare.....	44
2.7 Due materiali iperelastici con profilo di deformazione residua lineare	46
2.8 Analisi di dati sperimentali.....	47
Capitolo 3.....	53
VALUTAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI LUNGO LO SPESSORE DELLA PARETE DI UN SEGMENTO ESOFAGEO AL PASSAGGIO DI UN BOLO SECONDO MODELLI ISOTROPI	53
3.1 Introduzione.....	53
3.2 Modello monotessutale isotropo con profilo di deformazione residua lineare	54
3.2.1 Formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo.....	55
3.2.2 Formulazione delle deformazioni residue	56
3.2.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni.....	57
3.3 Modello bitessutale isotropo con profilo di deformazione residua lineare	63
3.3.1 Formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo.....	64
3.3.2 Formulazione delle deformazioni residue	65
3.3.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni.....	66

Capitolo 4.....	73
VALUTAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI LUNGO LO SPESSORE DELLA PARETE DI UN SEGMENTO ESOFAGEO AL PASSAGGIO DI UN BOLO SECONDO MODELLI ANISOTROPI	73
4.1 Introduzione	73
4.2 Modello bitessutale anisotropo con profilo di deformazione residua lineare	74
4.2.1 Valutazione della distribuzione delle fibre presenti nella parete esofagea	74
4.2.2 Definizione del modello costitutivo	75
4.2.3 Analisi di dati sperimentali	78
4.2.4 Formulazione dei gradienti di deformazione	80
4.2.5 Valutazione della distribuzione delle tensioni	81
4.3 Modello bitessutale anisotropo con profilo di deformazione residua non lineare	86
4.3.1 Analisi di dati sperimentali	87
4.3.2 Formulazione dei gradienti di deformazione	88
4.3.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni	89
4.3.4 Analisi dell'influenza del profilo di deformazione residua sulle tensioni indotte	93
 Conclusioni e prospettive future	 99
 Appendici	 103
Appendice A.....	105
Appendice B.....	107
 Bibliografia	 111

Introduzione

Con il presente lavoro di tesi si intende valutare l'influenza dello stato di pretensionamento indotto dalle deformazioni residue presenti nelle pareti di organi cavi, con particolare riferimento all'apparato gastrointestinale, sulla tensione indotta nelle pareti dei tessuti costituenti tale apparato dal passaggio ad esempio di un bolo ingerito. Si sono analizzati alcuni modelli per queste regioni anatomiche con particolare attenzione al tratto esofageo. Tali modelli risultano essenziali ai fini dello sviluppo di strumenti computazionali in grado di descrivere il comportamento meccanico dei tessuti che compongono il tratto gastrointestinale. Questi strumenti permettono una valutazione della funzionalità di tali strutture, in relazione ad esempio ai carichi fisiologici a cui sono sottoposte, ma anche in relazione all'analisi di processi di interazione tra tessuti ed elementi biomedicali diagnostici o chirurgici. L'analisi è stata eseguita seguendo un approccio interdisciplinare, facendo riferimento a differenti ambiti di studio, quali ingegneria, anatomia e fisiopatologia. Nello specifico, in seguito ad una prima indagine del comportamento meccanico del tessuto esofageo basata sull'analisi di dati sperimentali, si è passati alla formulazione di alcuni modelli per questa regione anatomica.

Lo studio si suddivide complessivamente in quattro macrosezioni corrispondenti al primo capitolo, secondo capitolo, terzo e quarto capitolo.

Nel primo capitolo si intende valutare il concetto di deformazione residua e di stato di zero-stress (stato in cui un campione tessutale non è soggetto a sollecitazioni provenienti dall'esterno o a tensioni interne, ottenuto sezionando radialmente campioni tessutali che si aprono in settori), nonché di discutere le loro possibili implicazioni sulla funzione svolta dall'apparato gastrointestinale e sulla sua fisiopatologia. Al fine di capire quali sono le forze che si sviluppano lungo tale distretto anatomico la cui principale funzione meccanica è quella di far avanzare il cibo ingerito lungo l'apparato stesso grazie a un particolare moto chiamato peristalsi, si rende necessario valutare lo stato tenso-deformativo presente in questi tessuti in riferimento allo stato di zero-stress, ovvero quello stato in cui i tessuti non sono deformati da forze esterne o interne. Valutati inizialmente i metodi utilizzati per la caratterizzazione geometrica dello stato di zero-stress, si passa all'analisi di come si distribuiscono le deformazioni residue che identificano un condotto cilindrico cavo. A conclusione di questa analisi, viene valutata l'influenza a livello fisiologico della presenza di tali deformazioni e tensioni residue in relazione al meccanismo di autoprotezione.

Nel secondo capitolo è stato osservato che nello stato di no-load (cioè quando non agiscono forze esterne sul provino), il campione tessutale permane in una configurazione di equilibrio stabile. Si è voluto quindi verificare quali fossero le condizioni che garantiscono tale equilibrio tenendo conto della presenza di diverse tipologie tessutali. Osservato che le tensioni residue lungo le direzioni assiale e radiale sono trascurabili, si focalizza l'attenzione sulla direzione circonferenziale secondo la quale, nel passaggio da no-load state a zero-stress state, si evidenzia una variazione della conformazione del campione tessutale. Si procede così valutando diversi andamenti per la deformazione residua all'interno delle pareti del condotto tubolare considerando diverse configurazioni con crescente affinità al caso reale, in relazione al numero di strati rappresentati e alla linearità/non linearità del legame costitutivo considerato. A conclusione del capitolo si valuta quale tra gli andamenti discussi meglio descrive quello della deformazione residua in direzione circonferenziale e si procede con l'identificazione dei parametri descrittivi di questo modello.

Nel terzo capitolo si valuta l'influenza delle deformazioni residue sullo stato deformativo che si manifesta al passaggio di un bolo lungo il condotto esofageo e la variazione delle tensioni che si sviluppano lungo lo spessore del tratto considerato. A tal fine ci si riporta a un dominio espresso in coordinate cilindriche così da poter valutare più facilmente l'influenza dello stato di pretensionamento lungo la direzione circonferenziale, avendo supposto trascurabile quello lungo le altre due direzioni. Inizialmente si ipotizza che la parete tessutale del tratto esofageo sia costituita da un unico materiale isotropo. In seguito tali valutazioni vengono estese al caso di una parete composta da due strati isotropi rappresentativi le principali componenti anatomiche del tessuto gastrointestinale.

Analogamente a quanto svolto nel terzo capitolo, nel quarto capitolo continua l'analisi della parete di un segmento esofageo conseguentemente al passaggio di un bolo, dell'influenza delle deformazioni residue sulle tensioni indotte e su come la presenza delle deformazioni residue può influire su tali tensioni. In questa sezione sono stati utilizzati due modelli bitessutali anisotropi fibrorinforzati che rispecchiano in modo più veritiero la struttura del condotto esofageo rispetto alla condizione di isotropia precedentemente ipotizzata.

Capitolo 1

DEFINIZIONE DEL CONCETTO DI DEFORMAZIONE RESIDUA IN RIFERIMENTO ALLO STATO DI ZERO-STRESS E RELATIVE IMPLICAZIONI DELLA SUA PRESENZA A LIVELLO FISILOGICO

1.1 Introduzione

L'obiettivo di questo capitolo è di introdurre e valutare il concetto di deformazione residua e di stato di zero-stress, nonché di discutere le loro implicazioni sulla funzione svolta dall'apparato gastrointestinale e sulla sua fisiopatologia.

La principale funzione meccanica dell'apparato gastrointestinale è quella di far procedere il cibo ingerito lungo l'apparato stesso grazie a un particolare moto chiamato peristalsi, un insieme di contrazioni fisiologiche non controllate dalla volontà, caratteristica degli organi cavi dotati di muscolatura liscia; in particolare, nell'intestino consente la progressione del chimo dal duodeno al retto. Al fine di capire quali sono le forze che si sviluppano lungo tale apparato è necessario valutare lo stato tenso-deformativo presente in questi tessuti in riferimento allo stato di zero-stress in cui non agiscono forze dall'esterno o dall'interno.

Inizialmente è esposto il concetto di deformazione di un tessuto in relazione ad un qualsiasi stato deformativo e allo stato di zero-stress al fine di identificare il problema in questione.

In secondo luogo si è discussa l'importanza di quest'ultimo stato nella valutazione delle deformazioni residue. A tal proposito è stato esposto il tradizionale metodo per la caratterizzazione geometrica dello stato di zero-stress a livello di sezione circolare basato sulla valutazione dell'angolo di apertura (opening angle) e del vettore tangente (tangent vector) nel caso in cui l'angolo di apertura ecceda i 360° , come spesso accade per i settori ricavati dal tratto duodenale che compiono delle torsioni inside-out.

Definito così lo stato di riferimento per valutare le deformazioni residue, è stato valutato in termini matematici e discusso il significato di queste per una sezione circolare e lungo l'asse longitudinale dell'apparato gastrointestinale, in riferimento al tratto intestinale.

È stato dunque osservato come tali deformazioni si distribuiscono lungo la direzione circonferenziale e, data la natura tridimensionale dei tessuti, lungo le direzioni radiale ed assiale. In aggiunta, essendo il tratto gastrointestinale un tessuto non omogeneo, è stato

valutato come il valore di queste deformazioni cambia se ci si riferisce ai singoli tessuti costituenti invece che alla parete intatta. Tali differenze hanno così evidenziato la presenza di tensioni di taglio all'interfaccia tra i vari strati tessutali.

Sulla base di queste differenze, in vari distretti del tratto intestinale è stato successivamente valutato l'effetto della muscolatura, responsabile del moto peristaltico, sugli altri strati tessutali e la sua influenza sia sull'angolo di apertura delle varie sezioni che sulle deformazioni residue presenti nei vari strati.

Infine è stata valutata l'influenza a livello fisiologico della presenza di queste deformazioni e tensioni residue come ad esempio la riduzione della concentrazione delle sollecitazioni che coinvolgono la parete interna del condotto gastrointestinale con una conseguente maggiore protezione contro i danni che potrebbero essere provocati dai frequenti cambiamenti di pressione indotti dalle contrazioni del tessuto muscolare e dal passaggio di un bolo. Alcune di queste teorie sono tuttavia ancora a livello di ipotesi ma potrebbero essere motivo di indagini future.

1.2 Definizione di deformazione residua in relazione allo stato di zero-stress

Nella comune accezione col termine deformazione ci si riferisce a una trasformazione continua e monodroma di un corpo, ovvero priva di fenomeni di frattura o di accumulazione, da una configurazione iniziale indeformata ad una deformata finale. Una forza applicata ad un corpo lungo una certa direzione induce in questo delle deformazioni lungo varie direzioni. Su ogni superficie se tali deformazioni sono perpendicolari alla superficie stessa allora vengono dette deformazioni normali, se invece sono parallele vengono dette deformazioni tangenziali. Per ogni punto di un corpo lo stato deformativo è definito quindi da un tensore costituito da tre deformazioni normali ($\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$) e sei tangenziali (di cui tre indipendenti $1/2 \gamma_{12}, 1/2 \gamma_{13}, 1/2 \gamma_{23}$).

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{1}{2} \gamma_{12} & \frac{1}{2} \gamma_{13} \\ \frac{1}{2} \gamma_{21} & \epsilon_{22} & \frac{1}{2} \gamma_{23} \\ \frac{1}{2} \gamma_{31} & \frac{1}{2} \gamma_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

Le deformazioni possono assumere varie forme ad esempio:

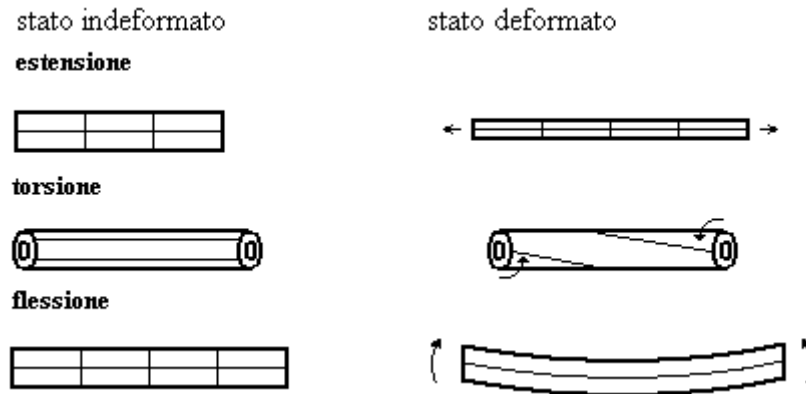


Figura 1.1: Esempi di deformazione causati da forze di estensione, torsione, flessione.

Per definire quantitativamente l'entità di una deformazione, si deve introdurre una misura di deformazione. Preso un corpo deformabile, si possono definire varie misure di deformazione. Per semplicità se consideriamo un tessuto con lunghezza iniziale L_0 e lo sottoponiamo ad una azione di allungamento noteremo che questo raggiunge una lunghezza finale L . Tale variazione di lunghezza può essere descritta da vari parametri adimensionali, ad esempio:

$$\text{rapporto di allungamento: } \lambda = \frac{L}{L_0}$$

$$\text{deformazione di Cauchy: } \varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

$$\text{deformazione di Green: } E = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$$

Il fatto che tali misure siano adimensionali consente un più facile confronto tra campioni provenienti da differenti provini. Nelle precedenti relazioni si nota che le misure sono espresse come frazioni della lunghezza iniziale. Tali deformazioni vengono dunque definite Lagrangiane. Se invece la deformazione viene espressa come frazione della lunghezza finale si ottiene una sua definizione Euleriana. Inoltre, valori negativi di deformazione indicano uno stato di compressione mentre valori positivi indicano uno stato di tensione. Per variazioni infinitesime tali misure sono confrontabili mentre per elongazioni finite conducono a risultati differenti. La deformazione di Cauchy, chiamata anche deformazione ingegneristica, è utile nel caso di elasticità lineare per un ε infinitesimo. Per deformazioni finite la definizione di Green è correlata in modo migliore alla tensione. Si può comunque facilmente notare che una deformazione può facilmente essere convertita in un'altra dalle relazioni:

$$\varepsilon = \lambda - 1 \quad E = \frac{(\varepsilon + 1)^2 - 1}{2}$$

Un tema non ancora menzionato, che però è di fondamentale importanza, è la valutazione dello stato indeformato iniziale, ovvero di L_0 , a cui si riferiscono le misure di deformazione. Tale valutazione è resa difficoltosa da alcuni fattori quali la difficoltà a sopprimere l'attività della muscolatura liscia, la variazione delle tensioni interne lungo la parete tessutale ed il fatto che lo stato di zero-stress può essere solamente determinato quando i tessuti sono tagliati in settori, e ciò è ovviamente possibile soltanto in vitro. In questo stato un tessuto è in tensione quando $\lambda > 1$, mentre si trova in uno stato di compressione quando $\lambda < 1$.

Per stato indeformato iniziale, stato di zero-stress, si intende quello stato in cui i tessuti sono stress-free ovvero non sono soggetti ad alcuna forza sia essa esterna o interna. Fino al 1983 si credeva che un tessuto biologico fosse stress-free quando non vi erano applicate forze esterne (stato in assenza di carico, stato di no-load). In quell'anno Vaishnav-Vossoughi e Fung riportarono indipendentemente che per un vaso sanguigno lo stato di no-load non era pari allo stato di zero-stress. Tale differenza venne dimostrata in un esperimento in cui si osservò come sezioni circolari di un condotto tubolare biologico tagliate radialmente si aprivano ulteriormente in settori (figura 1.2).

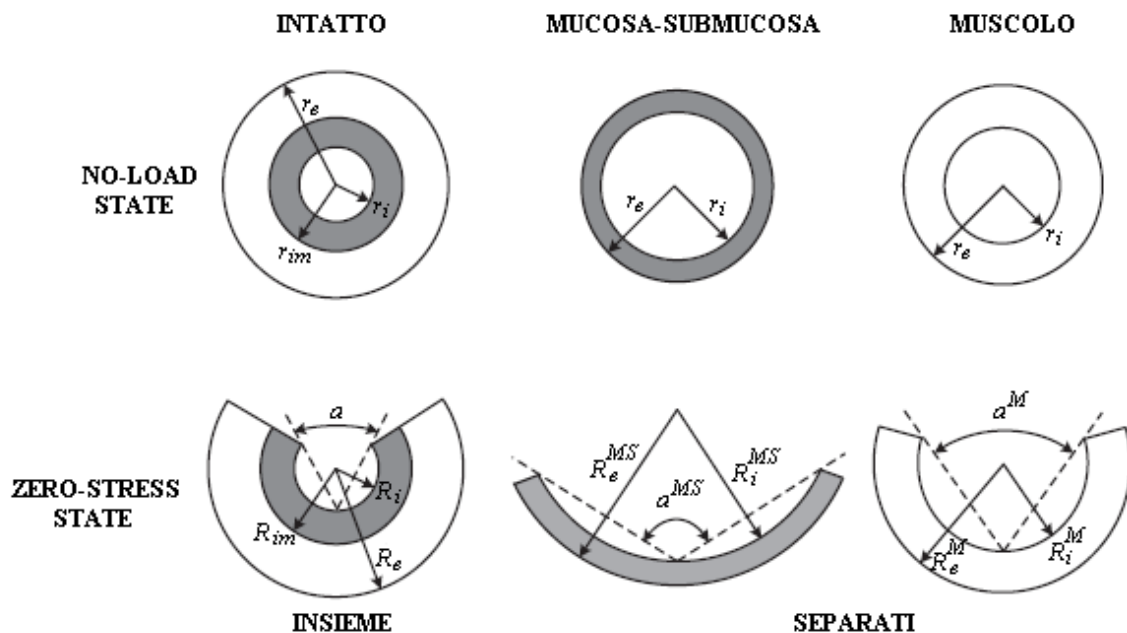


Figura 1.2: Rappresentazione di un tratto tubolare bilayer intatto (stato di no-load) e sezionato (stato di zero-stress) intero e suddiviso nelle sue due componenti, (Sokolis, 2010).

Le differenze in termini di tensione e deformazione tra lo stato di no-load e di zero-stress vengono chiamate tensioni e deformazioni residue (residual stress e residual strain rispettivamente).

I primi dati sulle deformazioni residue nel tratto gastrointestinale sono apparsi in uno studio (Gregersen et al. 1996) in cui veniva evidenziata la sostanziale differenza tra i due stati e la dipendenza dello stato di zero-stress dal rimodellamento tessutale. È stato poi dimostrato che la presenza di deformazioni residue porta a una diminuzione dello stress che si sviluppa nella parte interna dello spessore di un condotto tubolare quando questo è soggetto al passaggio di materia. Se consideriamo lo stato di zero-stress si osserva che in questo stato non vi sono né tensioni né deformazioni agenti sul campione di tessuto. Nello stato di no-load invece, sebbene non vi siano carichi agenti dall'esterno, all'interno del campione biologico è comunque presente uno stato tensoriale non nullo.

Il fatto che il campione sia in equilibrio statico porta a scrivere che:

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma \cdot dr = 0$$

dove per semplicità, supposto il materiale lineare elastico, si ha che $\sigma = E \cdot \varepsilon$ ovvero:

$$\int_{r_i}^{r_e} E \varepsilon \cdot dr = 0$$

La valutazione delle tensioni e deformazioni residue non può dunque essere effettuata se non ci si riconduce allo stato di zero-stress e la determinazione di questo è inoltre la base per valutare le proprietà meccaniche di un materiale.

1.3 Caratterizzazione geometrica di un settore circolare nello stato di zero-stress

Data una sezione di un organo tubolare, al fine di caratterizzarne lo stato di zero-stress si rende necessario sezionare radialmente tale campione in vari settori azzerando così le tensioni e le deformazioni residue. Il metodo tradizionale utilizzato per caratterizzare lo stato di zero-stress si basa sulla misura dell'angolo di apertura, opening angle, α (figura 1.3).

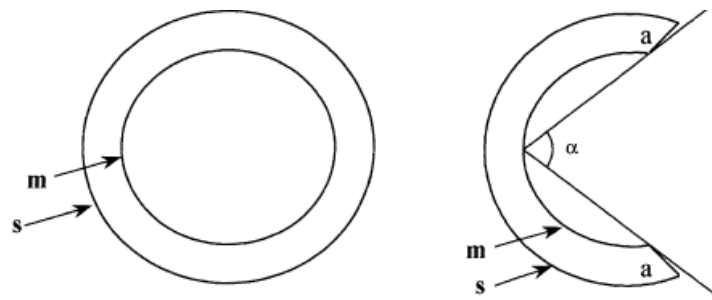


Figura 1.3: Schema di una sezione circolare nello stato di no-load (sinistra) e nello stato di zero-stress (destra) caratterizzato da un angolo di apertura α ; **m** (mucosa) **s** (serosa), (Gregersen 2000).

L'opening angle corrisponde all'angolo sotteso tra due raggi che partono dal punto centrale dell'arco descritto dalla parete interna di un settore tessutale e terminano sulle punte estreme della parete interna stessa. Più precisamente, denotando con s la coordinata curvilinea che descrive la lunghezza del bordo interno si ha osserva come questa vari da un valore iniziale s_0 ad una estremità del campione tessutale, ad un valore finale s_1 all'altra estremità. Il punto centrale da cui partono i raggi per valutare l'opening angle si ha dunque per un valore di s pari a $s_1/2$. A livello pratico però tale misura non è sempre utile in quanto richiede che il provino mantenga una conformazione circolare sia nello stato di no-load che nello stato di zero-stress, condizione che di fatto non è mai verificata in nessuno dei due stati. Inoltre l'opening angle è una mera misura dell'angolo sotteso tra due raggi senza tenere in considerazione la forma delle curve descritte dai provini e senza dare così alcuna informazione sulla curvatura della parete stessa. Definendo ora con θ e θ' gli angoli sottesi tra le tangenti al profilo esterno misurate in corrispondenza delle estremità del settore e la linea congiungente le due estremità stesse, si osserva che il valore medio $(\theta + \theta') / 2$ corrisponde alla media dell'angolo tangenziale. Se il settore è perfettamente circolare si ha che tale valore è uguale all'opening angle, ovvero $(\theta + \theta') / 2 = \alpha$. Un ulteriore problema dell'utilizzo dell'opening angle si ha quando il suo valore eccede i 360° , cioè quando il provino compie una rotazione inside-out (figura 1.4).

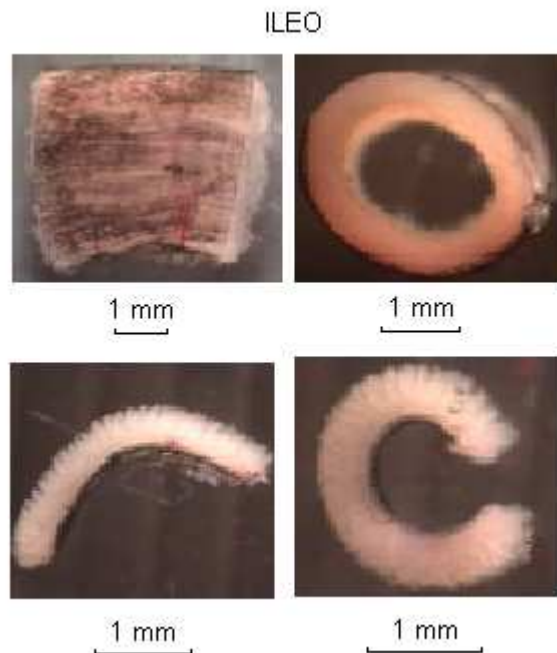


Figura 1.4: Esempio di rotazione inside-out in tratti di ileo, (Y. Dou et al., 2006).

Infatti in alcuni organi, come ad esempio il tratto duodenale dei porcellini d'india, presentano un angolo α maggiore di 360° . In tale tratto si osserva per la maggior parte delle sezioni una rotazione verso l'esterno della mucosa ancor prima di effettuare il primo taglio radiale. Ciò è indicativo della presenza di grandi forze di compressione in questa regione. Al fine di ridurre tali rotazioni si possono comunque prendere sezioni di lunghezza maggiore. Quando l'opening angle assume un valore pari a 360° si osserva che le estremità dei tagli ritornano appaiate dopo una rotazione inside-out del provino. Se invece l'opening angle assume valori superiori è conveniente effettuare ulteriori tagli lungo la circonferenza al fine di caratterizzare correttamente lo stato di zero-stress. Ad esempio, nel tratto duodenale si effettuano dai due ai tre tagli spostandoci verso la parte distale (figura 1.5).



Figura 1.5: Campione di duodeno nello zero-stress state a cui sono stati applicati due tagli radiali. Per anelli sezioni di duodeno distali sono maggiormente indicati invece tre tagli (Gregersen et al. 1997).

Tuttavia, nel caso di tagli multipli è più facile utilizzare l'angolo compiuto dalla rotazione del vettore tangente denotato con ϕ , tangent rotation, (figura 1.6).

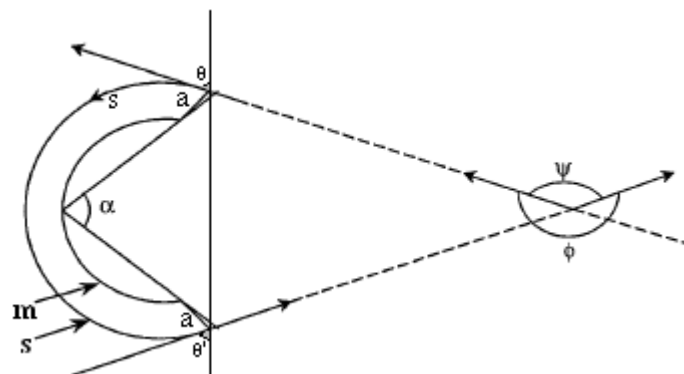


Figura 1.6: Schema dei parametri caratterizzanti lo stato di zero-stress; **m** (mucosa) **s** (serosa), (Gregersen et al. 1997).

Per definire ϕ , si prende un punto fisso sulla superficie esterna del provino come punto zero e si misura la lunghezza del bordo esterno della sezione circolare usando la coordinata curvilinea s lungo il bordo esterno a partire dal punto zero (figura 1.7).

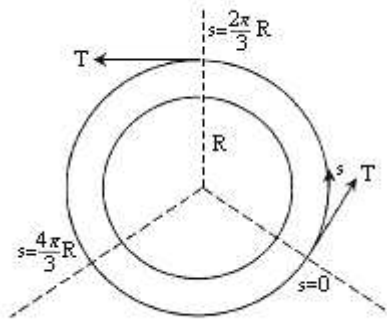


Figura 1.7: Stato di no-load state in cui le linee tratteggiate indicano i tagli radiali per ricondursi allo zero-stress state, (Gregersen et al. 1997).

Denotando inoltre con T il vettore tangente unitario sul bordo esterno si nota come al crescere di s tale vettore ruoti lungo il bordo esterno. Essendo s una coordinata curvilinea di un punto su una curva, nell'ottica di misurare la lunghezza della curva a partire da un punto iniziale, allora l'angolo tra $T(s)$ e $T(0)$ corrisponde all'angolo della tangente tra s e 0 . Calcolando poi la derivata della rotazione $d T(s)/ds$ si ottiene il valore della curvatura; dal punto di vista meccanico tale parametro è più significativo della forma della curva descritta dal provino. Per compiere un giro completo, s deve tornare al punto di partenza mentre T deve compiere una rotazione di 360° . Tagliando radialmente la sezione in più parti al fine di evitare sovrapposizioni della sezione si ottengono settori con un valore dell'angolo tangente ϕ minore di 360° (figura 1.8).

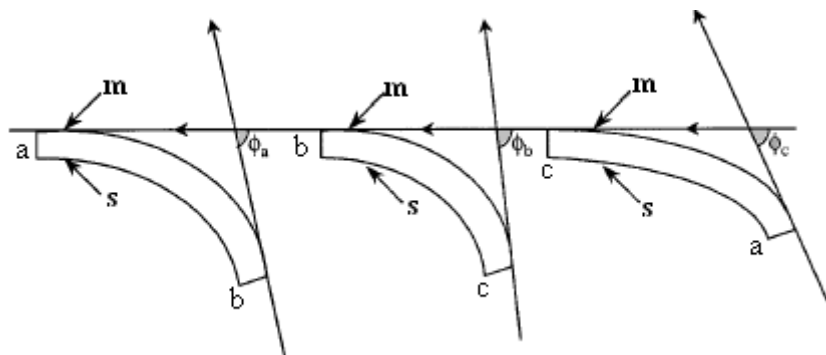


Figura 1.8: Tre pezzi di una sezione tubolare in cui si nota il ripiegamento inside-out: m (mucosa) s (serosa), (Gregersen et al. 1997).

Denotando con ϕ_a ϕ_b ϕ_c gli angoli tangenti nei tre settori si ha che l'angolo totale di rotazione dell'intero provino è pari a $\phi_{tot} = \phi_a + \phi_b + \phi_c$. Il valore ϕ_{tot} è indipendente da dove si effettuano i tagli e non richiede il presupposto di circolarità del provino nello stato di no-load o nello stato di zero-stress.

La geometria di un tratto tubolare qual è l'esofago può essere inoltre caratterizzata dall'angolo ψ compreso tra le due tangenti alle punte esterne del settore (figura 1.6) dove, per supplementarietà, si ha che $\phi = 2\pi - \psi$.

Concludendo sia α che ϕ che ψ sono tre misure in relazione tra loro (figura 1.9) usate per la caratterizzazione dello zero-stress state di un organo tubolare.

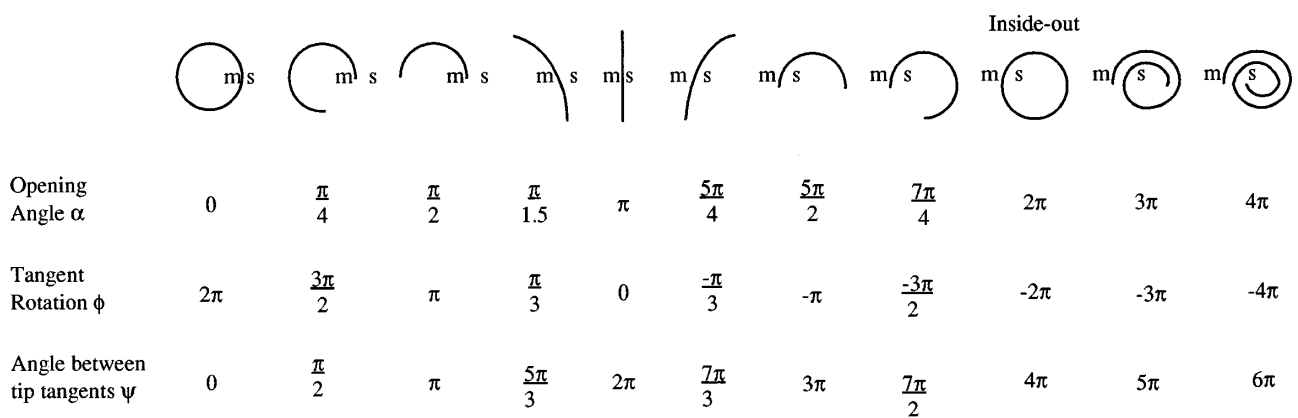


Figura 1.9: Relazione tra gli angoli che caratterizzano lo stato di zero-stress; **m** (mucosa) **s** (serosa), (Gregersen et al. 1997).

1.4 Distribuzione delle deformazioni residue in un organo tubolare

Fin'ora sono state considerate solamente misure angolari ma per valutare lo stato di un campione dal punto di vista meccanico risultano fondamentali anche misure di deformazione. Come precedentemente discusso, una deformazione indica una variazione meccanica della conformazione di un materiale. In riferimento a un organo tubolare deformabile qual è l'apparato gastrointestinale, le deformazioni di maggior interesse sono quelle che si sviluppano lungo la direzione circonferenziale. La deformazione sotto carico che si osserva in vivo nella mucosa e nella serosa deve essere valutata in riferimento alle loro lunghezze circonferenziali nello stato di zero-stress per l'importanza precedentemente descritta. Per un corpo continuo soggetto a deformazioni finite, la deformazione può essere definita in differenti modi in rapporto al gradiente di deformazione. La deformazione di Cauchy ϵ in riferimento allo stato di zero-stress è così definita per la superficie della mucosa (sinistra) e della serosa (destra):

$$\epsilon_i = \frac{C_{i-l} - C_{i-z}}{C_{i-z}} \qquad \epsilon_o = \frac{C_{o-l} - C_{o-z}}{C_{o-z}}$$

dove C è la lunghezza della circonferenza per la mucosa e per la serosa, l indica lo stato di carico, load state, mentre z indica lo stato di zero-stress, i indica la superficie interna (mucosa), o la superficie esterna (serosa). Se si sostituisce al load state (l) lo stato di no-load (n) si ottiene, come precedentemente discusso, il valore della deformazione residua. L'uso della deformazione di Cauchy è particolarmente utile nel caso di elasticità lineare che è valida per valori piccoli di ϵ . Invece, per deformazioni finite si ricorre alla definizione di Green poiché quest'ultima è direttamente correlata dal punto di vista energetico allo stato di tensione. La deformazione di Green per la mucosa e per la serosa è definita nel seguente modo:

$$E_i = \frac{\left(\frac{C_{i-l}}{C_{i-z}}\right)^2 - 1}{2} \qquad E_o = \frac{\left(\frac{C_{o-l}}{C_{o-z}}\right)^2 - 1}{2}$$

Per le deformazioni residue si può inoltre definire il gradiente di deformazione residua (sinistra) e il gradiente di deformazione residua rispetto allo spessore h della parete (destra).

$$E_o - E_i \qquad \frac{E_o - E_i}{h}$$

Come si nota dalla figura seguente (figura 1.10) valori di deformazione negativi sono indice di uno stato di compressione (mucosa) mentre valori positivi indicano uno stato di tensione (serosa).

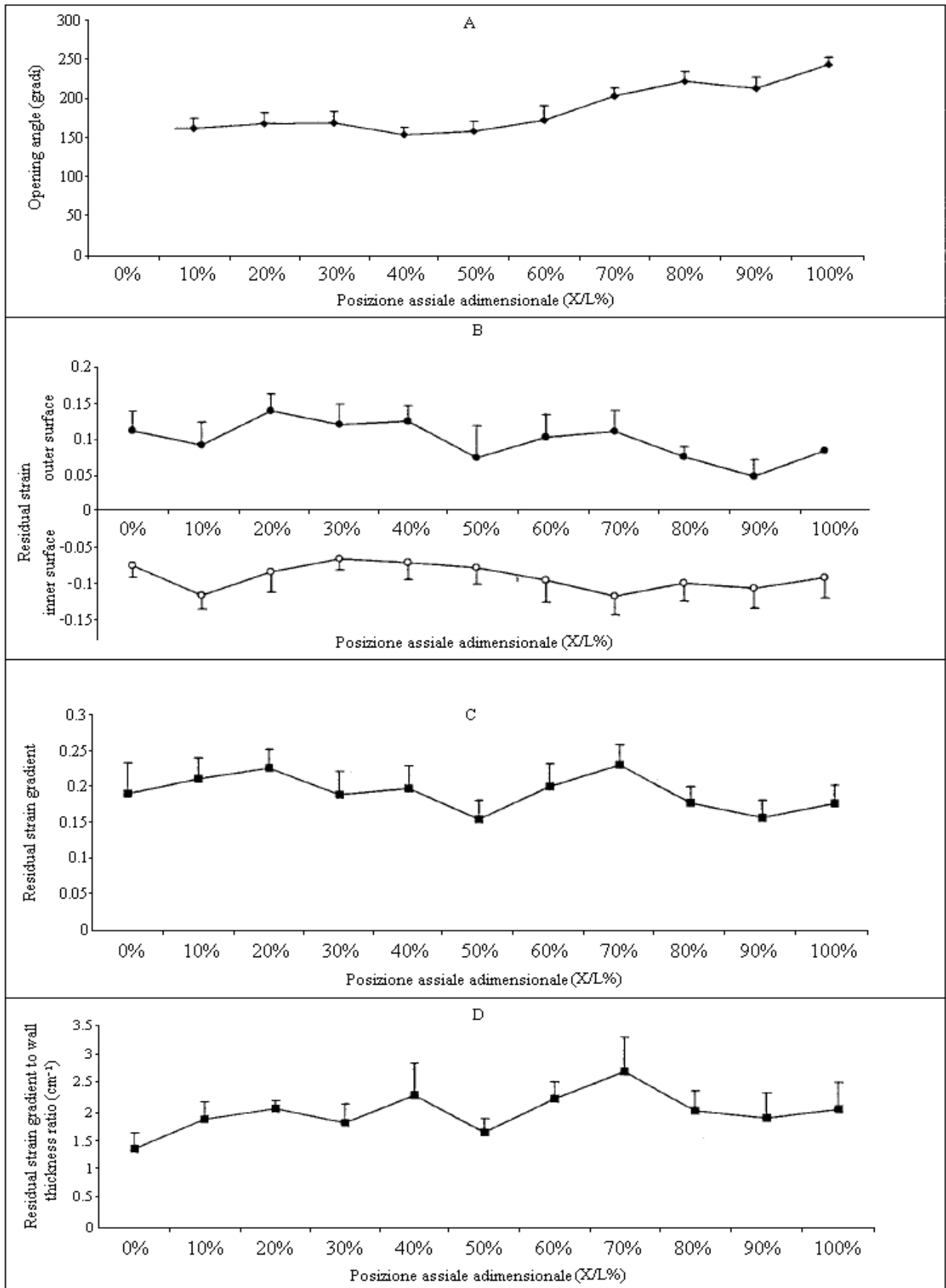


Figura 1.10: Variazione di alcuni parametri in funzione della posizione assiale lungo il duodeno di maiale (Gao et al., 2000).

Fin'ora è stato considerato soltanto un modello monostrato. Tuttavia il tratto gastrointestinale non è classificabile come un tubo omogeneo ma è bensì composto da differenti tessuti ognuno con particolari caratteristiche, come si può vedere dalla struttura dell'esofago dove si riescono a separare con maggiore facilità le componenti che lo costituiscono, mucosa-submucosa e tessuto muscolare, rispetto ad esempio ai vasi sanguigni costituiti da tonaca intima media e adventitia. La separazione degli strati viene fatta attraverso tecniche di microchirurgia al fine di minimizzare i danni ai tessuti (figura 1.11) sia nello stato di no-load che nello stato di zero-stress:

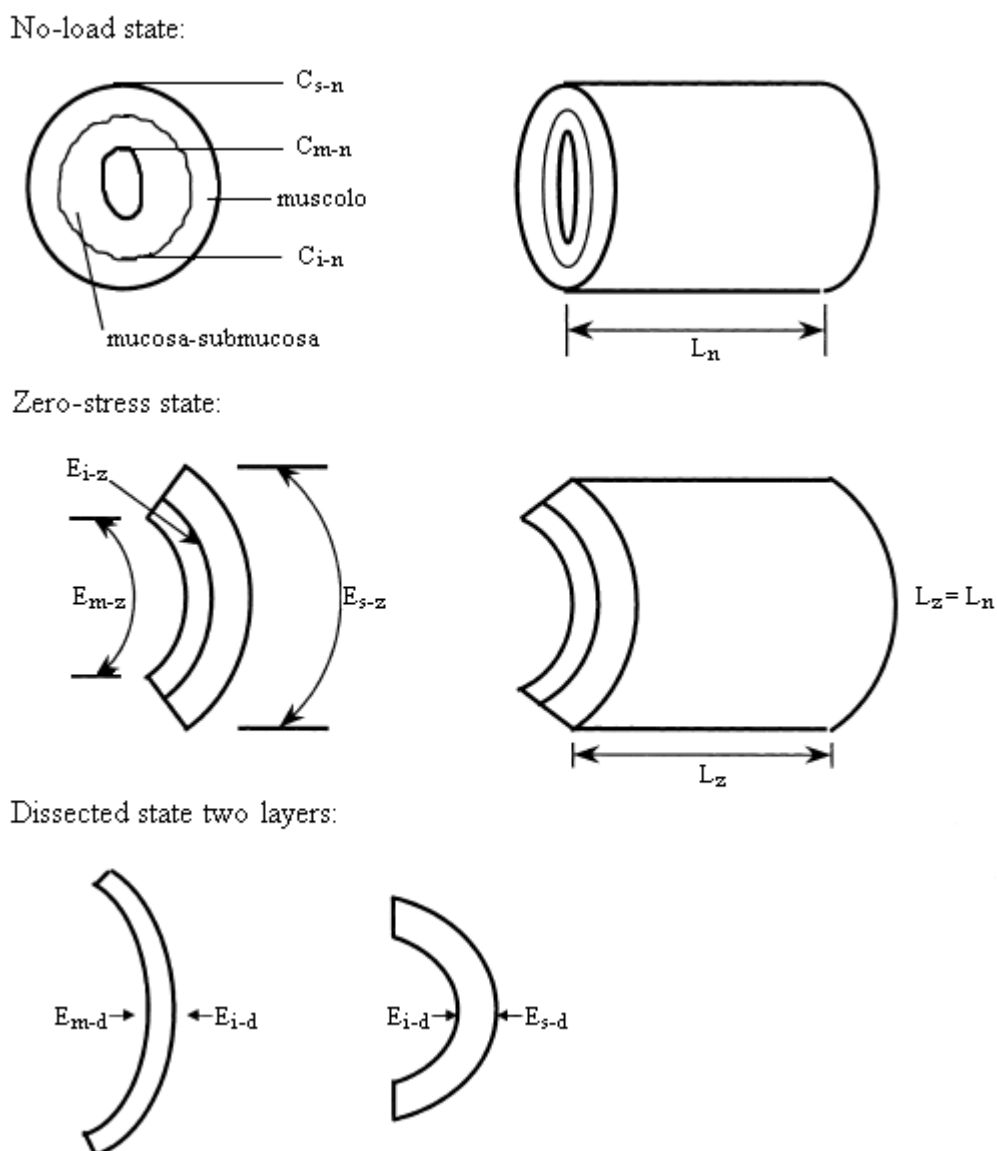


Figura 1.11: Modello bilayer nello stato di no-load, di zero-stress, e separato. Notazioni: circonferenza C , lunghezza dell'arco E , lunghezza assiale L , superficie della mucosa m , interfaccia muscolo-mucosa i , superficie della serosa s , no-load n , zero-stress z , separato d . (Lu et Gregersen, 2001).

È stato poi osservato nei porcellini d'india che separando gli strati che costituiscono l'esofago si ha un aumento dell'opening angle per la mucosa mentre una diminuzione di questo per la componente muscolare. Quindi per semplici settori d'esofago non si ha il vero stato di zero-stress in quanto permangono ancora delle tensioni residue nei vari strati la cui intensità dipende dalla differenza nei valori degli opening angle che si avrebbero se gli strati fossero invece separati tra loro. Si raggiunge così il vero stato di zero-stress solamente separando gli strati che compongono i vari settori delle sezioni tubolari.

Al fine di valutare la distribuzione delle deformazioni residue sono dunque stati condotti alcuni studi. In uno studio di Zhao et al. è stato valutato come si distribuiscono le deformazioni residue lungo lo spessore della parte centrale dell'esofago di maiale secondo un modello a tre strati: mucosa e submucosa, muscolatura interna, muscolatura esterna. È stato notato che in riferimento allo stato di zero-stress dei settori intatti, ovvero in cui i tre strati componenti la parete sono uniti tra loro, la deformazione residua che si osserva negli anelli intatti varia dallo strato interno a quello esterno in un range di -0.13 ± 0.04 e 0.31 ± 0.02 . Invece, in riferimento allo stato di zero-stress dei settori tripartiti nelle tre componenti descritte precedentemente, la deformazione residua che si osserva rispetto agli anelli intatti vale nello strato interno -0.22 ± 0.02 mentre in quello esterno vale 0.07 ± 0.02 . In riferimento a questo stato la distribuzione delle deformazioni residue nei differenti strati della sezione intatta mostra che nella superficie interna tale deformazione residua è negativa per la mucosa e per la muscolatura interna mentre è positiva per la muscolatura esterna, invece per la superficie esterna è negativa soltanto per lo strato costituito da mucosa e submucosa. Riferendosi invece nello stato di no load ad anelli tessutali costituiti dai soli strati separati si osserva un andamento più omogeneo della deformazione residua calcolata, come nel caso precedente, rispetto allo stato di zero-stress dei settori tripartiti nelle loro tre componenti. Quest'ultime deformazioni residue variano tutte da un valore negativo per la superficie interna a uno positivo per quella esterna (figura 1.12).

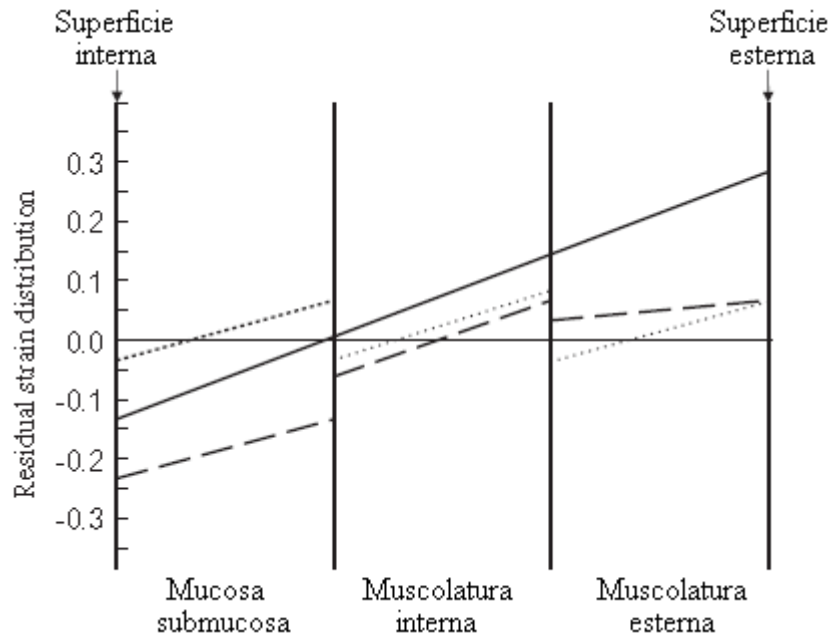


Figura 1.12: Distribuzione delle deformazioni residue: (linea continua) della parete intera in riferimento allo zero-stress state della parete intera; (linea tratteggiata) della parete intera in riferimento a un corrispettivo strato di parete; (linea puntini) degli strati della parete separati tra loro in riferimento a un corrispettivo strato di parete (Zhao et al., 2007).

Da questo studio si è notato come sia differente valutare la distribuzione delle deformazioni residue se ci si riferisce allo stato di zero-stress della parete intera o dei singoli strati a causa della differenza nell'opening angle degli strati stessi e come tali deformazioni siano più uniformi se si considerano separatamente i vari strati. È inoltre evidente che la distribuzione delle deformazioni residue è discontinua all'interfaccia tra i vari strati lasciando dunque ipotizzare la presenza di forze di taglio presenti in queste regioni. Ciò spiega il perché l'esofago non è classificabile come un materiale omogeneo.

Oltre alla presenza di deformazioni residue lungo la direzione circonferenziale, a causa della natura tridimensionale dell'apparato gastrointestinale risulta evidente la presenza di deformazioni e tensioni residue anche lungo le direzioni radiale e longitudinale.

Deformazioni residue lungo la direzione radiale possono essere valutate inserendo dei markers trasversalmente alla sezione del tratto gastrointestinale nello stato di no-load. L'osservazione dello spostamento di questi markers in seguito a tagli radiali della sezione, effettuati per ricondursi allo stato di zero-stress, ci consentirà di valutare la distribuzione delle deformazioni residue lungo lo spessore della parete. Tale processo è reso però difficile dalle irregolarità della parete.

Per quanto riguarda invece la valutazione delle deformazioni residue lungo la direzione longitudinale si può ricorrere alla stessa procedura usata per la sezione circonferenziale anche

se in questa situazione non è così intuitiva la definizione dell'opening angle. In questo caso si utilizza di fatto il bending angle, angolo di curvatura, misurato in gradi per unità di lunghezza e positivo per piegamenti verso l'esterno. In uno studio (Dou et al. 2006) è stato valutato come variano le deformazioni residue lungo la direzione assiale in relazione alla posizione lungo la circonferenza nel duodeno. Sono stati effettuati così diversi tagli longitudinali al fine di ottenere i seguenti settori: m mesentere, a_1 a_2 regioni vicine al mesentere, b_1 b_2 regioni vicine al alto opposto al mesentere, c_1 c_2 lato opposto al mesentere (figura 1.13):

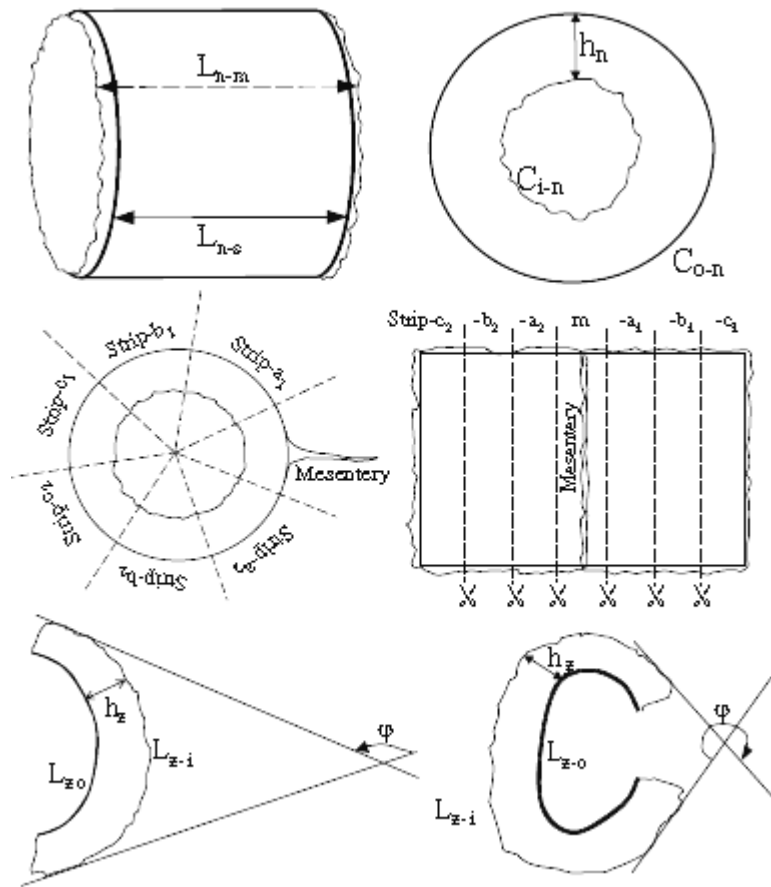


Figura 1.13: Lunghezza della mucosa L_m e della serosa L_s nello stato di no-load n ; spessore della parete h , circonferenza C , parete interna i (mucosa), parete esterna o (serosa) nello stato di zero-stress z , bending angle φ .

Con l'utilizzo delle formule seguenti sono stati ricavati i valori del bending angle per unità di lunghezza (sinistra) e le deformazioni residue di Green lungo la direzione longitudinale per la mucosa (centro) e per la serosa (destra):

$$\varphi(^{\circ}mm^{-1}) = \frac{\varphi}{(L_{i-n} + L_{o-n})/2} \quad E_i = \frac{(L_{i-n}/L_{i-z})^2 - 1}{2} \quad E_o = \frac{(L_{o-n}/L_{o-z})^2 - 1}{2}$$

Nel grafico seguente vengono riassunti i risultati delle suddette relazioni nelle varie regioni (figura 1.14):

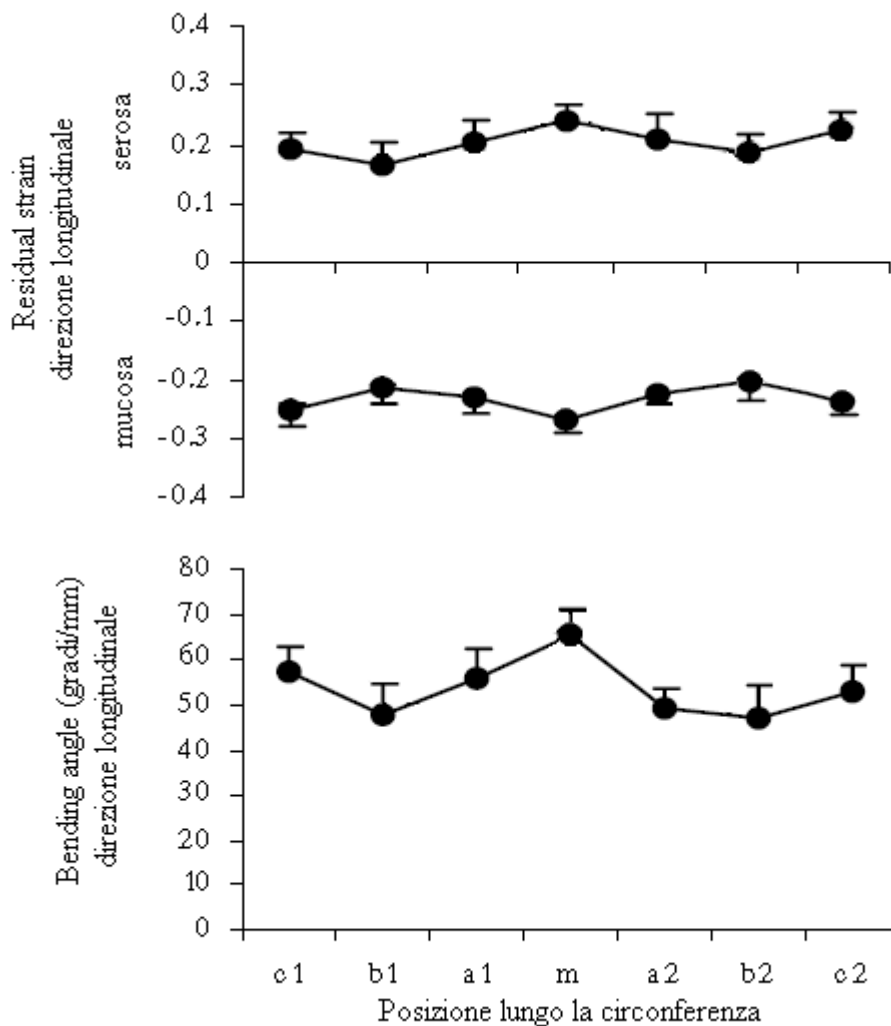


Figura 1.14: Valori della deformazione longitudinale residua e del bending angle in funzione della posizione (m, a, b, c) lungo la circonferenza della sezione tubolare.

Come nel caso circonferenziale, anche in questo studio si evidenzia la presenza di deformazioni residue negative nella mucosa, indice di compressione nello stato di no-load, mentre risultano positive nella serosa, indice di uno stato di tensione. La presenza di pretensionamento in un organo cavo sottolinea la caratteristica di autoprotezione con conseguente riduzione del rischio di danno per questo tessuto. Questo meccanismo di protezione è infatti fondamentale lungo la direzione assiale in quanto la parete intestinale è soggetta ad una trazione lungo questa direzione durante il passaggio del materiale proveniente dallo stomaco.

1.5 Effetti della muscolatura liscia sull'angolo di apertura e sulle deformazioni residue

Un ruolo importante è svolto dalla muscolatura liscia (SM) che influenza le proprietà biomeccaniche del condotto gastrointestinale. In uno studio (Li et al. 2008) è stato valutato l'effetto di questa analizzando la morfometria e le proprietà biomeccaniche di sezioni circolari con spessore di 1 mm provenienti da duodeno, digiuno ed ileo di topo e di settori ricavati da tagli radiali di tali sezioni.

Per le sezioni intestinali è stato osservato (tabella) che a livello della mucosa è presente uno stato di compressione mentre a livello della serosa uno stato di tensione, sia in presenza che assenza della muscolatura liscia.

Deformazioni residue	Sezioni con SM	Sezioni senza SM
Mucosa:		
Duodeno	-0.41+0.03	-0.41+0.02
Digiuno	-0.19+0.03	-0.21+0.03
Ileo	-0.19+0.04	-0.26+0.03
Serosa:		
Duodeno	0.20+0.07	0.25+0.07
Digiuno	0.12+0.05	0.15+0.05
Ileo	0.16+0.06	0.15+0.06

A livello dei settori delle sezioni intestinali è stato invece osservato come varia l'angolo di apertura essendo questo, come precedentemente descritto, il modo più conveniente per valutare le deformazioni residue (figura 1.15).

Angolo apertura	duodeno	digiuno	ileo
Senza SM	273±13°	67±9°	140±23°
Con SM	153±25°	39±7°	85±16°

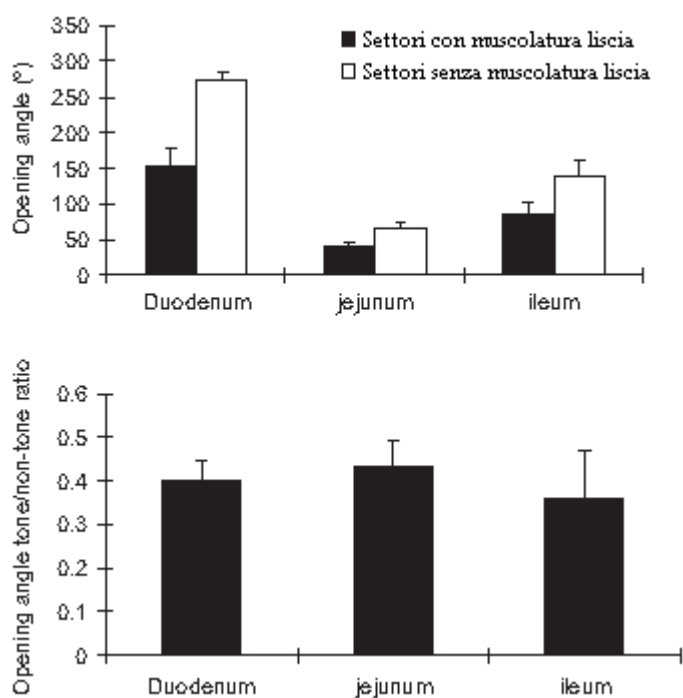


Figura 1.15: Valutazione dell'opening angle e del rapporto degli opening angle in settori con e senza lo strato di muscolatura liscia (Li et al., 2008).

Tali deformazioni residue mostrano ancora come sia presente uno stato di compressione a livello della mucosa e di tensione a livello della serosa (tabella).

Deformazioni residue	Sezioni con SM	Sezioni senza SM
Mucosa:		
Duodeno	-0.1+0.04	0
Digiuno	-0.08+0.02	0
Ileo	-0.03+0.04	0
Serosa:		
Duodeno	0.09+0.03	0
Digiuno	0.03+0.02	0
Ileo	0.06+0.04	0

Il fatto che l'angolo di apertura aumenti in caso di rimozione della muscolatura liscia è la conseguenza attesa del rilassamento delle tensioni attive presenti indotte dalla muscolatura stessa. Infatti, in riferimento al loro stato di zero stress, il 3-9% della tensione residua della serosa e il 3-11% della compressione residua della mucosa sono dovute alla presenza di tale muscolatura liscia. La presenza della muscolatura liscia quindi influisce proporzionalmente sull'angolo di apertura delle varie sezioni e sulle deformazioni residue nei vari strati tissutali presenti con effetti differenti.

1.6 Implicazioni delle deformazioni residue a livello fisiologico

L'utilizzo dello stato di zero-stress come stato di riferimento ha permesso di trovare un riscontro a livello fisiologico della presenza di deformazioni residue all'interno di alcuni tessuti (Gregersen et al. 2000 e Zhao et al. 2002). Alcune di queste teorie mirate a discutere tali implicazioni sono però ancora a livello di ipotesi. In questi studi è stata riscontrata una grande variazione dei parametri morfometrici lungo la direzione assiale del tratto intestinale, ad esempio la lunghezza della circonferenza esterna e il lume del condotto subiscono un incremento muovendoci dalla regione prossimale a quella distale mentre lo spessore della parete subisce un restringimento. Effettuando dei tagli radiali è stato inoltre osservato che le sezioni della parte prossimale dell'intestino subiscono una rotazione inside-out con valori conseguentemente più grandi di opening angle e deformazioni residue rispetto a quelli che si osservano nel digiuno e nell'ileo. Da un punto di vista meccanico la presenza di tali deformazioni residue è un modo naturale per resistere alle pressioni che si sviluppano lungo tutto il condotto gastrointestinale. Inoltre se si effettuano tagli radiali di queste sezioni, riconducendosi così da uno stato di no-load allo stato di zero-stress, si osserva che queste sezioni si aprono in settori. Ciò implica, come precedentemente discusso, che lo strato muscolare è soggetto ad uno stato di tensione mentre la mucosa a uno stato di compressione che, come visto per l'intestino spostandoci dal duodeno all'ileo, varia lungo la direzione assiale.

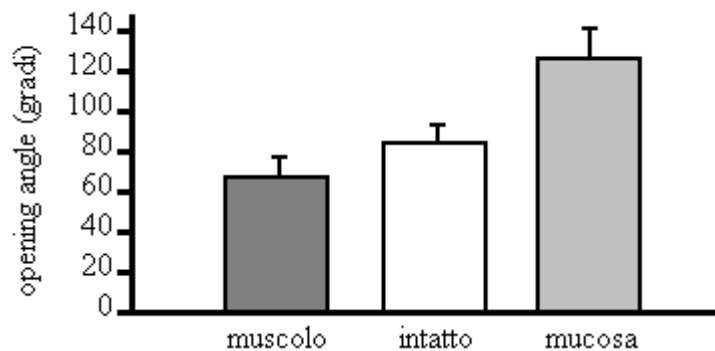


Figura 1.16: Valori dell'angolo di apertura per l'esofago di porcellini d'india nel caso di settori di tessuto i cui strati non sono stati separati (intatto) e per i soli singoli strati (Gregersen et al., 1999).

È stato poi ipotizzato che la tensione residua all'interno della fascia muscolare porti questa a una lunghezza migliore per la contrazione muscolare stessa in fase peristaltica (Appendice A) ed in seguito è stato dimostrato che lo stress residuo riduce la concentrazione delle sollecitazioni che coinvolgono la parete interna del condotto gastrointestinale nello stato omeostatico e di no-load.

Dal momento che si osserva una stretta interazione tra le pareti del condotto gastrointestinale e un bolo che scorre in esso, la presenza delle deformazioni residue influisce sicuramente sullo scorrimento del bolo stesso. Di fatti, a causa dell'esistenza di queste deformazioni residue la mucosa è inevitabilmente soggetta a uno stato di compressione mentre il tessuto muscolare, passivo in condizioni normali in quanto la prima peristalsi non avviene frequentemente, è soggetto a uno stato di tensione. Per quanto concerne la compressione della mucosa lungo il tratto gastrointestinale ed in particolar modo nel tratto duodenale si è ipotizzato che questa ne favorisca una maggiore protezione da danni che potrebbero essere provocati dai frequenti cambiamenti di pressione indotti dalle contrazioni peristaltiche del tessuto muscolare durante il passaggio di materiale ingerito o espulso dallo stomaco. Relativamente all'esofago, la compressione della mucosa è molto importante ai fini di prevenire ad esempio il fenomeno del reflusso, fenomeno associato infatti a uno stato infiammatorio di questo tessuto. Una gran pressione alla base dell'esofago in corrispondenza del cardias e la peristalsi secondaria sono conosciute come i meccanismi di base per prevenire tale disturbo. Le tensioni residue che si sviluppano causano dunque la ostruzione del lume alla base dell'esofago ad opera della mucosa, in quanto la mucosa compressa in direzione circonferenziale subisce una dilatazione lungo la direzione radiale, prevenendo così che questo fenomeno avvenga.

Relativamente al tessuto intestinale è noto invece che la mucosa, in particolar modo nell'intestino tenue, è soggetta ad un rapido turnover. Si sta dunque attualmente valutando se sia la rapida crescita e turnover della superficie della mucosa a causare questo stato di compressione con il conseguente sviluppo di tensioni residue oppure se vi siano proprio queste tensioni residue alla base dei fenomeni di rimodellamento tessutale essendo proprio lo stress meccanico un importante fattore per la regolazione dell'espressione genica e della crescita tessutale.

Teoricamente è stato inoltre supposto che l'assorbimento del contenuto presente nel lume intestinale può essere influenzato anch'esso dalla compressione residua della mucosa. È infatti nota sia la presenza di un gradiente lungo l'altezza dei villi nella mucosa dell'intestino tenue che la dipendenza dell'assorbimento intestinale dalla pressione presente nel lume. Pertanto si può ipotizzare la presenza di una certa correlazione tra il gradiente della deformazione residua e il gradiente che si sviluppa lungo l'altezza dei villi. Tale aspetto però è ancora da verificare.

Infine un'altra importante funzione è svolta dai meccanocettori presenti nella parete del tratto gastrointestinale. Questi sono la parte terminale di nervi afferenti che rispondono a precisi stimoli e trasmettono impulsi al cervello riguardanti la percezione di eventi nella regione viscerale, quali nausea, fame, dolore, attraverso le vie vagale e spinale. Questi recettori presentano soglie a diversi livelli di intensità e sono situati in diverse posizioni sia della submucosa che della muscolatura. Si è quindi portati a pensare che le differenti popolazioni di recettori presenti nella parete rispondano in modo differente a uno stesso stimolo grazie alla diversa intensità delle tensioni e deformazioni che si osservano all'interno della parete tessutale sia durante la distensione del tratto gastrointestinale che durante la contrazione della muscolatura. Dal momento che ad esempio il duodeno è essenzialmente un tubo di fibre muscolari, alterazioni dell'attività delle cellule della muscolatura liscia causate da fattori agenti direttamente sulla muscolatura stessa o sul sistema nervoso porterebbero a una variazione dello stato di zero-stress di questo tessuto.

Effetti provocati da questi fattori sull'esofago e sul duodeno come anche gli interessanti aspetti sopra descritti sulle funzioni svolte dall'intestino tenue potrebbero essere motivo di indagini future tenendo ora in considerazione dell'importanza della presenza di queste deformazioni residue.

Capitolo 2

VERIFICA DELLA COMPATIBILITÀ STATICA DEL PROFILO DELLE DEFORMAZIONI RESIDUE, IN CONSIDERAZIONE DELLA PRESENZA DI DIFFERENTI TIPOLOGIE TESSUTALI

2.1 Introduzione

L'obiettivo delle analisi condotte in questo capitolo è di valutare quali sono le condizioni che garantiscano la compatibilità statica del profilo delle deformazioni residue presenti lungo le pareti di un organo cavo tenendo conto della presenza di diverse tipologie tessutali quali la mucosa-submucosa e gli strati muscolari. In molte specie viventi e in determinate condizioni sperimentali non è di fatto possibile valutare la lunghezza della circonferenza dei campioni tessutali da analizzare in quanto nel no-load state questi, come visto precedentemente, compiono delle torsioni inside-out. Comunque i dati finora ricavati sono tuttavia sufficienti per stimare le deformazioni residue nella mucosa e nella serosa sotto l'assunzione però che le sezioni trasversali ottenute dai campioni siano lineari ed elastiche. Questa assunzione potrebbe risultare a volte troppo restrittiva e dunque le stime così ottenute sono da ritenersi valide in prima approssimazione finché non si ricavano dati sperimentali più dettagliati. Nello stato di no-load l'equazione di equilibrio in termini di tensioni lungo la direzione circonferenziale è data dall'equazione:

$$\int_{r_i}^{r_o} \sigma \, dr = 0$$

Tale integrale rappresenta la tensione circonferenziale all'interno della parete del campione tessutale che per la legge di Laplace è nulla quando la pressione transmurale è anch'essa nulla (Appendice B). Se poi il materiale è come ipotizzato lineare elastico allora, secondo la formula $\sigma = E \varepsilon$, l'integrale allora diventa:

$$\int_{r_i}^{r_o} E \varepsilon \, dr = 0$$

A questo punto, sono stati valutati differenti andamenti per la deformazione residua all'interno delle pareti del condotto tubolare. Si è partiti dal semplice caso di una parete costituita da un materiale elastico lineare con andamento della deformazione residua lineare.

Sempre restando nel campo lineare delle deformazioni residue, è stata poi ipotizzata la presenza nelle pareti di due differenti tessuti elastici lineari con differenti moduli di rigidezza. Valutate così le relazioni tra le deformazioni residue tali da verificare la condizione di equilibrio per andamenti lineari di queste, è stato in seguito supposto che il loro andamento seguisse una legge non lineare; dapprima per il caso di una parete costituita da un solo materiale, poi, come era stato precedentemente valutato per il caso lineare, per una parete composta da due differenti tessuti. Infine è stato ipotizzato che il materiale costituente la parete del condotto tubolare seguisse invece una legge iperelastica definita dalla relazione seguente:

$$\sigma = C \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

dove l'andamento dell'allungamento λ viene descritto da una legge lineare del tipo: $\lambda = \alpha \cdot r + \beta$. Anche per questo caso è stata imposta la condizione di equilibrio in un campione composto sia da uno che da due tessuti differenti potendo così esprimere il coefficiente angolare α in funzione degli altri parametri. Attribuendo dunque dei valori agli altri parametri, si può così ricavare qual è il valore di α che soddisfa la condizione di equilibrio. A tale risultato si può giungere come mostrato o per via grafica o per via numerica attraverso l'uso di funzioni come "solve" presente in Matlab.

A conclusione del capitolo è stato poi valutato quale tra gli andamenti sopra elencati potesse meglio descrivere l'andamento della deformazione residua λ trovata in letteratura ed ottenuta per via sperimentale da test condotti su esofagi di coniglio (Sokolis 2010). Valutato visivamente l'andamento migliore per descrivere questi dati, si è inizialmente valutata la condizione che lega i parametri descrittivi al fine di rispettare la condizione di equilibrio delle tensioni ed in seguito, sotto questa condizione, si è passati alla identificazione di questi parametri attraverso la minimizzazione di una funzione costo che valuta lo scarto quadratico dei dati del modello rispetto ai dati sperimentali.

2.2 Un materiale elastico lineare con profilo di deformazione residua lineare

Consideriamo ora un tratto di condotto gastrointestinale come in figura 2.1.

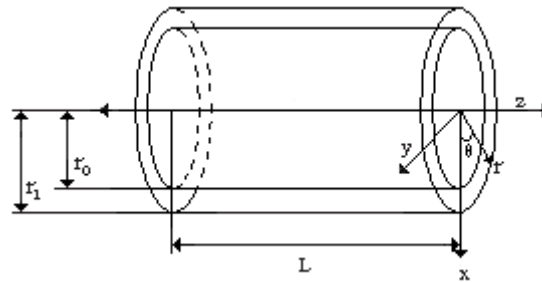


Figura 2.1: Sezione monostrato di un tratto del condotto gastrointestinale.

Nello stato di no-load, stato in cui non agiscono forze dall'esterno sul provino, si osserva che il campione tessutale è in una configurazione di equilibrio stabile. Perché tale configurazione di stabilità statica permanga nel tempo si deve verificare che non vi siano tensioni residue agenti nel condotto tubolare o che la somma di eventuali tensioni residue presenti sia nulla. Tale condizione di equilibrio nello stato di no-load ci consente di ipotizzare che le tensioni residue lungo la direzione assiale e radiale siano nulle ovvero:

$$\sigma_z = 0 \text{ e } \sigma_r = 0$$

da cui si ha che:

$$\varepsilon_z = 0 \text{ e } \varepsilon_r = 0$$

Per quanto riguarda invece la direzione circonferenziale, osservando che nel passaggio da no-load state a zero-stress state si ha una variazione della conformazione del campione tessutale, è lecito supporre allora la presenza di tensioni residue $\sigma_\theta \neq 0$ da cui:

$$\varepsilon_\theta \neq 0$$

Supponendo che il campione sia composto da un solo materiale elastico lineare, dove $\sigma_\theta = E\varepsilon_\theta$, si deve allora valutare qual è la relazione tra le deformazioni residue che verifichi la condizione di equilibrio:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_\theta dr = 0$$

ovvero:

$$E \int_{r_0}^{r_1} \varepsilon_\theta dr = 0$$

che da la soluzione banale, esclusa a priori, $\varepsilon_\theta = 0$.

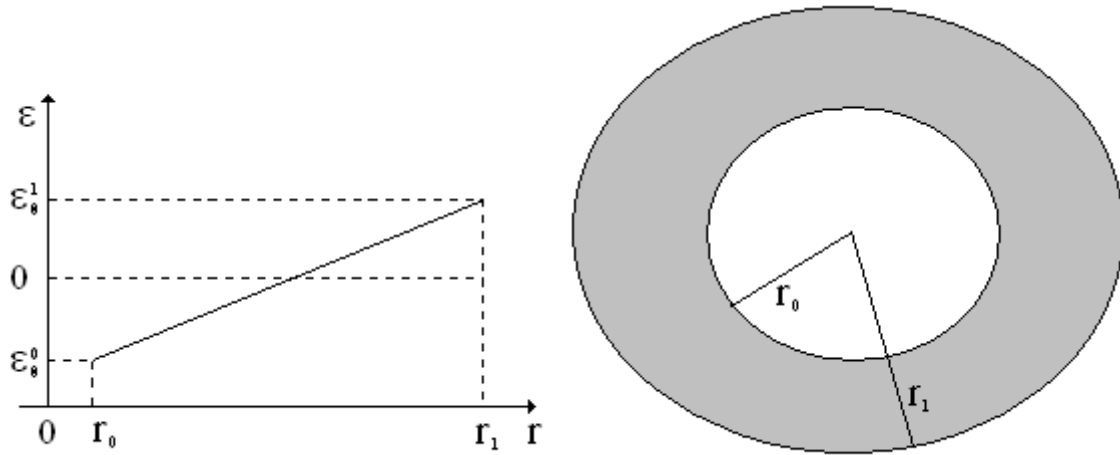


Figura 2.2: Schema dell'andamento lineare della deformazione lungo lo spessore di un campione tessutale (sinistra), e della sezione circolare composta da un solo materiale (destra).

Avendo supposto il materiale elastico lineare (figura 2.2) possiamo allora esprimere ε_θ nel seguente modo:

$$\varepsilon_\theta = \left(\frac{\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0}{r_1 - r_0} \right) r + \left(\varepsilon_\theta^0 - \frac{\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0}{r_1 - r_0} r_0 \right)$$

dove si indica con r_0 il raggio interno, r_1 il raggio esterno, ε_θ^0 il valore della deformazione residua sul raggio interno e ε_θ^1 il valore della deformazione residua sul raggio esterno.

Sviluppando ora l'integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{r_1} \varepsilon_\theta dr &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0}{r_1 - r_0} \right) r^2 \right]_{r_0}^{r_1} + \left[\left(\varepsilon_\theta^0 - \frac{\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0}{r_1 - r_0} r_0 \right) r \right]_{r_0}^{r_1} \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0) (r_1 + r_0) + \varepsilon_\theta^0 (r_1 - r_0) - (\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0) r_0 \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_\theta^1 - \varepsilon_\theta^0) (r_1 - r_0) + \varepsilon_\theta^0 (r_1 - r_0) \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon_\theta^1 + \varepsilon_\theta^0) (r_1 - r_0) \end{aligned}$$

da cui si nota che tale relazione soddisfa la condizione di equilibrio statico se $\varepsilon_\theta^1 = -\varepsilon_\theta^0$.

2.3 Due materiali elastici lineari con profilo di deformazione residua lineare

Se invece il campione è costituito da due materiali (mucosa-submucosa e muscolo) elastici lineari le cui relazioni tenso-deformative lungo la direzione circonferenziale, avendo supposto nulle le tensioni residue lungo la direzione assiale e radiale, sono descritte dalle equazioni:

$$\sigma_{\theta-1} = E_1 \varepsilon_{\theta-1} \quad \sigma_{\theta-2} = E_2 \varepsilon_{\theta-2},$$

ed il cui andamento della deformazione residua, come si può notare dalla figura 2.3, è lineare,

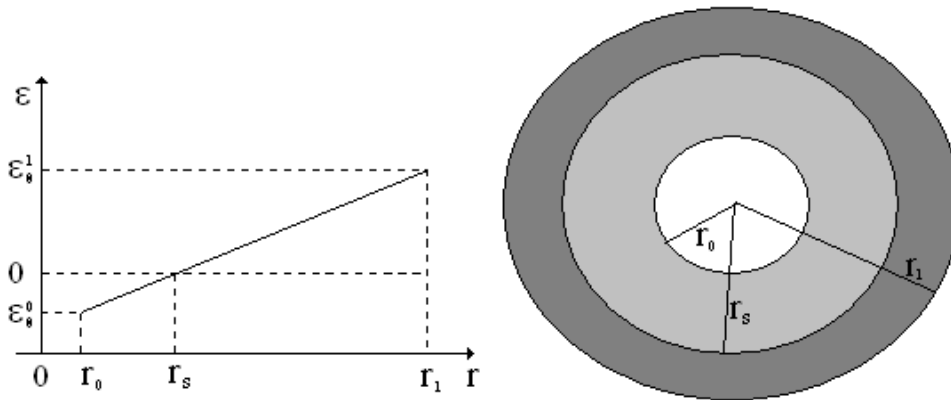


Figura 2.3: Schema dell'andamento lineare della deformazione lungo lo spessore di un campione tessutale (sinistra), e della sezione circolare composta da due materiali (destra).

dove si indica con r_0 il raggio interno, r_1 il raggio esterno, r_s il raggio della interfaccia tra i due materiali, ε_0^0 il valore della deformazione residua sul raggio interno, ε_0^1 il valore della deformazione residua sul raggio esterno e ε_0^s il valore della deformazione residua all'interfaccia, affinché la condizione di equilibrio sia verificata allora deve valere la relazione:

$$\int_{r_0}^{r_s} \sigma_{\theta-1} dr + \int_{r_s}^{r_1} \sigma_{\theta-2} dr = 0$$

ovvero:

$$E_1 \int_{r_0}^{r_s} \varepsilon_{\theta-1} dr + E_2 \int_{r_s}^{r_1} \varepsilon_{\theta-2} dr = 0$$

Dette ora:

$$\varepsilon_{\theta-1} = \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^s - \varepsilon_{\theta}^0}{r_s - r_0} \right) r + \left(\varepsilon_{\theta}^0 - \frac{\varepsilon_{\theta}^s - \varepsilon_{\theta}^0}{r_s - r_0} r_0 \right) ; \quad \varepsilon_{\theta-2} = \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^1 - \varepsilon_{\theta}^s}{r_1 - r_s} \right) r + \left(\varepsilon_{\theta}^s - \frac{\varepsilon_{\theta}^1 - \varepsilon_{\theta}^s}{r_1 - r_s} r_s \right)$$

dallo sviluppo degli integrali si ottiene:

$$E_1 (\varepsilon_{\theta}^s + \varepsilon_{\theta}^0) (r_s - r_0) + E_2 (\varepsilon_{\theta}^1 + \varepsilon_{\theta}^s) (r_1 - r_s) = 0$$

da cui, posto $\varepsilon_{\theta}^s = 0$, si ottiene la relazione tra ε_{θ}^1 ed ε_{θ}^0 , ovvero:

$$\varepsilon_{\theta}^0 = -\varepsilon_{\theta}^1 \frac{E_2 (r_1 - r_s)}{E_1 (r_s - r_0)}$$

2.4 Un materiale elastico lineare con profilo di deformazione residua non lineare

Passando da una legge lineare ad una non lineare per descrivere l'andamento delle deformazioni residue lungo la sezione circolare di un campione tessutale, si valuta inizialmente il caso di un provino composto ipoteticamente da un solo materiale. La relazione tensione-deformazione resta sempre $\sigma_{\theta} = E \varepsilon_{\theta}$, ciò che cambia è invece la legge di ε_{θ} .

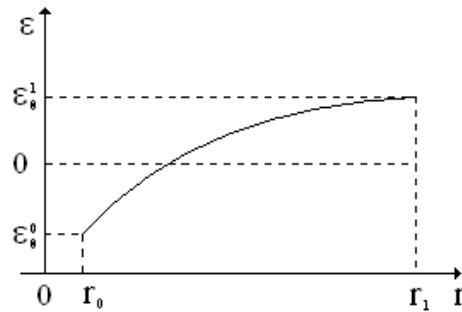


Figura 2.4: Schema dell'andamento non lineare della deformazione lungo lo spessore di un campione tessutale composto da un materiale.

Supponendo che la deformazione circonferenziale residua ε_{θ} sia descritta da una legge cubica del genere ax^3+b (figura 2.4) che ci consente di avere un andamento non lineare con concavità rivolta verso il basso, si ha che:

$$\varepsilon_{\theta} = \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} \right) r^3 + \left(\varepsilon_{\theta}^0 - \frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} r_0^3 \right)$$

Per verificare l'equilibrio si deve valutare dunque la condizione che soddisfa:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_{\theta} dr = 0$$

ovvero:

$$E \int_{r_0}^{r_1} \varepsilon_{\theta} dr = 0$$

Sviluppando i calcoli e ponendo il risultato uguale a zero si ottiene che:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{r_0}^{r_1} \varepsilon_{\theta} dr = \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} \right) (r_1^4 - r_0^4) + \left(\varepsilon_{\theta}^0 - \frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} r_0^3 \right) (r_1 - r_0) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} \right) (r_1 + r_0) (r_1^2 + r_0^2) (r_1 - r_0) + \left(\varepsilon_{\theta}^0 - \frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1}{r_0^3 - r_1^3} r_0^3 \right) (r_1 - r_0) \\
 &= \frac{1}{4} (\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1) (r_1 + r_0) (r_1^2 + r_0^2) + \varepsilon_{\theta}^0 (r_0^3 - r_1^3) - r_0^3 (\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^1)
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \left(\frac{r_0^3 + r_0^2 r_1 + r_1^2 r_0 - 3r_1^3}{r_1^3 + r_0^2 r_1 + r_1^2 r_0 - 3r_0^3} \right)$$

2.5 Due materiali elastici lineari con profilo di deformazione residua non lineare

Come fatto precedentemente per il caso lineare, se consideriamo ora la presenza di due differenti materiali all'interno della sezione circolare tali che la legge che descrive la deformazione residua sia non lineare (figura 2.5),

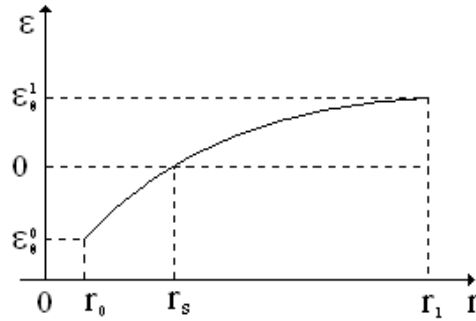


Figura 2.5: Schema dell'andamento non lineare della deformazione lungo lo spessore di un campione tessutale composto da due materiali differenti.

si ha che:

$$\sigma_{\theta-1} = E_1 \varepsilon_{\theta-1} \quad \sigma_{\theta-2} = E_2 \varepsilon_{\theta-2},$$

dove

$$\varepsilon_{\theta-1} = \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^s}{r_0^3 - r_s^3} \right) r^3 + \left(\varepsilon_{\theta}^0 - \frac{\varepsilon_{\theta}^0 - \varepsilon_{\theta}^s}{r_0^3 - r_s^3} r_0^3 \right) \quad \varepsilon_{\theta-2} = \left(\frac{\varepsilon_{\theta}^s - \varepsilon_{\theta}^1}{r_s^3 - r_1^3} \right) r^3 + \left(\varepsilon_{\theta}^s - \frac{\varepsilon_{\theta}^s - \varepsilon_{\theta}^1}{r_s^3 - r_1^3} r_s^3 \right)$$

In questo caso la verifica della condizione di equilibrio:

$$\int_{r_0}^{r_s} \sigma_{\theta-1} dr + \int_{r_s}^{r_1} \sigma_{\theta-2} dr = 0$$

porterà a scrivere:

$$E_1 \int_{r_0}^{r_s} \varepsilon_{\theta-1} dr + E_2 \int_{r_s}^{r_1} \varepsilon_{\theta-2} dr = 0$$

sviluppando gli integrali, tenendo conto che $\varepsilon_\theta^s = 0$ e ponendo il risultato uguale a zero si ottiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= E_1 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_\theta^0 - \varepsilon_\theta^s}{r_0^3 - r_s^3} \right) r^4 + \left(\varepsilon_\theta^0 - \frac{\varepsilon_\theta^0 - \varepsilon_\theta^s}{r_0^3 - r_s^3} r_0^3 \right) r \right]_{r_0}^{r_s} + E_2 \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\varepsilon_\theta^s - \varepsilon_\theta^1}{r_s^3 - r_1^3} \right) r^4 + \left(\varepsilon_\theta^s - \frac{\varepsilon_\theta^s - \varepsilon_\theta^1}{r_s^3 - r_1^3} r_s^3 \right) r \right]_{r_s}^{r_1} \\
 &= E_1 \frac{(r_s - r_0)}{r_0^3 - r_s^3} \left[\varepsilon_\theta^0 (r_s + r_0) (r_s^2 + r_0^2) + 4\varepsilon_\theta^0 (r_0^3 - r_s^3) - 4\varepsilon_\theta^0 r_0^3 \right] + E_2 \frac{(r_1 - r_s)}{r_s^3 - r_1^3} \left[-\varepsilon_\theta^1 (r_1 + r_s) (r_1^2 + r_s^2) + \varepsilon_\theta^1 r_s^3 \right] \\
 &= \frac{-E_1}{(r_s^2 + r_s r_0 + r_0^2)} \left[\varepsilon_\theta^0 (r_0^3 + r_s r_0^2 + r_0 r_s^2 - 3r_s^3) \right] + \frac{E_2}{(r_1^2 + r_s r_1 + r_s^2)} \left[\varepsilon_\theta^1 (r_1^3 + r_1 r_s^2 + r_s r_1^2 - 3r_s^3) \right]
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\varepsilon_\theta^1 = \varepsilon_\theta^0 \frac{E_1}{E_2} \frac{(r_1^2 + r_s r_1 + r_s^2) (r_0^3 + r_s r_0^2 + r_0 r_s^2 - 3r_s^3)}{(r_s^2 + r_s r_0 + r_0^2) (r_1^3 + r_1 r_s^2 + r_s r_1^2 - 3r_s^3)}$$

2.6 Un materiale iperelastico con profilo di deformazione residua lineare

Nella valutazione di varie possibilità di relazioni deformative, sono infine stati valutati i casi in cui il campione tessutale fosse composto inizialmente da uno e successivamente da due materiali iperelastici la cui relazione tenso-deformativa lungo la direzione circonferenziale fosse per ogni materiale:

$$\sigma = C \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

dove, nel caso di un solo materiale costituente il provino, l'allungamento λ è caratterizzato da un andamento lineare del tipo $\alpha \cdot r + \beta$ (figura 2.6).

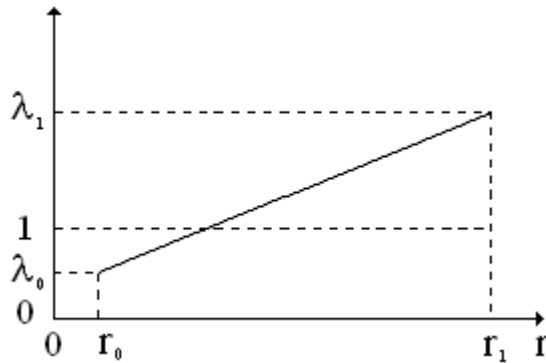


Figura 2.6: Schema dell'andamento lineare dell'allungamento λ lungo lo spessore di un campione tessutale.

La relazione tra la posizione e l'allungamento sopra rappresentata è dunque espressa dalla formula seguente:

$$\lambda = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{r_1 - r_0} \right) r + \left(\lambda_0 - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{r_1 - r_0} r_0 \right)$$

Anche in questo caso si deve valutare la condizione per cui si verifica l'equilibrio, ovvero l'integrale delle tensioni residue lungo il settore circolare deve essere nullo. Tale condizione porta a scrivere:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma dr = C \int_{r_0}^{r_1} \lambda^2 dr - C \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{\lambda} dr = 0$$

da cui sviluppando l'integrale si ottiene:

$$\left[\frac{(\alpha \cdot r + \beta)^3 - 3 \ln(\alpha \cdot r + \beta)}{3\alpha} \right]_{r_0}^{r_1} = 0$$

e quindi risolvendo ci si riconduce all'equazione:

$$\frac{\alpha^2}{3} (r_1^3 - r_0^3) + \alpha \cdot \beta (r_1^2 - r_0^2) + \beta^2 (r_1 - r_0) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha \cdot r_0 + \beta}{\alpha \cdot r_1 + \beta} \right) = 0$$

L'uguaglianza a zero ci spinge a ricavare una relazione tra i parametri α e β cosicché, dato un valore al parametro β , si può ottenere il corrispettivo valore del parametro α che rispetta la condizione di equilibrio. Supposto ad esempio $r_1=2\text{mm}$, $r_0=1.6\text{mm}$ e $\beta=0.1$, si può valutare semplicemente per via grafica il valore di α (figura 2.7),

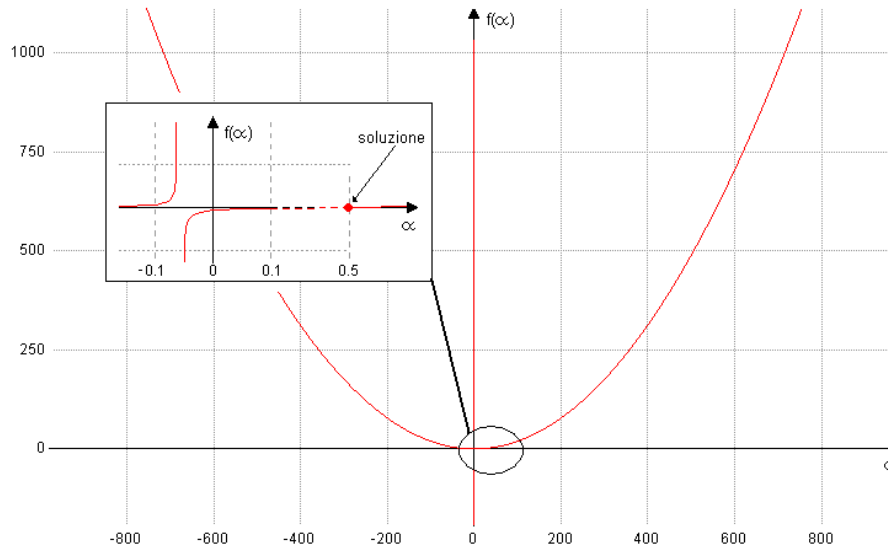


Figura 2.7: Andamento della funzione di variabile α . L'equilibrio si ha per quel valore di α in cui si osserva l'intersezione della funzione con l'asse delle ascisse.

oppure si può ottenere una soluzione operando per via numerica. Usando ad esempio la funzione "solve" di Matlab si ottiene per i dati sopra considerati il valore approssimato $\alpha \cong 0.4983$.

2.7 Due materiali iperelastici con profilo di deformazione residua lineare

Nel caso di un campione costituito da due materiali che seguono entrambi una legge iperelastica si deve verificare che per rispettare la condizione di equilibrio, considerando anche in questo caso un andamento lineare per gli allungamenti λ dei due materiali, l'integrale delle tensioni residue lungo il settore circolare deve essere nullo:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_1 dr + \int_{r_1}^{r_2} \sigma_2 dr = C_1 \int_{r_0}^{r_1} \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} dr + C_2 \int_{r_1}^{r_2} \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_2} dr = 0$$

Lo sviluppo di questi due integrali ci porta a scrivere la relazione:

$$C_1 \left[\frac{(\alpha \cdot r + \beta)^3 - 3 \ln(\alpha \cdot r + \beta)}{3\alpha} \right]_{r_0}^{r_1} + C_2 \left[\frac{(\gamma \cdot r + \delta)^3 - 3 \ln(\gamma \cdot r + \delta)}{3\gamma} \right]_{r_1}^{r_2} = 0$$

dove $\lambda_1 = \alpha \cdot r + \beta$ e $\lambda_2 = \gamma \cdot r + \delta$. Procedendo con lo sviluppo dei calcoli ci si riconduce all'equazione:

$$C_1 \left[\frac{\alpha^2}{3} (r_1^3 - r_0^3) + \alpha\beta(r_1^2 - r_0^2) + \beta^2(r_1 - r_0) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha r_0 + \beta}{\alpha r_1 + \beta} \right) \right] +$$

$$C_2 \left[\frac{\gamma^2}{3} (r_2^3 - r_1^3) + \gamma\delta(r_2^2 - r_1^2) + \delta^2(r_2 - r_1) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma r_1 + \delta}{\gamma r_2 + \delta} \right) \right] = 0$$

A questo punto l'uguaglianza al valore zero ci consente di ottenere una relazione che lega il parametro α ai restanti parametri β γ δ . In tal modo si potrà valutare il valore di α che, assegnati dei valori agli altri parametri, soddisfa la condizione di equilibrio. Considerando ad esempio $C_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ MPa, $C_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ MPa, valori di rigidità del materiale, $r_2 = 2.8$ mm, $r_1 = 2$ mm, $r_0 = 1.6$ mm, $\beta = 0.1$, $\gamma = 0.2$ e $\delta = 0.58$, si può valutare α per via grafica considerando il suo valore all'intersezione con l'asse delle ascisse (figura 2.8),

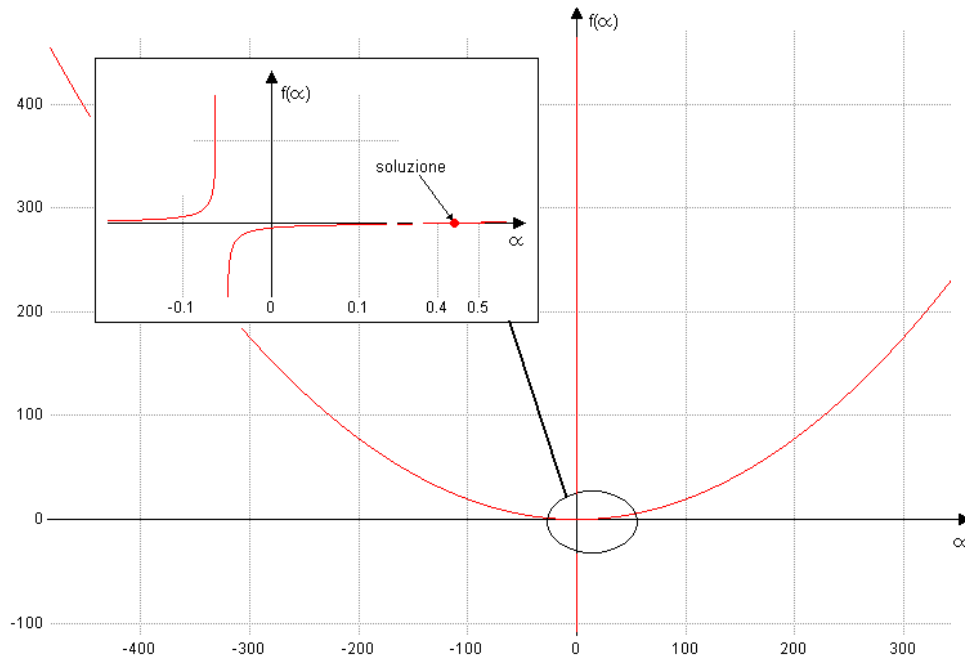


Figura 2.8: Andamento della funzione di variabile α . L'equilibrio si ha per quel valore di α in cui si osserva l'intersezione della funzione con l'asse delle ascisse.

oppure per via numerica utilizzando ancora la funzione “*solve*” ed ottenendo così il valore approssimato $\alpha \cong 0.4469$.

2.8 Analisi di dati sperimentali

Nei paragrafi precedenti sono state dunque valutate le condizioni che assicurano l'equilibrio nel caso di differenti andamenti delle deformazioni. Si è valutato ora quale tra i casi in precedenza sviluppati si adattasse meglio all'andamento dell'allungamento λ riportato da valori presi in letteratura da un esperimento condotto da Sokolis su sette esofagi di coniglio ed è stato così calcolato il valore dei parametri che sotto le suddette condizioni fittassero al meglio i dati sperimentali. Dai dati sperimentali riportati in figura 2.9 si è ipotizzato che l'andamento dell'allungamento per i vari campioni composti da due diversi materiali iperelastici (mucosa e tessuto muscolare) potesse essere espresso da una relazione lineare. I dati sperimentali fanno riferimento alle deformazioni residue in relazione allo stato di true zero-stress ovvero quella condizione in cui i tessuti sono nello stato di zero-stress e inoltre sono separati tra loro (paragrafo 1.4).

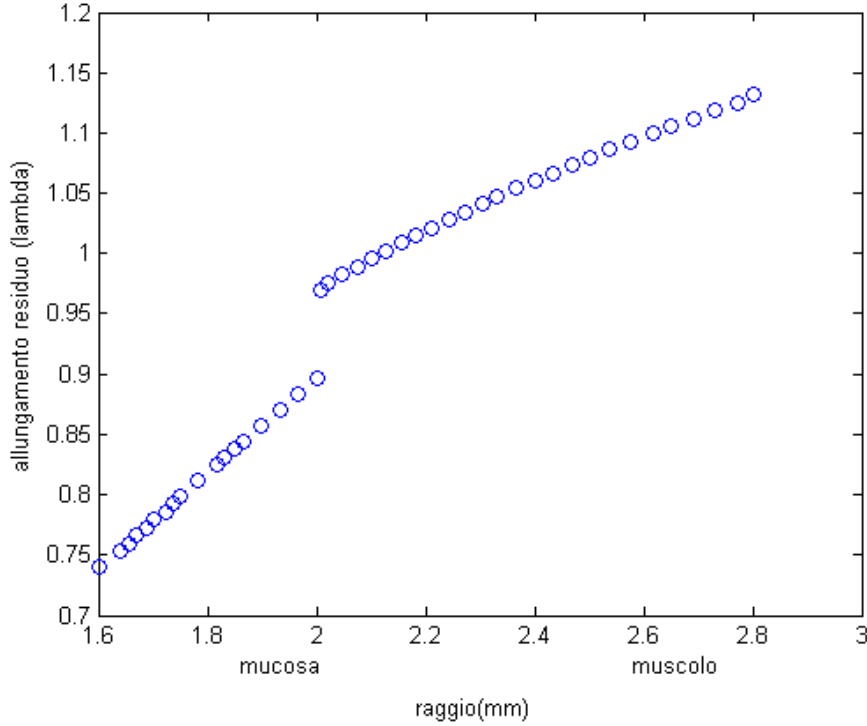


Figura 2.9: Dati sperimentali relativi all'allungamento in direzione circonferenziale in riferimento al true zero-stress state (Sokolis, 2010).

Ipotizzata così la tipologia di curva che interpola i valori dell'allungamento in funzione della posizione lungo lo spessore, $\lambda_1 = \alpha \cdot r + \beta$ (per la mucosa) e $\lambda_2 = \gamma \cdot r + \delta$ (per il tessuto muscolare), si è passati all'imposizione della condizione di equilibrio:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \sigma_i \, dr = \sum_{i=1}^2 C_i \int_{r_{int}}^{r_{ext}} \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \, dr = 0$$

dove $i=1$ per la mucosa, 2 per il tessuto muscolare.

In tal modo si mira a ottenere delle condizioni sui parametri che caratterizzano le due rette tali da soddisfare la condizione di equilibrio. Nel caso specifico si potrà definire α in funzione degli altri tre parametri: β e δ dalla formula:

$$C_1 \left[\frac{\alpha^2}{3} (r_1^3 - r_0^3) + \alpha\beta(r_1^2 - r_0^2) + \beta^2(r_1 - r_0) + \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\alpha r_0 + \beta}{\alpha r_1 + \beta} \right) \right] +$$

$$C_2 \left[\frac{\gamma^2}{3} (r_2^3 - r_1^3) + \gamma\delta(r_2^2 - r_1^2) + \delta^2(r_2 - r_1) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{\gamma r_1 + \delta}{\gamma r_2 + \delta} \right) \right] = 0$$

dove le rigidzze valgono rispettivamente $C_1 = 1.5 \cdot 10^{-3}$ MPa e $C_2 = 1.2 \cdot 10^{-3}$ MPa.

Sotto questa condizione si è passati all'individuazione dei parametri. A tal scopo è stata utilizzata la funzione "lsqcurvefit" di Matlab. Tale funzione si prefigge come scopo di assegnare ai parametri da valutare i valori che meglio consentono di approssimare l'andamento sperimentale minimizzando quindi una funzione costo basata sulla discrepanza tra i dati sperimentali ed i dati ottenuti dal modello:

$$\min_x \sum_i (y_{\text{modello}} - y_{\text{sperimentale}})^2$$

dove $y_{\text{sperimentale}}$ è caratterizzata dai valori misurati sperimentalmente mentre y_{modello} è costituita dai valori calcolati dalla funzione nel rispetto della condizione di equilibrio. I valori dei parametri così restituiti dalla funzione sono:

$$\beta = 0.0990 \quad \gamma = 0.2031 \quad \delta = 0.5969$$

da cui, secondo la condizione di equilibrio si ottiene:

$$\alpha = 0.4250$$

Nel grafico seguente (figura 2.10) si mostra l'andamento dei dati ricavati dal modello matematico rispetto a quelli forniti sperimentalmente.

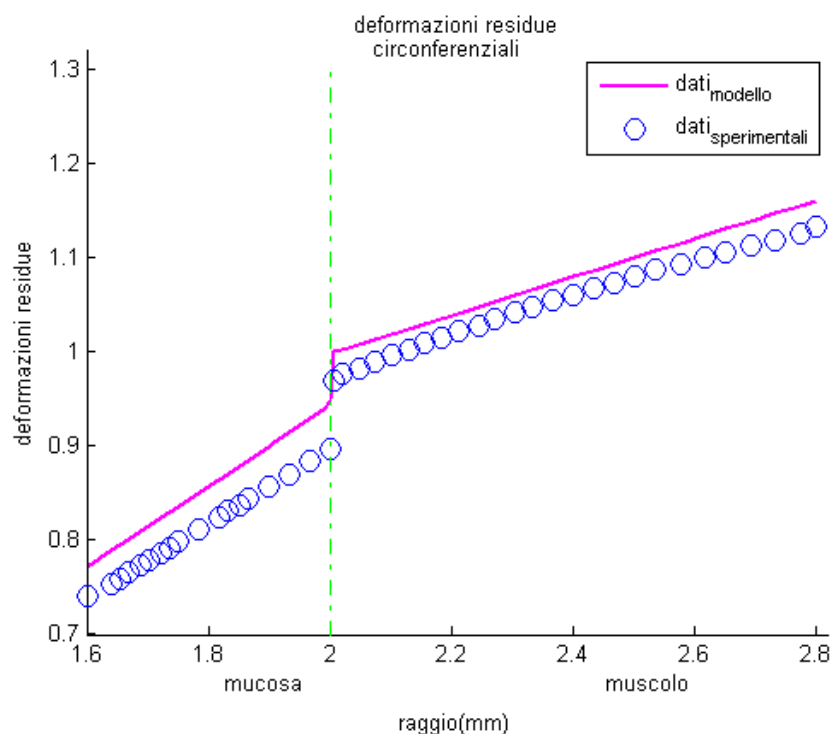


Figura 2.10: Confronto tra i dati sperimentali relativi all'allungamento in direzione circonferenziale in riferimento al true zero-stress state e i dati ricavati dal modello matematico.

Come si può notare, c'è una piccola differenza tra i due andamenti, ovvero il modello matematico che deve soddisfare la condizione di equilibrio non fitta perfettamente i dati sperimentali. Ragione di ciò deve essere ricercata sia nella relativa semplicità del modello usato nell'imposizione della condizione di equilibrio per la ricerca dei parametri ottimi con cui fittare i dati sperimentali, sia nella difficoltà di valutare correttamente a livello sperimentale le deformazioni residue a causa delle rotazioni inside-out che il tessuto può compiere. Inoltre, riferendosi al true zero-stress state, a causa della difficoltà nel separare i due tessuti, mucosa e muscolo, c'è il rischio di danneggiare lievemente e campioni e quindi ottenere dei dati che si discostano leggermente dalla realtà. Come ci si aspettava, dalla figura si nota comunque la presenza di uno stato di compressione per la parete interna mentre si osserva uno stato di tensione per quella esterna. La causa della discontinuità presente invece all'interfaccia tra i due differenti tessuti costituenti la parete dell'esofago è ancora poco chiara. Tuttavia tale differenza può essere alla base della presenza di tensioni di taglio presenti tra i due tessuti nello stato non separato ed è una conferma del fatto che la parete esofagea non può essere considerata un tessuto omogeneo. Per tale motivo è stato dunque correttamente utilizzato un modello che considerasse due differenti andamenti lineari, uno per la mucosa ed uno per lo strato muscolare.

Capitolo 3

VALUTAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI LUNGO LO SPESSORE DELLA PARETE DI UN SEGMENTO ESOFAGEO AL PASSAGGIO DI UN BOLO SECONDO MODELLI ISOTROPI

3.1 Introduzione

In questo e nel prossimo capitolo si mira a valutare l'influenza delle deformazioni residue sulla deformazione che si manifesta al passaggio di un bolo lungo il condotto esofageo e di valutare inoltre la variazione delle tensioni che si sviluppano lungo lo spessore del tratto considerato. Sono state inizialmente fatte delle restrizioni circa il dominio su cui si sarebbero poi valutate tali tensioni indotte dal bolo. Queste assunzioni ci portano a considerare un tratto esofageo lungo la direzione assiale (z) di lunghezza l . Ponendoci ora in un sistema di riferimento in coordinate cilindriche si ha che (figura 3.1):

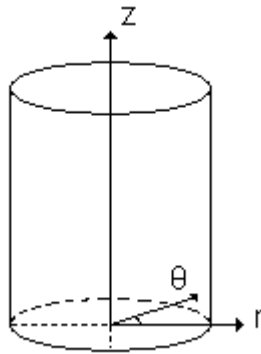


Figura 3.1: Schema delle coordinate cilindriche adottate.

$(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che:

$$r \in [r_0; r_1]$$

$$\theta \in [0; 2\pi]$$

$$z \in [0; l].$$

In tal modo si identifica il dominio Ω entro cui si valuteranno gli andamenti delle tensioni.

Al passaggio di un bolo lungo il condotto gastrointestinale si osserva una deformazione delle pareti dello stesso (figura 3.2) con conseguente sviluppo di tensioni interne.

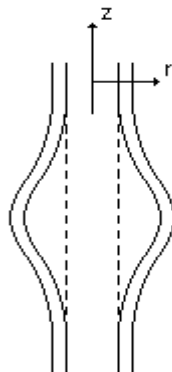


Figura 3.2: Schema della dilatazione causata dal passaggio di un bolo lungo il tratto esofageo.

Inizialmente è stato valutato come la presenza delle deformazioni residue riduca la tensione che si sviluppa lungo la parete interna durante il passaggio di un bolo nel caso in cui la parete sia costituita da un unico materiale isotropo. In seguito tali valutazioni sono state estese al caso di una parete composta da due strati isotropi: uno interno costituito da mucosa-submucosa e da uno muscolare più esterno.

3.2 Modello monotessutale isotropo con profilo di deformazione residua lineare

La prima analisi effettuata è stata svolta su un tratto di esofago costituito da un solo tessuto. A tal scopo si è supposto di valutare l'andamento delle tensioni lungo lo spessore della mucosa (figura 3.3)

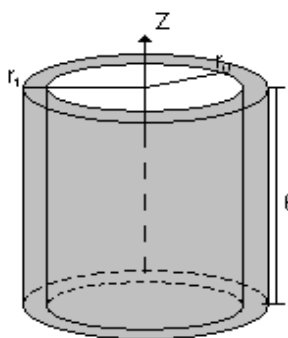


Figura 3.3: Schema di un tratto di esofago costituito da un unico materiale, mucosa.

dove $r_0=1.6$ mm (raggio interno), $r_1=2$ mm (raggio esterno), $l=20$ mm (lunghezza del tratto esofageo); misure valutate su esofagi di coniglio.

È stata dunque valutata dapprima una formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo poi, sulla base dei dati ricavati dalla precedente analisi (paragrafo 2.8) si è ipotizzata una formulazione delle deformazioni residue ed infine, sulla base dell'influenza di queste sulle prime è stato valutato l'andamento delle tensioni lungo lo spessore del tessuto esofageo.

3.2.1 Formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo

Il passaggio di un bolo all'interno di un condotto più stretto causa una deformazione delle pareti di questo al fine di scorrere lungo il tubo stesso. Tale deformazione, in base alla geometria considerata precedentemente, sarà dunque costituita da tre componenti: una radiale, una circonferenziale ed una longitudinale. Supposta trascurabile la deformazione lungo la direzione assiale, ovvero

$$\lambda_z^b = 1$$

dove l'apice b sta ad indicare il riferimento alle deformazioni indotte dal passaggio del bolo lungo il condotto esofageo., restano da definire le altre due componenti in modo da rispettare il principio di incomprimibilità, secondo il quale:

$$\lambda_r^b \lambda_\theta^b \lambda_z^b = 1.$$

Relativamente alla componente circonferenziale, ipotizzando un profilo di deformazione indotto dal passaggio del bolo di tipo sinusoidale modulato da un'ampiezza di deformazione A, si avrà un valore minimo di deformazione nei punti di contatto iniziale e finale tra il bolo e la parete corrispondenti ai valori $3/2\pi$ e $7/2\pi$ mentre si osserverà la massima deformazione in $5/2\pi$. Chiamato z_0 il punto di contatto iniziale tra il bolo e la parete e z_1 quello finale, secondo la formulazione sopra descritta si avrà:

$$\lambda_\theta^b = 1 \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [0, z_0] \vee [z_1, l]$$

$$\lambda_\theta^b = A \left[\sin \left(\left(\frac{2\pi}{z_1 - z_0} \right) z + \frac{\pi}{2} \left(\frac{3z_1 - 7z_0}{z_1 - z_0} \right) \right) + 1 \right] \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [z_0, z_1]$$

Note dunque queste due componenti, la terza è ora facilmente ricavabile dalla relazione di incomprimibilità definita precedentemente. Si ottiene così:

$$\lambda_r^b = \frac{1}{\lambda_\theta^b \lambda_z^b}$$

Infine, definite le tre componenti di deformazione che caratterizzano il passaggio da una configurazione indeformata \mathbf{X} a una deformata \mathbf{x} , si definisce gradiente di deformazione \mathbf{F} la matrice:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

da cui si definiscono le dilatazioni principali λ lungo una certa direzione:

$$\lambda_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_i}$$

Se λ è maggiore di uno si ha un allungamento, viceversa se λ è minore di uno si osserva un accorciamento lungo la direzione considerata.

In questo caso, valutando le componenti di deformazione principali, il gradiente di deformazione \mathbf{F}^b sarà quindi descritto dalla matrice:

$$\mathbf{F}^b = \begin{bmatrix} \lambda_r^b & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^b & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \end{bmatrix}$$

3.2.2 Formulazione delle deformazioni residue

Come discusso nel capitolo precedente, lo spessore del condotto esofageo a riposo è soggetto a deformazioni residue. La presenza di tali deformazioni dovrebbe dunque ridurre quelle che si sviluppano al passaggio di un bolo di sezione maggiore rispetto a quella del condotto. La loro formulazione è conseguente ad una preliminare valutazione del loro andamento lungo lo spessore del tessuto costituente questo tratto di condotto digerente. Come osservato nel paragrafo 2.8, il loro andamento lungo la direzione circonferenziale può essere approssimato da una retta di equazione:

$$\lambda_\theta^r = \alpha \cdot r + \beta$$

dove λ_θ^r rappresenta la componente di deformazione lungo appunto la direzione circonferenziale, r indica la distanza radiale dal centro del condotto a un determinato punto all'interno dello spessore della parete del tratto considerato mentre l'apice r sta ad indicare il riferimento alle deformazioni residue. Per i parametri α e β , rispettivamente il coefficiente angolare della retta ed il termine noto che definiscono il profilo di deformazione verificando la condizione di equilibrio, sono stati usati i seguenti valori ottenuti in seguito al processo di identificazione per la sola mucosa:

$$\alpha = 0.5980;$$

$$\beta = -0.0777;$$

Si ottiene così:

$$\lambda_\theta^r = m(0.5980 \cdot r - 0.0777 - 1) + 1$$

dove m è un moltiplicatore per valutare l'influenza di queste deformazioni su quelle indotte dal passaggio del bolo.

Relativamente alla direzione longitudinale, essendo trascurabili le deformazioni residue λ_z^r lungo tale direzione, si ha che:

$$\lambda_z^r = 1$$

A questo punto si possono ricavare facilmente le deformazioni residue lungo la direzione radiale dalla relazione di incomprimibilità di un materiale, da cui:

$$\lambda_r^r = \frac{1}{\lambda_\theta^r \lambda_z^r}$$

Definite così le tre componenti di deformazione residua, il gradiente di deformazione viene quindi definito nel seguente modo:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^r \end{bmatrix}$$

3.2.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni

Al fine di valutare l'influenza delle deformazioni residue sulle tensioni che si sviluppano all'interno della parete esofagea sono stati messi a confronto i valori delle tensioni ottenute in presenza o meno delle deformazioni residue. Nel caso in cui queste fossero assenti il moltiplicatore m sopra citato assume valore nullo viceversa, in presenza di deformazioni residue, tale coefficiente assume valore uno.

È stato dunque preliminarmente calcolato il valore del gradiente di deformazione totale \mathbf{F} moltiplicando i due gradienti riportati nei paragrafi precedenti:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^b \cdot \mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^b \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^b \lambda_\theta^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \lambda_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

A questo punto si è passati al calcolo della distribuzione delle tensioni all'interno del condotto circolare. Essendo la mucosa componente il tratto esofageo per ipotesi iperelastica, è stato possibile definire una funzione di densità di energia elastica $W=W(\mathbf{F})$ dipendente puramente dai soli stati deformativi e non variabile nel caso in cui il corpo subisse rotazioni rigide. L'esistenza di una funzione W corrisponde a dire che la tensione non dipende dal percorso deformativo ma solo dallo stato deformativo ovvero che le deformazioni sono reversibili. Inoltre, nello stato indeformato dove $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, dove con \mathbf{I} si intende la matrice identità, si ha che $W(\mathbf{I}) = 0$ da cui:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W(\mathbf{I})}{\partial \mathbf{F}} = 0$$

ovvero la densità di energia elastica e la tensione sono nulle (figura 3.4), dove \mathbf{P} è il primo tensore di Piola-Kirchoff.

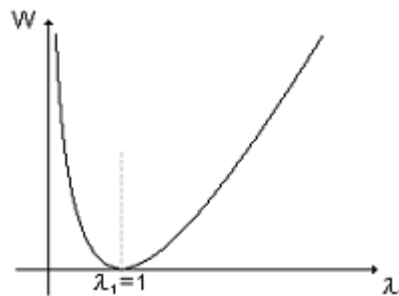


Figura 3.4: Andamento policonvesso della funzione densità di energia elastica W nel caso monoassiale.

La densità di energia elastica W è quindi definita positiva e policonvessa, la tensione cresce con la deformazione e dipende solo dallo stato deformativo.

Reso ora W dipendente dalla sola deformazione effettiva e considerando che il tensore \mathbf{U} , dal teorema della decomposizione polare, definisce in maniera univoca il tensore destro di Cauchy-Green \mathbf{C} e quello di Green-Lagrange \mathbf{E} , si può scrivere:

$$W = W(\mathbf{C}) \quad W = W(\mathbf{E})$$

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

dove \mathbf{S} è il secondo tensore di Piola-Kirchoff, energeticamente associato a \mathbf{C} ed a \mathbf{E} .

La presenza di acqua all'interno della mucosa ci consente inoltre di attribuire a questo materiale la caratteristica di incomprimibilità. Sono incomprimibili infatti quei materiali per cui non varia il proprio volume qualunque sia lo stato tensionale a cui sono sottoposti. Secondo tale assunzione deve quindi essere preservato il vincolo cinematico:

$$\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \equiv 1$$

Tuttavia a rigore non esistono materiali perfettamente incomprimibili ma molti materiali, tra i quali i tessuti connettivi con un elevato contenuto d'acqua, possono essere descritti con buona approssimazione da modelli costitutivi incomprimibili.

Per un materiale isotropo incomprimibile la funzione densità di energia elastica dipende dai soli primi due invarianti:

$$W = W(I_1, I_2) \quad (J) = 1$$

dove

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{C})$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [I_1^2 - \text{Tr}(\mathbf{C}^2)]$$

$$I_3 = J = 1$$

Lo stato di tensione deducibile dalla relazione costitutiva è dunque definito a meno della pressione idrostatica p che deve essere valutata sulla base delle condizioni al contorno del corpo, ovvero tipologia di vincoli e di carichi. Si ottiene quindi:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{C}} + p \mathbf{C}^{-1}$$

da cui si ricava il tensore di tensione di Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + p \mathbf{I}$$

Nello specifico, supposta per la mucosa una funzione di densità di energia $W = C_1 (I_1 - 3)$ si ottiene che il secondo tensore di Piola-Kirchhoff \mathbf{S} è pari a:

$$\mathbf{S} = 2 \cdot \partial C_1 \cdot \mathbf{I} - p \mathbf{C}^{-1}$$

da cui

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{F} C_1 \mathbf{F}^T - p \mathbf{I}$$

Supponendo ora trascurabili le tensioni σ_r lungo la direzione radiale si può scrivere che:

$$\sigma_r = 2C_1 \lambda_r^2 - p = 0$$

da cui si ricava il valore della pressione idrostatica p :

$$p = 2C_1 \lambda_r^2$$

Ricavato il valore della pressione p è stato di conseguenza possibile calcolare il valore della tensione di Cauchy lungo la direzione circonferenziale ed assiale del tratto di esofago considerato. Sono state così ricavate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= 2C_1\lambda_{\theta}^2 - p = 2C_1\lambda_{\theta}^2 - 2C_1\lambda_r^2 \\ \sigma_z &= 2C_1\lambda_z^2 - p = 2C_1\lambda_z^2 - 2C_1\lambda_r^2\end{aligned}$$

Utilizzando queste relazioni è stato possibile calcolare per ogni punto della parete esofagea il valore della tensione lungo le tre direzioni. A partire dai risultati ottenuti si è posta ora l'attenzione su come variano le tensioni lungo la direzione circonferenziale. In particolar modo, nel caso in cui si considerino solo le deformazioni indotte dal passaggio di un bolo si osserva come la tensione σ_{θ} sia costante all'interno dello spessore muovendoci dal raggio interno verso il raggio esterno (figura 3.5).

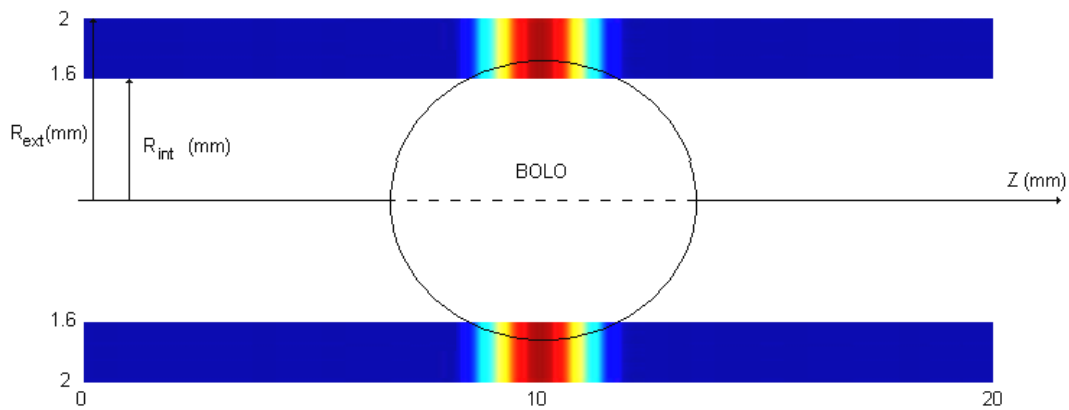


Figura 3.5: Andamento della tensione circonferenziale lungo lo spessore della parete esofagea costituita dalla sola mucosa in relazione al passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 3.7.

Invece, in presenza di deformazioni residue tale andamento non è più costante ma bensì varia crescendo da un valore minimo sulla superficie interna fino ad un valore massimo sulla superficie esterna (figura 3.6).

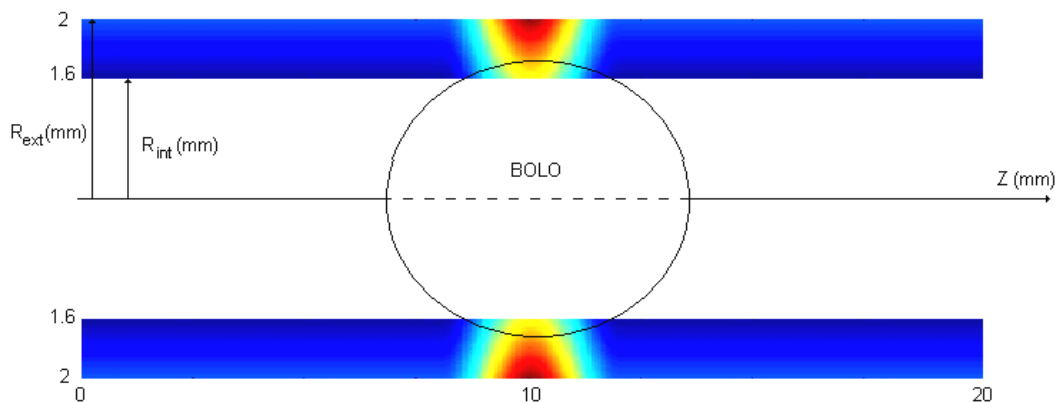


Figura 3.6: Andamento della tensione circonferenziale lungo lo spessore della parete esofagea costituita dalla sola mucosa in relazione al passaggio di un bolo in presenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 3.7.

Si osserva inoltre come sulla parete interna, grazie alla presenza delle deformazioni residue, il valore di tale tensione sia inferiore rispetto al caso in cui queste deformazioni fossero assenti (figura 3.7).

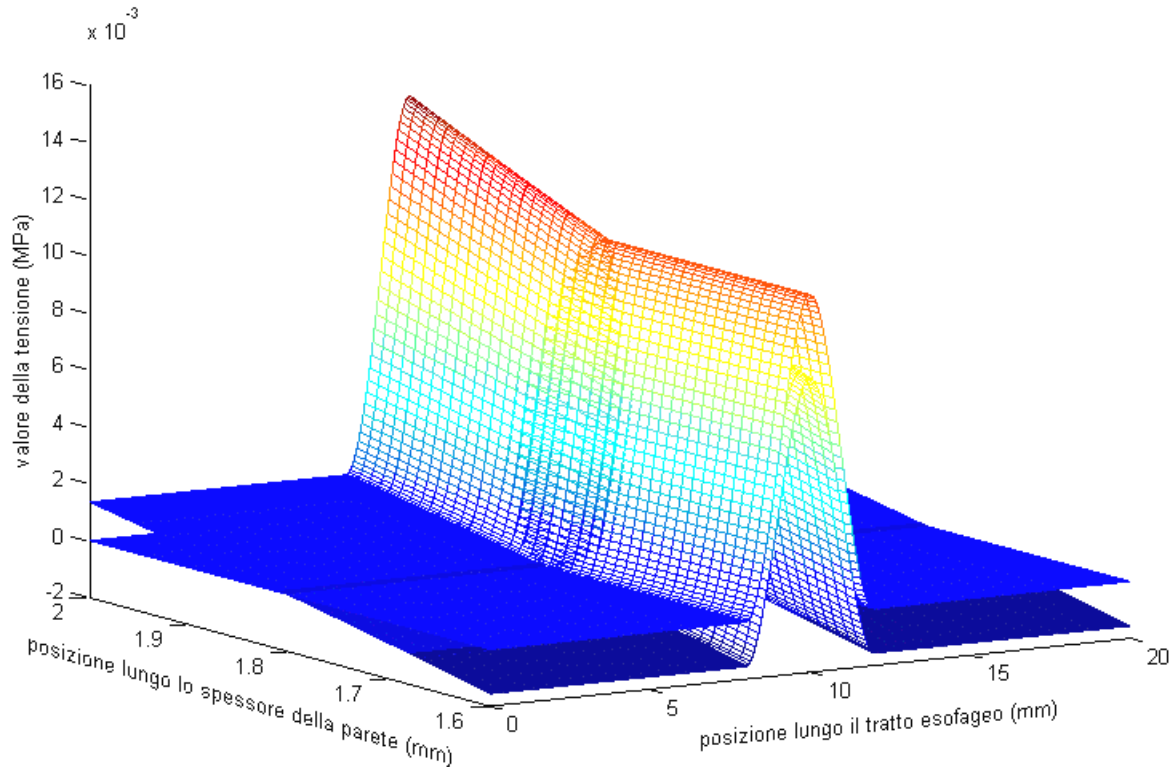


Figura 3.7: Confronto tra l'andamento della tensione circonferenziale lungo lo spessore della parete esofagea costituita dalla sola mucosa in relazione al passaggio di un bolo in assenza ed in presenza di deformazioni residue.

Questa infatti è la dimostrazione dell'importanza delle deformazioni residue e di come appunto la loro presenza, che riduce il valore della tensione che si sviluppa al passaggio di un bolo, riduca il rischio di fratture della parete interna.

In relazione invece alla direzione assiale, si osserva come l'andamento delle tensioni circonferenziali presenti un valore minimo prima del passaggio del bolo perché il tessuto è nello stato indeformato, tale valore cresce al crescere del diametro del bolo fino a raggiungere un valore massimo in corrispondenza del massimo diametro del bolo, poi decresce fino a tornare al valore minimo iniziale nella regione dove non c'è più interazione tra la parete tessutale ed il bolo stesso. In figura sono messi a confronto gli andamenti della tensione lungo lo spessore della parete in alcune sezioni ricavate lungo la direzione assiale in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) delle deformazioni residue. Si nota come tali andamenti varino in relazione all'interazione che sussiste tra la parete ed il bolo da una curva più bassa (nessuna interazione) ad una più alta (massima interazione, ovvero sezione del bolo

col diametro massimo). Si osserva inoltre che le curve ottenute in presenza di deformazioni residue, rispettando la condizione di equilibrio delle tensioni, non presentano un valore costante lungo lo spessore della parete ma bensì, come ci si poteva aspettare e come precedentemente giustificato, variano da un valore minimo sulla parete interna ad un valore massimo sulla parete esterna limitando così il rischio di fratture al passaggio di un bolo (figura 3.8).

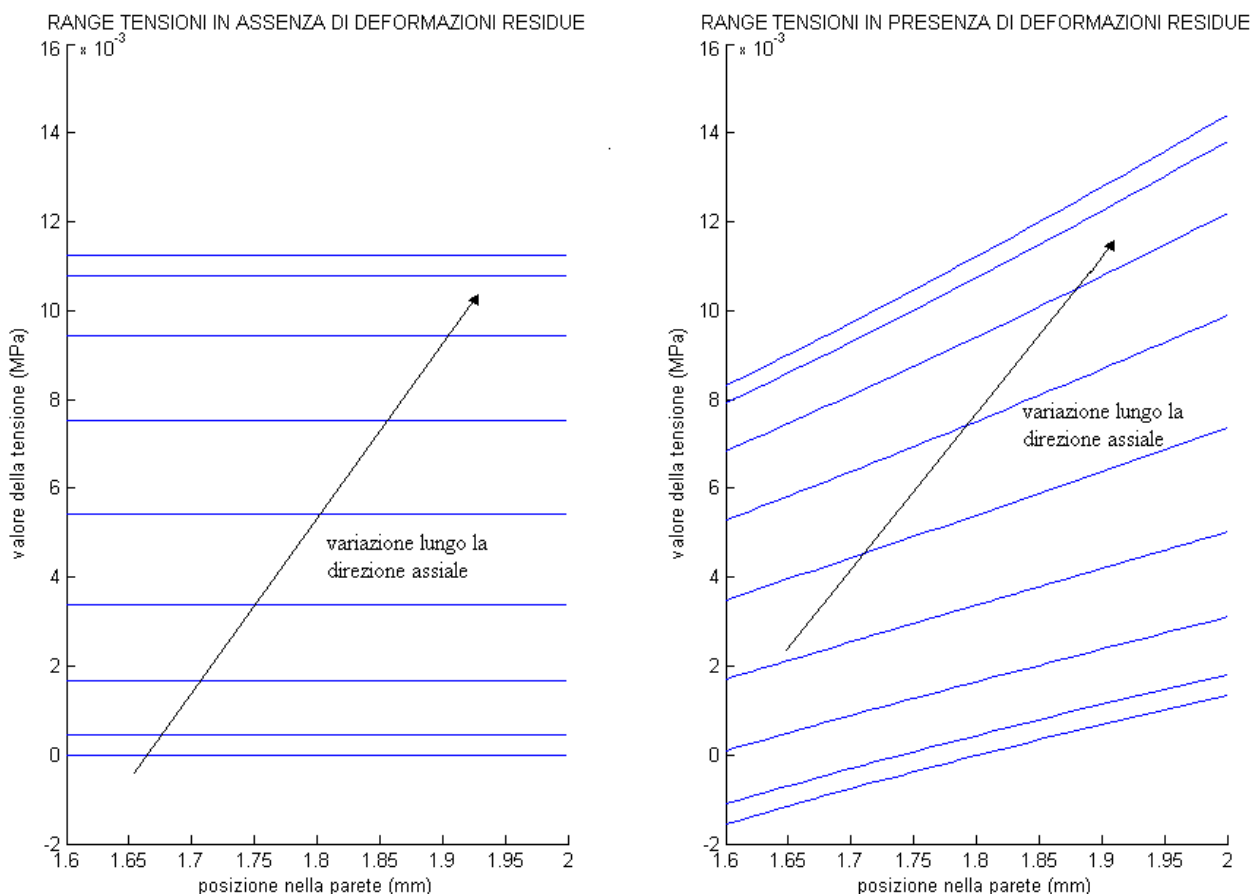


Figura 3.8: Confronto tra i range della tensione circonferenziale lungo lo spessore della parete esofagea costituita dalla sola mucosa in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue.

Provando infine a far variare il parametro che modula l'ampiezza della deformazione indotta dal passaggio del bolo, si può osservare (figura 3.9) come aumentano gli andamenti delle massime tensioni sviluppate all'interno della parete tessutale. Questo è un ulteriore fattore di rischio perché a piccole variazioni nel diametro del bolo corrispondono grandi variazioni nelle tensioni indotte nella parete. Ecco quindi che risulta ancora una volta fondamentale la presenza delle deformazioni residue che riduce tale variazione sulla parete interna limitando così i rischi a cui si potrebbe incorrere in caso di una loro assenza.

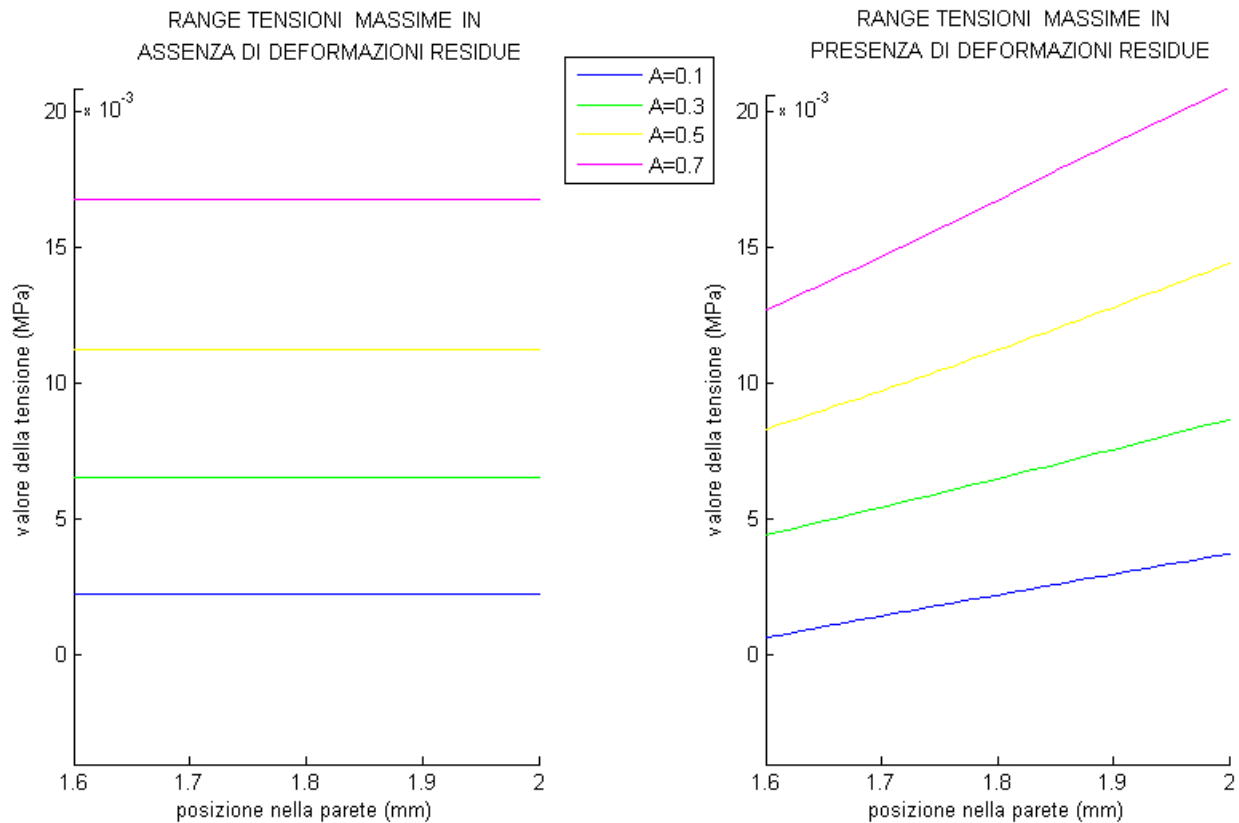


Figura 3.9: Relazione tra le variazioni dei range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea costituita dalla sola mucosa in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue al variare dell'ampiezza di deformazione.

3.3 Modello bitessutale isotropo con profilo di deformazione residua lineare

Terminata la prima analisi si è ripercorso l'intero procedimento espandendo la trattazione al caso di una parete costituita ora da due materiali differenti: la mucosa per la parte interna e tessuto muscolare per lo strato esterno (figura 3.10):

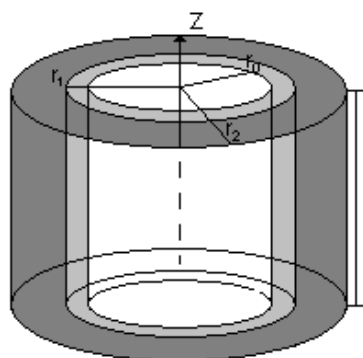


Figura 3.10: Schema di un tratto di esofago costituito da due materiali, internamente la mucosa ed esternamente tessuto muscolare.

dove $r_0=1.6$ mm (raggio interno), $r_1=2$ mm (raggio dell'interfaccia tra i due materiali), $r_2=2.8$ mm (raggio esterno), $l=20$ mm (lunghezza del tratto esofageo)); misure valutate anche in questo caso su esofagi di coniglio (Sokolis, 2010).

Come discusso precedentemente è stata inizialmente valutata una formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo lungo il tratto esofageo ed una formulazione delle deformazioni residue sulla base dei risultati ottenuti dall'analisi condotta nel paragrafo 2.8, in seguito è stato valutato l'andamento delle tensioni circonferenziali lungo lo spessore della parete esofagea in assenza ed in presenza delle suddette deformazioni residue al fine di valutare gli effetti della loro presenza.

3.3.1 Formulazione delle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo

Come osservato nel caso di una parete composta da un unico materiale (paragrafo 3.2), anche in questa nuova condizione la deformazione indotta dal passaggio di un bolo all'interno di un condotto più stretto sarà costituita da tre componenti principali: una radiale, una circonferenziale ed una longitudinale. Supposta ancora trascurabile la deformazione lungo la direzione assiale, ovvero:

$$\lambda_z^b = 1$$

restano da definire le altre due componenti al fine di rispettare il principio di incomprimibilità. Per la componente circonferenziale è stata mantenuta la formulazione di un profilo di deformazione indotto dal passaggio del bolo di tipo sinusoidale modulato da un'ampiezza di deformazione A ; si avrà dunque:

$$\lambda_\theta^b = 1 \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [0, z_0] \vee [z_1, l]$$

$$\lambda_\theta^b = A \left[\sin \left(\left(\frac{2\pi}{z_1 - z_0} \right) z + \frac{\pi}{2} \left(\frac{3z_1 - 7z_0}{z_1 - z_0} \right) \right) + 1 \right] \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [z_0, z_1]$$

A questo punto risulta facile ricavare la terza componente di deformazione dalla relazione di incomprimibilità ottenendo così:

$$\lambda_r^b = \frac{1}{\lambda_\theta^b \lambda_z^b}$$

Ricavate le componenti principali di deformazione, il gradiente di deformazione \mathbf{F}^b in relazione alle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo lungo il condotto esofageo assumerà la forma matriciale:

$$\mathbf{F}^b = \begin{bmatrix} \lambda_r^b & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^b & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \end{bmatrix}$$

3.3.2 Formulazione delle deformazioni residue

Basandosi sull'analisi effettuata nel paragrafo 2.8, si è ipotizzato che la relazione migliore per descrivere l'andamento delle deformazioni circonferenziali residue lungo lo spessore della parete esofagea fosse descritta da una legge lineare come nel caso di una parete costituita da un unico materiale. Si devono tuttavia distinguere due differenti andamenti, uno per la mucosa ed uno per lo strato muscolare. Usando i parametri alfa, beta, gamma, delta ricavati precedentemente:

$$\alpha = 0.4250;$$

$$\beta = 0.0990;$$

$$\gamma = 0.2032;$$

$$\delta = 0.5969;$$

che definiscono i profili di deformazione per i due differenti tessuti si ottengono così le seguenti relazioni:

$$\lambda_{\theta_{mucosa}}^r = m(0.4250 \cdot r + 0.0990 - 1) + 1 \quad \forall r_0 \leq r \leq r_1$$

$$\lambda_{\theta_{muscolo}}^r = m(0.2032 \cdot r + 0.5969 - 1) + 1 \quad \forall r_1 < r \leq r_2$$

dove il parametro m è il moltiplicatore che pesa l'influenza delle deformazioni residue su quelle indotte dal passaggio del bolo.

In riferimento alla direzione longitudinale, essendo trascurabili anche per questo caso le deformazioni residue λ_z^r , si può scrivere che:

$$\lambda_z^r = 1$$

Ora, sulla base della proprietà di incomprimibilità dei materiali costituenti la parete esofagea si può ricavare facilmente il valore delle deformazioni residue λ_r lungo la direzione radiale:

$$\lambda_r^r = \frac{1}{\lambda_\theta^r \lambda_z^r}$$

Infine, ricavate le tre componenti principali, il gradiente delle deformazioni residue trova la sua rappresentazione nella matrice:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^r \end{bmatrix}$$

3.3.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni

Come analizzato nel caso di una parete composta da un unico materiale si è ora proseguito con la valutazione dell'influenza delle deformazioni residue sulle tensioni che si sviluppano all'interno della parete esofagea in relazione alle tensioni che si svilupperebbero in assenza di queste. A tal fine è stato in primo luogo calcolato il gradiente di deformazione totale \mathbf{F} moltiplicando i due gradienti ottenuti dal passaggio del bolo e dalle deformazioni residue:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^b \cdot \mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^b \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^b \lambda_\theta^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \lambda_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

In seguito si è passati al calcolo della distribuzione delle tensioni lungo le pareti del tratto considerato. Supposti iperelastici la mucosa e lo strato muscolare, è stata definita una funzione densità di energia elastica $W=W(\mathbf{F})$ dipendente solamente dagli stati deformativi. Come descritto precedentemente, dipendendo W dalla sola deformazione effettiva si può scrivere:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}$$

dove \mathbf{S} è il secondo tensore di Piola-Kirchoff, energeticamente associato a \mathbf{C} ed a \mathbf{E} . Supposti i due tessuti incomprimibili, deve essere ancora rispettato il vincolo:

$$\det(\mathbf{F}) = J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \equiv 1$$

da cui,

$$W = W(I_1, I_2) \quad (J) = 1$$

Essendo ancora lo stato di tensione definito a meno della pressione idrostatica p si ha:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{C}} + p \mathbf{C}^{-1}$$

e per il tensore di tensione di Cauchy:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{F}^T + p\mathbf{I}$$

Supposta per la mucosa una funzione di densità di energia $W = C_1 (I_1 - 3)$ e per lo strato muscolare $W = C_2 (I_1 - 3)$ si ricava:

$$\mathbf{S} = 2 \cdot \partial \mathbf{C} \cdot \mathbf{I} - p \mathbf{C}^{-1}$$

da cui:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{F}\mathbf{C}\mathbf{F}^T - p\mathbf{I}$$

Trascurando le tensioni σ_r lungo la direzione radiale si ottiene il valore della pressione idrostatica p :

$$\sigma_r = 2C_i \lambda_r^2 - p = 0$$

$$p = 2C_i \lambda_r^2$$

col quale è stato in seguito possibile calcolare il valore della tensione di Cauchy lungo la direzione circonferenziale ed assiale dalle relazioni:

$$\sigma_\theta = 2C_i \lambda_\theta^2 - p = 2C_i \lambda_\theta^2 - 2C_i \lambda_r^2$$

$$\sigma_z = 2C_i \lambda_z^2 - p = 2C_i \lambda_z^2 - 2C_i \lambda_r^2$$

dove $i=1$ per la mucosa, 2 per il tessuto muscolare.

Ottenuti così i valori delle tensioni che si sviluppano all'interno della parete, si presta ora particolare attenzione alle tensioni presenti lungo la direzione circonferenziale. Se si considerano solo le deformazioni indotte dal passaggio di un bolo si osserva come questa tensione sia costante all'interno dello spessore di entrambi i materiali muovendoci dall'interno verso l'esterno presentando una discontinuità all'interfaccia dovuta, come discusso nel paragrafo 1.4, alla presenza di tensioni di taglio (figura 3.11).

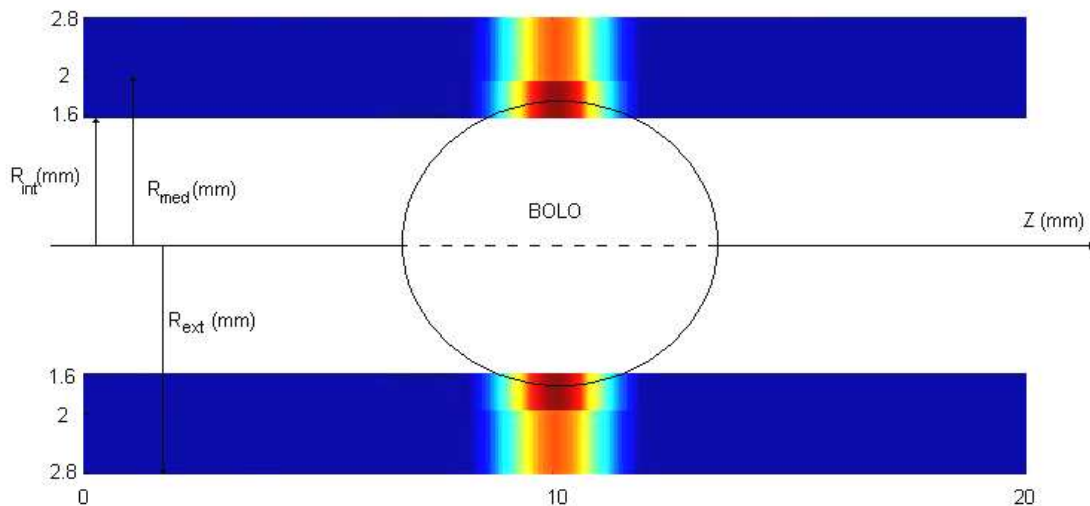


Figura 3.11: Andamento delle tensioni circonferenziali lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 3.13.

In presenza di deformazioni residue si osserva invece che le tensioni crescono da un valore minimo sulle superfici interne dei due differenti tessuti fino ad un valore massimo su quelle esterne presentando comunque ancora una lieve discontinuità all'interfaccia, minore rispetto a quella osservata in assenza delle deformazioni residue (figura 3.12).

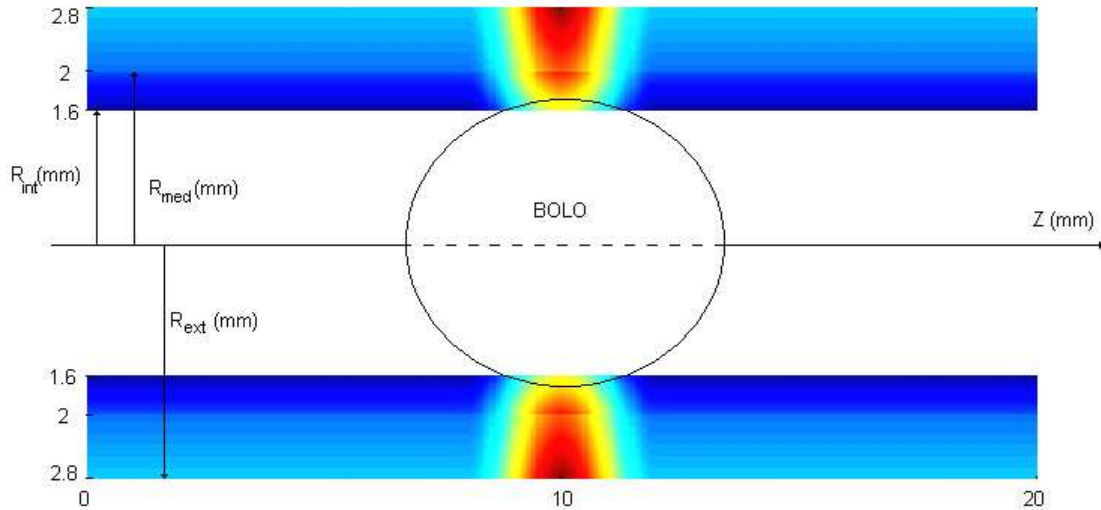


Figura 3.12: Andamento delle tensioni circonferenziali lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in presenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 3.13.

Come ci si poteva aspettare si osserva che, grazie alla presenza delle deformazioni residue, il valore della tensione nella mucosa è inferiore rispetto al caso in cui tali deformazioni fossero assenti (figura 3.13).

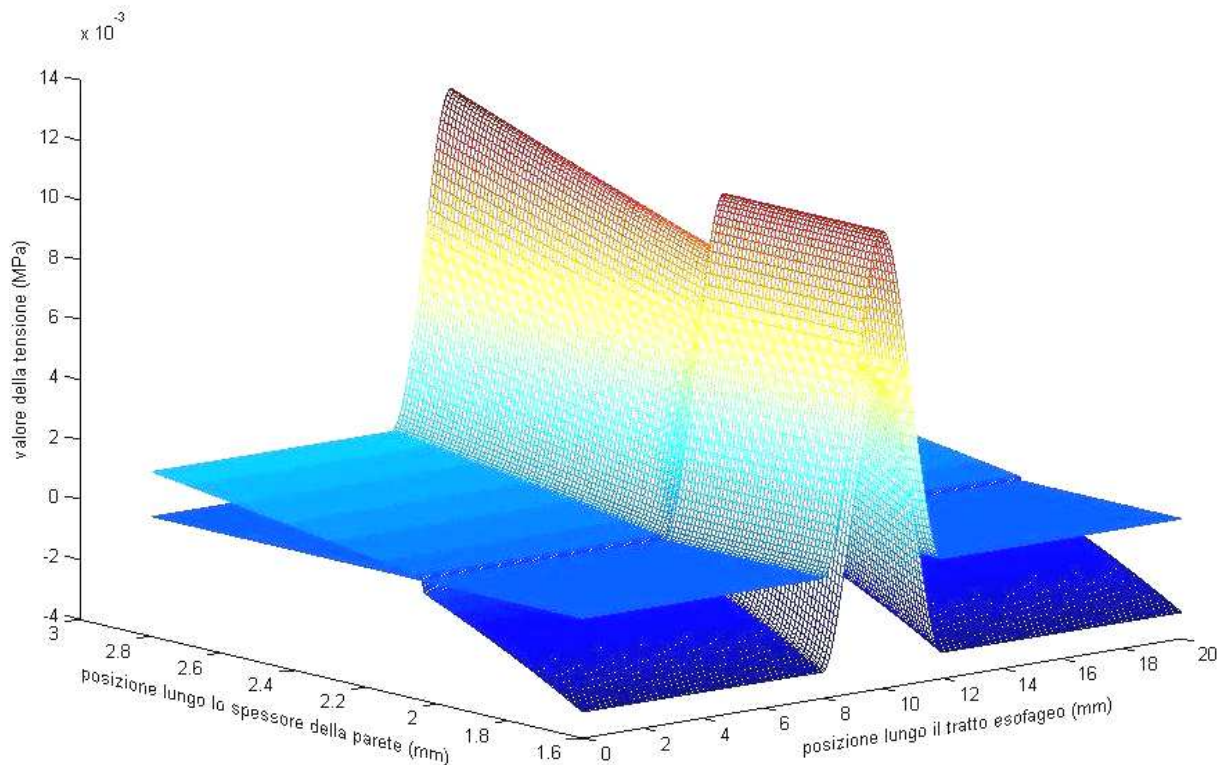


Figura 3.13: Confronto tra gli andamenti delle tensioni circonferenziali lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza ed in presenza di deformazioni residue.

Da questa figura si evince dunque l'importanza delle deformazioni residue nel ridurre il valore della tensione che si sviluppa nella mucosa al passaggio di un bolo, limitando così il rischio di lesioni della parete interna.

Valutando ora come variano le tensioni circonferenziali lungo la direzione assiale del condotto esofageo si può osservare, come valutato nel caso di una parete costituita da un unico materiale (paragrafo 3.2.3), che queste crescono da un valore minimo nelle regioni in cui il bolo non è ancora transitato oppure è già passato ad un valore massimo in corrispondenza del massimo diametro del bolo. In figura 3.14 si nota appunto la variazione di questi andamenti da una curva più bassa indice di nessuna interazione tra bolo e parete ad una più alta nella sezione in cui il bolo presenta diametro massimo. In aggiunta, dall'immagine di destra ove sono riportati gli andamenti delle tensioni circonferenziali in presenza di deformazioni residue si può osservare che, sotto la condizione di equilibrio delle tensioni, tali andamenti variano da un valore minimo sulla parete interna, inferiore a quello osservato in assenza di queste deformazioni, ad uno massimo sulla parete esterna limitando così il rischio di lesioni alla mucosa durante il passaggio di un bolo e come vi sia una riduzione della discontinuità presente all'interfaccia tra i due tessuti con conseguente diminuzione di intensità per le tensioni di taglio.

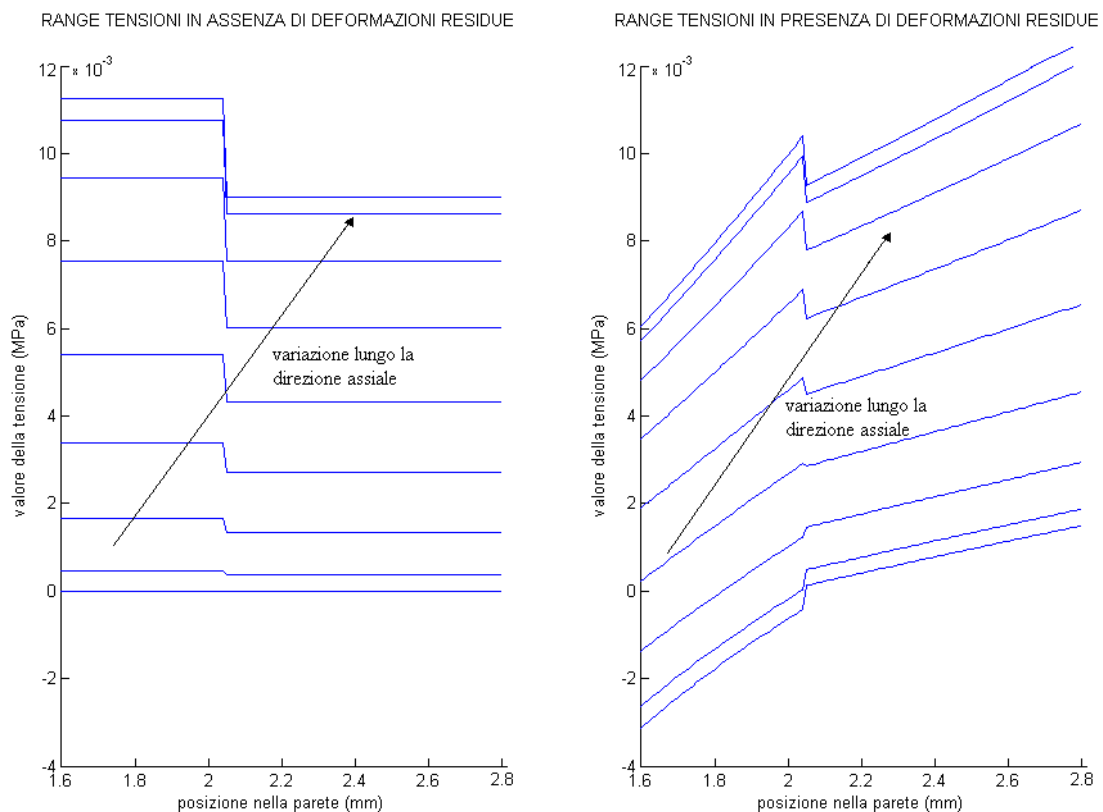


Figura 3.14: Confronto tra i range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue.

Infine, come valutato precedentemente (paragrafo 3.2.3), nella seguente figura 3.15 si osserva un aumento delle tensioni in relazione ad una variazione del parametro che modula l'ampiezza di deformazione indotta dal passaggio del bolo. Tuttavia si può osservare ancora che grazie alla presenza delle deformazioni residue tale variazione è comunque ridotta, specialmente se si considera la parete interna, limitando così il rischio di lesioni.

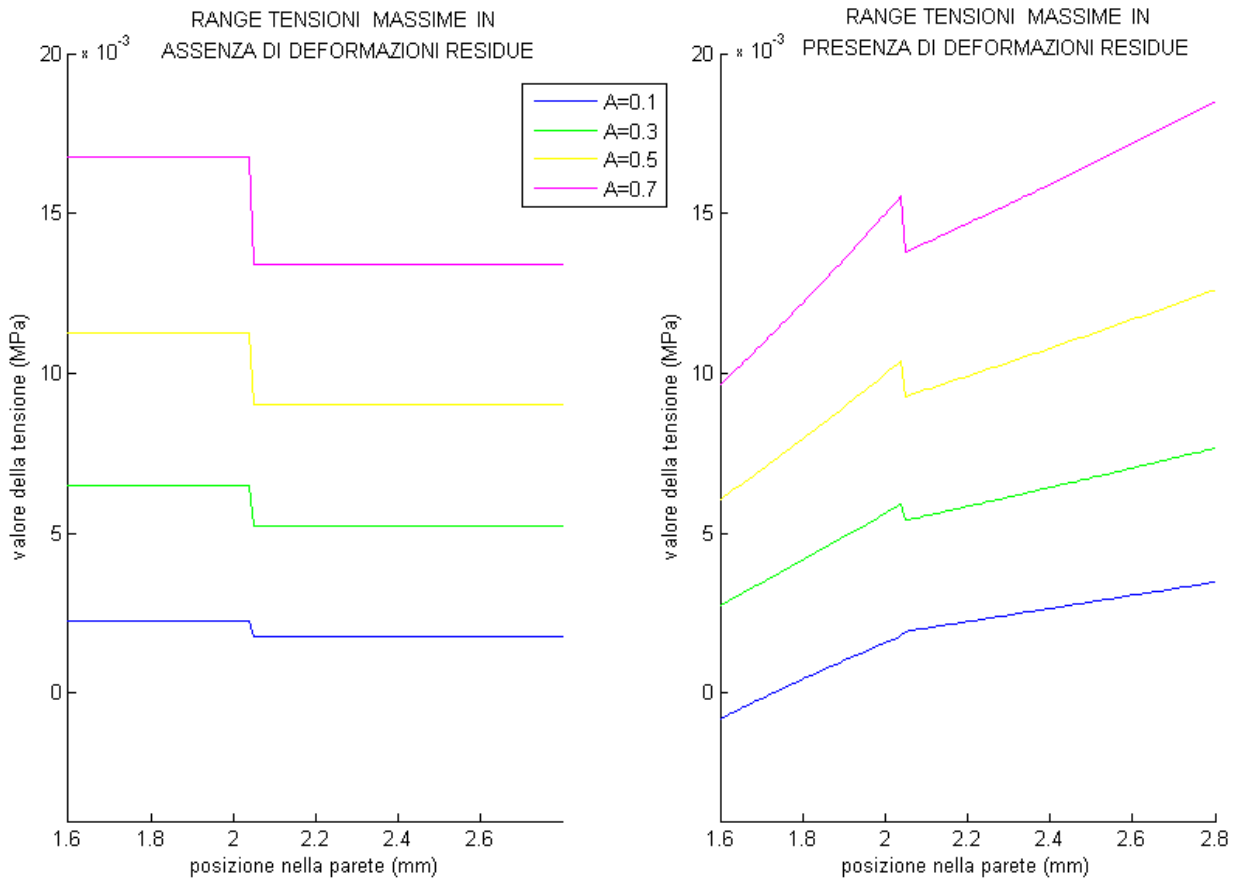


Figura 3.15: Relazione tra le variazioni dei range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue al variare dell'ampiezza di deformazione.

Capitolo 4

VALUTAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI LUNGO LO SPESSORE DELLA PARETE DI UN SEGMENTO ESOFAGEO AL PASSAGGIO DI UN BOLO SECONDO MODELLI ANISOTROPI

4.1 Introduzione

Analogamente al capitolo precedente, anche in questo capitolo è stata condotta un'analisi su come si distribuiscono le tensioni lungo lo spessore della parete di un segmento esofageo conseguentemente al passaggio di un bolo e su come la presenza delle deformazioni residue può influire su tali tensioni. Ora però sono stati utilizzati due modelli bitessutali anisotropi che rispecchiano in modo più veritiero la struttura del condotto esofageo rispetto alla condizione di isotropia ipotizzata precedentemente.

Preliminarmente è stata valutata la struttura e distribuzione delle fibre all'interno della parete esofagea notando un andamento elicoidale per le fibre di collagene III presenti nello strato più interno, mucosa-submucosa, e un andamento circonferenziale-assiale per le fibre muscolari presenti nello strato più esterno dei modelli costitutivi analizzati.

In seguito, dopo aver definito un modello costitutivo anisotropo fibrorinforzato, si è passati all'analisi dei dati sperimentali al fine di ottenere sotto questa nuova condizione la formulazione del gradiente delle deformazioni residue. Così facendo è stato possibile valutare poi l'andamento delle tensioni che si sviluppano nella parete tessutale sia in presenza che in assenza di queste deformazioni durante il passaggio di un bolo.

Infine, utilizzando il modello anisotropo appena descritto, è stato supposto un andamento non lineare delle deformazioni residue. Così, sotto questa ulteriore condizione, è stato valutato il nuovo andamento delle tensioni indotte dal passaggio di un bolo in presenza di questa tipologia di deformazione residua ipotizzata.

4.2 Modello bitessutale anisotropo con profilo di deformazione residua lineare

4.2.1 Valutazione della distribuzione delle fibre presenti nella parete esofagea

Dopo aver valutato nel precedente capitolo come si distribuiscono le tensioni a livello circonferenziale per una parete costituita da due tessuti differenti, è stato ora valutato come queste varino se si considera anche la presenza di fibre all'interno di questi due strati, rendendo così il modello più realistico. Considerando unitamente gli strati della mucosa-submucosa, strato interno, e la muscolatura, strato esterno, è stato così possibile classificare la presenza di quattro famiglie di fibre (Natali et al. 2009). In particolar modo, nello strato interno si osserva la presenza di due famiglie di fibre di collagene III che scorrono longitudinalmente sullo stesso piano formando due eliche, una in senso orario ed una in senso antiorario, che si intrecciano vicendevolmente. Per quanto concerne invece lo strato muscolare si osserva che questo è caratterizzato sia da muscolatura liscia che da muscolatura striata e può essere suddiviso a sua volta in due strati in base alla direzione preferenziale delle fibre muscolari presenti in essi. Si osserva dunque uno strato più interno dove le fibre sono disposte in direzione circonferenziale ed uno più esterno in cui la direzione prevalente è quella longitudinale (figura 4.1).

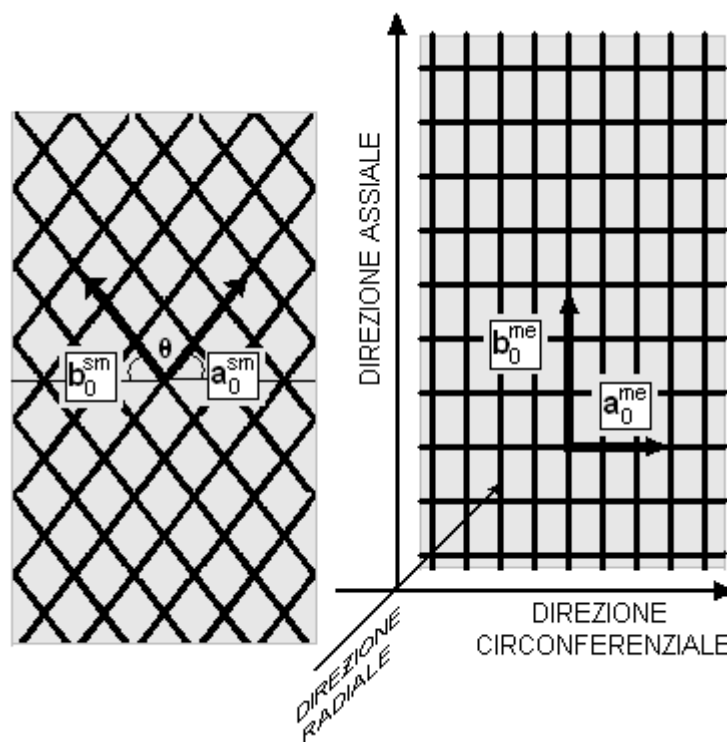


Figura 4.1: Schema della disposizione delle fibre all'interno della parete esofagea. Variazione lungo la direzione radiale dallo strato interno di mucosa-submucosa (sm) allo strato muscolare esterno (me).

Se le direzioni 1, 2 e 3 sono orientate come in figura ovvero secondo la direzione circonferenziale, assiale e radiale rispettivamente, per una condizione di carico uniassiale il gradiente di deformazione \mathbf{F} può essere assunto come un tensore diagonale con deformazioni principali λ_1, λ_2 e λ_3 . In particolar modo λ_1 e λ_2 riguardano rispettivamente le deformazioni lungo le direzioni circonferenziale e assiale per un test di carico uniassiale mentre λ_3 è relativo all'allungamento lungo la direzione radiale.

L'orientazione delle fibre \mathbf{a}_0 e \mathbf{b}_0 può essere dunque definita nel seguente modo:

- per lo strato interno (mucosa-submucosa): $\mathbf{a}_0^{\text{sm}} = [\cos\theta, \sin\theta, 0]$; $\mathbf{b}_0^{\text{sm}} = [-\cos\theta, \sin\theta, 0]$
- per lo strato esterno (tessuto muscolare): $\mathbf{a}_0^{\text{me}} = [1, 0, 0]$; $\mathbf{b}_0^{\text{me}} = [0, 1, 0]$

Dall'analisi effettuata si deduce quindi che dal punto di vista meccanico l'esofago può essere considerato come un tessuto anisotropo bistrato, raggruppando insieme mucosa-submucosa e muscolatura interna-esterna, fibrorinforzato, grazie alla presenza di fibre disposte secondo una specifica orientazione all'interno della parete tessutale.

4.2.2 Definizione del modello costitutivo

Sotto questa nuova condizione, prima di poter procedere con l'analisi della distribuzione delle tensioni, si è reso necessario rivalutare i parametri che verificassero la condizione di equilibrio per questa nuova formulazione del modello utilizzato. Per un materiale iperelastico la relazione tenso-deformativa è descritta dalla legge:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{F} \partial W}{\partial \mathbf{C}}$$

dove si ricorda essere \mathbf{P} il primo tensore di tensione di Piola-Kirchhoff e \mathbf{F} il gradiente di deformazione. Tenendo poi conto che secondo questa nuova formulazione la funzione di densità di energia di deformazione W è costituita da due componenti si ha che:

$$W(\mathbf{C}) = W_m(\mathbf{C}) + W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M})$$

dove $W_m(\mathbf{C})$ rappresenta il contributo della matrice, mentre $W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M})$ quello delle fibre. Il contributo isotropo dato da W_m è stato poi suddiviso in una componente volumetrica U_m ed in una isovolumetrica \tilde{W}_m :

$$W_m(\mathbf{C}) = U_m(I_3) + \tilde{W}_m(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2)$$

$$U_m(I_3) = \left[\frac{K_v}{2 + r(r+1)} \right] \cdot \left[(I_3^{1/2} - 1)^2 + I_3^{-r/2} + r I_3^{1/2} - (r+1) \right]$$

$$\tilde{W}_m(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2) = \left[\frac{C_1}{\alpha_1} \right] \cdot \left\{ -1 + \exp[\alpha_1 \cdot (\tilde{I}_1 - 3)] \right\} + \left[\frac{C_2}{\alpha_2} \right] \cdot \left\{ -1 + \exp[\alpha_2 \cdot (\tilde{I}_2 - 3)] \right\}$$

dove per la componente isovolumetrica è possibile trascurare il termine che considera il contributo del secondo invariante in quanto nel caso di una deformazione monoassiale i due contributi sono colineari. Per il termine che considera il contributo delle fibre si osserva come questo dipenda dalla loro distribuzione e dalla loro conformazione:

$$W_f(\mathbf{C}, \mathbf{M}) = W_f(\mathbf{C}, \mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0) = W_a(I_4) + W_b(I_6) + W_{ab}(I_8, I_9)$$

con:

$$\begin{aligned} W_a(I_4) &= \left(\frac{C_4}{\alpha_4^2} \right) \cdot (-\alpha_4 \cdot (I_4 - 1) - 1 + \exp[\alpha_4 \cdot (I_4 - 1)]) \\ W_b(I_6) &= \left(\frac{C_6}{\alpha_6^2} \right) \cdot (-\alpha_6 \cdot (I_6 - 1) - 1 + \exp[\alpha_6 \cdot (I_6 - 1)]) \\ W_{ab}(I_8, I_9) &= C_{89} \cdot [I_8 - I_9]^2 \end{aligned}$$

dove $\tilde{I}_1 = \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}})$ e $\tilde{I}_2 = (1/2) \cdot [\tilde{I}_1^2 - \text{tr}(\tilde{\mathbf{C}}^2)]$ sono i due invarianti principali della parte isovolumetrica del tensore destro di Cauchy-Green, ovvero $\tilde{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$, $I_3 = J^2$ è correlato allo Jacobiano della deformazione, $I_4 = \mathbf{C}:(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) = \lambda_a^2$ e $I_6 = \mathbf{C}:(\mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0) = \lambda_b^2$ dipendono dall'allungamento del tessuto nella direzione delle fibre mentre $I_8 = (\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0)[\mathbf{C}:(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{b}_0)]$ e $I_9 = (\mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0)^2$ specificano l'influenza delle interazioni tra le due famiglie di fibre, i parametri costitutivi C_1 , C_4 e C_6 definiscono le rigidzze iniziali di un tessuto e delle fibre in esso contenuto, C_{89} dipende dai fenomeni di interazione tra le fibre stesse, α_1 regola la non linearità del tessuto, α_4 e α_6 dipendono dalla conformazione ondulata iniziale delle fibre mentre K_v e r sono parametri costitutivi relativi al comportamento volumetrico del tessuto. Così facendo si ottiene una formulazione del primo tensore di tensione di Piola-Kirchhoff espressa dalla formula:

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}}_m + \tilde{\mathbf{P}}_m + \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_{ab}$$

dove:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_m &= \frac{2\mathbf{F}\partial U_m}{\partial \mathbf{C}} = \left[\frac{K_v}{2+r(r+1)} \right] [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] \mathbf{F}^{-T} \\ \tilde{\mathbf{P}}_m &= \frac{2\mathbf{F}\partial \tilde{W}_m}{\partial \mathbf{C}} = C_1 \cdot \left\{ \exp[\alpha_1 \cdot (\tilde{I}_1 - 3)] \right\} \cdot \left(2J^{-2/3} \mathbf{F} - \frac{2}{3} \tilde{I}_1 \mathbf{F}^{-T} \right) \\ \mathbf{P}_a &= \frac{2\mathbf{F}\partial W_a}{\partial \mathbf{C}} = 2 \cdot \left(\frac{C_4}{\alpha_4} \right) \cdot (-1 + \exp[\alpha_4 \cdot (I_4 - 1)]) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0) \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}_b = \frac{2\mathbf{F}\partial W_b}{\partial \mathbf{C}} = 2 \cdot \left(\frac{C_6}{\alpha_6} \right) \cdot (-1 + \exp[\alpha_6 \cdot (I_6 - 1)]) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0)$$

$$\mathbf{P}_{ab} = \frac{2\mathbf{F}\partial W_{ab}}{\partial \mathbf{C}} = C_{89} \cdot [I_8 - I_9] \cdot I_9 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$$

Relativamente allo strato muscolare si può inoltre notare che il termine \mathbf{P}_{ab} riguardante l'interazione tra le fibre non fornisce alcun contributo in quanto, essendo le fibre disposte ortogonalmente, I_9 si annulla.

Dalla relazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

si è poi potuto ricavare la formulazione della tensione in termini di tensione di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_m + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m + \boldsymbol{\sigma}_a + \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{\sigma}_{ab}$$

dove:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_m = \left[\frac{K_v}{2 + r(r+1)} \right] [2(J-1) - rJ^{-(r+1)} + r] \mathbf{I}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_m = C_1 \cdot \left\{ \exp[\alpha_1 \cdot (\tilde{I}_1 - 3)] \right\} \cdot \left(2J^{-5/3} \mathbf{F}\mathbf{F}^T - \frac{2}{3} J^{-1} \tilde{I}_1 \mathbf{I} \right)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_a = 2 \cdot \left(\frac{C_4}{\alpha_4} \right) \cdot \left(\frac{I_4}{J} \right) \cdot (-1 + \exp[\alpha_4 \cdot (I_4 - 1)]) \cdot (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_b = 2 \cdot \left(\frac{C_6}{\alpha_6} \right) \cdot \left(\frac{I_6}{J} \right) \cdot (-1 + \exp[\alpha_6 \cdot (I_6 - 1)]) \cdot (\mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{b}_0)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ab} = C_{89} \cdot [I_8 - I_9] \cdot (\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{b}_0) \cdot \frac{1}{J} \cdot \sqrt{I_4} \cdot \sqrt{I_6} \cdot (\mathbf{a}_0 \otimes \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_0 \otimes \mathbf{a}_0)$$

Ora, assunto un andamento lineare per λ_θ , in particolar modo $\lambda_{\theta,1} = \alpha \cdot r + \beta$ e $\lambda_{\theta,2} = \gamma \cdot r + \delta$ rispettivamente per la mucosa e per il tessuto muscolare, sono state valutate per via numerica quali fossero le combinazioni dei parametri α , β , γ e δ che verificassero la condizione di equilibrio delle tensioni ovvero:

$$\int_{r_0}^{r_1} \sigma_{1,\theta\theta} dr + \int_{r_1}^{r_2} \sigma_{2,\theta\theta} dr = 0$$

dove sono stati utilizzati i parametri riportati nella seguente tabella (tabella 4.1):

	MUCOSA	MUSCOLO
C_1 (MPa)	0.0015	0.0012
C_4 (MPa)	0.0023	0.0017
C_6 (MPa)	0.0023	0.0000188
C_{89} (MPa)	0.0007	0
α_1	0.5870	0.5320
α_4	0.9730	0.4620
α_6	0.9730	0.8990
θ (rad)	0.8432	1
K_v (MPa)	2.1951	0.2378
r	-2,87	-0.4730

4.2.3 Analisi di dati sperimentali

Valutate tutte le combinazioni di parametri che verificano numericamente la condizione di equilibrio, è stata scelta tra queste quella che fittava al meglio l'andamento sperimentale della deformazione circonferenziale residua minimizzando la seguente funzione costo:

$$\min_x \sum_i (y_{\text{modello}} - y_{\text{sperimentale}})^2$$

Sono stati così ricavati i seguenti valori dei parametri α , β , γ e δ :

$$\alpha = 0.3763;$$

$$\beta = 0.1475;$$

$$\gamma = 0.2206;$$

$$\delta = 0.5373.$$

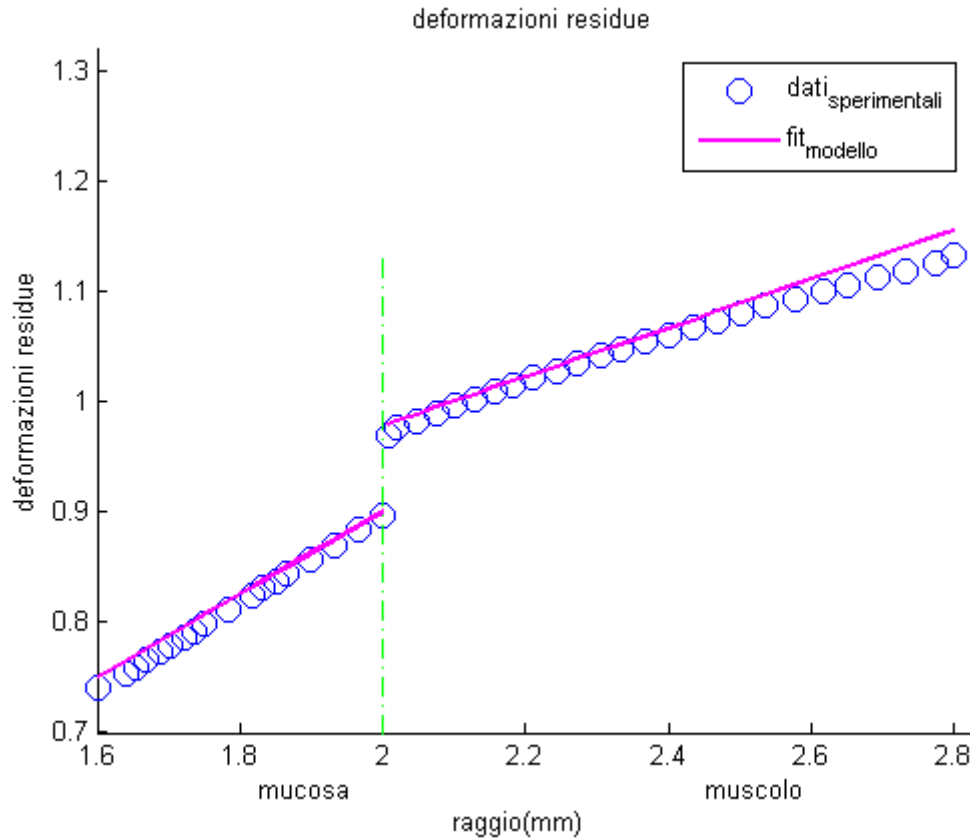


Figura 4.2: Confronto tra i dati sperimentali relativi all'allungamento in direzione circonferenziale in riferimento al true zero-stress state e i dati ricavati per via numerica.

Come si può notare dal grafico riportato in figura 4.2 l'andamento dei dati ricavati dal modello matematico fitta molto bene quello ottenuto dai dati sperimentali. Ciò ci porta a supporre che il modello utilizzato è abbastanza buono per descrivere le caratteristiche di questo distretto corporeo. E' inoltre verificata la presenza di uno stato di compressione nella parete interna, di tensione per quella esterna e di discontinuità all'interfaccia tra i due differenti tessuti costituenti la parete esofagea che sta alla base dell'ipotesi di non omogeneità adottata per questo tessuto. Per tale ragione anche in questo caso è stato utilizzato un modello che considerasse due differenti andamenti lineari, ognuno per uno dei due tessuti costituenti la parete.

4.2.4 Formulazione dei gradienti di deformazione

Relativamente alle deformazioni indotte dal passaggio di un bolo, come nei casi precedenti il gradiente di deformazione è costituito da tre componenti principali: una radiale, una circonferenziale ed una longitudinale. Mantenuta la condizione di incompressibilità del tessuto esofageo si ha che $\lambda_r^b \lambda_\theta^b \lambda_z^b = 1$ da cui, supposta trascurabile la deformazione lungo la direzione assiale, ovvero

$$\lambda_z^b = 1$$

si ricava dalla seguente relazione, dopo aver identificato la componente circonferenziale, la componente di deformazione radiale

$$\lambda_r^b = \frac{1}{\lambda_\theta^b \lambda_z^b}.$$

Per la componente circonferenziale è stato assunto il profilo di deformazione di tipo sinusoidale modulato da un'ampiezza di deformazione A; si avrà dunque:

$$\lambda_\theta^b = 1 \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [0, z_0] \vee [z_1, l]$$

$$\lambda_\theta^b = A \left[\sin \left(\left(\frac{2\pi}{z_1 - z_0} \right) z + \frac{\pi}{2} \left(\frac{3z_1 - 7z_0}{z_1 - z_0} \right) \right) + 1 \right] \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [z_0, z_1]$$

Ricavate le tre componenti principali di deformazione, il gradiente di deformazione \mathbf{F}^b per le deformazioni indotte dal passaggio di un bolo sarà ancora una volta descritto dalla matrice:

$$\mathbf{F}^b = \begin{bmatrix} \lambda_r^b & 0 & 0 \\ & \lambda_\theta^b & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \end{bmatrix}$$

Per quanto concerne invece le deformazioni residue, come precedentemente spiegato è stato adottato un profilo di deformazione lineare distinguendo comunque l'andamento nella mucosa da quello nel tessuto muscolare. A tal fine sono stati utilizzati i parametri calcolati nel paragrafo precedente:

$$\alpha = 0.3763;$$

$$\beta = 0.1475;$$

$$\gamma = 0.2206;$$

$$\delta = 0.5373;$$

definendo così i profili di deformazione nei due tessuti utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\lambda_{\theta_{mu\cos a}}^r &= m(0.3763 \cdot r + 0.1475 - 1) + 1 & \forall r_0 \leq r \leq r_1 \\ \lambda_{\theta_{muscolo}}^r &= m(0.2206 \cdot r + 0.5373 - 1) + 1 & \forall r_1 < r \leq r_2\end{aligned}$$

Relativamente alla direzione longitudinale, essendo trascurabili le deformazioni residue λ_z^r si ha:

$$\lambda_z^r = 1$$

da cui, sulla base della proprietà di incomprimibilità, si ricava ancora una volta il valore delle deformazioni residue lungo la direzione radiale dalla formula:

$$\lambda_r^r = \frac{1}{\lambda_{\theta}^r \lambda_z^r}$$

Definite anche per questa situazione le tre componenti principali, il gradiente delle deformazioni residue viene dunque così espresso:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta}^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^r \end{bmatrix}$$

4.2.5 Valutazione della distribuzione delle tensioni

Analogamente ai casi precedenti, è stato inizialmente calcolato il gradiente di deformazione totale \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^b \cdot \mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^b \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta}^b \lambda_{\theta}^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \lambda_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta} & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

ed in seguito è stato valutato l'andamento delle tensioni che si sviluppano nel dominio Ω della parete esofagea. A tal fine sono state ora utilizzate le relazioni ricavate nel paragrafo 4.2.2 che definiscono l'andamento della tensione all'interno della parete tessutale tenendo conto sia del contributo fornito dalla matrice che di quello dato dalla presenza in esso delle strutture fibrose.

Nella figura seguente si visualizza l'andamento delle tensioni al passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue. Si nota anche in questo caso che la tensione è costante all'interno dello spessore di entrambi i materiali muovendoci dalla superficie interna verso quella esterna. Si osserva inoltre la presenza di discontinuità all'interfaccia dovuta come discusso precedentemente alle tensioni di taglio (figura 4.3).

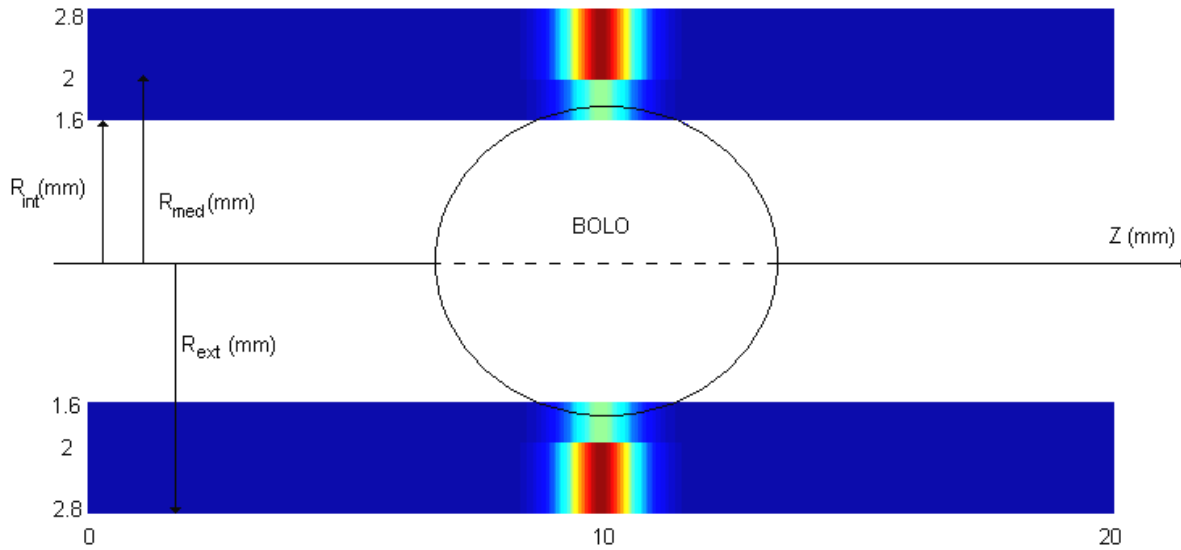


Figura 4.3: Andamento delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 4.5.

Se si considera anche la presenza di deformazioni residue nel calcolo delle tensioni, si osserva che queste variano da un valore minimo sulla superficie interna di ciascuno strato fino a un valore massimo sulla superficie esterna e che i valori di tensione, come viene evidenziato nella figura 4.5 risultano inferiori a quelli che si avrebbero in assenza di queste deformazioni. Tuttavia risulta ancora presente una certa discontinuità all'interfaccia seppur minore rispetto a quella osservata nella figura precedentemente.

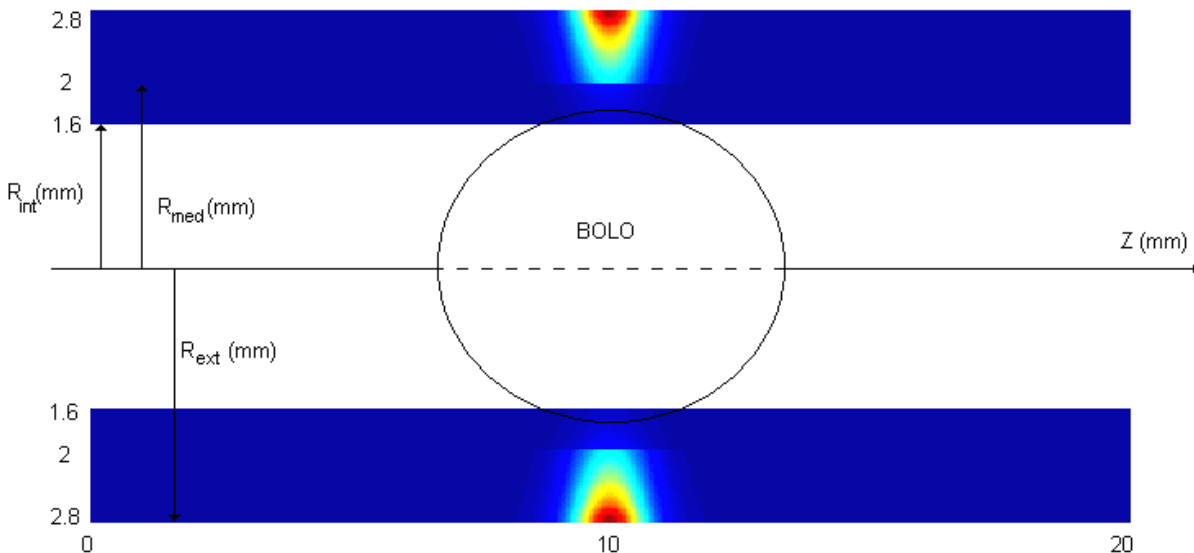


Figura 4.4: Andamento delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in presenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 4.5.

Come si era visto precedentemente, anche in questo caso grazie alla presenza delle deformazioni residue il valore della tensione nella mucosa è inferiore rispetto al caso in cui tali deformazioni siano assenti (figura 4.5) limitando così il rischio di lesioni alla parete interna durante il passaggio di un bolo.

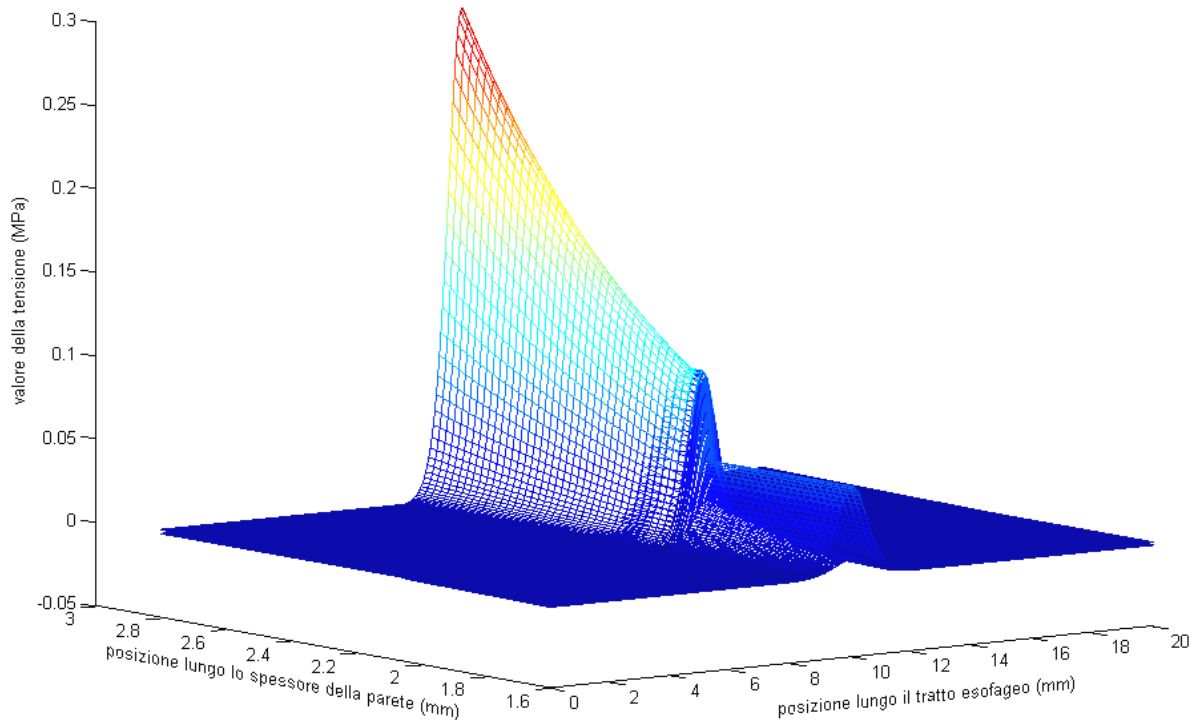


Figura 4.5: Confronto tra gli andamenti delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza ed in presenza di deformazioni residue.

Valutando l'andamento delle tensioni circonferenziali al passaggio del bolo al variare della posizione lungo la direzione assiale del tratto esofageo si osserva che queste variano da un valore minimo nelle regioni in cui non c'è contatto tra il bolo e la parete ad un valore massimo in corrispondenza del massimo diametro del bolo. Nella figura seguente si fa notare tale variazione degli andamenti distinguendo il caso di assenza di deformazioni residue (sinistra) dal caso in cui tali deformazioni sono invece presenti (destra) ed evidenziando ancora come in quest'ultima situazione le tensioni nella mucosa sono inferiori e minore è anche la discontinuità all'interfaccia tra i due tessuti.

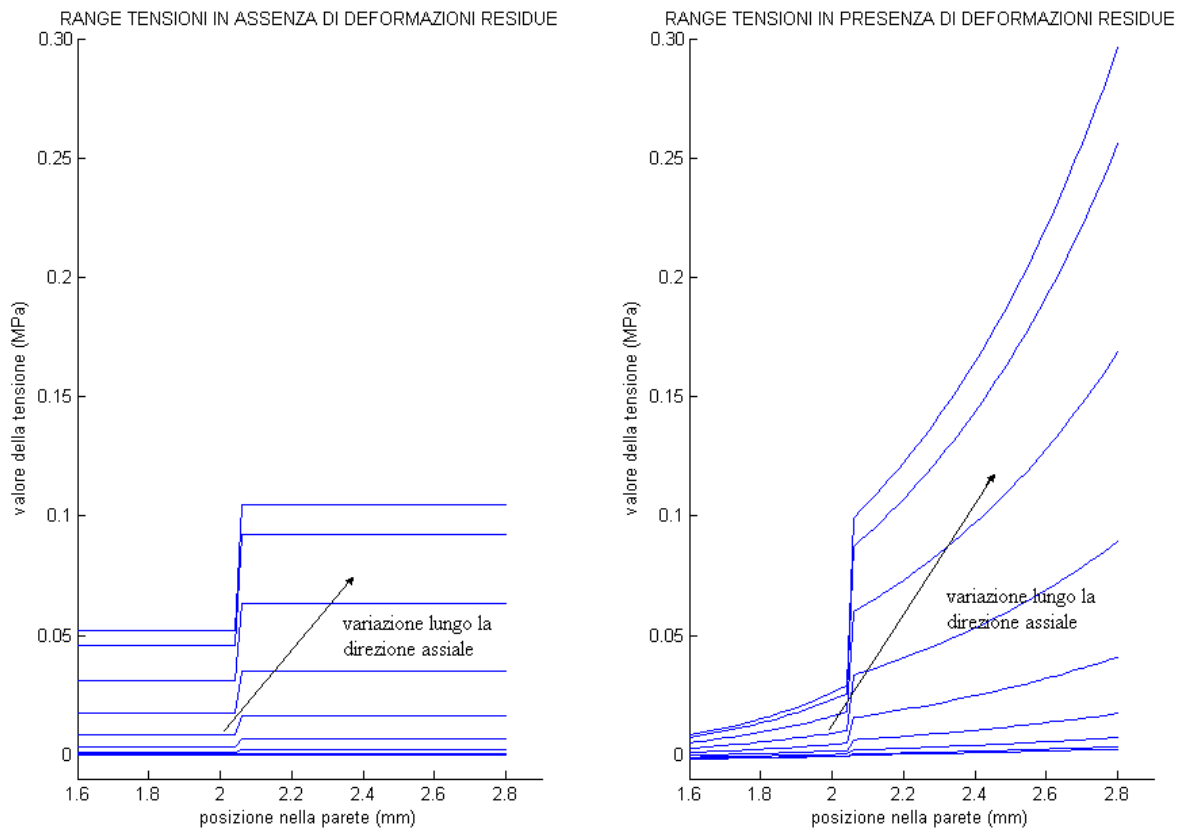


Figura 4.6: Confronto tra i range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue.

Infine in quest'ultima figura (figura 4.7) si vuole ancora osservare come varia la tensione massima che si sviluppa all'interno della parete tessutale al variare dell'ampiezza del bolo che vi scorre. Si nota dunque che, come ci si poteva immaginare, le tensioni sviluppate nella parete aumentano all'aumentare del parametro che modula l'ampiezza di deformazione indotta dal bolo. Come si può verificare poi dalla figura di destra, tale variazione è comunque ridotta dalla presenza delle deformazioni residue, soprattutto nella mucosa, limitando così il rischio di lesioni alla parete interna del condotto esofageo.

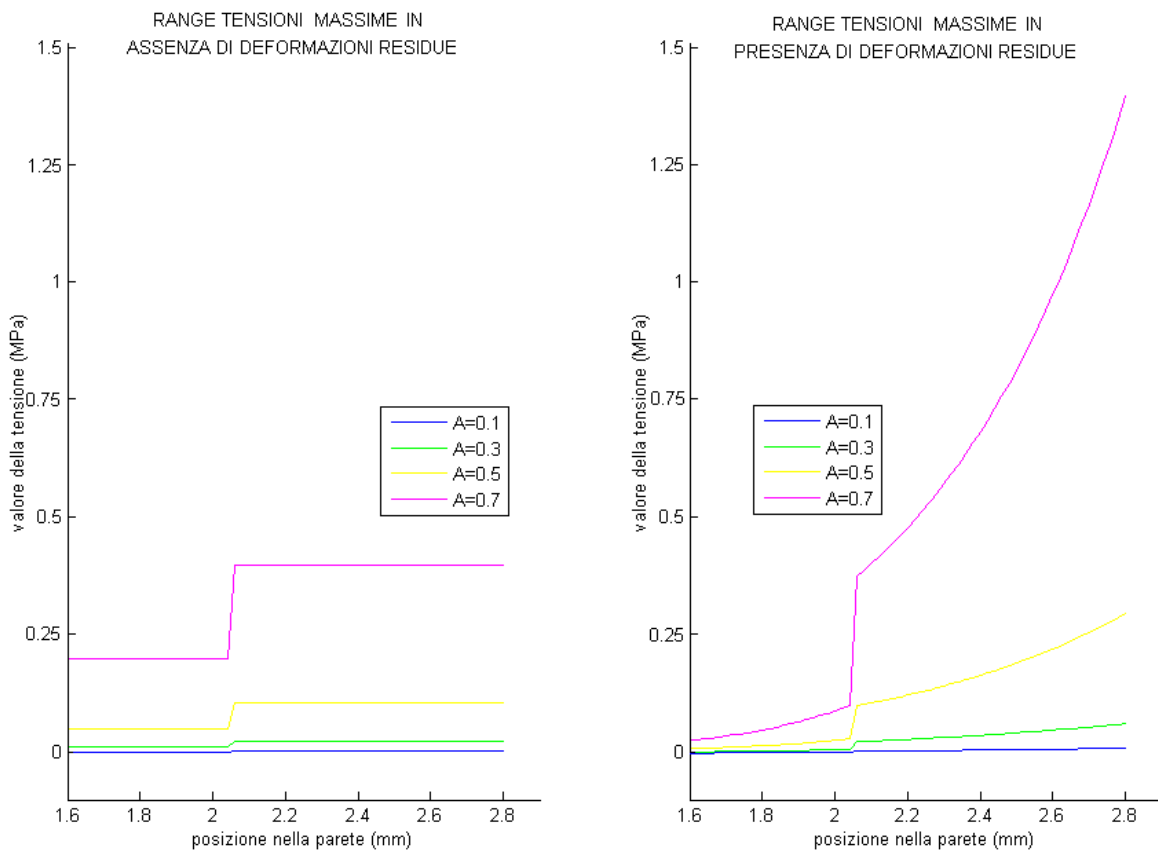


Figura 4.7: Relazione tra le variazioni dei range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue al variare dell'ampiezza di deformazione.

Contrariamente a quanto osservato per il modello bitessutale isotropo, in questo caso la presenza di fibre porta a uno sviluppo delle tensioni maggiore nella parte muscolare esterna rispetto alla mucosa interna durante il passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue. Questo fenomeno è spiegato dal fatto che le fibre conferiscono ai tessuti maggior rigidità in relazione alla direzione secondo cui sono disposte. La presenza quindi di fibre muscolari in direzione circonferenziale porta ad un aumento della tensione che si sviluppa secondo questa direzione. Si osservano quindi in questa regione valori delle tensioni circonferenziali maggiori rispetto al caso in cui tali fibre non venivano considerate.

Considerando poi la presenza di deformazioni residue si osserva come le tensioni siano ridotte di molto nella parte interna mentre subiscono un incremento nella parete esterna. Questo perché a parità di valori di deformazione, la presenza di fibre, con conseguente aumento di rigidità del tessuto, porta ad un incremento della tensione in compressione indotta dalle deformazioni residue nella parete interna che va a contrapporsi alla tensione in trazione che si sviluppa conseguentemente al passaggio di un bolo mentre, per la parete esterna i due contributi si vanno a sommare l'un l'altro. Il fatto poi che la presenza di fibre porti ad un aumento di rigidità è evidente anche dalla scala delle tensioni i cui valori, per valori uguali di deformazione, sono passati dall'ordine dei KPa ai MPa.

4.3 Modello bitessutale anisotropo con profilo di deformazione residua non lineare

In quest'ultimo paragrafo è stato infine valutato l'andamento delle tensioni circonferenziali che si sviluppano al passaggio di un bolo di dimensione variabile per quest'ultima tipologia di modello proposta. A tal fine è stato ipotizzato un andamento delle deformazioni residue presenti all'interno della parete esofagea di tipo non lineare. Dopo alcune valutazioni e tentativi è stata utilizzata una funzione descritta dalla seguente legge matematica:

$$\lambda = a \cdot (r - 1.58)^{1/2} - b \cdot (r - 1.58)^{-1/2} + c$$

il cui andamento è visualizzato nella successiva figura:

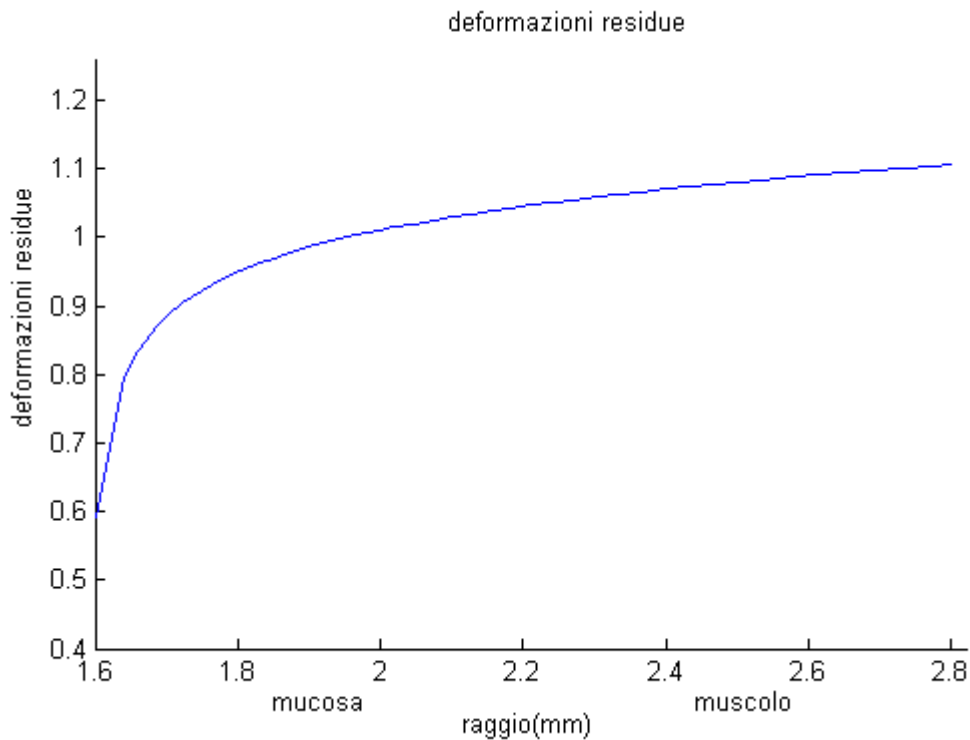


Figura 4.8: Andamento della deformazione residua ipotizzato.

Si è ricercata una funzione con questo tipo di andamento con l'intento di perseguire alcune ipotesi. Si suppone di fatti che la deformazione residua sia grande lungo la parete interna al fine di ridurre lo stato di tensione che si viene a creare al passaggio di un bolo e di conseguenza limitare il rischio di lesioni alla parete stessa. L'andamento prevede poi una crescita fino allo strato muscolare passando così da compressione a trazione. In questa regione l'andamento cresce poi lentamente e i suoi valori non si discostano di molto dalla condizione di equilibrio $\lambda=1$ al fine di non aumentare eccessivamente l'intensità della tensione che si osserva nella regione muscolare al passaggio di un bolo e da limitare così il rischio di lesioni. Infine la giustificazione della continuità dell'andamento della deformazione è da ricercarsi nel fatto che se vi fossero valori di deformazione residua all'interfaccia tra i diversi tessuti troppo differenti tra loro si dovrebbe osservare uno scollamento tra gli strati componenti la parete stessa, cosa che invece non si osserva in natura.

4.3.1 Analisi di dati sperimentali

Descritta così la forma della curva usata per definire l'andamento delle deformazioni residue, si è reso necessario valutare quali fossero i valori da assegnare ai parametri a, b, c. A tal fine sono state inizialmente considerate tutte le combinazioni di questi parametri che rispettavano numericamente la condizione di equilibrio delle tensioni:

$$\int_{r_i}^{r_o} \sigma \, dr = 0$$

Successivamente è stata scelta tra queste quella che fittava al meglio l'andamento sperimentale della deformazione circonferenziale residua minimizzando la funzione costo:

$$\min_x \sum_i (y_{\text{modello}} - y_{\text{sperimentale}})^2$$

Pur sapendo che l'andamento della funzione creata non poteva fittare perfettamente i dati sperimentali in quanto si basava su alcune ipotesi che lo vincolavano, sono stati ugualmente usati i dati sperimentali ricavati dalla letteratura al fine di scegliere tra tutte le curve che rispettavano la condizione di equilibrio quella che presentava un andamento maggiormente confrontabile, figura(NUMERO).

Sono stati così ricavati i seguenti valori dei parametri a, b, c:

$$a = 0.1;$$

$$b = 0.0624;$$

$$c = 1.04.$$

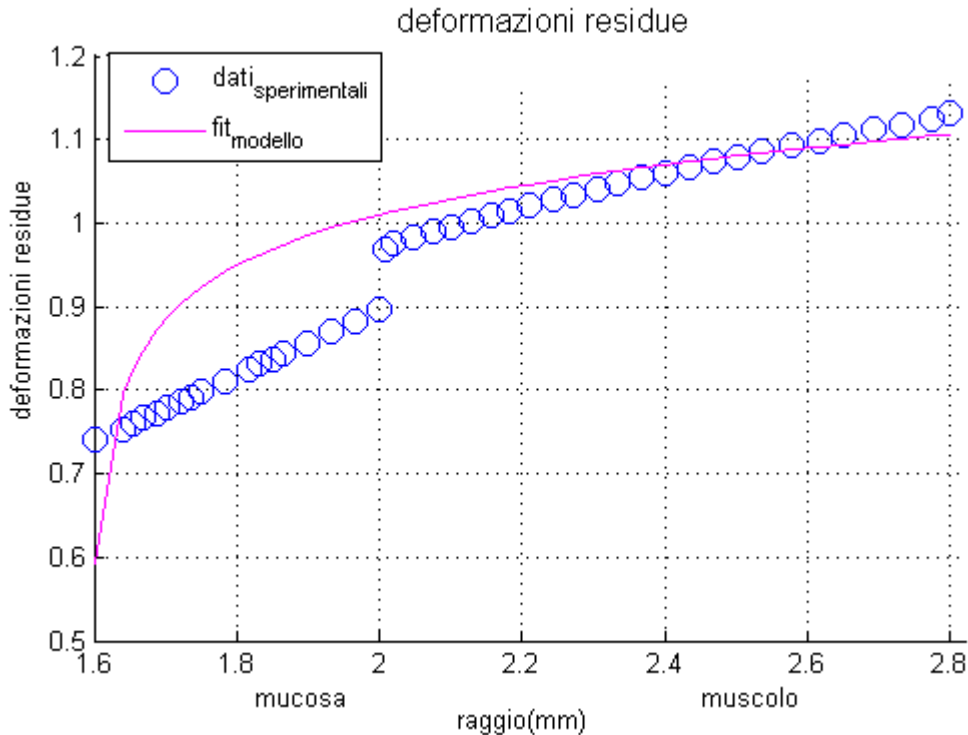


Figura 4.9: Confronto tra i dati sperimentali relativi all'allungamento in direzione circonferenziale in riferimento al true zero-stress state e i dati ricavati per via numerica.

Come si può osservare dalla figura è verificata la presenza di uno stato di compressione nella parete interna e di tensione per quella esterna. In particolar modo, come voluto nelle ipotesi che descrivevano l'andamento della curva ricercata, la compressione che si osserva soprattutto in prossimità della parete interna risulta accentuata mentre la tensione che si sviluppa nella regione muscolare è inferiore.

4.3.2 Formulazione dei gradienti di deformazione

Nel valutare il gradiente della deformazione indotta dal passaggio di un bolo è stata utilizzata la formulazione dei casi precedenti. Assumendo sempre trascurabili le deformazioni lungo la direzione assiale si ha:

$$\lambda_z^b = 1$$

e per il principio di incomprimibilità si ricava la componente radiale dalla relazione:

$$\lambda_r^b = \frac{1}{\lambda_\theta^b \lambda_z^b}$$

dove la deformazione lungo la direzione circonferenziale è ancora:

$$\lambda_{\theta}^b = 1 \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [0, z_0] \vee [z_1, 1]$$

$$\lambda_{\theta}^b = A \left[\sin \left(\left(\frac{2\pi}{z_1 - z_0} \right) z + \frac{\pi}{2} \left(\frac{3z_1 - 7z_0}{z_1 - z_0} \right) \right) + 1 \right] \quad \forall (r, \theta, z) \in \Omega : z \in [z_0, z_1]$$

Ricavate così le tre componenti principali di deformazione, il gradiente di deformazione \mathbf{F}^b è ancora una volta descritto dalla matrice:

$$\mathbf{F}^b = \begin{bmatrix} \lambda_r^b & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta}^b & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \end{bmatrix}$$

Per quanto concerne invece le deformazioni residue, in questo caso è stato adottato il profilo di deformazione non lineare descritto dai parametri precedentemente ricavati imponendo l'equilibrio delle tensioni. Si ottiene così per la direzione circonferenziale:

$$\lambda_{\theta}^r = 0.116 \cdot (r - 1.58)^{1/2} - 0.068 \cdot (r - 1.58)^{-1/2} + 1.04$$

mentre per le altre due direzioni si ha:

$$\lambda_z^r = 1$$

$$\lambda_r^r = \frac{1}{\lambda_{\theta}^r \lambda_z^r}$$

rispettivamente per la direzione longitudinale e per la direzione radiale ottenute rispettando il principio di incomprimibilità, da cui si definisce il gradiente di deformazione residua:

$$\mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta}^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^r \end{bmatrix}$$

4.3.3 Valutazione della distribuzione delle tensioni

Come già visto in precedenza, il primo step è stato calcolare il gradiente di deformazione totale \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^b \cdot \mathbf{F}^r = \begin{bmatrix} \lambda_r^b \lambda_r^r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta}^b \lambda_{\theta}^r & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z^b \lambda_z^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 & 0 \\ & \lambda_{\theta} & 0 \\ \text{Sym} & & \lambda_z \end{bmatrix}$$

Successivamente si è passati al calcolo delle tensioni che si sviluppano nel dominio Ω della parete esofagea usufruendo delle relazioni definite nel paragrafo 4.2.2 e ricordando che $\forall r_0 \leq r \leq r_1$ si utilizzano i parametri relativi alla mucosa riportati in tabella 4.1 mentre $\forall r_1 < r \leq r_2$ quelli relativi al tessuto muscolare.

Dal confronto delle seguenti figure che visualizzano l'andamento delle tensioni in assenza (figura 4.10) ed in presenza (figura 4.11) di deformazioni residue si può osservare che nel primo caso l'andamento delle tensioni indotte dal passaggio di un bolo è costante all'interno dello spessore di entrambi i materiali muovendoci dalla superficie interna verso quella esterna con una certa discontinuità all'interfaccia indicante ancora una volta la presenza di tensioni di taglio, mentre in presenza di deformazioni residue si osserva che queste variano da un valore minimo sulla superficie interna di ciascuno strato fino a un valore massimo sulla superficie esterna.

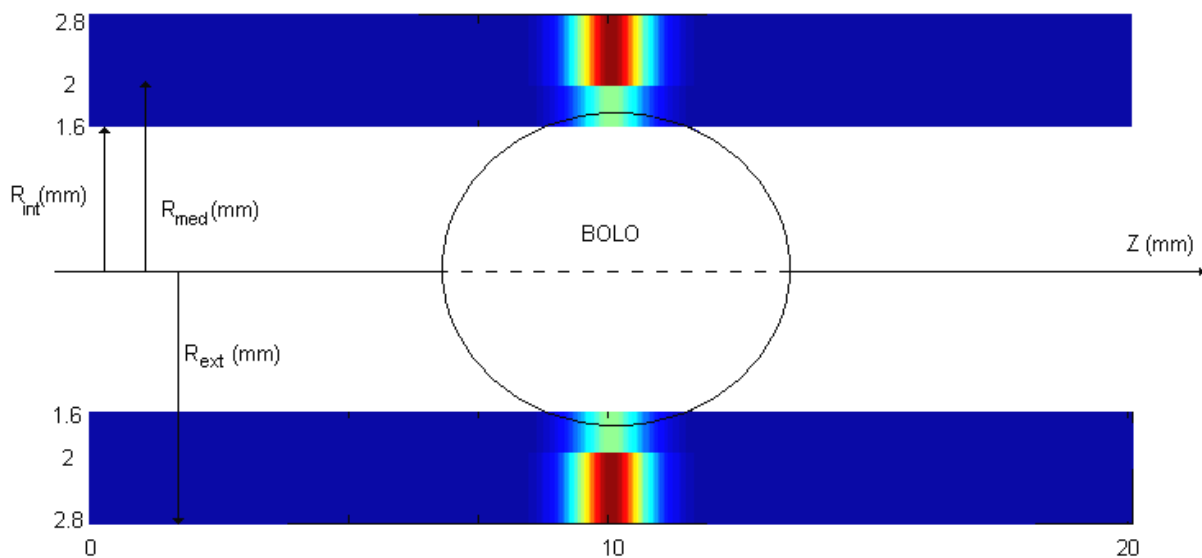


Figura 4.10: Andamento delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in assenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 4.12.

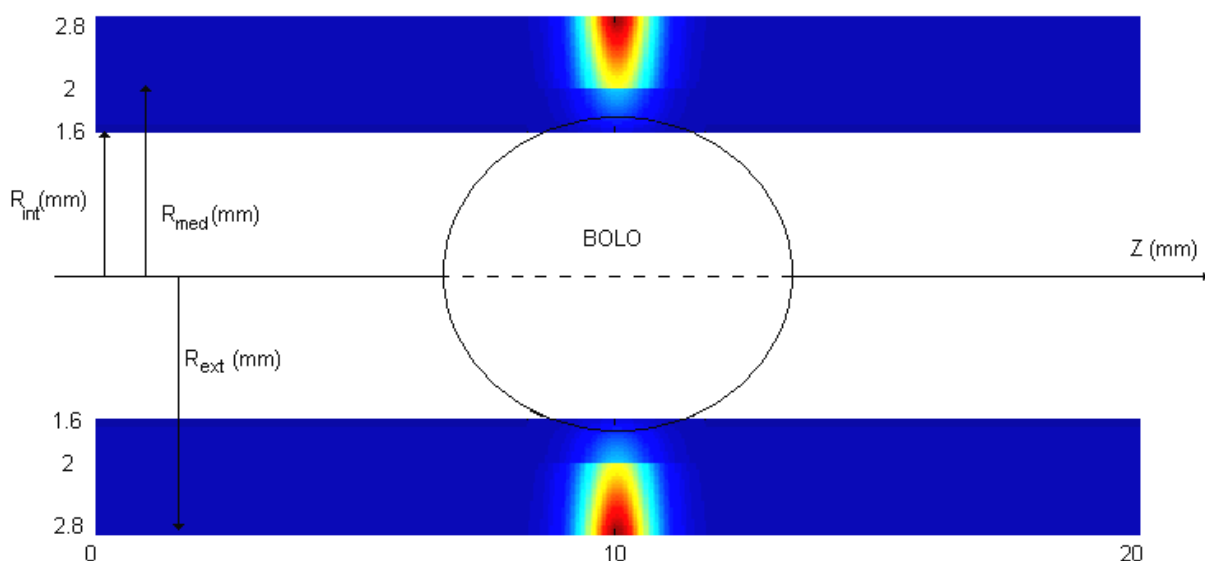


Figura 4.11: Andamento delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea costituita da mucosa e muscolo in relazione al passaggio di un bolo in presenza di deformazioni residue; per gli ordini di grandezza fare riferimento alla figura 4.12.

Confrontando ora i valori di tensione si osserva ancora un decremento dell'intensità delle tensioni in presenza di deformazioni residue. Si osserva inoltre una gran diminuzione soprattutto sulla parete interna dove tali deformazioni sono più accentuate mentre, spostandosi lungo lo spessore della parete ove tale contributo viene meno si osserva come queste assumano nella mucosa valori prossimi a quelle ottenute in assenza di deformazioni residue, in quanto la diminuzione del contributo delle deformazioni residue è molto rapida, mentre nella parete muscolare si osserva come le tensioni indotte aumentino più lentamente tendendo ora ad un valore limite (figura 4.12).

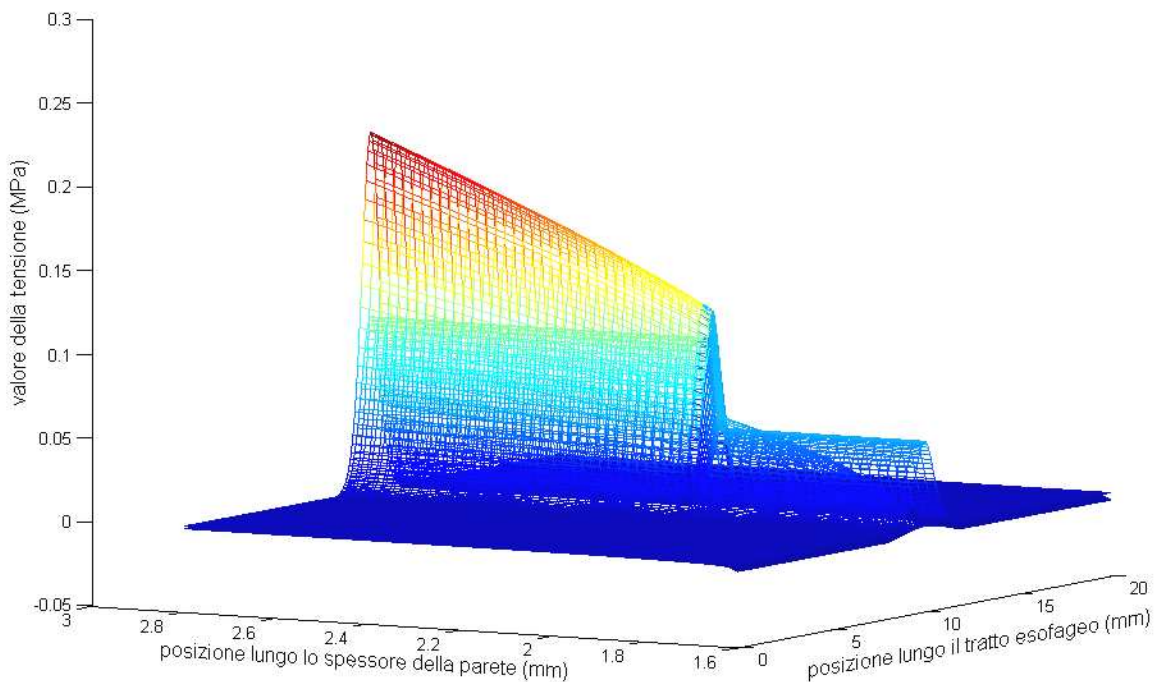


Figura 4.12: Confronto tra gli andamenti delle tensioni lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza ed in presenza di deformazioni residue.

Osservando infine l'andamento delle tensioni circonferenziali ottenute secondo questo modello al variare della posizione lungo la direzione assiale (figura 4.13) si osserva un andamento che riflette quelli ottenuti precedentemente ovvero una variazione da un valore minimo nelle regioni in cui non c'è contatto tra il bolo e la parete ad un valore massimo in corrispondenza del massimo diametro del bolo distinguendo il caso di assenza di deformazioni residue (sinistra) dal caso in cui tali deformazioni sono invece presenti (destra).

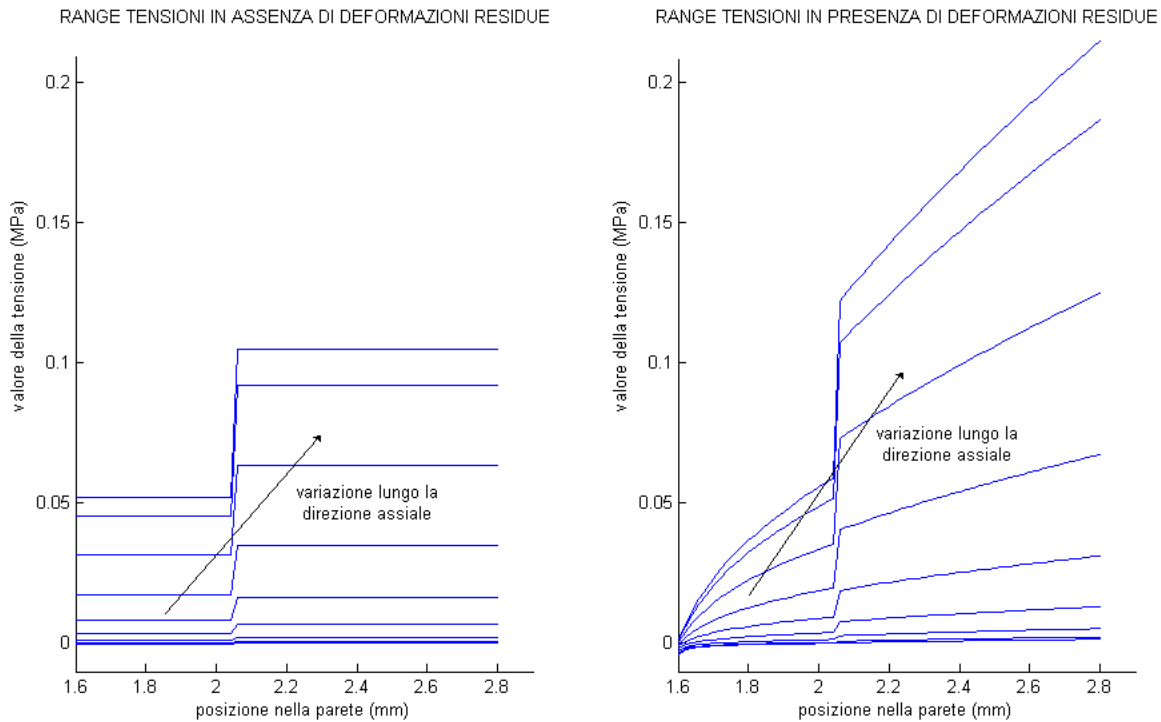


Figura 4.13: Confronto tra i range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue.

Per quanto concerne invece la variazione delle tensioni massime che si sviluppano al variare dell'ampiezza del bolo transitante nel condotto esofageo si può osservare in figura 4.14 come le tensioni sviluppate nella parete aumentano all'aumentare dell'ampiezza di deformazione ma grazie alla presenza delle deformazioni residue (destra) tale aumento è comunque limitato nella mucosa, specialmente nella parete interna che è la regione maggiormente soggetta a lesioni verificando così la proprietà di meccanismo di autoprotezione associato a tali deformazioni residue. Così concludendo la presenza di fibre all'interno del condotto tubolare comporta una maggiore rigidità del tessuto stesso, riducendo le tensioni che si sviluppano soprattutto nella parete interna della mucosa limitando il rischio di lesioni.

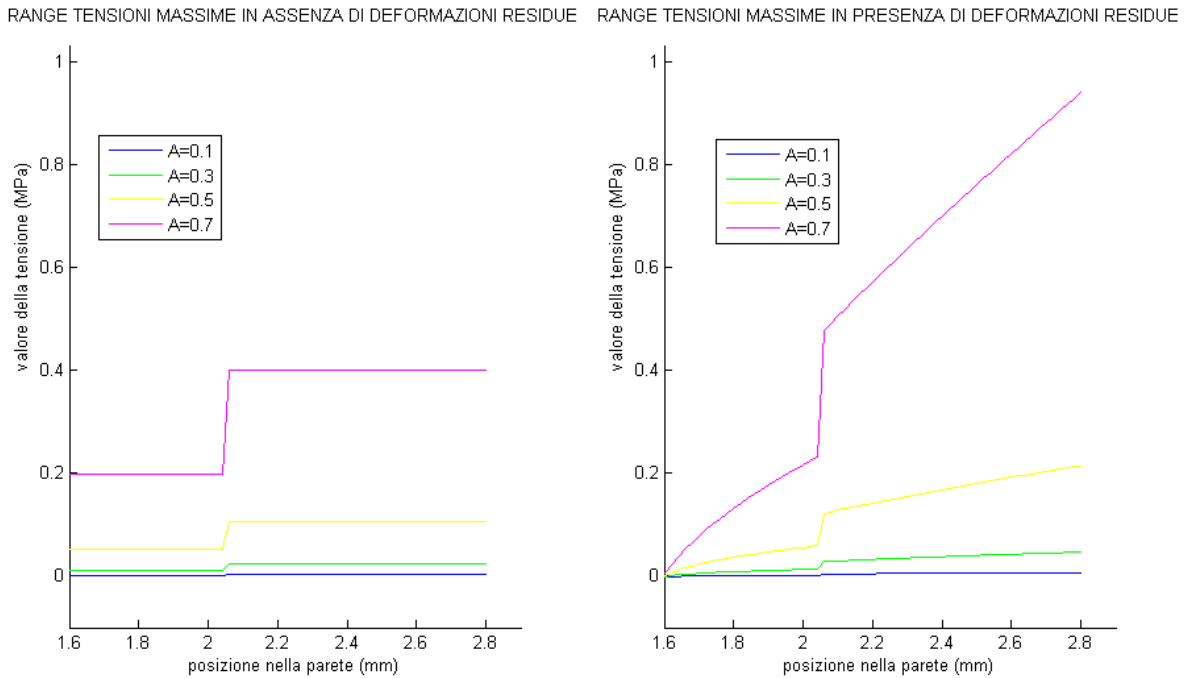


Figura 4.14: Relazione tra le variazioni dei range di tensione lungo lo spessore della parete esofagea in relazione al passaggio di un bolo in assenza (sinistra) ed in presenza (destra) di deformazioni residue al variare dell'ampiezza di deformazione.

4.3.4 Analisi dell'influenza del profilo di deformazione residua sulle tensioni indotte

A conclusione delle analisi svolte, in questo paragrafo si intende valutare come differenti andamenti di deformazione residua influiscano sulle tensioni indotte dal passaggio di un bolo. Sono dunque stati ipotizzati tre andamenti di deformazione residua non lineari del tipo:

$$\lambda_{\theta} = a \cdot (r - 1.58)^{1/2} - b \cdot (r - 1.58)^{-1/2} + c$$

Imponendo poi la condizione di equilibrio statico delle tensioni che deve sempre essere soddisfatta, sono state ricavate tre famiglie di parametri caratterizzanti ciascuna un profilo di deformazione:

	a	b	c
profilo 1	0.12	0.068	1.02
profilo 2	0.08	0.046	1.01
profilo 3	0.148	0.084	1.04

Nella figura seguente (figura 4.15) vengono mostrati nello stesso grafico i tre andamenti di deformazione residua ricavati.

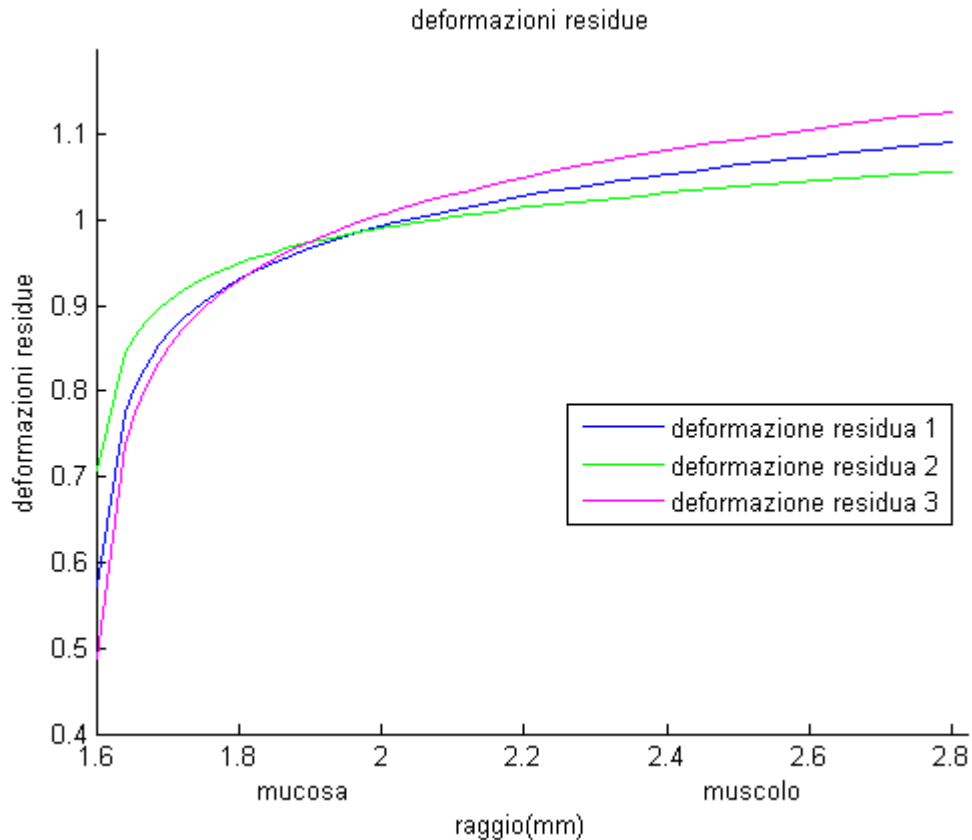


Figura 4.15: Andamenti delle deformazioni residue ipotizzate.

Come si può vedere l'andamento numero due rispetto all'andamento numero uno mira ad imprimere una deformazione residua di inferiore entità, infatti graficamente la sua curva è per la regione della mucosa superiore a quella dell'andamento uno, mentre per la regione muscolare è inferiore a tale andamento. Essendo la curva due rispetto alla curva numero uno più vicina al valore di deformazione residua pari ad 1, numericamente questo sta a significare che la deformazione residua impressa è maggiore nel primo caso rispetto al secondo. Analogamente a quanto detto fin'ora si ha che la deformazione residua che si intende imprimere con l'andamento numero 3 è maggiore rispetto a quella impressa con l'andamento numero 1.

A questo punto sono stati utilizzati per l'analisi delle tensioni indotte dal passaggio di un bolo quattro boli di differente ampiezza: 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 mm, sono stati calcolati i quattro gradienti di deformazione per ogni tipologia di deformazione residua valutata (come riportato nei paragrafi 4.3.2-3) e per ciascuno di questi sono state ricavate le tensioni indotte nella parete. Nelle seguenti figure vengono riportati in forma grafica i risultati delle deformazioni indotte da ciascun bolo durante il suo passaggio all'interno del condotto esofageo.

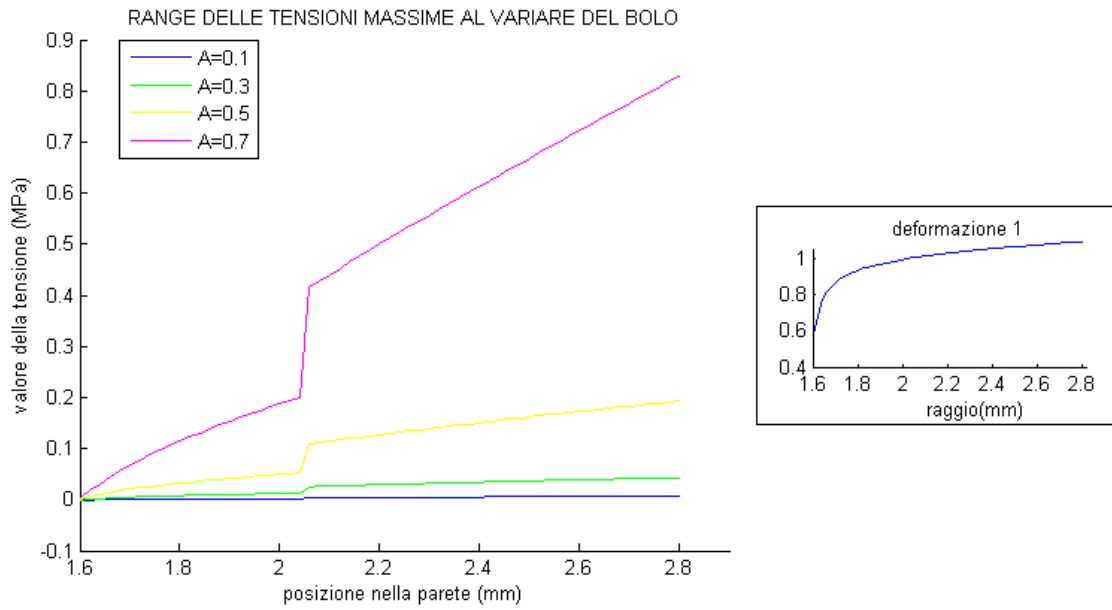


Figura 4.16: Andamento delle tensioni indotte dal passaggio di quattro boli di differente ampiezza nel caso in cui la deformazione residua sia descritta dall'andamento numero uno.

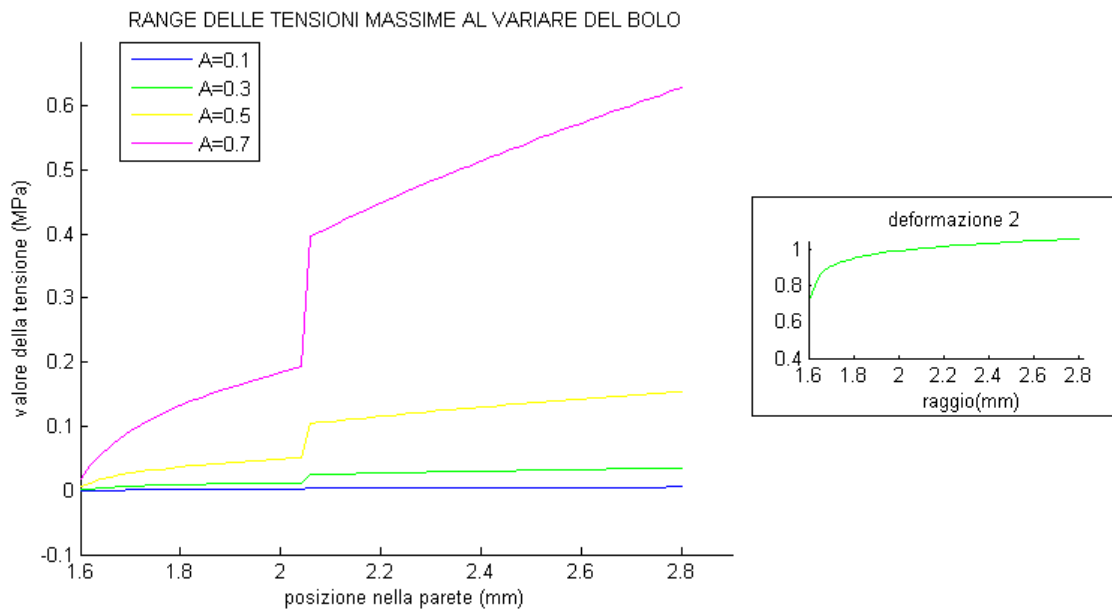


Figura 4.17: Andamento delle tensioni indotte dal passaggio di quattro boli di differente ampiezza nel caso in cui la deformazione residua sia descritta dall'andamento numero due.

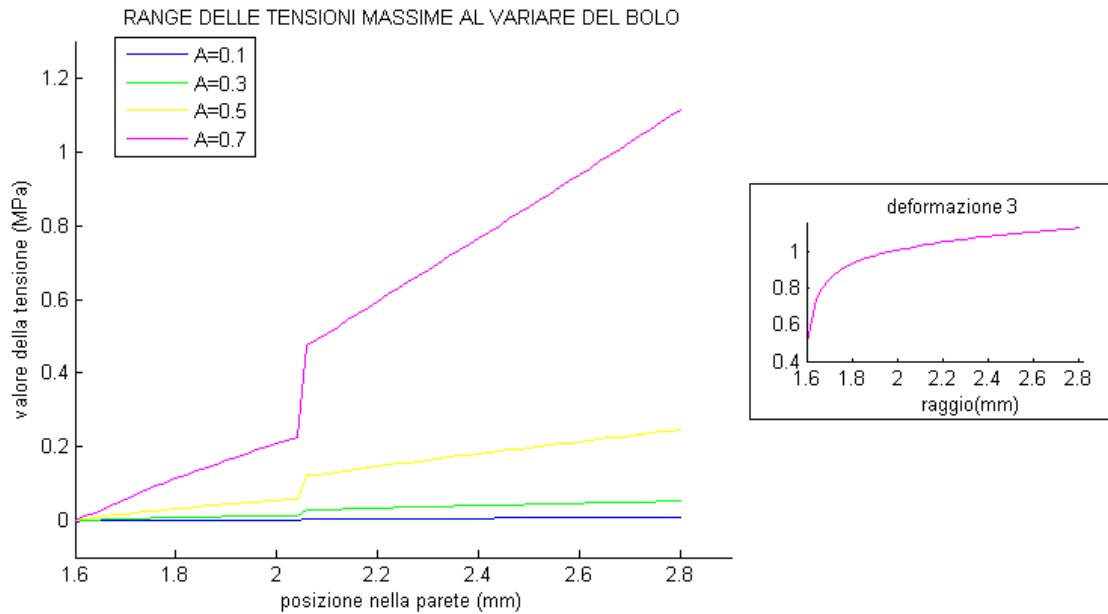


Figura 4.18: Andamento delle tensioni indotte dal passaggio di quattro boli di differente ampiezza nel caso in cui la deformazione residua sia descritta dall'andamento numero tre.

Nella figura seguente (figura 4.19) sono stati invece messi a confronto tre andamenti ottenuti mantenendo costante l'ampiezza del bolo ma variando l'intensità della deformazione residua. L'obiettivo è stato quello di valutare appunto come l'intensità delle tensioni indotte dipenda dallo stato di deformazione residua presente nel tessuto.

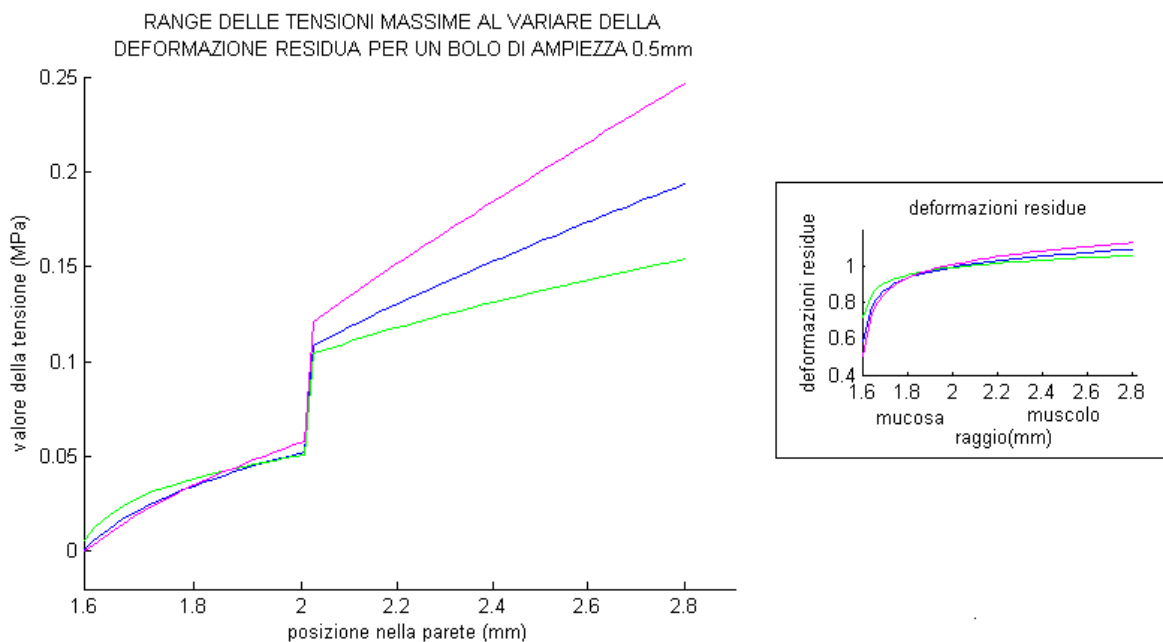


Figura 4.19: Andamento delle tensioni massime indotte dal passaggio di un bolo al variare dell'entità della la deformazione residua.

Come ci si poteva immaginare, all'aumentare dell'entità della deformazione residua corrisponde una diminuzione della tensione indotta nella parete ove la deformazione residua era di compressione, mentre si osserva un aumento della tensione indotta ove la deformazione residua era di trazione. A prova di ciò si osserva di fatto che nella regione della mucosa le tensioni aumentano al diminuire dell'entità della deformazione residua, rispettivamente andamenti tre, uno e due delle deformazioni residue, mentre nella regione muscolare si osserva il contrario, ovvero le tensioni aumentano all'aumentare dell'intensità della tensione residua, rispettivamente andamenti due, uno e tre delle deformazioni residue. Questo perché, come discusso precedentemente, lo stato di compressione presente nella mucosa porta a una diminuzione delle tensioni indotte nella parete al passaggio di un bolo mentre lo stato di tensione presente nella regione muscolare si somma alla tensione indotta dal bolo stesso. È quindi evidenziato il meccanismo di autoprotezione riscontrabile nella parete esofagea ovvero maggiore è l'entità della deformazione residua sulla superficie interna della mucosa esofagea, minore è la tensione indotta nella parete durante la fase di deglutizione di un bolo alimentare e dunque è minore il rischio di lesioni a tale superficie.

Conclusioni e prospettive future

L'esperienza condotta ha permesso di valutare l'influenza dello stato di pretensionamento indotto dalle deformazioni residue presenti in organi cavi, quali sono i tratti componenti il condotto gastrointestinale, sulle tensioni indotte dall'interazione tra le pareti di questi tessuti e il materiale che scorre in essi, con particolare attenzione per il segmento esofageo.

Un'analisi iniziale dei metodi utilizzati per la caratterizzazione dello stato di zero-stress, stato in cui su un campione non agiscono forze esterne, ha permesso di identificare le variabili adatte a valutare l'andamento delle deformazioni residue all'interno di strutture cave.

Grazie all'uso di queste variabili che hanno consentito di valutare la distribuzione delle deformazioni residue presenti in un organo tubolare cavo, è stato constatato che tali deformazioni sono rilevanti soprattutto lungo la direzione circonferenziale mentre lungo la direzione radiale e longitudinale sono in prima approssimazione trascurabili. Da questa analisi si è dedotto che lo strato muscolare è soggetto ad uno stato di tensione, in quanto la variazione dell'opening angle è negativa. La mucosa, invece, è soggetta a uno stato di compressione, in quanto la variazione dell'opening angle è positiva.

In aggiunta è stato poi ipotizzato che la tensione residua all'interno della fascia muscolare porti questa a una lunghezza migliore per la contrazione muscolare stessa in fase peristaltica; questa è però solo un'ipotesi che per quanto possa essere plausibile deve ancora essere verificata.

La successiva analisi ha permesso di valutare i vincoli relativi ai parametri che descrivono diversi profili ipotizzati per le deformazioni residue presenti in organi cavi al fine di assicurare la condizione di equilibrio statico nello stato di no-load, stato in cui non vi sono forze esterne agenti sulle pareti tessutali. Tale condizione è fondamentale perché caratterizza i tessuti cavi come l'esofago quando non sono soggetti ad interazioni con materiali ingeriti come boli o sonde endoscopiche usate per analisi cliniche.

Valutate dunque tali condizioni, si è passati a definire alcuni modelli costitutivi per il condotto esofageo osservando che, tra tutti i modelli considerati, il modello bitessutale anisotropo fibrorinforzato è il miglior punto di partenza per valutare l'effetto dello stato di pretensionamento sulle tensioni indotte dal passaggio di un bolo.

Simulando dunque un profilo di deformazione indotto dal passaggio di un bolo lungo il condotto esofageo è stata osservata l'influenza del suddetto stato di pretensionamento. È stato constatato che la presenza delle deformazioni residue influisce sullo scorrimento del bolo inducendo una diminuzione delle tensioni indotte nella parete interna e riducendo così il rischio di lesioni conseguenti al passaggio del bolo stesso. Tali deformazioni residue sono altresì un modo naturale per resistere alle pressioni che si sviluppano lungo tutto il condotto gastrointestinale soggetto all'azione della peristalsi. Infatti, ad esempio, la compressione della mucosa lungo il tratto duodenale favorisce una maggiore protezione da danni che potrebbero essere provocati dai frequenti cambiamenti di pressione indotti dalle contrazioni peristaltiche del tessuto muscolare per far scorrere il chimo rilasciato dallo stomaco, mentre la compressione della mucosa nell'esofago è molto importante ai fini di prevenire fenomeni quali il reflusso gastroesofageo.

Questo studio mira ad essere un punto di partenza per l'analisi di ulteriori conseguenze dello stato di pretensionamento. Studi successivi potrebbero essere intesi a valutare se sia la rapida crescita e il frequente turnover della mucosa a causare uno stato di compressione in questa regione con il conseguente sviluppo di tensioni residue oppure se vi siano queste tensioni residue alla base dei fenomeni di rimodellamento tessutale essendo proprio lo stress meccanico un importante fattore per la regolazione dell'espressione genica e della crescita tessutale.

In secondo luogo si potrebbe verificare se l'assorbimento del chimo presente nel tratto intestinale può essere influenzato anch'esso dalla compressione residua della mucosa dipendendo tale assorbimento dalla pressione presente nel lume del condotto.

Sarebbe infine interessante valutare la dipendenza della risposta delle differenti popolazioni di meccanocettori presenti all'interno sia della sub-mucosa che della muscolatura, che trasmettono impulsi al cervello riguardanti la percezione di eventi nella regione viscerale, quali nausea, fame, dolore, e che presentano soglie a diversi livelli di intensità, ad uno stesso stimolo in relazione alla diversa entità delle deformazioni residue presenti.

APPENDICI

Appendice A

Visto che la contrazione attiva dei muscoli è la caratteristica più importante del movimento peristaltico del duodeno, si intende ora valutare il metodo di gestione dei muscoli. A tal fine ci si riconduce alla discussione del modello a tre elementi ideato da A. V. Hill in cui si vuole rappresentare un muscolo attraverso una struttura macroscopica che ne possa contenere le caratteristiche principali. I suoi studi lo portarono a ritenere che la risposta transitoria di un muscolo attivato assomigliava a quella di un sistema viscoelastico passivo. Nel modello proposto i tessuti sono caratterizzati da una combinazione in serie di due elementi per descrivere la contrazione muscolare attiva:

- l'elemento contrattile "CE": vorrebbe essere composto da un generatore di forza istantaneo (dato che il sarcomero segue la legge del tutto o del nulla), ma fenomenologicamente si vede che c'è un ritardo di tipo viscoso, per cui è accoppiato in parallelo ad un pistone smorzante.

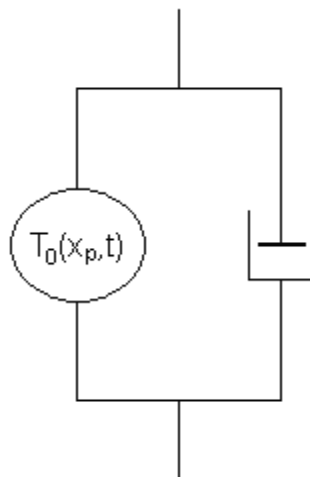


Figura a.1: Schema dell'elemento contrattile.

- l'elemento elastico serie "SE": responsabile della forza istantanea del muscolo, rappresenta l'elasticità determinata dai filamenti di actina e miosina e dai cross-bridge.

e da un elemento connesso in parallelo:

- l'elemento elastico parallelo "PE": rappresenterebbe la risposta elastica non lineare del tessuto connettivo, del sarcolemma (membrana cellulare del muscolo) e delle interazioni residue tra i miofilamenti.

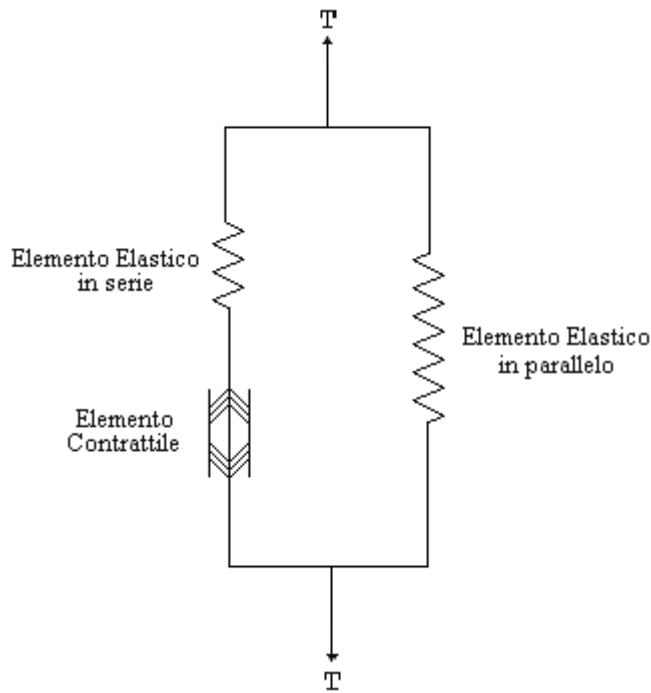


Figura a.2: Schema del modello di Hill.

La separazione dell'elemento contrattile ed elastico del muscolo in due differenti entità connesse in serie è la caratteristica fondamentale del modello di Hill. Dal punto di vista della teoria del cross-bridge però tale separazione è artificiosa, in quanto in realtà la struttura è contemporaneamente elastica e contrattile ed è distribuita uniformemente nel tessuto contrattile. Questo modello è stato comunque ampiamente applicato negli studi di meccanica per il cuore, polmoni, e vasi sanguigni. Portando l'attenzione sul tratto gastrointestinale si pone in relazione la mucosa, la submucosa, ed i muscoli a riposo con l'elemento parallelo, mentre l'elemento contrattile e l'elemento elastico posto in serie corrispondono ai muscoli attivi. L'effetto dello zero-stress state sulla fisiologia non poteva essere pienamente evidente prima dell'analisi del modello di Hill, ma è chiaro comunque che lo zero-stress state è una caratteristica fondamentale dell'elemento posto in parallelo. In conclusione la funzione dell'elemento contrattile dipende dunque dall'elemento parallelo. Per esempio, la lunghezza della cellula muscolare dipende dalla deformazione dell'elemento parallelo, di conseguenza la possibilità per il muscolo di raggiungere o meno la lunghezza ottimale per la sua contrazione nella relazione lunghezza-tensione dipende dallo zero-stress state dell'elemento parallelo.

Appendice B

Se consideriamo il tratto gastrointestinale come un tubo cilindrico con una parete sottile possiamo identificare tre direzioni normali lungo le quali si sviluppano le tre componenti normali del tensore di tensione: longitudinale, radiale e circonferenziale. È stato poi osservato che in un organo tubolare la maggiore tensione indotta dalla distensione delle pareti si sviluppa lungo la direzione circonferenziale. Dunque, durante l'incremento della pressione all'interno del lume del condotto la condizione di equilibrio richiede che tale pressione sia bilanciata dalle forze che si sviluppano all'interno della parete del condotto lungo appunto la direzione circonferenziale. Assumendo per ipotesi che la geometria del condotto sia cilindrica, si dimostra che la media delle tensioni circonferenziali nella parete è pari a:

$$\tau_{\theta} = \frac{pr_i}{h}$$

dove p è la pressione, r_i il raggio interno e h lo spessore (figura).

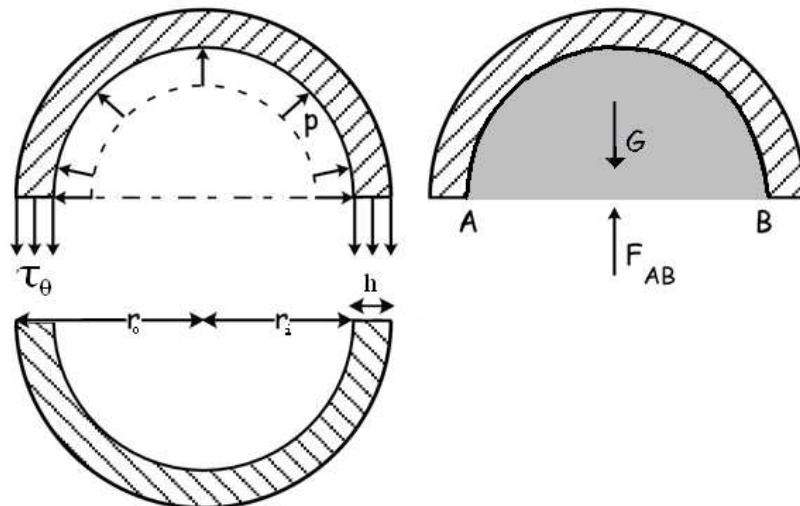


Figura b.1: Schema di una sezione di un condotto tubolare.

Questa formula che lega la tensione che si sviluppa nelle pareti di un condotto in direzione circonferenziale alla pressione interna del condotto stesso prende il nome di legge di Laplace e deriva da considerazioni fatte sulla condizione di equilibrio. Dalla figura a sinistra si osserva come l'ipotesi di una pressione uniforme su tutta la superficie interna del condotto porta a trascurare l'effetto della gravità. Tale pressione trasmette alla porzione superiore della parete stessa una forza pari a:

$$\bar{S}_{AB} = \bar{G} + \bar{F}_{AB}$$

Avendo trascurato l'effetto del peso, in questa formula non si deve dunque tener conto del contributo di \bar{G} . Ragionando in termini di forza per unità di lunghezza del condotto tubolare si ha allora che:

$$\bar{S}_{AB} = \bar{F}_{AB} = p \cdot 2r$$

Tale sollecitazione induce nella parete del condotto uno sforzo resistente τ_θ uniformemente distribuito. La reazione conseguente per unità di lunghezza sarà così pari a:

$$\bar{R} = \tau_\theta \cdot 2h$$

La condizione di equilibrio tra l'azione della sollecitazione \bar{S}_{AB} e la reazione \bar{R} fornisce dunque la relazione ricavata all'inizio.

Se la deformazione è espressa in termini di deformazione di Green, allora la tensione deve essere energeticamente correlata. Si otterrà così una tensione secondo Kirchhoff espressa nel seguente modo:

$$S_\theta = \frac{p \cdot r_i}{h \cdot \lambda_\theta^2}$$

La legge di Laplace è stata dunque largamente usata in gastroenterologia e cardiologia grazie alla sua semplicità nel descrivere i fenomeni di rottura di un condotto che si verificano in seguito a eccessive distensioni. Infine, un'altra sua importante implicazione è il legame che in tal modo si instaura tra la tensione nello spessore parietale e la pressione ed il rapporto raggio- spessore del condotto tubolare.

Bibliografia

1. J. Yang, J. Zhao, D. Liao, H. Gregersen

“Biomechanical properties of the layered oesophagus and its remodelling in experimental type-1 diabetes”

Journal of Biomechanics 39, 894-904, 2006

2. X. Lu, H. Gregersen

“Regional distribution of axial strain and circumferential residual strain in the layered rabbit oesophagus”

Journal of Biomechanics 34, 225-233, 2001

3. J. Li, J. Zhao, D. Liao, H. Gregersen

“Effect of smooth muscle tone on morphometry and residual strain in rat duodenum, jejunum and ileum”

Journal of Biomechanics 41, 2667-2672, 2008

4. C. Gao, J. Zhao, H. Gregersen

“Histomorphometry and Strain Distribution in Pig Duodenum with Reference to Zero-Stress State”

Digestive Diseases and Sciences, 45, 8, 1500-1508, 2000

5. P. Ciarletta, P. Dario, F. Tendici, S. Micera

“Hyperelastic Model of Anisotropic Fiber Reinforcements within Intestinal Walls for Applications in Medical Robotics”

The International Journal of Robotics Research 28, 1279, 2009

6. Y. Dou, Y. Fan, J. Zhao, H. Gregersen

“Longitudinal residual strain and stress-strain relationship in rat small intestine”

BioMedical Engineering OnLine, 5:37, 2006

7. J. Zhao, H. Sha, F. Zhuang, H. Gregersen
“Morphological properties and residual strain along the small intestine in rats”
World J. Gastroenterol 8, 2, 312-317, 2002
8. H. Gregersen, G. Kassab, E. Pallencaoe, C. Lee, S. Chien, R. Skalak, Y. Fung
“Morphometry and strain distribution in guinea pig duodenum with reference to the zero-stress state”
Gastrointestinal and Liver Physiology 273, 865-874, 1997
9. J. Zhao, X. Chen, J. Yang, D. Liao, H. Gregersen
“Opening angle and residual strain in a three-layered model of pig oesophagus”
Journal of Biomechanics 40, 3187-3192, 2007
10. H. Gregersen
“Residual strain in the gastrointestinal tract: a new concept”
Neurogastroenterology Motility 12, 411-414, 2000
11. D. Sokolis
“Strain-energy function and three-dimensional stress distribution in oesophageal biomechanics”
Journal of Biomechanics 43, 2753-2764, 2010
12. D. Liao, Y. Fan, Y. Zeng, H. Gregersen
“Stress distribution in the layered wall of the rat oesophagus”
Medical Engineering & Physics 25, 731-738, 2003
13. C. Gayer, M. Basson
“The effects of mechanical forces on intestinal physiology and pathology”
Cellular Signalling 21, 1237-1244, 2009

14. H. Gregersen, G. Kassab, Y. Fung

“The Zero-Stress State of the Gastrointestinal Tract: Biomechanical and Functional Implications”

Digestive Diseases and Sciences, 45, 12, 2271-2281, 2000

15. D. Liao, J. Zhao, Y. Fan, H. Gregersen

“Two-layered quasi-3D finite element model of the oesophagus”

Medical Engineering & Physics 26, 535-543, 2004

16. E. Stavropoulou, Y Dafalias, D. Sokolis

“Biomechanical and histological characteristics of passive esophagus: Experimental investigation and comparative constitutive modelling”

Journal of Biomechanics 42, 2654-2663, 2009

17. Y. Fan, J. Zhao, D. Liao, H. Gregersen

“The Effect of Digestion of Collagen and Elastin on Histomorphometry and the Zero-Stress State in Rat Esophagus”

Digestive Diseases and Sciences, 50, 8, 1497-1505, 2005

18. C. Gao, H. Gregersen

“Biomechanical and morphological properties in rat large intestine”

Journal of Biomechanics 33, 1089-1097, 2000

19. T. Zhongzhao, L. Zhaorong, L. Yihan, W. Yiqin, L. Fufeng, G. Keqin

“Study on cartilaginous and muscular strains of rat trachea”

Science in China Ser. C Life Sciences 47, 6, 485- 493, 2004

20. W. Huang, R. T. YEN

“Zero-stress states of human pulmonary arteries and veins”

Journal of J Applied Physiology 85, 867- 873, 1998

21. A. Ahluwalia

“Approccio alla biomeccanica del tessuto muscolare”

Dispensa di Bioingegneria Meccanica 1, 2003

22. Y.C. Fung

“What Are the Residual Stresses Doing in Our Blood Vessels?”

Annals of Biomedical Engineering, 19, 237-249, 1991

23. L. Zhaorong, W. Yiqin, T. Zhongzhao, X. Gang, T. Weichang

“Study on cartilaginous and muscular strains of rat trachea”

Science in China Ser. C Life Sciences 45, 2, 138- 148, 2002

24. X. Guo, X. Lu, G. Kassab

“Transmural strain distribution in the blood vessel wall”

American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology 288, 881- 886, 2005

