

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

Tesi di Laurea in  
INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

## **Controllo attivo per la sospensione di un veicolo**

Relatore  
Prof. Mauro Bisiacco

Candidato  
Federico Carbognin

Anno Accademico 2009/2010



*Alla mia ragazza Diletta,  
per avermi insegnato ad amare la vita dalle piccole cose.*



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>7</b>
1.1	Scopi e Finalità . . . . .	7
1.2	Un pò di storia . . . . .	8
1.3	Il Modello Matematico . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Modello SiSo</b>	<b>13</b>
2.1	Diagrammi di Bode e Nyquist . . . . .	13
2.2	Luogo delle radici . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Progetto del compensatore</b>	<b>21</b>
3.1	Controllo di tipo proporzionale . . . . .	21
3.2	Controllo con uno zero . . . . .	22
3.3	Controllore con poli in bassa frequenza . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Effetti delle asperità del terreno</b>	<b>35</b>
4.1	Disturbo . . . . .	35
4.2	Disturbo a gradino . . . . .	38
4.3	Disturbo a rampa . . . . .	39
4.4	Disturbo sinusoidale . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>
5.1	Confronto tra i due compensatori . . . . .	45
5.2	Vantaggi e svantaggi delle sospensioni attive . . . . .	46



# Capitolo 1

## Introduzione

### 1.1 Scopi e Finalità

Gli autoveicoli sono dotati di un sistema di sospensioni che, oltre a sorreggere il telaio del veicolo, deve isolarlo dalle irregolarità del terreno per migliorare il comfort di marcia.

Le sospensioni tendono a limitare le accelerazioni verticali della massa sospesa quando il veicolo transita su una sede stradale che presenta delle irregolarità.

Molti veicoli impiegano sospensioni di tipo passivo, che sono le più semplici ed economiche e per questo sono le più usate nei veicoli commerciali. Sono composte da un ammortizzatore (molla) e uno smorzatore viscoso in parallelo i cui parametri sono fissi e scelti dalla casa costruttrice per ottenere un valore di compromesso tra le esigenze di comfort di marcia e quelle associate alla manovrabilità del veicolo, anche in funzione dell'impronta più o meno sportiva che si vuole conferire alla guida del mezzo.

Sospensioni troppo “morbide” migliorano il comfort in quanto si deformano molto rapidamente assorbendo (e quindi compensando) le asperità e le brusche variazioni di quota della sede stradale, ma rischiano di ridurre la tenuta di strada a causa delle ampie oscillazioni verticali del veicolo e delle conseguenti ampie fluttuazioni della forza di contatto tra pneumatico e strada.

Viceversa una taratura troppo rigida garantisce migliore aderenza ma provoca un aumento delle sollecitazioni verticali sulla cassa del veicolo (basso comfort di marcia). Le macchine sportive hanno sospensioni molto rigide, prestanti in termini di assetto e tenuta di strada, ma inutilizzabili nella vita quotidiana. E' chiaro come nelle competizioni sportive l'aspetto delle prestazioni in termini di assetto e stabilità venga chiaramente privilegiato rispetto al comfort di marcia del pilota.

Si vorrebbe simultaneamente che le sospensioni fossero “morbide” verso le asperità del terreno, e “rigide” nei confronti di forze esterne e/o inerziali.

Appare chiaro come siano due specifiche contrastanti. Una sintesi efficace si traduce pertanto nell'identificazione di un buon compromesso tra le due specifiche.

Le prestazioni ottenibili con sospensioni passive sono limitate dalla semplicità dei dispositivi di attuazione e dall'insufficiente numero di gradi di libertà progettuali. In contesti "spinti", come i veicoli sportivi o di alta gamma, le prestazioni fornite da sistemi passivi sono largamente insoddisfacenti, e in tali contesti si utilizzano difatti tipologie alternative di sospensioni: le sospensioni semi-attive e le sospensioni attive.

Le sospensioni semi-attive sono anch'esse composte da un sistema molla-smorzatore in parallelo, ma c'è un attuatore e un relativo sistema di controllo in grado di variare opportunamente in linea il parametro  $f$  (costante di smorzamento) dello smorzatore.

Nelle sospensioni attive, oltre alla molla e allo smorzatore vi è in più un terzo elemento, un attuatore in grado di generare una forza interna  $U(t)$  variabile nel tempo tra la cassa del veicolo e la ruota. Tali sistemi consentono, attraverso una opportuna "modulazione" di tale forza, di stabilizzare il movimento e ottenere prestazioni nettamente superiori a quelle di un sistema passivo, e comunque in genere migliori anche di quelle di un sistema semi-attivo. Il problema di come "calibrare" tale forza sulla base delle misure disponibili è un tipico problema di controllo che, per le sue peculiarità che si indagheranno nel seguito, si presta alla applicazione delle tecniche di analisi e sintesi per sistemi lineari tempo-invarianti.

Lo scopo di questa tesina è quello di analizzare un modello meccanico relativo alla sospensione attiva e di progettare un compensatore che controlli l'attuatore per ottenere delle particolari prestazioni.

## 1.2 Un pò di storia

Ideate da un ingegnere inglese nel 1985, le sospensioni attive vennero impiegate per la prima volta in F1 due anni dopo, nel mondiale del 1987, sulla Lotus99T-Honda (guidata da Ayrton Senna) che fu equipaggiata da un complicato sistema di "sospensioni intelligenti" a controllo elettronico grazie al quale vinse due gran premi.

A partire dall'anno successivo la Williams-Renault avviò lo sviluppo di un sistema di sospensioni attive tecnicamente più semplice, nel quale il gruppo molla-ammortizzatore di ciascuna ruota venne sostituito da un sistema idraulico a controllo elettronico. Occorsero circa due anni perché questo sistema raggiungesse ottimi risultati, caratterizzandosi poi come l'arma vincente della casa inglese nel triennio 1991/1993. Nel 1992, la macchina vinse 10 gran premi, con un sistema di controllo in grado di impartire oltre 60 variazioni di assetto al secondo e di mantenere il veicolo a meno di 1 cm dalla strada senza perdere l'aderenza offerta dall'effetto suolo. Nel 1993 Alex



Zanardi ebbe uno spaventoso incidente con tutta probabilità dovuto ad un malfunzionamento del sistema di sospensioni attive. Le sospensioni attive vennero bandite a partire dalla stagione 1994, sia per ragioni di sicurezza che anche a causa della loro estrema efficacia che avvantaggiava troppo chi ne era in possesso. Ciò ha rallentato lo sviluppo delle tecnologie per il mercato di massa. Attualmente si incontrano su pochi veicoli commerciali di alta gamma e alcuni costruttori le stanno mettendo a punto anche per motoveicoli.

Nella sezione successiva si presenta un modello matematico per i sistemi di sospensioni attive. Tale modello, appartenente alla classe dei sistemi lineari, ha una bassa complessità, adeguata alle esigenze di utilizzarlo esplicitamente per la progettazione di sistemi di controllo. Modelli più complessi ed accurati, in genere fortemente non lineari, possono essere sviluppati e sono impiegati nella pratica come strumento di analisi e verifica prestazionale off-line, per via simulativa, delle prestazioni del sistema in condizioni il più possibile realistiche. La determinazione dei valori dei parametri è estremamente problematica nei modelli complessi, e la “taratura” di tali modelli viene effettuata sulla base di prove sperimentali. Non è scopo della presente trattazione descrivere tali modelli “complessi” e le relative procedure di identificazione parametrica.

### 1.3 Il Modello Matematico

La sospensione attiva di un veicolo a ruote indipendenti può essere schematizzata come in Figura 1.1

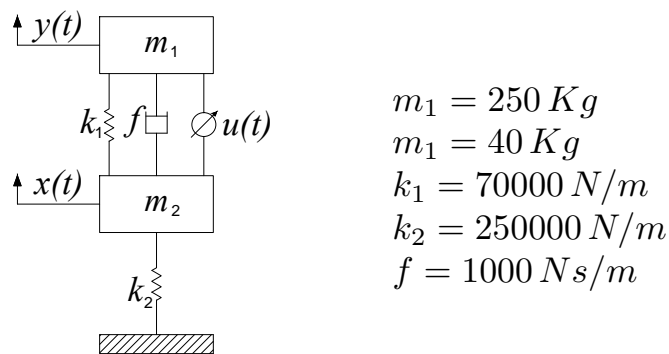


Fig. 1.1: Modello e dati del sistema preso in considerazione.

dove  $m_1$  indica la massa gravante sulla sospensione considerata,  $m_2$  la massa della ruota e degli organi meccanici ad essa collegati,  $k_1$  la costante elastica della molla della sospensione,  $k_2$  la costante elastica relativa al pneumatico e  $f$  il coefficiente di attrito viscoso che descrive il comportamento dell'ammortizzatore.

L'ingresso del sistema è costituito dalla forza generata dall'attuatore, l'uscita è data dalla posizione della carrozzeria del veicolo che indichiamo con  $y(t)$  mentre con  $x(t)$  intendiamo la posizione della ruota, entrambe considerate rispetto a quelle di equilibrio in assenza di ingresso. Gli spostamenti delle due masse sono descritti dalle equazioni:

$$m_1 \ddot{y}(t) = u(t) - k_1(y(t) - x(t)) - f(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{x}(t) = k_1(y(t) - x(t)) + f(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) - k_2 x(t) - u(t) \quad (1.2)$$

passiamo ora nel dominio delle trasformate di Laplace:

$$m_1 s^2 Y(s) = U(s) - k_1(Y(s) - X(s)) - f s(Y(s) - X(s)) \quad (1.3)$$

$$m_2 s^2 X(s) = k_1(Y(s) - X(s)) + f s(Y(s) - X(s)) - k_2 X(s) - U(s) \quad (1.4)$$

ora ricaviamo  $X(s)$  dall'equazione (1.4)

$$(m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2) X(s) = (f s + k_1) Y(s) - U(s)$$

$$X(s) = \frac{f s + k_1}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} Y(s) - \frac{1}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} U(s)$$

da cui possiamo ricavare anche:

$$Y(s) - X(s) = \frac{m_2 s^2 + k_2}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} Y(s) + \frac{1}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} U(s)$$

ed ora sostituendo nella (1.3):

$$m_1 s^2 Y(s) + k_1(Y(s) - X(s)) + f s(Y(s) - X(s)) = U(s)$$

$$\begin{aligned} \left( m_1 s^2 + \frac{k_1 m_2 s^2 + k_1 k_2}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} + \frac{f m_2 s^3 + f k_2 s}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} \right) Y(s) = \\ = \left( 1 - \frac{f s + k_1}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} \right) U(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{m_1 m_2 s^4 + f m_1 s^3 + f m_2 s^3 + m_1 (k_1 + k_2) s^2 + k_1 m_2 s^2 + f k_2 s + k_1 k_2}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} \right) Y(s) = \\ = \left( \frac{m_2 s^2 + k_2}{m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2} \right) U(s) \end{aligned}$$

con alcuni raccoglimenti si ricava la funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$G(s) = \frac{m_2 s^2 + k_2}{m_1 m_2 s^4 + f(m_1 + m_2) s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2 m_1] s^2 + f k_2 s + k_1 k_2} \quad (1.5)$$



## Capitolo 2

# Modello SiSo

### 2.1 Diagrammi di Bode e Nyquist

Andiamo ora a tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento (1.5) con l'ausilio di MATLAB.

Dalla Figura 2.1 (soprattutto dal diagramma asintotico della fase) possiamo osservare la presenza di tre coppie di poli e zeri complessi coniugati (una al numeratore e due al denominatore) che danno origine ai fenomeni di risonanza (e antirisonanza) che si notano nel diagramma del modulo. Risulta inoltre importante osservare che il diagramma di Bode del modulo risulta avere valori numerici molto piccoli e che la costante di bode è dell'ordine di  $10^{-5}$ . Questo non significa però che anche gli zeri ed i poli della  $G(s)$  abbiano valori piccoli e per vederlo ci basta effettuare un calcolo esplicito di essi attraverso la funzione *Roots* di MATLAB ottenendo:

Poli	Zeri
$-13 \pm 84i$	$0 \pm 79.1i$
$-1.2 \pm 14.7i$	

Tabella 2.1: Poli e zeri di  $G(s)$ .

Evidenziamo dalla Tabella 2.1 come non ci siano poli a parte reale positiva e quindi  $G_+ = 0$ . Quindi anche se i poli complessi coniugati daranno origine a fenomeni oscillatori, il sistema risulta essere BIBO stabile.

Non possiamo però trascurare la coppia di zeri instabili presente nel sistema (i cosiddetti *sistemi a fase non minima*), dal momento che essi introducono, per poter mantenere la BIBO stabilità, forti vincoli sulla qualità delle prestazioni dinamiche dei sistemi da essi ottenibili mediante retroazione.

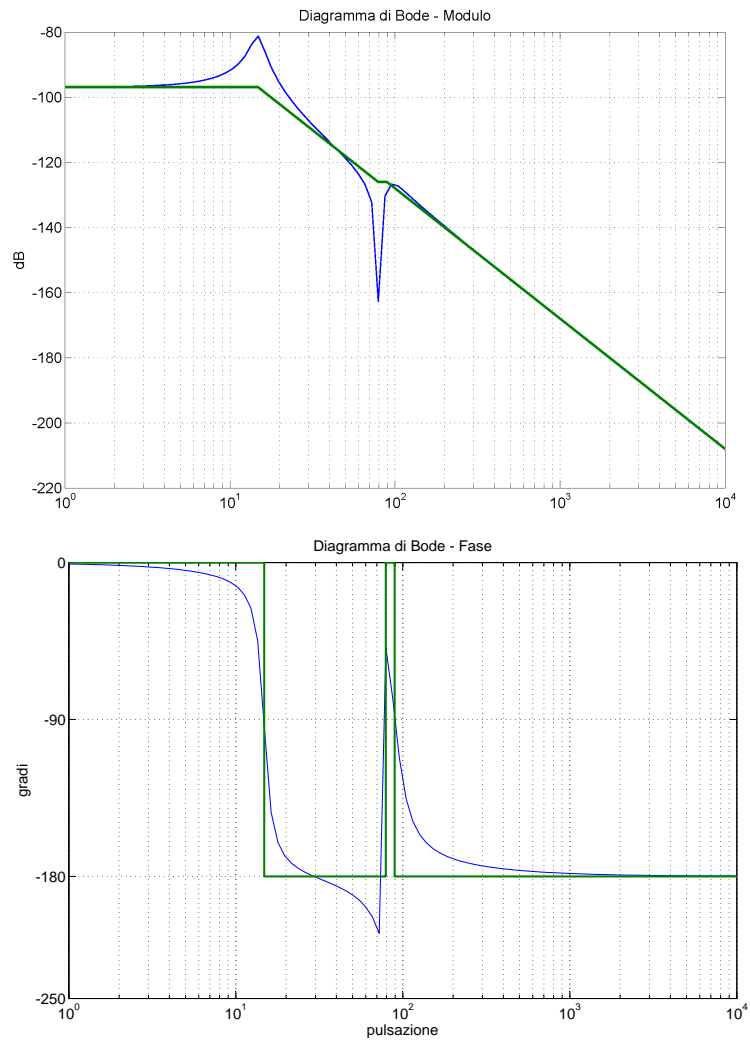


Fig. 2.1: Diagramma di Bode

Andiamo ora a tracciare il diagramma di Nyquist per vedere il comportamento del nostro sistema in retroazione attraverso la funzione *Nyquist1* che ci fornisce l'andamento sia per le frequenze positive (colore rosso) sia per quelle negative (colore verde).

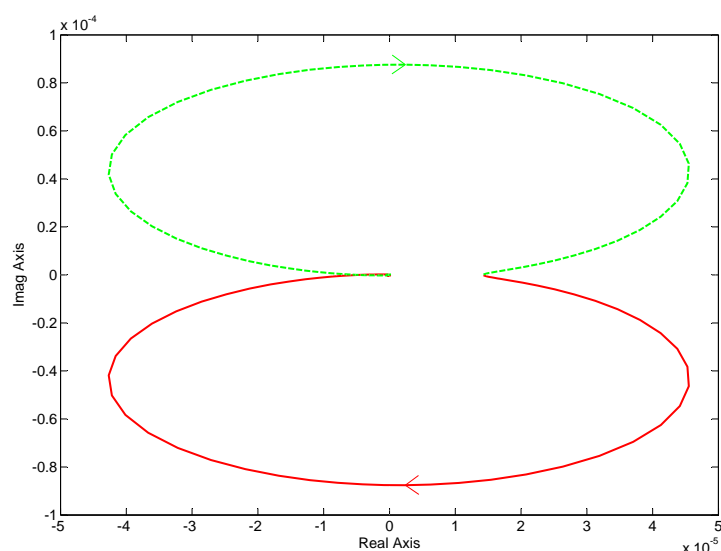


Fig. 2.2: Diagramma di Nyquist.

Risulta facile notare che il diagramma non compie giri attorno al punto critico  $-1 + 0i$  date le sue dimensioni così ridotte, e che dunque non ha nemmeno senso definire il margine di fase dato che non abbiamo nessun attraversamento del cerchio unitario. Abbiamo allora  $N_G = 0$  e dunque il numero di poli instabili della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta essere  $W_+ = G_+ - N_G = 0$  e quindi anche la  $W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$  risulta essere stabile. Come ulteriore conferma andiamo ora a calcolare in maniera analitica i suoi poli ed i suoi zeri (quest'ultimi non saranno variati rispetto alla  $G(s)$ ):

Poli	Zeri
$-13 \pm 84i$	$0 \pm 79.1i$
$-1.2 \pm 14.7i$	

Tabella 2.2: Poli e zeri di  $W(s)$ .

I poli non risultano aver subito variazioni rilevanti a livello numerico e dunque le caratteristiche dei due sistemi risultano essere le stesse. Per capire il motivo di questo fenomeno indichiamo  $G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$  e osserviamo che possiamo scrivere  $W(s) = \frac{num(s)}{num(s)+den(s)}$  e sostituiamo in (1.5) i valori

numerici ottenendo:

$$G(s) = \frac{40s^2 + 250000}{10000s^4 + 290000s^3 + 82800000s^2 + 250000000s + 17500000000} \quad (2.1)$$

da cui:

$$W(s) = \frac{40s^2 + 250000}{10000s^4 + 290000s^3 + 82800040s^2 + 250000000s + 17500250000} \quad (2.2)$$

e osservando i denominatori di (2.1) e (2.2) si intuisce subito il motivo delle variazioni trascurabili che si ottengono.

Data la presenza dei poli complessi coniugati vogliamo calcolarne la pulsazione naturale ed il coefficiente di smorzamento. Se ora scriviamo i poli come  $\sigma \pm i\omega$  con  $\sigma < 0$ , allora la pulsazione naturale si trova con  $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} > 0$  mentre il fattore di smorzamento  $\xi = -\sigma/\omega_n$ .

Eseguiamo ora il calcolo esplicito dei valori:

- $-13 \pm 84i \Rightarrow \omega_n = 85$  e  $\xi = 0.153$
- $-1.2 \pm 14.7i \Rightarrow \omega_n = 14.7$  e  $\xi = 0.081$

I valori trovati dei fattori di smorzamento non sono per nulla soddisfacenti dal punto di vista del controllo al pari dei sistemi instabili, ci aspettiamo adesso una risposta al gradino (per entrambi i sistemi) con ampie oscillazioni e smorzate lentamente. Tracciamo quindi la risposta al gradino della  $G(s)$  (sistema in catena aperta) e della  $W(s)$  (sistema in catena chiusa) e ponendole una affianco all'altra dovremmo osservare che esse sono circa uguali.

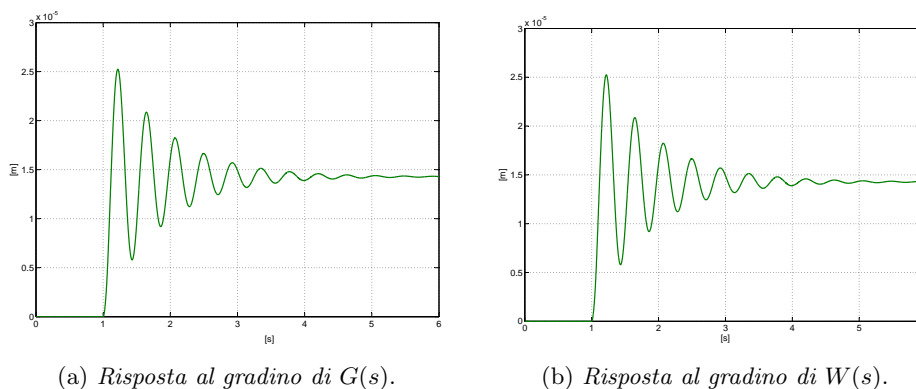


Fig. 2.3: Risposte al gradino.

La somiglianza tra i due grafici è di sicuro molto evidente.

Un altro aspetto da osservare è il valore a regime permanente, esso risulta essere circa di  $15 \cdot 10^{-6} m$  ed è dovuto al fatto che se sollecitiamo un sistema



con un segnale di ingresso costante del tipo  $u(t) = u_0\delta_{-1}(t)$  l'uscita si porta, per  $t \rightarrow +\infty$ , al valore pari a  $G(0)u_0$ . Osservando da (2.1) e (2.2) che  $G(0) \simeq W(0)$  allora si capisce come mai anche i valori a regime permanente sono circa uguali.

## 2.2 Luogo delle radici

Vogliamo ora determinare il comportamento dei poli di  $W(s)$  al variare di  $k$ , cioè se effettuiamo la retroazione con  $k \cdot G(s)$ , e per farlo utilizziamo la funzione *Rlocus* di MATLAB. In particolare andiamo a tracciare il luogo delle radici positivo. Dalla Figura 2.4 notiamo come prima cosa che i poli

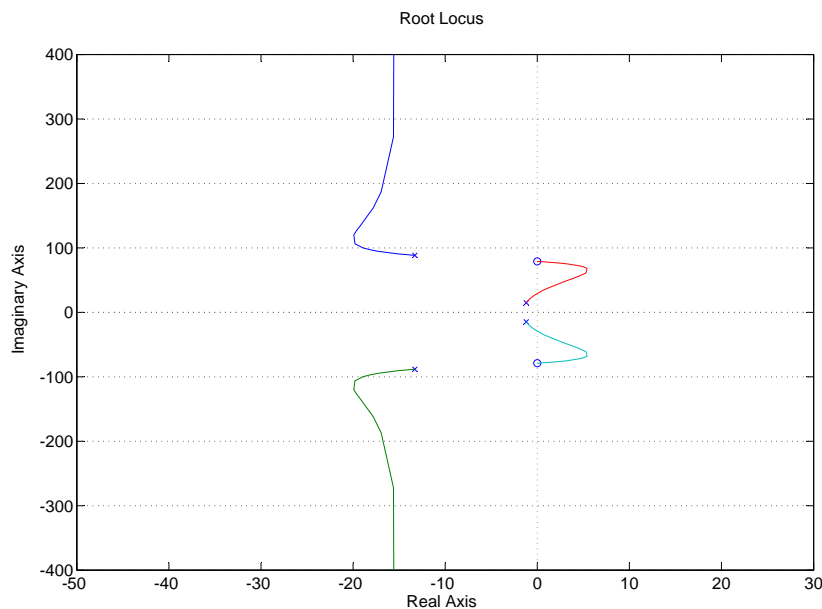
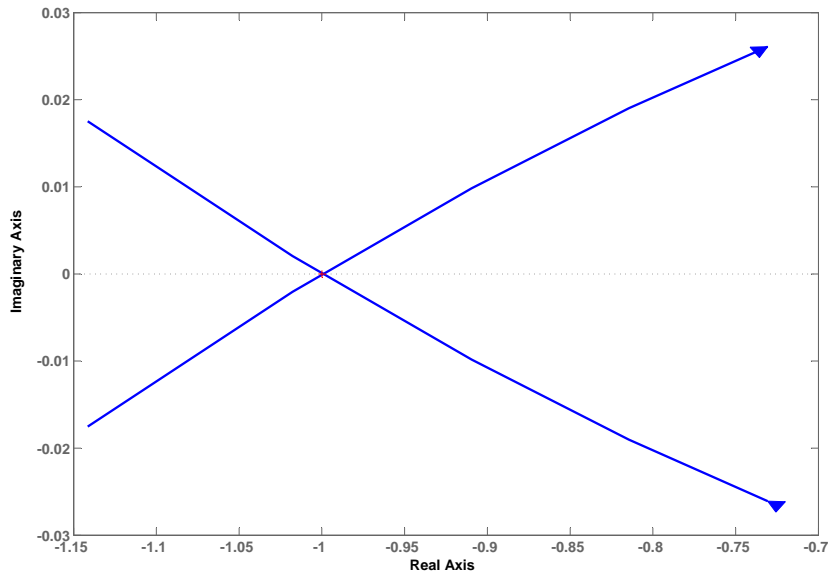


Fig. 2.4: Luogo delle radici positivo.

rimangono sempre complessi coniugati e, che per un certo valore di  $k$  in poi, si perde anche la stabilità del sistema. Per poter valutare quel particolare valore di  $k$  abbiamo effettuato uno zoom del diagramma di Nyquist (riportato in 2.5) trovando che la stabilità viene persa per  $k = 215500$  (circa). Come si può notare dalla Figura 2.5 il grafico interseca il punto critico e non è quindi possibile dire se il sistema sia stabile.

Per questo valore andiamo inoltre a calcolare tutti i poli e tracciare il grafico della risposta al gradino. Come si vede dalla Figura 2.6 la risposta al gradino non è smorzata (dopo 10s non si vedono cambiamenti rilevanti) e di sicuro non risulta essere accettabile anzi, scopo delle sospensioni è anche quello di smorzare le oscillazioni il più velocemente possibile.

Fig. 2.5: Diagramma di Nyquist per  $k = 215500$ .

Poli	Zeri
$-14.5 \pm 89.8i$	$0 \pm 79.1i$
$-0.0001 \pm 29.4i$	

Tabella 2.3: Poli e zeri di  $W(s)$  per  $k = 215500$ .

Se il valore di  $k$  supera questa soglia abbiamo che il nostro sistema retroazionato diventa instabile e per capire meglio qual'è il "pericolo" di questa situazione tracciamo la risposta al gradino per  $k = 500000$ . Dalla Figura 2.7 si può notare come l'uscita diverga già dopo un secondo.

Andiamo infine a tracciare il diagramma di Nyquist per questo valore di  $k$  per andare a verificare che l'instabilità del sistema è equivalente a circondare il punto critico  $-1 + i0$ .

Dalla Figura 2.8 risulta essere tutto molto chiaro. Dalla Figura 2.7 si può notare come l'uscita diverga già dopo un secondo.

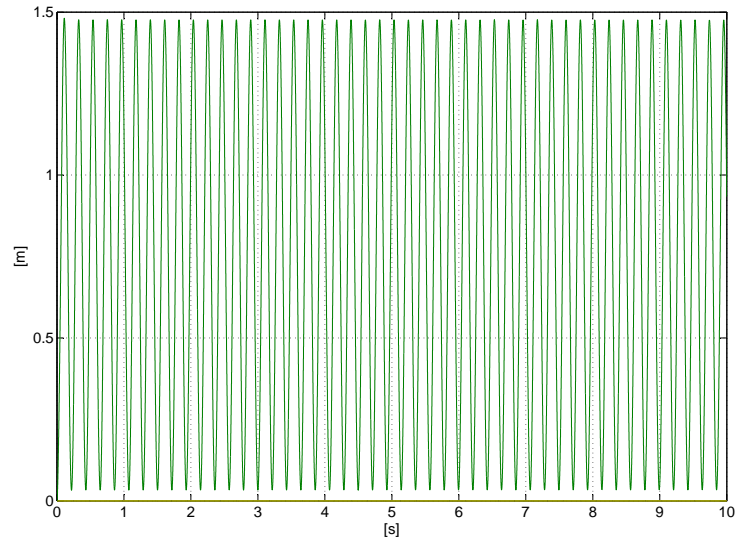


Fig. 2.6: Risposta al gradino di  $W(s)$  per  $k = 215000$ .

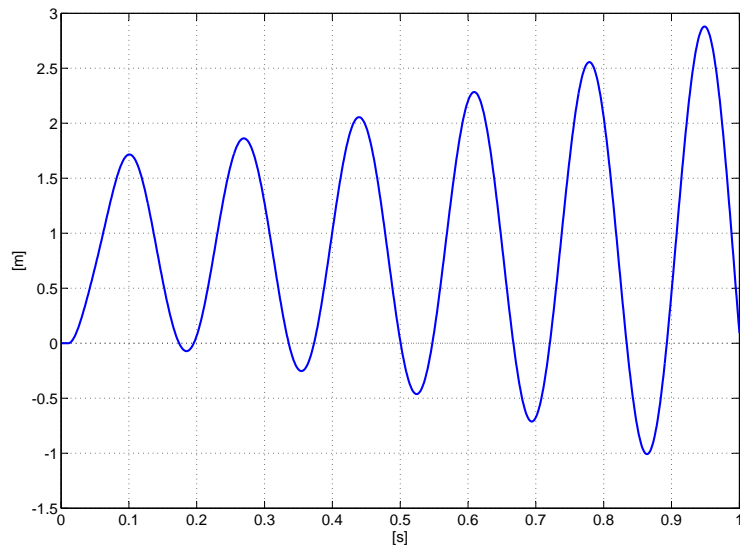


Fig. 2.7: Risposta al gradino di  $W(s)$  per  $k = 500000$ .

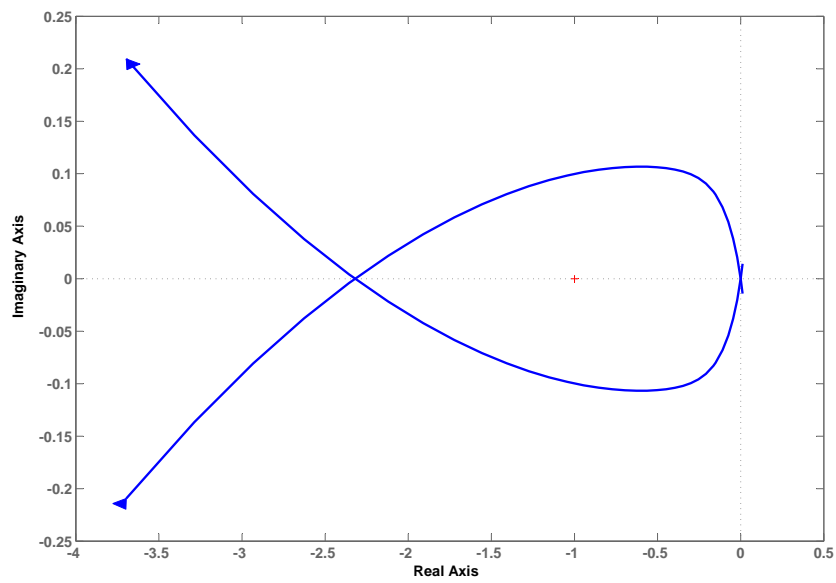


Fig. 2.8: Diagramma di Nyquist per  $k = 500000$ .

## Capitolo 3

# Progetto del compensatore

Scopo di questo capitolo è quello di progettare vari tipi di compensatori (da posizionare davanti al sistema  $G(s)$ ) per riuscire ad ottenere un sistema veloce e che “assorba” rapidamente le oscillazioni. Lo schema che verrà preso in considerazione sarà dunque quello di Figura 3.1 dove il grado di libertà è dato dalla presenza di  $C(s)$ . E' stato scelto di porre nel ramo di retroazione una costante  $c_2 = 1000$ . Il motivo di tale scelta è che in questo modo se al segnale di riferimento diamo un gradino unitario il sistema cerca di alzare le sospensioni all'altezza di un millimetro che ha molto più senso di un'elevazione di un metro che si avrebbe ottenuto in assenza di esso. La costante  $c_2$  si può dunque interpretare come un trasduttore ideale (non provoca alcun ritardo) da metri a millimetri.

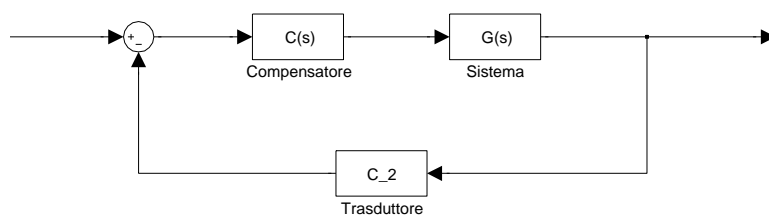


Fig. 3.1: Retroazione presa in considerazione.

### 3.1 Controllo di tipo proporzionale

In questo caso abbiamo che  $C(s) = c_1$  e dunque ciò che possiamo fare con un controllore di questo tipo è ben riassunto dal luogo delle radici (Figura 2.4) che fornisce la posizione dei poli al variare di una costante  $k \in \mathfrak{R}_+$ . La

presenza della costante sul ramo di retroazione non è molto rilevante, infatti abbiamo che il guadagno complessivo del sistema  $k$  (quello da “utilizzare” nel luogo delle radici) è data dal prodotto delle due costanti:  $k = c_1 * c_2$ . In particolare per  $k \rightarrow 0$  i poli coincidono con quelli di  $G(s)$  mentre per  $k \rightarrow +\infty$  due poli coincidono con gli zeri di  $G(s)$  mentre due divergono all’infinito.

In definitiva possiamo affermare che non è possibile costruire un compensatore accettabile per le nostre richieste con un guadagno solo proporzionale.

### 3.2 Controllo con uno zero

Osservando il luogo delle radici in Figura 2.4 si capisce subito come un problema sia quello dei rami che divergono asintoticamente all’infinito. Ciò è dovuto al grado relativo della  $G(s) = \frac{num(s)}{den(s)}$ , se chiamiamo  $n = deg[den(s)] = 4$  e  $m = deg[num(s)] = 2$  allora le regole del tracciamento del luogo delle radici ci dicono che  $m$  rami terminano negli zeri di  $G(s)$  mentre i restanti  $n - m$  vanno all’infinito. I rami che passano nella regione di instabilità vincolano il guadagno ad assumere un range di valori ben preciso che non deve essere superato mentre quelli che divergono, ma contenuti nel semipiano negativo (escluso il caso in cui il ramo sia reale), risultano essere un problema se si vuole alzare il guadagno del compensatore poichè, come detto in precedenza, il fattore di smorzamento di quei poli continua a diminuire all’aumentare della parte immaginaria.

L’idea nata da queste osservazioni è allora quella di mettere uno zero nel compensatore in modo tale da avere un unico ramo che tende all’infinito e, data la simmetria coniugata del luogo delle radici, questo non può essere che reale e tendere a  $-\infty$ .

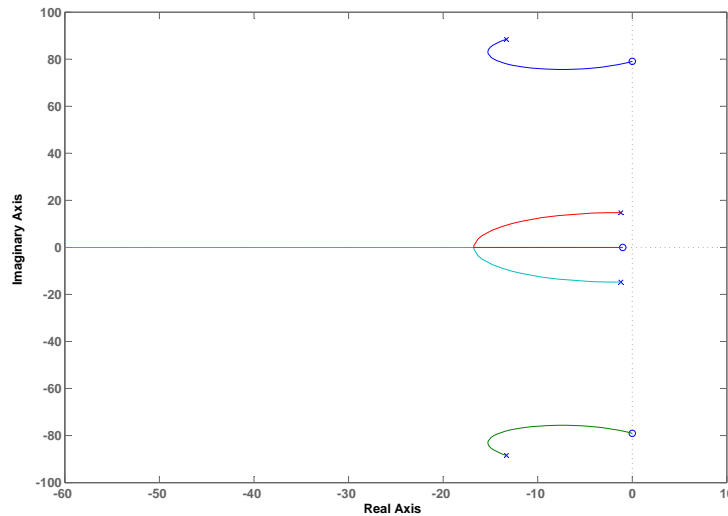
Per capire in maniera più intuitiva quanto ora espresso riportiamo il grafico che si ottiene con  $C(s) = (s + 1)$  in Figura 3.2.

Come si vede il ramo che diverge verso l’infinito (quello azzurro) è reale e negativo e dunque non ci crea problemi né per la stabilità né per la velocità di risposta, se  $k$  è sufficientemente grande. La nostra attenzione si porta ora ai rami che sono sempre complessi coniugati (blu e verde) e che terminano negli zeri della  $G(s)$ . E’ facile notare che il fattore di smorzamento di questi poli risulterà essere sempre non accettabile lungo tutto il ramo poichè la parte immaginaria è predominante rispetto a quella reale.

Per eliminare questo problema possiamo ricorrere ad un “trucco”. Prendiamo in considerazione una generica funzione di trasferimento  $Z(s)$  e, senza perdita di generalità, la scriviamo nella rappresentazione di Evans:

$$Z(s) = K_E \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Cerchiamo ora di trovare la risposta del sistema ad una sollecitazione di ingresso (ad esempio il gradino unitario e quindi  $U(s) = 1/s$ ) sotto la con-

Fig. 3.2: Luogo delle radici con  $C(s) = (s + 1)$ .

dizione che  $p_1 \simeq z_1$ .

Utilizzando la rappresentazione in fratti semplici otteniamo che  $Y(s) = Z(s) * U(s)$ :

$$Y(s) = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \dots + \frac{M}{s - p_m} + \frac{N}{s}$$

e per capire che effetto ha il polo  $p_1$  sulla risposta al gradino andiamo a calcolare il primo coefficiente:

$$A = \lim_{s \rightarrow p_1} K_E \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_2) \dots (s - p_n) s} \simeq 0 \text{ se } p_1 \simeq z_1$$

Quindi se noi riusciamo a fare in modo che un polo si “avvicini” ad uno zero allora il suo effetto tende a scomparire anche se esso comporterebbe delle oscillazioni (ammesso, come in questo caso, che il polo sia stabile). In pratica, abbiamo sempre delle oscillazioni residue, ma di ampiezza molto piccola, tanto più quanto zeri e poli sono vicini.

Ritornando al nostro caso, l’osservazione precedente ci può venir comoda per eliminare (o quasi) la presenza dei poli che rimangono sempre complessi coniugati. Basterà porre un guadagno sufficientemente elevato per far in modo che i poli risultino vicini agli zeri e far quindi scomparire i loro effetti nella risposta al gradino.

Dopo diversi tentativi siamo arrivati a scegliere il seguente compensatore:

$$C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$$

Riportiamo di seguito il luogo delle radici con evidenziato anche la posizione dei poli (con dei quadretti) per il particolare valore della costante che abbiamo scelto. Nel grafico in Figura 3.3 si nota la presenza di tre poli tutti

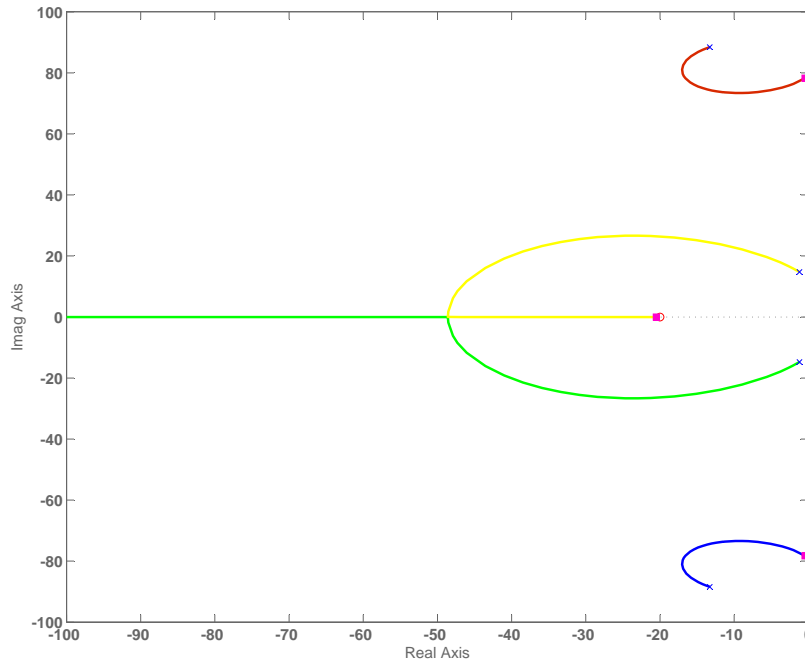


Fig. 3.3: Zoom del Luogo delle radici con  $C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$ .

molto vicini ad uno zero, anche se uno zoom più accurato mostrerebbe come i poli complessi coniugati siano molto più vicini al relativo zero di quanto lo sia il polo reale rispetto allo zero introdotto nel compensatore. Quest'ultimo fatto non crea grossi problemi, in quanto il modo corrispondente al polo reale non è di tipo oscillatorio. Il quarto polo non è stato evidenziato nel grafico poichè esso si trova molto a sinistra (vale circa -1400) e quindi è stato riportato solo uno zoom della parte più significativa del luogo delle radici. Inoltre il modo corrispondente è un esponenziale rapidissimo che si estingue in un tempo brevissimo.

Riportiamo ora il grafico della risposta al gradino unitario del sistema.

Dalla Figura 3.4 si può osservare come il tempo di salita sia circa di 30 ms e si può ritenere che sia soddisfacente anche perchè non si deve dimenticare che stiamo trattando un sistema meccanico e quindi per sua natura esso sarà sempre più "lento" rispetto ad uno elettronico. Pretendere variazioni di posizioni in poco tempo equivale a pretendere delle forti accelerazioni che possono causare danni al sistema (a causa delle enormi forze in gioco, che tuttavia in genere non sono ottenibili da dispositivi meccanici non troppo ingombranti).



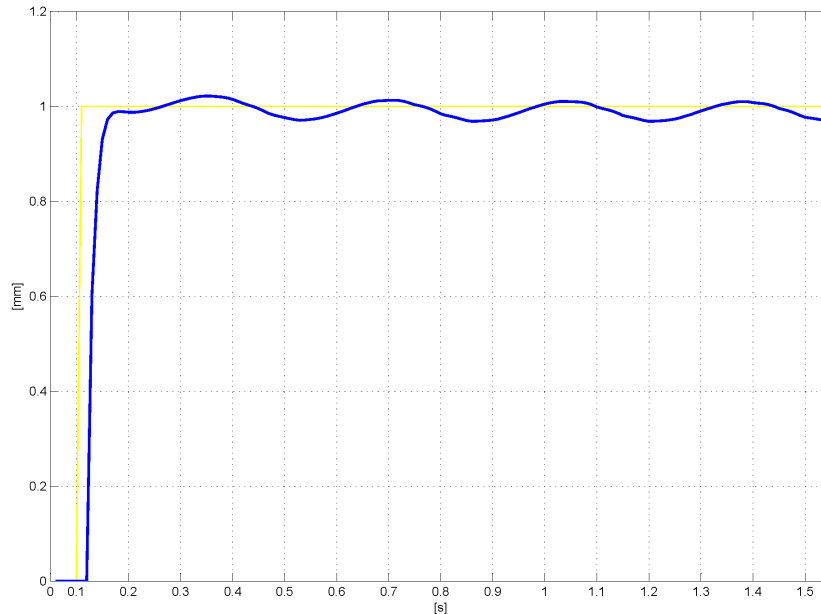


Fig. 3.4: Risposta al gradino con  $C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$ .

Inoltre si osserva la presenza di una modesta sovralongazione “persistente” (che tra l’altro non è che il “contributo rimasto” dei poli complessi coniugati) che si smorza accompagnata a delle lente oscillazioni di ampiezza pari a circa l’8 % rispetto al valore a regime.

Un ulteriore grafico da tenere in considerazione è il diagramma di Bode (soprattutto quello del modulo) per il sistema complessivo  $C(s)*G(s)$  (compresa anche la costante  $c_2$ ), riportato in Figura 3.5. Esso è caratterizzato dalla presenza di tre frequenze di attraversamento e dunque, per l’analisi della stabilità, non possiamo osservare il margine di fase ma siamo “costretti” ad analizzare il diagramma di Nyquist. Inoltre con un cerchietto rosso è stata riportata la posizione dello zero che abbiamo aggiunto nel compensatore.

Riportiamo ora uno zoom del diagramma di Nyquist attorno al punto critico in Figura 3.6. Come previsto dal diagramma di Bode abbiamo che il cerchio unitario viene attraversato tre volte. Abbiamo riportato il punto più critico (cioè quello in cui il diagramma si avvicina maggiormente al punto  $-1 + i0$ ) e grazie all’inserimento di un “Data Cursor” ne leggiamo facilmente la frequenza  $f = 78.1 \text{ rad/sec}$  e il margine di fase  $PM = 29.8 \text{ deg}$ .

Il margine di fase trovato non sarebbe soddisfacente in una condizione normale, ma la presenza della “quasi cancellazione” tra i poli complessi ed i relativi zeri comporta che il loro effetto venga ridotto, e quindi non pregiudichi molto la risposta al gradino e più in generale le prestazioni del sistema. La Figura 3.4 evidenzia quanto detto sopra mostrando delle oscillazioni del-

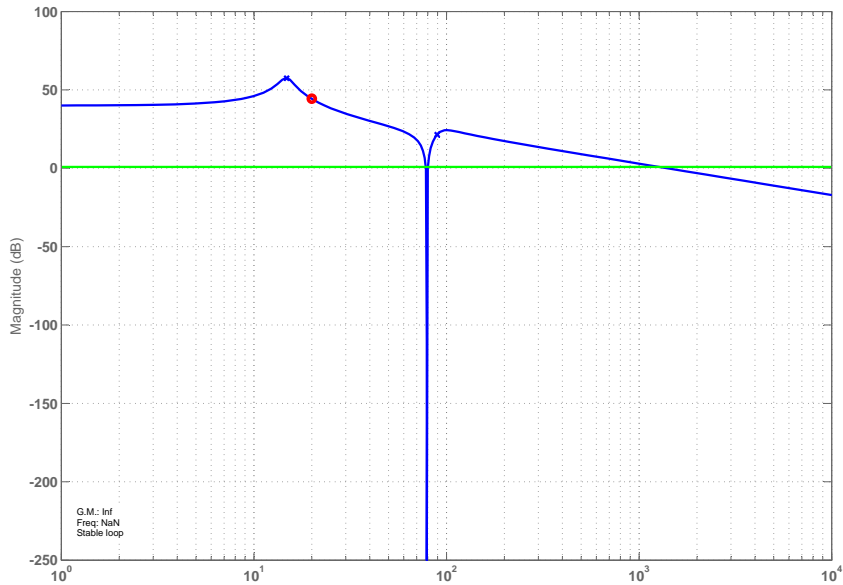


Fig. 3.5: Diagramma di Bode con  $C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$ .

l'ordine dei decimi di millimetro anche se, dal punto di vista del comfort dell'autista, si dovrebbe stabilire se queste siano fastidiose oppure no.

### Fisica realizzabilità del controllore

Quanto riportato finora è corretto a livello teorico ma, nella pratica, si incontra un problema non trascurabile anche nel corso di un'analisi di questo genere: la fisica realizzabilità del controllore. Il nostro compensatore  $C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$  è non realizzabile fisicamente poichè esso è una funzione razionale non propria.

Per risolvere questo inconveniente si aggiunge, nel compensatore, un polo in altissima frequenza (a pulsazioni molto maggiori della pulsazione di attraversamento) in modo che esso non influenzi il range di frequenze di nostro interesse e non alteri la “forma” del diagramma di Nyquist in prossimità del cerchio unitario.

Anche nel nostro caso è possibile fare questo, per rendere il controllore realizzabile è possibile aggiungere un polo in alta frequenza, ad esempio alla pulsazione di  $10^5 \text{ rad/sec}$  ottenendo come risultato finale:

$$C(s) = 7000 \frac{1 + 0.05s}{1 + 10^{-5}s} \quad (3.1)$$

Per capire, in maniera semplice, come la presenza del polo non vada ad alterare le prestazioni del nostro sistema riportiamo il luogo delle radici in Figura 3.7 in cui abbiamo evidenziato il polo aggiunto con una *X rossa*.

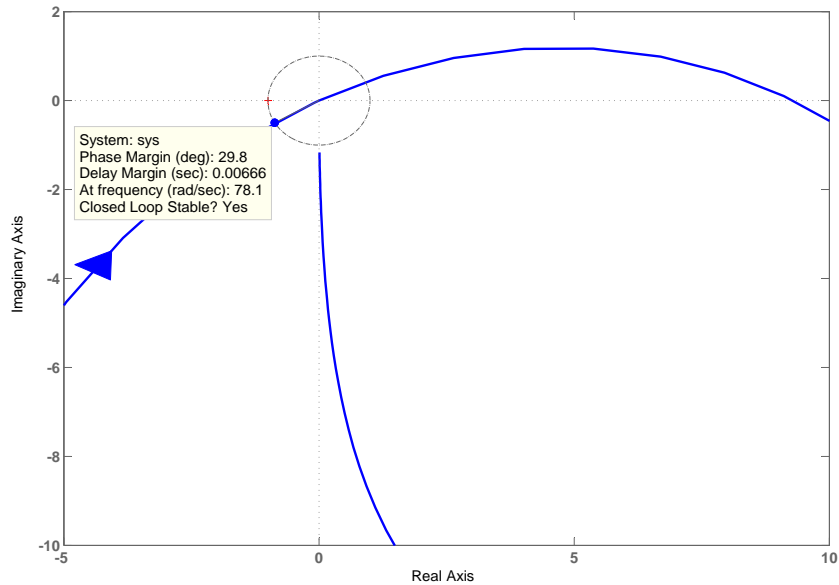


Fig. 3.6: Zoom del diagramma di Nyquist con  $C(s) = 7000 * (1 + 0.05s)$ .

Come si può notare la presenza del nuovo polo crea degli asintoti verticali (dovuti al fatto che abbiamo un ramo in più) ma, la posizione occupata da quest'ultimo è così lontana da non riuscire a “spostare” i poli che avevamo in sua assenza, almeno per valori ragionevoli, cioè per valori non troppo elevati di  $k = c_1 * c_2$ . Riportiamo ora uno zoom della Figura 3.7 per vedere ancora meglio la poca importanza (solo a livello del controllo di un sistema) che si ottiene con l'aggiunta di un polo in alta frequenza. Nella Figura 3.8 abbiamo voluto mettere in evidenza il fatto che il polo che prima era posizionato a circa  $-1400$  abbia subito una piccola variazione (ora si trova a circa  $-1440$ ). Inoltre anche se le scale dei grafici risultano essere diverse comparando le Figure 3.3 e 3.8 si capisce come la “forma” non sia cambiata in prossimità dell'origine.

Ora che possiamo “costruire” il controllore, ci rimane un'ultima cosa da verificare, l'entità dell'ingresso del sistema  $G(s)$  che si deve misurare dopo il compensatore  $C(s)$  se si fa riferimento alla Figura 3.1. Questo aspetto non va trascurato poichè esso rappresenta la forza che noi andiamo a richiedere all'attuatore e dunque nella realtà questa sarà limitato ad un certo valore e nel caso la richiesta sia superiore allora insorgeranno fenomeni di saturazione.

La saturazione non solo rallenta le prestazioni del sistema ma, in certi casi, può anche portare all'instabilità e dunque tutto il lavoro fatto non solo è inutile ma nella realtà può portare anche gravi danni ai vari dispositivi fisici

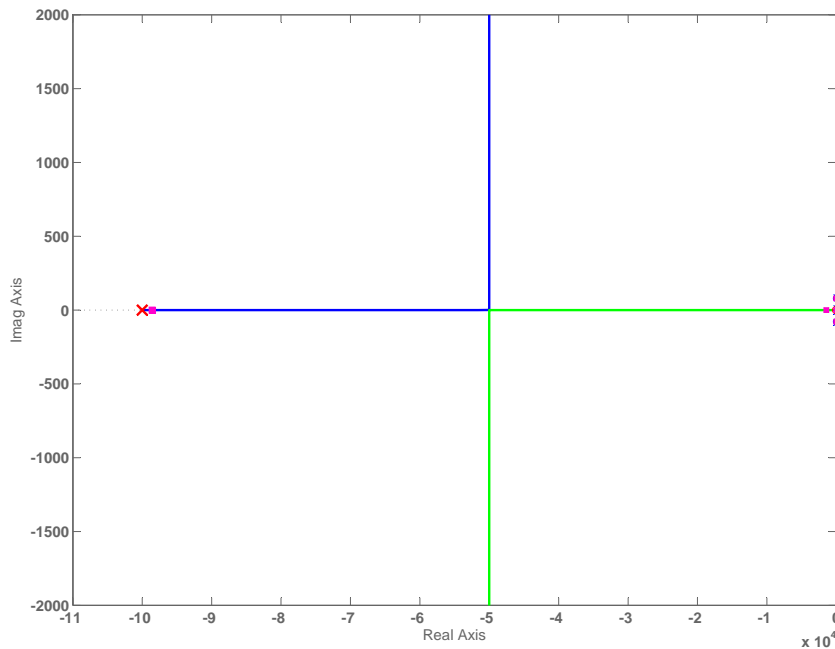


Fig. 3.7: Luogo delle radici con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$ .

(nonchè al comfort dell'autista).

In Figura 3.9 è stato riportato il grafico dell'ingresso al sistema  $G(s)$  quando come segnale di riferimento è dato il classico gradino unitario. Risulta evidente dalla Figura 3.9 come i valori in ingresso al sistema siano troppo elevati, il valore di picco che si trova è di  $3.5 \cdot 10^7 N$ . Siamo allora in una situazione in cui il compensatore funziona bene solo in via teorica ma, nella pratica, il suo corretto funzionamento è messo in discussione dai limiti fisici dei dispositivi.

E' ben noto che il fenomeno non lineare della saturazione può, a priori, avere gli effetti più disparati sulle prestazioni del sistema, tra cui l'instabilità. Proviamo ora ad impostare un limite all'ingresso grazie ad un blocco che riproduce i fenomeni di saturazione. Il limite che noi vogliamo dare è di  $1000 N$ , poichè lo riteniamo un valore che sia raggiungibile facilmente anche nella pratica. In questo caso non è molto significativo riportare il grafico dell'ingresso al sistema  $G(s)$ , ma quello dell'uscita che riportiamo in Figura 3.10. Da quest'ultimo grafico vediamo che la saturazione porta l'uscita ad un comportamento "strano", infatti anche se la nostra richiesta era quella di portarsi al valore unitario questo viene superato e di molto. La saturazione quindi non porta solo ad un rallentamento dell'uscita, come viene naturale pensare, ma anche a fenomeni di oscillazione che non sono accettabili tanto quanto l'instabilità.

Il compensatore appena illustrato è quindi una soluzione che, almeno

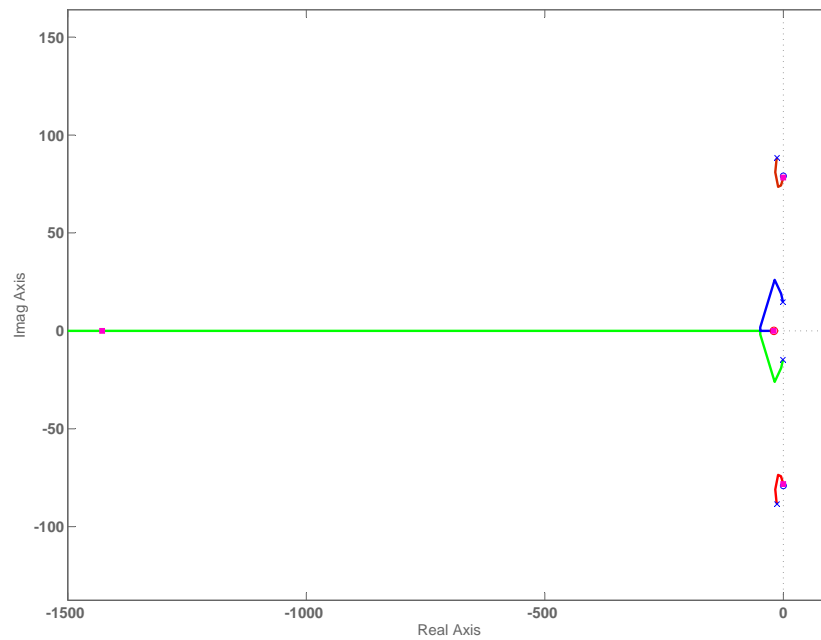


Fig. 3.8: Zoom del luogo delle radici con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-9}s}$ .

in via teorica, funziona bene ma nella pratica l'ingresso richiesto al sistema è troppo elevato. Il motivo di questo problema sta nel dover effettuare la quasi cancellazione che richiede un guadagno molto elevato e ciò comporta la saturazione che può, come visto, causare instabilità indesiderate. Inoltre anche le oscillazioni persistenti, anche se di pochi decimi di millimetro, potrebbero risultare fastidiose all'autista.

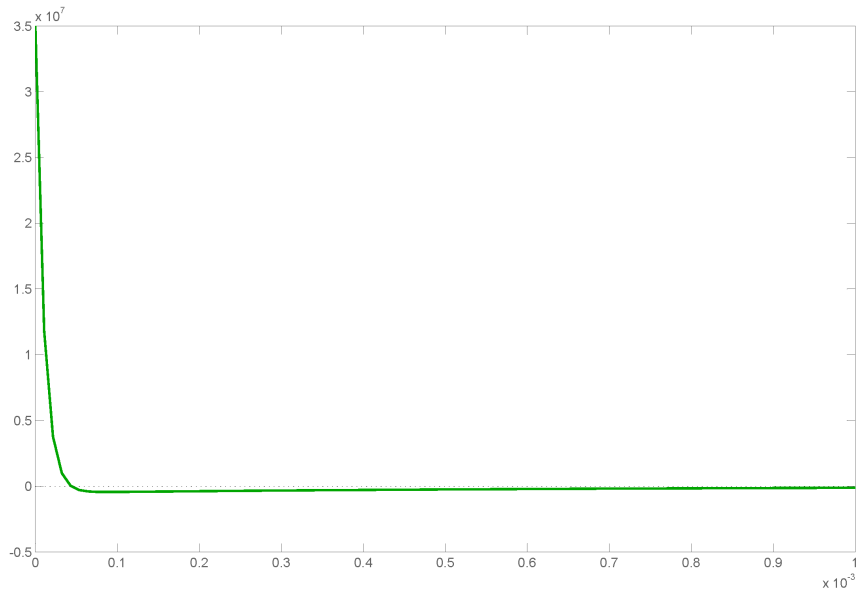


Fig. 3.9: Ingresso al sistema  $G(s)$  con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$  in risposta al gradino unitario.

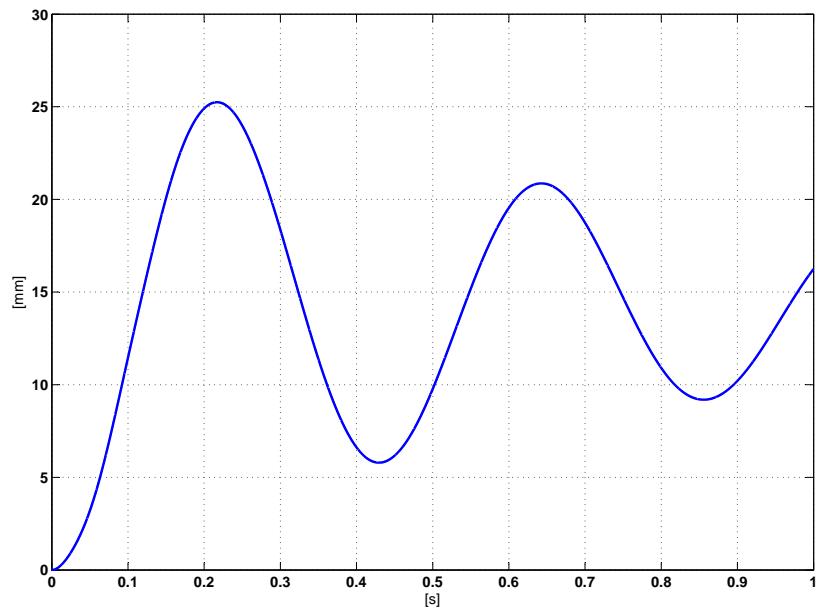


Fig. 3.10: Risposta al gradino con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$  ed ingresso limitato da un saturatore.

### 3.3 Controllore con poli in bassa frequenza

Il controllore della sezione precedente era ispirato al luogo delle radici e lo scopo era quello di risolvere i problemi che si evidenziavano da esso. In questa sezione andiamo ad osservare il diagramma di Bode di Figura 2.1 e cerchiamo di capire come progettare un nuovo compensatore.

La prima cosa che vogliamo ottenere è almeno una frequenza di attraversamento dell'asse delle ascisse. Per fare questo, poichè il diagramma si trova interamente sotto l'asse, dobbiamo porre una costante moltiplicativa all'interno del compensatore  $c_1 \geq 100$  e, ricordando anche il contributo dato dal trasduttore ( $c_2 = 1000$ ), si ottiene come costante totale  $k = c_1 * c_2 = 100000$  e, riportando questo valore in  $dB$ , abbiamo  $k_{dB} = 20 \log k = 100 dB$ . Il diagramma di Bode del modulo in Figura 2.1 viene quindi "alzato" di  $100 dB$  ottenendo quindi la frequenza di attraversamento che stavamo cercando.

Una delle tecniche di progetto dei compensatori sfrutta la relazione tra la pulsazione di attraversamento del sistema  $\tilde{G}(s) = C(s) * G(s)$  (compresa anche la costante  $c_2$ ) che indichiamo con  $\omega_a$  e la banda passante del sistema retroazionato di funzione di trasferimento  $W(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1+\tilde{G}(s)}$ . La relazione è molto semplice e la riportiamo nell'equazione (3.2). Si deve tener presente che non vale in tutti i casi, e di sicuro uno dei requisiti fondamentali è che ci sia un'unica pulsazione di attraversamento.

$$\omega_a(\tilde{G}) \simeq B_p(W) \quad (3.2)$$

Poichè al numeratore di  $G(s)$  è presente una coppia di zeri complessi coniugati con parte reale nulla non li possiamo "eliminare" attraverso la retroazione per motivi pratici (si ottiene una retroazione poco robusta) e quindi questi zeri saranno gli zeri anche del sistema retroazionato  $W(s)$ . Questa presenza limita molto la possibilità di alzare la pulsazione di attraversamento di  $\tilde{G}(s)$  (e quindi la banda passante di  $W(s)$ ) data la presenza di un picco di antirisonanza infinito alla pulsazione di  $\omega = 80 rad/s$ . La pulsazione di attraversamento che possiamo ottenere deve quindi essere inferiore al valore appena trovato.

Dopo diversi tentativi andiamo a scegliere come compensatore il seguente:

$$C(s) = 1000 \frac{1}{(1 + 5s)(1 + 0,25s)}$$

in cui si vede subito che  $c_1 = 1000$  e quindi la specifica sulla costante è rispettata.

Andiamo ora a tracciare il diagramma di Bode di  $\tilde{G}(s)$  in Figura 3.11 da cui osserviamo come anche il vincolo dell'unica pulsazione di attraversamento risulti soddisfatto. In Figura 3.11 abbiamo evidenziato con delle *X rosse* la posizione dei poli che abbiamo aggiunto, abbiamo indicato la pulsazione di attraversamento ed il margine di fase sia graficamente che esplicitamente:

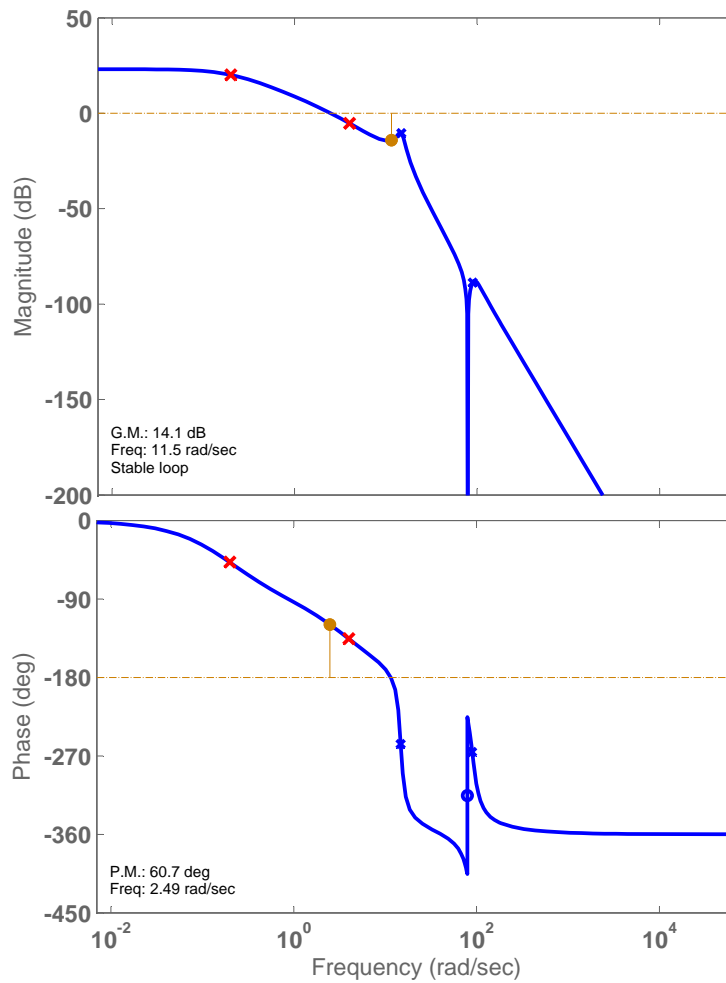


Fig. 3.11: Diagramma di Bode con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$ .

$\omega_a = 2,5 \text{ rad/s}$  e  $PM = 60,7 \text{ deg}$ . Anche se il diagramma di Bode, ed in modo particolare il margine di fase positivo, è un indicatore della stabilità del sistema preferiamo riportare anche il diagramma di Nyquist per vedere meglio quanto ci avviciniamo al punto  $-1 + i0$  una volta che siamo entrati nel cerchio unitario. Riportiamo quindi uno zoom di tale diagramma in Figura 3.12 da cui si nota che il margine di fase è buono e che il picco di risonanza non fa avvicinare troppo il diagramma al punto critico e quindi la stabilità è garantita e robusta.

Anche se il margine di fase è buono il fatto che esso sia minore di  $90 \text{ deg}$  comporterà la presenza di oscillazioni (magari di modesta entità) nella risposta al gradino del sistema. In generale comunque si considera buono un margina di fase superiore ai  $45 \text{ deg}$  e, anche per la nostra applicazione si



può considerare valido questo valore che con questo compensatore stiamo rispettando. Andiamo ora a riportare il grafico della risposta al gradino del

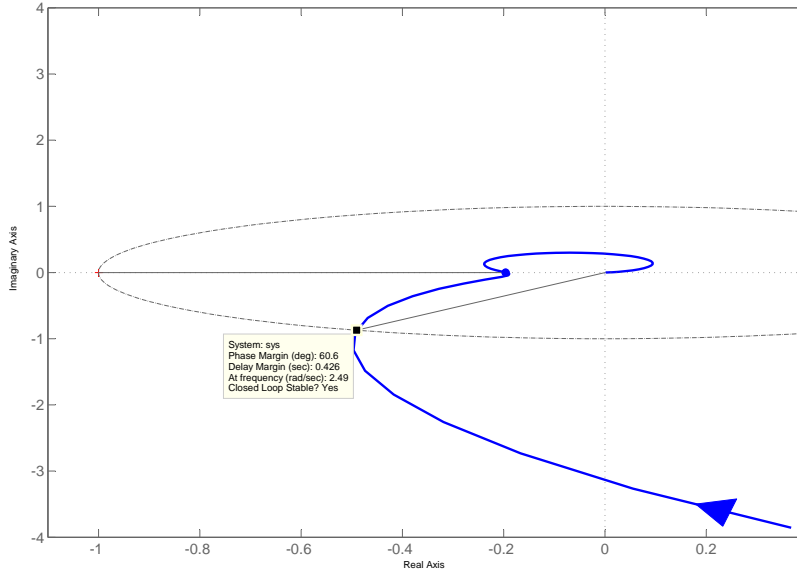


Fig. 3.12: Zoom del diagramma di Nyquist con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$ .

sistema retroazionato  $W(s)$  in Figura 3.13 per vedere se le nostre intuizioni sono verificate. Tutto quello che avevamo detto in precedenza risulta essere verificato ed in più abbiamo anche la presenza di una sovralongazione abbastanza importante ma che fortunatamente non comporta variazioni brusche della posizione della carrozzeria (che ricordiamo essere la nostra uscita  $y(t)$ ). Infine come ultimo grafico relativo a questo secondo compensatore riportiamo in Figura 3.14 il valore dell'ingresso al sistema  $G(s)$  quando come segnale di riferimento diamo il gradino unitario. Questo grafico risulta essere estremamente diverso rispetto a quello del compensatore precedente (3.9) nella scala e nella "forma".

Il valore massimo che andiamo a raggiungere in questo caso è di circa 75  $N$  e dunque è più che accettabile anzi, questo è il motivo per cui il sistema non è molto veloce. Infatti dalla Figura 3.13 si nota come il tempo di salita sia di circa 1  $s$  ( $t_r = 1 s$ ).

Il motivo della lentezza di questo sistema si può spiegare ricordando il legame che esiste tra tempo di salita e banda passante (in questo caso dobbiamo considerare la banda passante del sistema retroazionato  $W(s)$ ) che riportiamo nell'equazione (3.3)

$$B_p(W) * t_r = H \simeq \ln(10) \simeq 2,3 \quad (3.3)$$

Dall'equazione (3.2) e dalla Figura 3.11 si deduce che  $B_p(W) = 2,5 \text{ rad/s}$  e quindi dalla (3.3) si trova che  $t_r \simeq 1 s$  in accordo con quanto rilevato dalla

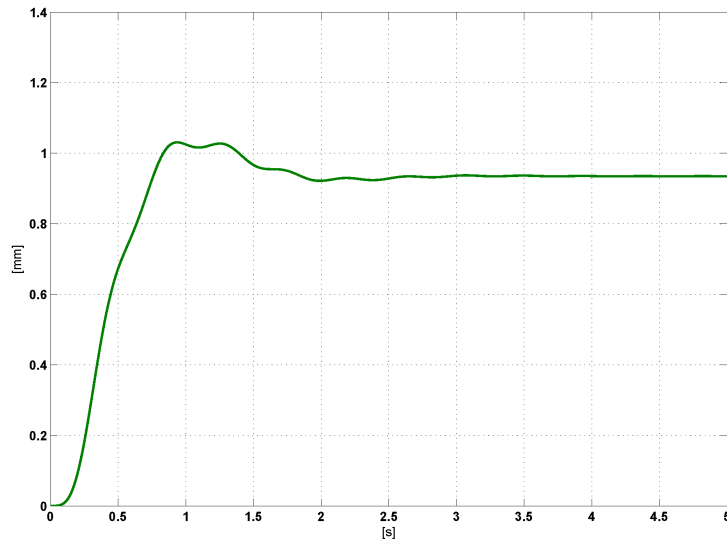


Fig. 3.13: Risposta al gradino con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$ .

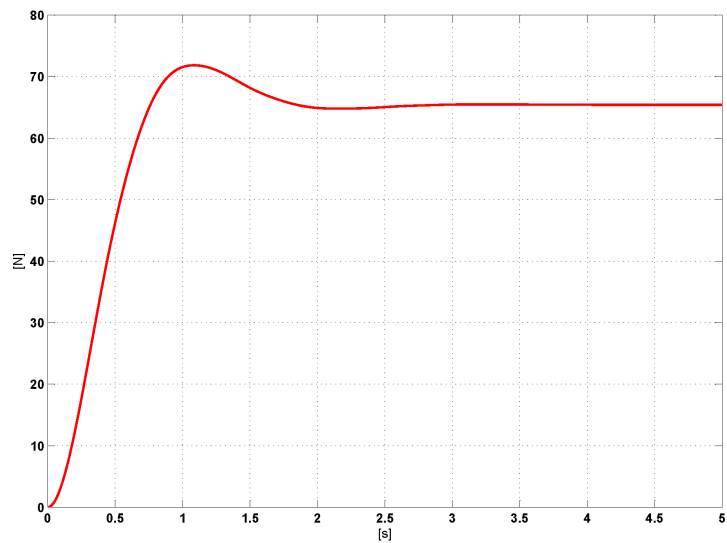


Fig. 3.14: Ingresso al sistema  $G(s)$  con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$  in risposta al gradino unitario.

simulazione effettuata.

Un'ultima cosa da osservare è la fisica realizzabilità del compensatore. A differenza di quello progettato nella sezione precedente in questo caso non abbiamo alcun problema e non dobbiamo aggiungere niente.

In definitiva questo compensatore è realizzabile nella pratica senza alcun tipo di problema.

## Capitolo 4

# Effetti delle asperità del terreno

Fino a questo momento non abbiamo tenuto conto delle irregolarità del terreno. Ora che abbiamo un sistema che risponde velocemente ai nostri comandi possiamo andare ad osservare il suo comportamento in varie situazioni che possono capitare nella vita reale, come un gradino (un “buco” nell’asfalto), una rampa (una salita o una discesa) o delle oscillazioni (asfalto irregolare). Per fare questo nella prossima sezione andiamo ad analizzare un modello meccanico della nostra sospensione che tiene conto di quello che finora avevamo trascurato.

### 4.1 Disturbo

Riprendiamo in considerazione il modello meccanico in Figura 1.1 con un piccolo cambiamento. Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti (per la linearità del sistema) possiamo trovare la funzione di trasferimento considerando come ingresso l’asperità del fondo stradale (che indichiamo con  $d(t)$ ), cioè lo spostamento del battistrada, e come uscita la posizione della carrozzeria, azzerando la forza generata dall’attuatore ( $u(t) = 0$ ).

Il sistema preso in considerazione è dunque quello che viene riportato in Figura 4.1. Le equazioni che regolano il sistema in questo caso sono:

$$m_1 \ddot{y}(t) = -k_1(y(t) - x(t)) - f(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) \quad (4.1)$$

$$m_2 \ddot{x}(t) = k_1(y(t) - x(t)) + f(\dot{y}(t) - \dot{x}(t)) - k_2(x(t) - d(t)) \quad (4.2)$$

Passando ora nel dominio delle trasformate di Laplace:

$$m_1 s^2 Y(s) = -k_1(Y(s) - X(s)) - fs(Y(s) - X(s)) \quad (4.3)$$

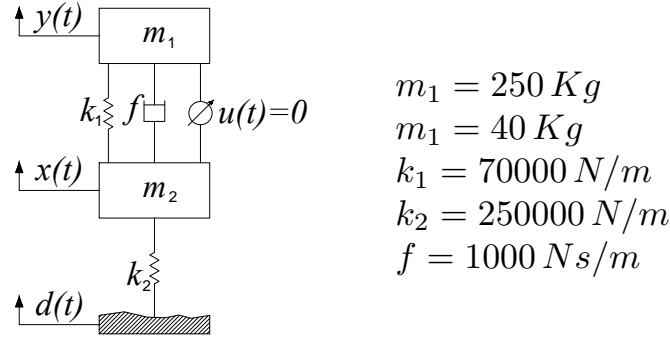


Fig. 4.1: Modello e dati del sistema preso in considerazione.

$$m_2 s^2 X(s) = k_1(Y(s) - X(s)) + f s(Y(s) - X(s)) - k_2(X(s) - D(s)) \quad (4.4)$$

Ricavando  $X(s)$  dall'equazione (4.3)

$$(m_1 s^2 + f s + k_1)Y(s) = (f s + k_1)X(s)$$

$$X(s) = \frac{m_1 s^2 + f s + k_1}{f s + k_1} Y(s)$$

riscriviamo l'equazione (4.4) nel seguente modo

$$(m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2)X(s) = (f s + k_1)Y(s) + k_2 D(s)$$

e sostituendo l'espressione appena trovata di  $X(s)$  si ottiene

$$\left( (m_2 s^2 + f s + k_1 + k_2) \frac{m_1 s^2 + f s + k_1}{f s + k_1} - f s - k_1 \right) Y(s) = k_2 D(s)$$

che dopo alcuni semplici passaggi conduce a

$$\begin{aligned} \frac{m_1 m_2 s^4 + m_2 k_1 s^2 + m_2 f s^3 + m_1 f s^3 + (k_1 + k_2) m_1 s^2 + k_1 k_2 + k_2 f s}{f s + k_1} Y(s) &= \\ &= k_2 D(s) \end{aligned}$$

che ci permette di valutare la nuova funzione di trasferimento tra disturbo ed uscita  $H(s) = \frac{Y(s)}{D(s)}$

$$H(s) = \frac{fk_2s + k_1k_2}{m_1m_2s^4 + f(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2m_1]s^2 + fk_2s + k_1k_2} \quad (4.5)$$

Ora che abbiamo anche questa funzione di trasferimento siamo in grado di “rivisitare” lo schema a blocchi utilizzato per la costruzione dei compensatori, cioè quello in figura 3.1.

Il nuovo schema che andremo ad utilizzare per le prossime analisi è quello in Figura 4.2. Un particolare di tale schema è nel blocchetto che abbiamo

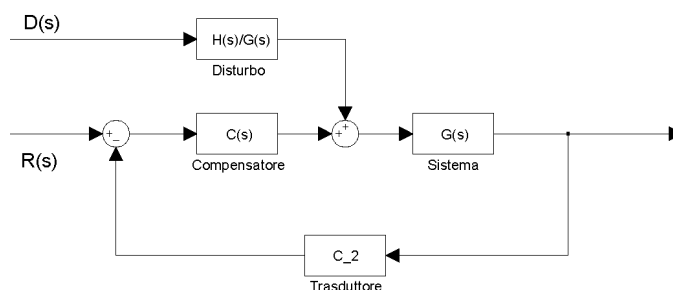


Fig. 4.2: Schema a blocchi del sistema con aggiunta del disturbo.

chiamato *Disturbo* che ci permette di dare in ingresso direttamente il livello del terreno. La sua funzione di trasferimento risulta essere il rapporto tra (4.5) e (1.5). Un’osservazione di queste due equazioni ci fa notare che i denominatori sono uguali e quindi possiamo scrivere:

$$H(s) = \frac{numH(s)}{den(s)} \quad G(s) = \frac{numG(s)}{den(s)}$$

e se calcoliamo in maniera esplicita il rapporto otteniamo:

$$\frac{H(s)}{G(s)} = \frac{numH(s)}{den(s)} \frac{den(s)}{numG(s)} = \frac{numH(s)}{numG(s)}$$

Arrivati a questo punto siamo pronti a sottoporre il sistema a varie tipologie di disturbi. Dobbiamo però osservare un aspetto molto importante e cioè cosa riportare nei grafici come variabile di interesse. In effetti quella che finora è stata considerata l’uscita misura solo l’altezza della carrozzeria rispetto al suolo (con le sue asperità). In pratica il nostro sistema di riferimento è relativo e questo risulta essere corretto per il buon funzionamento della retroazione che non può certo essere influenzata dalla presenza di una “quota”.

Dal punto di vista dell’autista quello che lui percepisce è la posizione rispetto ad un sistema di riferimento fisso. Se l’auto incontra un dosso e le

sospensioni fanno in modo che la posizione della carrozzeria sia costante, l'autista si rende conto di quello che succede, anche se abbiamo  $y(t) = 0$ . Per questo motivo in questo capitolo andiamo a considerare come uscita del nostro sistema la somma tra l'andamento del suolo (che indichiamo con  $d(t)$ ) e la posizione relativa del telaio ( $y(t)$ ).

## 4.2 Disturbo a gradino

Siamo ora interessati a vedere il comportamento del veicolo quando si incontra uno scalino del manto stradale di ampiezza pari a  $5\text{ cm}$ . Osserviamo subito che non consideriamo la velocità di impatto sul gradino che nella pratica è un dato molto rilevante ma che porta spesso a fenomeni non lineari (urto tra pneumatico e cerchione) se la velocità è troppo elevata. L'ingresso dato al blocchetto *Disturbo* sarà dunque il seguente:

$$d(t) = 0,05 \delta_{-1}(t - 0,5)$$

dove il ritardo di  $0,5\text{ s}$  è impostato solo per poter capire meglio gli effetti del gradino.

Nei grafici di questa sezione (e delle prossime 2) riportiamo in giallo l'andamento del manto stradale ed in blu quelli della nostra variabile di interesse (manto stradale più scostamento della carrozzeria).

In Figura 4.3 abbiamo riportato il grafico relativo al primo dei compensatori e come si può notare la carrozzeria segue perfettamente l'andamento della strada (il giallo si nota appena) per poi portarsi ad uno scostamento nullo con delle piccole oscillazioni. Per ottenere queste prestazioni però si richiedono delle prestazioni molto importanti al sistema  $G(s)$  in modo particolare all'attuatore ( $4000\text{ N}$ ) soprattutto per smorzare così rapidamente le oscillazioni.

In Figura 4.4 riportiamo lo stesso grafico relativo però al secondo compensatore. In questo caso le oscillazioni sono evidenti anche se accettabili come ampiezza e smorzate in circa  $2\text{ s}$ . Il valore dell'ingresso è in questo caso minore rispetto a prima ma nella pratica non è detto che sia ottenibile (circa  $2000\text{ N}$ ).

Come ultima considerazione riguardo a questo disturbo vogliamo mettere in evidenza come uno scalino di questo tipo sia impossibile da trovare nella realtà. Infatti se teniamo conto del moto di rotolamento della ruota è facile capire come questo faccia in modo che la salita sia graduale ed in modo particolare il suo centro subisce un innalzamento (senza considerare il possibile slittamento del punto di contatto) costituito da un arco di circonferenza con raggio quello della ruota stessa e centro lo spigolo dello scalino.

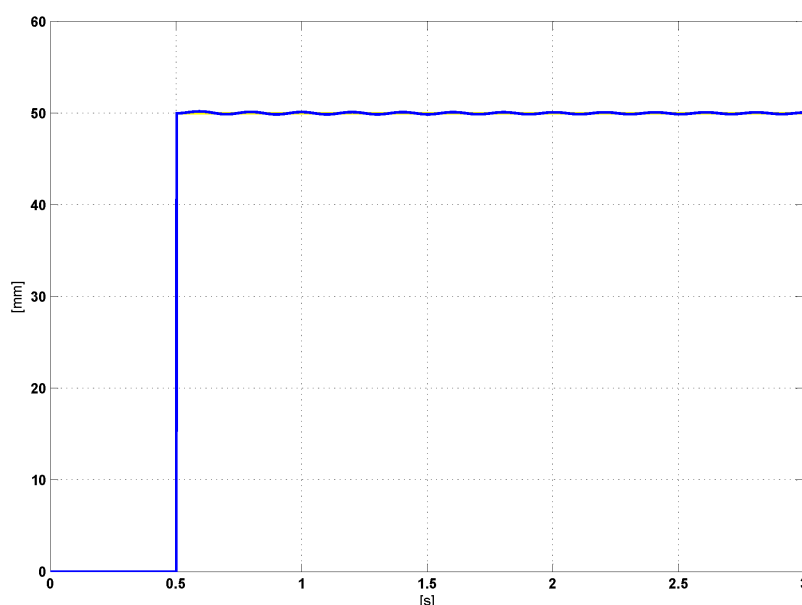


Fig. 4.3: Risposta del sistema ad uno scalino con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$ .

### 4.3 Disturbo a rampa

In questa sezione trattiamo invece un disturbo che nella pratica si trova molto facilmente e cioè una rampa (una salita o discesa del manto stradale). Trattiamo ora una pendenza della strada del 9,95% (ogni metro percorso ci si alza di 10 cm) e suppiamo di arrivare alla velocità di 36 Km/h che corrisponde a  $36 * 10^3 / 3600 = 10 \text{ m/s}$ . In tali condizioni l'ingresso da dare al blocchetto *Disturbo* è:

$$d(t) = (t - 0,5) \delta_{-1}(t - 0,5)$$

poichè in 1 s ci si alza di 1 m ed il ritardo è stato impostato solo per comodità nel tracciamento dei grafici. In Figura 4.5 abbiamo riportato il grafico relativo al primo dei compensatori trovati e come si può notare anche in questo caso la carrozzeria segue perfettamente l'andamento della strada trasmettendo quindi al guidatore una sensazione reale di quello che sta succedendo. Notiamo inoltre come a regime non ci sia alcuno scostamento e quindi  $y(t) = 0$ .

In Figura 4.6 abbiamo riportato lo stesso grafico del punto precedente, ma per il secondo compensatore trovato. Anche per questo controllore lo scostamento della carrozzeria rispetto al manto stradale è trascurabile (anche se sono presenti delle piccole oscillazioni) e quindi all'autista viene trasmessa una sensazione reale dell'andamento del terreno.

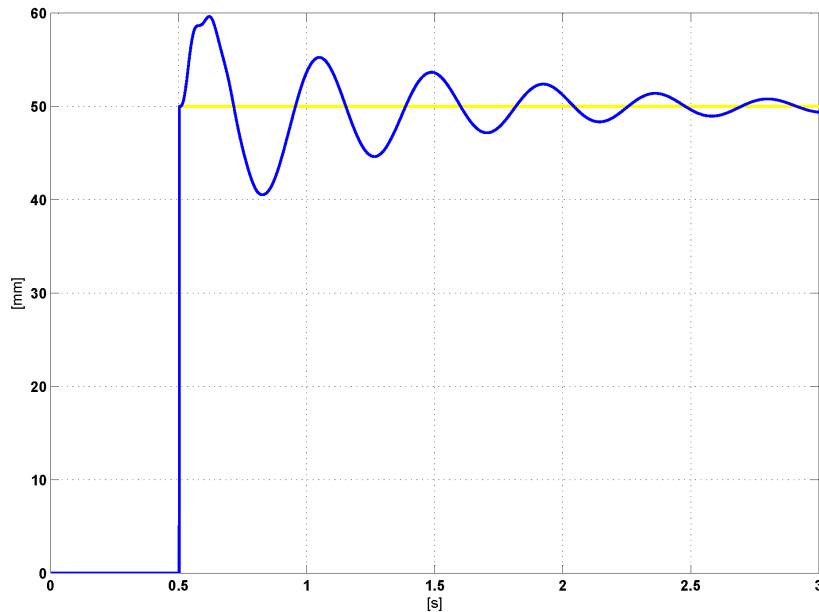


Fig. 4.4: Risposta del sistema ad uno scalino con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$ .

#### 4.4 Disturbo sinusoidale

In questa sezione ci occupiamo del problema dei disturbi sinusoidali, che si verificano quando il manto stradale presenta delle irregolarità ondulatorie che modelliamo come una funzione sinusoidale.

Il range di frequenza delle vibrazioni del veicolo gioca un ruolo fondamentale nella trasmissione della sensazione di comfort ai passeggeri. Ricerche condotte in campo medico hanno mostrato che le frequenze che maggiormente infastidiscono la persona umana sono quelle comprese nel range  $(4 \div 200) Hz$ . Se una persona è soggetta a vibrazioni verticali nel range  $(4 \div 8) Hz$  risulterà presto affaticata anche in assenza di sforzi fisici. La testa e il collo sono sensibili negativamente a vibrazioni nel range  $(18 \div 20) Hz$ , mentre la regione viscerale è sensibile alle frequenze nel range  $(5 \div 7) Hz$ . Anche vibrazioni a frequenza molto bassa possono infastidire notevolmente la persona che le subisce. Si pensi, a titolo di esempio, che il classico “mal di mare” è dovuto a vibrazioni che in genere hanno frequenza inferiore a  $0.7 Hz$ .

Come prima analisi vogliamo vedere il comportamento del veicolo quando il manto stradale ha delle ondulazioni sinusoidali (di ampiezza pari a  $10 cm$ ) intervallate di  $6 m$  percorse alla velocità di  $36 Km/h$  che corrisponde a  $36 * 10^3 / 3600 = 10 m/s$ . In tali condizioni la frequenza con cui vengono incontrate le ondulazioni è data da  $10/6 = 1,67 Hz$ . La corrispondente



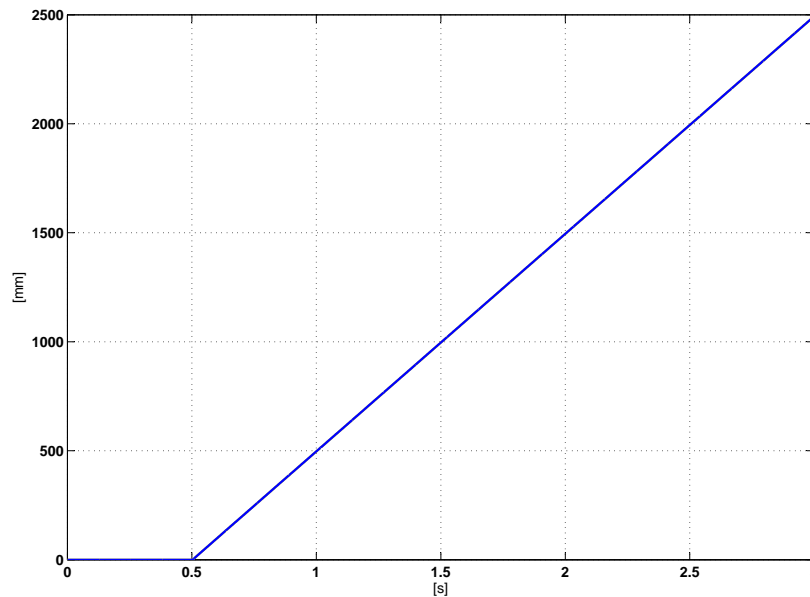


Fig. 4.5: Risposta del sistema ad una rampa con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$ .

funzione di ingresso al blocchetto *Disturbo* é:

$$d(t) = 0,1 \sin(\omega t)$$

con  $\omega = 2\pi * 1,67 \simeq 10,5 \text{ rad/s}$ . Riportiamo ora i grafici della nostra variabile di interesse (posizione della carrozzeria più andamento del manto stradale) comparata con il disturbo (andamento del manto stradale) per i vari compensatori trovati nel capitolo precedente. In Figura 4.7 è riportato il grafico per il primo dei compensatori e come si può notare questo è così veloce da far seguire perfettamente la carrozzeria all'andamento della strada anche se, uno zoom più accurato mostrerebbe delle piccole oscillazioni (dell'ordine dei decimi di millimetro) che non si smorzano al passare del tempo. Naturalmente queste prestazioni costano molto al nostro sistema in termini di potenza richiesta all'attuatore, infatti si raggiungono valori pari a circa  $1400 \text{ N}$ .

In Figura 4.8 abbiamo sottoposto il secondo compensatore allo stesso disturbo e riportato lo stesso grafico. In questa situazione la carrozzeria subisce delle variazioni rispetto alla strada, ma pari al massimo a  $3 \text{ cm}$ . Abbiamo quindi che il sistema segue bene il disturbo ma non fornisce un adeguato comfort all'autista. Per quanto riguarda l'ingresso al sistema anche in questo caso abbiamo valori elevati al limite di quelli che possiamo ottenere nella realtà.

Sempre riguardo a questo tipo di disturbo si deve fare un'osservazione che magari la semplice lettura dei dati non riesce a trasmettere. Il caso in cui

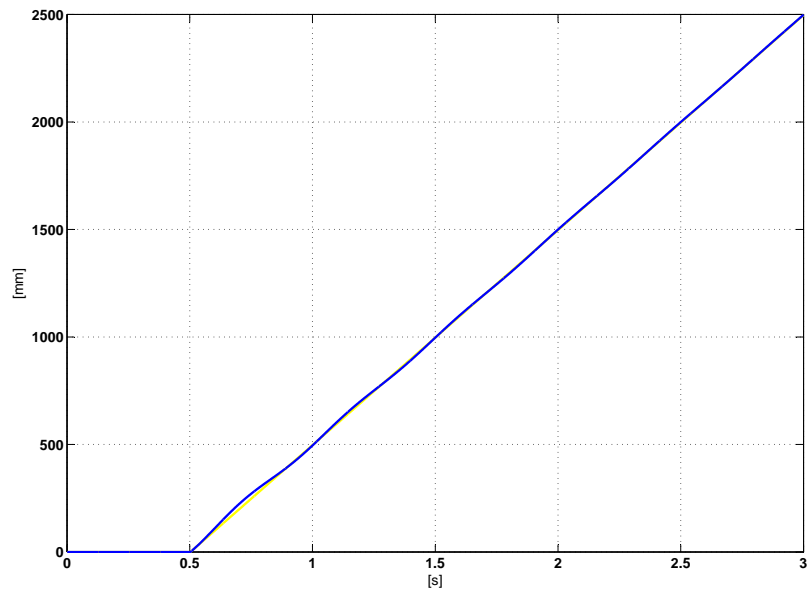


Fig. 4.6: Risposta del sistema ad una rampa con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0,25s)}$ .

ci siamo posti è, nella pratica, difficile da trovare poichè risulta essere una condizione molto gravosa. Dobbiamo pensare che l'auto (in modo particolare la ruota) percorre un'escursione di 20 cm (dal valore massimo al valore minimo della sinusoide) in circa 0,3 s ed il tutto viene aggravato dalla periodicità del fenomeno che, con le classiche sospensioni passive, porta di solito all'aumento delle oscillazioni del veicolo.

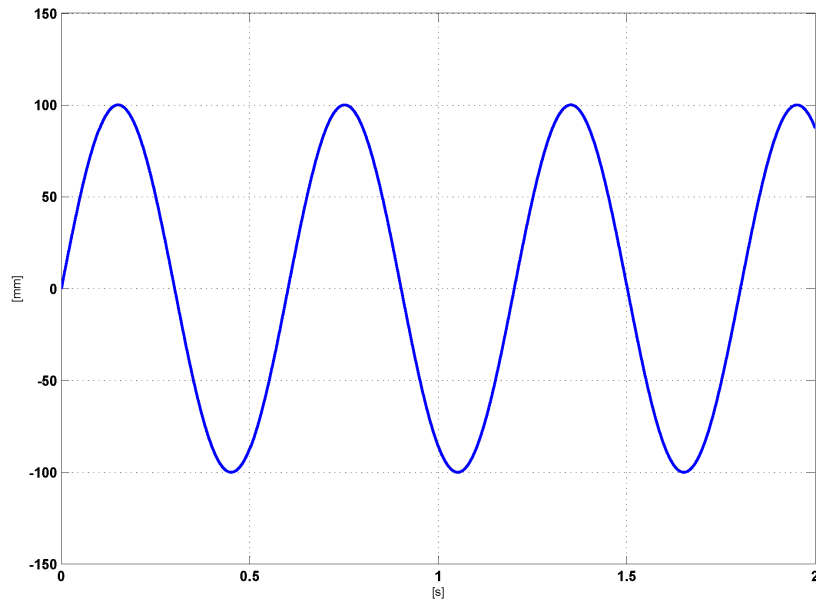


Fig. 4.7: Risposta del sistema ad ondulazioni sinusoidali con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$ .

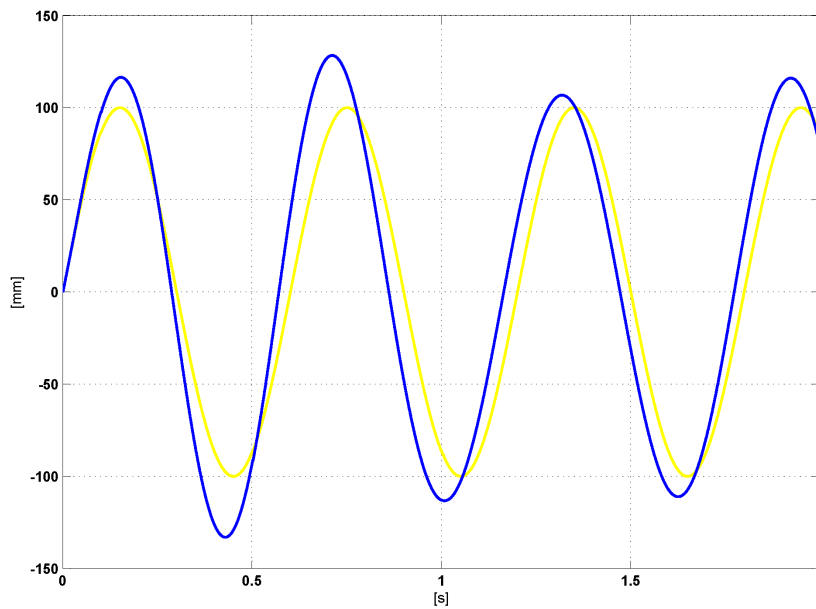


Fig. 4.8: Risposta del sistema ad ondulazioni sinusoidali con  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0.25s)}$ .



## Capitolo 5

# Conclusioni

### 5.1 Confronto tra i due compensatori

Vogliamo ora mettere a confronto i due compensatori trovati per capire quale possa essere il migliore. Naturalmente la domanda non ha una semplice risposta poichè non esistono dei metodi oggettivi con cui rispondere. Andiamo quindi a riassumere i pregi ed i difetti di entrambi i compensatori.

Per il primo compensatore trovato  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$  ricavato nella sezione 3.2 abbiamo:

- Velocità di risposta del sistema molto elevata.
- Ottima reiezione ai disturbi esterni.
- Presenza di oscillazioni di ampiezza ridotta che non abbiamo stabilito se possono dare fastidio per il comfort.
- A causa di dover effettuare la quasi cancellazione zero-polo siamo costretti a mantenere un guadagno molto elevato.
- Problema della saturazione in caso di realizzazione fisica del compensatore (dovuta al punto precedente).

Per il secondo compensatore trovato  $C(s) = 1000 \frac{1}{(1+5s)(1+0.25s)}$  ricavato nella sezione 3.3 abbiamo:

- Velocità di risposta del sistema migliorabile.
- Reiezione ai disturbi buona.
- Risposta al gradino con presenza di sovraelongazione ma comunque accettabile.
- Il controllore è realizzabile anche nella pratica poichè non richiede prestazioni eccessive all'attuatore.

In generale quindi anche se il primo compensatore risulta essere più prestante si deve ritenere migliore il secondo compensatore poichè è essenziale che il progetto possa essere fisicamente realizzabile.

Vogliamo però mettere in evidenza un aspetto molto importante a riguardo dei metodi che abbiamo seguito per la realizzazione dei controllori. Infatti la strada seguita per il progetto nella sezione 3.2 si basa tutta sull'analisi e modifica del luogo delle radici (in particolare quello in Figura 2.4) per ottenere un sistema stabile (posizione dei poli tutti contenuti nel semipiano negativo) con delle particolari prestazioni (per eliminare le oscillazioni indesiderate siamo ricorsi alla quasi cancellazione zero-polo). Per il secondo compensatore il percorso seguito si basa sul diagramma di Bode (quello di Figura 2.1) volendo ottenere anche in questo caso il requisito imprescindibile della stabilità, imponendo il margine di fase positivo ( $PM > 0$  per la stabilità,  $PM > 45 \text{ deg}$  per la "qualità" delle risposte) ma volendo ottenere il massimo delle prestazioni, aumentando il più possibile la pulsazione di attraversamento ( $\omega_a$ ).

Le due "strade" hanno condotto a risultati ben diversi ma entrambi soddisfacenti e questo ci mostra come sia sempre opportuno sfruttare tutta la conoscenza di cui siamo in possesso nel corso di un progetto.

## 5.2 Vantaggi e svantaggi delle sospensioni attive

Nel corso del Capitolo 4 abbiamo eseguito diverse simulazioni per capire meglio il comportamento delle sospensioni attive sulla strada. Ciò che si può notare è come, per entrambi i compensatori, la carrozzeria segua molto bene l'andamento del manto stradale. Ma allora dov'è il vantaggio nell'adoptare questo tipo di sospensioni? Il vantaggio nasce nel momento in cui si usano correttamente le potenzialità che abbiamo a nostra disposizione. Infatti nel corso di tutte le simulazioni svolte il segnale di riferimento in ingresso è sempre stato nullo ( $r(t) = 0$ ) e non c'è quindi da sorprenderci se il sistema cercava di far seguire alla carrozzeria l'andamento della strada dato che eravamo noi a "imporgli" questo. Proviamo per esempio a rifare la simulazione relativa alla Figura 4.7 (primo compensatore) dando però come segnale di riferimento lo stesso segnale in ingresso al blocchetto *Disturbo* ma cambiato di segno ( $r(t) = -d(t)$ ). In Figura 5.1 (dove in giallo abbiamo il classico andamento del manto stradale ed in blu la posizione della carrozzeria) possiamo capire cosa voglia dire "sfruttare" le capacità delle sospensioni attive. L'auto percorre ad una buona velocità una strada molto sconnessa e l'autista subisce solo delle leggere oscillazioni di qualche millimetro.

Possiamo dunque intuire la presenza di una potenzialità enorme nelle sospensioni di questo tipo che però non possono essere sfruttate senza l'ausilio di una centralina di controllo (ECU) che processa i segnali acquisiti e produce i segnali di comando per i dispositivi attuatori. Lo schema a cui possiamo

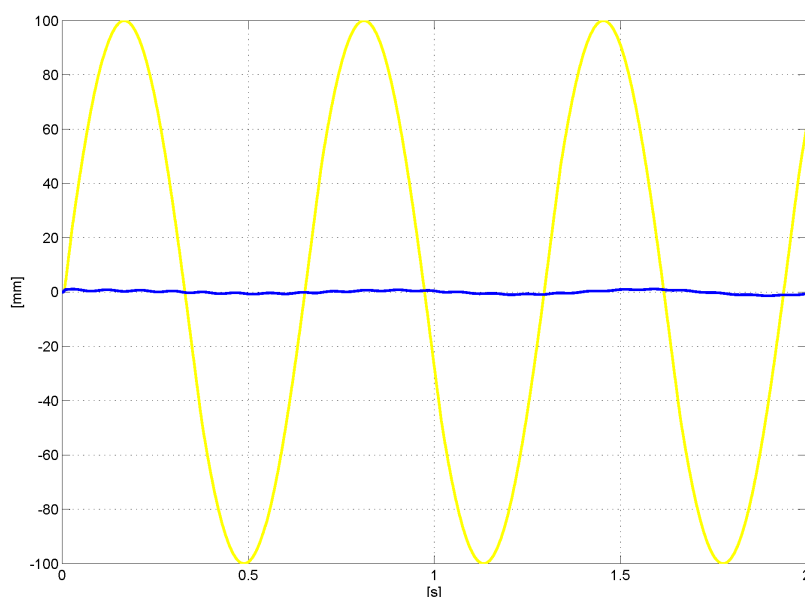


Fig. 5.1: Risposta del sistema ad ondulazioni sinusoidali con  $C(s) = 7000 \frac{1+0.05s}{1+10^{-5}s}$  e sfruttando il segnale di riferimento ( $r(t) = -d(t)$ ).

fare riferimento è quello in Figura 5.2 in cui evidenziamo la presenza della centralina che riceve in input i comandi prodotti dal pilota e la situazione attuale del veicolo cercando così di sfruttare appieno le potenzialità delle sospensioni attive per risolvere brillantemente il compromesso tra il miglioramento del comfort e il controllo dell'assetto.

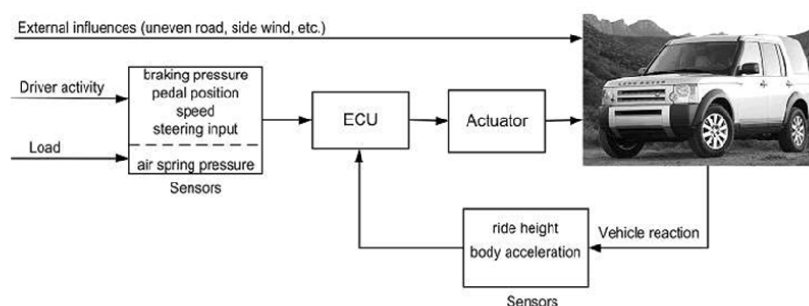


Fig. 5.2: Schema di riferimento di una sospensione a controllo elettronico.

Sospensioni attive sono impiegate in pochi veicoli commerciali di alta gamma come ad esempio il coupè *Toyota Soarer* e la *Mercedes serie SL 65AMG*. Il motivo è dovuto a vari costi aggiuntivi che elenchiamo di seguito:

- Necessità di un compressore per il fluido idraulico che aziona gli attuatori, con i relativi accessori (serbatoi di raccolta, servovalvole, ...).
- Necessità di attuatori di forza che applicano alla massa sospesa le forze “calcolate” dal sistema di controllo della sospensione.
- Necessità di sensori (accelerazione, velocità, spostamento, deformazione, ...)
- Necessità di microprocessori, e di hardware e software per la loro gestione e per l’immagazzinamento dei dati.

Tutto ciò si traduce in un aumento del peso del veicolo, maggior consumo (anche per la necessità di fornire energia al sistema attuatore), maggior costo, minore affidabilità per l’elevato numero di componenti. I sistemi elettronici alloggiati nei veicoli si trovano ad operare in condizioni ambientali non facili e sono soggetti a forti disturbi elettromagnetici. Le normative in termini di affidabilità per le elettroniche da alloggiarsi nei sistemi automotive commerciali sono inoltre estremamente stringenti.

Almeno in linea teorica, meno nella pratica, le prestazioni di un sistema di sospensioni attive sono limitate solo dalla potenza di attuazione che si sceglie di impiegare.

Come dato indicativo si può ipotizzare che un sistema di sospensioni attive richieda un incremento di potenza tra i 5 e i 15  $kW/ruota$  ed un incremento di peso tra i 20 e i 30  $kg/ruota$ .

Allo stato attuale, visti gli elevati costi ed il basso interesse al riguardo, si può presagire nel medio termine una bassa diffusione di questa tecnologia.



## Ringraziamenti

Prima di tutto voglio ringraziare chi ha reso possibile la realizzazione della mia tesina. Un grazie particolare al prof. Mauro Bisiacco che mi ha seguito durante tutta la stesura e si è sempre dimostrato disponibile e pronto ad aiutarmi in caso di difficoltà.

Devo ringraziare anche molte altre persone, che mi hanno aiutato psicologicamente ed economicamente nei miei studi. Primi fra tutti i miei genitori, per tutto il supporto che mi hanno sempre dato e per avermi dato la possibilità di compiere il mio percorso di studi, opportunità che loro purtroppo non hanno avuto.

Ringrazio anche Diletta per essermi stata vicina, in tutto questo percorso tra periodi felici ed infelici, che mi ha portato alla laurea. A lei anche un augurio affinché possa al più presto raggiungere tutti gli obiettivi che si è prefissata. Grazie anche ai parenti che oggi gioiscono con me in modo particolare i fratelli Michele ed Andrea, la sorella Luisa e gli zii Luciano e Marisa per avermi cresciuto come un figlio.

Non posso dimenticare nemmeno gli amici del mio paese che mi conoscono da quando ero bambino: Marco, Mattia, i cugini Alessandro e Silvio e tutti gli altri. E grazie ai miei coinquilini Enrico, Mattia, Federico ed Alberto per avermi supportato e sopportato, con loro negli ultimi due anni ho condiviso molte cose, in particolare la fatica sui libri, ma anche momenti di festa e gioia, come oggi.