

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Triennale in
Astronomia

**Il lensing gravitazionale: vincoli osservativi al
contenuto di materia oscura in sorgenti
astrofisiche**

21 settembre 2023

Relatore: Giulia Rodighiero
Correlatore: Andrea Enia

Candidato: Marco Callegari

Anno Accademico 2022-2023

Lo studio del fenomeno di lente gravitazionale costituisce un significativo passo avanti nella ricerca scientifica. Questa continua indagine, in termini scientifici, per raggiungere la verità viene descritta da Einstein come una partita a scacchi tra l'Uomo e Dio in cui il premio è la conoscenza dell'Universo. Lo stesso fisico probabilmente non sarebbe troppo sorpreso della correttezza della sua mossa, ovvero la relatività generale, come afferma Vincenzo Palermo all'interno di un'intervista: *"Probabilmente commenterebbe la scoperta delle onde gravitazionali così come fece nel 1919, quando le misure fatte durante un'eclissi confermarono finalmente che la gravità curvava la luce delle stelle. Alla notizia, una sua collaboratrice presente nella stanza si mostrò molto più eccitata e contenta di Einstein, che invece prese la notizia con noncuranza. "Sapevo già", disse, "che la teoria era giusta". "Sì", chiese la donna, "ma cosa avrebbe fatto se gli esperimenti avessero dimostrato che era sbagliata?". In quel caso mi sarebbe dispiaciuto per il buon Dio; la teoria è giusta"»*" (Aloisio, 2016).

Sommario

Questo elaborato contiene una trattazione del lensing gravitazionale che parte da una descrizione generale del fenomeno per arrivare poi ad una sua particolare applicazione astrofisica. Nello specifico si pone l'attenzione all'effetto di microlensing: questo particolare tipo di lente permette lo studio di sorgenti che contengono materia oscura.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Contesto	1
1.2	Cenni storici	1
1.2.1	Deflessione della luce secondo la trattazione newtoniana	1
1.2.2	Deflessione della luce secondo la Relatività Generale	1
1.2.3	Prima verifica sperimentale della Relatività Generale	2
1.2.4	Analisi teorica delle applicazioni del fenomeno	2
1.2.5	Osservazioni dirette del lensing mediante quasar	3
1.2.6	Osservazioni dirette del lensing di sorgenti estese	4
2	Descrizione generale del lensing gravitazionale	7
2.1	Deflessione della luce	7
2.2	Equazione della lente	8
2.2.1	Soluzioni particolari	10
2.2.2	Soluzione generale	12
2.3	Tipi di lenti gravitazionali	13
2.4	Mappatura della lente al primo ordine	14
2.4.1	Sorgente generica	14
2.4.2	Sorgente circolare	15
2.5	Effetti del lensing	16
2.5.1	Ingrandimento	16
2.5.2	Caustiche	17
2.5.3	Ritardo temporale	18
2.5.4	Immagini multiple	20
3	Microlensing	21
3.1	Approssimazione ad una lente puntiforme	21
3.2	Analisi delle caratteristiche	23
3.2.1	Curve di luce	23
3.2.2	Blending	26
3.2.3	Parallasse	26
3.2.4	Microlensing astrometrico	28
3.2.5	Probabilità	30
4	Microlensing applicato a sorgenti astrofisiche contenenti materia oscura	33
4.1	Materia oscura	33
4.2	MACHOs (<i>Massive Astrophysical Compact Halo Objects</i>)	33
4.3	Survey ZTF (<i>Zwicky Transient Facility</i>)	34
4.3.1	Ricerca di buchi neri tra 60 eventi di microlensing della fase ZTF-I	34
4.3.2	Fase ZTF-II: studio di eventi di microlensing prolungato nel tempo	36
4.4	Microlensing prodotto da strutture estese contenenti materia oscura	37
4.4.1	Vincoli alla frazione di materia oscura	40
4.5	Microlensing prodotto da buchi neri primordiali con alone	43
4.5.1	Buchi neri primordiali	43
4.5.2	Descrizione del fenomeno	43
4.5.3	Vincoli all'abbondanza di buchi neri primordiali	46

5	Conclusioni	51
6	Fonti	52

1 Introduzione

1.1 Contesto

La cosmologia si occupa dello studio dell'Universo in termini delle sue componenti e della sua struttura. Nello specifico, per riuscire a definirne una rappresentazione fisico-matematica, è necessario considerare il **Principio Cosmologico** che afferma come l'Universo sia *omogeneo* ed *isotropo*. La validità di tale principio è relativa a grandi scale, almeno superiori a 100 Mpc, mentre non può essere applicato a livello locale a causa dell'elevato grado di disomogeneità nella distribuzione delle sorgenti cosmiche. Sulla base di queste condizioni di simmetria è possibile derivare la metrica di Robertson-Walker che permette di caratterizzare la geometria dell'Universo, indipendentemente dalla teoria della gravitazione considerata. Per ottenere una descrizione completa ed auto-consistente della struttura generale dell'Universo è necessario però fare riferimento alla **Teoria della Relatività Generale** di Albert Einstein che determina la relazione tra gravità e curvatura spaziale. Il lensing gravitazionale costituisce la prima prova sperimentale della validità di questa teoria.

1.2 Cenni storici

1.2.1 Deflessione della luce secondo la trattazione newtoniana

L'idea della deflessione della luce ad opera della gravità risale al XVIII secolo, proprio durante il dibattito in merito alle caratteristiche della radiazione luminosa. Tale discussione vede contrapporsi Sir Isaac Newton, che sostiene la natura corpuscolare della luce, e Christian Huygens, che ne considera invece la natura ondulatoria. Nello specifico Newton, all'interno dell'opera "*Opticks*", considera la possibile deviazione della luce stellare da parte del Sole.

Nel 1784 John Michell, all'interno di una lettera indirizzata ad Henry Cavendish, ipotizza la possibilità di stimare la massa di una stella misurando quanto il suo campo gravitazionale influenzi la luce, rallentandola. Questa intuizione, presa in considerazione indipendentemente anche da Laplace nel 1796, sollecita Cavendish che decide di calcolare la deviazione della traiettoria della luce sulla base della meccanica classica: l'angolo di deflessione di un raggio di luce che passa ad una distanza R da una stella di massa M risulta

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2 R}$$

dove G indica la costante di gravitazione universale ($6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^{-2} \text{ kg}^{-2}$) e c è la velocità della luce ($c = 299792 \text{ km s}^{-1}$).

1.2.2 Deflessione della luce secondo la Relatività Generale

Nel 1907 Einstein elabora uno dei cardini della Teoria della Relatività generale, ovvero il Principio di Equivalenza. Tale principio afferma che massa inerziale e gravitazionale coincidono: non è dunque possibile distinguere gli effetti gravitazionali da quelli causati da un'accelerazione. Sulla base del principio di equivalenza e considerando la costanza della velocità della luce, comprende che la luce deve essere soggetta ad effetti gravitazionali. Nel 1911, sulla base della relatività speciale, calcola l'angolo di deflessione della luce per effetto di una massa ed ottiene risultati conformi a quelli di Cavendish. Lo stesso fisico di origini tedesche, a partire dal 1912, tenta di confermare la deduzione teorica mediante osservazioni dirette del fenomeno. Al fine di definire una modalità osservativa adeguata si confronta con Sir George Ellery Hale, direttore dell'Osservatorio di Mount Wilson, che indica come l'eclissi solare totale offra l'opportunità

di misurare più facilmente l'eventuale spostamento della posizione delle stelle per effetto della massa solare.

Nel 1915 Einstein, grazie alle equazioni di campo della Teoria della Relatività Generale, ripete il calcolo dell'angolo di deflessione della luce arrivando al doppio del valore ottenuto mediante la trattazione newtoniana.

1.2.3 Prima verifica sperimentale della Relatività Generale

Iniziano le prime spedizioni al fine di rilevare il fenomeno, senza però esiti positivi: un gruppo argentino nel 1912 in Brasile non ottiene risultati a causa di condizioni atmosferiche sfavorevoli e nel 1914 un gruppo tedesco in Crimea, guidato dall'astronomo Freundlich e supportato da Einstein, viene sciolto a causa dell'inizio della Prima Guerra Mondiale.

Nel 1917 Sir Arthur Eddington e Frank Dyson convincono la Royal Astronomical Society a sostenere una spedizione volta a verificare la teoria di Einstein. Nel 1919 arriva dunque la prima evidenza della validità della Relatività Generale: quando Eddington, osservando un'eclisse solare totale, si rende conto che le stelle in prossimità del contorno solare appaiono spostate rispetto alla loro posizione reale. Le misure della posizione delle stelle presentano un'elevata incertezza ma confermano comunque la predizione relativistica. Tale risultato viene accolto con molto entusiasmo come riportato da un'edizione del New York Times che comunica la notizia della deflessione della luce esaltando il lavoro di Einstein.

1.2.4 Analisi teorica delle applicazioni del fenomeno

Nel 1936 Einstein, su consiglio dell'astronomo amatoriale Rudi Mandl, valuta l'analogia tra il lensing gravitazionale e la lente ottica: in un sistema costituito da due stelle allineate, la luce della seconda stella viene amplificata dalla gravità della prima, come se attraversasse una lente di ingrandimento, originando un'immagine ad anello. Riteneva però, sull'assunzione errata che solo le stelle siano attori del lensing gravitazionale, che la probabilità che il fenomeno si verifichi sia talmente bassa da non renderlo direttamente osservabile.

A partire dal 1924 le osservazioni di Edwin Hubble di altre galassie aprono nuove opportunità per la rilevazione del fenomeno: è possibile ora considerare gli effetti gravitazionali dovuti a distribuzioni di oggetti molto massivi, come galassie ed ammassi di galassie.

Nel 1937 infatti F. Zwicky sostiene che le galassie possano modificare l'immagine di sorgenti in background con un angolo di deviazione della luce abbastanza grande da essere rilevato. Inoltre considera le potenzialità del fenomeno per lo studio di sorgenti troppo deboli per poter essere osservate in modo diretto e stima correttamente la probabilità di lensing prodotto da galassie (circa 1% per una sorgente sufficientemente distante). Lo stesso astronomo americano ipotizza la presenza, negli ammassi di galassie, di una significativa quantità di materia non visibile, la materia oscura, in grado di generare campi gravitazionali di intensità molto superiori a quelli prodotti dalla materia barionica. Questa materia non visibile potrebbe generare lensing gravitazionale ed è per questo che Zwicky, per primo, sottolinea l'utilità dell'effetto relativistico ai fini della comprensione della distribuzione di materia nella lente.

Al tempo stesso vengono teorizzate altre conseguenze, come discusso dall'astrofisico S.Refsdal nel 1964 che considera come la luce accumuli un ritardo temporale quando deflessa dalla gravità. Dunque nel caso di perfetto allineamento lente-sorgente si creano immagini multiple con diverso ritardo temporale.

1.2.5 Osservazioni dirette del lensing mediante quasar

Nel 1962 Schmidt scopre una nuova tipologia di sorgenti: i quasar. Queste sorgenti puntiformi data la loro elevata distanza e luminosità facilitano la rilevazione del lensing gravitazionale; in presenza di un campo gravitazionale abbastanza forte, l'effetto di ingrandimento e distorsione della sorgente è significativo.

Lo studio sistematico e quantitativo del fenomeno è stato possibile solo grazie allo sviluppo tecnologico degli strumenti di osservazione ed al campionamento di grandi aree di cielo. Nello specifico l'incremento della sensibilità dei rilevatori è da attribuire all'introduzione dei CCD (*Charge-Coupled Device*). Questo progresso tecnico porta alla prima osservazione diretta di una lente gravitazionale nel 1979 ad opera di D. Walsh, B. Carswell e R. Weymann. Mediante il telescopio dell'Osservatorio Astronomico di Kitt Peak (USA) rilevano una sorgente, nota da allora come Twin Quasar (QSO 0957+561), costituita da due quasar separati da 6 secondi d'arco. L'interpretazione risulta però più complessa date le somiglianze nei loro spettri e nel redshift. L'idea che le due sorgenti possano essere due immagini di un'unica sorgente viene confermata anche sulla base di osservazioni tramite VLBI (*Very-long-baseline interferometry*) che mostrano una correlazione nelle loro emissioni in banda radio. Si arriva dunque alla conclusione, considerando anche la presenza di un piccolo gruppo di galassie in primo piano rispetto alle due immagini, che il fenomeno osservato corrisponde al lensing gravitazionale.

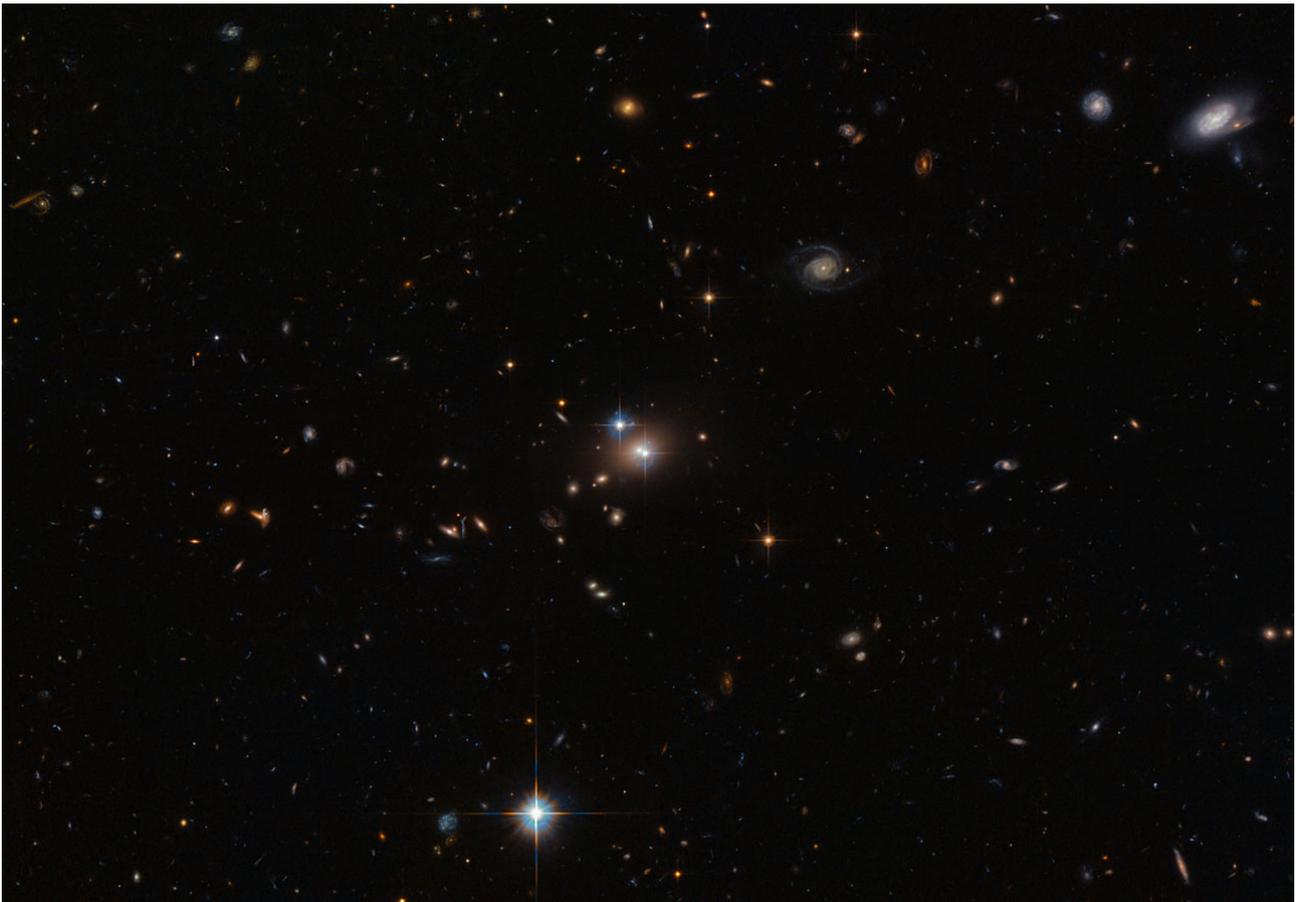


Figura 1: Immagine del Twin Quasar (QSO 0957+561) che si trova a 14 miliardi di anni luce da noi. Tra la terra ed il quasar è presente, direttamente lungo la nostra linea di vista, la grande galassia YGKOW G1 che funge da lente gravitazionale. (Fox, 2015)

Nel 1985 viene identificato un'ulteriore fenomeno di lensing riguardante un quasar (Q2237+0305) la cui immagine viene divisa in modo da formare una croce, nota come "Einstein cross", attorno alla galassia che funge da lente. Questa condizione si verifica nel caso in cui sia presente un quasi perfetto allineamento del sistema lente-sorgente ed è legata alla distribuzione della materia all'interno della lente.

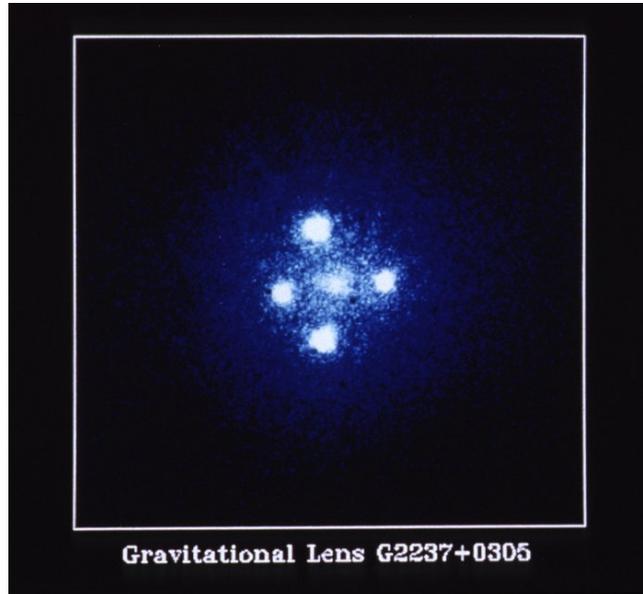


Figura 2: Immagine ottica della "Einstein Cross" della lente gravitazionale G2237 + 0305. Tale effetto produce quattro immagini di un quasar, distante circa 8 miliardi di anni luce, con una separazione angolare di 1.6 arcosecondi tra l'immagine superiore e quella inferiore. L'immagine è stata ottenuta mediante la Faint Object Camera dell'ESA presente nell'HST. (NASA & ESA, 1990)

1.2.6 Osservazioni dirette del lensing di sorgenti estese

La possibilità che la sorgente sottoposta alla deformazione non sia solo puntiforme, come i quasar, ma possa essere un oggetto esteso, come una galassia porterebbe ad immagini multiple deformate e mescolate: i *gravitational arcs*. Questo evento è stato osservato nel 1986 da Lynds e Petrosian ed in seguito da Soucail. L'osservazione diretta evidenzia immagini con forme ad arco in alcuni ammassi di galassie, tra cui Abell 370. L'interpretazione di quanto visto non è univoca e solo nel 1988 Soucail comprende che il redshift della sorgente, vista come arco, è superiore a quello dell'ammasso dimostrando quindi come il fenomeno osservato in Abell 370 rappresenta la prima evidenza di un arco gravitazionale (Figura 3).

Nello specifico, il fenomeno di lente gravitazionale che, creando immagini multiple, comporta un evidente distorsione della forma della sorgente si chiama *strong lensing*, mentre l'eventuale anello dell'immagine modificata, presente in caso di perfetto allineamento lente-sorgente, si chiama *Einstein ring*. Questo particolare effetto, riportato in figura 4, è un ulteriore esempio di lente gravitazionale applicata a sorgenti estese; il suo studio è reso possibile da osservazioni compiute grazie al telescopio spaziale HST.

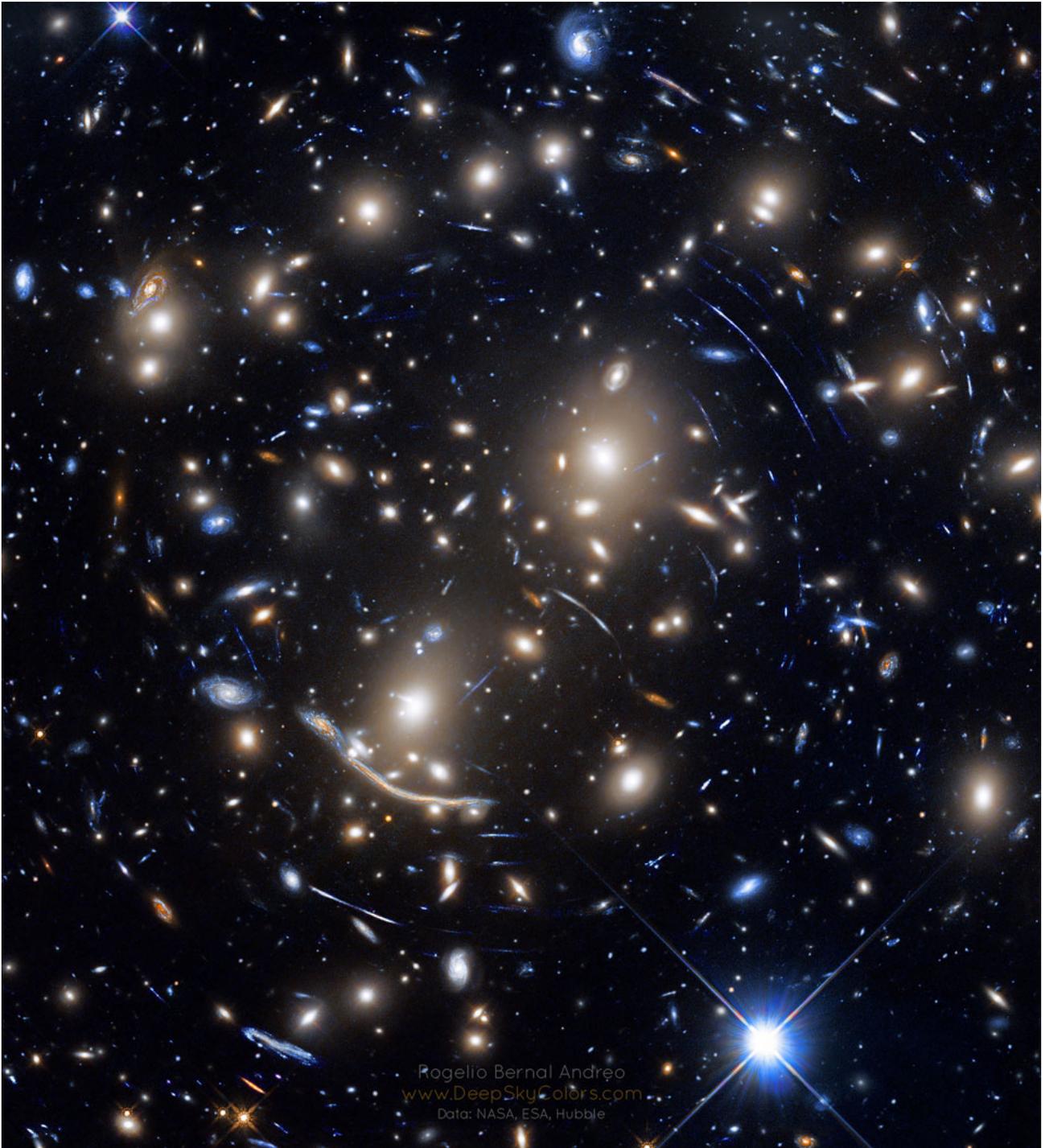


Figura 3: Immagine dei *gravitational arcs* identificati osservando l'ammasso di galassie Abell 370. L'arco più brillante è composto da due immagini deformate di una galassia lontana. Lo studio di questo ammasso ha permesso di avere informazioni sulla distribuzione di materia normale ed oscura all'interno degli ammassi di galassie. (Rogelio Bernal, 2019)

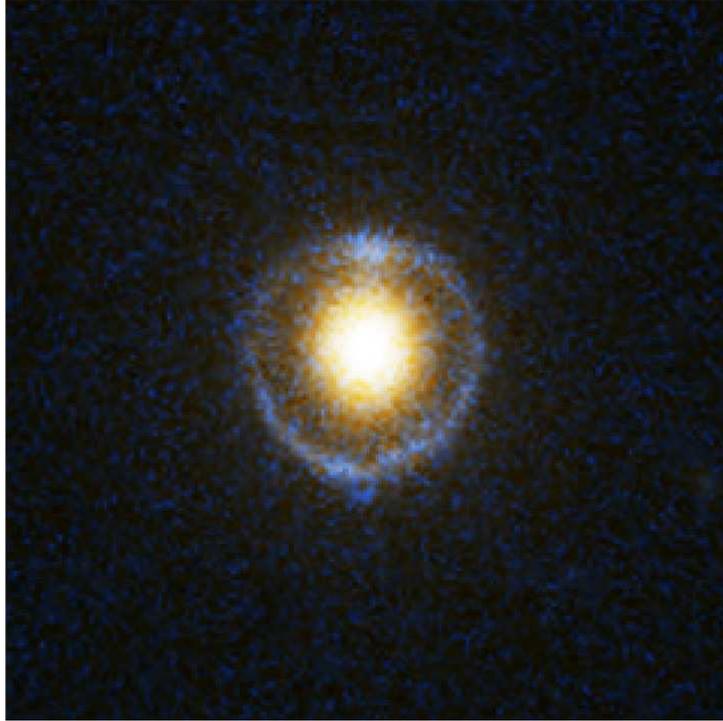


Figura 4: Immagine dell'Einstein Ring relativo ad una lente gravitazionale, SDSS J162746.44-005357.5, rilevato mediante HST. (Bolton, 2005)

A questi casi particolari si aggiunge il regime di microlensing, che indica un evento di lente gravitazionale su piccole scale angolari, inferiori al milli-arcosecondo. Nel 1986 B. Paczynski ne suggerisce la ricerca diretta, nell'alone della Via Lattea, associandolo ad ipotetica materia oscura nella forma di MACHOs (*Massive Astrophysical Compact Halo Objects*). Grazie a misure sulla luminosità di varie stelle presenti nella Nube di Magellano si arriva alla prima rilevazione del fenomeno nel 1993.

Nel 1990 Tyson comprende che galassie distanti subiscono deboli elongazioni e distorsioni tangenziali nelle prossimità dell'ammasso Abell 1689: si tratta dell'effetto di *weak lensing*. Fenomeno dal ridotto ordine di grandezza, che può essere usato per determinare la distribuzione di materia in grandi porzioni di cielo. Tale effetto valutato su grande scala, definito *cosmic shear*, è considerato uno degli strumenti principali per lo studio dell'energia oscura. La sua rilevazione è relativa agli inizi del 2000.

2 Descrizione generale del lensing gravitazionale

Il fenomeno del lensing gravitazionale comporta la deflessione di raggi luminosi per effetto del campo gravitazionale di un oggetto che si trova tra l'osservatore e la sorgente in questione. Per descrivere quantitativamente come si modifica l'immagine della sorgente è possibile partire da diverse approssimazioni che permettono di eseguire un'analisi semplificata del fenomeno, trattato dunque come se fosse una semplice lente ottica.

2.1 Deflessione della luce

Una volta che la luce raggiunge la posizione della lente subisce una deviazione quantificabile mediante l'**angolo di deflessione totale della luce**:

$$\hat{\alpha} = \frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} \Phi dl \quad (1)$$

Questa definizione si ricava sulla base di alcune assunzioni:

- l'utilizzo della metrica di Robertson-Walker per descrivere la geometria dell'universo;
- l'approssimazione ad una lente piana sottile, assumendo che il suo spessore sia trascurabile rispetto alla scala delle grandezze in gioco;
- l'assunzione di una lente con debole campo gravitazionale, quindi si utilizza la metrica di Minkowski per descrivere localmente l'universo che viene considerato piatto;
- la velocità non relativistica della lente rispetto all'osservatore.

All'interno dell'integrale che definisce l'angolo di deflessione totale si calcola il gradiente, in direzione perpendicolare al cammino della luce, del **potenziale gravitazionale** Φ . Per effettuare analiticamente il calcolo dell'integrale bisogna definire una forma funzionale per il potenziale gravitazionale:

$$\Phi(b, z) = -\frac{GM}{(b^2 + z^2)^{1/2}} \implies \nabla_{\perp} \Phi(b, z) = \frac{d\Phi}{db} = \frac{GMb}{(b^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2)$$

Dove b è il parametro d'impatto della luce, valutato rispetto al baricentro della distribuzione di massa della lente, e z rappresenta l'asse coordinato lungo il quale avviene la propagazione della luce. Integrando il gradiente del potenziale si ricava:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (3)$$

Questo risultato è conforme ai calcoli di Einstein, effettuati utilizzando le equazioni di campo. Considerando come detto il limitato spessore della lente è possibile esprimere la distribuzione di massa delle lenti in termini della **densità di massa superficiale**:

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi, z) dz \quad (4)$$

Questa quantità permette la distinzione delle diverse tipologie di lensing. E' possibile riformulare la relazione (3) in termini di ξ che corrisponde alla distanza tra il punto d'arrivo dei fotoni sulla lente ed il suo baricentro:

$$\hat{\alpha}(\xi) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\xi - \xi')\Sigma(\xi')}{|\xi - \xi'|^2} \quad (5)$$

L'integrale viene eseguito lungo il piano della lente.

2.2 Equazione della lente

Approssimando il lensing gravitazionale ad una lente ottica è possibile considerare una schema del sistema costituito da: osservatore, lente e sorgente.

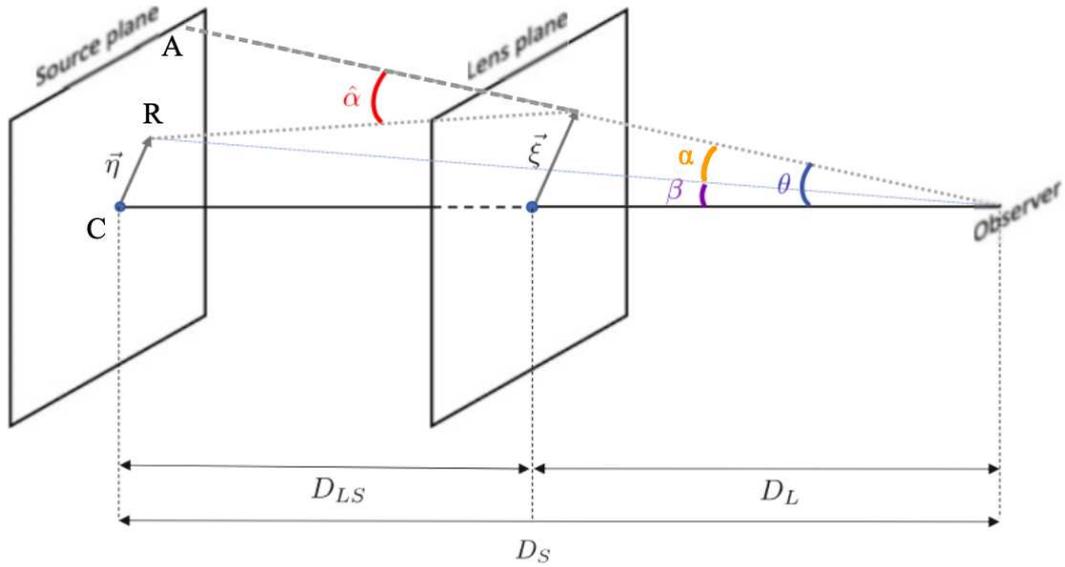


Figura 5: Schema della lente. (Meneghetti, 2021)

Gli **angoli** indicati in figura sono rispettivamente:

- θ è l'angolo compreso tra posizione apparente della sorgente A e centro della lente C, quest'ultimo proiettato sul piano della sorgente;
- β è l'angolo tra posizione reale della sorgente R e centro della lente C;
- α è l'angolo compreso tra la posizione apparente della sorgente A e quella reale R ed è **l'angolo di deflessione ridotto**;
- $\hat{\alpha}$ è **l'angolo di deflessione totale**, valutato rispetto al piano della lente.

Introducendo adesso la **distanza di diametro angolare**:

$$D_A = \frac{\vec{\eta}}{\beta} \quad (6)$$

è possibile avere un'indicazione del rapporto tra dimensione propria e dimensione angolare apparente della sorgente, valutata in radianti.

Nella figura le **distanze**, in termini di distanze di diametro angolare, sono:

- D_L è la distanza lente-osservatore;
- D_{LS} è la distanza lente-sorgente;
- $D_S = D_{LS} + D_L$ è la distanza osservatore-sorgente.

Considerando la distribuzione planare di massa e luce della sorgente, lente e sorgente vengono definiti come due piani. Nel **piano della sorgente** sono presenti i punti:

- C corrisponde alla proiezione del centro della lente tramite l'asse ottico;
- R indica la posizione reale della sorgente; il segmento $\overline{CR} = \vec{\eta} = \beta D_S$ rappresenta la posizione reale della sorgente rispetto all'asse ottico;
- A è relativo alla posizione apparente della sorgente; il segmento $\overline{CA} = \theta D_S$ quantifica la posizione dell'immagine rispetto all'asse ottico.

Nel **piano della lente** è presente il punto:

- A' che indica il punto di arrivo dei raggi luminosi provenienti dalla sorgente, quindi il segmento $\overline{C'A'} = \theta D_L = \vec{\xi}$ indica la posizione dei raggi luminosi rispetto al centro della lente.

A questo punto tale radiazione viene deflessa di un angolo $\hat{\alpha}$ e raggiunge l'osservatore.

Partendo dall'assunzione che gli angoli $\beta, \theta, \hat{\alpha}$ siano piccoli, molto inferiori ad un radiante, si determina una relazione fondamentale: **l'equazione della lente**. Questa equazione può essere definita in termini dei segmenti proiettati sulla sfera celeste

$$\theta D_S = \beta D_S + \hat{\alpha} D_{LS} \quad (7)$$

oppure mediante gli angoli

$$\alpha(\theta) + \beta = \theta \quad (8)$$

Mettendo a sistema queste due diverse espressioni per l'equazione della lente si ricava la relazione tra angolo di deflessione totale $\hat{\alpha}$ e ridotto α :

$$\alpha D_S = \hat{\alpha} D_{LS} \implies \alpha = \hat{\alpha} \frac{D_{LS}}{D_S} \quad (9)$$

Dopo aver definito le grandezze che descrivono questa relazione fondamentale è importante evidenziarne l'applicazione:

- *Partendo da θ come dato iniziale*
Considerando l'equazione della lente, il dato osservativo a disposizione, solitamente, è la posizione dell'immagine e assumendo una certa distribuzione di massa della lente si ricava la posizione reale della sorgente in questione, quindi β . Questa equazione risulta lineare proprio in β , quindi anche in presenza di immagini multiple queste sono associate alla stessa, nonché unica, soluzione.
- *Partendo da β come dato iniziale*
Supponendo invece di conoscere la posizione reale della sorgente e l'angolo di deflessione α l'equazione della lente permette di ricavare θ . La risoluzione analitica dell'equazione è possibile in presenza di semplici distribuzioni di massa della lente in caso contrario risulta non-lineare e genera immagini multiple.

2.2.1 Soluzioni particolari

La lente uniforme corrisponde ad una lente con densità superficiale di massa costante, $M(< \xi) = \pi\xi^2\Sigma$. Inserendo la relazione $b = \xi = D_L\theta$, dedotta graficamente, e la definizione (3) all'interno dell'espressione (9) si ottiene:

$$\alpha(\theta) = \frac{4\pi G\Sigma D_L D_{DL}\theta}{c^2 D_S} = \frac{4\pi G\Sigma D}{c^2} \theta \quad (10)$$

dove D è la **distanza ridotta**:

$$D = \frac{D_L D_{DL}}{D_S} \quad (11)$$

Dalla relazione (10) si deduce come possa essere raggiunta la condizione $\alpha(\theta) = \theta$ nel caso in cui la densità di massa superficiale raggiunga il valore critico pari a:

$$\Sigma^* = \frac{c^2}{4\pi G D} \quad (12)$$

Quando questo avviene la lente mette a fuoco tutti i raggi luminosi prodotti dalla sorgente: si parla quindi di **lente perfetta**.

La lente a simmetria circolare si studia supponendo una distribuzione di massa a simmetria circolare, di conseguenza l'angolo di deflessione diventa:

$$\hat{\alpha} = \frac{4GM(< \xi)}{c^2 \xi} \quad (13)$$

dove $M(< \xi) = 2\pi \int_0^\xi \xi' \Sigma(\xi') d\xi'$.

Sulla base di questa nuova definizione dell'angolo di deflessione considero l'equazione della lente (8) ed inserisco la relazione (9), ottenendo così:

$$\beta = \theta - \frac{4GM(\theta)}{c^2 \theta} \frac{D_{DL}}{D_S D_L} \quad (14)$$

dove mediante la relazione $\theta = \frac{\xi}{D_L}$ si esprime tutto in funzione dell'angolo θ . Anche la distribuzione di massa viene indicata tramite il profilo $M(\theta)$.

L'equazione della lente può essere riscritta in funzione del **raggio di Einstein** θ_E :

$$\theta_E^2 = \frac{4GM(\theta) D_{DL}}{c^2 D_S D_L} \implies \theta_E = \sqrt{\frac{4GM(\theta) D_{DL}}{c^2 D_S D_L}} \quad (15)$$

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} = \frac{\theta^2 - \theta_E^2}{\theta} \quad (16)$$

A questo punto il fenomeno si analizza sulla base del tipo di sorgente considerata:

- Sorgente Puntiforme

Si presentano due possibilità a seconda della posizione della sorgente rispetto alla lente:

1. *Sorgente perfettamente allineata alla lente* ($\beta = 0$): l'immagine della sorgente corrisponde ad un anello di raggio angolare θ_E .
2. *Sorgente non allineata alla lente*: risolvendo l'equazione della lente si ottengono due soluzioni

$$\theta^2 - \theta\beta - \theta_E^2 = 0 \implies \theta_{1,2} = \frac{1}{2}(\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}) \quad (17)$$

Queste soluzioni rappresentano le due immagini che vede l'osservatore: una si trova all'interno dell'Einstein Ring ed una invece al di fuori. Al diminuire di β il risultato si avvicina a quello che si ottiene con allineamento lente-sorgente, mentre all'aumentare di β le due immagini si allontanano sempre di più fino a quando una non coincide con la sorgente reale ,all'esterno dell'Einstein Ring, mentre l'altra scompare.

- Sorgente Estesa

Ragionamento uguale a quanto indicato per una sorgente puntiforme, solo che si generano degli archi nell'immagine.

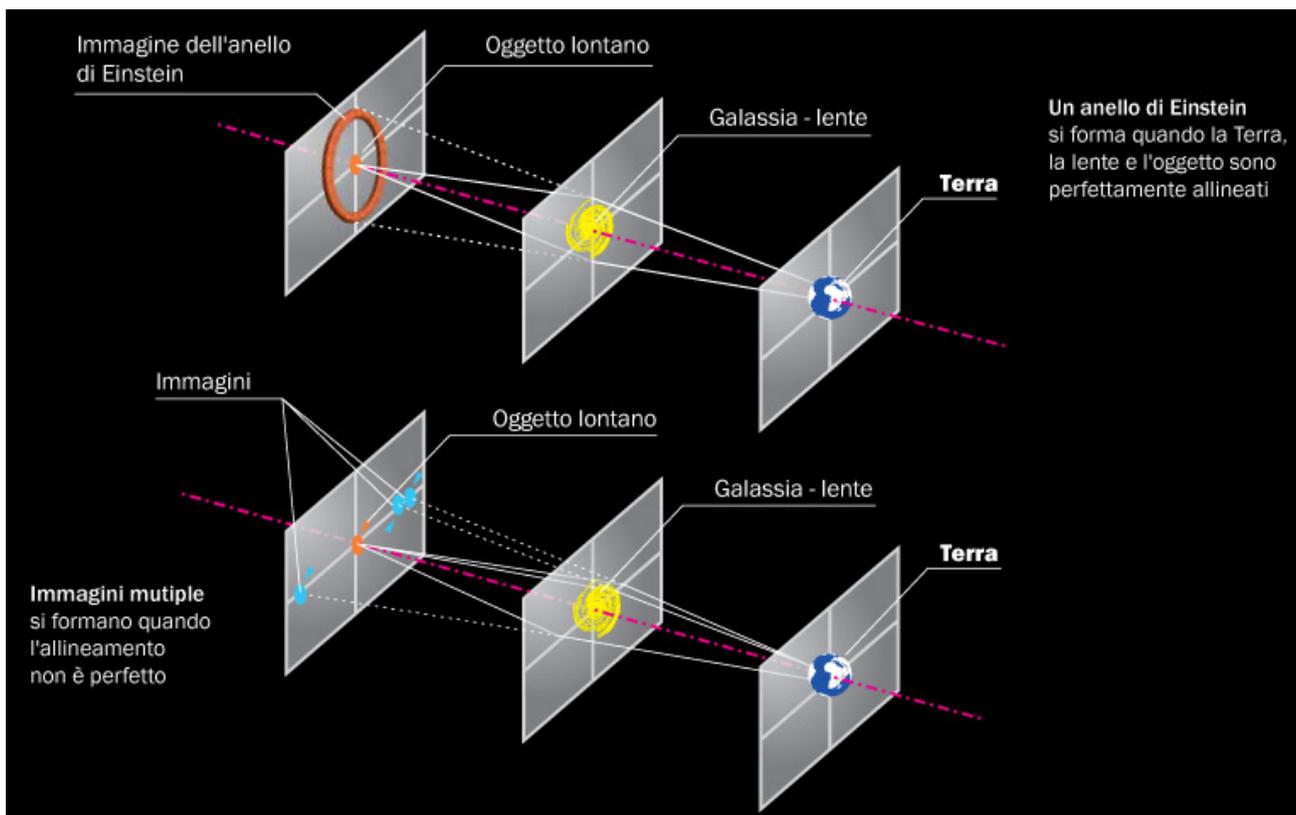


Figura 6: Figura che rappresenta, in funzione della posizione relativa tra sorgente e lente, l'effetto di lensing gravitazionale per una lente a simmetria circolare che modifica l'immagine di una sorgente puntiforme. (Peruzzi, 2007)

2.2.2 Soluzione generale

La distribuzione di massa della lente rappresenta l'informazione fondamentale per l'analisi delle lenti gravitazionale. Questa grandezza viene descritta sulla base del **potenziale di lensing**:

$$\hat{\Psi}(\theta) = \frac{2D_{LS}}{D_L D_S c^2} \int \Phi(D_L \theta, z) dz \quad (18)$$

Dove z corrisponde alla distanza valutata lungo l'asse ottico del sistema lente-osservatore. Questo potenziale, equivalente alla proiezione del potenziale tridimensionale Φ direttamente sul piano della lente, ha le seguenti proprietà:

- **il suo gradiente corrisponde all'angolo di deflessione ridotto α**

La dimostrazione di questa affermazione inizia ricordando che nel piano della lente valgono le relazioni $\xi = D_L \theta$ e

$$\nabla_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} = D_L \frac{\partial}{\partial \xi} = D_L \nabla_\xi \quad (19)$$

Nel piano della lente, perpendicolare alla linea di vista, avviene anche il calcolo del gradiente. Per derivare la proprietà in questione si parte dall'equazione (9) inserendovi all'interno la definizione (1), così facendo si ottiene:

$$\alpha(\theta) = \frac{D_{DL}}{D_S} \frac{2}{c^2} \int \nabla_\perp \Phi(z) dz \quad (20)$$

Si calcola il gradiente dell'espressione (18):

$$\nabla_\theta \hat{\Psi}(\theta) = \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla_\perp \Phi(D_L \theta, z) dz = \alpha \quad (21)$$

Quindi alla fine si ricava la relazione:

$$\nabla_\theta \hat{\Psi}(\theta) = \alpha(\theta) \quad (22)$$

- **il suo laplaciano corrisponde al doppio della convergenza k**

Imposto direttamente il calcolo:

$$\nabla_\theta^2 \Psi = \nabla_\theta \alpha(\theta) = \nabla_\theta \left[\frac{D_{DL}}{D_S} \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp \Phi(D_L \theta, z) dz \right] = \frac{2D}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_\perp^2 \Phi(D_L \theta, z) dz \quad (23)$$

dove il laplaciano all'interno dell'integrale è dato da

$$\nabla_\perp^2 \Phi = \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \quad (24)$$

in cui il secondo termine è trascurabile per motivi di simmetria nella lente. Dunque dall'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (25)$$

si arriva a

$$\nabla_\theta^2 \Psi = \frac{D_L D_{DL}}{D_S} \frac{2}{c^2} 4\pi G \int_{-\infty}^{\infty} \rho dz = 2 \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma^*} \quad (26)$$

Questa equazione può essere riscritta introducendo il concetto di **convergenza** $k(\theta)$: grandezza che indica il rapporto tra la densità di massa superficiale della lente ed il valore critico già visto.

$$k(\theta) = \frac{\Sigma(\theta)}{\Sigma^*} \quad (27)$$

Quindi alla fine si ottiene la relazione:

$$\nabla_{\theta}^2 \hat{\Psi}(\theta) = 2k(\theta) \quad (28)$$

Integrando l'ultima equazione si determina la seguente espressione per il potenziale di lensing:

$$\Psi(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int k(\vec{\theta}') \ln |\vec{\theta} - \vec{\theta}'| d^2 \vec{\theta}' \quad (29)$$

Inoltre l'angolo di deflessione risulta, tramite la relazione (22):

$$\alpha(\vec{\theta}) = \frac{1}{\pi} \int k(\vec{\theta}') \frac{\vec{\theta} - \vec{\theta}'}{|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|^2} d^2 \vec{\theta}' \quad (30)$$

Lavorando nello spazio bidimensionale relativo al piano della lente, si utilizzano dei vettori. Nello specifico la relazione (30) permette di determinare la deflessione della luce sulla base del modello di distribuzione di massa assunto per la lente.

2.3 Tipi di lenti gravitazionali

Sulla base della densità superficiale di massa le lenti vengono differenziate in:

- lenti con $\Sigma > \Sigma^*$ causano **forti lenti gravitazionali**, in grado di produrre immagini multiple della sorgente. Nel caso di una sorgente puntiforme vengono prodotte solo due immagini mentre il numero aumenta fino a 3 o 5 per oggetti estesi.
- lenti con $\Sigma = \Sigma^*$ definite **lenti perfette**, in grado di mettere a fuoco tutti i raggi luminosi prodotti dalla sorgente in ogni direzione.
- lenti con $\Sigma < \Sigma^*$ provocano **deboli lenti gravitazionali**. Questo evento genera immagini singole allungate delle sorgenti, il tutto accompagnato da un leggero incremento del flusso.

2.4 Mappatura della lente al primo ordine

Si parla di **approssimazione del lensing al primo ordine** se le dimensioni della sorgente sono inferiori alla scala angolare in cui viene modificato l'angolo di deflessione. In tale circostanza è possibile correlare linearmente la posizione dell'immagine e della sorgente reale.

2.4.1 Sorgente generica

A livello locale è possibile utilizzare la matrice Jacobiana, che regola il passaggio dal piano della lente a quello della sorgente, per descrivere la **distorsione dell'immagine**:

$$A_{ij} = \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \quad (31)$$

Con riferimento alla relazione (8) si ricava:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\theta)}{\partial \theta_j} \quad (32)$$

Ed utilizzando la proprietà (22) definisco:

$$A_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = M_{ij}^{-1} \quad (33)$$

Questa relazione indica come la matrice Hessiana del potenziale Ψ descriva la mappatura del lensing rispetto all'identità. Specifico la matrice facendo riferimento, in un sistema di coordinate ortogonali definito nel piano della lente, alle sue componenti: i identifica la riga dell'elemento mentre j ne indica la colonna. Da notare come la matrice A_{ij} corrisponda all'inverso del **tensore** che regola l'**ingrandimento** M_{ij} .

$$\det M = \frac{d\theta^2}{d\beta^2} = \frac{1}{\det A} \quad (34)$$

Come detto il lensing produce una deformazione della sorgente che può essere descritta, usando le relazioni (33) e (34), mediante un **tensore di taglio**.

Partendo dalla relazione (28):

$$k(\theta) = \frac{1}{2} \nabla_{\theta}^2 \Psi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial^2 \theta_1} + \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial^2 \theta_2} \right) \quad (35)$$

e usando gli elementi della relazione (33) si costruisce il tensore in questione. A questo punto è importante definire le seguenti quantità:

$$\gamma(\theta) = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (36)$$

che indica l'**intensità della distorsione**.

$$\cos[\phi] = \frac{\gamma_1}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \quad \sin[\phi] = \frac{\gamma_2}{\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}} \quad (37)$$

dove ϕ descrive l'**orientazione della distorsione**.

Nello specifico γ_1 e γ_2 assumono la seguente forma:

$$\gamma_1(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial^2 \theta_1} + \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial^2 \theta_2} \right) \quad (38)$$

$$\gamma_2(\theta) = \frac{\partial^2 \Psi(\theta)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \quad (39)$$

Queste ultime due relazioni, (38) e (39), si possono riscrivere in funzione di γ e Φ :

$$\gamma_1(\theta) = \gamma(\theta) \cos[\phi(\theta)] \quad (40)$$

$$\gamma_2(\theta) = \gamma(\theta) \sin[\phi(\theta)] \quad (41)$$

La matrice A_{ij} può essere dunque definita così:

$$A(\theta) = [1 - k(\theta)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \gamma(\theta) \begin{bmatrix} \cos[\phi] & \sin[\phi] \\ \sin[\phi] & \cos[\phi] \end{bmatrix} \quad (42)$$

E' importante analizzare ciascuno dei due termini presenti al secondo membro dell'equazione:

- *Termine di Convergenza* $[1 - k(\theta)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Regola l'ingrandimento isotropo dell'immagine della sorgente. Il tutto con riscaldamento dell'immagine di un fattore $\frac{1}{1-k}$ in tutte le direzioni.

- *Termine di Taglio* $\gamma(\theta) \begin{bmatrix} \cos[\phi] & \sin[\phi] \\ \sin[\phi] & \cos[\phi] \end{bmatrix}$

Riguarda l'astigmatismo, con oggetti non messi a fuoco allo stesso modo, ed introduce anisotropia. La forma della sorgente viene allungata lungo una certa direzione, identificata da ϕ .

2.4.2 Sorgente circolare

Considero una sorgente centrata in $\vec{\beta}_0 = (\beta_{0,1}, \beta_{0,2})$ di raggio r che soddisfi l'equazione:

$$(\beta_1 - \beta_{0,1})^2 + (\beta_2 - \beta_{0,2})^2 = r^2 \quad (43)$$

Si tratta dunque di una sorgente circolare. Assumo $\vec{\beta}_0 = (0, 0)$ ed indico l'espressione della matrice A in questo caso:

$$A = \begin{bmatrix} (1 - k - \gamma) & 0 \\ 0 & (1 - k + \gamma) \end{bmatrix} \quad (44)$$

Osservo, sul piano della lente, come il bordo dell'immagine sia descrivibile mediante l'equazione di un'ellisse (si riduce ad un cerchio se $\gamma = 0$):

$$r^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 = (1 - k - \gamma)^2 \theta_1^2 + (1 - k + \gamma)^2 \theta_2^2 \quad (45)$$

Quindi per sorgenti circolari, sempre nell'approssimazione di lente al primo ordine, si ottiene come immagine modificata un'ellisse avente:

- Semiasse maggiore $a = \frac{r}{1-k-\gamma}$
- Semiasse minore $b = \frac{r}{1-k+\gamma}$
- Ellitticità $\epsilon = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\gamma}{1-k} = g$; questa g è detta **taglio ridotto**.

L'ellisse avrà gli assi allineati con gli autovettori del tensore di taglio.

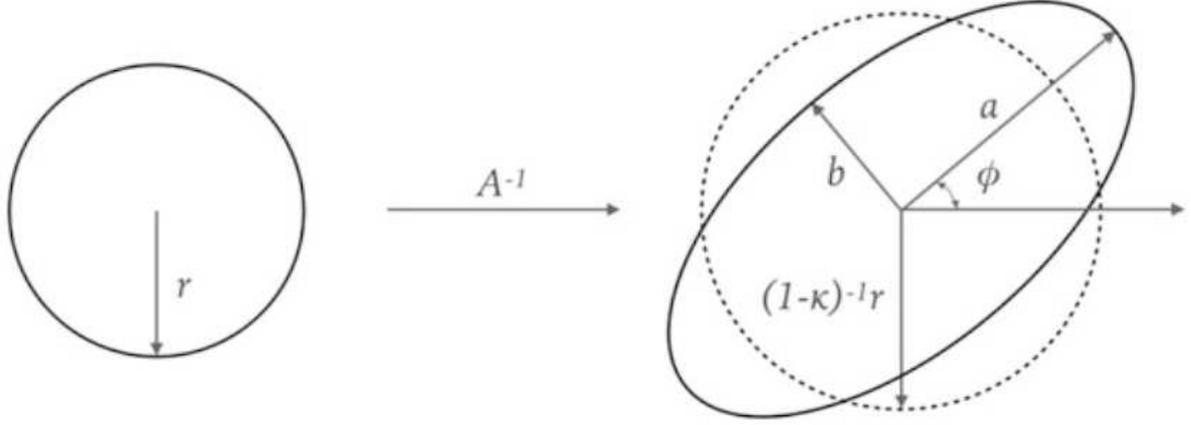


Figura 7: Effetto del lensing gravitazionale su una sorgente circolare, si denota l'effetto del termine di convergenza e di taglio. L'immagine finale corrisponde ad un'ellisse con semiasse maggiore a e semiasse minore b . (Meneghetti, 2021)

2.5 Effetti del lensing

2.5.1 Ingrandimento

Il lensing gravitazionale comporta anche l'ingrandimento dell'immagine della sorgente: come se i raggi luminosi attraversassero una lente. Infatti sommando l'area delle immagini multiple si ottiene un valore superiore a quello della sorgente reale. Facendo quindi il rapporto tra le due aree si stima l'**ingrandimento** μ :

$$\mu = \frac{d\theta^2}{d\beta^2} = \frac{\theta d\theta}{\beta d\beta} \quad (46)$$

Parlando dell'ingrandimento ricordiamo come il suo modulo corrisponda alle dimensioni dell'angolo solido definito dall'immagine rispetto alla sorgente reale. Il suo segno fornisce informazioni in merito alla parità, che regola l'orientamento dell'immagine rispetto alla sorgente. Inoltre μ correla con il **tensore ingrandimento M**:

$$\mu = \det M = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(1-k)^2 - \gamma^2} \quad (47)$$

Gli autovalori di M quantificano l'ingrandimento nella direzione degli autovettori del tensore di taglio.

Nel caso di lente simmetrica questi autovettori sono orientati, rispetto alle curve di isodensità sul piano della lente, in modo tangenziale e radiale:

- *fattore di ingrandimento tangenziale*

$$\mu_t = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{1-k-\gamma} \quad (48)$$

- *fattore di ingrandimento radiale*

$$\mu_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{1-k+\gamma} \quad (49)$$

Da notare come l'ingrandimento sia formalmente infinito quando $\lambda_t = \lambda_r = 0$; tale possibilità genera, sul piano della lente, due linee note come linea critica tangenziale e radiale.

L'ingrandimento dell'immagine causa inoltre l'incremento del flusso apparente della sorgente, anche se solitamente il lensing gravitazionale non modifica la brillantezza superficiale. La brillantezza superficiale viene conservata nell'approssimazione locale di uno spazio descritto dalla metrica Minkowskiana. Solo lo spostamento Doppler è correlato alla brillantezza superficiale I_ν :

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} = \text{costante} \quad (50)$$

A tal punto è necessario analizzare se si manifesta una variazione della frequenza dei fotoni; per fare questo si ricorda come la propagazione della luce dalla sorgente avvenga lungo un percorso, localmente Euclideo, soggetto a redshift gravitazionale. Nell'approssimazione di lente sottile, il segnale luminoso esce dalla lente come è entrato dato che viene prima spostato verso il blu e poi verso il rosso della stessa quantità. In assenza di variazione della frequenza dei fotoni non si manifesta, sulla base della relazione (50), una variazione della brillantezza superficiale.

Quindi il lensing gravitazionale provoca un incremento del flusso totale apparente della sorgente in quanto ne aumenta le dimensioni, cioè l'angolo solido sotto il quale si osserva.

2.5.2 Caustiche

Il forte lensing gravitazionale, in cui la lente presenta porzioni che deviano diversamente la luce proveniente da uno stesso punto della sorgente, può generare delle singolarità ($\det A = 0$) passando dal piano della sorgente a quello dell'immagine. Si generano, dunque, delle curve nell'immagine che presentano la seguente peculiarità (dedotta dalla formula 47):

$$\det A = 0 \implies \mu \longrightarrow \infty \quad (51)$$

Inoltre nel caso di lenti forti ed estese queste curve, definite **caustiche**, si manifestano anche nel piano della sorgente: se la sorgente le intercetta viene sottoposta ad effetti di ingrandimento e allungamento tendenti all'infinito.

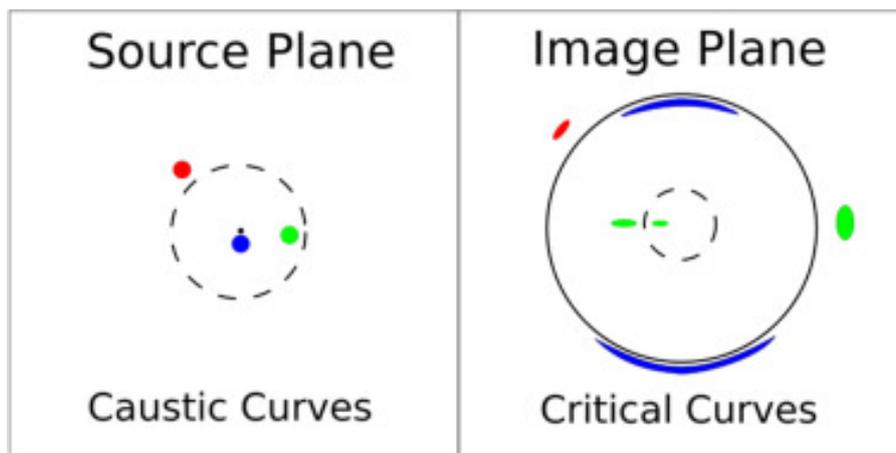


Figura 8: Rappresentazione delle caustiche presenti nel piano della sorgente e delle curve critiche presenti nel piano dell'immagine. Per la sorgente rossa, esterna alle linee caustiche, si crea solo un'immagine. Per la sorgente verde, all'interno delle linee caustiche, si ottengono tre immagini. Infine la sorgente blu, quasi perfettamente allineata con il centro della lente, inizia a definire un Einstein ring. (C. Schäfer, G. Fourestey, J.-P. Kneib, 2019)

Nella prossimità di queste curve si generano grandi archi, immagini multiple ed un grande incremento di flusso. Il tutto sempre tenendo presente il teorema di conservazione del flusso: l'aumento del flusso, prodotto dalla lente, è accompagnato da una sua successiva diminuzione, lungo linee di vista sottodense, dello stesso fattore in media.

2.5.3 Ritardo temporale

Il lensing gravitazionale modifica il percorso della luce causandone un ritardo temporale costituito da due componenti:

$$t = t_{grav} + t_{geom} \quad (52)$$

- **Tempo di ritardo gravitazionale**, considerato da Shapiro nel 1964, si ottiene confrontando il tempo che impiega la luce ad arrivare alla sorgente quando viene deviata dalla lente rispetto a quando si propaga normalmente.

Utilizzando l'indice di rifrazione efficace $n = 1 - 2\frac{\Phi}{c^2}$ si indica il tempo di ritardo gravitazionale nel seguente modo:

$$t_{grav} = \int \frac{1}{c'} dz - \int \frac{1}{c} dz = \frac{1}{c} \int (n - 1) dz = -\frac{2}{c^3} \int \Phi dz = -\frac{D_L D_S}{D_{LS}} \frac{1}{c} \hat{\Psi}(\theta) \quad (53)$$

L'ultimo passaggio è stato possibile mediante utilizzo dell'espressione (18).

- **Tempo di ritardo geometrico**, legato alla diversa lunghezza dei cammini nel caso normale ed in quello perturbato gravitazionalmente. Questo ritardo risulta proporzionale al quadrato della distanza angolare tra sorgente ed immagine. Tale termine temporale può essere derivato mediante una trattazione geometrica semplificata:

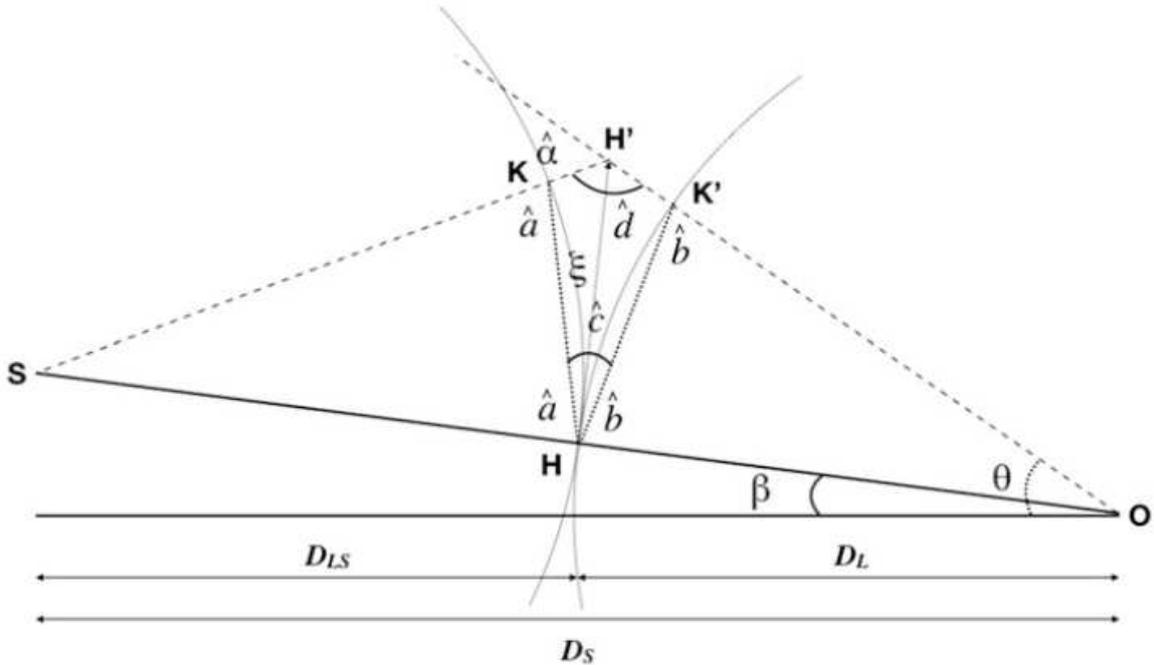


Figura 9: Schema della lente che permette l'analisi del ritardo temporale dovuto al lensing gravitazionale. (Meneghetti, 2021)

Configurazione simile allo schema valutato per descrivere dell'equazione della lente. Confrontiamo il cammino della luce che va dalla sorgente S all'osservatore O venendo deviata

dalla lente, tramite un angolo $\hat{\alpha}$, e quello invece rettilineo in assenza di perturbazione gravitazionale. L'allungamento del cammino della luce per effetto della lente corrisponde a:

$$\Delta l \approx \xi \hat{c} \quad (54)$$

Di conseguenza dividendo questo percorso aggiuntivo per la velocità della luce si determina il ritardo temporale:

$$t_{geom} = \frac{\Delta l}{c} \quad (55)$$

Dato che i triangoli SHK e OHK' sono isosceli determino graficamente le seguenti relazioni:

$$\hat{d} = \pi - \hat{a} \quad \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi \quad \hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d} \quad \hat{c} = \frac{\hat{\alpha}}{2} \quad (56)$$

Riscrivendo dunque la definizione (55) giungo alla seguente espressione per Δl :

$$\Delta l \approx \xi \frac{\hat{\alpha}}{2} = (\theta - \beta) \frac{D_L D_S \alpha}{D_{LS}^2} = \frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 \frac{D_L D_S}{D_{LS}} \quad (57)$$

Da cui, dividendo per la velocità della luce c , ricavo:

$$t_{geom} = \frac{1}{2c} (\theta - \beta)^2 \frac{D_L D_S}{D_{LS}} \quad (58)$$

E' necessario moltiplicare ambedue i tempi di ritardo per il fattore $(1 + z_L)$ tenendo così conto dell'espansione universale. Dunque il ritardo totale, in riferimento ad un punto identificato da θ sul piano della lente, è pari a:

$$t(\theta) = \frac{(1 + z_L) D_L D_S}{c D_{LS}} \left[\frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 - \Psi(\theta) \right] \quad (59)$$

Ed introducendo le quantità:

- *Distanza di ritardo temporale*

$$D_{\Delta t} = (1 + z_L) \frac{D_S D_L}{D_{LS}} \quad (60)$$

- *Potenziale di Fermat*

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2} (\theta - \beta)^2 - \Psi(\theta) \quad (61)$$

è possibile riscrivere la relazione (59) nella seguente forma compatta:

$$t(\theta) = \frac{D_{\Delta t}}{c} \tau(\theta) \quad (62)$$

2.5.4 Immagini multiple

L'equazione della lente (8) può essere riscritta utilizzando la definizione (18):

$$(\theta - \beta) - \nabla \hat{\Psi}(\theta) = \nabla \left[\frac{1}{2}(\theta - \beta)^2 - \hat{\Psi}(\theta) \right] = 0 \quad (63)$$

Ricordando l'espressione del potenziale di Fermat (61) osservo la validità del **principio di Fermat**:

$$\nabla t(\theta) = 0 \quad (64)$$

Questo principio afferma come la luce nel collegare due punti percorra il cammino più corto possibile.

Considero adesso la matrice Hessiana che descrive la **superficie di ritardo temporale**:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \propto (\delta_{ij} - \Psi_{ij}) = A_{ij} \quad (65)$$

Le immagini della sorgente si trovano nei punti stazionari di questa superficie. Dalla definizione della superficie di ritardo temporale e la relazione (33) si deduce inoltre la proporzionalità inversa tra la curvatura della superficie di ritardo temporale e l'ingrandimento dell'immagine. Nello specifico la conformazione della superficie di ritardo temporale, in prossimità dei punti stazionari, correla con la forma dell'immagine.

Analizzando la posizione, sulla superficie di ritardo temporale, in cui si formano le immagini si possono classificare in:

- *Tipo I*, individuate nei minimi della superficie, con autovalori di T_{ij} positivi $\implies \det A > 0$ e $tr A > 0 \implies$ ingrandimento positivo.
- *Tipo II*, individuate nei punti di sella della superficie, con autovalori di T_{ij} discordi $\implies \det A < 0 \implies$ ingrandimento negativo. Questo non vuol dire che le dimensioni dell'immagine diminuiscono; questa eventualità si verifica solo quando il modulo di μ è inferiore ad 1.
- *Tipo III*, individuate nei massimi della superficie, con autovalori di T_{ij} negativi $\implies \det A > 0$ e $tr A < 0 \implies$ ingrandimento positivo

3 Microlensing

3.1 Approssimazione ad una lente puntiforme

Il lensing gravitazionale prodotto da una lente di piccole dimensioni si definisce **microlensing**. Il risultato è la generazione di immagini multiple della sorgente non risolvibili, data la loro limitata separazione angolare. La durata di questi eventi dipende dall'allineamento del sistema osservatore-lente-sorgente ed in generale è compreso tra giorni ed anni nel caso di microlensing all'interno della Via Lattea. La sua trattazione, al primo ordine, può essere ridotta a quella di una *lente puntiforme a simmetria circolare*.

Equazione della lente

Si considera dunque l'equazione della lente nel caso di lente a simmetria circolare, equazione (16), in termini del raggio di Einstein θ_E :

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta} \quad (66)$$

Adesso per semplicità di notazione si esprimono gli angoli in funzione di θ_E :

$$x = \frac{\theta}{\theta_E} \quad y = \frac{\beta}{\theta_E} \quad (67)$$

Si riformula l'equazione della lente, equazione (66), considerando le quantità normalizzate appena definite. Si arriva così alla seguente equazione:

$$y = x - \frac{1}{x} \quad (68)$$

Risolvendola si ottengono due immagini le cui caratteristiche sono già state definite nel capitolo precedente:

$$x_{\pm} = \frac{1}{2}[y \pm \sqrt{y^2 + 4}] \quad (69)$$

Nello specifico il raggio di Einstein si determina nel seguente modo:

$$\theta_E \approx (10^{-3})'' \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{1/2} \left(\frac{D_L D_S}{D_{LS} 10 \text{kpc}}\right)^{-1/2} \quad (70)$$

Caustiche

Il determinante della matrice di ingrandimento assume la forma:

$$\det A(x) = \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} \quad (71)$$

Mentre i suoi autovalori λ sono:

$$\lambda_t(x) = \frac{y}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \implies \lambda_t(x) = 0 \quad \text{implica} \quad x^2 = 1 \quad (72)$$

$$\lambda_r(x) = \frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \implies \lambda_r(x) \neq 0 \quad \forall x \quad (73)$$

Quindi è presente **un'unica linea critica** con equazione corrispondente a quella dell'Einstein Ring.

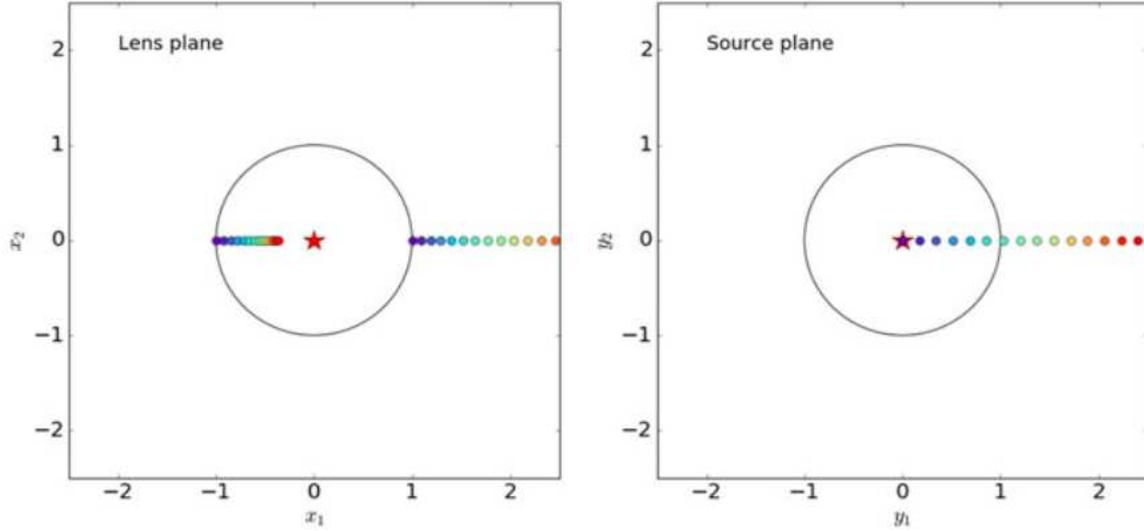


Figura 10: Figura che indica la dipendenza tra la posizione delle due immagini prodotte dal microlensing e la posizione della sorgente. Nello specifico l'immagine al di fuori dell'Einstein Ring rappresenta la soluzione x_+ mentre quella relativa a x_- si riferisce all'immagine all'interno dell'anello. (Meneghetti, 2021)

Ingrandimento

L'ingrandimento si ricava mediante la relazione (47) di proporzionalità inversa:

$$\mu(x) = \frac{1}{\det A(x)} = \left[1 - \frac{1}{x^4}\right]^{-1} \quad (74)$$

L'ingrandimento può essere espresso anche in funzione di y : in modo da caratterizzare questa grandezza per ognuna delle due immagini della sorgente. Tramite la soluzione dell'equazione della lente, formula (69), si riformula la definizione (74):

$$\mu_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}}\right) \quad \text{con } y > 0 \implies \mu_+(y) > 0 \quad \mu_-(y) < 0 \quad (75)$$

E' possibile valutare il rapporto tra l'ingrandimento delle due immagini. Infatti mediante un'espansione in *serie di Laurent*, per elevati valori di y , si ottiene:

$$\left|\frac{\mu_+}{\mu_-}\right| \propto y^4 \quad (76)$$

Sommando i moduli dei due ingrandimenti si ottiene **l'ingrandimento totale**:

$$\mu(y) = \frac{y^2 + 2}{y\sqrt{y^2 + 4}} \quad (77)$$

Si denota dunque, mediante espansione in serie di potenza, che l'ingrandimento diminuisce molto in seguito all'allontanamento della sorgente rispetto alla lente, questo spostamento corrisponde all'aumento di y .

Sezione trasversale

E' interessante determinare l'angolo solido entro il quale deve trovarsi una sorgente per produrre microlensing che risulti osservabile da Terra.

Sulla base di quanto affermato, studiando la definizione (77), si comprende come fenomeni di microlensing, identificabili a causa dell'ingrandimento dell'immagine, siano possibili solo per sorgenti all'interno dell'Einstein ring. Di conseguenza la **sezione trasversale per eventi di microlensing** corrisponde all'area contenuta all'interno di questo anello:

$$\sigma_{microlensing} = \pi\theta_E^2 \quad (78)$$

3.2 Analisi delle caratteristiche

3.2.1 Curve di luce

Per identificare fenomeni di microlensing all'interno della nostra galassia si possono sfruttare le variazioni degli effetti di ingrandimento dell'immagine in funzione del tempo; quindi dello spostamento relativo tra sorgente e lente, $y(t)$.

Il cambiamento delle dimensioni dell'immagine della sorgente modifica il flusso osservato:

$$f(t) = \mu(t)f_s \quad (79)$$

dove f_s indica il flusso intrinseco della sorgente. Valutando la variazione temporale del flusso osservato si determina la curva di luce del microlensing. Per caratterizzare tale curva si semplifica la trattazione ad una sorgente che si muove, trasversalmente, di moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto alla lente. Mediante questa approssimazione il microlensing genera curve di luce simmetriche rispetto al punto di massimo ingrandimento dell'immagine.

Gli elementi principali di questa trattazione, indicati in figura (11), sono:

- la linea tratteggiata che rappresenta il percorso della sorgente rispetto alla lente;
- $y_0 = y(t_0)$ minima distanza lente-sorgente e viene denominata parametro di impatto;
- $y_1 = y(t_1)$ distanza lente-sorgente ad un istante $t_1 > t_0$:

$$y_1 = \frac{v(t - t_0)}{D_L\theta_E} \quad (80)$$

Conoscendo distanze e velocità della sorgente è possibile calcolare il **tempo di attraversamento del raggio di Einstein**

$$t_E = \frac{D_L\theta_E}{v} = \frac{\theta_E}{\mu_{rel}} \quad (a) \implies \theta_E = \frac{vt_E}{D_L} \quad (b) \quad (81)$$

Dove è stata introdotta la grandezza

$$\mu_{rel} = \frac{v}{D_L} = \frac{\theta_E}{t_E} \quad (82)$$

che descrive il **movimento della sorgente rispetto alla lente**. Nello specifico t_E indica la durata temporale dell'ingrandimento dell'immagine per effetto del microlensing.

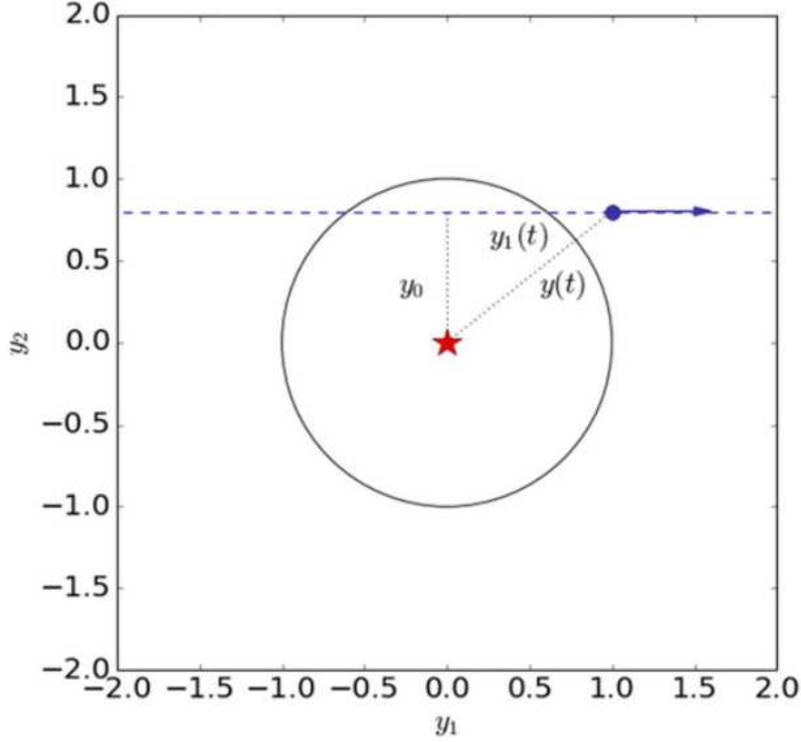


Figura 11: Rappresentazione della traiettoria della sorgente rispetto alla lente: la loro distanza viene quantificata da $y(t)$. Questo moto viene valutato nel piano della sorgente. (Meneghetti, 2021)

Considerando adesso l'espansione in serie di potenza dell'ingrandimento, (77), per $y \rightarrow \infty$:

$$\mu \propto 1 + \frac{2}{y^4} \quad (83)$$

si nota come l'ingrandimento possa essere maggiore di 1 solo per valori di $|y| < 1$. Sulla base di questa deduzione si comprende come t_E possa essere assunto come il tempo scala del microlensing.

E' possibile riscrivere l'espressione di t_E , formula (81), sulla base della definizione del raggio di Einstein (15):

$$t_E \approx 19 \text{ giorni} \sqrt{4 \frac{D_L}{D_S} \left(1 - \frac{D_L}{D_S}\right) \left(\frac{D_S}{8 \text{ kpc}}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{0.3 M_{\odot}}\right)^{1/2} \left(\frac{v}{200 \text{ km/s}}\right)^{-1}} \quad (84)$$

Questa formula è applicabile solo all'interno della nostra galassia in quanto la sua derivazione utilizza l'assunzione

$$D_{LS} = D_S - D_L \quad (85)$$

Inserendo adesso l'espressione del raggio di Einstein (81b), in funzione di t_E , nella definizione della distanza lente-sorgente a t_1 , (80), si ottiene:

$$y_1(t) = \frac{t - t_0}{t_E} \quad (86)$$

Questa coordinata sarà molto utile nella rappresentazione delle curve di luce del microlensing: infatti in funzione di questa verrà valutato l'andamento dell'ingrandimento $\mu(t)$.

L'espressione dell'ingrandimento che viene utilizzata è la seguente:

$$\mu(t) = \frac{y(t)^2 + 2}{y(t)\sqrt{y(t)^2 + 4}} \quad (87)$$

A questo punto si studiano graficamente le curve luce.

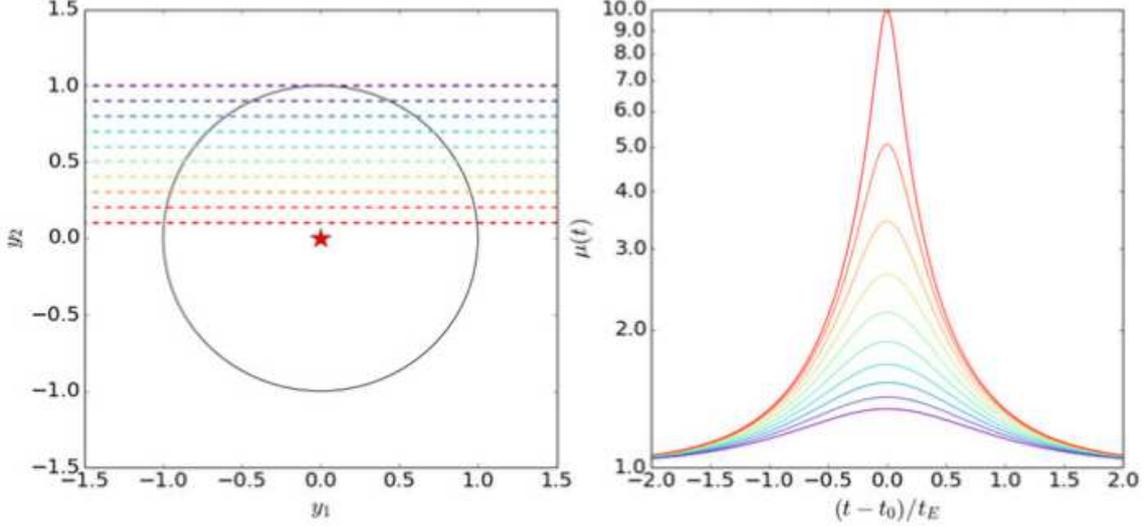


Figura 12: Pannello di sinistra: rappresentazione, nel piano della sorgente, del moto della sorgente rispetto alla lente per diversi valori del parametro d'impatto a cui corrispondono i diversi colori. Pannello di destra: curve di luce che descrivono la variazione dell'ingrandimento in funzione del tempo e del parametro d'impatto. (Meneghetti, 2021)

Le principali caratteristiche delle curve di luce sono:

- **il picco della curva** che è legato ad y : più la sorgente è vicina alla lente e più importante sarà il picco;
- **la larghezza del picco** che è determinata dal tempo di attraversamento t_E ;
- **il picco centrale** che domina in altezza, a t_0 , definito **curva di luce standard del microlensing**. Sulla base di quanto detto, a questo curva t_0 è associata la minima distanza possibile tra lente e sorgente, ovvero y_0 .

Per analizzare le curve di luce, caratterizzandone le proprietà, si tenta di riprodurre i loro andamenti. Per fare questo è necessario conoscere due parametri: *il flusso di base* f_0 ed il *blending parameter*, b_s . Questo secondo parametro, dipendente dalla lunghezza d'onda, indica la luce proveniente dalla sorgente sottoposta a lensing.

Studiando le curve di luce è importante evidenziare esplicitamente tutte le quantità che definiscono i parametri in questione. In particolare inserendo adesso all'interno dell'espressione del tempo di attraversamento (81a) l'espressione del raggio di Einstein (15) si ricava:

$$t_E = \frac{D_L}{v} \sqrt{\frac{4GM(\theta)D_{DL}}{c^2D_S D_L}} \quad (88)$$

Dall'espressione di t_E , che corrisponde alla larghezza del picco delle curve di luce, si comprende che anche di fronte ad una generica curva di luce approssimabile a quella standard non si potrebbero conoscere in modo univoco i valori di distanze, velocità e massa della lente. Questo limite è noto come **degenerazione del microlensing**.

Analizzando una curva di luce ci possono essere due possibilità:

1. **la curva viene riprodotta da quella standard**

Modello che funziona bene in molte situazioni.

2. **la curva non viene riprodotta da quella standard**

Questo accade quando *non* vale una delle seguenti assunzioni:

- *l'approssimazione di oggetto puntiforme per lente e sorgente*

In questo caso si presenta un intervallo di tempo, ai lati della curva, in cui la lente copre l'immagine all'interno dell'Einstein Ring. Questo oscuramento può riguardare, se la lente è sufficientemente grande, anche l'immagine al di fuori. La conseguenza è l'attenuazione delle ali della curva di luce.

Questo effetto risulta importante nei limiti di alto ingrandimento: riproducendo la curva luce si misurano le dimensioni della sorgente in termini del raggio di Einstein. Quindi assumendo di conoscere le dimensioni della sorgente, ad esempio dalle relazioni tra brillantezza superficiale e colori, è possibile ricavare il raggio di Einstein. Questo inoltre permette, calcolando μ_{rel} , di quantificare anche il moto della sorgente rispetto alla lente;

- *il moto lineare della sorgente rispetto alla lente*

3.2.2 Blending

L'ingrandimento della sorgente è acromatico; però se la lente corrisponde ad una stella allora questa influenza la curva di luce producendo l'effetto cromatico del **blending**. Per interpretare questo effetto si considera il seguente sistema costituito da:

- sorgente \rightarrow stella con flusso a lunghezze d'onda nella parte rossa dello spettro;
- lente \rightarrow stella che emette nel blu.

Quando queste due stelle si trovano allineate, originando così il microlensing, si denota un incremento nella luminosità relativa alla regione spettrale del rosso mentre nel blu si ottengono valori costanti. In questo modo si ottiene un effetto cromatico al quale contribuiscono anche le stelle presenti nello sfondo, queste sorgenti spesso ricadono nella PSF dello strumento.

3.2.3 Parallasse

Per risolvere la degenerazione del microlensing riguardante distanze, velocità e massa della lente è possibile utilizzare la parallasse del sistema lente-sorgente. L'analisi del microlensing all'interno della galassia, utilizzando l'assunzione (85), permette di riscrivere il raggio di Einstein nei seguenti termini:

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}} = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right)} \quad (89)$$

Il termine tra parentesi equivale alla *parallasse relativa lente – sorgente*:

$$\pi_{rel} = \left(\frac{1}{D_L} - \frac{1}{D_S} \right) = \theta_E \pi_E \quad (90)$$

Con π_E che corrisponde alla **parallasse del microlensing**. Questa grandezza, che influenza la simmetria delle curve di luce, è dovuta al moto orbitale della Terra attorno al Sole e modifica l'ingrandimento della sorgente.

Misurando la parallasse si riesce a calcolare la massa della lente:

$$\theta_E = \frac{4GM}{c^2} \pi_E \implies M = \frac{\theta_E c^2}{4G\pi_E} \quad (91)$$

In questo modo è possibile *superare la degenerazione del microlensing* precedentemente descritta.

La misura della parallasse si può effettuare in due casi:

1. l'osservatore è in moto rispetto al microlensing;
2. l'osservatore studia il fenomeno da diverse località nello stesso momento.

Per tenere conto della parallasse è necessario quindi studiare il fenomeno del microlensing sotto diversi punti di vista. In base alla modalità con cui questo viene fatto si indicano **tre tipi di parallassi del microlensing**:

- **Parallasse Orbitale**: l'osservatore solidale alla Terra si muove attorno al sole. Nella situazione in cui osservatore e sorgente sono fissi, la lente si muove a causa del moto intrinseco rispetto alla sorgente e quindi si ottiene la curva di luce standard. Nel caso di parallasse orbitale a questo moto si aggiunge quello orbitale della terra che causa una distorsione della curva di luce.
L'effetto della parallasse sulla curva di luce è legato alla variazione, dovuta al moto dell'osservatore, della distanza apparente tra lente e sorgente. Si considera la parallasse del microlensing come una grandezza vettoriale in quanto il moto dell'osservatore può essere decomposto in due componenti.
Si riescono a valutare gli effetti della parallasse orbitale per microlensing con tempi scala non troppo brevi, circa 100 giorni.
- **Parallasse Satellitare**: l'osservatore studia il microlensing simultaneamente da Terra e mediante un satellite. Al momento si fa riferimento al satellite IR Spitzer in orbita terrestre, che rileva la parallasse del microlensing prodotto da oggetti con masse comprese tra quelle delle stelle nane e quella solare.
- **Parallasse Terrestre**: l'osservatore studia il microlensing mediante telescopi in differenti località. La misura della parallasse, rilevabile nel caso di eventi di microlensing brevi, si ottiene confrontando le curve di luce misurate dai diversi telescopi.

Variando la posizione di osservazione del fenomeno viene modificato il cammino della luce tra microlensing ed osservatore, così facendo cambia la posizione della lente rispetto alla sorgente. Di conseguenza viene modificata anche la curva di luce, in quanto l'ingrandimento è correlato alla distanza lente-sorgente.

La parallasse del microlensing correla inoltre con la **proiezione del raggio di Einstein** in termini fisici, $r_E = \theta_E D_L$, nel piano della lente indicata con \tilde{r}_E :

$$\tilde{r}_E = D_L \hat{\alpha}(\theta_E) = \frac{r_E}{\theta_E} \hat{\alpha}(\theta_E) = \frac{4GM}{c^2 \theta_E} = \frac{1}{\pi_E} \quad (92)$$

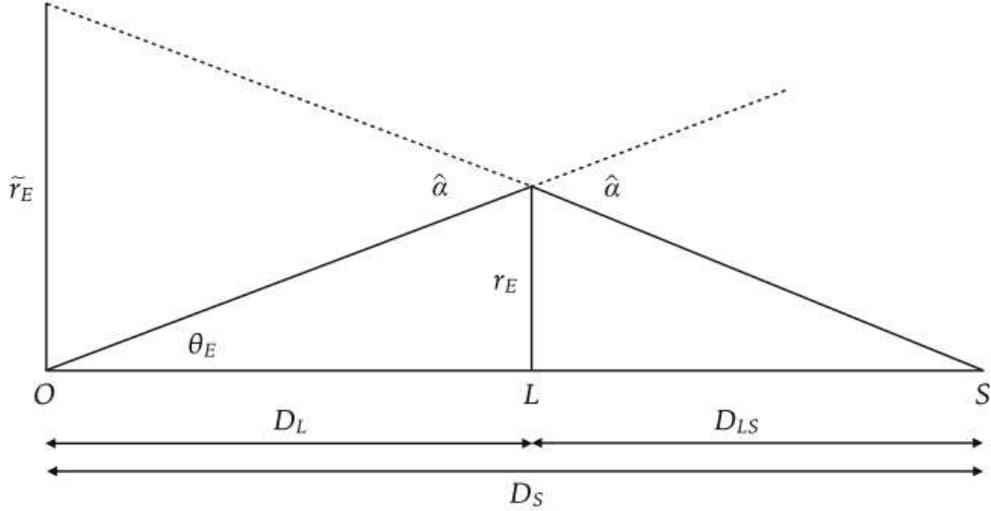


Figura 13: Rappresentazione della proiezione del raggio di Einstein, facendo riferimento al sistema osservatore-lente-sorgente. (Meneghetti, 2021)

3.2.4 Microlensing astrometrico

Il **microlensing astrometrico** è uno strumento che permette di risolvere la degenerazione nella determinazione delle grandezze che identificano il microlensing. Il tutto consiste nello studio della traiettoria del centroide di luce presente nell'immagine. Questo effetto è dovuto alla variazione di posizione e ingrandimento delle immagini, dentro e fuori dall'Einstein Ring, come descritto in precedenza trattando le curve di luce.

Per analizzare quantitativamente questo risultato si considera una lente di posizione fissata e si analizza il moto della sorgente. La sua traiettoria viene identificata dal vettore bidimensionale:

$$\vec{y}(t) = \begin{cases} y_{\parallel} = \frac{t-t_0}{t_E} \\ y_{\perp} = y_0 \end{cases} \quad (93)$$

In precedenza risolvendo l'equazione della lente è stato possibile definire la presenza di due immagini, espressione (69); la cui posizione nel piano della sorgente è descritta dai vettori:

$$\vec{x}_{\pm} = \begin{cases} x_{+, \parallel} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \right) y_{\parallel} \right) \\ x_{+, \perp} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \right) y_{\perp} \right) \end{cases} \quad \vec{x}_{\pm} = \begin{cases} x_{-, \parallel} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \right) y_{\parallel} \right) \\ x_{-, \perp} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{y^2+4}}{y} \right) y_{\perp} \right) \end{cases} \quad (94)$$

Sulla base della definizione dell'ingrandimento, per ciascuna delle due immagini è possibile valutare la **posizione del centroide luminoso** formato dalle immagini:

$$\vec{x}_c = \frac{\vec{x}_+ \mu_+ + \vec{x}_- |\mu_-|}{\mu_+ + |\mu_-|} \quad (95)$$

Dato l'allineamento osservatore-lente-sorgente nel piano del cielo anche \vec{x}_c e \vec{y} risultano allineati. Ricordando la relazione (76) in cui domina l'ingrandimento dell'immagine al di fuori dell'Einstein Ring; si comprende come il centroide protenda verso l'immagine esterna. E' importante adesso quantificare lo spostamento del centroide rispetto alla posizione della sorgente:

$$\delta \vec{x}_c = \vec{x}_c - \vec{y} \quad (96)$$

A questo punto si utilizzano le soluzioni dell'equazione della lente, (69), ed il loro ingrandimento (75) all'interno della definizione di \vec{x}_c , formula (95), e si inserisce il risultato nell'espressione di $\delta\vec{x}_c$ ottenendo:

$$\delta x_c = \frac{y}{y^2 + 2} \longrightarrow \delta x_c \approx \frac{1}{y} \quad \text{per } y \gg \sqrt{2} \quad (97)$$

Quindi anche $\delta\vec{x}_c$ è allineato ad \vec{y} . Studiando la derivata di questo spostamento si osserva un massimo per $y = \sqrt{2}$ a cui corrisponde $\delta x_c \approx 0,354$.

Decomponendo il vettore dello spostamento $\delta\vec{x}_c$ rispetto al moto della sorgente, si ottiene:

$$\delta\vec{x}_c = \begin{cases} \delta x_{c,\parallel} = \frac{y_{\parallel}}{y^2+2} \longrightarrow \delta x_{c,\parallel} < 0 & \text{per } t < t_0 \\ \delta x_{c,\perp} = \frac{y_{\perp}}{y^2+2} \end{cases} \quad (98)$$

Come visto per le curve di luce si descrivono gli andamenti temporali in funzione della quantità $p = \frac{t-t_0}{t_E}$. Dunque l'ampiezza dello spostamento del centroide varia in funzione del tempo in questo modo:

$$\frac{d(\delta x_c)}{dp} = p \frac{2 - y_0^2 - p^2}{\sqrt{y_0^2 + p^2}} (y_0^2 + p^2 + 2)^2 \quad (99)$$

$$\implies \frac{d(\delta x_c)}{dp} \longrightarrow \begin{cases} y_0 > \sqrt{2} & t_{max} = t_0 \quad (1) \\ y_0 < \sqrt{2} & t_{max} = t_0 \pm t_E \sqrt{2 - y_0^2} \quad t_{min} = t_0 \quad (2) \end{cases} \quad (100)$$

Quindi in base al valore del parametro di impatto y_0 ci sono due possibilità:

1. *grande* $y_0 \longrightarrow$ il centroide si sposta principalmente in modo perpendicolare al moto sorgente-lente;
2. *piccolo* $y_0 \longrightarrow$ il centroide si sposta principalmente in modo parallelo al moto sorgente-lente.

Combinando l'effetto delle due componenti di δx_c il centroide luminoso assume la forma di un'ellisse. I semiassi dell'ellisse, orientati nella direzione delle due componenti, dipendono da y_0 :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y_0^2+2}} \\ b = \frac{1}{2} \frac{y_0}{y_0^2+2} \end{cases} \quad (101)$$

Dove con:

- $y_0 \longrightarrow \infty$ l'ellisse degenera in cerchio
- $y_0 \longrightarrow 0$ l'ellisse degenera in linea retta

Misurando le dimensioni dell'ellisse, relativa al centroide luminoso, si determina il valore del raggio di Einstein. Così facendo si riesce a risolvere il problema della degenerazione del microlensing.

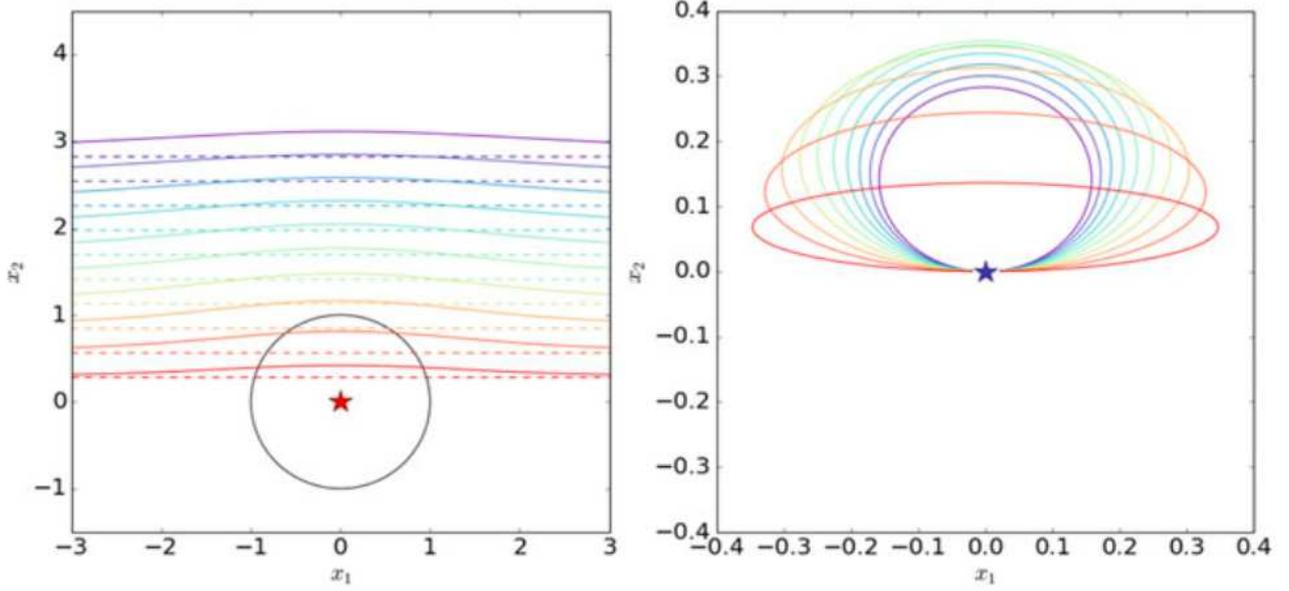


Figura 14: Nel pannello di sinistra la traiettoria del centroide di luce viene indicata da linee continue a cui corrispondono colori diversi in funzione del parametro d'impatto considerato. Le linee tratteggiate, invece, indicano le traiettorie delle sorgenti non illuminate. Nel pannello di destra vengono rappresentate le traiettorie dei centroidi di luce, valutati rispetto alle traiettorie delle sorgenti non illuminate. (Meneghetti, 2021)

3.2.5 Probabilità

Profondità ottica

In precedenza è stata definita la sezione trasversale del microlensing (78), partendo da questa assunzione si può calcolare la **profondità ottica**. Questa grandezza indica la probabilità che una sorgente, ad una distanza D_S , origini un evento di microlensing rilevabile. La profondità ottica può essere calcolata sommando le sezioni trasversali delle lenti alla data distanza e dividendo per l'angolo solido sotteso in cielo.

Si definisce il numero di lenti, ad una distanza compresa tra D_L e $D_L + dD_L$ ed entro l'angolo solido Ω , mediante l'espressione:

$$dN_L = \Omega D_L^2 n(D_L) dD_L \quad (102)$$

dove $n(D_L)$ è la densità numerica delle lenti. La profondità ottica si ottiene facendo l'integrale di questa densità numerica, moltiplicato per la sezione trasversale (78) e diviso per l'angolo solido:

$$\tau(D_S) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{D_S} [\Omega D_L^2 n(D_L)] (\pi \theta_E^2) dD_L \quad (103)$$

Questo calcolo è possibile fissando la distanza D_S , mentre per calcolare la profondità ottica totale si integra $\tau(D_S)$ in funzione di D_S .

A questo punto si studiano le caratteristiche della profondità ottica in due situazioni:

- **Caso particolare**, assumendo che le lenti abbiano tutte la stessa massa M , la loro densità numerica viene espressa in funzione della densità di massa $\rho(D_L)$.

$$n(D_L) = \frac{\rho(D_L)}{M} \quad (104)$$

L'espressione della profondità ottica, inserendo anche la definizione del raggio di Einstein (15), diventa

$$\tau(D_S) = \frac{1}{\Omega} \int_0^{D_S} \Omega D_L^2 \frac{\rho(D_L)}{M} \pi \frac{4GM D_{DL}}{c^2 D_S D_L} dD_L \quad (105)$$

Si nota come $\tau(D_S)$ dipenda in questo caso dalla densità di massa totale delle lenti e non dalla massa.

- **Caso generico**, in cui la lente presenta una distribuzione di massa e la sua distribuzione spaziale non dipende dalla massa. La densità numerica si indica nel seguente modo

$$n(D_L) = \int n(D_L, M) dM = \int \rho_M(D_L) M^{-1} dM \quad (106)$$

La profondità ottica si esprime dunque, utilizzando sempre la definizione del raggio di Einstein (15), in questo modo

$$\tau(D_S) = \frac{4\pi G}{c^2} \int_0^{D_S} \rho(D_L) \frac{D_L}{D_S} \left(1 - \frac{D_L}{D_S}\right) D_S dD_L \quad (107)$$

Per studiare più facilmente le caratteristiche della profondità ottica si introduce $x = \frac{D_L}{D_S} \implies dx = \frac{dD_L}{D_S}$ e si riformula l'espressione appena trovata:

$$\tau(D_S) = \frac{4\pi G D_S^2}{c^2} \int_0^1 \rho(x) x(1-x) dx \quad (108)$$

Calcolando la derivata della profondità ottica in funzione di x si nota che presenta un massimo in prossimità di $x = 0.5$ quindi contribuiscono maggiormente le lenti situate a metà della distanza che separa osservatore e sorgente. Per valutare la posizione degli eventi di microlensing più importanti bisogna comunque conoscere la densità di massa.

E' possibile a tal punto definire quantitativamente il valore della profondità ottica del microlensing che si manifesta nella nostra galassia. Per farlo si semplifica la galassia ad un corpo sferico auto-gravitante di lenti con densità $\rho_0 = \text{costante}$. Il centro della sfera coincide con quello galattico ed entro un raggio D_S , che include una massa $M_{gal} = \frac{4\pi D_S^3 \rho_0}{3}$, la profondità ottica risulta:

$$\tau(D_S) = \frac{GM_{gal}}{2c^2 D_S} \quad (109)$$

Si ottiene così il valore $\tau \approx 2.6 \times 10^{-7}$. Nei calcoli è stata assunta una densità di massa costante della lente, mentre nel caso di eventi rivolti verso il bulge galattico bisogna eseguire una trattazione più complessa a causa della densità di massa delle diverse componenti della Via Lattea. Considerando anche questa correzione, a causa della piatezza del disco galattico e della barra, si arriva ad un valore della profondità ottica fino a 10 volte superiore.

Dato il limitato valore della profondità ottica ricavata, al fine di rilevare eventi di microlensing, si campionano aree di cielo con elevata densità di stelle.

Rateo degli eventi

Per calcolare il rateo degli eventi di microlensing si considerano le sorgenti statiche ed il moto uguale per tutte le lenti, con velocità trasversale v . Il moto delle lenti, rispetto alle sorgenti, copre una certa area:

$$dA = 2r_E v dt = 2r_E^2 \frac{dt}{t_E} \quad (110)$$

Il termine $2r_E$ indica la sezione trasversale della lente dove r_E rappresenta la proiezione del raggio di Einstein sul piano della lente. Di conseguenza la probabilità che si verifichi microlensing entro un intervallo temporale dt è data da:

$$d\tau = \frac{1}{\Omega} \int_0^{D_s} n(D_L) \Omega dA dD_L = 2 \int_0^{D_s} n(D_L) \frac{\pi r_E^2}{t_E} dD_L \quad (111)$$

dove $n(D_L)$ indica il numero di lenti nell'angolo solido Ω tra D_L e $D_L + dD_L$. Moltiplicando questa probabilità per il numero di sorgenti osservate N^* si determina il **rateo degli eventi**:

$$\Gamma = N^* \frac{d\tau}{dt} = \frac{2N^*}{\pi} \int_0^{D_s} n(D_L) \frac{\pi r_E^2}{t_E} dD_L \quad (112)$$

Si nota come Γ dipenda da t_E e quindi, dalla relazione (88), anche dalla massa. E' possibile quindi utilizzare la distribuzione dei tempi degli eventi per studiare la Via Lattea: caratterizzandone la cinematica e la popolazione stellare. Supponendo adesso t_E sia uguale per tutte le lenti si ottiene:

$$\Gamma = \frac{2N^*}{\pi t_E} \tau \quad (113)$$

Considerando t_E pari a circa 19 giorni si ricava:

$$\Gamma \approx 1200 \text{yr}^{-1} \frac{N^*}{10^8} \frac{\tau}{10^{-6}} \left(\frac{t_E}{19 \text{days}} \right)^{-1} \quad (114)$$

Tramite questa relazione si osserva come ponendo $N^* = 10^8$ stelle si ottiene un rateo di eventi di microlensing per anno pari a $\Gamma \approx 1200$.

4 Microlensing applicato a sorgenti astrofisiche contenenti materia oscura

4.1 Materia oscura

La materia oscura è materia non barionica in grado di interagire con il campo gravitazionale. Al momento questo tipo di materia non è stata rilevata direttamente ma diverse evidenze osservative supportano la sua esistenza: le curve di rotazione delle galassie, gli ammassi di galassie ed il lensing gravitazionale. Tra le possibili particelle costituenti la materia oscura si trovano l'*assione* e il *neutralino*; entrambe vengono denominate **WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles)**.

Questo tipo di materia, non in grado di emettere luce, costituisce circa l'80% della materia gravitante presente nell'Universo e rappresenta dunque uno dei principali punti interrogativi dell'astrofisica.

4.2 MACHOs (*Massive Astrophysical Compact Halo Objects*)

A partire dal 1991 sono iniziate delle campagne osservative con lo scopo di rilevare tracce di **MACHOs (Massive Astrophysical Compact Halo Objects)**, queste sorgenti compatte sono difficili da rilevare perché deboli o addirittura invisibili. Tra questi oggetti si trovano: buchi neri, stelle di neutroni, nane bianche e nane brune.

Paczynski indica come questi oggetti compatti, presenti nell'alone galattico, possano produrre eventi di microlensing. Questo fenomeno, generato per effetto della gravità e non della radiazione luminosa, permette la rilevazione della materia oscura presente negli aloni delle galassie, all'interno dei MACHOs, che si può presentare anche nella forma di buchi neri.

Al fine di rilevare in modo sistematico i MACHOs è stato definito un network di telescopi, capace di osservare centinaia di milioni di stelle. L'indagine si è concentrata sulle regioni di elevata densità stellare all'interno e nei pressi della nostra galassia. Nello specifico si pone l'attenzione sulla LMC (Large Magellanic Cloud) e sulla SMC (Small Magellanic Cloud) per osservare, mediante microlensing, i MACHOs. Le osservazioni compiute verso le nubi di Magellano, non includendo eventi di breve durata, implicano che oggetti compatti nell'intervallo di massa $[10^{-6}, 0.05]M_{\odot}$ costituiscano meno del 10% della materia oscura che circonda la Via Lattea. I buchi neri al contrario possono contribuire fino al 2% della massa totale dell'alone. Osservazioni compiute, invece, in direzione del bulge galattico sono utili al fine di confermare la struttura della galassia: l'elevato tasso di rilevazione degli eventi di microlensing in direzione del bulge, prodotti probabilmente da popolazioni stellare note, sostiene il modello a barra della nostra galassia. Le ricerche di MACHOs si estendono anche alla galassia di Andromeda (M31).

Nella ricerca di eventi di microlensing prodotti da sorgenti contenenti materia oscura si distinguono i seguenti progetti:

- DUO (Disk unseen objects) con dati ricavati osservando, dal 1994 al 1997, in direzione del bulge ;
- EROS (Experience pour la Recherche d'Objects sombres), con dati ricavati osservando, dal 1990-2003, in direzione di SMC e LMC;
- MACHO con dati ottenuti osservando, dal 1992 al 2003, in direzione del bulge e della LMC;

- MOA (Microlensing Observations in Astrophysics) con osservazioni, dal 1995 al 2013, in direzione di bulge e delle nubi di Magellano;
- OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment) con osservazioni, iniziate nel 1992, in direzione di bulge e delle nubi di Magellano;
- POINT-AGAPE (Andromeda Galaxy and Amplified Pixels Experiment) con osservazioni, dal 1999 al 2006, in direzione di M31.

Nello specifico i progetti MACHO ed EROS hanno provato, osservando verso il bulge galattico e le nubi di Magellano, a vincolare la quantità di materia oscura. E' stata, inoltre, ipotizzata l'esistenza di buchi neri, sulla base delle curve di luce del microlensing; anche se esiste una degenerazione, non risolvibile in termini fotometrici, tra una lente ad una certa distanza dall'osservatore ed una con massa inferiore ma più vicina. La risoluzione di questa degenerazione, con la conseguente conferma di microlensing prodotto da buchi neri, è possibile grazie allo studio astrometrico del microlensing. Nello specifico le simulazioni indicano come fenomeni di microlensing dovuti a buchi neri corrispondano ad eventi con grandi valori del tempo di attraversamento del raggio di Einstein t_E e limitati valori della parallasse π_E . Grazie agli spostamenti astrometrici, questi eventi si rilevano più facilmente osservando in direzione del piano galattico piuttosto che verso il bulge.

4.3 Survey ZTF (*Zwicky Transient Facility*)

Nell'ambito della rilevazione di microlensing prodotto da materia oscura è interessante la ricerca del progetto **ZTF (Zwicky Transient Facility)**: osservando il cielo del nord in ottico, per 3 anni durante la fase ZTF-I, sono stati identificati 60 eventi di microlensing. Le osservazioni sono state effettuate presso il Palomar Observatory mediante il telescopio 48 inch Samuel Oschin Telescope. Mediante questo progetto sono state prodotte tre survey di grande interesse per la rilevazione del microlensing: la Northern Sky Survey, la Galactic Plane Survey e la High-Cadence Plane Survey. Le potenzialità di ZTF implicano la rilevazione di microlensing in direzione del piano della galassia ed anche all'interno e all'esterno del bulge.

4.3.1 Ricerca di buchi neri tra 60 eventi di microlensing della fase ZTF-I

Partendo da questi dati si pone l'attenzione sui possibili eventi prodotti da buchi neri. Come riportato nell'articolo "*60 Microlensing Events from the Three Years of Zwicky Transient Facility Phase One*" (Medford et al., 2023), le osservazioni si possono elaborare al fine di rilevare eventi di microlensing. Monitorando la distribuzione del tempo di attraversamento del raggio di Einstein, avendo come limite inferiore 30 giorni, si individuano eccessi dovuti a microlensing prodotto da buchi neri. Gli eventi osservati vengono divisi in base al taglio eseguito per eliminare i falsi positivi: si parte dal livello 0 senza tagli arrivando al livello 6 che presenta i dati migliori e più affidabili. Tra questi eventi si ricercano fenomeni di microlensing prodotti da buchi neri, in modo da poterli poi confermare mediante l'astrometria. Questi fenomeni vengono studiati per anni producendo così curve di luce che includono i dati fotometrici di tutte le sorgenti visibili. Il catalogo che si ottiene è costituito da 60 chiari eventi di microlensing, di cui la maggior parte è stata rilevata all'interno del piano galattico. L'analisi viene effettuata considerando eventi con $1giorno < t_E < 120giorni$. Analizzando la distribuzione del tempo di attraversamento del raggio di Einstein, t_E , per eventi di livello 6 si denota un picco attorno a $t_E \approx 50giorni$. Tale catalogo comprende eventi rilevati per la prima volta, pertanto al fine di confrontare queste misure con precedenti survey, come OGLE, si limita il campione.

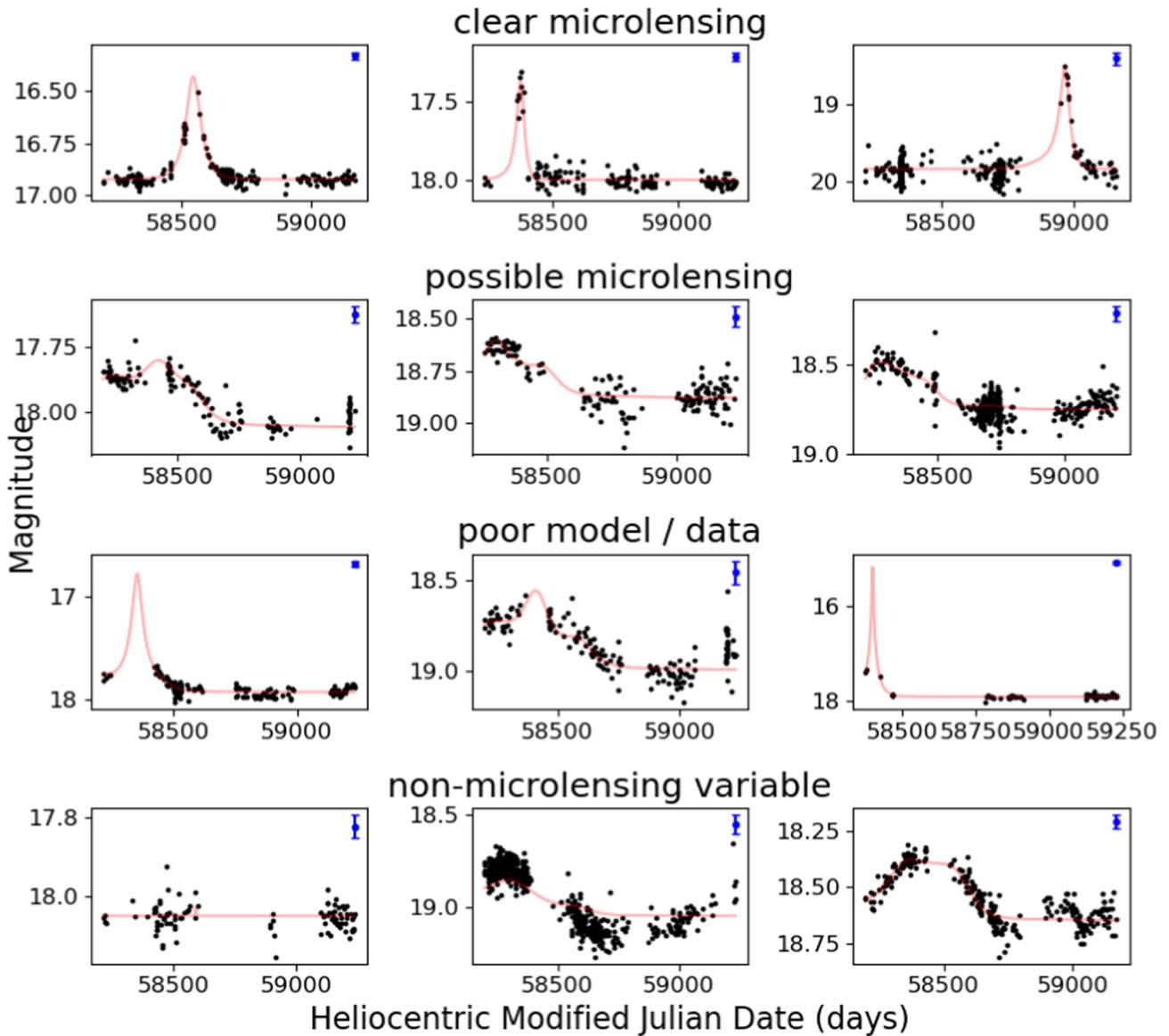


Figura 15: Questi grafici rappresentano le curve di luce dei possibili eventi di microlensing relativi al livello 5. Queste curve vengono divise, come indicato sopra, in base alla possibilità concreta che si tratti di eventi di microlensing o meno. Solo i dati relativi a "chiari eventi di microlensing" fanno parte del livello 6. Nelle curve di luce vengono inoltre indicate le barre d'errore dei dati. (Medford et al., 2023)

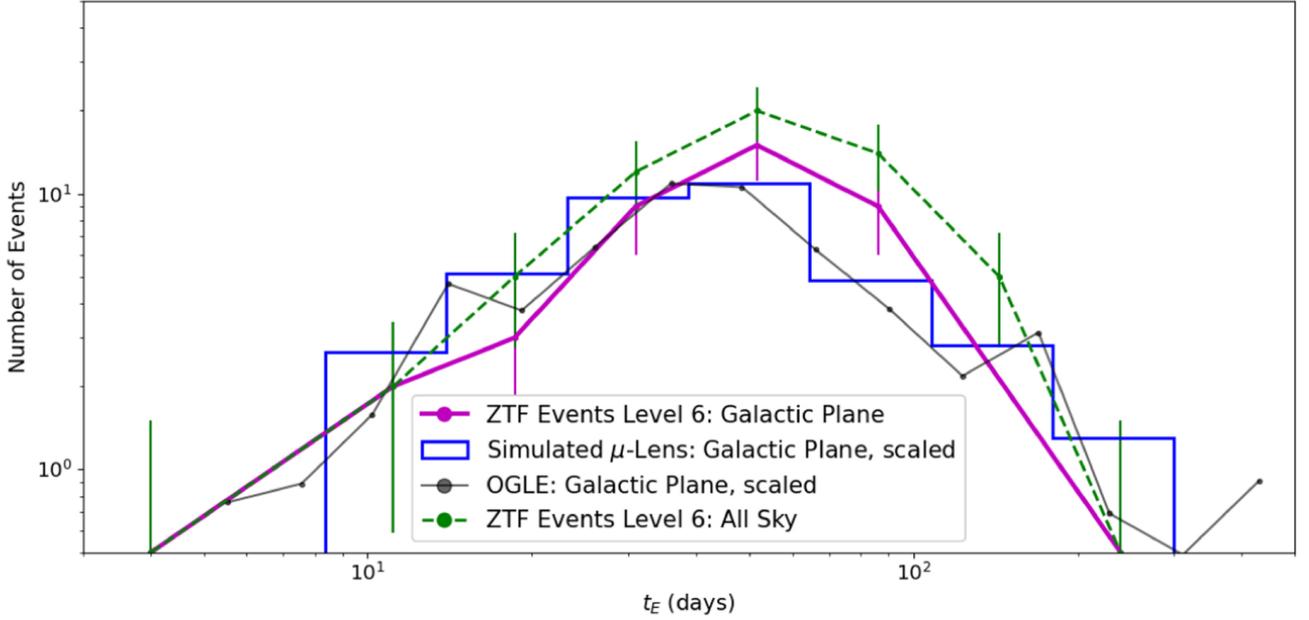


Figura 16: Grafico che mappa il numero di eventi, dal catalogo di livello 6, in funzione di t_E . Le curve vengono prodotte utilizzando i dati dei progetti ZTF e OGLE ai quali si aggiunge una simulazione. Si denota la buona correlazione tra la simulazione e i dati della survey OGLE. Incrementando la durata della survey ZTF dovrebbe aumentare il numero di eventi di microlensing anche se la pipeline definita dal gruppo di ricerca non gestisce bene eventi di lunga durata ed è per questo che si denota un taglio repentino in figura. (Medford et al., 2023)

Per rilevare la presenza di buchi neri si considerano gli eventi di microlensing, osservati nel piano $t_E - \pi_E$ in figura (17), che presentano elevati valori di t_E e bassi valori di π_E . Questo grafico contiene eventi rilevati direttamente e anche dati prodotti dalle simulazioni. Gli eventi di livello 6 si trovano in una regione del piano $t_E - \pi_E$ a cui corrispondono fenomeni di microlensing prodotti da stelle. Purtroppo i dati prodotti dalla survey non si estendono a valori elevati di t_E ed inoltre non si riescono a rilevare piccoli valori di π_E considerando la fotometria del progetto ZTF. Dunque a causa di queste limitazioni, utilizzando il catalogo di livello 6 non è possibile affermare che gli eventi di microlensing considerati siano prodotti da buchi neri.

I dati ottenuti rivelano inoltre la presenza di un numero piuttosto elevato di eventi al di fuori del piano galattico. Questa situazione può essere interpretata grazie alla presenza di un elevato numero di MACHOs che fungono da lenti gravitazionali rispetto alla stelle nello sfondo. Questa ipotesi, confutata da precedenti ricerche, è stata rivalutata mediante simulazioni che considerano una distribuzione di massa estesa. Le informazioni dedotte mediante il progetto ZTF sembrano confermare questa spiegazione anche se sono chiaramente necessarie ulteriori conferme.

4.3.2 Fase ZTF-II: studio di eventi di microlensing prolungato nel tempo

La mancata identificazione di microlensing prodotto da buchi neri deve essere interpretata considerando che le osservazioni di ZTF continuano: questa tipologia di eventi richiede infatti osservazioni di lunga durata. Alcuni di questi oggetti si ritiene raggiungeranno il picco in luminosità durante la fase ZTF-II. L'eventuale diminuzione della luminosità di un candidato porterà allo studio dell'astrometria e della sua fotometria in modo tale da quantificare la massa della lente, rilevando così la presenza di un buco nero.

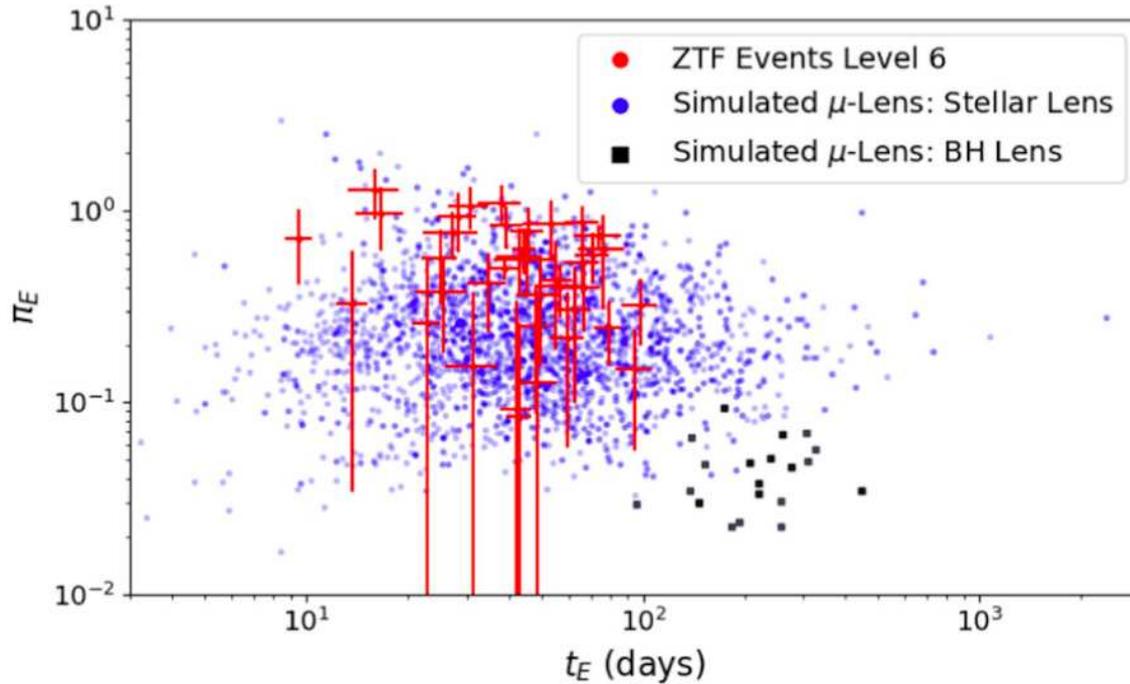


Figura 17: Rappresentazione, con relativo errore di 1σ , degli eventi di livello 6 nel piano $\pi_E - t_E$. Questi eventi di microlensing rilevati dal progetto ZTF si trovano nella regione delle lenti costituite da stelle. Le limitazioni temporali nelle osservazioni impediscono la rilevazione di lenti gravitazionali prodotte da buchi neri. (Medford et al., 2023)

4.4 Microlensing prodotto da strutture estese contenenti materia oscura

I dati del progetto Subaru-HSC della galassia di Andromeda (M31) possono vincolare, grazie al microlensing, le strutture estese composte da materia oscura. Nello specifico si sfrutta l'effetto di microlensing prodotto da oggetti estesi che si pongono tra l'osservatore ed una stella di dimensione finita. Questo effetto risulta apprezzabile nell'eventualità in cui la lente si trovi all'interno del raggio di Einstein. Il caso di maggiore interesse è quello in cui lente e sorgente presentano dimensioni comparabili al raggio di Einstein considerato, mentre quando la lente supera significativamente questo raggio diventa una lente diffusa che produce un ingrandimento non rilevabile.

Buchi neri primordiali (PBH) e MACHOs sono stati vincolati, in un intervallo di massa consistente, mediante l'assunzione di una lente puntiforme; questo è stato possibile grazie alle survey EROS, MACHO, OGLE e Subaru-HSC. I vincoli che si impongono mediante l'assunzione di una lente puntiforme non sono però più validi quando la lente raggiunge o supera la dimensione radiale di $0.1R_\odot$.

Utilizzando le osservazioni di M31, ottenute mediante la survey Subaru-HSC, si riesce a vincolare la frazione di materia oscura dei **subhalo NFW** e delle **stelle di bosoni**. Questa survey, sensibile a piccoli tempi di transito, rileva dunque piccoli raggi di Einstein. Studiando questi eventi è importante indicare che se l'estensione angolare della sorgente corrisponde a una distanza dalla lente maggiore del raggio di Einstein viene limitato l'ingrandimento relativo alle sorgenti puntiformi. Per semplicità, tenendo conto di questo effetto, si assume che tutte le stelle di M31 abbiano raggio coincidente con quello solare. Così facendo però si sovrastimano i vincoli sulle popolazioni di lenti puntiformi.

La presenza di strutture di materia oscura di dimensioni finite negli aloni di M31 e della Via Lattea genera un fenomeno di microlensing che si applica alle stelle, di dimensione finita, di M31. Questo effetto viene studiato grazie al parametro di impatto di soglia $u_{1.34}$, che dipende dalla dimensione della sorgente e dalla morfologia spaziale delle strutture di materia oscura. Valutando le lenti prodotte da NFW subhalos e stelle di bosoni si considerano lenti con diversi profili di massa in modo da evidenziare le differenze qualitative nei vincoli, imposti dal microlensing, alle diverse sottostrutture di materia oscura. Per lenti con funzioni di massa uniformi, come nel caso di stelle di bosoni, vi è discontinuità nel numero di immagini e nel loro ingrandimento in funzione della diversa posizione della lente rispetto alla linea di vista. Questo effetto combinato con la dimensione finita della sorgente potrebbe quantificare la posizione, rispetto alla linea di vista, in cui è passata la lente.

E' possibile rappresentare graficamente la sensibilità della survey Subaru-HSC, come indicato in figura (18).

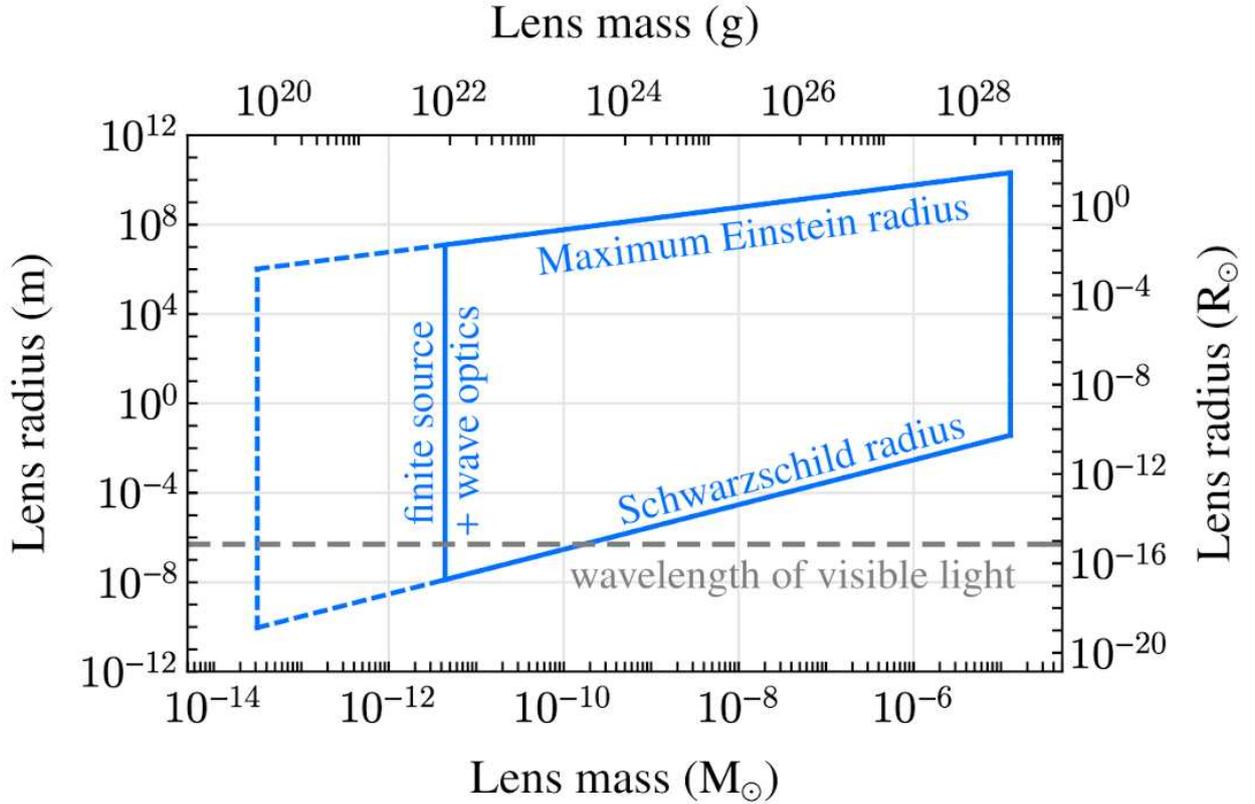


Figura 18: Stima euristica della sensibilità nella rilevazione di strutture di materia oscura, in termini di massa e dimensioni, della survey Subaru-HSC. L'effetto della dimensione finita della sorgente, che ne limita l'ingrandimento, diventa significativo per masse inferiori a $\sim 3 \times 10^{-12} M_{\odot}$. Nel caso di lenti puntiformi questa regione del diagramma è ugualmente caratterizzata da una limitazione dell'ingrandimento della sorgente ad opera dell'effetto di *wave optics*. Questo effetto si manifesta per una lente con un certa massa ed un raggio di Schwarzschild inferiore, per circa un ordine di grandezza, alla lunghezza d'onda della luce visibile. La linea tratteggiata indica la sensibilità che ipoteticamente si sarebbe raggiunta in assenza dell'effetto dovuto alla limitata dimensione della sorgente e dell'effetto di *wave optics* nel caso puntiforme. (Croon et al., 2020)

Il limite inferiore e superiore in termini di massa, degli oggetti rilevabili, vengono dedotti sulla base dei limiti imposti ai tempi scala degli eventi a cui è sensibile la survey. È importante osservare come nel piano raggio-massa della lente vi sia un limite inferiore costituito dal raggio di Schwarzschild relativo alla massa della lente considerata.

Per vincolare le strutture di materia oscura mediante i dati del progetto Subaru si considerano eventi di microlensing generati da lenti estese che deformano la luce proveniente da una sorgente estesa. Studiando due diversi casi di lente finita, ovvero i subhalos NFW e le stelle di bosoni, si ricavano vincoli che vengono interpolati dai vincoli definiti per diverse strutture di materia oscura. Il tutto inizia quantificando l'ingrandimento delle immagini.

Lo studio della configurazione geometrica del fenomeno si concentra sul piano trasversale, rispetto alla linea di vista, contenente la lente. Per questo motivo risulta utile considerare il sistema, con lente e sorgente di dimensioni finite, proiettato lungo il piano trasversale:

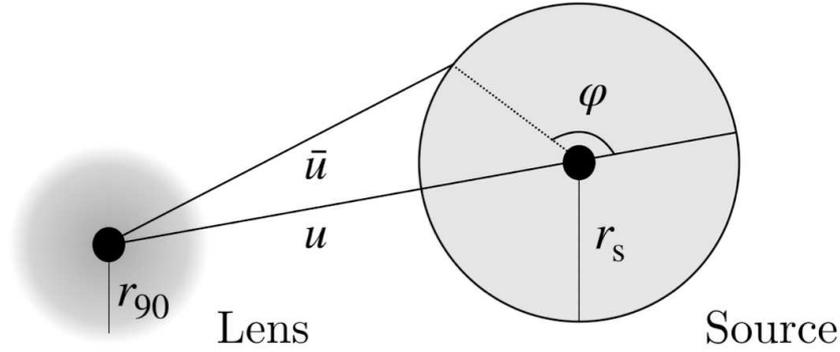


Figura 19: Rappresentazione geometrica, nel piano della lente, del sistema costituito da lente e sorgente di dimensioni finite. Dove $R_{90} = r_{90}R_E$ è il raggio che racchiude il 90 % della massa totale. (Croon et al., 2020)

Come indicato in figura, u rappresenta la distanza tra il centro della lente ed il centro della sorgente mentre \bar{u} è la distanza tra il centro della lente ed un punto del bordo della sorgente:

$$\bar{u}(\varphi) = \sqrt{u^2 + r_s^2 + 2ur_s \cos \varphi} \quad (115)$$

È possibile dunque scrivere l'equazione della lente per ogni punto del bordo della sorgente, ottenendo così:

$$\bar{u}(\varphi) = t(\varphi) - \frac{m(t(\varphi))}{t(\varphi)} \quad (116)$$

In questa espressione $m(t)$ indica la distribuzione di massa della lente proiettata nel piano della lente, ovvero il profilo di massa. Nel caso di una lente infinitesima, $m(t) = 1$, l'equazione della lente si risolve analiticamente.

L'ingrandimento di un immagine i-esima, assumendo una sorgente stellare con intensità uniforme nel piano della lente, viene definito dalla seguente espressione:

$$\mu_i = \eta \frac{1}{\pi r_s^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} t_i^2(\varphi) d\varphi \quad (117)$$

dove η indica la parità dell'immagine.

L'ingrandimento totale si ottiene mediante la sommatoria:

$$\mu_{tot} = \sum_i \mu_i \quad (118)$$

La rilevazione del microlensing è possibile grazie alla variazione in luminosità di una sorgente stellare a causa del passaggio di una lente lungo la linea di vista. Nello specifico viene considerato microlensing un evento con ingrandimento superiore all'ingrandimento che una lente puntiforme produce su una sorgente puntiforme con $u = 1$, ovvero $\mu_{tot} = 1.34$. Il tempo che l'ingrandimento della sorgente è al di sopra della soglia appena indicata viene definito tempo dell'evento t_E . Una volta rilevato, un evento di microlensing può essere studiato grazie alle curve di luce, per lenti di dimensioni finite. E' possibile anche definire il **parametro di impatto di soglia** (in termini del raggio di Einstein) $u_{1.34}$:

$$\mu_{tot}(u \leq u_{1.34}) \geq 1.34 \quad (119)$$

Nello specifico, come già indicato, è interessante studiare simultaneamente due diversi tipi di lenti:

- i Navarro-Frenk-White (NFW) subhalos, con una funzione di massa ripida che presenta un picco;
- le stelle di bosoni, con un profilo di massa più uniforme.

4.4.1 Vincoli alla frazione di materia oscura

Considerando lenti di massa M con distribuzione delle velocità di Maxwell-Boltzmann, il rateo di eventi per ogni sorgente stellare è dato da:

$$\frac{d^2\Gamma}{dxdt_E} = \varepsilon(t_E, R_*) \frac{2D_S}{v_0^2 M} \rho_{lens}(x) v_E^4(x) e^{-v_E^2(x)/v_0^2} \quad (120)$$

dove $v_E(x) = 2u_{1.34}(x)R_E(x)/t_E$, $R_E(x)$ indica il raggio di Einstein e v_0 è la velocità circolare che risulta circa 220 km/s per la Via Lattea e 250 km/s per M31. Da notare come la maggiore velocità circolare implica che le lenti possano percorrere raggi di Einstein maggiori in tempi t_E inferiori.

Per derivare il numero totale atteso di eventi si descrive la densità degli aloni di materia oscura mediante il **profilo NFW**:

$$\rho_{DM}(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_{scale})(1 + r/r_{scale})^2} \quad (121)$$

Questa espressione viene applicata ad eventi che riguardano la Via Lattea ed M31; il tutto è possibile utilizzando i seguenti parametri:

$$\text{Via Lattea} \begin{cases} r_{MW}(x) = \sqrt{R_{sol}^2 - 2xR_{sol}D_S \cos l \cos b + x^2D_S^2} \\ \rho_s = 0.184 GeV/cm^3 \\ r_{scale} = 21.5 kpc \\ R_{sol} = 8.5 kpc \end{cases}$$

dove R_{sol} è la distanza tra il Sole ed il centro della Via Lattea.

$$\text{M31 (Andromeda)} \begin{cases} r_{M31}(x) = D_S(1 - x) \\ \rho_s = 0.19 GeV/cm^3 \\ r_{scale} = 25 kpc D_S = 770 kpc \end{cases}$$

dove D_S è la distanza da M31, le cui coordinate galattiche sono $(l, b) = (121.2^0, -21.6^0)$. A questo punto si definisce il **numero totale atteso di eventi** mediante la seguente espressione:

$$N_{events} = N_* T_{obs} \int dt_E \int dR_* \int_0^1 \frac{d^2\Gamma}{dx dt_E} \frac{dn}{dR_*} dx \quad (122)$$

dove $N_* = 8.7 \times 10^7$ indica il numero di stelle osservato dalla Subaru-HSC survey per un tempo $T_{obs} = 7 \text{ ore}$. Il termine dn/dR_* è la distribuzione normalizzata del raggio delle stelle in M31.

I vincoli così ottenuti possono essere rappresentati graficamente in figura (20).

Si nota come per le stelle di bosoni i vincoli imposti dalle survey EROS e OGLE vengono arrotondati dall'effetto di dimensione finita della sorgente. Questo effetto causa la perdita di sensibilità nella rilevazione di lenti di grandi dimensioni e piccole masse: la survey Subaru non riesce a vincolare stelle di bosoni di raggio superiore a $\sim 30 R_\odot$. Nel caso di strutture di dimensioni maggiori di $\sim 10^{-1} R_\odot$ vengono modificati i vincoli imposti dal microlensing con lenti puntiformi. Vincoli significativi si ottengono per strutture con raggio dell'ordine di $\sim 10^3 R_\odot$. Dal confronto dei due grafici si osserva che i subhalos NFW, dati i profili di massa con picchi, presentano vincoli più forti rispetto alle stelle di bosoni in cui il profilo di massa risulta più piatto.

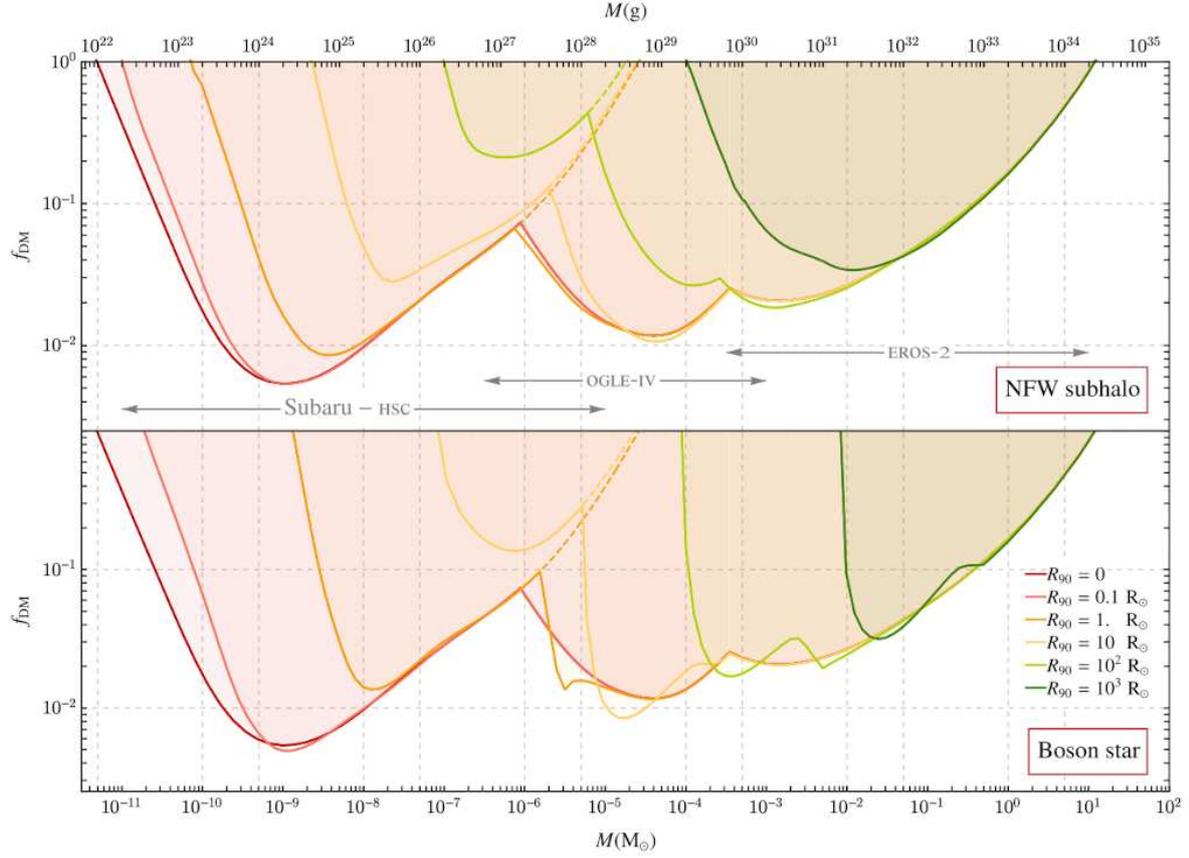


Figura 20: Grafici che indicano i vincoli, ottenuti tramite la survey Subaru-HSC di M31, alla frazione di materia oscura f_{DM} , in funzione della massa della lente, presente in due diversi lenti: in alto un subhalo NFW ed in basso una stella di bosoni. Si rappresentano le coppie (f_{DM}, M) , tali che $N_{events} = 4.74$, che corrispondono al limite superiore dell'intervallo di confidenza poissoniano pari al 95 % per l'evento osservato dalla survey Subaru. Il tutto considerando l'effetto della limitata dimensione delle sorgenti stellari di M31 ed anche la distribuzione delle loro dimensioni. Nella figura superiore vengono indicati anche i vincoli ottenuti mediante altre survey con l'assunzione che si non combinino tra loro. Le linee di diversi colori rappresentano lenti di diverse dimensioni e si denota che, a parità di massa, lenti di dimensioni maggiori implicano limiti meno marcati a causa dell'inferiore ingrandimento. (Croon et al., 2020)

4.5 Microlensing prodotto da buchi neri primordiali con alone

4.5.1 Buchi neri primordiali

Nell'universo primordiale regioni di alta densità collassano gravitazionalmente generando così dei buchi neri. Lo studio di questi oggetti è possibile anche grazie al microlensing gravitazionale che permette inoltre di valutare la materia oscura all'interno della Via Lattea. Grazie a questo effetto relativistico si vincola l'abbondanza di **buchi neri primordiali (PBH)** con massa compresa tra 10^{-11} e $10^3 M_{\odot}$.

I buchi neri primordiali possono accumulare materia oscura creando dei piccoli aloni (*mini-halo*) che presentano una massa superiore a quella del buco nero centrale, in questo caso si parla di **buchi neri primordiali dressed (dPBH)**. La presenza dei mini-halo di materia oscura modifica gli effetti prodotti dal microlensing gravitazionale.

Concentrandosi sui buchi neri circondati da aloni di materia oscura si deduce che: quando il raggio del mini-halo di materia oscura è comparabile al raggio di Einstein, la distribuzione della densità dell'alone influenza il microlensing. Applicando queste considerazioni ai dati della survey OGLE e alle osservazioni del progetto Subaru/HSC Andromeda, si vincola efficacemente l'abbondanza di buchi neri primordiali. Nello specifico l'osservazione di dPBH può rafforzare questi vincoli, che sono stati ricavati mediante microlensing.

4.5.2 Descrizione del fenomeno

I buchi neri primordiali si possono studiare assumendo si comportino, per piccoli valori del raggio di Schwarzschild R_S , come sorgenti puntiformi. L'eventuale presenza di un piccolo alone modifica l'effetto di microlensing che si osserva.

Per descrivere i dPBH si assume la loro simmetria sferica. Il profilo di densità degli aloni dipende dalla loro massa e raggio:

$$\rho(r) = \begin{cases} \frac{3M_{halo}}{16\pi R_{halo}^3} \left(\frac{r}{R_{halo}}\right)^{-\frac{9}{4}} & r \leq R_{halo} \\ 0 & r > R_{halo} \end{cases} \quad (123)$$

Si utilizza, in seguito, anche il profilo di densità ridotto dei mini-halo $\tilde{\rho}$ dedotto dalla relazione:

$$\rho(r) = \frac{M_{halo}}{R_{halo}^3} \tilde{\rho}\left(\frac{r}{R_{halo}}\right)$$

Un importante parametro del microlensing è il **raggio del tubo di microlensing** R_{tube} : raggio, in termini della distanza tra la lente e la direzione della linea di vista, a cui corrisponde un ingrandimento pari a 1.34. Questo parametro, deducibile dall'ingrandimento, è correlato al rateo degli eventi dato che un evento di microlensing si manifesta quando una lente attraversa questo tubo. Non è al momento nota la relazione tra massa dell'alone e massa del PBH centrale, per lo studio del microlensing prodotto da questi oggetti si può usare la relazione: $M_{halo} = 100M_{PBH}$. Un sistema di lensing gravitazionale generale, senza dunque allineamento tra sorgente e lente, viene rappresentato come indicato in figura (22). Dove si considera che la direzione lungo la linea di vista venga descritta dalla coordinata z .

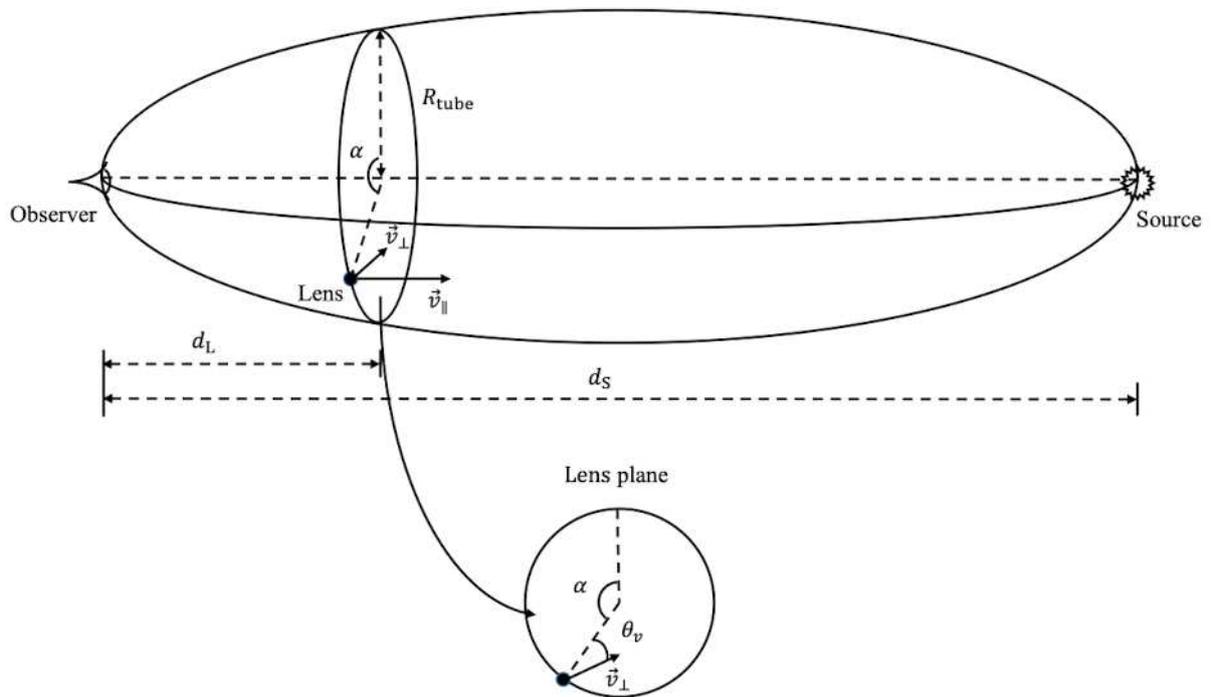


Figura 21: Rappresentazione geometrica del tubo di microlensing nella quale viene indicata anche la posizione della lente. (Cai et al., 2023)

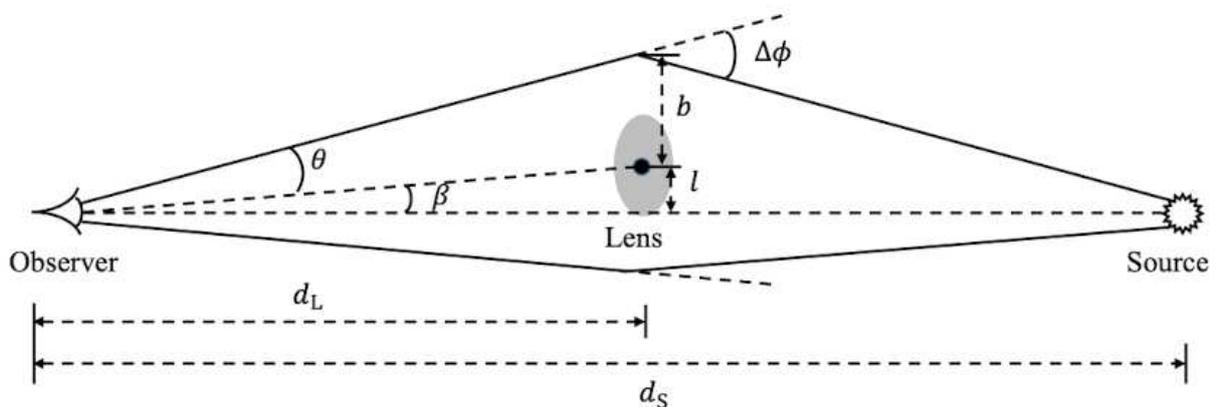


Figura 22: Rappresentazione geometrica del sistema osservatore-lente-sorgente. (Cai et al., 2023)

Nel caso di microlensing prodotto da dPBH la lente è composta dal PBH centrale e dall'alone circostante, dunque la densità superficiale di massa assume la forma:

$$\Sigma(b) = \begin{cases} 2 \int_0^{\sqrt{R_{halo}^2 - b^2}} \rho(\sqrt{b^2 + z^2}), dz & b \leq R_{halo} \\ 0 & b > R_{halo} \end{cases} \quad (124)$$

Sulla base di questa espressione si determina la massa entro il raggio b

$$M(b) = M_{PBH} + 2\pi \int_0^b \Sigma(b')b', db' \quad (125)$$

e l'angolo di deflessione

$$\Delta\phi(b) = \frac{4M_{PBH}}{b} + \frac{4M_{halo}}{b} f\left(\frac{b}{R_{halo}}\right) \quad (126)$$

dove $f(x) = 4\pi \int_0^{\min(x,1)} x', dx' \int_0^{\sqrt{1-x'^2}} \tilde{\rho}(\sqrt{x'^2 + z'^2}) dz'$

Per determinare la deflessione di un fascio di luce prodotta da PBH dressed è necessario conoscere b/R_{halo} , R_{halo}/R_S e M_{halo}/M_{PBH} .

Microlensing prodotto da dPBH applicato a sorgenti puntiformi

Il microlensing prodotto da dPBH nel caso di una sorgente puntiforme produce due immagini di parità opposta. L'immagine oltre ad essere deformata viene anche ingrandita; questo effetto varia in base al rapporto tra il raggio dell'alone R_{halo} ed il raggio di Einstein del dPBH $R_E^{(dPBH)}$:

- se $R_{halo} \gg R_E^{(dPBH)}$ la massa all'interno del $R_E^{(dPBH)}$ è principalmente costituita dal PBH centrale, quindi l'ingrandimento corrisponde a quello prodotto da una lente puntiforme di massa M_{PBH} .
- se $R_{halo} < R_E^{(dPBH)}$ la massa all'interno del $R_E^{(dPBH)}$ è costituita anche dalla massa dell'alone, quindi l'ingrandimento corrisponde a quello prodotto da una lente puntiforme di massa M_{dPBH}

Microlensing prodotto da dPBH applicato a sorgenti estese

Per il microlensing prodotto da dPBH nel caso di sorgenti estese si considera la dimensione della sorgente, che viene indicata con r_s . Nello specifico se la distanza del centro della lente dalla linea di vista l è superiore a r_s l'ingrandimento è simile a quello di una sorgente puntiforme. E' interessante confrontare l'andamento dell'ingrandimento nell'approssimazione puntiforme e nel caso di una sorgente estesa, come indicato in figura (23).

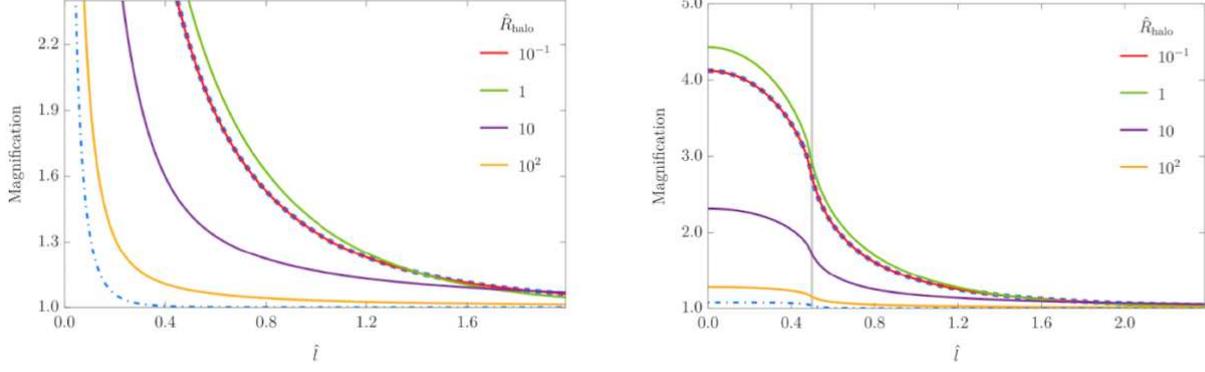


Figura 23: Andamento dell’ingrandimento della sorgente in funzione della distanza del centro della lente dalla linea di vista $\hat{l} = \frac{l}{R_E(d_{PBH})}$. Il grafico a sinistra è relativo all’ingrandimento di una sorgente puntiforme. Il grafico a destra indica l’ingrandimento per una sorgente estesa di dimensione $\frac{r_s}{R_E(d_{PBH})} = 1/2$; la linea verticale indica i punti in cui $l = r_s$.

In entrambi i casi si considerano diversi valori di $\hat{R}_{halo} = \frac{R_{halo}}{R_E(d_{PBH})}$ come riportato in figura. (Cai et al., 2023)

4.5.3 Vincoli all’abbondanza di buchi neri primordiali

E’ possibile vincolare l’abbondanza di PBH tramite il rateo degli eventi di microlensing, Per quantificare il **numero di eventi atteso** si utilizza la seguente espressione:

$$N_{exp}^{(dPBH)} = \pi t_{obs} N_S \int_{t_E^{(min)}}^{t_E^{(max)}} \epsilon(t_E) f_{dPBH} dt_E \int_{d_L^{(min)}}^{d_L^{(max)}} \frac{\rho_{DM}(d_L)}{M_{dPBH}} dd_L \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v_{\perp}^4 f(v_{\perp}) d\theta_v \quad (127)$$

dove:

- $[t_E^{(min)}, t_E^{(max)}]$ è l’intervallo temporale considerato e t_E è il tempo scala degli eventi;
- ρ_{DM} è la densità della materia oscura;
- f_{dPBH} è la frazione di dPBH in termini di materia oscura;
- $\rho_{lens} = \rho_{DM} f_{dPBH}$ è la densità della lente;
- $M_{lens} = M_{dPBH}$ è la massa della lente;
- t_{obs} è il tempo di osservazione;
- N_S è il numero di sorgenti;
- $\epsilon(t_E)$ è l’efficienza della rilevazione stimata mediante simulazioni.

Il comportamento del microlensing prodotto da dPBH è asintotico a quello di una lente puntiforme di massa M_{PBH} se il raggio dell’alone è molto maggiore o minore del raggio di Einstein. Questa considerazione è molto utile per porre vincoli, mediante microlensing, sui dPBH. Nello specifico il microlensing stellare prodotto da dPBH, mediante i dati relativi ai progetti OGLE e Subaru/HSC Andromeda, ha portato ad un miglioramento dei vincoli relativi all’abbondanza di PBH. La presenza di mini aloni di materia oscura attorno ai PBH ha amplificato i precedenti vincoli di diversi ordini. Per i dPBH i vincoli sono simili in termini asintotici.

Dati di OGLE consistono in osservazioni di stelle nel bulge. L'analisi dei dati viene fatta assumendo che le sorgenti si trovino nel centro galattico. Per descrivere la distribuzione spaziale di materia oscura, tra sorgente ed osservatore, si utilizza il profilo di Navarro-Frenk-White (NFW):

$$\rho_{DM}(r) = \frac{\rho_c}{\left(\frac{r}{r_*}\right)\left(1 + \frac{r}{r_*}\right)^2} \quad (128)$$

dove $\rho_c = 4.88 \times 10^6 \frac{M_\odot}{kpc^3}$ e $r_* = 21.5 kpc$. Per la distribuzione delle velocità si assume la distribuzione gaussiana. Per determinare i vincoli sull'abbondanza di PBH si assumono inoltre $d_S = 8 kpc$, $t_{obs} = 5 yrs$ e $N_S = 4.88 \times 10^7$.

Si migliorano dunque i vincoli in merito all'abbondanza di PBH utilizzando i dati della survey OGLE, come viene indicato in figura (24). Per semplicità si assume $M_{halo} = 100 M_{PBH}$; questa considerazione non modifica il fatto che l'eventuale presenza di mini-halo di materia oscura influenzi in modo significativo la massa ed i vincoli per i PBH. Comunque anche definendo una migliore relazione tra M_{PBH} e i mini-halo circostanti i risultati cambiano poco. Assumendo inoltre $M_{PBH} = M_{dPBH}/101$ e $f_{PBH} = f_{dPBH}/101$ si determinano i vincoli sull'abbondanza di PBH, con plateaus a $f_{PBH} = 1/101$.

La presenza dei mini-halo pone vincoli, inferiori all'1%, migliori rispetto ai vincoli originari sui PBH. E' importante indicare come dimensioni troppo elevate dell'alone indicano un alone disperso che comporta vincoli deboli mentre un alone di piccole dimensioni è sinonimo di vincoli più significativi, anche fino a due ordini di grandezza.

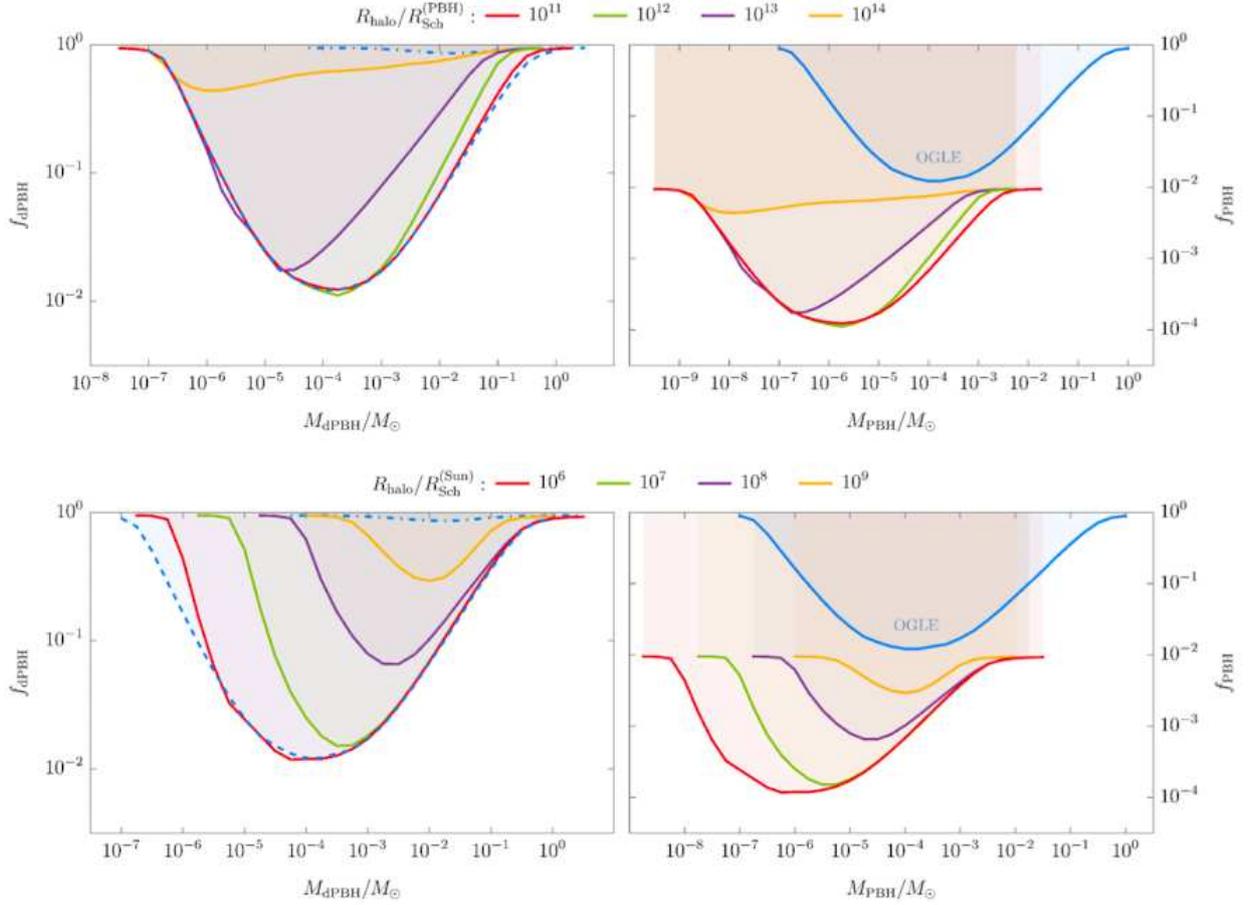


Figura 24: In questi grafici vengono riportati i vincoli all'abbondanza di dPBH (grafici a sinistra) ed i vincoli all'abbondanza di PBH migliorati dalla osservazioni OGLE (grafici a destra). I grafici nella parte superiore vengono prodotti assumendo una correlazione tra il raggio dell'alone e la massa del PBH; mentre nei pannelli inferiori queste due grandezze vengono assunte indipendenti. Come riportato in figura si considerano diversi valori dei rapporti tra il raggio dell'alone ed il raggio di Schwarzschild valutato per un PBH e per il sole. Per i grafici a sinistra, le linee tratteggiate indicano i vincoli inferiori alle dimensioni del raggio dell'alone; mentre la linea tratto-punto ne definisce i vincoli superiori. Per i grafici a destra, la linea blu definisce i vincoli iniziali all'abbondanza di PBH senza includere i mini-halo. Nello specifico i vincoli per M_{dPBH} vengono valutati nell'intervallo $[10^{-7}, 10^0]M_{\odot}$ mentre i vincoli per M_{PBH} vengono considerati nell'intervallo $[10^{-9}, 10^{-2}]M_{\odot}$. (Cai et al., 2023)

Dati di Subaru/HSC Andromeda riguardano eventi di distorsione della luce stellare di M31 ad opera di PBH nelle zone dell'alone della Via Lattea e di M31. In questo caso per considerare la distribuzione di materia oscura degli aloni della Via Lattea e di M31 si utilizza il profilo NFW con i seguenti valori:

$$\text{Alone della Via Lattea} \begin{cases} \rho_c = 4.88x10^6 M_\odot/kpc^3 \\ r_* = 21.5kpc \end{cases}$$

$$\text{Alone di M31} \begin{cases} \rho_c = 4.96x10^6 M_\odot/kpc^3 \\ r_* = 25kpc \end{cases}$$

Nello specifico i dati della survey Subaru/HSC Andromeda considerano un numero di sorgenti $N_S = 8.7x10^7$ osservate per un tempo $t_{obs}=7$ ore. Nella trattazione dei dati le sorgenti considerate vengono assunte al centro di M31. La distribuzione delle velocità che si assume per analizzare i dati è la distribuzione isotropa di Maxwell; mentre per la massa degli aloni si usa la forma funzionale $M_{NFW}(r) = 4\pi\rho_c r_*^3 [\ln(1 + \frac{r}{r_*}) - \frac{r}{r+r_*}]$. E' importante ricordare che il rateo differenziale degli eventi è dato dalla somma dei contributi derivanti dagli aloni della Via Lattea e di M31. I vincoli, migliorati, che si ottengono in merito all'abbondanza di PBH, tramite l'analisi dei dati di Subaru/HSC Andromeda, possono essere rappresentati mediante la figura (25).

L'analisi dei dati tiene conto dell'effetto prodotto da sorgenti di dimensioni finita. Viene valutato anche l'effetto di *wave optics*, con possibili effetti di interferenza e diffrazione, che influenza l'ingrandimento prodotto dalla lente. Questo effetto, solitamente si manifesta quando il raggio di Schwarzschild è minore o uguale alla lunghezza d'onda della luce e viene valutato nello studio di dPBH con $M_{dPBH} \leq 10^{-8} M_\odot$.

Inoltre considerando i minihalos circostanti, i dati della survey Subaru/HSC Andromeda possono vincolare i PBH nella finestra di massa $M_{PBH} \sim [10^{-16}, 10^{-12}] M_\odot$ entro la quale i PBH possono costituire tutta la materia oscura. Data la non definita natura della materia oscura si ignorano le possibili interazioni tra particelle di materia oscura, in grado di modificare il profilo dell'alone e i vincoli ottenuti, limitando dunque l'analisi agli effetti gravitazionali che essa produce. I vincoli imposti per i dPBH saranno comunque soggetti ad ulteriori miglioramenti in futuro.

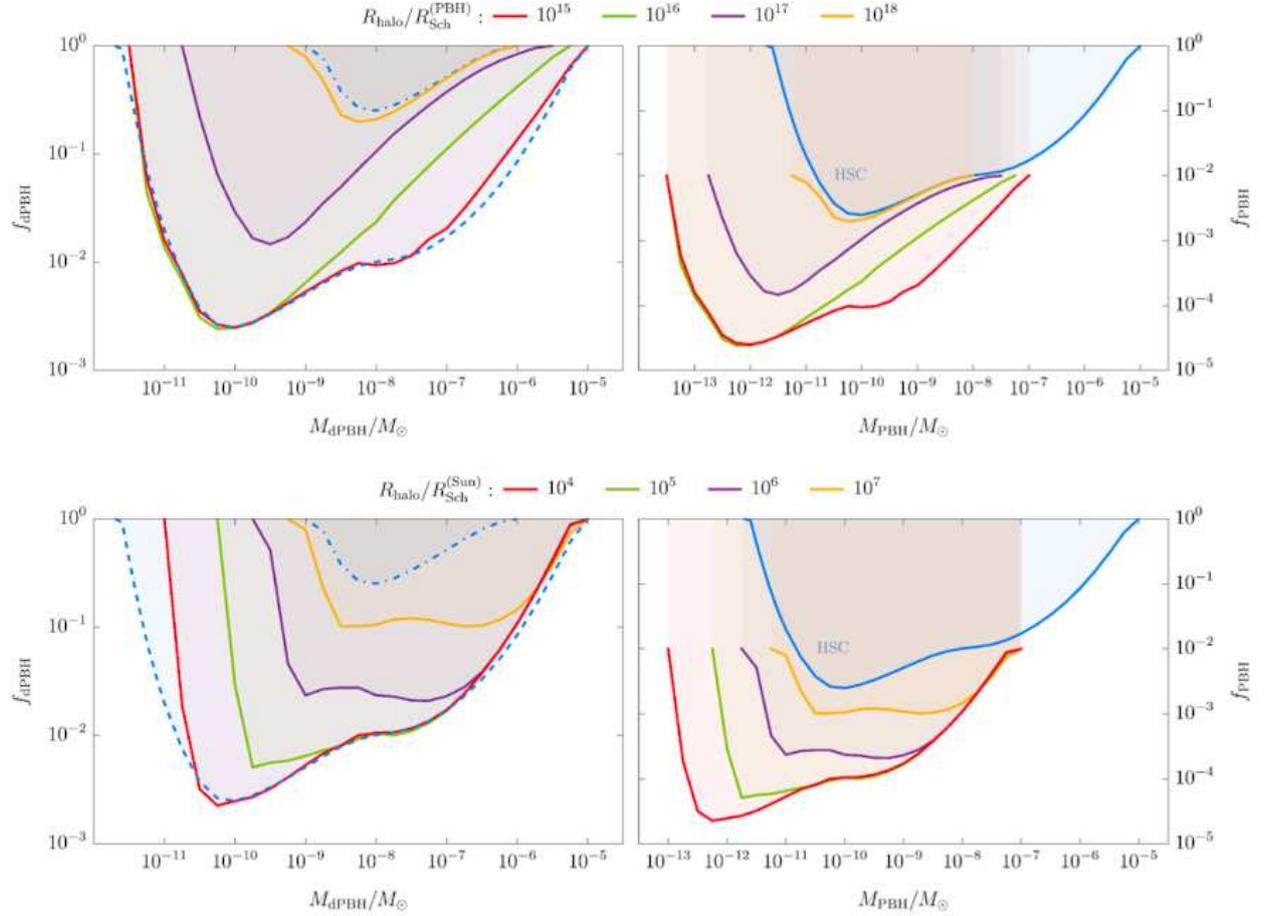


Figura 25: In questi grafici vengono riportati i vincoli all'abbondanza di dPBH (grafici a sinistra) ed i vincoli all'abbondanza di PBH migliorati dalla osservazioni Subaru/HSC Andromeda (grafici a destra). I grafici nella parte superiore vengono prodotti assumendo una correlazione tra il raggio dell'alone e la massa del PBH; mentre nei pannelli inferiori queste due grandezze vengono assunte indipendenti. Come riportato in figura si considerano diversi valori dei rapporti tra il raggio dell'alone ed il raggio di Schwarzschild valutato per un PBH e per il sole. Per i grafici a sinistra, le linee tratteggiate indicano i vincoli inferiori alle dimensioni del raggio dell'alone; mentre la linea tratto-punto ne definisce i vincoli superiori. Per i grafici a destra, la linea blu definisce i vincoli iniziali all'abbondanza di PBH senza includere i mini-halo. (Cai et al., 2023)

5 Conclusioni

Il lensing gravitazionale, osservato direttamente diversi anni dopo l'ipotesi della sua esistenza, descrive il comportamento della luce in relazione alla gravità. Questo fenomeno rappresenta la prima prova sperimentale della validità della teoria della relatività generale di Einstein. Al tempo stesso costituisce uno strumento molto utile per lo studio dell'universo e delle sue componenti. Sulla base delle caratteristiche del lensing, in termini di allineamento lente-sorgente e dimensioni della lente, si ottengono effetti diversi e quindi differenti possibili applicazioni.

All'interno di questo elaborato è stato trattato nel dettaglio solo un particolare tipo di lente ovvero il microlensing, applicandolo allo studio di sorgenti astrofisiche contenenti materia oscura. Nello specifico vengono considerati i vincoli alla quantità di materia oscura presente in sorgenti astrofisiche con diversi profili di massa. Inoltre, viene indicata la modalità mediante la quale è possibile vincolare l'abbondanza di buchi neri primordiali. Queste considerazioni devono essere interpretate sulla base di survey volte alla rilevazione di microlensing prodotto da buchi neri, come ad esempio il progetto ZTF. Questa ricerca mette in evidenza la necessità di tempi di esposizione maggiori per individuare con certezza questo tipo di eventi. In questo modo si comprende come questo campo di ricerca sarà soggetto a significativi sviluppi nel prossimo futuro.

6 Fonti

- [1] Alberto Franceschini, Dispensa del corso di "Observational Cosmology" del corso di Laurea Magistrale in "Astrophysics and Cosmology" dell'Università degli studi di Padova
- [2] Alberto Franceschini, Dispensa del corso di "Cosmologia" del corso di Laurea Triennale in "Astronomia" dell'Università degli studi di Padova
- [3] Meneghetti, M., 2021. Introduction to gravitational lensing, with Python examples. Springer.
- [4] Medford, M.S., Abrams, N.S., Lu, J.R., Nugent, P., Lam, C.Y., 2023. 60 Microlensing Events from the Three Years of Zwicky Transient Facility Phase One. *Astrophys. J.* 947, 24. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/acba8f>
- [5] Cai, R.-G., Chen, T., Wang, S.-J., Yang, X.-Y., 2023. Gravitational microlensing by dressed primordial black holes. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 2023, 043. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2023/03/043>
- [6] Croon, D., McKeen, D., Raj, N., Wang, Z., 2020. Subaru-HSC through a different lens: Microlensing by extended dark matter structures. *Phys. Rev. D* 102, 083021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.083021>
- [7] Ferroni, E., 2016. Il mistero della riconnessione magnetica rapida. MEDIA INAF. URL <https://www.media.inaf.it/2016/11/24/riconnessione-magnetica-rapida-comisso/>
- [8] Sugiyama, S., Kurita, T., Takada, M., 2020. On the wave optics effect on primordial black hole constraints from optical microlensing search. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 493, 3632–3641. <https://doi.org/10.1093/mnras/staa407>
- [9] Fox, S., 2015. Hubble's Double Take [WWW Document]. NASA. URL <http://www.nasa.gov/content/hubbles-double-take>
- [10] NASA ESA, 1990. The Gravitational Lens G2237 + 0305 [WWW Document]. ESA. URL <https://www.spacetelescope.org/images/opo9020a/>
- [11] Rogelio Bernal, A., 2019. Abell 370: Galaxy Cluster Gravitational Lens | Science Mission Directorate. NASA, ESA, Hubble [WWW Document]. Nasa Sci. URL <https://science.nasa.gov/abell-370-galaxy-cluster-gravitational-lens>
- [12] Bolton, A., 2005. Einstein Ring Gravitational Lens (SDSS J162746.44-005357.5). NASA, ESA, A. Bolton (Harvard-Smithsonian CfA) and the SLACS Team. [WWW Document]. hubblesite. URL <https://hubblesite.org/contents/media/images/2005/32/1796-Image>
- [13] Peruzzi, G., 2007. [as] radici - La singolare storia di una lente particolare. [WWW Document]. Asimmetrie. URL <https://www.asimmetrie.it/as-radici-la-singolare-storia-di-una-lente-particolare>

[14] C. Schäfer, G. Fourestey, J.-P. Kneib, 2019. Lenstool-HPC: A High Performance Computing based mass modelling tool for cluster-scale gravitational lenses. *Astron. Comput.*

[15] Aloisio, F., 2016. Albert sul surf. *Media inaf.*
URL <https://www.media.inaf.it/2016/02/11/albert-sul-surf/>