

**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"  
Corso di Laurea Triennale in Fisica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

## **Gli Stati Eccitati del Berillio-8 e la loro Interpretazione**

Candidato:  
**Marco Bocconcello**

Relatore:  
**Prof. Lorenzo Fortunato**

---

Anno Accademico 2016–2017



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>v</b>
<b>1 Sommario dati spettroscopici</b>	<b>1</b>
1.1 Livelli energetici $0^+, 2^+, 4^+$ . . . . .	2
1.2 Livelli energetici superiori al $4^+$ . . . . .	3
<b>2 Stati a cluster</b>	<b>5</b>
2.1 Modello a cluster con potenziale armonico . . . . .	8
2.2 Modello a cluster rotore rigido . . . . .	10
<b>3 Stati di particella singola</b>	<b>13</b>
3.1 Modello a shell con potenziale armonico deformato . . . . .	13
3.2 Interpretazione livelli ad energie superiori a $16 \text{ MeV}$ . . . . .	16
<b>4 Conclusioni</b>	<b>19</b>



# Introduzione

Il berillio si presenta in natura sotto forma di diversi isotopi, accomunati dalla carica nucleare  $Z=4$ , alcuni stabili come il  $^{10}\text{Be}$  o il  $^9\text{Be}$  ed altri instabili come il  $^8\text{Be}$  o il  $^{12}\text{Be}$ . L'interesse in questo lavoro di tesi è rivolto in particolare al nucleo di berillio-8, del quale si proveranno ad interpretare gli stati eccitati. La nucleosintesi di tutti gli isotopi del berillio avviene in sorgenti astrofisiche, nello specifico si ritiene che la maggior parte del berillio stabile si formi quando un *raggio cosmico* induce la fissione di elementi più pesanti presenti nel gas interstellare [1]. L'isotopo  $^8\text{Be}$  viene prodotto come risonanza, data la sua instabilità, nella fusione di due nuclei di elio presenti nel materiale stellare. Nonostante la sua brevissima emivita, il berillio-8 ha un'importanza cruciale nel processo a triplo  $\alpha$ . Quest'ultimo comincia ad avvenire nel momento in cui la stella esaurisce l'idrogeno, in quel frangente gli strati esterni cominciano a collassare sotto la gravità e di contro la temperatura del nucleo stellare sale fino a raggiungere  $10^8\text{K}$  [2]. A queste temperature l'energia cinetica disponibile per i nuclei di elio presenti diviene sufficiente per avviare una reazione di fusione secondo lo schema

- $\alpha + \alpha \mapsto ^8\text{Be}$
- $\alpha + ^8\text{Be} \mapsto ^{12}\text{C}$

Si capisce quindi l'importanza che riveste il  $^8\text{Be}$  nella formazione del carbonio e quindi, indirettamente, nella formazione di tutti gli organismi biologici. In aggiunta all'importanza che il  $^8\text{Be}$  riveste in ambito cosmologico, astrofisico e più in generale in tutte le altre scienze, lo studio del suo spettro è un test della nostra comprensione della struttura nucleare e del ruolo che i modelli a cluster possono giocare in questo contesto. Uno scopo di questa tesi è quello di raccogliere informazioni sullo stato dell'arte delle conoscenze spettroscopiche di questo importante isotopo.

Il lavoro di tesi verrà diviso in 3 capitoli

- Primo capitolo: si esporranno i principali dati spettroscopici cercando di dare una prima breve interpretazione di alcuni livelli energetici
- Secondo capitolo: ci si concentrerà sui primi tre stati, ampliando e chiarendo quanto scritto nel primo capitolo. Le due sottosezioni nel quale è diviso metteranno in evidenza due approcci, apparentemente differenti, per la descrizione dei livelli a  $3.03\text{MeV}$  e a  $11.35\text{MeV}$  con riferimento alla Figura 1.1
- Terzo capitolo: in quest'ultimo capitolo si porrà l'attenzione sui livelli ad energie superiori a  $16\text{MeV}$  con particolare attenzione agli stati a  $16.626\text{MeV}$  e  $16.922\text{MeV}$ . Si amplierà quindi la descrizione approssimativa avvenuta nel sottocapitolo 1.2.



# Capitolo 1

## Sommario dati spettroscopici

In questo capitolo si espone lo spettro energetico del nucleo di berillio-8, focalizzando l'attenzione su alcuni livelli e sulle transizioni principali che avvengono tra di essi. Tutti i dati e la Figura 1.1 sono stati presi da [3]. Nella notazione  $J^\pi$ , usata sia nella Tabella 1.1 che nella Figura 1.1,  $J$  indica il momento angolare del sistema, mentre il  $\pi$  ad apice indica la parità. Quest'ultima è definita osservando come agisce l'operatore parità  $\mathcal{P}$  quando è applicato ad uno stato; ovvero data la funzione d'onda del sistema  $\Psi(\vec{x})$ , si dice che la funzione d'onda ha parità positiva se:  $\mathcal{P}\Psi(\vec{x}) = +\Psi(\vec{x})$ , mentre ha parità negativa se:  $\mathcal{P}\Psi(\vec{x}) = -\Psi(\vec{x})$ . Con  $\Gamma$  si indica la FWHM(=Full Width Half Maximum) ovvero la larghezza a metà altezza del picco energetico relativo allo stato. In riferimento alla Tabella 1.1 si nota come lo stato  $0^+$  abbia associata una  $\Gamma$  dell'ordine degli  $eV$ , gli stati  $2^+, 4^+$  abbiano associata una  $\Gamma$  dell'ordine dei  $MeV$  ed infine i restanti stati ne abbiano una dell'ordine delle decine o delle centinaia di  $eV$ , sinonimo del fatto che le loro origini fisiche siano differenti.

Tabella 1.1: Caratteristiche primi livelli energetici.

E(MeV $\pm keV$ )	$J^\pi, T$	$\Gamma(keV)$	Decadimento
0	$0^+, 0$	$6.8 \pm 1.7$ eV	$\alpha$
$3.04 \pm 30$	$2^+, 0$	$1500 \pm 20$	$\alpha$
$11.4 \pm 300$	$4^+, 0$	3500	$\alpha$
$16.626 \pm 3$	$2^+; 0+1$	$108.1 \pm 0.5$	$\alpha, \gamma$
$16.922 \pm 3$	$2^+; 1+0$	$74.0 \pm 0.4$	$\alpha, \gamma$
$17.640 \pm 1$	$1^+, 1$	$10.7 \pm 0.5$	$\gamma, p$
$18.150 \pm 4$	$1^+, 0$	$138 \pm 6$	$\gamma, p$

La colonna *Decadimenti* indica i possibili tipi di transizioni che avvengono quando il nucleo si trova in quel determinato stato energetico. Si nota come alcuni livelli energetici riportati possano decadere per via elettromagnetica, ad esempio si evidenziano:

- $2^+; (0+1) \mapsto 0^+$ , questa transizione è di tipo elettromagnetico, ed in particolare si passa da uno stato con momento angolare 2 ad uno stato con momento angolare 0. L'unica transizione possibile che rispetti la parità è quella E2. Le interazioni elettromagnetiche non conservano l'isospin, quindi il passaggio tra lo stato eccitato  $2^+$  (componente di tripletto) a quello  $0^+$  (ha solo componente di singoletto) è permesso.
- $2^+; (1+0) \mapsto 0^+$ , anche questa è una transizione di tipo E2.

- $2^+; (0 + 1) \mapsto 2^+; 0$ , è una transizione elettromagnetica di tipo M1.
- $1^+; 0 \mapsto 0^+; 0$ , è una transizione elettromagnetica di tipo M1.

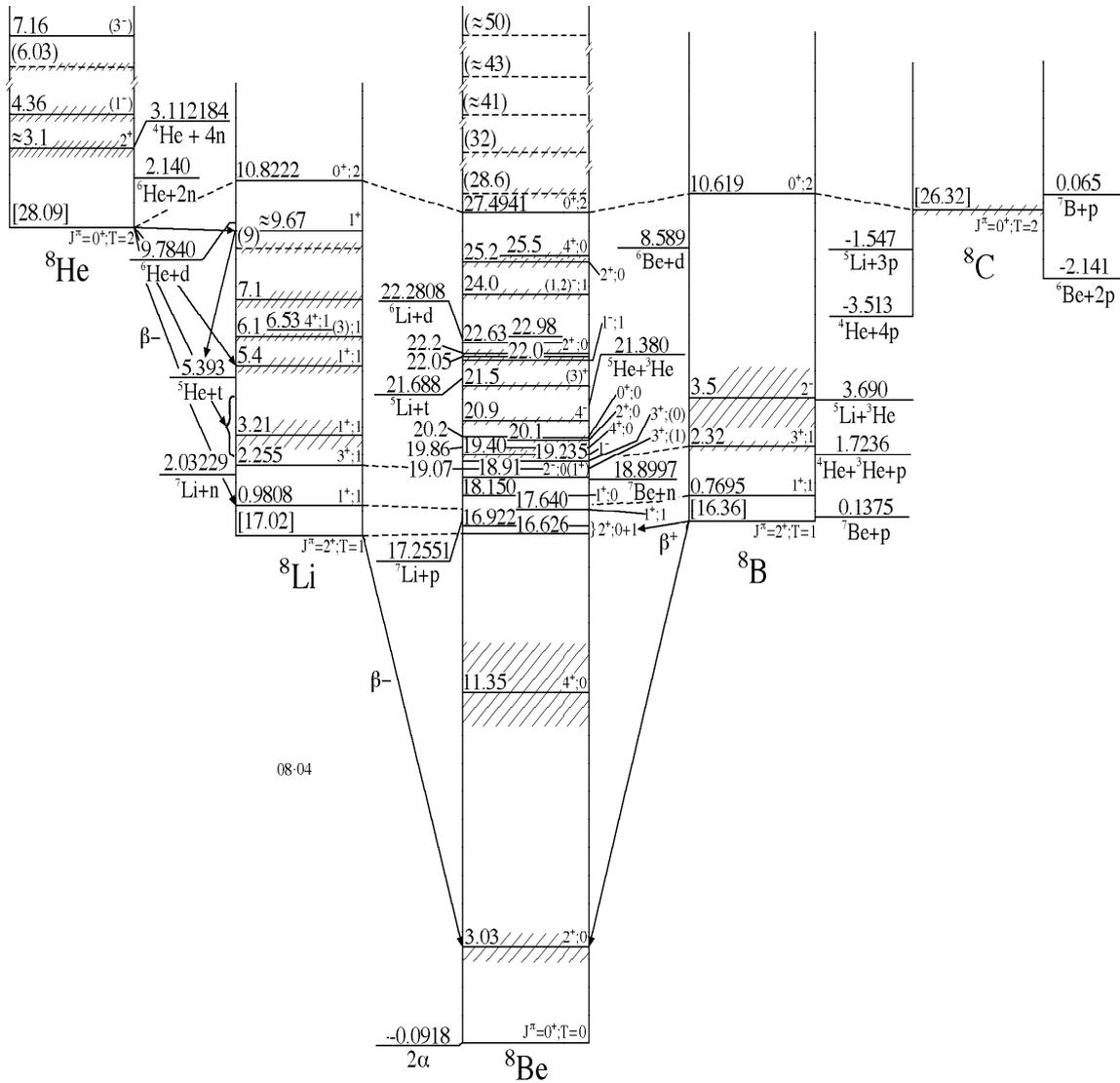


Figura 1.1: Spettro di Be-8 e isobari.

Lo schema riportato in Figura 1.1 illustra i possibili livelli energetici del nucleo di berillio-8 e di alcuni suoi isobari.

## 1.1 Livelli energetici $0^+$ , $2^+$ , $4^+$

Si può prima di tutto notare come il ground state del berillio possiede un'energia superiore rispetto alla soglia del decadimento in due particelle  $\alpha$ , sinonimo del fatto che tale nucleo sia fortemente instabile in particolare presenta un'emivita dell'ordine dei  $10^{-17}s$ . Si può osservare come i primi tre livelli della Figura 1.1 mostrino il caratteristico andamento di una

banda rotazionale. Un controllo basilare di questo fatto si esegue considerando il quoziente tra le differenze  $(E_4 - E_0)$  e  $(E_2 - E_0)$ , trovando un valore che si attesta attorno a 3.3. Questo risultato è fortemente associato alle energie rotazionali previste teoricamente; a tal proposito si confrontano i quozienti tra le autoenergie di un'Hamiltoniana associata ad un moto rotazionale, di un rotatore rigido con momento di inerzia  $\Theta$ , e gli autovalori di una associata ad un oscillatore armonico monodimensionale.

- $E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2\Theta}$ .
- $E_{\text{vib}} = \hbar\omega_0(\frac{1}{2} + n)$ .

Se si calcola il quoziente precedentemente menzionato, considerando che  $E_0 = 0$ , si ottiene :  $\frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} = 3.33$ .

Se invece si esegue lo stesso calcolo usando le energie vibrazionali con  $n=2$  e  $n=4$  si ottiene:  $\frac{E_4 - E_0}{E_2 - E_0} = 2$ . Il moto rotazionale che genera tali livelli è da attribuire ad un'eccitazione collettiva nucleare interpretabile nell'ambito di un modello a cluster dove il nucleo è immaginato come un sistema costituito da due particelle  $\alpha$ .

## 1.2 Livelli energetici superiori al $4^+$

In riferimento alla Figura 1.1 si osserva come la densità dei livelli cresca rapidamente al crescere dell'energia. I termini che si trovano a partire da  $16.626\text{MeV}$  non possono essere tutti associati a modelli a cluster, ma vengono inquadrati meglio in un contesto di modello a shell.

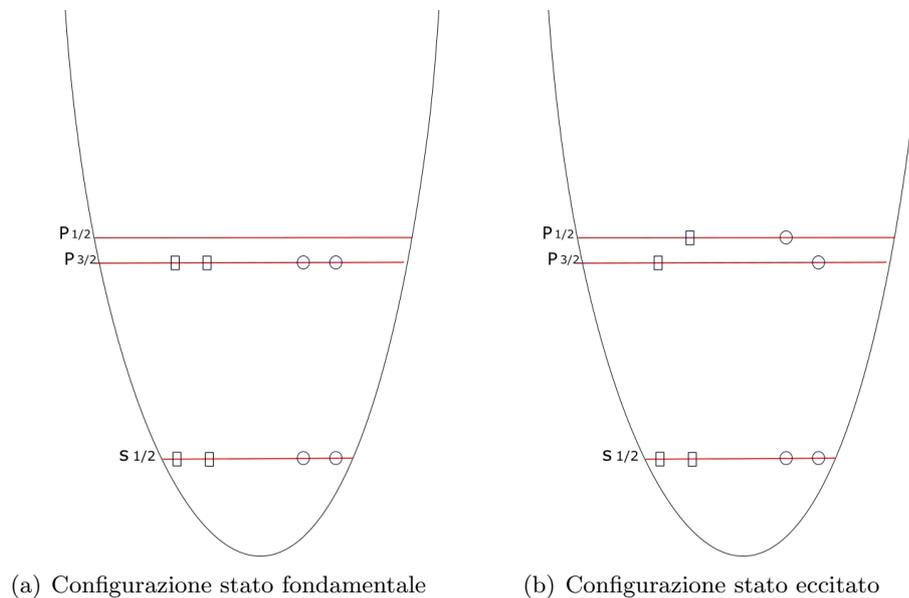


Figura 1.2: I grafici presentano i livelli energetici ricavati da un'Hamiltoniana di oscillatore armonico con l'aggiunta di un termine che tiene conto dell'interazione spin-orbita. Con i quadrati si indicano i protoni, mentre con i cerchi i neutroni. La figura (a) presenta la disposizione dello stato fondamentale del nucleo, mentre la figura (b) schematizza la disposizione eccitata.

In questo tipo di modellizzazione i nucleoni si dispongono in livelli energetici in analogia con quanto succede agli elettroni nel corrispondente modello atomico. Per ricavare i livelli energetici associati ad una configurazione nucleare, si devono accoppiare tra di loro i momenti angolari dei vari nucleoni. Se si considera un campo medio di tipo armonico i nucleoni del  $Be - 8$  nello stato fondamentale si dispongono nella configurazione  $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^2$ , come schematizzato nella Figura 1.2 (a). Una delle possibili configurazioni eccitate è ottenuta portando un protone e un neutrone dal livello  $p_{3/2}$  al livello  $p_{1/2}$  in modo che la disposizione dei nucleoni sia schematizzabile con la Figura 1.2 (b).

Si prende quindi in considerazione la disposizione presentata in Figura 1.2 (b), e si esegue il calcolo dei possibili livelli energetici risultanti dall'accoppiamento dei momenti angolari.

$$[(\pi p_{3/2}) \otimes (\nu p_{3/2})] \otimes [(\pi p_{1/2}) \otimes (\nu p_{1/2})] \quad (1.1)$$

dove con  $\pi$  e con  $\nu$  si indicano rispettivamente il protone e il neutrone. La somma dei momenti angolari si esegue con la regola data da:  $J_1 + J_2 \geq J_{tot} \geq |J_1 - J_2|$ . La somma appena esposta va applicata contemporaneamente al prodotto tensoriale di sinistra definito come  $\mathcal{I} \equiv (\pi p_{3/2}) \otimes (\nu p_{3/2})$  e a quello di destra definito da  $\mathcal{T} \equiv (\pi p_{1/2}) \otimes (\nu p_{1/2})$  dell'equazione (1.1), e successivamente si esegue la somma totale.

- $\mathcal{I} \equiv (\pi p_{3/2}) \otimes (\nu p_{3/2}) \mapsto 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$
- $\mathcal{T} \equiv (\pi p_{1/2}) \otimes (\nu p_{1/2}) \mapsto 0^+, 1^+$

Il risultato di questa operazione è raccolto nella seguente tabella

Tabella 1.2

$\mathcal{I}$	$\mathcal{T}$	$\mathcal{I} \otimes \mathcal{T}$
$0^+$	$0^+$	$0^+$
$1^+$	$0^+$	$1^+$
$2^+$	$0^+$	$2^+$
$3^+$	$0^+$	$3^+$
$1^+$	$1^+$	$2^+, 1^+, 0^+$
$2^+$	$1^+$	$3^+, 2^+, 1^+$
$3^+$	$1^+$	$4^+, 3^+, 2^+$

In questo modo si è data una prima spiegazione del gran numero di stati che compaiono ad un'energia superiore a  $16.626 MeV$ .

Particolare attenzione va posta sui due stati indicati con la notazione  $2^+; (0+1)$ , dove i numeri quantici successivi al punto e virgola indicano l'isospin del sistema. Più nello specifico lo 0 indica la presenza di un singoletto di isospin, mentre il valore 1 la presenza di un tripletto. La particolarità di questi livelli energetici è che presentano sia lo stato di tripletto che quello di singoletto, nel fenomeno del mescolamento di isospin; in particolare nello stato ad energia più bassa è predominante la componente di singoletto, mentre in quello più energetico prevale la componente di tripletto [4].

## Capitolo 2

# Stati a cluster

In questo capitolo si prosegue la trattazione, svolta preliminarmente alla sottosezione 1.1 del capitolo precedente, dei primi tre livelli energetici in riferimento alla Figura 1.1. Si era osservato come questi stati siano associabili ad un moto rotazionale nucleare, nello specifico per il berillio-8 si immagina che la banda sia prodotta dalla rotazione rigida delle due particelle  $\alpha$  attorno al centro di massa. A fianco a questa interpretazione vi è anche una visione basata su un potenziale armonico, che sarà analizzata nel sottocapitolo 2.1. L'esistenza di nuclei che evidenziano sottostrutture interne, come possono essere le particelle alfa, è intuibile se si osserva la variazione dell'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa  $A$ .

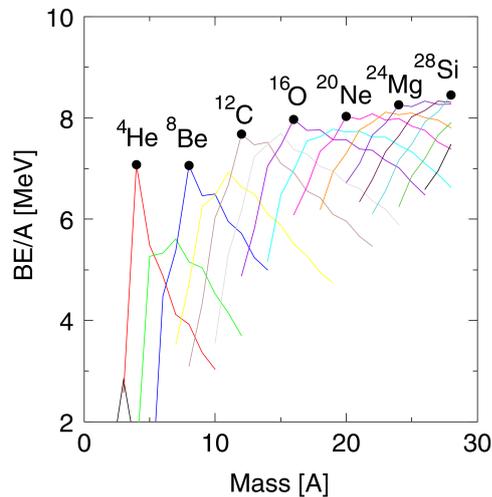


Figura 2.1: La figura esibisce come varia l'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa fino al  ${}^{28}\text{Si}$  [5].

In Figura 2.1 si evidenzia come per nuclei con numeri di massa come 4, 8, . . . l'energia di legame per nucleone aumenti. Questo è attribuibile al fatto che nel nucleo si formino stabilmente particelle  $\alpha$ . Il motivo per cui i nucleoni si raggruppano proprio in questo tipo di strutture è associabile all'alta energia di legame che possiedono e quindi alla loro intrinseca stabilità.

Per una breve spiegazione sugli stati a cluster ci si rifà alla referenza [6]. Il modello a cluster si basa essenzialmente sull'equilibrio che si instaura tra due forze a livello nucleare, ovvero il principio di esclusione di Pauli e le caratteristiche delle forze internucleari. Queste ultime sono fortemente attrattive se la distanza tra due nucleoni supera un determinato valore, mentre divengono fortemente repulsive al di sotto. Il principio di esclusione influenza fortemente il moto dei nucleoni di bassa energia, infatti essi non possono essere scatterati in livelli energetici già occupati. Al fine di raggiungere la configurazione di minima energia i nucleoni devono trovare il giusto equilibrio in termini di distanze reciproche, che rispetti la loro natura fermionica e al contempo segua quella delle forze nucleari. Dalla compensazione tra tutti questi effetti resta una piccola interazione che comunque permette di raggiungere una situazione energeticamente favorevole. Per capire questo tipo di interazione prendiamo come esempio quattro nucleoni in un nucleo. Si consideri inibito il principio di esclusione ed inoltre si ipotizzi che l'interazione tra i nucleoni presenti nel nucleo e i quattro presi in considerazione abbia semplicemente l'effetto di confinare questi ultimi nel volume nucleare. In quest'ottica i nucleoni sono praticamente liberi di muoversi nel volume a disposizione e per la maggior parte del tempo essi rimangono in regioni dove la forza attrattiva è trascurabile. Se ora si introduce il principio di Pauli e una correlazione reciproca tra le quattro particelle, allora la probabilità di trovarle vicine aumenta. Se esiste una probabilità significativa di trovare quattro nucleoni correlati, correttamente Pauli-accoppiati, chiamiamo questo stato:  $\alpha$  - cluster [6].

L'esigenza di una descrizione alternativa al modello a shell nasce appunto dall'osservazione di alcuni livelli energetici non interpretabili in questo tipo di contesto. Uno degli esempi più importanti è lo stato  $0^+$  a  $7.7 \text{ MeV}$  del  $^{12}\text{C}$ , interpretato da Morinaga in termini di una catena lineare di particelle  $\alpha$  [7]. Più recentemente il  $^{12}\text{C}$  è stato reinterpretato in termini di una molecola nucleare composta da tre particelle alfa situate ai vertici di un triangolo equilatero [8]. Ikeda e Horiuchi al fine di spiegare lo stato  $0^+$  a  $6.06 \text{ MeV}$  del  $^{16}\text{O}$ , introdussero il concetto di molecola nucleare. Immaginarono questo nucleo formato da  $^{12}\text{C}$  e una particella  $\alpha$  legata a tale nucleo; gli stati  $J^\pi = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$  si interpretano quindi come livelli rotazionali di questo sistema.

Si nota come, in tutti questi nuclei, la struttura a cluster divenga sempre più evidente all'avvicinarsi della soglia del decadimento alfa. La particolarità del berillio-8 è che lo stato fondamentale cade in vicinanza della soglia, in particolare si trova a  $+0.0918 \text{ MeV}$  rispetto all'energia minima per la disgregazione nucleare. L'apparizione degli stati a cluster e delle strutture molecolari in prossimità delle soglie di decadimento è imputata al fatto che in tali contesti l'interazione tra le varie sottostrutture è debole. Se l'interazione fosse troppo forte, allora l'overlap delle funzioni d'onda diverrebbe importante e in conseguenza di ciò le sottostrutture si mescolerebbero al punto tale da risultare indistinguibili e formare un sistema ad un solo centro [7].

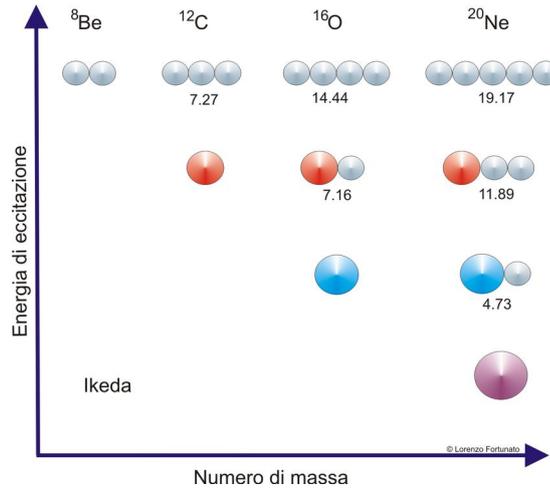


Figura 2.2: Diagrammi di soglia di Ikeda per i primi quattro nuclei  $\alpha$ -coniugati: berillio-8, carbonio-12, ossigeno-16 e neon-20. I numeri indicati in corrispondenza dei disegni rappresentano le energie necessarie (in  $MeV$ ) per decomporre un certo nucleo nei sottinsiemi di clusters schematizzati con palline colorate: in grigio le particelle  $\alpha$ , in rosso il carbonio-12, in blu l'ossigeno-16 e in viola il neon-20. Ikeda suggerì nel 1968 che queste strutture si possano formare in vicinanza della soglia per emissione dei clusters, piuttosto che nello stato fondamentale [9].

Per la seguente trattazione si è preso spunto dalla referenza [6].

In linea di principio è possibile ricavare tutte le proprietà di un nucleo composto da  $A$  nucleoni partendo dall'equazione di *Schrödinger* per un problema ad  $A - \text{corpi}$ , considerando il potenziale più adatto.

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A V_{ij} \right] \psi_n(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) = E_n \psi_n(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) \quad (2.1)$$

dove con  $\tilde{r}_i = (\vec{r}_i, s_i, t_i)$  si indica l'insieme delle coordinate relative alla  $i$ -esima particella comprendendo anche spin e isospin. In questo capitolo si ometterà il simbolo di vettore sulle coordinate spaziali, ovvero si scriverà  $\vec{r}_i \equiv r_i$ .

Lo scopo dovrebbe essere quello di trovare le autoenergie  $E_n$ , le quali caratterizzano i vari livelli energetici che compongono lo spettro dell'Hamiltoniana.

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A \nabla_i^2 + \sum_{i=1}^A \sum_{j>i}^A V_{ij}. \quad (2.2)$$

Per il calcolo degli autovalori di (2.2) si può cercare di descrivere il sistema mediante funzioni d'onda  $\psi$  contestualizzate alla tipologia del problema, in modo da rendere più semplice il calcolo  $\langle \psi | H | \psi \rangle$ . Nel caso in esame cerchiamo un set di funzioni d'onda *collettive*, ovvero le cui coordinate descrivano il moto di un gruppo di nucleoni, e non di un singolo. Consideriamo due differenti approcci che permettano di identificare la natura dei livelli  $0^+$ ,  $2^+$ ,  $4^+$  presenti rispettivamente ad energie pari a 0, 3.03, 11.35  $MeV$  nel nucleo di berillio-8.

## 2.1 Modello a cluster con potenziale armonico

Il primo metodo utilizzato si realizza inserendo un potenziale di tipo armonico nell'equazione (2.1) ottenendo

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^A (\vec{\nabla}_i^2 - a^2 r_i^2) \psi_n(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A) = E_n \psi_n(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_A). \quad (2.3)$$

Dove  $a = \frac{M\omega}{\hbar}$  indica il parametro che caratterizza l'ampiezza di oscillazione.

L'equazione (2.3) descrive un sistema di  $A$  nucleoni soggetti ad un potenziale armonico, quindi le autofunzioni  $\psi_n$  sono date dalla produttoria di autofunzioni di  $A$  oscillatori armonici e per via di quest'ultimo punto tale descrizione evidenzia la sua natura di particella singola.

Al fine di descrivere moti collettivi si riscrive l'Hamiltoniana presente in equazione (2.3) cercando di raggruppare i nucleoni in strutture ordinate. In altre parole si costruiscono  $l$  raggruppamenti di nucleoni; in ciascuno dei quali sono contenute  $n_i$  particelle. Alla fine comunque deve risultare che  $\sum_{i=1}^l n_i = A$ .

In modo naturale si introduce la trasformazione canonica che porta nella coordinata del centro di massa  $R_i$  dell' $i$ -esimo raggruppamento, nella coordinata relativa  $r_s - R_i$  e nei momenti coniugati associati. Nel caso del berillio-8 il problema diviene ad otto corpi, ovvero nell'equazione (2.3)  $A = 8$ . Se si esegue il cambio di coordinate appena indicato, l'Hamiltoniana diviene

$$H = H_1 + H_2 + \frac{1}{8M} [P_1^2 + P_2^2 + a^2 \hbar^2 4(R_1^2 + R_2^2)] \quad (2.4)$$

dove si è indicato con  $P_1 = -i\hbar \vec{\nabla}_{R_1}$ ,  $P_2 = -i\hbar \vec{\nabla}_{R_2}$  ed  $H_{1,2}$  sono le Hamiltoniane che hanno come variabili le coordinate interne rispettivamente dei cluster 1 e 2 [6]. Per esempio si ha che

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2M} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[ \left( \frac{1}{4} - \delta_{ik} \right) \vec{\nabla}_{r_i} \cdot \vec{\nabla}_{r_k} + a^2 (\delta_{ik} + 1) r_i \cdot r_k \right]. \quad (2.5)$$

L'Hamiltoniana (2.5), ha una struttura armonica che diviene evidente se si eseguono alcuni cambi di variabile all'interno della struttura del singolo cluster. Quindi si ha la (2.4) scritta come somma di Hamiltoniane armoniche. L'autofunzione è il prodotto delle singole autofunzioni di oscillatore armonico e si ottiene

$$\psi_n(R_1, R_2, r_1, \dots, s_1, \dots, t_8) = \phi_i(r_1, \dots, r_4) \phi_j(r_5, \dots, r_8) \chi_k(R_1) \chi_l(R_2) \xi_m(s_1, \dots, t_8) \quad (2.6)$$

dove con

- $\phi_i(r_1, \dots, r_4)$  si indica la funzione d'onda intrinseca del primo cluster con numero quantico  $i$ .
- $\phi_j(r_5, \dots, r_8)$  si indica la funzione d'onda intrinseca del secondo cluster con numero quantico  $j$ .
- $\chi_k(R_i)$  si indica la funzione d'onda relativa al moto del centro di massa del cluster  $i$ -esimo con numero quantico  $k$ .
- $\xi_m(s_1, \dots, t_8)$  si indica la funzione d'onda associata alla parte di spin ed isospin.

A questo punto si effettua l'ultimo cambio di variabili, dove le coordinate sono mappate in

$$R_{CM} = \frac{(R_1 + R_2)}{2}, R_{rel} = R_1 - R_2. \quad (2.7)$$

Le autofunzioni che si trovano dopo il cambio sono nella forma [6]

$$\psi_n(R_{CM}, R, r_1, \dots, s_1, \dots, t_8) = \phi_i(r_1, \dots, r_4) \phi_j(r_5, \dots, r_8) \chi_k(R) \xi_m(s_1, \dots, t_8) Z_m(R_{CM}). \quad (2.8)$$

A differenza della funzione d'onda indicata in formula (2.6), si nota come in (2.8) sia presente una parte che identifica il moto del centro di massa  $Z_m(R_{CM})$ , che poi verrà trascurata, e una parte di moto relativo  $\chi_k(R)$  associata al movimento tra i due cluster. Si considera inoltre che  $\phi_i(r_1, \dots, r_4)$  e  $\phi_j(r_5, \dots, r_8)$  siano prese nello stato fondamentale, ovvero si prendono i numeri quantici  $i, j = 0$  come indicato alla referenza [6].

Poichè si sono eseguiti semplicemente cambi di coordinate canonici, le Hamiltoniane iniziali e finali, hanno lo stesso significato fisico e quindi devono possedere gli stessi autovalori. Si può allora scrivere ogni funzione d'onda di cluster come una sovrapposizione di autofunzioni di oscillatore armonico di particella singola

$$\mathcal{A}\psi_n(R_{CM}, R, r_1, \dots, t_8) = \sum_m \mathcal{A}\psi_m(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_8) \quad (2.9)$$

dove  $\mathcal{A}$  è l'operatore di antisimmetrizzazione della funzione d'onda.

Nella visione a particella singola il berillio-8 si trova nella configurazione descritta da 2 neutroni e 2 protoni nella *shell*  $s_{1/2}$ , e da due neutroni e due protoni nella *shell*  $p_{3/2}$  come illustrato in Figura 2(a). Il numero di fononi che si possono associare a tale configurazione risulta essere dato dalla somma dei fononi attribuiti ad ogni nucleone presente nella *shell*  $p_{3/2}$ ; ovvero  $\mathcal{N} = 4$ . Lo stesso numero di fononi deve essere presente nella visione a cluster per via di (2.9). La funzione d'onda in quest'ottica è data da

$$\psi_n(R, r_1, \dots, s_1, \dots, t_8) = \phi_0(r_1, \dots, r_4) \phi_0(r_5, \dots, r_8) \chi_k(R) \xi_m(s_1, \dots, t_8) \quad (2.10)$$

dove si sono prese le particelle  $\alpha$  nello stato fondamentale e si è trascurato il moto del centro di massa. Per via di quanto appena detto il numero di quanti di vibrazione deve essere associato forzatamente al moto relativo [6]. Dal numero di fononi inoltre si può ricavare il termine spettroscopico associato al moto relativo usando la relazione:  $\mathcal{N} = 2n + l$ .

Tabella 2.1: Relazione numero di fononi

$n$	$l$	Termine
2	0	2s
1	2	1d
0	4	0g

Una possibile configurazione eccitata si ottiene portando rispettivamente un neutrone ed un protone da  $p_{3/2} \mapsto p_{1/2}$  come illustrato in Figura 2(b). Il numero di fononi è ancora una volta  $\mathcal{N} = 4$  poichè il numero quantico principale associato ad ogni nucleone non cambia. Le

configurazioni nelle quali solamente un nucleone viene promosso nel livello  $p_{1/2}$  sono impedito per ragioni di simmetria.

Per il calcolo delle autoenergie si prende in considerazione la configurazione dello stato fondamentale con quattro quanti di vibrazione, questo a livello formale si ottiene prendendo semplicemente la (2.10) e inserendo  $\chi_k(R) = \chi_{4\hbar\omega, l, m_l}(R)$ . Una possibile scrittura della funzione d'onda risultante, includendo la parte di spin-isospin all'interno di  $\phi_0(\alpha_i)$ , è data da

$$\psi_n(Be^8) = \mathcal{A}[\phi_0(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_4)\phi_0(\tilde{r}_5, \dots, \tilde{r}_8)\chi_{4\hbar\omega, l, m_l}(R)] \equiv \psi_{h.o.}(Be^8) \quad (2.11)$$

dove formalmente possiamo definire

$$\phi_0(\alpha) = \prod_{i=1}^4 \phi_{space}^i(r_i)\phi_{spin}^i(s_i)\phi_{isospin}^i(t_i). \quad (2.12)$$

Nella visione di oscillatore armonico la  $\phi_{space}^i(r_i)$  corrisponde ad uno stato  $1s$  quindi proporzionale a  $e^{-\frac{\alpha}{2}r_i^2}$ . Mentre in (2.11) si ha che  $\chi_{4\hbar\omega, l, m_l}(R) = \mathcal{H}_4(R)e^{-\frac{R^2}{2}}Y_{l, m_l}(\theta_R, \varphi_R)$ , dove  $\mathcal{H}_n(R)$  indicano i polinomi di Hermite.

Mediante la funzione (2.11), si calcolano gli elementi di matrice  $\langle \psi_n(Be^8) | H | \psi_n(Be^8) \rangle$  usando l'Hamiltoniana (2.2), dove si è preso un potenziale adatto al problema. Successivamente si ottengono  $(E_4 - E_0) = 12.5 MeV$  e  $(E_2 - E_0) = 3.75 MeV$ , che sono in buon accordo con i dati ricavati sperimentalmente. In tutto ciò non si è considerata l'interazione spin-orbita, ma per i calcoli relativi agli stati di energia più bassa questa approssimazione non cambia sensibilmente i risultati.

## 2.2 Modello a cluster rotore rigido

Tutta la trattazione precedente si è ottenuta considerando un modello a cluster armonico. Si possono ottenere gli stessi risultati se si considera il sistema come un *manubrio* e si pensano gli stati di interesse come i primi tre livelli rotazionali di questo sistema, in analogia con quanto avviene a livello atomico.

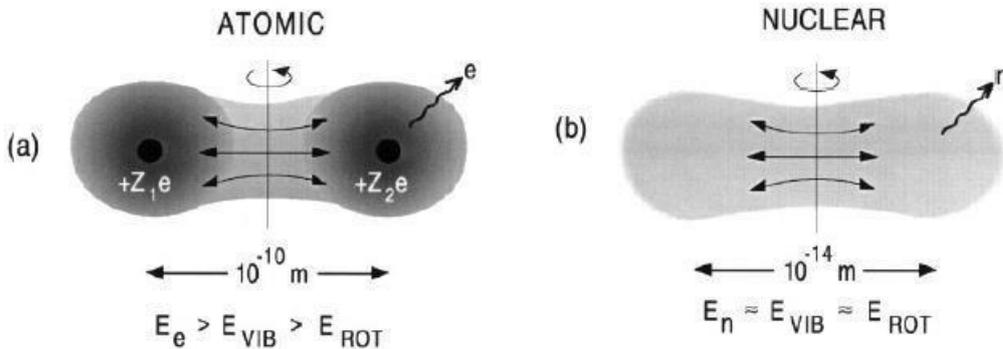


Figura 2.3: Comportamento cluster rotazionale nucleare(b) e atomico(a) [10].

Con il termine stati rotazionali si intendono, solitamente, una serie di livelli le cui energie possono essere fornite dalla formula  $E_J = A + BJ(J + 1)$  dove  $J$  è il momento angolare del sistema e  $A, B$  sono costanti [6]. Il più semplice sistema classico che prende il nome di rotatore rigido è costituito da un particella puntiforme che ruota in un piano ad una distanza  $\vec{R}$  attorno ad un punto fisso. Nell'estensione quantistica la funzione d'onda che descriverà il sistema avrà una parte angolare ed una radiale, in particolare quest'ultima dipenderà solamente dalla  $|\vec{R}|$ . Se ora si prende un sistema costituito da due particelle ad una distanza  $R$  l'una dall'altra che ruotano attorno ad un certo punto e inoltre si suppone che queste siano dotate di struttura interna, allora la funzione d'onda che descrive il moto di rotazione di questo manubrio sarà formata da più fattori. Ve ne sarà uno associato al moto rotazionale, e due associati alla struttura interna delle singole particelle.

In questo approccio, come indicato nel testo [6], la funzione d'onda del sistema ha la forma

$$\psi_{\text{rot}}(Be^8) = [\mathcal{A}\phi_0(\alpha_1)][\mathcal{A}\phi_0(\alpha_2)]F(R)Y_{lm}(\theta_R, \varphi_R) \quad (2.13)$$

dove si è indicato con

- $\phi_0(\alpha_1)$  e  $\phi_0(\alpha_2)$  le funzioni d'onda intrinseche delle particelle  $\alpha$ .
- $F(R)$  la funzione d'onda di moto relativo, dove la coordinata  $R = R_1 - R_2$  è la coordinata relativa tra i centri di massa delle due particelle alfa.
- $Y_{lm}(\theta_R, \varphi_R)$  è l'armonica sferica.

Si prendono le  $\phi_0(\alpha_1)$  e  $\phi_0(\alpha_2)$  come funzioni d'onda di oscillatore, mentre si prende

$$F(R) = R^4 e^{-aR^2} \quad (2.14)$$

tralasciando la normalizzazione. Si nota come in (2.11) e in (2.13) le proprietà di antisimmetria siano decisamente diverse, infatti nella prima l'operatore agisce a livello delle singole particelle  $\alpha$ , e non tra di loro, mentre nella seconda l'operatore agisce su tutta la funzione d'onda. Nonostante questa differenza la forma di (2.13) è fortemente legata alla rappresentazione trovata utilizzando il modello a oscillatore armonico. Il collegamento è reso evidente se in (2.11) si prende

$$\chi_{A\hbar\omega, l, m_l}(R) = (R^4 + bR^2 + c)Y_{lm}(\theta_R, \varphi_R)e^{-aR^2}. \quad (2.15)$$

Allora il termine  $bR^2$  e la costante vengono rimossi da  $\mathcal{A}$  [6]. Questo implica che se la funzione d'onda ricavata mediante il modello a rotatore è totalmente antisimmetrica allora essa coincide con quella ottenuta nel modello ad oscillatore.

Si cerca ora di confrontare i risultati menzionati nel sottocapitolo 2.1. Se si eseguono i calcoli  $\langle \psi_{\text{rot}}(Be^8) | H | \psi_{\text{rot}}(Be^8) \rangle$ , si ottengono le energie  $E_J = E_{\text{int}} + \frac{2\hbar^2}{AM} \frac{J(J+1)}{\langle R^2 \rangle}$  con  $A=8$  e dove  $E_{\text{int}}$  è indipendente da  $J$ . Risulta evidente che le autoenergie seguano lo spettro rotazionale menzionato ad inizio capitolo, inoltre si ha un buon accordo tra i valori previsti teoricamente e i dati ottenuti sperimentalmente.

Le autoenergie appena menzionate non spiegano però come sia possibile ottenere solamente  $J$  pari nello spettro ed inoltre potenzialmente è consentito ogni valore naturale di  $J$ , mentre in realtà si riscontra che il suo valore massimo sia  $J=4$ , corrispondente allo stato  $4^+$ . Si può mostrare come per  $J > 4$  la parte cinetica dell'Hamiltoniana in equazione (2.2) perde la dipendenza quadratica dal momento angolare e ne assume una lineare. Questo implica che la

caratteristica struttura dello spettro rotazionale viene rotta, e diviene impossibile ritrovare lo stato  $6^+$  [6].

In questo contesto si può cercare di trovare un valore per il momento di inerzia  $\Theta$  introdotto nel sottocapitolo 1.1. A tale scopo si sono fittate le energie in  $MeV$  dei primi tre livelli della Figura 1.1 contro  $J(J+1)$  e dal coefficiente angolare del fit lineare si può ricavare il momento di inerzia della struttura a manubrio.

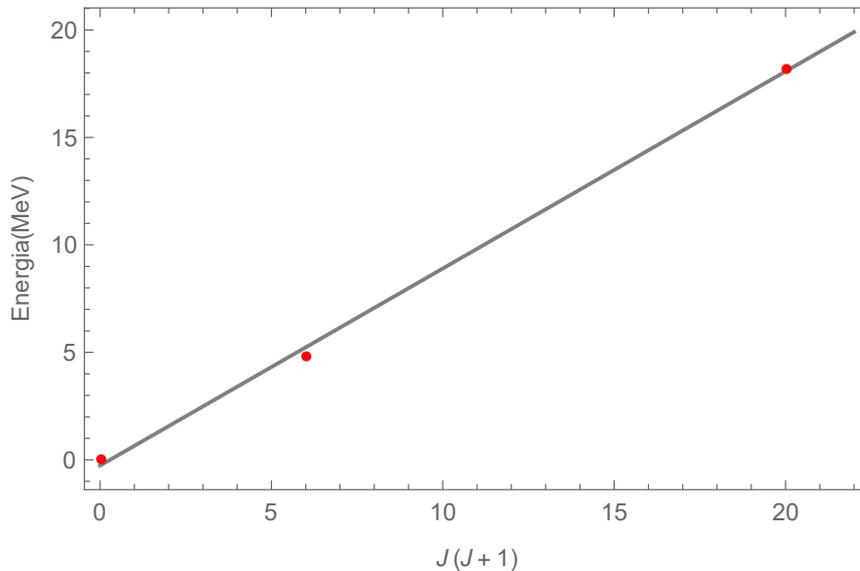


Figura 2.4: Retta interpolante lineare.

Si ottiene un momento di inerzia  $\Theta = 19.469 GeV(fm)^2$ . Sempre nell'ottica di considerare il sistema come un manubrio, dal dato precedente si può calcolare la distanza tra le due particelle  $\alpha$ . Per far ciò per prima cosa si valuta, mediante il teorema di *Huygens – Steiner*, il momento di inerzia del sistema classico e successivamente lo si confronta con il valore ricavato dal fit. Si ottiene quindi che  $\Theta = \frac{4}{5}m_\alpha r_\alpha^2 + \frac{m_\alpha}{2}d^2$ , dove  $m_\alpha$  è la massa della particella alfa espressa in  $GeV$ ,  $r_\alpha = 1.6 fm$  è il raggio della particella e  $d$  risulta essere la distanza tra i due centri. Se si inverte la formula si trova che  $d = 2.5199 fm$ . Questo valore rappresenta una grandezza classica che in meccanica quantistica va reinterpretata calcolando il raggio quadratico medio. Dato che il sistema non è legato, a rigore il raggio non è definito. Possiamo però compararlo con il valore sperimentale degli isotopi stabili trovato attraverso esperimenti di scattering elettronico. Ad esempio il  $Be^9$  ha un raggio di carica pari a  $2.518 fm$ , un valore leggermente più piccolo come ci aspettiamo dal fatto che il neutrone aggiuntivo ha un effetto legante.

## Capitolo 3

# Stati di particella singola

Nella sottosezione 1.2 si era osservato come gli stati con energia superiore a  $16 \text{ MeV}$  siano descritti con maggior chiarezza da un modello a shell e si era svolto un semplice calcolo a dimostrazione del fatto che questo tipo di rappresentazione possa in qualche modo spiegare la grande quantità di livelli presenti.

Il modello a shell, introdotto alla fine del 1920 per spiegare la presenza dei numeri magici, si basa sul concetto che le interazioni tra gli elementi che compongono il sistema in esame siano ben approssimate da un campo totale medio. Più formalmente l'Hamiltoniana di un sistema ad  $A - \text{corpi}$ , riportata in equazione (2.2), contiene un potenziale di interazione reciproca, in questo caso a due corpi,  $V_{ij} \equiv V(r_i, r_j)$ . La richiesta è che tale funzione sia esprimibile in termini di un potenziale medio centrale  $U(r_i)$ , ovvero che la particella identificata dalla coordinata  $r_i$  sia soggetta al potenziale  $U$  derivante dalla somma dei contributi di tutte le altre [11]. Si hanno quindi due Hamiltoniane

- $H_1 = \sum_i^A [T(r_i) + U(r_i)] + H_{res} \equiv H_{shell} + H_{res}$ .
- $H_2 = \sum_i^A T(r_i) + \sum_{ij}^A V_{ij}$ .

Il termine  $H_{res}$  chiamato Hamiltoniana *residua* indica la parte del potenziale  $V$  che non ha simmetria centrale. La sua struttura generale è della forma

$$H_{res} = \frac{1}{2} \sum_{ij} V(r_i, r_j) - \sum_i U(r_i) \quad (3.1)$$

e se si inserisce  $H_{res}$  in  $H_1$  si ottiene  $H_2$ . La richiesta del modello a *shell* è che  $H_{res}$  dia un contributo trascurabile rispetto a  $H_{shell}$  [11]. In definitiva l'Hamiltoniana di un modello a shell concretizzata al caso del berillio-8 diviene

$$H = \sum_i^8 [T(r_i) + U(r_i)]. \quad (3.2)$$

### 3.1 Modello a shell con potenziale armonico deformato

Come nelle sottosezioni 2.1 e 2.2 si è interessati a valutare autovalori e autovettori dell'operatore in equazione (3.2), ma per riuscire ad eseguire il calcolo, è necessario conoscere la

forma analitica di  $U$ .

Un primo tentativo si effettua inserendo un potenziale di tipo armonico  $U(r) = \frac{1}{2}m\omega r^2$ , ma questo tipo di approccio fallisce per il nucleo di berillio-8. Una ragione si può ricercare nel fatto che la struttura nucleare è molto deformata e quindi lontana dalla sfericità come si nota dalla Figura 2.3(b), a questo livello si pone l'asse  $z$  lungo l'asse di deformazione. Per il motivo appena illustrato è poco ragionevole supporre che i nucleoni risentano di un potenziale isotropo; vi saranno delle direzioni nelle quali l'attrazione sarà più intensa rispetto ad altre nelle quali lo sarà meno. Conviene allora pensare che i nucleoni siano soggetti ad un potenziale armonico deformato. In altre parole si introducono due differenti pulsazioni, una viene associata all'oscillazione parallela all'asse di deformazione nucleare  $\omega_z$  mentre l'altra si riferisce alle oscillazioni perpendicolari a tale asse  $\omega_\perp$  [5]. Le energie sono allora date dalla somma di un oscillatore armonico unidimensionale lungo l'asse principale e uno bidimensionale lungo la direzione trasversa.

$$E = \hbar\omega_\perp n_\perp + \hbar\omega_z n_z + \frac{3}{2}\hbar\omega_0 \quad (3.3)$$

in cui le costanti sono state raccolte nel termine  $\frac{3}{2}\hbar\omega_0$ . Il numero quantico che etichetta le energie sarà ora diviso in  $n = (n_\perp, n_z)$  e il grado di deformazione dalla simmetria sferica è dato da  $\epsilon = \frac{\omega_\perp - \omega_z}{\omega_0}$ .

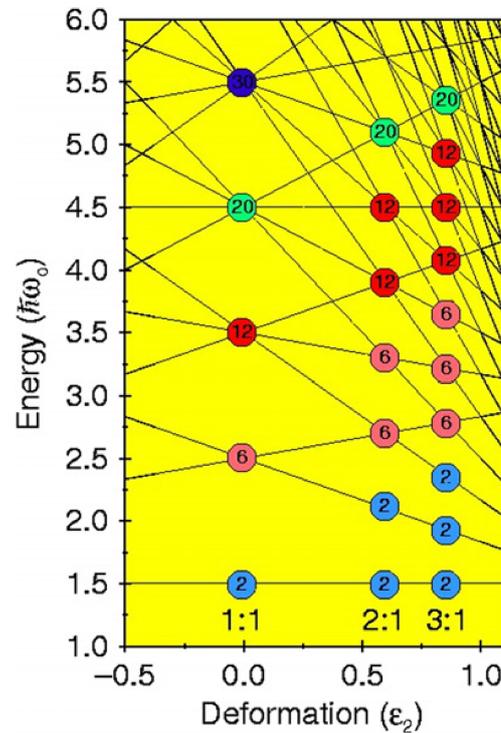


Figura 3.1: Schema delle energie di oscillatore armonico deformato in funzione del parametro  $\epsilon$ . I numeri all'interno dei cerchi indicano la degenerazione di quello specifico stato [5].

Nel caso del berillio-8 si ha un rapporto tra le pulsazioni di  $(\omega_{\perp} : \omega_z)=2:1$ . Questo risultato, associato al grado di deformazione, influenza fortemente il valore delle energie (3.3) come schematizzato dalla Figura 3.1.

A questo punto si vorrebbe capire quanto deformato sia il nucleo di berillio-8, in altri termini è necessario conoscere il parametro di deformazione  $\epsilon$  e in funzione del calcolo di quest'ultimo bisogna conoscere le varie pulsazioni. Come si suggerisce nelle referenza [5] queste si trovano da

$$\omega_x = \omega_0(\Sigma_x \Sigma_y \Sigma_z)^{1/3} / \Sigma_x \quad (3.4)$$

$$\omega_y = \omega_0(\Sigma_x \Sigma_y \Sigma_z)^{1/3} / \Sigma_y \quad (3.5)$$

$$\omega_z = \omega_0(\Sigma_x \Sigma_y \Sigma_z)^{1/3} / \Sigma_z \quad (3.6)$$

dove con  $\Sigma_x$  si indica la somma su  $(N_x + \frac{1}{2})$  per stati occupati e con  $N_x$  si indica il numero di nodi nella direzione  $x$ . Per esempio, se si hanno 4 nucleoni che occupano lo stato etichettato da  $[n_x, n_y, n_z] = [0, 0, 0]$ , tutti correttamente accoppiati in spin-isospin, allora si ottiene  $\Sigma_x = \Sigma_y = \Sigma_z = 2, 2, 2$ . Nel caso di interesse bisogna disporre 4 neutroni e 4 protoni, quindi si possono inserire due protoni e due neutroni in  $[0, 0, 0]$  e due protoni e due neutroni in  $[0, 0, 1]$ . Per schematizzare la disposizione ci si rifà alla notazione introdotta alla referenza [6] dove si indicano con  $(\uparrow)$  una configurazione con spin up, e con  $(\uparrow\uparrow)$  si indica una configurazione con isospin up. Allora per ogni terna di numeri quantici possono essere inseriti 4 nucleoni in modo da ottenere  $(\uparrow\uparrow)(\uparrow\downarrow)(\downarrow\uparrow)(\downarrow\downarrow)$ . Si ricava quindi  $\Sigma_x = \Sigma_y = 4$  e  $\Sigma_z = 8$ , questi se inseriti in (3.4),(3.5),(3.6) portano a  $\omega_x = \omega_y = 1.2599\omega_0$  e  $\omega_z = 0.6299\omega_0$  e in definitiva si ottiene  $\epsilon = 0.63$  che corrisponde ad un nucleo prolato e superdeformato [5].

Fino a questo punto si è tenuto conto solamente di un un potenziale medio di tipo armonico. Sono però presenti anche altri effetti che devono essere presi in considerazione se si vogliono calcolare autovalori e autovettori teorici di (3.2) per un successivo confronto con i dati sperimentali. Una possibile forma per l'Hamiltoniana  $H_1$  di un sistema di  $A - nucleoni$  può essere [7]

$$H = \sum_{i=1}^A \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}_i^2 + \mathcal{U}(r_i) + \xi(\vec{L}_i \cdot \vec{S}_i) \right] + \sum \mathcal{V}'_{ij} \quad (3.7)$$

dove si indica con  $\mathcal{U}(r_i)$  il potenziale nel quale è immerso il nucleone  $i - esimo$ , che ha la forma

$$\mathcal{U}(r_i) = -\mathcal{U}_0 + \frac{m\omega}{2} r_i^2 + \epsilon(l_i^2 - 6) . \quad (3.8)$$

Si indicano con

- $\sum \mathcal{V}'_{ij}$  l'interazione residua.
- $\xi(\vec{L}_i \cdot \vec{S}_i)$  l'interazione *spin - orbita*, dove  $\xi$  è un parametro per valutare la forza dell'interazione e nel caso del  ${}^8\text{Be}$  si ha  $\xi = 4.0$ .
- $\epsilon(l_i^2 - 6)$  che discende da un'interazione *orbita - orbita* e fornisce un parametro empirico aggiuntivo per accordarsi con i dati sperimentali.

In equazione (3.8) si è preso un potenziale di tipo armonico semplice ma la struttura rimane valida anche sostituendo  $\frac{1}{2}m\omega^2 r_i^2 \mapsto \frac{1}{2}m[\omega_{\perp}(x^2 + y^2) + \omega_z z^2]$  e quindi introducendo l'oscillatore armonico deformato. Mediante questa funzione si possono quindi calcolare i livelli energetici e sorprendentemente questi si trovano in buon accordo con i livelli osservati per i primi tre stati, mentre non rispettano l'andamento degli stati ad energia più elevata [7].

In ogni caso si nota come la bellezza del modello a shell, sia anche quella di contenere informazioni utili a risalire alla struttura a cluster. Se infatti si osserva la Figura 3.1 si nota come il numero di degenerazioni associate ad un livello si ripeta 1,2,3 volte a seconda del parametro di deformazione. Nello specifico i numeri 2, 6, 12, ... sono ripetuti 1 volta se  $\epsilon = 0.0$ , 2 volte se  $\epsilon \approx 0.5$ . Questa doppia degenerazione è riconducibile appunto alla struttura a cluster e risulta intuitivo affermare che al crescere di  $\epsilon$  quest'ultima divenga sempre più marcata[5].

Per evidenziare ulteriormente il collegamento tra modello a shell e a cluster si può valutare la distribuzione dei nucleoni presenti nel berillio-8 usando come autofunzioni quelle ricavabili da un modello a shell. Le otto particelle che compongono la struttura nucleare si dispongono nei livelli etichettati da  $[n_{\perp}, n_z] = [0, 0]$  e  $[0, 1]$  come descritto precedentemente. Mediante le corrispondenti funzioni d'onda, indicate da  $\varphi_{0,0}$  e  $\varphi_{0,1}$ , è possibile computare la distribuzione dei vari nucleoni attraverso  $|\varphi_{0,0}|^2 + |\varphi_{0,1}|^2$  [5].

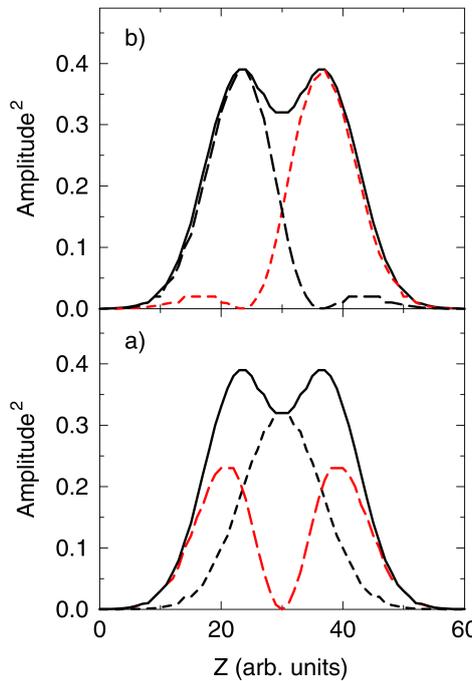


Figura 3.2: In figura (a) è mostrata la somma dei moduli quadri delle funzioni d'onda corrispondenti agli stati  $[n_{\perp}, n_z] = [0, 0]$  e  $[0, 1]$ . La figura (b) mostra la separazione nei due centri [5].

Si nota come in Figura 3.2 le autofunzioni abbiano i centroidi chiaramente separati, e si possano interpretare come le funzioni d'onda dei singoli cluster.

### 3.2 Interpretazione livelli ad energie superiori a 16 MeV

Mediante un modello a particella singola si possono interpretare correttamente gli stati  $2;(0+1)$  a  $16.626\text{MeV}$  e  $16.922\text{MeV}$ , sui quali si era posta l'attenzione nel sottocapitolo 1.2. A tali

energie infatti la struttura a  $\alpha$  - *cluster* si rompe e quello che resta trova la sua spiegazione in un contesto di modello a shell, nello specifico per la trattazione ci si rifà alla referenza [12].

La particolarità degli stati sopra menzionati è il fatto che presentano sia una componente con  $T=0$  sia una componente con  $T=1$ , quindi si può già immaginare che la loro interpretazione mescoli due differenti configurazioni di particella singola. In particolare si trova che nello stato a 16.626 MeV sia predominante la configurazione data da  ${}^7\text{Li} + p \equiv \chi_\alpha$ , mentre per lo stato a 16.922 MeV è predominante la configurazione data da  ${}^7\text{Be} + n \equiv \chi_\beta$ . Se lo stato avesse un numero quantico di isospin definito, allora le percentuali di mescolamento di  $\chi_\alpha$  e di  $\chi_\beta$  dovrebbero essere uguali. Nel caso in esame gli stati non hanno numero quantico di isospin determinato, ma appunto come indicato precedentemente è presente sia  $T=0$  che  $T=1$ . Questo implica che il rapporto tra le due configurazioni cambia. Più formalmente se si considerano

$$\chi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\alpha - \chi_\beta) \quad (3.9)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\alpha + \chi_\beta) . \quad (3.10)$$

Queste autofunzioni di isospin hanno autovalori rispettivamente di  $T=0$  e  $T=1$ . Mediate queste si possono scrivere gli stati precedentemente menzionati sovrapponendo  $\chi_0$  e  $\chi_1$ . Nello specifico

$$\chi_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_0 + \chi_1) \quad (3.11)$$

$$\chi_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_0 - \chi_1) . \quad (3.12)$$

Questi ultimi sono autostati massimamente mescolati in isospin. Se la descrizione è corretta e quindi lo stato a 16.626 MeV è descritto dalla configurazione  ${}^7\text{Li}+p$  massimamente mescolata in isospin, allora lo stato a 16.922 MeV dovrebbe essere descritto dalla configurazione  ${}^7\text{Be}+n$ . Questo è supportato da fatti sperimentali: infatti le reazioni  ${}^7\text{Li}(d,n)$  mostrano un picco rilevante a 16.6 MeV e uno molto più piccolo a 16.9 MeV. Il riscontro sperimentale sulla composizione dell'altro stato risulta molto più complicato per le difficoltà che comporta l'utilizzo del  ${}^7\text{Be}$  dovute alla sua instabilità. Ci sono però modi indiretti che si basano sulla raccolta di un neutrone rilasciato dal  ${}^9\text{Be}$ . Non si possono raggiungere gli stati con  $T=1$  del  ${}^8\text{Be}$  partendo dal ground state del  ${}^9\text{Be}$ , descritto dalla struttura  $\alpha + \alpha + n$ , semplicemente rilasciando il neutrone in eccesso. Ma, se le due alfa possono essere rappresentate dalle strutture simboliche  $({}^7\text{Li}+n+n) \pm ({}^7\text{Be}+p+n)$ , allora è possibile rimuovere uno dei protoni o neutroni che compongono la struttura formando  ${}^7\text{Li}+n$  e  ${}^7\text{Be}+p$ . Questo è verificato da Garvey [13] dove sono comparate le reazioni  ${}^9\text{Be}(d,t){}^8\text{Be}$  e  ${}^9\text{Be}(d,{}^3\text{He}){}^8\text{Be}$ . La reazione (d,t) rilascia un neutrone e la maggior popolazione dello stato ad energie di 16.9 MeV, rispetto a quello a 16.6 MeV, è spiegata da una maggior componente  ${}^7\text{Be}+n$  nello stato ad energia maggiore [12].



## Capitolo 4

# Conclusioni

In conclusione in questa tesi si sono analizzati ed interpretati alcuni livelli energetici del berillio-8. Tra tutti gli stati nucleari presenti nello spettro in Figura 1.1 ci si è concentrati sul livello fondamentale e sui livelli ad energie di  $3.03\text{MeV}$ ,  $11.35\text{MeV}$  e infine sugli stati  $2;(0+1)$  ad energie di  $16.626\text{MeV}$  e  $16.922\text{MeV}$ . Per quanto riguarda lo stato fondamentale e i primi due livelli energetici si è giunti alla conclusione che una loro naturale interpretazione si basa su modelli a cluster nucleare, e nello specifico le sottostrutture che compongono il nucleo di  ${}^8\text{Be}$  sono particelle  $\alpha$ . La natura degli stati  $2;(0+1)$  viene esplicitata considerando un modello di particella singola. Nello specifico si è capito come per una corretta interpretazione di questi ultimi sia necessario un mescolamento tra le configurazioni  ${}^7\text{Li}+p$  e  ${}^7\text{Be}+n$ . In definitiva per lo stato ad energie di  $16.626\text{MeV}$  è predominante la configurazione  ${}^7\text{Li}+p$ , mentre per quello ad energie di  $16.922\text{MeV}$  predomina la configurazione  ${}^7\text{Be}+n$ . In Figura 1.1 sono indicate anche le energie  $17.2551\text{MeV}$  e  $18.8997\text{MeV}$ , etichettate rispettivamente con la scrittura  ${}^7\text{Li}+p$  e  ${}^7\text{Be}+n$ , che si riferiscono alla soglia di separazione del nucleo di  ${}^8\text{Be}$  in quelle specifiche sottostrutture.

Rimangono da interpretare una grande quantità di livelli energetici, come per esempio lo stato  $1^+;1$  ad energie di  $17.640\text{MeV}$  e lo stato  $1^+;0$  ad energie di  $18.150\text{MeV}$ . Come svolto alla referenza [12], si potrebbero cominciare ad assegnare le configurazioni  $({}^7\text{Li}^*+p)$  e  $({}^7\text{Be}^*+n)$  rispettivamente allo stato ad energie di  $17.640\text{MeV}$  e a quello ad energie di  $18.150\text{MeV}$ . La notazione appena introdotta denota il fatto che il guscio costituito dal Li e dal Be si trovi in uno stato eccitato mentre il nucleone aggiuntivo si trovi nello stato fondamentale, ovvero faccia da "spettatore". Vi sono però prove sperimentali che contraddicono questa ipotesi. Una soluzione per accordarsi ai risultati ottenuti sperimentalmente consiste nel prendere la configurazione  $({}^7\text{Li}+p)+({}^7\text{Be}+n)$  per lo stato a  $17.640\text{MeV}$ , e aumentare la componente protonica mescolando il 25% dello stato con  $T=0$ . Mentre di contro per lo stato ad energie di  $18.150\text{MeV}$  si parte dalla configurazione  $({}^7\text{Li}+p)+({}^7\text{Be}+n)$  e si aumenta la componente neutronica. In ogni caso la natura dei restanti livelli energetici è in gran parte spiegata utilizzando i modelli usati per la comprensione degli stati sui quali questo lavoro di tesi si è basato.



# Bibliografia

- [1] *Beryllium*. 2017. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Beryllium>.
- [2] *Triple-alpha process*. 2017. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Triple-alpha\\_process](https://en.wikipedia.org/wiki/Triple-alpha_process).
- [3] D.R. Tilley et al. “Energy levels of light nuclei A=8,9,10”. In: *Nuclear Physics A* (2004).
- [4] M. D. Mancusi e E. Norbeck. “Be8”. In: *Phys. Rev.* 151 (3 nov. 1966), pp. 830–833. DOI: 10.1103/PhysRev.151.830. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.151.830>.
- [5] Martin Freer. “The clustered nucleus—cluster structures in stable and unstable nuclei”. In: *Reports on Progress in Physics* 70.12 (2007), p. 2149. URL: <http://stacks.iop.org/0034-4885/70/i=12/a=R03>.
- [6] Karl Wildermuth e Walter McClure. *Cluster Representations of Nuclei*. 1966.
- [7] A. Arima et al. *Clustering in Light Nuclei*. 1972.
- [8] R. Bijker e F. Iachello. “The Algebraic Cluster Model: Three-Body Cluster”. In: *Ann.Phys.(N.Y.)* (2002).
- [9] L. Fortunato. “Esplorazioni della terra incognita della fisica nucleare: nuclei con alone..” In: (2011). arXiv: 1104.0482 [physics.pop-ph].
- [10] R R Betts e A H Wuosmaa. “Nuclear molecules”. In: *Reports on Progress in Physics* (1997).
- [11] Carlos A. Bertulani. *Nuclear Physics in a Nutshell*. 2007.
- [12] P. Paul. “Isospin in Be8”. In: *Z. Naturforschg* (1966).
- [13] G.T. Garvey, J. Cerny e H. Pugh. “Isospin Mixing in Be8”. In: *Bull.Am.Phys.Soc.* (1966).