Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

L'opinione di Nicolas Bourbaki riguardo ai fondamenti della matematica

Nicolas Bourbaki's view about foundation of mathematics

Laureanda:
Chiara Gui
Matricola 1123609

Relatore:
Prof. Giovanni Sambin

Anno Accademico 2017-2018
Sessione di laurea: 6 Luglio 2018

jede Wissenschaft wachst wie ein Baum,
nicht nur die Zweige greifen weiter aus,
sondern auch die Wurzeln dringen tiefer.[1]

[1]D. Hilbert, Die Grundlagen der Physik, II, Ms. Vorlesung WS 1916-17

Indice

Premessa

Innanzitutto vorrei sottolineare l'importanza, quando si parla di una disciplina, di distinguere i due volti che convivono in ogni scienza, quelli che Corry[2] chiama "corpo" e "immagine" di un sapere scientifico. Con "corpo" della matematica si intendono tutti gli enunciati, definizioni e teoremi delle varie teorie che rientrano sotto il nome di matematica. Con "immagine", invece, si intendono le risposte a domande riguardanti la disciplina in sé, *ovvero, ad esempio, dove ha senso investire nella ricerca, cosa ha senso insegnare, le priorità e quali sono i problemi più o meno rilevanti.*[3] Ritengo che nella formazione di un matematico sia importante non solo acquisire competenza e conoscenza del corpo della propria disciplina, ma anche confrontarsi con l'immagine che si ha, o si può acquisire, di quest'ultima.

Nel seguente lavoro di tesi mi sono riproposta di approfondire la visione filosofica soggiacente al monumentale lavoro di Bourbaki.

Tale obiettivo risponde contemporaneamente a due esigenze.

La prima è di carattere personale, ho ritenuto, infatti, molto istruttivo e coerente con il mio percorso di studi, approfondire un aspetto della disciplina che altrimenti avrei rischiato di trascurare.
A questa prima esigenza si unisce la passione nell'indagare le origini storiche delle idee e concetti matematici trasmessami dal Professor Dr. Jörn Steuding e soprattutto dalla Dottoressa Nicola Oswald.[4]

La seconda esigenza che questa tesi vuole soddisfare è la risposta ad un'ipotesi riguardante la figura di Bourbaki emersa durante una lezione del corso "Matematica elementare da un punto di vista superiore". Dall'esposizione

[2]Leo Corry è professore ordinario in History and Philosophy of Science all'Università di Tel-Aviv

[3][Corry 1997]

[4]Durante i mesi di studio che ho trascorso in Erasmus in Germania, ho potuto scoprire l'esistenza di un settore disciplinare che a Padova è trascurato da anni, esso consiste nello studio della Storia della Matematica. In particolare sono grata all'Università di Würzburg per avermi offerto l'opportunità di collaborare nella redazione dei testi di supporto alla didattica del corso "History of mathematics". (https://wuecampus2.uni-wuerzburg.de/moodle/enrol/index.php?id=16039)

da me tenuta del pensiero di tale personaggio emergeva il sospetto che esso decidesse intenzionalmente di occultare e sminuire la rilevanza delle questioni sui fondamenti.

L'intento di questa tesi è dunque di compiere un'analisi più approfondita degli scritti del gruppo Bourbaki e desumerne la filosofia soggiacente.
La rilevanza di questo studio risiede, inoltre, nel fatto che l'opera bourbakista ha fortemente influenzato lo sviluppo della matematica nel secondo dopoguerra, imponendosi come testo di riferimento incontrastato per le nuove generazioni di matematici. Molte idee e lo stile bourbakista si sono così diffusi a tal punto che vengono ora assunti inconsapevolmente dalla maggioranza dei matematici.

Capitolo 1

La questione dei fondamenti della matematica

Non si può parlare di Bourbaki senza prima accennare al contesto in cui nacque questo personaggio e alle ragioni che spinsero alcuni giovani matematici francesi ad idearlo.

Il matematico Bourbaki, infatti, non è una persona realmente esistita, Bourbaki è uno pseudonimo adottato, negli anni trenta, da un gruppo di matematici desiderosi di dare una svolta allo studio della loro disciplina in Francia.

A questo scopo sicuramente si può affermare che l'impresa sia riuscita, basta osservare l'influenza nazionale e internazionale che l'opera di Bourbaki, *Eléments de Mathematique*, ha avuto: a partire dal linguaggio e dallo stile argomentativo, fino alle influenze sul metodo di ricerca e alle riforme scolastiche adottate in Francia negli anni '70, le quali si ispirarono proprio alle idee trasmesse dagli *Eléments*.

Per un approfondimento sulla storia del personaggio, sui matematici che ne hanno fatto parte e sugli aneddoti che hanno contribuito ad accrescerne la fama, rimando al capitolo in appendice. Da qui in avanti darò per implicito che il lettore abbia una conoscenza almeno superficiale dell'autore e della sua opera principale *Eléments de Mathematique*, ripeterò tuttavia le caratteristiche e gli elementi che riterrò utili a fini argomentativi.

Descriverò ora il contesto e le premesse culturali in cui si inserisce l'esperienza bourbakista, passerò poi ad esplicitare l'idea che il gruppo sostiene riguardo ai fondamenti e alla natura della matematica, attraverso una disamina degli scritti di Bourbaki e dei membri fondatori, infine esporrò una mia riflessione critica a riguardo.

1.1 La matematica francese ad inizio secolo

Nel periodo tra le due guerre mondiali la situazione del mondo scientifico matematico in Francia era molto particolare, i tempi erano infatti maturi per risollevarsi dopo un periodo di scarsa fioritura e attività intellettuale.

Nei primi decenni del novecento, infatti, la matematica in Francia trascorse una fase di declino. Questo fu probabilmente dovuto in parte al buco generazionale causato dalla prima guerra mondiale, in parte alla rigidità delle istituzioni pubbliche, agli scarsi investimenti sulla ricerca scientifica e forse in parte anche allo stile solitario di Henri Poincaré (1854 - 1912), maggior matematico francese dell'epoca, il quale non ebbe, probabilmente per carattere, la lungimiranza di avviare una scuola che proseguisse i suoi studi dopo di lui.

Jean Dieudonné (1906 - 1992) descrive lo scenario in questo modo:

> dopo il 1918, la Francia – la cui gioventù scientifica è stata dissanguata dall'ecatombe, si rinchiuderà in se stessa per dieci anni e con eccezione di E. Cartan e Hadamard, la scuola matematica francese si limiterà al dominio ristretto della teoria delle funzioni di variabile reale o complessa, il cui sviluppo considerevole, intorno al 1900, era stato d'altronde dovuto a molti suoi rappresentanti (Picard, Hadamard, E. Borel, Baire, Lebesgue e poi Montel, Denjoy, Julia).[1]

Similmente, nei suoi *Souvenirs d'apprentissage*, André Weil (1906 - 1998) scriveva:

> Già all'Ècole [Normale] ero rimasto colpito dal danno causato alle matematiche in Francia della guerra del 14 - 18; essa aveva scavato un vuoto che la mia generazione e le successive non avrebbero colmato facilmente. Nel 1914, i tedeschi avevano saggiamente cercato di salvare l'elite delle loro giovani generazioni scientifiche, e, in grande misura, le avevano messe al riparo. In Francia, uno scrupolo malinteso di uguaglianza davanti al sacrificio, senza dubbio lodevole in linea di principio, aveva condotto a una politica del tutto opposta, le cui conseguenze disastrose possono essere lette per esempio sul monumento ai caduti dell'Ècole Normale.[2]

[1] [Nastasi, pag.1]
[2] [Morange 2003, pag. 26]

Al di là del peso delle perdite di vite umane, la crisi della ricerca matematica in Francia probabilmente fu dovuta anche all'impostazione nazionale culturale e politica. In Francia vi era infatti una forte tradizione nel legame tra matematica e fisica, al punto che l'insegnamento matematico si era rinchiuso in esso, dando spazio ed importanza praticamente solo all'analisi e allo studio di funzione. Cartan, riferendosi all'istruzione universitaria francese degli anni trenta, racconta:

> Allora, la licenza di matematica prevedeva tre esami: fisica generale, calcolo differenziale e integrale, meccanica razionale. Cioè, c'era un solo esame di matematica.[3]

Inoltre c'è da considerare che la rivoluzione industriale e lo sviluppo delle tecnologie, dal punto di vista culturale, vedevano emergere la figura dei tecnici specializzati, per la formazione dei quali non era però previsto alcun percorso specifico. L'unico tipo di istruzione avanzata concepita era quella di tipo universitario e l'università in Francia era fortemente teorica e astratta. La distanza del mondo della ricerca accademica dalle esigenze della società produttiva, contribuì sicuramente alla percezione di una fase di crisi.

1.2 L'idea di Weil e la nascita del gruppo

È in questo contesto che i giovanissimi André Weil ed Henri Cartan (1904 - 2008), intorno agli anni '30, cominciarono ad insegnare nei corsi accademici. Allora il manuale di analisi usato più diffusamente era *Cours d'analyse* scritto da Edouard Goursat (1858 - 1936) nel 1902. Sicuramente poco aggiornato, era ritenuto ridondante, dove i teoremi appaiono con un eccesso di ipotesi richieste e privo dei risultati più recenti.
Dalla necessità concreta di un ausilio per l'insegnamento, si maturò dunque la consapevolezza della necessità sempre più stringente di redigere un nuovo manuale di analisi aggiornato e più fruibile, per coloro che volessero cimentarsi nello studio matematico.

Henri Cartan racconterà nel 1982:

> André Weil ed io eravamo entrambi all'Università di Strasburgo, nel 1934. Discutevo con lui del corso di calcolo differenziale e integrale di cui ero incaricato. ... Mi interrogavo spesso sul modo di condurre questo insegnamento, dato che le opere disponibili non mi sembravano soddisfacenti, per esempio sulla teoria degli

[3] [Morange 2003]

> integrali multipli e la formula di Stokes. Ne discutei, quindi, a più riprese, con André Weil. Un bel giorno mi disse: "Ora basta; bisognerà sistemare questa situazione una volta per tutte. Occorre scrivere un buon trattato di analisi e, che non se ne parli più!".[4]

Pure André Weil conferma sostanzialmente questa versione nei suoi *Souvenir d'apprentissage* pubblicati nel 1991:

> Un giorno di inverno, verso la fine del 1934, credetti di avere un'idea luminosa per mettere fine alle domande insistenti del mio collega (Henri Cartan). "Siamo cinque o sei amici", gli dissi più o meno, "e siamo incaricati degli stessi insegnamenti in università diverse. Riuniamoci, risistemiamo tutto una volta per tutte, dopodiché sarò liberato dalle tue domande". Non sapevo che Bourbaki era nato in quel preciso istante.[5]

Lo scopo per cui nacque il gruppo e l'obiettivo che dunque questi matematici si prefiggevano, era quello di pubblicare un testo aggiornato di Analisi.

Cominciando i lavori di stesura, a partire dalle concertazioni per l'indice, si trovarono però ben presto ad ampliare il soggetto del trattato alle altre branche della matematica, ritennero infatti doverose opportune premesse di base e irrinunciabili alcune ulteriori implicazioni inscindibilmente collegate al nucleo centrale.

Le regole basilari che si diedero per costruire il testo furono infatti tre: il metodo assiomatico, che prevedeva la rigorosa assenza di generalizzazioni, bisognava cioè procedere sempre da un concetto astratto generale al particolare e mai viceversa, l'ordine lineare di presentazione degli argomenti ed infine l'autoreferenzialità, ovvero l'assenza, per quanto possibile, di riferimenti esterni all'opera stessa; fondamentale fu inoltre, come parte integrante di questo programma, l'introduzione e utilizzo del concetto di struttura.

Queste regole rispecchiavano la loro concezione di Matematica come scienza unica (negli ultimi decenni, infatti, il proliferare di innumerevoli nuove branche aveva portato a parlare di "matematiche" come molte discipline distinte) gerarchicamente strutturata (i bourbakisti propongono una nuova classificazione delle teorie e dei risultati matematici, alternativa alla divisione classica in Algebra, Analisi e Geometria) e indipendente dalle altre scienze.

[4]Lettera di Cartan a Marian Schmidt, nel 1982, in [Morange 2003, pag. 4]

[5][Morange 2003, pag. 4]

Per quanto riguarda lo stile del trattato, i bourbakisti, rigettando lo stile di esposizione obsoleto e disfunzionale dei loro anziani professori e dei manuali esistenti, si rifecero invece al rigore e sobrietà del manuale di algebra *Moderne Algebra* pubblicato da Van der Waerden[6] nel 1930-31 che assurse a modello di riferimento. Questo libro, che la maggior parte dei bourbakisti aveva conosciuto grazie a viaggi di studio all'estero, aveva affascinato i giovani studiosi non solo per la modernità dei temi trattati ma soprattutto per la presentazione concisa e rigorosa che, unita ad un'organizzazione ben strutturata degli argomenti, faceva emergere in modo chiaro i concetti più importanti e generali.

1.3 La matematica tedesca e le principali correnti di pensiero ad inizio secolo

Ritengo doveroso, a questo punto, prima di procedere con una disamina del pensiero bourbakista, fare una breve digressione cercando di tratteggiare i caratteri essenziali del pensiero tedesco, in particolare della scuola hilbertiana, dalla quale Bourbaki prenderà spunto per elaborare la propria concezione.

Nei primi anni del Novecento, infatti, si può dire che la ricerca matematica del mondo occidentale fu guidata dalla Germania, in particolare in quel periodo la scuola più fiorente era quella fondata da David Hilbert (1862 - 1943) a Göttingen. Hilbert è considerato uno degli ultimi matematici universali, egli si occupò infatti di quasi tutti gli ambiti della ricerca matematica sua contemporanea. Dagli anni venti in poi, in particolare, Hilbert si prese a cuore la questione dei fondamenti.

La questione ontologica e la ricerca sui fondamenti della matematica fu uno dei grandi temi del XX secolo. Prova ne è pure il fatto che, nella famosa lista che propose Hilbert all'intera comunità scientifica al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi nel 1900, i primi due di una lista di ventitrè problemi aperti riguardano questioni legate al dibattito sui fondamenti: il primo chiede di dimostrare l'ipotesi del Continuo, sollevata dalla teoria degli insiemi di Cantor; il secondo richiede di dimostrare la coerenza dell'Aritmetica.

Ci si potrebbe chiedere come mai, proprio in quel periodo, tra gli studiosi di matematica era sorta tale questione. Ebbene, vi sono diverse cause che potrebbero aver portato ad interrogarsi a fondo sull'essenza della mate-

[6] Bartel Leendert Van der Waerden (1903 - 1996) era un allievo di Emmy Noether (1882 - 1935) ed Emil Artin (1898 - 1962), appartenente alla scuola di Göttingen fondata da David Hilbert.

matica. Generalmente vengono evidenziati i seguenti due fenomeni: da un lato la scoperta, nel processo di rigorizzazione dell'analisi e nello studio del calcolo infinitesimale, dell'esistenza di funzioni continue ma non derivabili e quindi dell'indipendenza di questi due concetti; dall'altro la nascita delle geometrie non euclidee. Ritengo che questi siano i principali fattori che contribuirono a far emergere come problema centrale nel dibattito scientifico la questione ontologica sulla matematica, infatti: sia nella fase di rigorizzazione dell'analisi con lo studio di funzioni "patologiche", sia nello studio di nuove geometrie possibili, si ottennero risultati sorprendenti, inaspettati. Per la prima volta si ruppe la sinonia tra quella che è chiamata *intuizione geometrica*, data in qualche modo dall'esperienza sensibile, ciò che "intuitivamente" ci si aspetta, e ciò che invece è frutto di un *ragionamento* razionale e viene dimostrato matematicamente. Questa frattura indusse a ricercare la stabilità in nuove certezze e criteri di affidabilità dei risultati ottenuti, facendo emergere l'esigenza di interrogarsi sui fondamenti, ripartendo dalla base della disciplina.

Queste scoperte, infatti, furono in grado, nel giro di pochi anni, di far crollare quella sicurezza che aveva accompagnato per i due millenni precedenti lo studio dei matematici. Si aprì dunque un'accesa discussione su cosa potesse fungere da fondamento per la matematica. Ci si chiedeva: la matematica è una scienza affidabile? Cosa ci garantisce che i teoremi e le proposizioni dimostrate corrispondono alla verità?

Nella ricerca, a volte spasmodica, di una base solida e incrollabile, capace di garantire al matematico la tranquillità di non dubitare più della verità[7] di ciò che dimostra, si formarono svariate scuole di pensiero.

Non sarebbe esagerato dire che ciascun matematico propose una propria risposta differente, tuttavia gli schieramenti principali che si vennero a creare alla fine del XIX secolo furono sostanzialmente due: quelli che, come Poincarè, sostenevano che l'elemento più affidabile fosse una intuizione innata,[8] comune a tutti gli uomini, la quale permette di costruire l'edificio matematico a partire da elementi geometrici o algebrici primordiali, suggeriti in qualche modo dalla realtà, e dunque quelli che ritenevano che la matematica

[7]Hilbert parla di "verità incontestabili e definitive". [D. Hilbert, "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), p. 157-77] in [Lolli 2011, pag. 113]

[8]Nel suo discorso al secondo Congresso internazionale a Parigi, Poincarè afferma

> "Ora, se oggi in analisi ci proponiamo di essere rigorosi, i sillogismi e i richiami all'intuizione sui numeri puri sono i soli su cui è impossibile ingannarsi".

[Compte Rendu du Deuxième Congrès Internat. des Math., 1900, pubbl. 1902, 121-22] in [Kline 1972, pag. 1196] stessa fosse a servizio della fisica e delle scienze applicate. Questi rimasero, di fatto, pur nel tentativo di superare il "kantismo"[9], in continuità con il pensiero sette-ottocentesco. E quelli che invece apprezzavano maggiormente l'astrazione, come Frege. Essi cercarono affidabilità nel rigore delle deduzioni logiche, si focalizzano quindi su un'impostazione assiomatica della matematica, la quale non era più tenuta a seguire o cercare conferme nelle evidenze sperimentali ma solo in se stessa.

Siccome nei fatti si affermò maggiormente la spinta innovatrice, probabilmente perché la trattazione astratta appariva più convincente e più fertile e dava la libertà di creare nuove branche e aree di studio, ne ritrarrò ora i tratti essenziali seguendo il pensiero dei principali attori di questo cambiamento.

1.3.1 *Le prime riflessioni sui fondamenti. I lavori di Frege e di Cantor*

L'apertura dello studio sui fondamenti si può attribuire al matematico e logico tedesco Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 - 1925) il quale intraprese un lavoro che verrà poi riassunto col nome di logicizzazione dell'aritmetica. Il suo intento e scopo nella ricerca scientifica era quello di fondare la matematica su basi solide e indubitabili. Egli trovò che la logica e le fisse regole di deduzione costituivano una certezza autoevidente in grado di preservare la verità. Voleva dunque ripartire dai concetti base, da lui ritenuti il concetto di numero e le regole logiche di deduzione, per ridefinire e costruire in modo rigoroso tutta la matematica. Le sue opere, *Begriffschrift* (Ideografia, 1879), *Die Grundlagen der Arithmetik* (I fondamenti dell'Aritmetica, 1884) e *Grundsetze der Arithmetik* (I principi dell'aritmetica, I, 1893; II, 1903) sono tutte rivolte a dare un fondamento assiomatico alla logica e strutturare un

[9] "Con *Kantismo* intendiamo la filosofia che riconosce come fondamenti della matematica le due intuizioni di spazio e di tempo. Sarebbero esse, per questa filosofia, a generare nell'uomo i concetti di misura e quantità, che sono alla base, rispettivamente, della geometria e dell'aritmetica. Kant, nella Critica della Ragion Pura, dà una sistemazione filosofica ai fondamenti classici della matematica. Egli ritiene che le proposizioni della matematica sono giudizi sintetici a priori (sintetico, in opposizione ad analitico, vuol dire che il predicato non è contenuto nell'oggetto, cioè aggiunge qualcosa all'oggetto stesso...; a priori, in opposizione ad a posteriori, vuol dire che non deriva dall'esperienza sensibile) relativi alle intuizioni pure di spazio e di tempo. Spazio e tempo sarebbero quadri mentali a priori entro cui connettiamo i dati fenomenici. Lo spazio è la forma del senso esterno e si occupa dell'intuizione della sola disposizione delle cose esterne. Il tempo è la forma del senso interno e regola la successione delle cose esterne. Spazio e Tempo non sono entità a sè stanti, ma sono quadri mentali, propri dell'uomo. La geometria usa intuitivamente il concetto di spazio e l'aritmetica fa lo stesso con il concetto di tempo, cioè di successione, senza ricavarli da altro." [Di Saverio 2003, pag.2]

sistema formale in grado di esporre tutti i concetti aritmetici. A lui va attribuita anche la ripresa e diffusione dell'importanza del metodo assiomatico usato in modo rigoroso.

Negli stessi anni, partendo invece da problemi analitici e dallo studio dei punti di discontinuità di funzioni, Georg Cantor (1845 - 1918) mise a punto la sua *Mengenlehre* (Teoria degli insiemi), grazie alla quale divenne possibile non solo trattare l'infinito, distinguendo varie gerarchie d'infinito e operando con l'aritmetica transfinita, ma anche, come farà elegantemente John Von Neumann (1903-1957), definire i numeri a partire dal concetto di insieme.
Alla fine del diciannovesimo secolo, la nuova teoria unita al metodo assiomatico, sembrò dunque essere la risposta più convincente alla questione sui fondamenti della matematica, ovvero alla domanda su quale fosse la base di partenza per costruire l'edificio matematico. Ogni teorema o proposizione poteva essere ricondotto ad un numero ristretto di assiomi ed elementi primitivi di partenza, la cui esistenza e verità era considerata autoevidente o ritenuta valida a priori. Sembrava dunque di essere in quello che Hilbert chiamerà il "paradiso di Cantor"[10].
Proseguendo gli studi, però, Cantor stesso si accorse di alcune problematiche emergenti in questa nuova impostazione: la prima risiedeva nella teoria appena formulata ed era legata al concetto di insieme e di infinito; la seconda, derivante dall'utilizzo del metodo assiomatico, era legata alla richiesta della coerenza nelle teorie assiomatiche.

1.3.2 *La comparsa dei paradossi*

Già in alcune lettere scritte a Dedekind nell'estate del 1899, si legge la preoccupazione di Cantor quando si accorse che la sua teoria permetteva di giungere a delle contraddizioni come per esempio quella del massimo cardinale[11] e quella del massimo ordinale[12].

Ma pure negli anni successivi altri matematici si accorsero via via di numerose conseguenze contraddittorie deducibili dalla teoria proposta da Cantor. Quella più famosa fu formulata da Bertrand Russell (1872 - 1970) in una lettera a Frege nel 1902, riguarda proprio la formazione degli insiemi

[10] [D. Hilbert in Math. Ann., XCV (1926), 170 = Grundlagen der Geometrie, 7ª ed., 1930, 274] in [Kline 1972, pag.1172]

[11] Cantor afferma che due insiemi hanno la stessa cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra loro. Insiemi con la stessa cardinalità identificano lo stesso numero Cardinale.

[12] Questo paradosso è detto di Burali-Forti fu infatti formulato dal matematico italiano Cesare Burali-Forti (1861-1931). Esso afferma che la successione di tutti gli ordinali, che è ben ordinata, dovrebbe avere un numero ordinale il più grande di tutti i numeri ordinali. [C.Burali-Forti, "Rendiconti del circolo matematico di Palermo", XI, 1897, pag. 154-64 e 206] in [Kline 1972, pag.1171]

sancita dall'assioma di comprensione[13] formulato da quest'ultimo[14]. Nella versione divulgativa l'antinomia è chiamata "paradosso del barbiere", Russell la pubblicò nella sua opera principale, i *Principia Mathematica*. Altre contraddizioni sono quella di Jules Richard[15] (1862 - 1956) pubblicata nel 1905 di cui vennero proposte l'anno successivo versioni semplificate da G.G. Berry e da Russell, e le sue varianti[16] formulate da Kurt Grelling (1886 - 1941) e da Leonard Nelson (1882 - 1927).

Queste antinomie portarono a rivedere l'intera teoria e contribuirono allo sviluppo del linguaggio formale: ci si rese conto della necessità di formulare in modo preciso i concetti base e distinguere i diversi livelli di astrazione.

Si iniziò dunque a riflettere sulla definizione di insieme data da Cantor, la quale era ritenuta troppo vaga:

> con insieme intendiamo ogni riunione (Zusammenfassung) M di oggetti m definiti, ben distinti, della nostra intuizione o del nostro pensiero ... messi assieme a formare una unità.[17]

---

[13] $x \in \{y|P(y)\} \leftrightarrow P(x)$.

[14] La contraddizione riguarda l'insieme $R = \{x|x \notin x\}$ che per definizione dovrebbe sia appartenere che non appartenere a se stesso.

[15] La contraddizione nasce dal fatto che:

> ogni intero può essere descritto con parole che richiedono un certo numero di lettere. ... Ora dividiamo tutti gli interi positivi in due gruppi, il primo che include tutti quelli che possono essere descritti (in almeno un modo) con al più cento lettere, e il secondo che include tutti quelli che richiedono un minimo di centouno lettere per essere descritti, non importa in quale modo. Solamente un numero finito di numeri può avere una descrizione con al più cento lettere, perchè ci cono non più di 27^{100} espressioni con al più cento lettere (e alcune sono prive di significato). Esiste allora nel secondo gruppo un minimo intero. Ma esso può essere descritto dalla frase: "il più piccolo intero non descrivibile con al più di cento lettere". Ma questa frase richiede meno di 100 letere. Quindi, il più piccolo intero non descrivibile con al più cento lettere può essere descritto con meno di cento lettere. [Kline 1972, pag. 1378-79]

[16] Una variante dice, per esempio:

> Alcune parole descrivono se stesse. Per esempio, la parola 'polisillabica' è polisillabica. La parola 'monosillabica', però, non è monosillabica. Chiameremo le parole che non descrivono se stesse eterologiche. In altre parole la parola X è eterologica se non è essa stessa X. Ora sostituiamo X con la parola 'eterologica'. Allora 'eterologica' è eterologica se non è eterologica. [Kline 1972, pag. 1379].

[17] Beiträge, 1895-97 in [Lolli 2011, Kline 1972, pag. 25, pag. 1162]

Un lavoro approfondito per risolvere la questione dei paradossi fu affrontato da Russell assieme al collega Alfred North Whitehead (1861 - 1947). Nella loro opera *Principia Mathematica* (3 volumi, 1910-13), partirono dall'osservazione che tutte le contraddizioni erano legate alla definizione di insieme e al fatto che essa permetteva l'esistenza di insiemi definiti in modo autoreferenziale. Proposero così di chiamare impredicative tutte le definizioni che definiscono un insieme fornendo una proprietà che può essere assunta dall'insieme stesso, e ne vietarono l'utilizzo. Il tentativo di evitare paradossi li portò a formulare quella che oggi è chiamata *Teoria dei tipi*. Essi restrinsero cioè ad una gerarchia di tipi la possibilità di definire insiemi; dichiararono ammessibili solo le definizioni di insieme tra i cui elementi non può essere incluso l'insieme stesso. Questa restrizione consente ovviamente di definire insiemi di insiemi, ovvero insiemi i cui elementi siano insiemi, ma separa concettualmente l'essenza di *insieme* e di *elemento* contenuto in un insieme, essendo essi oggetti di *tipo* differente.

Un tentativo di chiarificazione è compiuto anche da Ernst Zermelo (1871 - 1953), il quale nel 1908 propose un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi. Egli dedusse tutti i risultati di Cantor a partire da otto assiomi, tuttavia, per quanto riguarda la definizione di insieme, la presentazione non venne da tutti ritenuta soddisfacente, restava infatti vago cosa si dovesse intendere con "per ogni proprietà ϕ ben definita" (definit) nell'assioma di esistenza dei sottoinsiemi, ovvero l'assioma di separazione: $\forall x \exists y \forall z \left(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi \left(z, ... \right) \right)$. L'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo (1908) venne ripresa e rielaborata da Fraenkel (1919 - 1922) e poi da Skolem (1922 - 1925). Anche von Neumann propose un'assiomatizzazione negli anni venti, la quale proponeva di usare come basilare il concetto di funzione invece di quello di insieme, Bernays riprese l'assiomatizzazione di von Neumann e la riformulò ponendo come primitivi i concetti distiniti di insieme e classe; tale assiomatizzazione fu usata pure da Gödel, il quale la modificò leggermente per rendere la teoria finitamete assiomatizzabile. Tutte queste assiomatizzazioni, assieme alla chiarificazione del linguaggio, portarono ad escludere assiomaticamente la possibilità del formasi delle contraddizioni enunciate ad inizio secolo. Ad esempio venne cambiato con caratterizzazioni più ristrittive, l'iniziale assioma di comprensione $x \in \{ y \mid P \left(y \right) \} \leftrightarrow P \left(x \right)$.

Ma tornando a descrivere gli sviluppi del pensiero sui fondamenti in modo graduale attraverso quelli che furono i principali teorizzatori, bisogna dire che in reazione all'annuncio dei paradossi, si formarono tre scuole di pensiero rispecchianti differenti ideologie: il logicismo, il formalismo e l'intuizionismo.

1.3.3 *Il logicismo di Russell*

Se infatti, la Geometria e l'Analisi, grazie all'invenzione della geometria analitica e geometria algebrica, si fondavano sullo studio dei numeri reali, e questi ultimi erano stati dimostrati da Richard Dedekind (1831 - 1916) essere costruibili a partire dai numeri naturali, tutta la matematica era riconducibile all'aritmetica, ovvero la teoria dei numeri naturali.

E poichè Frege nel suo *Grundlagen der Aritmetik* (1884) aveva sostanzialmente definito i numeri naturali come insiemi[18], fondamento primario diventava il concetto di insieme e la teoria formulata da Cantor. Quest'ultima, sosteneva Russell, altro non era che espressione di ragionamenti logici, l'operazione di inclusione insiemistica era infatti traducibile come implicazione logica e in questo modo il fondamento primo della matematica risultava essere la logica.

Per questo motivo Russell e i suoi sostenitori vennero chiamati logicisti.

> Frege e Russell credevano che la logica fosse solida come la roccia. Se fossero riusciti a fondare l'aritmetica sulla logica, ciò avrebbe reso tutta la matematica solida quanto la logica stessa.[19]

Questo è dunque lo scopo dell'opera in tre volumi *Principia Mathematica*. La presenza di paradossi come quello del barbiere misero però in difficoltà questa ideologia, per quanto infatti l'idea della teoria dei tipi fosse ingegnosa e abbia ispirato la classificazione dei vari ordini di linguaggi predicativi, essa incontra nuovi ostacoli quando si tratta di definire anche solo concetti base come la relazione di uguaglianza.

> La teoria dei tipi rende necessario distinguere attentamente per tipo le classi di enunciati. Se si cerca di costruire la matematica secondo la teoria dei tipi, la sua elaborazione diviene eccessivamente complessa. Per esempio, nei *Principia* due oggetti a e b sono uguali se per ogni proprietà $P(x)$, $P(a)$ e $P(b)$ sono proposizioni equvalenti (ciascuna implica l'altra). Secondo

---

[18]Esemplificaivo è il titolo che introduce il ventottesimo paragrafo:*Die Anzahl als Menge* (I numeri come insiemi). Frege introduce la questione affermando:

> Einige nennen die Zahl eine Menge von Dingen oder Gegenständen; Andere wie schon Euklid, erklären sie als eine Menge von Einheiten.
> *Alcuni chiamano numero un insieme di cose o oggetti; altri come già fa Euclide, li spiegano come insiemi di unità.*

[Frege 1884, pag. 40]

[19][Hersh 2001, pag. 235].

> la teoria dei tipi, P può essere di tipi diversi perchè contiene variabili di vari ordini, così come contiene gli oggetti a e b; perciò la definizione di uguaglianza deve essere verificata per tutti i tipi di P; in altre parole ci sono infinite relazioni di uguaglianza, una per ogni tipo di proprietà. Analogamente, un numero irrazionale definito dalle sezioni di Dedekind è di tipo più alto rispetto ad un numero razionale, che a sua volta è di tipo più alto rispetto a un numero naturale, e perciò il continuo consiste di numeri di tipo diverso. Per sfuggire a questa complessità, Russell e Whitehead introdussero l'assioma di riducibilità, che afferma l'esistenza, per ogni funzione proposizionale di qualunque tipo, di una funzione proposizionale equivalente di tipo zero.[20]

Questo assioma però appare del tutto arbitrario e la presunzione di certezza incrollabile della logica da parte dei logicisti risulta in definitiva poco certa.

1.3.4 *Il formalismo di Hilbert*

Come superamento del logicismo, Hilbert propose una nuova via che fu chiamata formalismo. Nel formalismo non ci si preoccupa più dell'*esistenza* degli oggetti definiti, ciò che conta è la forma, ovvero la *definizione* che li caratterizza, assunta come assioma di partenza, e la *coerenza* della deduzione logica che a partire da chiari assiomi e definizioni permette di giungere a teoremi. Hilbert, in una lettera del 1903 a Frege, scrisse:

> La cosa determinante è piuttosto il riconoscimento della non contraddittorietà degli assiomi che definiscono il concetto. ... la mia idea è appunto questa: un concetto può essere logicamente definito solo attraverso le sue relazioni con gli altri concetti. Queste relazioni, formulate in enunciati determinati, le chiamo assiomi e pervengo in tal modo al risultato che gli assiomi sono le definizioni dei concetti.[21]

Pur essendone il padre, Hilbert non è considerabile formalista a tutti gli effetti perchè egli non rinunciò mai definitivamente a mantenere un legame tra forma e quello che lui chiama contenuto (termine che bene si associa alla forma), cioè ad attribuire prima o poi un significato di esistenza e di verità alle formule. Durante una conferenza ad Amburgo nel 1921 precisò:

[20] [Kline 1972, pag. 1392]
[21] [Lolli 2004, pag. 73-75]

> come prerequisito per l'uso delle inferenze logiche e per il funzionamento delle operazioni logiche, ci deve essere dato già qualcosa nell'immaginazione: certi oggetti discreti extralogici, che esistono intuitivamente come esperienze immediate prima di ogni pensiero.[22]

La genialità di Hilbert è stata nello scegliere come oggetti di partenza proprio i segni del linguaggio matematico:

> Assumendo questa posizione, per me - in netta opposione a Frege e Dedekind - gli oggetti della teoria dei numeri sono proprio i segni, la cui forma può essere da noi riconosciuta universalmente e sicuramente, indipendentemente dallo spazio e dal tempo e dalle condizioni particolari della costituzione del segno così come da insignificanti differenze nell'esecuzione. ...*in principio c'è il segno*, questo è il motto (in generale per ogni tipo di pensiero).[23]

Il vantaggio di considerare come punto di partenza proprio i segni usati per parlare della disciplina, consiste nel non aver bisogno, in definitiva, di alcun contenuto di partenza evitando così di fondare tutto su basi contraddittorie. Hilbert, nelle sua costruzione dell'aritmetica si basa sui segni 1 e + e sulle loro possibili successioni;

> oltre a questi segni, usiamo anche altri segni, che invece significano qualcosa e servono per la comunicazione; ad esempio il segno 2 come abbreviazione del segno numerico 1+1

o i segni $=$ e $<$. Similmente, per esprimere fatti generali Hilbert usa a e b come segni numerici, e allora affermazioni come $a + b = b + a$ hanno una "verità contenutistica" (inhaltlich) che può essere verificata attraverso una manipolazione di segni o pensieri su manipolazioni dei segni. Hilbert arriva ad affermare:

> In una teoria dei numeri svolta in questo modo non ci sono assiomi e non ci possono essere in alcun modo contraddizioni. Come oggetti abbiamo sempre segni concreti, con essi operiamo e su di essi facciamo enunciati contenutistici.[24]

[22]D. Hilbert, conferenza di Amburgo, 1921, [D. Hilbert, "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), p. 157-77] in [Lolli 2011, pag. 115-118]

[23]Ibidem.

[24]Ibidem.

Superato il pericolo dei paradossi, sorse però un nuovo limite di questa strategia:

> Con questa combinatoria di segni non si può certamente ottenere l'intera matematica. Appena si passa al punto di vista dell'aritmetica e dell'algebra superiori, "quando si vogliono ottenere asserzioni su infiniti numeri o funzioni" non bastano le comunicazioni contenutistiche e dobbiamo usare vere e proprie formule. ... deve essere eseguita una rigorosa formalizzazione delle teorie matematiche nella loro interezza, comprese le loro dimostrazioni, cosicchè - secondo il modello del calcolo logico - le inferenze e i concetti matematici vengono inseriti nell'edificio della matematica come componenti formali. ... Con ciò le argomentazioni contenutistiche, che evidentemente non possono mai venir del tutto evitate nè eliminate, vengono collocate in altro luogo, in un certo senso a un livello superiore; e contemporaneamente diventa possibile, nella matematica, una rigorosa e sistematica separazione tra formule e dimostrazioni formali da un lato e argomentazioni contenutistiche dall'altro.[25]

Hilbert giunse dunque alla conclusione che coesistono due matematiche una matematica propria o reale (eigentlich) e la metamatematica. La prima è astratta, infinitaria e non ha significato empirico, è pura forma e la sua validità è garantita unicamente dalla non contradditorietà. La seconda invece è intuitiva, finitaria e dotata di contenuto, studia la combinatoria dei segni e per questo verrà chiamata teoria della dimostrazione (Beweistheorie).

> A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una metamatematica, che serve per dare sicurezza a quella, proteggendola sia dal terrore dei divieti non necessari che dal travaglio dei paradossi. In questa metamatematca, contrariamente ai metodi puramente formali delle inferenze della matematica vera e propria, viene usato il ragionamento contenutistico, e precisamente per la dimostrazione della non contradditorietà degli assiomi.[26]

Hilbert iniziò quindi ad occuparsi di quella che lui chiama metametematica, per dimostrare la non contradditorietà della matematica propria, cioè dell'Analisi e delle altre branche. Disse:

[25] Ibidem.

[26] D. Hilbert, conferenza di Amburgo, 1921, [D. Hilbert, "Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, 1 (1922), p. 157-77] in [Lolli 2011, pag. 119]

> se otteniamo questa dimostrazione (della non contraddittorietà degli assiomi dell'analisi), allora con essa avremo stabilito che gli enunciati matematici sono realmente verità incontestabili e definitive.[27]

Egli, innanzitutto, grazie all'assiomatizzazione delle Geometrie e dell'Analisi ricondusse la dimostrazione della coerenza della matematica alla dimostrazione della coerenza dell'Aritmetica. Il suo Programma consisteva quindi nell'intento di dimostrare con la metamatematica la coerenza dell'Aritmetica. Durante una conferenza a Münster nel 1925 riassunse il suo pensiero e la strategia dimostrativa che intendeva seguire con il seguente discorso:

> la matematica diviene un patrimonio di formule ... Con il calcolo logico possediamo un linguaggio segnico, che permette di tradurre in formule i teoremi matematici e di esprimere il ragionamento logico mediante processi formali. In perfetta analogia con il passaggio dalla teoria contenutistica dei numeri all'algebra formale, noi consideriamo ora i segni e i simboli di operazioni del calcolo logico astraendo dal loro significato contenutistico. Con ciò infine, invece della scienza matematica contenutistica che viene comunicata con il linguaggio ordinario, otteniamo un catalogo di formule che contengono segni matematici e logici che si susseguono secondo determinate regole. Agli assiomi matematici corrispondono alcune formule; al ragionamento contenutistico corrispondono le regole secondo cui si susseguono le formule: il ragionamento contenutistico viene rimpiazzato da un operare esterno secondo regole e con ciò viene compiuto il passaggio rigoroso da una trattazione ingenua ad una trattazione formale, sia per gli assiomi stessi (che pure in origine erano ingenuamente intesi essere delle verità fondamentali, ma che già da lungo tempo sono considerati nell'assiomatica moderna come mere connessioni di concetti) sia anche per il calcolo logico (che originariamente doveva soltanto essere un altro linguaggio).[28]

Proprio nel tentativo di completare le prime dimostrazioni di non contraddittorietà formulate da Hilbert, Gödel dimostrerà dei teoremi che invece ne affermano l'irrealizzabilità.

---

[27]Ibidem, in [Lolli 2011, pag. 113]

[28][D. Hilbert, "Über das unendliche" (1925), *Mathematische Annalen*, 95 (1926), p. 161-90] in [Lolli 2011, pag. 134-135]

Nel 1930 il giovanissimo Kurt Gödel (1906 - 1978) ad una conferenza a Königsberg, in cui erano presenti esponenti delle varie scuole di pensiero: formalisti, logicisti e intuizionisti, annunciò:

> Si possono dare (sotto l'assunzione della non contraddittorietà della matematica classica) esempi di enunciati (perfino del genere di quelli di Goldbach o di Fermat) che sono concettualmente corretti ma non dimostrabili nel sistema della matematica classica. Perciò, se si aggiunge la negazione di un tale enunciato agli assiomi della matematica classica si ottiene un sistema non contraddittorio nel quale è dimostrabile un enunciato concettualmente falso.[29]

Con i suoi due teoremi di incompletezza dimostrò infatti che non è possibile dimostrare, usando la matematica finitaria, condizione richiesta da Hilbert nella metametematica, la non contraddittorietà dell'Aritmetica.

Hilbert proverà a difendersi elaborando nuove generalizzazioni per salvare la realizzabilità del proprio programma e nella prefazione di *Grundlagen der Mathematik* del 1934 scrisse:

> L'opinione talvolta espressa che dai risultati di Gödel segua la non eseguibilità della mia teoria della dimostrazione viene (qui) mostrata erronea. Questo risultato mostra in effetti solo che per dimostrazioni più avanzate di non contraddittorietà si deve usare il punto di vista finitista in un modo più profondo di quello necessario per la considerazione dei formalismi elementari.[30]

In effetti inizialmente pure Gödel non era certo che i suoi teoremi di incompletezza fossero necessariamente inconciliabili con il programma di Hilbert. Nell'articolo pubblicato nel 1931 egli scrisse:

> Questo punto di vista (di Hilbert) presuppone solo l'esistenza di una dimostrazione di non contraddittorietà nella quale non si usi nulla se non strumenti finitisti, ed è concepibile che esistano dimostrazioni finitiste che non possono essere espresse nei formalismi ai quali si applicano i teoremi di incompletezza.[31]

---

[29] [K. Gödel, "Discussion zur Grundlegung der Mathematik", *Erkentniss*, 2 (1931), p. 147-51] in [Lolli 2011, pag. 147]

[30] Nel suo testo Hilbert propone una generalizzazione al caso numerabile della regola di verificabilità delle formule e dimostra la cosiddetta ω-coerenza dell'Aritmetica. [D. Hilbert e P. Bernays, "Grundlagen der Mathematik", 2 voll. Springer, Berlin, 1934-39] in [Lolli 2011, pag. 148]

[31] Ibidem.

Un paio di anni dopo però confermò che:

> Sfortunatamente la speranza di riuscire (a ottenere la desiderata dimostrazione di non contraddittorietà) è del tutto svanita ... tutte le dimostrazioni (finitarie) ... finora costruite possono essere espresse facilmente nel sistema dell'analisi classica o perfino dell'aritmetica classica, e ci sono ragioni per credere che questo varrà per ogni dimostrazione che si sarà mai in grado di costruire.[32]

1.3.5 *L'intuizionismo di Brouwer*

Infine, in netta opposizione all'ideologia formalista, si pose Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 - 1966) il quale ritienne che

> Operare uno studio matematico di simboli linguistici ... non ci può insegnare nulla sulla matematica.[33]

Nel 1908 Brouwer pubblicò un articolo intitolato *L'inaffidabilità dei principi logici* nel quale suggerì che il principio del terzo escluso non si potesse estendere agli insiemi infiniti e che fosse questo abuso logico la causa dei paradossi nella teoria degli insiemi.

Secondo Brouwer il grosso equivoco di Hilbert risiedette nell'incapacità di distinguere, come egli invece ritenne opportuno, tra verità dimostrabili e non-contraddizioni dimostrabili.

Brouwer considerò ingiustificata e illusoria l'affermazione di Hilbert: "ecco il problema, trova la soluzione; la puoi trovare mediante il puro pensiero; perchè in matematica non c'è l'ignorabimus".[34] La non contraddittorietà del ragionamento che porta alla dimostrazione di un enunciato non può essere sufficiente a garantirne la verità. Se infatti vengono assunte in partenza affermazioni false, nulla si può dire sulla validità della conclusione.

Brouwer ritenne che l'illusione della validità del principio Aristotelico del *tertium non datur* fosse causata dall'aver ragionato in matematica finita e poi, senza alcuna giustificazione, per inerzia, averne assunta la validità anche con l'infinito.

---

[32] Ibidem.

[33] Tesi di dottorato di Brouwer, 1907 [L. E. J. Brouwer, *Over de grondslagen der wiskunde*, Dissertazione, Maas & van Suchtelen, Amsterdam, 1907] in [Lolli 2011, pag. 112]

[34] Conferenza di Hilbert a Münster nel 1925 [D. Hilbert, "Über das unendliche" (1925), *Mathematische Annalen*, 95 (1926), p. 161-90] in [Lolli 2011, pag. 128]

> Un carattere a priori è stato così persistemente ascritto alle leggi della logica teorica che fino a poco tempo fa queste leggi, incluso il principio del terzo escluso, erano applicate senza riserve anche alla matematica dei sistemi infiniti, e noi non abbiamo permesso che ci turbasse la considerazione che i risultati ottenuti per questa via non erano in generale sottoponibili, nè praticamente nè teoricamente, a una qualsiasi corroborazione empirica.[35]

A partire da questo fatto, risultava insostenibile pure la proposta di fondazione formalista:

> Le contraddizioni che, come risultato, ripetutamente si incontrarono diedero origine alla critica[36] formalista, una critica che in sostanza si riduce a questo: il linguaggio che accompagna l'attività mentale matematica viene assoggettato a una disamina matematica. A un tale esame, le leggi della logica teoretica si presentano come operatori che agiscono su formule primitive, o assiomi, e l'obiettivo che ci si pone è quello di trasformare questi assiomi in modo tale che l'effetto linguistico degli operatori menzionati ... non può essere inficiato dall'apparire della figura linguistica di una contraddizione. Non si deve per nulla disperare di ottenere questo risultato, ma con esso non si otterrà nulla di valore matematico: una teoria non corretta, anche se non può essere bloccata da alcuna contraddizione che la refuti, resta non di meno incorretta, proprio come una politica criminale non è meno criminale se non può essere bloccata da alcun tribunale.[37]

Secondo Brouwer il ragionamento di Hilbert, il quale giustifica l'esistenza della matematica attraverso una dimostrazione di non contraddittorietà, equivale alla legge della doppia negazione $\neg\neg A \to A$, ovvero al principio del terzo escluso, principio che egli ritiene falso, anche se non contraddittorio.

Gli oppositori all'intuizionismo di Brouwer, tra cui Hilbert è uno dei maggiori esponenti, ritenevano viceversa che la rinuncia al principio del terzo escluso fosse una mutilazione troppo onerosa. In una conferenza ad Amburgo nel 1927, Hilbert dirà:

---

[35] Conferenza di Brouwer a Magdeburgo nel 1923 [L. E. J. Brouwer,"Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossene Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie", *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 154, 1923, p. 1-7] in [Lolli 2011, pag. 128]

[36] In questo discorso "critica" è da intendersi come scuola di pensiero. ndr

[37] Ibidem.

> togliere al matematico questo tertium non datur sarebbe come vietare all'astronomo il telescopio o al pugile l'uso dei pugni.[38]

La continua polemica tra le parti ha stimolato entrambe le correnti ad approfondire e meglio giustificare il proprio punto di vista; tali studi hanno perfino stimolato la nascita di nuove teorie e branche del sapere, le quali a sua volta portarono a notevoli progressi tecnologici come ad esempio la nascita del computer. Non mancarono, inoltre, matematici che provarono a cercare strade concilianti:

> Secondo Hermann Weyl,[39] Brouwer chiede che ogni asserzione matematica abbia contenuto, e con la sua analisi ha mostrato quanto poco contenuto abbia la maggior parte della matematica corrente; Hilbert, d'altra parte nega contenuto a tutta la matematica; secondo Weyl una via di mezzo deve trattare la matematica come una scienza teorica, come la fisica, dove non ogni asserzione deve necessariamente avere un significato intuitivo.[40]

Tuttavia la divaricazione tra le due scuole di pensiero restò inconciliabile e priva di criteri dirimenti. Si sono matenuti dunque i due possibili approci, distinguendo le dimostrazioni ottenute con l'utilizzo della logica classica e quelle ottenute con la restrizione intuizionista.

Nei fatti la maggioranza dei matematici, col passare dei decenni, perse interesse in tale questione che appariva irrisolvibile. Semplicemente rinunciò a prendere parte al dibattito, lasciando la questione dei fondamenti insoluta.

---

[38] [D. Hilbert, "Die Grundlagen der Mathematik", *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburghischen Universität*, 6 (1928), p. 65-85] in [Lolli 2011, pag. 139]

[39] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 - 1955), pur essendo stato allievo di Hilbert e membro della scuola di Göttingen, si trova a condividere ed appoggiare alcune considerazioni di Brouwer riguardo all'infinito.

[40] [Lolli 2011, pag. 129]. G. Lolli qui desume il pensiero di Weyl dagli interventi di quest'ultimo nel 1925: H. Weyl, *Die heutige Erkentnisslage in der Mathematik*, Symposion, 1 (1925), p. 1-32.

Capitolo 2

L'opinione di Bourbaki

Appare evidente, considerando i motivi della sua nascita, che l'attenzione principale di Bourbaki non riguarda alcuna delle questioni filosofiche appena presentate. Tuttavia, proponendosi di ristrutturare l'intera organizzazione della matematica, i collaboratori di Bourbaki si trovarono nella posizione di dover esprimere anch'essi un'opinione riguardo all'essenza stessa di questa materia e alle forme di ragionamento a cui si ricorre quando si ha a che fare con essa.
Prova ne è il fatto che tra le prime pubblicazioni del gruppo, nel 1949, subito dopo la guerra compare un articolo a nome N. Bourbaki, intitolato *Foundation of mathematics for the working mathematician* ove l'autore scrive:

> My efforts during the last fifteen years (seconded by those of a number of younger collaborators, whose devoted help has meant more to me than I can adequately express) have been directed wholly towards a unified exposition of all the basic branches of mathematics, resting on as solid foundations as I could hope to provide. ... Whether mathematical thought is logical in its essence is a partly psychological and partly metaphysical question which I am quite incompetent to discuss. On the other hand, it has, I believe, become a truism, which few would venture to challenge, that logic is inseparable from a coherent exposition of the broad foundations on which mathematical science must rest.
>
> *I miei sforzi, nel corso degli ultimi quindici anni (sforzi assecondati da coloro tra i miei più giovani collaboratori, il cui aiuto devoto ha significato per me più di quanto io possa adeguatamente esprimere), sono stati rivolti all'obiettivo di un'esposizione unificata di tutte le branche della matematica, e poggiante su*

> *fondamenti il più possibile solidi. ... Il problema se il pensiero matematico sia logico nella sua essenza, è una questione in parte psicologica e in parte metafisica, che sono del tutto incompetente a trattare. D'altra parte, l'idea che la logica sia inseparabile da un'esposizione coerente dei fondamenti principali su cui deve poggiare la scienza matematica, è divenuta un truismo che pochi oserebbero mettere in discussione.*[1]

Già da questa breve citazione si possono cogliere alcune scelte di campo che compie Bourbaki.
Innanzitutto vi è la priorità nel restituire unità all'intera disciplina; molti sforzi saranno infatti rivolti a riorganizzare tutto il sapere matematico sviluppato fino ad allora. Chiave in questo processo di unificazione è l'invenzione del concetto di struttura. All'unità della matematica e al concetto di struttura Bourbaki dedica un intero articolo, *Architecture des mathématiques* del 1948; tale articolo, essendo il primo testo, oltre agli *Eléments*, pubblicato dall'autore, è considerato anche il manifesto programmatico del gruppo.

Nell'articolo Bourbaki paragona il proprio lavoro di riorganizzazione della matematica alla ristrutturazione urbanistica compiuta nel diciannovesimo secolo a Parigi quando furono creati i grandi *boulevard*:

> (attraverso questa impostazione) si può acquisire una maggiore consapevolezza della vita interna della matematica, di ciò che costituisce contemporaneamente la sua unità e la sua diversità; come una grande città, i cui sobborghi non cessano di svilupparsi, in modo abbastanza caotico, sul territorio circostante, mentre il centro viene ricostruito periodicamente, ogni volta secondo un piano più chiaro e un ordinamento più maestoso, abbattendo i vecchi quartieri ed i loro dedali di stradine, per lanciare verso la periferia viali sempre più diretti, più larghi e più comodi.[2]

Un secondo aspetto che si può cogliere dalla citazione iniziale è l'intenzione di fornire dei "fondamenti il più possibile solidi"; questa dichiarazione svela da un lato l'insicurezza riguardo alla possibilità concreta di portare fino in fondo tale compito, dall'altro, però, la convinzione che sia possibile avere un unico fondamento e che possa essere garantita una certa solidità. In più passaggi si trovano affermazioni come:
nell'introduzione degli *Eléments*

[1] [Bourbaki 1949, pag. 1] traduzione italiana in [Israel 2013]
[2] [Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

> nous croyons que ... qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler
> *noi crediamo che ... le parti essenziali di questo maestoso edificio (la matematica) non crolleranno mai*[3];

nell'*Architecture*

> noi pensiamo che l'evoluzione interna della scienza matematica abbia, nonostante le apparenze, consolidato più che mai l'unità nelle sue diverse parti, e vi abbia creato una sorta di nucleo centrale più coerente che mai[4];

nel *Foundation*

> to lay suitable foundations for his science
> *porre su basi solide la sua (del matematico) scienza*[5].

Infine, l'ultimo aspetto che appare rilevante, perchè affermato con convinzione, è l'importanza del ruolo della logica nelle trattazioni matematiche. Anche nell'introduzione agli *Eléments* troviamo espressioni come:

> Depuis les Grecs, qui dit mathématique dit démonstration; ... On a le droit de dire que ce sens n'a pas varié, car ce qui était une démonstration pour Euclide en est toujours une à nos yeux
> *Dopo i Greci, chi dice matematica dice dimostrazione; ...*
> *È legittimo dire che questo significato non è cambiato, perché ciò che era una dimostrazione per Euclide è ancora una dimostrazione per noi.*[6]

Nell'*Architecture*:

> È un banale truismo dire che questo "ragionamento deduttivo" è un principio di unità per la matematica.[7]

E nel *Foundation*:

[3][Bourbaki 1970, pag. 13] traduzione italiana in [Israel 2013]
[4][Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]
[5][Bourbaki 1949, pag. 3] traduzione italiana in [Israel 2013]
[6][Bourbaki 1970, pag. 7] traduzione italiana in [Israel 2013]
[7][Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

> Logical, or (what I believe to be the same) mathematical reasoning
> *Il ragionamento logico o (ciò che, secondo me, è lo stesso) matematico.*[8]

Per quanto riguarda i fondamenti della matematica, Jean Dieudonné, uno dei membri fondatori del gruppo, nel raccontare, a posteriori, la sua esperienza bourbakista dichiara apertamente:

> per quel che concerne i fondamenti, noi crediamo nella realtà della matematica, ma naturalmente quando i filosofi ci attaccano con i loro paradossi, corriamo a nasconderci dietro al formalismo e diciamo: "la matematica non è altro che una combinazione di simboli senza senso", e tiriamo fuori i Capitoli 1 e 2 sulla teoria degli insiemi. Infine veniamo lasciati in pace con la nostra matematica per farla come l'abbiamo sempre fatta nella convinzione che ogni matematico ha di lavorare su qualcosa di reale. Questa sensazione è probabilmente un'illusione, ma è molto comoda. Questo è l'atteggiamento di Bourbaki nei confronti del problema dei fondamenti.[9]

Si capisce, dunque, che la visione sui fondamenti di Bourbaki, non nasce da un puro interesse indagatore, ma piuttosto dall'esigenza di giustificare il proprio operato e le proprie "credenze metafisiche"[10].
D'altronde anche Bourbaki stesso scrive:

> una caratteristica comune ai diversi tentativi di integrare in una totalità coerente il complesso della matematica – che si tratti di Platone, di Descartes o di Leibniz, dell'aritmetismo o della logistica del diciannovesimo secolo – è quella di essere stati fatti in connessione con un sistema filosofico più o meno ambizioso; ma in ogni caso partendo da idee a priori sui rapporti della matematica con il duplice universo del mondo esterno e del mondo del pensiero.[11]

L'intento di questa tesi, appunto, è di desumere la filosofia del gruppo bourbakista attraverso un'analisi dei suoi scritti.

---

[8] [Bourbaki 1949, pag. 3] traduzione italiana in [Israel 2013]
[9] [Dieudonné 1970] traduzione italiana in [Israel 2013]
[10] Ibidem.
[11] [Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

Guardando solamente alle pubblicazioni che rappresentano la posizione ufficiale di Bourbaki, dove con ufficiale si intente i testi pubblicati a nome N. Bourbaki, ovvero approvati all'unanimità dall'intero gruppo, si possono trovare esposte solamente opinioni riguardo alcune delle questioni riguardanti la matematica come soggetto, evidentemente solo quelle ritenute collettivamente più salienti. In seguito considererò anche alcuni articoli attribuiti a singoli membri del gruppo, in cui viene espresso più esplicitamente un pensiero riguardo al dibattito sui fondamenti.

Fin da subito si nota che viene data particolare importanza alla trasmissione del sapere matematico. Bourbaki cerca costantemente di esprimersi in modo chiaro, ordinato e con un linguaggio preciso ed efficace.

L'interesse dei collaboratori di Bourbaki è principalmente quello di difendere, anzi promuovere, l'utilizzo del metodo assiomatico e di un linguaggio rigoroso nell'esposizione dei risultati matematici. Nell'introduzione agli *Eléments* l'autore spiega:

> un texte mathématique suffisamment explicite pourrait être exprimé dans une langue conventionnelle ne comportant qu'un petit nombre de "mots" invariables assemblés suivant une syntaxe qui consisterait en un petit nombre de règles inviolables: un tel texte est dit formalisé. ... La méthode axiomatique n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir. Ce n'est pas là une invention nouvelle; mais son emploi systématique comme instrument de découverte est l'un des traits originaux de la mathématique contemporaine. ... De plus, et c'est ce qui nous importe particulièrement en ce Traité, la méthode axiomatique permet, lorsqu'on a affaire à des êtres mathématiques complexes, d'en dissocier les propriétés et de les regrouper autour d'un petit nombre de notions, c'est-à-dire, ..., de les classer suivant les structures auxquelles elles appartiennent ... Ainsi, rédigé suivant la méthode axiomatique, et conservant toujours présente, comme une sorte d'horizon, la possibilité d'une formalisation totale, notre Traité vise à une rigueur parfaite.
> *un testo matematico sufficientemente esplicito potrebbe essere espresso in una lingua convenzionale composta da un piccolo numero di "parole" invariabili raggruppate secondo una sintassi consistente di un piccolo numero di regole inviolabili: un testo siffatto è detto formalizzato. ... Il metodo assiomatico è, in senso stretto, nient'altro che quest'arte di redigere dei testi la cui formalizzazione è facile da concepire. Non si tratta di un'invenzione nuova;*

> *tuttavia il suo impiego sistematico come strumento di scoperta è uno degli aspetti originali della matematica contemporanea. ... Inoltre, ed è questo l'aspetto che ci interessa di più in questo Trattato, il metodo assiomatico permette, quando si ha a che fare con enti matematici complessi, di dissociarne le proprietà e di raggrupparle attorno ad un piccolo numero di nozioni, cioè, ..., di classificarle secondo le strutture cui appartengono ... Pertanto il nostro Trattato, redatto secondo il metodo assiomatico e avendo sempre presente, come una sorta di orizzonte, la possibilità di una formalizzazione totale, mira ad un rigore perfetto.*[12]

Anche una decina di anni dopo, nell'*Architecture* viene ribadita l'efficacia del metodo:

> il metodo assiomatico insegna a ricercare le ragioni profonde ... a trovare le idee comuni nascoste sotto l'apparato esterno dei dettagli di ciascuna delle teorie considerate, ad enunciare queste idee ed a metterle in luce

sottolineandone anche gli aspetti pratici:

> il metodo assiomatico trova il suo punto d'appoggio nella convinzione che, se la matematica non è un concatenamento di sillogismi che si svolgono a caso, essa non è neppure una collezione di artifizi più o meno "astuti", basati su accostamenti fortuiti in cui trionfa la pura abilità tecnica. ... La sua caratteristica più rilevante, in base a quel che precede, è di realizzare un'economia di pensiero considerevole.[13]

Per quanto riguarda il contenuto matematico che Boubaki presenta, si può dire che la sua ristrutturazione, volta ad unificare le varie branche, riorganizza l'intera matematica in strutture, ciascuna definita da un insieme di elementi e da determinate proprietà che gli elementi soddisfano (vi sono tre tipi di strutture semplici, dette "madri": algebriche, d'ordine e topologiche, e poi via via vi possono essere insiemi che soddisfano più strutture contemporaneamente).

> Indubbiamente, non vi troveremo più l'ordine tradizionale che, come quello delle prime nomenclature delle specie animali[14], si limitava ad accostare le teorie che presentavano un maggior numero

[12] [Bourbaki 1970, pag. 7-12] traduzione italiana in [Israel 2013]

[13] [Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

[14] Questo paragone tra la nuova organizzazione della matematica secondo strutture, con una nuova nomenclatura zoologica viene ripreso anche in [Dieudonné 1949, Dieudonné 1970]

> di somiglianze esteriori. Invece dei compartimenti ben delimitati dell'Algebra, dell'Analisi, della Teoria dei Numeri e della Geometria, vedremo, ad esempio, la teoria dei numeri primi accanto a quella delle curve algebriche, o la geometria euclidea accanto alle equazioni integrali; e il principio ordinatore sarà la concezione di una gerarchia di strutture, che va dal semplice al complesso, dal generale al particolare.[15]

Precisa l'autore in *L'Architecture*.

Nocciolo di partenza di tutta la matematica deve essere quindi, per Bourbaki, la Teoria degli insiemi.

> on sait aujour d'hui qu'il est possible, logiquement parlant, de faire dériver toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles. Il nous suffira donc d'exposer les principes d'un langage formalisé unique, d'indiquer comment on pourrait rédiger en ce langage la Théorie des Ensembles, puis de faire voir comment s'insèrent dans celle-ci les diverses branches des mathématiques, au fur et à mesure que notre attention se portera sur elles.
> *è noto oggi che è possibile, dal punto di vista logico, far derivare quasi tutta la matematica contemporanea da una sorgente unica, la Teoria degli Insiemi. Ci basterà quindi esporre i principi di un linguaggio formalizzato unico, indicare come si potrebbe redigere entro questo linguaggio la Teoria degli Insiemi, e poi far vedere come si inseriscano in esse le diverse branche della matematica, man mano che la nostra attenzione si rivolgerà ad esse.*[16]

E più avanti, sempre nell'introduzione agli *Eléments*, ribadisce:

> Puisque les diverses théories mathématiques sont maintenant rattachées logiquement à la Théorie des Ensembles
> *Poiché le diverse teorie matematiche sono ora ricollegate dal punto di vista logico alla Teoria degli Insiemi*[17].

Nella presentazione bourbakista, dunque, alla base di tutto vi sono gli insiemi ma, a differenza del punto di vista di Cantor e Hilbert, Bourbaki,

[15][Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]
[16][Bourbaki 1970, pag. 13] traduzione italiana in [Israel 2013]
[17]Ibidem.

prendendo spunto da Borel e da Hadamard[18], ritiene sia sufficiente, oltre che essere l'unica cosa realmente possibile, avere solo una definizione molto

[18]Henri Cartan, membro fondatore di Bourbaki, nel suo articolo *Sul fondamento logico della matematica* afferma:

> Sembrerebbe difatti necessario definire con chiarezza di cosa si stia parlando e, in particolare, dare una definizione precisa di "insieme". Ma è evidente che tutti i tentativi in questa direzione sono falliti. ... secondo E. Borel, è sufficiente, per poter ragionare di insiemi, avere l'idea di ciò che essi sono, idea che viene acquisita mediante esempi. ... Nella sostanza, l'atteggiamento di E. Borel implica una rinuncia a dare una vera definizione; e di fatto, le definizioni date in precedenza (e, fra le quali, la più vecchia è quella dello stesso Cantor) sono deludenti, essendo spesso di natura filosofica, e prive di qualsiasi interesse dal punto di vista dell'uso che si vuol fare della nozione di insieme. Il matematico non ha bisogno di una definizione metafisica; egli vuole soltanto conoscere le regole precise alle quali è soggetto l'uso che egli deve fare della nozione di insieme.

Cartan prosegue, spostando allora l'interrogativo sulle regole :

> E sia pure! Ma chi stabilirà queste regole? Di fatto, i matematici che per primi ragionarono degli insiemi, obbedirono intuitivamente a regole non formulate, lasciandosi più o meno guidare dall'intuizione degli insiemi finiti, pur ragionando di insiemi infiniti.

Tale strategia, spiega Cartan, è però fallace perché, come ha dimostrato la storia, porta all'insorgere di paradossi. L'autore espone poi il pernsiero di Borel, il quale riteneva

> che per evitare i paradossi fosse sufficiente avere una nozione chiara degli enti di cui si ragiona: ogni ente di cui non si possiede una nozione chiara non ha il requisito dell'esistenza matematica, secondo Borel. - Ma - ...successivamente lo stesso Borel, parlando di ragionamenti riguardanti degli enti che non gli sembrano chiaramente definiti (nel caso specifico, i numeri transfiniti), ammette: "Se questi ragionamenti fossero sprovvisti di un qualsiasi valore, essi non potrebbero portare a nulla, perché sarebbero dei raggruppamenti di parole privi di significato. Noi riteniamo che un siffatto giudizio sarebbe troppo severo" [E. Borel, *Lecons sur la théorie des fonctions*, Paris, Gauthier-Villars, 1914]. E ancora: "Ragionamenti siffatti sono legittimi, in quanto ragionamenti generali, dal momento che sono esenti da contraddizione, ma sono allo stesso tempo privi di qualsiasi contenuto preciso"[Ibidem].

Cartan conclude commentando:

> Quest'ultima affermazione è discutibile, ma l'essenziale, a nostro parere, è che si riconosca il valore, sia pure relativo, dei "ragionamenti generali".

Secondo Cartan, dunque, è sufficiente avere un'idea approssimativa.
L'articolo prosegue poi presentando l'assiomatizzazione di Zermelo della Teoria degli insiemi. L'autore si sofferma ad evidenziare la vaghezza dell'attributo "ben definito" e le discussioni sull'esistenza degli enti determinati dagli assiomi. In merito a quest'ultimo punto, sostenendo sia la via più favorevole allo sviluppo della matematica, Cartan dichiara di sostenere

vaga del concetto "insieme". Ciò che conta per Bourbaki è soltanto l'aver stabilito, seppur in modo arbitrario, degli assiomi di partenza, ovvero delle affermazioni da cui far dipendere la verità di tutta la teoria assiomatizzata.

Nell'*Architecture* si legge:

> la caratteristica comune delle diverse nozioni che vengono indicate con questo nome generico, è il fatto che esse si applicano a insiemi di elementi la cui natura non è specificata; per definire una struttura, si danno una o più relazioni, nelle quali intervengono questi elementi ... Fare la teoria assiomatica di una struttura data, significa dedurre le conseguenze logiche degli assiomi della struttura, vietando ogni altra ipotesi sugli elementi considerati (in particolare, ogni ipotesi sulla loro "natura" propria).[19]

La scelta è dunque, non solo di accettare di considerare elementi la cui natura non è specificata, ma addirittura di vietare ogni altra ipotesi su di essi; stabilendo così una vaghezza ontologica per qualsiasi elemento.

Interessante, inoltre, è la nota dell'autore al brano appena citato sulla "natura degli elementi":

> Ci poniamo qui dal punto di vista "ingenuo" e non affrontiamo le questioni spinose, per metà filosofiche, per metà matematiche, sollevate dal problema della "natura" degli "enti" o "oggetti" matematici. Ci limiteremo a dire che le ricerche assiomatiche del diciannovesimo secolo hanno sostituito a poco a poco al pluralismo iniziale della rappresentazione mentale di questi "enti" – immaginati all'inizio come "astrazioni" ideali dell'esperienza sensibile e dotati di tutta l'eterogeneità di questa - una concezione unitaria, che riconduceva progressivamente tutte le nozioni matematiche, in primo luogo a quella di numero intero, e poi, in una seconda tappa, alla nozione di insieme. Quest'ultima nozione, considerata per molto tempo come "primitiva" e "indefinibile" è stata oggetto di polemiche interminabili, dovute al suo carattere di estrema generalità e alla natura molto vaga delle rappresentazioni mentali che essa evoca; le difficoltà si sono dissolte dopo che si è dissolta

> Il punto di vista di Hadamard, il quale ritiene, assieme a molti altri, che l'esistenza di una categoria di enti possa essere, in certi casi, dimostrata logicamente, senza che sia necessario, allo scopo, designare individualmente un ente di questa categoria

[Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]

[19] [Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

> la nozione stessa di insieme (e con essa tutti gli pseudoproblemi metafisici sugli "enti" matematici), alla luce delle ricerche recenti sul formalismo logico; entro questa nuova concezione, le strutture matematiche diventano, in senso stretto, i soli "oggetti" della matematica. (N.d.A.) Qui Bourbaki rinvia il lettore per maggiori approfondimenti a [Dieudonné 1939] e a [Cartan 1943].

Questa nota, pur esordendo "non affrontiamo le questioni spinose", apre una finestra che consente di entrare nel merito della questione sui fondamenti, descrivendola come "polemiche interminabili" su "pseudoproblemi metafisici sugli "enti" matematici" e affermando che "le ricerche assiomatiche del diciannovesimo secolo hanno sostituito a poco a poco al pluralismo iniziale della rappresentazione mentale di questi "enti" ... una concezione unitaria": il "formalismo logico".
Non si tratta quindi per Bourbaki solo di dichiarare esplicitamente la propria scelta epistemologica, ma di negare la sensatezza di scelte altrui. È tale negazione che, per certi versi, presta invece il fianco alla contestazione di chi non accetti tale diktat teorico.

È interessante in questo passo mettere in evidenza che Bourbaki usa lo stratagemma di far riferimento a note di altri autori per evitare di assumersi direttamente la responsabilità delle affermazioni più radicali. La scelta di far riferimento ad articoli precedenti consente a Bourbaki di evitare la polemica diretta di eventuali oppositori, lasciandoli di fatto senza interlocutore.

Dai testi citati per approfondimento, cerchiamo dunque, ora, di capire cosa intende Bourbaki per formalismo e come, secondo l'autore, sia risolta la crisi dei fondamenti (gli "pseudoproblemi").

Il primo testo riguarda una conferenza tenuta da Jean Dieudonné nel Gennaio del 1939 presso l'Institut des Hautes Études di Bruxelles e pubblicato sulla Revue Scientifique. In essa, riguardo al concetto di insieme, il bourbakista racconta:

> (Con i Grundlagen der Geometrie di Hilbert, pubblicati nel 1899) si decideva una volta per tutte di non far intervenire nei ragionamenti le proprietà che venivano usualmente associate agli enti definiti da queste parole, appariva chiaramente come fosse assolutamente inutile (almeno per la comprensione delle dimostrazioni) che queste parole indicassero nozioni precise; era sufficiente (e questo era il punto di vista dello stesso Hilbert) considerarle come i nomi di tre specie di enti (punti, rette e piani) sulla natura dei quali non si doveva fare alcuna ipotesi, ma fra i quali si supponeva che valessero le relazioni espresse dagli assiomi; e si vedeva

> così per la prima volta, e in modo perfettamente chiaro, che la matematica è lo studio logico delle relazioni fra certi enti, e non della natura di questi ultimi. ... procedendo sempre allo stesso modo: si prendeva come punto di partenza un insieme di elementi di natura assolutamente indeterminata, ma fra i quali esistevano certe relazioni, le quali, a loro volta, erano soggette a determinate condizioni; il sistema di queste condizioni costituiva il sistema di assiomi della teoria ... quale era, secondo questo nuovo punto di vista, l'intellegibilità del linguaggio matematico o, in altri termini, a quali rappresentazioni mentali dovevano corrispondere le parole che venivano utilizzate? Senza dubbio, si sottolineava esplicitamente l'inutilità di avere un'immagine mentale precisa degli oggetti di cui si ragionava; come diceva B. Russell, "La matematica è la scienza in cui non si sa di cosa si parla, né se ciò che si dice è vero". Tuttavia, almeno una qualità veniva attribuita a questi oggetti misteriosi, e cioè l'esistenza; e con l'esistenza, la proprietà di essere elementi di insiemi, di possedere mutue relazioni, di essere in corrispondenza gli uni con gli altri, e infine di poter essere oggetto di ragionamenti deduttivi secondo le antiche regole della logica aristotelica, ringiovanite e codificate dai logici del diciannovesimo secolo (Boole, Schröder, Frege). In definitiva, le nozioni indefinibili della nuova matematica, e di cui era tuttavia necessario possedere una chiara rappresentazione mentale, erano la nozione d'insieme e tutte le nozioni ad essa collegate.

È interessante notare come la logica di riferimento per Dieudonné sia quella aristotelica, "ringiovanita dai logici del diciannovesimo secolo" torneremo in seguito su questo punto.

Nel secondo testo, un articolo edito da Henri Cartan nel 1943 intitolato *Sul fondamento logico della matematica*, si afferma:

> Ci proponiamo di mostrare qui che esiste un inizio, o più precisamente un punto in cui inizia la matematica, la cui natura ed i cui metodi verranno ad essere, di conseguenza, chiaramente fondati. Quanto precede può stupire, a prima vista. Sembrerebbe difatti necessario definire con chiarezza di cosa si stia parlando e, in particolare, dare una definizione precisa di "insieme". Ma è evidente che tutti i tentativi in questa direzione sono falliti. ... Su che cosa potrà fondarsi un ragionamento, in assenza di una definizione? È vero che, secondo E. Borel, è sufficiente, per poter

> ragionare di insiemi, avere l'idea di ciò che essi sono, idea che viene acquisita mediante esempi[20].

Riguardo al concetto di insieme Cartan constata:

> le definizioni date in precedenza (e, fra le quali, la più vecchia è quella dello stesso Cantor[21]) sono deludenti, essendo spesso di natura filosofica, e prive di qualsiasi interesse dal punto di vista dell'uso che si vuol fare della nozione di insieme.

La sua posizione, come si nota, è rivolta ad un uso pratico delle teorie, più che ad una giustificazione filosofica.

> Il matematico non ha bisogno di una definizione metafisica; egli vuole soltanto conoscere le regole precise alle quali è soggetto l'uso che egli deve fare della nozione di insieme.

L'assiomatizzazione che propone di assumere per la Teoria degli insiemi è quella classica:

> Nella teoria di Zermelo (1906), che è stata spesso compresa male dai contemporanei, la parola insieme è svuotata di ogni contenuto intuitivo: è inutile sapere cosa indichi questa parola (come era inutile, per Hilbert, sapere cosa significassero le parole "punto", "retta", in geometria). Vi sono degli enti che vengono chiamati "insiemi", e si stabiliscono, a priori, certe relazioni fra questi enti; in altri termini, si impongono determinate condizioni, scelte in modo tale che non siano contraddittorie, alla collezione di oggetti detti "insiemi".

Infine tenta di spiegare i possibili motivi di fraintendimento e di lontananza dal proprio punto di vista:

[20] A tal proposito, sempre nello stesso articolo si dirà:

> Per parte nostra, riteniamo che le teorie matematiche "reali" siano semplicemente quelle che si ha sufficientemente l'abitudine di manipolare; e che questo carattere di "realtà" sia puramente soggettivo.

[21] Secondo Cantor, un insieme è la concezione in un tutto, di oggetti ben determinati e distinguibili gli uni dagli altri, sia che si tratti di oggetti dell'esperienza che si oggetti del pensiero; questi oggetti si chiamano gli elementi dell'insieme (Nota di H.Cartan)

> In effetti, si è ritenuto, per molto tempo, che in matematica vi fossero degli enti preesistenti ai quali potevano essere applicati i calcoli della logica, ma collocati al di fuori della logica, ad essa irriducibili; e sembra che questa sia stata l'opinione dello stesso Hilbert. Mostreremo, seguendo il punto di vista di Dieudonné,[22] che questa credenza deve essere abbandonata: una teoria matematica non è altro che una teoria logica, determinata da un sistema di assiomi (cioè di relazioni costruite a partire da relazioni elementari ed assunte come vere): gli enti della teoria sono definiti *ipso facto* dal sistema di assiomi, che, in un certo senso, genera il materiale al quale potranno essere applicate le proposizioni vere; definire questi enti, designarli, "applicare" ad essi le proposizioni e le relazioni, costituisce l'aspetto puramente matematico della teoria logica.[23]

Le controversie sui fondamenti sono quindi risolte, secondo i bourbakisti, dal formalismo, il quale non si preoccupa più di partire da elementi esistenti o assiomi veri, ma semplicemente di procedere in modo coerente, dopo aver assunto per scelta arbitraria degli assiomi da cui partire. (Nello specifico Bourbaki, nel primo volume degli *Eléments*, fornisce una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi che ricalca sostanzialmente l'assiomatizzazione di Zermelo.)

Tuttavia, mentre Hilbert delega l'affidabilità della matematica "propria" alla metamatematica, interpretando la duplicità come inscindibile, Bourbaki considera totalmente slegati questi due aspetti e ritiene perciò completamente libera la scelta degli assiomi.

> Ci interessa soltanto mettere bene in luce che il metodo formalista e la metamatematica non sono per nulla collegati necessariamente l'uno all'altra; se si manifesta troppo spesso la tendenza a stabilire questo collegamento, ciò avviene senza dubbio perché,

[22]Le idee di Dieudonné risalgono al 1938, ma egli non le aveva esposte dettagliatamente nella sua conferenza del 1939, che era concepita per non specialisti (si veda la Reuve Scientifique, 77, 1939, pp. 224-232). Ho ritrovato indipendentemente le idee di Dieudonné sul problema degli "elementi espliciti", e aggiungo che J. Dieudonné ed io stesso non sappiamo se altri le hanno sviluppate prima di noi. In sostanza, si tratta soltanto di mettere in luce ciò che tutti i matematici fanno consapevolmente o inconsapevolmente; un elemento esplicito non è altra cosa che la proprietà che lo definisce, e, in tutte le relazioni in cui figura un siffatto elemento, lo si può sostituire con la sua "definizione" (Nota di H. Cartan)

[23]Tutte le ultime citazioni sono tratte dall'articolo succitato [Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]

> nella mente di Hilbert, l'una era il complemento indispensabile dell'altro; ma abbiamo ora visto che nulla costringe ad adottare questo punto di vista.[24]

La frattura con il formalismo proposto da Hilbert è quindi sostanziale, al punto da poter considerare la proposta di Bourbaki come una quarta scuola di pensiero di fronte al problema dei paradossi nella teoria degli insiemi.

2.1 Il formalismo di Bourbaki

Mentre la via di Hilbert, alla luce dei teoremi di Gödel, si era dimostrata essere un vicolo cieco, Bourbaki dichiara con convinzione che:

> si sono eliminati i paradossi della teoria degli insiemi

e che

> Ai giorni nostri, gli ultimi echi di questa grande battaglia si spengono a poco a poco ed i problemi che furono tanto dibattuti venticinque anni fa non sono più così acuti e inquietanti.

Anzi,

> da questa rissa confusa, è emerso finalmente un punto di vista coerente e stabile, al quale hanno aderito a poco a poco quasi tutti i matematici della nuova generazione.[25]

La risolutezza con cui i membri di Bourbaki affermano che il problema sui fondamenti è stato risolto non lascia spazio a repliche:

> La matematica ha mostrato la sua vitalità traversando una di quelle crisi di crescenza alle quali essa è abituata da lunga data, e che vengono chiamate bizzarramente "crisi dei fondamenti"; essa l'ha attraversata non soltanto senza danni, ma anzi con grandi vantaggi[26].

Henri Cartan arriva ad affermare che:

---

[24] [Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]
[25] [Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]
[26] [Weil 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

> Lo scopo che si proponeva Hilbert: rendere sicuri, una volta per tutte, i fondamenti della matematica, ci sembra raggiunto

ma subito aggiunge:

> se rinunciamo, però, a risolvere i problemi fondamentali della logica (*Entscheidungsproblem*).[27]

Risiede, infatti, nella rinuncia ad affrontare il problema, la soluzione che i collaboratori di Bourbaki ritengono ormai assodata.

Secondo la visione bourbakista l'*Entscheidungsproblem* (letteralmente, problema della decisione, ovvero la capacità o meno di assegnare un valore di verità ad un enunciato, ciò che ora è chiamato *decidibilità*) non è affatto vitale per la matematica, al punto che i "matematici di mestiere" sono del tutto legittimati a disinteressarsene. Cartan, infatti, continua:

> Lasciamo quindi da parte i problemi di non-contraddittorietà, e vediamo qual è il ruolo del matematico.[28]

Anche Weil afferma:

> se la logica è l'igiene del matematico, non è la logica che gli fornisce il nutrimento; il pane quotidiano di cui vive il matematico sono i grandi problemi.[29]

E Dieudonnè ribadisce:

> Tutte le questioni come la non-contraddittorietà delle teorie, l'"Entscheidungsproblem", e in generale tutto ciò che concerne la teoria della dimostrazione, fanno parte ora di una scienza completamente separata dalla matematica, e cioè la Metamatematica; questa nuova disciplina non cessa di svilupparsi e ha già fornito numerosi risultati nuovi e pieni d'interesse; ma è perfettamente lecito al matematico ignorarla completamente senza che ciò lo ostacoli minimamente nelle sue ricerche.[30]

Quel che è sufficiente, secondo il parere bourbakista, è porsi da un punto di vista pratico e utilitaristico. Di fronte alla non-contraddittorietà, ad esempio, senza cercare alcuna dimostrazione a priori, basterà constatare di volta in volta l'assenza di contraddizioni.

[27] [Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]
[28] Ibidem.
[29] [Weil 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]
[30] [Dieudonné 1949] traduzione italiana in [Israel 2013]

> C'est dans le même esprit réaliste que nous envisageons ici la question de la non-contradiction ... Ce n'est évidemment pas là un argument permettant de conclure à la non-contradiction de la Théorie des Ensembles. Toutefois, depuis 50 ans qu'on a formulé avec assez de précision les axiomes de cette théorie et qu'on s'est appliqué à en tirer des conséquences dans les domaines les plus variés des mathématiques, on n'a jamais rencontré de contradiction, et on est fondé à espérer qu'il ne s'en produira jamais.
> *Entro lo stesso punto di vista realista ci poniamo per quel che concerne la questione della non-contraddittorietà. ... Non è questo un argomento che permette di dimostrare la non-contraddittorietà della Teoria degli Insiemi. Tuttavia, dopo 40 anni che si sono formulati con sufficiente precisione gli assiomi di questa teoria e che si è lavorato per trarne delle conseguenze nei campi più diversi della matematica, non si è mai incontrata una sola contraddizione, e si ha motivo di ritenere che non se ne incontreranno mai.*[31]

Dieudonnè spiega:

> È possibile allora adottare due atteggiamenti differenti nei confronti del problema della non-contraddittorietà: il primo consiste nel ritenere che, a causa dell'origine intuitiva della matematica, l'assenza di contraddizione sia molto verosimile, altrettanto quanto lo è il sorgere del sole; difatti in quest'ultimo caso, non è possibile motivare la nostra credenza, in ultima analisi, altro che con il fatto che, fino ad ora, il sole è sorto tutte le mattine, e un argomento analogo vale per la non-contraddittorietà della matematica.

Il secondo invece è quello di Hilbert, che consiste nel provare a dimostrare la non-contraddittorietà attraverso la metametematica ma, prosegue l'autore, finora, salvo alcuni risultati parziali, ogni tentativo globale si è rivelato inefficace.[32]

Anche le affermazioni di Bourbaki nel *Foundations* continuano a confermare la scelta di un punto di vista legato alla consuetudine:

> Historically speaking, it is of course quite untrue that mathematics is free from contradiction; non-contradiction appears as

[31] [Bourbaki 1970, pag. 12-13] traduzione italiana in [Israel 2013]
[32] [Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]

> a goal to be achieved, not as a God-given quality that has been granted us once for all. ...
> Contradictions do occur; but they cannot be allowed to subsist if the distinction between true and false, proved and unproved is to keep its meaning. There is no sharply drawn line between those contradictions which occur in the daily work of every mathematician, beginner or master of his craft, as the result of more or less easily detected mistakes, and the major paradoxes which provide food for logical thought for decades and sometimes centuries. Absence of contradiction, in mathematics as a whole or in any given branch of it, thus appears as an empirical fact, rather than as a metaphysical principle. The more a given branch has been developed, the less likely it becomes that contradictions may be met with in its further development.
> *Dal punto di vista storico è, ovviamente, del tutto falso che la matematica sia esente da contraddizioni; la non-contraddittorietà è un obiettivo da conseguire, più che una qualità concessa da Dio e garantita per sempre. ...*
> *Le contraddizioni si presentano; ma non si può ammettere che sussistano se si vuole che la distinzione fra vero e falso, fra dimostrato e non dimostrato conservi il suo significato. Non vi è una linea di demarcazione netta fra quelle contraddizioni che si presentano nel lavoro quotidiano di ogni matematico, che si tratti di un principiante o di un maestro, come risultato di errori più o meno facilmente rilevabili, e i paradossi più importanti che forniscono alimento al pensiero logico per decenni e talvolta per secoli. L'assenza di contraddizione, nella matematica come totalità o un una sua branca qualsiasi, si presenta quindi come un fatto empirico più che come un principio metafisico. Quanto più una data branca è stata sviluppata, tanto meno è probabile la comparsa di contraddizioni nel corso del suo sviluppo ulteriore.*[33]

Di fronte all'assenza della possibilità di ottenere una dimostrazione soddisfacente della non-contraddittorietà, la proposta dei collaboratori di Bourbaki è sostanzialmente di lasciare libero ciascun matematico nella scelta di assiomi e regole che gli sembrano più opportuni, in base a ciò che ciascuno ritenga ragionevole. Nei fatti invita, grazie ad una sorta di fiducia incondizionata nella matematica stessa, a comportarsi come se il "senso comune del matematico" fosse un criterio sufficientemente affidabile, in grado quasi di garantire a priori la sensatezza del risultato.

[33] [Bourbaki 1949, pag. 3-4] traduzione italiana in [Israel 2013]

> force est donc, en définitive, de faire confiance à ce qu'on peut appeler le sens commun du mathématicien; confiance analogue à celle qu'un comptable ou un ingénieur accorde à une formule ou une table numérique sans soupçonner l'existence des axiomes de Peano, et qui finalement se fonde sur ce qu'elle n'a jamais été démentie par les faits.
> *è quindi inevitabile, in definitiva, concedere fiducia a ciò che può essere chiamato il senso comune del matematico; una fiducia analoga a quella che un contabile o un ingegnere concede a una formula o a una tavola numerica senza sospettare l'esistenza di assiomi di Peano, e che si fonda in definitiva sul fatto che essa non è mai stata smentita dai fatti.*[34]

Tale è la fiducia nella proria disciplina che anche

> se si dimostrasse un giorno che la matematica è contraddittoria, si saprebbe probabilmente a quale regola attribuire la responsabilità di tale circostanza, e, sopprimendola o modificandola convenientemente, si potrebbe sfuggire alla contraddizione; si produrrebbe, in definitiva, un mutamento di orientamento della matematica ma non la sua sparizione come scienza.[35]

Ho mostrato finora come il formalismo proposto da Bourbaki, prende le distanze dal programma di Hilbert. Mostrerò ora invece i motivi per cui, ciò nonostante, la visione è giustamente chiamata formalista. Secondo i bourbakisti, infatti, la possibilità di tradurre ogni affermazione matematica in un testo formale e quindi composto da un numero finito di simboli, non ha tanto lo scopo di trasformare la trasmissione di verità in un fatto calcolabile aritmeticamente e in un certo senso più affidabile, ma ha il solo scopo di rendere più evidenti le assunzioni di verità da compiere in partenza.[36]

> La tesi fondamentale di Hilbert, che abbiamo in precedenza fatto nostra, - argomenta Dieudonné - è che si possono concepire con chiarezza soltanto degli oggetti determinati e in numero finito sperimentale (cioè tali che sia possibile contarli); pretendere, come si faceva nei primi tentativi assiomatici, di applicare il ragionamento matematico a enti indeterminati e in numero infinito, significa incorrere in oscurità ed incertezze ineluttabili, come

[34] [Bourbaki 1970, pag. 11] traduzione italiana in [Israel 2013]
[35] [Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]
[36] [Bourbaki 1970, Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]

> è destino di ogni tentativo di liberare il pensiero dai vincoli che la natura stessa della mente umana impone alla sua attività. Ma è possibile – insiste l'A. - sviluppare la maggior parte dei ragionamenti matematici restando nel finito? ... Hilbert sfugge a questo dilemma (attribuire o meno la verità a proposizioni "infinite" cioè che prevedono l'uso di quantificatori universali su domini infiniti, ad esempio la commutatività della somma, ndr.) in un modo tanto semplice quanto originale. ... È impossibile eludere la nozione dell'infinito fino a che si ritenga che l'essenza è il suo contenuto, cioè la rappresentazione mentale di cui essa è il simbolo; ma la difficoltà svanisce se si ammette, al contrario, che l'essenza di una proposizione è la sua forma, o in altri termini, che è inutile che una proposizione evochi una rappresentazione mentale diversa dalla percezione dei segni con i quali essa è stata scritta. ... è proprio questa l'idea fondamentale di Hilbert: nell'enunciato delle proposizioni matematiche, i segni impiegati sono dei "segni puri", svuotati di ogni significato.

Per spiegare l'idea del formalismo Dieudonné usa il paragone con il gioco degli scacchi[37]. Infatti egli spiega:

> Trasferendo questo punto di vista nel campo della matematica si ottiene la concezione di Hilbert: la matematica diventa un gioco, in cui i pezzi sono segni grafici che si distinguono gli uni dagli altri per la loro forma; con questi segni si formano delle disposizioni che, secondo la loro forma, sono dette relazioni o proposizioni; a norma di determinate regole, certe proposizioni sono qualificate come vere, e altre regole permettono di costruire delle proposizioni vere, sia a partire da relazioni arbitrarie, sia a partire da altre proposizioni vere; il punto essenziale consiste nel fatto che queste regole sono così fatte che, per controllare che esse siano verificate, è sufficiente esaminare la forma delle disposizioni che entrano in gioco. È importante rilevare che la parola "vero", come le parole "relazione" e "proposizione", hanno, in questa concezione, un significato puramente convenzionale: questi termini sono paragonabili a dei termini del gioco degli scacchi come "scacco", "matto", "arroccare", che vengono impiegati per descrivere in maniera abbreviata determinate situazioni o certe

[37] Il paragone della matematica col gioco degli scacchi viene ripreso anche in [Bourbaki 1970] e in [Dieudonné 1949] questo è prova del fatto che il pensiero di Dieudonnè e quello dell'intero gruppo Bourbaki sono in sintonia.

> mosse del gioco, che le regole descrivono con maggiore prolissità; analogamente, i termini matematici di cui abbiamo parlato sono delle abbreviazioni che indicano delle disposizioni di segni, la cui costruzione è precisata dalle regole.[38]

Come si vede, secondo il formalismo bourbakista, "vero" diventa sinonimo di "dimostrabile".

> Peu importe en effet, s'il s'agit d'écrire ou de lire un texte formalisé, qu'on attache aux mots ou signes de ce texte telle ou telle signification, ou même qu'on ne leur en attache aucune; seule importe l'observation correcte des règles de la syntaxe.
> *Se si tratta di scrivere o di leggere un testo formalizzato, ha poca importanza attribuire alle parole o ai segni del testo questo o quel significato, o persino l'attribuzione di un qualsiasi significato; quel che importa è soltanto che le regole della sintassi vengano correttamente osservate.*[39]

In questo modo, secondo Dieudonné, sono risolti tutti i problemi dei paradossi legati all'esistenza degli enti:

> si può dire che la matematica così concepita non faccia appello a nozioni e a ipotesi metafisiche più di quanto, ad esempio, non faccia appello ad esse il gioco degli scacchi. E così come si dispone, per convenzione unanime, di un metodo oggettivo per decidere se una mossa in una partita di scacchi è corretta o no, così si dispone di un metodo oggettivo per decidere se un testo matematico è corretto oppure no. In tal modo il problema dei fondamenti della matematica è completamente risolto. Occorre ovviamente mostrare che la concezione di Hilbert è realizzabile, e ciò può farsi soltanto realizzandola effettivamente.[40]

In conclusione, i formalisti che seguono la visione di Bourbaki,

> ritengono che un linguaggio formalizzato abbia assolto il suo compito quando possa trascrivere i ragionamenti matematici in forma priva di ambiguità e servire così da veicolo al pensiero matematico; tutti son padroni, essi affermeranno, di pensare ciò che vogliono sulla "natura" degli enti matematici o sulla "verità" dei teoremi impiegati purché i ragionamenti si possano trascrivere nel linguaggio comune.[41]

[38][Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]
[39][Bourbaki 1970, pag. 8] traduzione italiana in [Israel 2013]
[40][Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]
[41][Bourbaki 1960, pag. 48]

Nella concezione bourbakista non esiste più un unica verità assoluta di cui la matematica ha il compito di svelare i contenuti.

> Alla fine di questo grande lavoro di assiomatizzazione della matematica, quale risultato si era conseguito? In primo luogo, la nozione di verità delle proposizioni matematiche era stata liberata da ogni collegamento con quella di verità sperimentale; indubbiamente, così facendo, essa aveva perduto quella caratteristica di assolutezza che affascinava tanto i nostri antenati; si trattava ora di una verità in certo senso ipotetica, e cioè le proposizioni matematiche dovevano essere considerate vere solo in virtù della decisione puramente arbitraria, con la quale si dichiaravano veri gli assiomi; la sola verità assoluta che sussisteva era quella delle regole della logica.[42]

La matematica secondo Bourbaki è soltanto un gioco, una struttura vuota che, quasi miracolosamente[43], torna utile nello studio della fisica, l'ingegneria e le scienze, ma che a priori non è ad esse vincolata. Tale convinzione torna particolarmente evidente nelle affermazioni nell'*Architecture*:

> Nella concezione assiomatica, la matematica appare in sostanza come una riserva di forme astratte – le strutture matematiche; e accade – senza che si sappia bene il perché – che certi aspetti della realtà sperimentale si modellino entro alcune di queste forme, come per una sorta di preadattamento. ... Soltanto se si attribuisce questo significato alla parola "forma" si può dire che il metodo assiomatico è un "formalismo"; l'unità che esso conferisce alla matematica, non è che l'armatura della logica formale, cioè l'unità di uno scheletro senza vita.[44]

Di più, Weil arriva ad affermare che lo studio matematico è libero da qualsiasi altra scienza.

[42][Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]

[43]In [Cartan 1943] si scrive:

> Di fatto, è indispensabile distinguere la matematica in quanto strumento (di cui abbiamo studiato il funzionamento), dallo studio della natura, che è un fine per il quale è forgiato questo strumento. Il miracolo della scienza consiste nella possibilità di edificare una matematica astratta, applicabile in seguito con efficacia alle leggi della natura. È sotto la guida dei fenomeni naturali che il matematico, in fin dei conti, sceglie gli assiomi che faranno nascere una teoria efficace.

[44][Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

> "la matematica, diceva G.H.Hardy[45] in una celebre lezione inaugurale, è una scienza inutile. Intendo dire con ciò che essa non può servire direttamente né allo sfruttamento dei nostri simili, né al loro sterminio". Vi sono pochissimi uomini oggigiorno che, nel gioco della loro attività intellettuale siano liberi in modo altrettanto completo quanto il matematico.[46]

Anche Dieudonné insiste sulla libertà e sulla piena autonomia della matematica da tutte le discipline, in particolare dalla filosofia:

> Questo modo di concepirla ci è valso una autonomia assoluta dalla filosofia. - E prosegue - Mi spiego: il filosofo può sempre trovarsi in disaccordo con tutto il nostro sistema o con una parte di esso, in nome dei rapporti che questo sistema può avere con altri aspetti del pensiero o della realtà; devo dire che, in quanto matematici, ciò ci riguarda assai poco. Quel che preoccupava legittimamente i nostri predecessori era il fatto che i filosofi potessero inficiare i loro ragionamenti, per così dire, dall'interno e cioè svelarvi delle oscurità, delle incoerenze o delle contraddizioni. La grande revisione critica che è seguita alla crisi del 1900 ci ha fornito delle basi abbastanza solide da farci sentire attualmente del tutto immuni da questo pericolo[47].[48]

A chi contesta l'esagerato relativismo dato dalla mancanza di vincoli esterni alla matematica stessa, Dieudonné replica:

> Questa indipendenza completa della Matematica assiomatizzata è un fatto positivo o no? Si tratta di una questione del tutto sentimentale che può essere d'altra parte considerata sotto punti di vista molto diversi. Mi limiterò a considerare due aspetti: un primo ostacolo è di ordine specificatamente matematico. Il metodo assiomatico ha attratto la maggior parte dei matematici contemporanei soprattutto perché forniva dei mezzi nuovi e

[45]Famoso matematico inglese, nato nel 1877 e morto nel 1947. Si occupò soprattutto di questioni di analisi matematica. Weil si riferisce alla lezione inaugurale tenuta all'Università di Oxford nel 1920, *Some famous problems of the Theory of Numbers and in particular Waring's Problem*, Oxford, Claredon Press.

[46][Weil 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

[47]Io non mi riferisco qui ai rapporti tra filosofia e metamatematica, essendo quest'ultima, come ho già detto, completamente separata dalla matematica propriamente detta. (Nota di Dieudonné)

[48][Dieudonné 1949] traduzione italiana in [Israel 2013]

> potenti per affrontare numerosi problemi classici che restano al centro dei loro interessi. Ma l'esperienza ha mostrato che vi è ragione di temere, da parte di ricercatori in vena di copiature o che non si sentano sufficientemente preparati ad affrontare dei problemi difficili, una proliferazione di teorie assiomatiche del tutto gratuite, e prive di qualsiasi possibilità d'applicazione ai grandi problemi tradizionali. A dire il vero, non mi sembra che questo pericolo sia molto grande, poiché l'eliminazione di queste escrescenze patologiche sarà conseguenza dell'oblio in cui saranno relegate dalla loro inutilità. L'altro aspetto della questione è viceversa di carattere essenzialmente filosofico, poiché concerne i rapporti fra Matematica ed esperienza sensibile. Salpando le ancore che la legavano alle "realtà" della Matematica classica, la Matematica moderna non rischia di divenire sempre meno utilizzabile per la schematizzazione dei fenomeni sperimentali mediante teorie che ne permettano la previsione qualitativa o quantitativa? Anche in questo caso, gli sviluppi recenti della scienza sperimentale non danno motivo di pensare che un siffatto pericolo sia vicino.[49]

Egli conferma, in tal modo, l'attenzione principale ai risvolti concreti nell'ambito della ricerca scientifica e la netta persuasione che ciò che si dimostrerà nei fatti inutilizzato cadrà di per sé nella dimenticanza.

2.2 Il rapporto di Bourbaki con la Logica

Per un approccio critico al pensiero di Bourbaki, ritengo doveroso indagare, infine, anche in che modo questo autore collettivo si pone in rapporto alla logica.
Dalle citazioni fin qui proposte traspare, infatti, ripetutamente la rilevanza data alla logica e alla correttezza delle deduzioni. Bourbaki e suoi collaboratori come Cartan e Dieudonné, vi insistono molto; a titolo esemplificativo riporto di seguito alcune ulteriori espressioni che evidenziano questo fatto.
Dieudonnè, 1939:

> Nonostante le grandi dispute filosofiche sollevate dai "paradossi" i matematici non hanno smesso di concordare, nella sostanza, sul valore logico della quasi totalità dei loro ragionamenti.[50]

Cartan, 1943:

[49] Ibidem.
[50] [Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]

> una teoria matematica non è altro che una teoria logica, determinata da un sistema di assiomi ...
> precisiamo il vero scopo da conseguire: edificare interamente la matematica sulla sola logica.[51]

Dieudonné, 1949:

> Se si accettano le regole della logica, la correttezza del ragionamento è garantita, purchè in esso non intervengano altro che le ipotesi.[52]

Dieudonné, 1968:

> deduzione logica, la quale, molto più che l'idea di assioma, è il vero e unico motore del pensiero matematico; quello che bisognerebbe far assimilare al più presto è l'idea che da una proposizione ammessa per un motivo qualsiasi, e la cui provenienza non entra in questione, si possono ricavare altre proposizioni, per mezzo del solo ragionamento. ...
> quello che invece è di importanza universale è il saper fare delle deduzioni logiche corrette a partire da premesse che non hanno necessariamente bisogno di essere santificate da un albero genealogico risalente alla Teoria degli Insiemi![53]

Dieudonné, 1970:

> Fin dai tempi di Hilbert e di Dedekind sapevamo molto bene che gran parte della matematica poteva essere sviluppata da un punto di vista logico ed efficacemente a partire da un piccolo numero di assiomi ben scelti.[54]

La logica dunque, per questi autori, è un elemento essenziale, "la base dell'edificio"[55] nel discorso matematico, senza cui non è possibile neppure parlare di questa disciplina.

Tuttavia Bourbaki, sorprendentemente, sembra rifiutare di interrogarsi sulla validità delle regole logiche di deduzione; anzi, egli delegittima le questioni sollevate dagli intuizionisti e ritiene che l'unico sistema degno di essere preso in considerazione sia quello dato dalle regole classiche.
A tal riguardo riporto l'opinione espressa in *Sul fondamento logico dalla matematica*, di Henri Cartan del 1943:

[51] [Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]
[52] [Dieudonné 1949] traduzione italiana in [Israel 2013]
[53] [Dieudonné 1968] traduzione italiana in [Israel 2013]
[54] [Dieudonné 1970] traduzione italiana in [Israel 2013]
[55] [Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]

> Il nostro scopo è quello di mostrare come la logica possa costituire la base dell'intero edificio matematico, contrariamente a quanto ritengono gli "intuizionisti".

Il matematico francese, racconta:

> a partire dal momento stesso in cui si ammette che possano esistere in matematica delle proposizioni né vere né false, il ragionamento matematico stesso è messo in discussione, secondo Brouwer.

L'enfasi, retorica più che rigorosa, lo porta ad esclamare:

> Grazie a Dio, la maggior parte dei matematici non si è rassegnata ad ammettere che l'opera di tante generazioni si trovasse, da un giorno all'altro, sprovvista di ogni validità. E, di fatto, quest'opera è perfettamente legittima, e si può darle un solido fondamento, e questo fondamento risiede precisamente nella logica classica (quella del terzo escluso), contrariamente all'opinione di Brouwer.[56]

Per altro verso, in accordo con l'articolo appena riportato, la scelta bourbakista di considerare come uniche regole logiche di riferimento quelle classiche non è fondata su una chiara argomentazione ma poggia arbitrariamente sulla consuetudine e sulla tradizione, e rifugge da ogni possibile critica adducendo ragioni di maggiore "comodità", come se questa sola bastasse a legittimarla.

> The majority of contemporary mathematicians have preferred to follow another path, which leaves classical logic intact but abstains from any rigid attachment of mathematical notions and objects to physical reality: everyone is free to think what he will on this subject, provided that his arguments are formalizable, that is to say, capable of translation into a "formal language".[57]
> *La maggioranza dei matematici contemporanei ha preferito seguire un'altra strada, la quale mantiene intatta la logica classica ma si astiene da ogni attaccamento rigido delle nozioni e degli oggetti matematici alla realtà fisica: ognuno è libero di pensare a riguardo ciò che penserà, a patto che le sue argomentazioni siano formalizzabili, che significa, che sia possibile tradurle in un "linguaggio formale".*

[56][Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]
[57][Dieudonné 1982]

Nel *Foundation* Bourbaki afferma:

> if logic (as grammar) is to acquire a normative value, it must, with proper caution, allow the mathematician to say what he really wants to say, and not try to make him conform to some elaborate and useless ritual. After the logician has properly discharged such duties, and helped the mathematician to lay suitable foundations for his science, he may then set himself further objectives.
> *se la logica (come la grammatica) deve possedere un valore normativo, essa deve, sia pure con le dovute cautele, consentire al matematico di dire ciò che egli effettivamente vuol dire, e non tentare di subordinarlo ad un rituale elaborato ed inutile. Dopo che il logico ha adempiuto correttamente a questi obblighi, ed ha aiutato il matematico a porre su basi solide la sua scienza, egli deve porsi altri obiettivi.*[58]

Al di là delle dichiarazioni di principio, Bourbaki, evita accuratamente di argomentare la propria posizione limitandosi, qualora se ne prestasse l'occasione, ad affermare che la giustificazione dell'appropriatezza delle regole di deduzione, trattandosi di una questione in ambito metamatematico, esula dal suo campo di interesse. Come esempio emblematico riporto l'affermazione di Dieudonné in *L'axiomatique dans les mathématique moderne*:

> in generale tutto ciò che concerne la teoria della dimostrazione, fa parte ora di una scienza completamente separata dalla matematica, e cioè la Metamatematica; ... (ed) è perfettamente lecito al matematico ignorarla completamente senza che ciò lo ostacoli minimamente nelle sue ricerche.[59]

Senza fornire giustificazioni teoriche Bourbaki, con estremo ottimismo, ritiene che la strategia più efficace sia rimandare ogni giudizio all'evidenza nel futuro. Nell'introduzione agli *Eléments* si legge:

> Ce faisant, nous ne prétendons pas légiférer pour l'éternité. Il se peut qu'un jour les mathématiciens s'accordent à utiliser des modes de raisonnement non formalisables dans le langage exposé ici; il faudrait alors, sinon changer complètement de langage, tout au moins élargir les règles de la syntaxe. C'est à l'avenir qu'il appartiendra de décider. ...

[58][Bourbaki 1949, pag. 3] traduzione italiana in [Israel 2013]
[59][Dieudonné 1949] traduzione italiana in [Israel 2013]

> En résumée, nous croyons que la mathématique est destiné à survivre, et qu'on ne verra jamais les parties essentielles de ce majestueux édifice s'écrouler du fait d'une contradiction soudain manifestée; mais nous ne prétendons pas que cette opinion repose sur autre chose que sur l'expérience. C'est peu, diront certains. Mais voilà vingt-cinq siècles que les mathématiciens ont l'habitude de corriger leurs erreurs et d'en voir leur science enrichie, non appauvrie; cela leur donne le droit d'envisager l'avenir avec sérénité.
> *non pretenderemo di legiferare per l'eternità. Può darsi che un giorno i matematici decidano concordemente di utilizzare modi di ragionamento non formalizzabili nel linguaggio che abbiamo esposto; occorrerebbe allora, se non cambiare completamente linguaggio, quanto meno allargare le regole della sinassi. È al futuro che spetterà di decidere. ...*
> *In conclusione, noi crediamo che la matematica sia destinata a sopravvivere, e che le parti essenziali di questo maestoso edificio non crolleranno mai per la comparsa improvvisa di una contraddizione; ma noi non pretendiamo che questa opinione poggi su altro che sull'esperienza. È poco, diranno taluni. Ma sono ormai venticinque secoli che i matematici hanno l'abitudine di correggere i loro errori e vedono la loro scienza arricchirsi anziché impoverirsi; ciò li autorizza a guardare al futuro con serenità.*[60]

E pure Weil ammette:

> Può certamente accadere che un giorno i nostri posteri desiderino introdurre nella teoria degli insiemi dei modi di ragionamento che noi non riteniamo legittimi; può anche darsi, nonostante che i lavori dei logici moderni rendano assai improbabile questa eventualità, che un giorno l'esperienza faccia scoprire, nei modi di ragionamento di cui facciamo uso, il germe di una contraddizione che oggi non scorgiamo; sarà allora necessaria una revisione generale; ma fin d'ora si può essere certi che la parte essenziale della nostra scienza non ne sarà toccata.[61]

Infine, a mio parere, Bourbaki mostra di non aver probabilmente compreso fino in fondo la critica intuizionista, la quale porta a rifiutare l'uso del *tertium non datur*, quando afferma che la comparsa dei paradossi non ha

[60][Bourbaki 1970, pag. 9,13] traduzione italiana in [Israel 2013]
[61][Weil 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

causato grosse rivoluzioni. Così facendo egli arriva indirettamente a pretendere, di fatto, che il calo di attenzione nel dibattito sui fondamenti equivalga al suo superamento. In un articolo di Dieudonné si legge:

> nella matematica non si è mai verificata una rivoluzione paragonabile a quella della Fisica del ventesimo secolo, che costringesse a ricostruire dalle fondamenta un sistema di pensiero. Ciò che più vi si è avvicinato sono alcune nuove idee che hanno profondamente modificato i fondamenti della matematica o la concezione dei suoi rapporti con la realtà sensibile, come l'invenzione delle geometrie non euclidee, quella del "transfinito" di Cantor; e di recente la scoperta delle proposizioni indecidibili. ... Ma in ciascuno di questi tre casi, l'effetto di queste idee sullo sviluppo della matematica propriamente detta è stato soprattutto quello di fornire delle tecniche nuove, senza che fosse necessario rimettere in discussione i metodi precedenti. ... I matematici non hanno quindi motivi per dubitare della prosperità della loro scienza, almeno finché dureranno le forme attuali di civiltà.[62]

In sostanza Bourbaki ritiene che l'orientamento della maggioranza dei matematici, a favore della propria posizione, chiuda nella pratica ogni altra questione.
Pare evidente invece che la presenza di punti di vista differenti mantiene aperta una questione irrisolta[63].

[62][Dieudonné 1978] traduzione italiana in [Israel 2013]

[63]

> Contrariamente ad una opinione diffusa anche tra matematici, non solo esiste un problema dei fondamenti ma il suo interesse, oggi in particolare, non è soltanto teorico (N.d.A.:Il problema dei fondamenti della matematica è a mio parere niente meno che al cuore della scienza, e pertanto di enorme interesse teorico; ma per imprevedibili ricorsi della storia, negli ultimi anni si va affermando l'idea che una sana fondazione della matematica abbia benefici riflessi anche sull'informatica, e quindi che la ricerca filosofica sui fondamenti possa congiungersi direttamente con le applicazioni pratiche. Un esempio emblematico è la teoria degli insiemi intuizionistica, o costruttiva, di Martin-Löf, nata da esigenze filosofiche nel decennio scorso ed ora direttamente implementata su calcolatore.). Un mito da sfatare è la totale certezza, chiarezza e staticità dei concetti matematici, il cui corollario è una affidabilità assoluta che non prevede discussioni. Ma che la matematica poggi su basi ben ferme e indiscutibili è un'illusione in cui si può cadere solo da un punto di osservazione esterno o schiacciato al tempo presente.

[Sambin 2005]

Capitolo 3

Considerazioni e commenti

> "If you are a mathematician working today, you have almost certainly been influenced by Bourbaki, at least in style and spirit, and perhaps to a greater extent than you realize. But if you are a student, you may never have heard of it, him, them."[1]

3.1 Il successo dell'opera

L'opera di Bourbaki riscosse un notevole successo e si diffuse rapidamente sia a livello nazionale che internazionale, soprattutto tra le nuove generazioni. Esso colpiva per la scelta di un linguaggio allo stesso tempo semplice e rigoroso. Inoltre, la presentazione degli argomenti in modo assiomatico e secondo un ordine preciso lo resero punto di riferimento e modello anche per i successivi trattati. Pierre Cartier, riferendosi agli anni cinquanta, racconta:

> It took Bourbaki about five or six years to subvert the whole system. ... I remember how we – the young mathematicians - were really eager to go to the bookstore to buy the new books. And at that time Bourbaki published at least one or two volumes every year.[2]
> *Bastarono cinque o sei anni per rivoluzionare l'intero sistema. ... Mi ricordo come noi - i giovani matematici - eravamo ansiosi di andare in libreria per comprare i nuovi libri. E al tempo Bourbaki pubblicava almeno uno o due volumi ogni anno.*

Il periodo di maggior fioritura per Bourbaki fu dal secondo dopoguerra fino ai primi anni ottanta, ma l'influenza bourbakista permane evidente fino

[1] [Senechal 1998, pag. 1]
[2] [Senechal 1998, pag. 2]

ai giorni nostri.
Per questo motivo diventa importante evidenziare in modo esplicito, quale sia la visione che questi matematici presentano della propria disciplina, ovvero quale sia in definitiva il loro "solido fondamento"[3].

3.2 Un pregiudizio da sfatare

Se si pensa a Bourbaki come formalista alla stregua di Hilbert e poi si leggono affermazioni come quelle riportate nel capitolo precedente:

> La matematica ha mostrato la sua vitalità traversando una di quelle crisi di crescenza alle quali essa è abituata da lunga data, e che vengono chiamate bizzarramente "crisi dei fondamenti"; essa l'ha attraversata non soltanto senza danni, ma anzi con grandi vantaggi[4],

viene spontaneo chiedersi addirittura se i bourbakisti fossero a conoscenza dei teoremi di incompletezza di Gödel, tale dubbio può nascere anche dal fatto che Gödel non viene praticamente mai citato esplicitamente nei testi dei bourbakisti riguardanti i fondamenti e la logica. Al contrario, tra gli studiosi del problema dei fondamenti, soprattutto tra i logici, i teoremi di Gödel costituiscono una pietra miliare[5], una svolta epocale: dalla ricerca di una certezza inconfutabile all'ammissione di limiti nella conoscenza umana. Essi, infatti, secondo la maggioranza degli studiosi, annunciano l'irrealizzabilità del programma di Hilbert, il quale affidava la certezza della matematica alla dimostrazione della coerenza dell'Aritmetica. Molti dunque, apprezzando il lavoro di Bourbaki, rimangono increduli nel constatare silenzio di fronte ad un tema così importante. Celebre è l'articolo di A.R.D. Mathias, intitolato *The Ignorance of Bourbaki*, pubblicato nel 1992 sulla rivista americana *The Mathematical Intelligencer*, nel quale l'autore manifesta la propria incredulità:

---

[3] [Cartan 1943] traduzione italiana in [Israel 2013]

[4] [Weil 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]

[5] Nel discorso in occasione della consegna a Gödel del premio Einstein, nel 1951, John von Neumann disse:

> Il risultato di Kurt Gödel nella logica moderna è unico e monumentale – in realtà è più di un monumento, è una pietra miliare che resterà visibile da lontano nello spazio e nel tempo.

[Berto 2008, pag. 8]

> Given the importance of this result for foundational studies, and given the eager response of von Neumann and others to Gödel's ideas, it is natural to ask what effect Gödel had on the Bourbachistes; and the strange thing is that one searches their publications in vain for mention of his name. One might almost say that they ignored him, except that the tone of certain of their works suggests a conflict between an uneasy awareness that something has happened and a desire to pretend that it has not.[6]
> *Data l'importanza di questo risultato per gli studi sui fondamenti, e data l'appassionata risposta alle idee di Gödel da parte di von Neumann e altri, è naturale chiedersi che effetto abbia avuto Göedel sui bourbakisti; e la cosa strana è che si cercano invano menzioni del suo nome nelle loro pubblicazioni. Si può al massimo affermare che lo ignorano, eccetto per il tono di alcuni loro lavori che lascia intuire un conflitto tra una scomoda consapevolezza che sia successo qualcosa e il desiderio di far finta che non sia accaduto.*

L'autore arriva così a concludere che:

> It is as though they had discovered that they were on an island with a dragon and in response chose to believe that if the dragon were given no name it would not exist.[7]
> *È come se avessero scoperto di essere su un'isola con un drago e in risposta hanno scelto di credere che se al drago non fosse stato dato un nome non sarebbe esistito.*

Avendo interpellato direttamente tramite e-mail l'ormai ottantaseienne Pierre Cartier, che fu collaboratore di Bourbaki tra gli anni '50 e gli anni '80, ho scoperto - in occasione di questo lavoro di ricerca per la tesi - invece che la situazione non è affatto quella appena descritta. Al contrario, ritengo più calzante credere che Bourbaki, conscio delle conseguenze dei teoremi di Gödel, abbia condotto le proprie riflessioni fin da principio in una direzione differente.

Prova del fatto che Bourbaki fosse a conoscenza degli studi di Gödel e degli altri logici suoi contemporanei, risiede nell'introduzione agli *Eléments*, dove è scritto:

> occorrerebbe, per sfuggire a questo dilemma, poter "dimostrare" la non-contraddittorietà di un linguaggio formalizzato con dei

[6][Mathias 1992]
[7]Ibidem.

> ragionamenti formalizzabili in un linguaggio meno ricco e di conseguenza degno di fiducia; ma un teorema celebre di matematica, dovuto a Gödel, afferma che ciò è impossibile se si tratta di un linguaggio del tipo di quello che descriveremo, e sufficientemente ricco di assiomi per consentire di formulare i risultati dell'aritmetica classica.[8]

E soprattutto nel libro *Eléments d'histoire des mathématiques* dove N. Bourbaki confezionò in un unico volume tutte le note storiche ai suoi *Eléments*. In particolare, nel primo capitolo, sono presentate nel dettaglio le vicende e lo sviluppo del pensiero dei matematici attorno ai fondamenti, la nascita della visione formalista, i teoremi di Gödel con una versione riassuntiva delle dimostrazioni e le conseguenze degli stessi.

3.3 Il prezzo dell'unità

Caratteristica rilevante del pensiero bourbakista, nonché uno dei pilastri del trattato, è la volontà di restituire unità all'intera matematica. Senza dubbio l'enorme lavoro di raccolta in un'unica opera di molti risultati, l'invenzione del concetto di struttura matematica, che permette di accostare teorie che fino a prima venivano ritenute separate e distanti, e lo stile omogeneo di presentazione dei contenuti in modo assiomatico, hanno rivoluzionato l'intera disciplina, conferendo un nuovo ordine e un principio unificatore.
Tuttavia, nonostante la vasta generalità e astrazione raggiunta attraverso il concetto di struttura, l'obiettivo di unità universale si è rivelato essere troppo ambizioso. In definitiva, infatti, i bourbakisti si sono ritrovati, pur di mantenere fedeltà al principio annunciato, ad escludere dalla matematica tutte le ricerche e teorie che non potevano essere presentate in modo ordinato nella gerarchia delle strutture. Durante una conferenza tenuta all'Istituto Romeno di Matematica (a Bucarest) nel 1968, Dieudonné dichiarò:

> la mia immagine della matematica contemporanea è questa. Essa è come una palla di lana, una matassa aggrovigliata in cui tutta la matematica reagisce su se stessa in modo quasi imprevedibile. ... E poi, in questa palla di lana, vi sono un certo numero di fili che escono fuori in tutte le direzioni e che non si collegano a nient'altro. Ebbene il metodo Bourbaki è molto semplice – tagliamo i fili.

Proseguendo nel discorso, tuttavia, aggiunse:

[8] [Bourbaki 1970] traduzione italiana in [Israel 2013]

> ... se dovessi compiere una valutazione dovrei probabilmente dire che Bourbaki esclude la matematica più ingegnosa, i risultati più ammirati in quanto mettono in luce l'ingegno e la capacità di penetrazione del loro scopritore. Non stiamo parlando di una classificazione che consista nel mettere il buono alla destra ed il cattivo alla sinistra – noi non giochiamo a fare Dio. Vogliamo soltanto dire che se vogliamo essere in grado di fornire un quadro della matematica moderna che soddisfi l'idea di stabilire un centro da cui derivi tutto il resto, è necessario eliminare molte cose.[9]

Tale discorso mette di fronte a due consapevolezze: la prima, come mostra il fatto stesso che Dieudonné sia costretto ad esplicitarlo, riguarda l'effetto che l'impostazione degli *Eléments* ha avuto. Nonostante i buoni propositi, esso non è stato neutrale, al contrario ha proprio creato uno spartiacque tra la matematica degna di nota e quella indegna. La seconda è che, contrariamente a quello che pensano alcuni detrattori di Bourbaki, vi è una consapevolezza nei membri del gruppo dei limiti della loro opera.

Tornando a riflettere sugli effetti dovuti della rigida selezione degli argomenti trattati unita ad un'impostazione universalistica, gli storici della matematica concordano nell'osservare che, soprattutto dove gli *Eléments* hanno avuto più diffusione, si è verificato un confinamento ad uno stato di emarginazione di intere branche della matematica: precisamente quelle che Bourbaki ha omesso dal suo trattato, o perché non erano trattabili assiomaticamente a partire dal concetto di struttura, o per personali antipatie da parte di membri influenti del gruppo. Gli esempi più eclatanti e più criticati furono il caso della probabilità e statistica e quello della matematica applicata alla Fisica.

> Molte testimonianze possono documentare come (al di là di una semplice assenza d'interesse) il Calcolo delle probabilità e la Statistica matematica siano stati implicitamente, o anche esplicitamente, svalutati dal movimento bourbakista negli anni '40 – '50 ... e anche dopo[10].

Ad esempio, in un articolo di A. Weil, pubblicato nell'Aprile del 1940 sulla Reuve Scientifique, dal titolo *Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration* si legge:

> i lavori di Statistica si riducono in realtà a raccolte di ricette e precetti, che vogliamo credere scelte felicemente. Queste raccolte

[9] [Dieudonné 1970] traduzione italiana in [Israel 2013]
[10] [Meusnier]

> si trovano scritte in una forma altamente algebrica e comportano qualche volta l'utilizzo di logaritmi, esponenziali e integrali. Godono così, agli occhi dei profani, di tutto il prestigio dell'esattezza matematica quando chiamano dimostrazione delle considerazioni che, anche laddove risultino molto tecniche, non hanno alcun senso per i matematici e consistono semplicemente in considerazioni euristiche, più o meno probanti. La Statistica moderna sembra, insomma, aver risolto il leggendario problema che consisteva nel calcolare, conoscendo la lunghezza della nave e la durata della traversata (ai tempi della navigazione a vela, si aggiungeva l'altezza dell'albero maestro) l'età del capitano. Trasmettete questo problema a non importa quale Istituto specializzato e vi invierà quanto prima una Memoria scientifica dove, non senza l'aiuto di grafici e di tavole di dati, verranno calcolati i coefficienti di correlazione tra le precedenti variabili.[11]

Lo stesso Laurent Schwartz, che fu membro del gruppo, arrivò a confessare nella sua autobiografia:

> nella valutazione della Probabilità, Bourbaki ha commesso degli evidenti errori. ... Bourbaki ha preso le distanze dalla Probabilità. L'ha rifiutata considerandola non rigorosa e, per la sua forte influenza, ha orientato i giovani fuori da questo terreno. Porta così una pesante responsabilità – che anch'io mi assumo e condivido – per il ritardo del loro sviluppo in Francia, per lo meno per tutto quello che concerne gli sviluppi contemporanei.[12]

L'esclusione dal trattato delle applicazioni fisiche si giustifica invece pensando all'enfasi di cambiamento e rottura rispetto al passato, che in Francia era rappresentato da Poincaré. Poiché fino ad inizio secolo la matematica francese si era ridotta ad essere quasi esclusivamente legata alla Fisica, soprattutto per volere di Weil, Bourbaki decise dal principio di disinteressarsi e svincolarsi completamente da ogni riferimento ad essa.
Cartier, in un'intervista racconta stupito:

> in a discussion with André Weil, just after he published his own memoirs, I said, "You mentioned that in 1926 you were at Göttingen ... in 1926 something happened in Göttingen." And

[11] Ibidem.

[12] Autobiografia di Laurent Schwartz pubblicata in Francia nel 1997 con il titolo *Un mathématicien aux prises avec le siècle* in Op. cit.

> Weil asked, "What did happen in Göttingen?" and I said "Oh! Quantum mechanics!" And Weil said, "I don't know what that is." He was a student of Hilbert in 1926 and Hilbert himself was interested in quantum mechanic, Max Born was there, Heisenberg was there, and others, but apparently André Weil didn't pay any attention to it.[13]
> *in un discorso con André Weil, appena dopo che egli aveva pubblicato le sue memorie, dissi, "hai menzionato che nel 1926 ti trovavi a Göttingen ... nel 1926 successe qualcosa a Göttingen." E Weil chiese, "Cosa successe a Göttingen?" ed io dissi "Oh! La Meccanica Quantistica!" E Weil disse, "Non so cosa sia." Egli era stato studente di Hilbert nel 1926 e Hilbert stesso si interessava di meccanica quantistica, Max Born era lì, Heisenberg era lì, e altri, ma evidentemente André Weil non ci fece caso.*

Diversi matematici degli anni ottanta commentano:

> The tragedy is that Bourbaki, by raising this isolation from mathematical developments in other areas to almost a Holy Dogma, delayed the rapprochement with physics and engineering that is now, at least partially and spasmodically, taking place.[14]
> *La tragedia è che Bourbaki, elevando quasi a sacro Dogma l'isolamento dagli sviluppi matematici negli altri settori, ritardò il riavvicinamento con la fisica e l'ingegneria che ora, almeno parzialmente e spasmodicamente, si sta realizzando.*

Dal trattato, inoltre, sono state escluse quelle teorie che non riuscivano a rientrare nei canoni richiesti, come ad esempio la Teoria dei gruppi finiti, la teoria dei numeri, la "*hard analysis*"[15]. Questo venne spesso contestato dagli specialisti di tali settori, Dieudonné tuttavia si giustificava spiegando esplicitamente il criterio di scelta, che lo portò a fare una distinzione tra "matematica degli Eléments" e "matematica viva":

> Bourbaki può accettare ed accetta soltanto teorie razionalmente organizzate, nelle quali i metodi seguono naturalmente dalle premesse e nelle quali non c'è quasi spazio per gli stratagemmi ingegnosi. Pertanto, lo ripeto, le teorie che Bourbaki propone di accogliere sono in generale quelle teorie matematiche quasi completamente esaurite, almeno nei loro fondamenti. ... Queste teorie

[13] [Senechal 1998]
[14] [Hermann 1986]
[15] [Bottazzini 1996]

> sono arrivate a un punto in cui possono essere delineate in modo interamente razionale. È indubbio che la teoria dei gruppi (e ancor più la teoria analitica dei numeri) non sia altro che una successione di artifizi, l'uno più straordinario dell'altro, e tutto ciò è estremamente anti-Bourbaki. Lo ripeto, ciò non significa affatto che essa debba essere guardata con disprezzo. ... Bourbaki può consentire a sé stesso soltanto di scrivere sulle teorie morte, sugli argomenti che sono stati definitivamente sistemati e che devono soltanto essere raccolti (a meno di novità inattese, naturalmente). ... teorie morte nell'epoca in cui si scrive, il che è quanto dire che, nell'ambito di queste teorie sviluppate da Bourbaki, nessuno ha fatto scoperte significative da 10, 20 o 50 anni, laddove esse servono, per la ricerca in altri settori. ... il Bourbaki non si occupa della matematica viva.[16]

In definitiva si può dire che l'obiettivo di unificazione della matematica sia stato raggiunto solo parzialmente. Mentre, per quanto riguarda la matematica non riportata nel trattato, accade che nel matematico medio permane l'idea che ci sia la "Matematica utile", quella presentata da Bourbaki, e quella inutile, che è tutto il resto, come frutto della divisione che Bourbaki ha implicitamente imposto tra ciò che è degno di nota e ciò che può essere ignorato. Il messaggio è implicito ma trasmesso costantemente negli *Eléments*, quando si afferma che:

> Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes.
> *Il trattato prende la matematica dall'inizio, e fornisce dimostrazioni complete.*[17]

Lo stile argomentativo e la presentazione delle definizioni e dei teoremi crea nella mente del lettore l'idea che ci sia una matematica ordinata e sistematizzata, che tutti possono studiare e che rappresenta la conoscenza acquisita dall'umanità e una matematica ancora informe, insicura e non ufficializzata di cui si occupano solo "gli addetti ai lavori", la cui conoscenza è lasciata all'intuizione e allo studio di singoli talentuosi.

[16] [Dieudonné 1970] traduzione italiana in [Israel 2013]
[17] [Bourbaki 1939, pag.1] traduzione in [Israel 2013]

3.4 Quale fondamento?

Per quanto riguarda il fornire un fondamento "il più possibile solido", mi sembra che si possa concludere che pure questo intento rimane nella limitatezza dell'intenzione.

Le riflessioni di Bourbaki e lo sviluppo del pensiero riguardo ai fondamenti, alla luce dei teoremi di incompletezza di Gödel e delle accese discussioni di inizio secolo, hanno portato sempre più matematici ad accogliere l'idea che non esista un fondamento unico e stabile, o direttamente ad evitare di porsi la questione.

Tuttavia Bourbaki dichiara di ambire a tale esplicitazione.

Il pensiero di Bourbaki rispetto alla fondazione della matematica è, a mio parere, un esempio di come siano strettamente correlati e quanto si influenzino vicendevolmente le idee dei singoli ed il contesto in cui vivono le persone che formulano tali idee. Si nota, infatti, quanto il pensiero bourbakista sia influenzato sia dalla voglia di rottura con il passato, sia dall'ammirazione per le spinte tedesche all'astrazione. Venendo a conoscenza dei lavori di Hilbert, che proponevano la ricerca degli assiomi nelle teorie, e leggendo il manuale di algebra di van der Waerden, i bourbakisti abbandonarono ancor più risolutamente e in modo indistinto lo stile con cui era stata loro insegnata la matematica.

Se da un lato la ricerca di unità attraverso un'assiomatizzazione universale e il riconoscimento di strutture generali si presenta come inedita, dall'altro la scelta riduzionista basata sulla teoria degli insiemi, ripercorre esattamente le scelte di sintesi precedenti. Se ne coglie una chiara evidenza, ad esempio, in quanto scrive uno dei protagonisti di questo progetto fondativo. Chevalley - infatti - che ha fatto parte del gruppo dalla fondazione fino agli anni '60, racconta:

> Animated by a profound faith in the unity of mathematics, and wishing to be "universal mathematicians," they (the members Bourbaki's group) undertook to derive the whole of the mathematical universe from a single starting point. It was necessary to have a rock on which to build the edifice: they found it in the theory of sets. ... They were not the first to have entertained such a project, but they remain the only ones to have advanced so far towards its realization.[18]
> *Animati da una profonda fede nell'unità della matematica, e desiderando essere "matematici universali", (i membri del gruppo Bourbaki) decisero di derivare l'intero universo matematico da un*

[18][Guedj 1985]

> *unico punto di partenza. Era necessario avere una roccia su cui costruire l'edificio: la trovarono nella teoria degli insiemi ... Non furono i primi ad intraprendere questo progetto, ma rimangono gli unici ad averlo portato avanti così a lungo.*

Innovativa è l'idea di generalizzare ciò che van der Waerden aveva usato limitatamente al campo algebrico; viene coniato così il termine "struttura" ed elaborata la "teoria delle grandi strutture". Ragionare secondo strutture, dunque, porta a dare un nuovo ordine ai contenuti, riconoscendo analogie e affinità negli schemi di ragionamento usati anche in ambiti differenti. Si cerca in questo modo di raggiungere la massima generalizzazione, da cui poter ridiscendere via via verso le varie particolarità. Ma, come sto qui cercando di evidenziare, anche questa idea di spostare l'attenzione dal contenuto al contenitore, dagli enti alle proprietà, sembra cogliere un processo culturale della prima metà del secolo, emergente solo pochi anni dopo nella la corrente socio-linguistica dello strutturalismo che si afferma proprio negli anni '50 - '60.[19] La diffusione dello strutturalismo in Francia si ritiene sia principalmente dovuta all'influenza di Levì-Strauss. Inoltre si sa che sicuramente l'antropologo ebbe modo di conoscere le idee bourbakiste, dato che durante la seconda guerra mondiale, rifugiato a New York, intessé significativi rapporti con André Weil. Affermare che il pensiero bourbakista venne influenzato dallo strutturalismo sarebbe inappropriato, dato che il primo volume degli *Eléments* (e con esso l'impostazione generale dell'opera) venne pubblicato già nel 1939, parimenti sarebbe esagerato sostenere che l'idea dello strutturalismo sia nata dalla matematica di Bourbaki. Sicuramente però si può ritenere che vi sia un'influenza e un sostegno reciproco. Dunque, non solo Bourbaki con le sue idee influenzò la cultura del suo tempo ma anche, viceversa, il contesto storico-culturale ha portato Bourbaki ad elaborare un certo pensiero. Quanto affermato sin qui è rinforzato da ciò che riportano diversi autori, tra cui il noto bourbakista Pierre Cartier, il quale sostiene che pure

> Bourbaki's abstractions and disdain for visualization were part of a global fashion, as illustrated by the abstract tendencies in the

[19] *Strutturalismo* è il nome di una corrente del XX secolo, inizialmente teorizzata da Ferdinand Saussure (1857 - 1913) che, nell'ambito della linguistica, sostenne l'idea che il linguaggio fosse un sistema di segni i cui termini fossero puramente differenziali, ovvero definiti solo dai rapporti con gli altri termini e non da un contenuto proprio. In analogia estese poi il ragionamento l'antropologo Claude Lévi-Strauss (1908 - 2009) al contesto sociale, egli sosteneva che ciascun oggetto/situazione si potesse considerare non tanto per ciò che esso è, ma per i collegamenti che esso ha con gli altri oggetti/situazioni. [Marmier 2013]

> music and the paintings of that period.[20]
> *L'astrazione di Bourbaki e la ritrosia nei confronti della visualizzazione, fecero parte di una moda globale, come si può notare dalle tendenze astratte nella musica e nei quadri di quel periodo.*

Egli si spinge poi oltre affermando addirittura che:

> If you put the manifesto of the surrealists and the introduction of Bourbaki side by side, as well as other manifestos of the time, they look very similar.[21]
> *Se si affiancano il manifesto surrealista e l'introduzione di Bourbaki, essi appariranno molto simili, come gli altri manifesti di quel tempo.*

3.5 L'ambivalenza di Bourbaki

In conclusione durante il mio lavoro di tesi mi sono trovata a constatare quanto il pensiero bourbakista sia in realtà molteplice e mutevole.

Mutevole perché, con il tempo, non solo sono cambiati i membri del gruppo, ma anche i membri stessi hanno talvolta maturato opinioni diverse rispetto a ciò che pensavano inizialmente[22].

Molteplice perché, nonostante Bourbaki sia un autore collettivo, ogni membro ha spesso mantenuto, nei fatti, la parzialità del proprio punto di vista.

Ciò si nota, ad esempio, nelle interviste ai singoli. Interrogato sulla natura degli *Eléments*, Chevalley spiega rammaricato:

> There was something which repelled us all: everything we wrote would be useless for teaching.[23]
> *Ci fu una cosa che ripugnava tutti noi: tutto ciò che avevamo scritto sarebbe stato inutile per l'insegnamento;*

[20] [Senechal 1998]

[21] Ibidem.

[22] A desempio Chevalley negli anni ottanta, alla domanda se si trovi ancora in accordo con il pensiero bourbakista, risponde:

> At the level of mathematical logic, there's a point on which I am totally separated from them. Curiously, it concerns an idea on the subject of formalization that mostly owes its presence to my initiative. [Guedj 1985]
> *Nell'ambito della logica matematica, c'è un punto in cui ho una visione completamente separata dalla loro. Curiosamente, essa riguarda un'idea sulla formalizzazione che deve la sua presenza principalmente alla mia iniziativa.*

[23] [Guedj 1985]

mentre Cartier afferma convinto:

> The misunderstanding was that many people thought that it should be taught the way it was written in the books. You can think of the first books of Bourbaki as an encyclopedia of mathematics, containing all the necessary information. That is a good description. If you consider it as a textbook, it's a disaster.[24]
> *Il fraintendimento fu che molti pensarono che bisognasse insegnare nel modo in cui il libro era scritto. Si può pensare ai primi libri di Bourbaki come ad un enciclopedia della matematica, contenente tutte le informazioni necessarie. Questa è una buona descrizione. Se si considera come libro di testo, è un disastro.*

Il pensiero di Bourbaki risulta molteplice, però, anche in ciò che afferma. Sul tema dei fondamenti, per esempio, Bourbaki sostiene contemporaneamente che fondamento sia la teoria degli insiemi e che fare matematica sia usare il metodo assiomatico. Queste due affermazioni entrano in contrasto non appena si riflette sul criterio di scelta degli assiomi di una teoria. Usando unicamente il metodo assiomatico, dovrebbe essere ammissibile una scelta arbitraria degli assiomi da cui partire, e questo è ciò che Dieudonné sostiene quando rassicura che, lasciare tale opportunità non è poi così rischioso se si considera il fatto che l'eventuale elaborazione di teorie inutili, da lui chiamate "escrescenze patologiche", sarà destinata all'"oblio"[25]. Dall'altra parte, dichiarare che la base di ogni struttura e dunque di ogni teoria è la teoria degli insiemi, con i suoi assiomi, nega l'arbitrarietà della scelta del punto di partenza e impone la teoria degli insiemi come unica via.[26] Tale ambiguità tra una rivendicazione di oggettività e un'attribuzione di un carattere soggettivo, è presente in modo trasversale in tutte le pubblicazioni bourbakiste. Per spiegare meglio di cosa si tratti, si potrebbe dire che in Bourbaki sono compresenti due anime contrapposte: la prima si potrebbe chiamare anima "assolutista", essa presenta i contenuti matematici come verità eterne e indiscutibili. È facile notare che, negli *Eléments* e negli articoli, Nicolas Bourbaki si pone sempre con un tono assertivo e categorico; tale tecnica è un artificio retorico, molto diffuso soprattutto in ambito matematico, che

[24][Senechal 1998]
[25][Dieudonné 1949]
[26]Ricordiamo l'affermazione di Cartan:

> Ci proponiamo di mostrare qui che esiste un inizio, o più precisamente un punto in cui inizia la matematica, la cui natura ed i cui metodi verranno ad essere, di conseguenza, chiaramente fondati.

[Cartan 1943]

conferisce direttamente all'opinione personale il carattere di verità assoluta ed eterna.[27]

Chevalley conferma tale sentore quando racconta:

> I absolutely had the impression of bringing light into the world - the mathematical world, you understand. It went hand in hand with the absolute certainty of our superiority over other mathematicians - a certainty that we held something of a higher level than the rest of mathematics of the day.[28]
> *Avevo la piena convinzione di portare la luce nel mondo – il mondo matematico, si intende. Questa crebbe a poco a poco con l'assoluta certezza della nostra superiorità rispetto agli altri matematici – la sicurezza che noi afferravamo qualcosa ad un livello superiore rispetto al resto della matematica quotidiana.*

E pure Cartier è dello stesso avviso, egli addirittura paragona la proposta bourbakista all'ideologia comunista, vi si possono trovare, infatti, notevoli affinità:

> it was in the people's minds that we could reach a final solution. ... The stated goal of Bourbaki was to create a new mathematics. He didn't cite any other mathematical texts. Bourbaki is self-sufficient. Of course at the time the communists in the Soviet Union were claiming the same. ... the spirit was the same. It was the time of ideology: Bourbaki was to be the New Euclid, he would write a textbook for the next 2000 years.[29]
> *era un pensiero comune che fosse possibile raggiungere una soluzione finale. ... L'obiettivo dichiarato di Bourbaki era creare una nuova matematica. Egli non cita nessun altro testo matematico. Bourbaki è autosufficiente. Certamente a quel tempo il comunismo dell'Unione Sovietica affermava le stesse cose. ... lo*

---

[27] Alcuni contestatori del pensiero bourbakista arrivano ad affermare addirittura che

> Bourbaki è una mistura blasfema di Hilbert, van der Waerden e Zermelo, a riprova che spesso quella che prevale nelle vicende storiche non è la posizione intellettuale più limpida, ma quella che è meglio sostenuta dall'autorità e dalla retorica. [Lolli 2009, pag. 10].

Personalmente ritengo che la posizione appena riportata sia fin troppo estremista. Tuttavia, come Bourbaki stesso ammette, la convinzione di star esprimendo una verità "non può essere che d'ordine sentimentale o metafisico, e non si può certo giustificarla ponendosi sul terreno della matematica". [Bourbaki 1960, pag. 21]

[28] [Guedj 1985]

[29] [Senechal 1998]

> *spirito era lo stesso. Era il tempo delle ideologie: Bourbaki sarebbe dovuto essere il nuovo Euclide, egli avrebbe dovuto scrivere un manuale per i prossimi 2000 anni.*

La seconda anima di Bourbaki si potrebbe chiamare "strumentale", essa si arroga un atteggiamento pragmatico che, rinunciando a "legiferare per l'eternità"[30], si propone di scegliere solamente ciò che è più utile[31]

Essa, in definitiva, considera i fondamenti della matematica semplicemente come strumenti e pertanto ammette che possano essere cambiati all'occorrenza.[32]

A mio parere l'atteggiamento di Bourbaki si mantiene costantemente ambivalente, in queste due accezioni. Riporto emblematicamente le parole dell'*Architecture* in cui, dopo aver presentato quello che è il Programma bourbakista, ne vengono evidenziati i limiti. Bourbaki stesso, nei confronti del proprio testo, lo giudica schematico, idealizzato e cristallizzato:

> Schematico – perché nei dettagli, le cose non si presentano in modo altrettanto semplice e regolare quanto si è apparentemente detto; esistono, tra l'altro, degli inattesi ritorni all'indietro, in cui una teoria del tutto particolare come quella dei numeri reali porta un aiuto indispensabile alla costruzione di una teoria generale come la Topologia o l'integrazione.
> Idealizzato - perché si è ben lungi da una situazione in cui in ogni parte della matematica sia perfettamente delimitata la parte esatta di ciascuna delle grandi strutture; entro certe teorie (ad esempio la teoria dei numeri), vi sono numerosissimi risultati isolati che non si sa fino ad ora né classificare né collegare in modo soddisfacente a strutture note.
> Infine cristallizzato – perché nulla è più lontano dal metodo assiomatico di una concezione statica della scienza, e non vorremmo

[30] [Bourbaki 1970]

[31] Sostiene Cartan in [Cartan 1943] (traduzione italiana in [Israel 2013]):

> per decidere quale delle due posizioni sia preferibile, esiste, secondo noi, un solo criterio: qual è la più favorevole allo sviluppo della matematica?

[32] Come già riportato nel precesente capitolo, Dieudonné spiega:

> se si dimostrasse un giorno che la matematica è contraddittoria, si saprebbe probabilmente a quale regola attribuire la responsabilità di tale circostanza, e, sopprimendola o modificandola convenientemente, si potrebbe sfuggire alla contraddizione; si produrrebbe, in definitiva, un mutamento di orientamento della matematica ma non la sua sparizione come scienza.

[Dieudonné 1939] traduzione italiana in [Israel 2013]

> far credere al lettore che si sia preteso da parte nostra di delinearne lo stato definitivo. Le strutture non sono immutabili né per numero né per essenza; è certamente possibile che lo sviluppo ulteriore della matematica aumenti il numero delle strutture - inoltre, quelle esistenti - non sono affatto edifici compiuti, e sarebbe sorprendente che tutta la sostanza dei loro princìpi fosse d'ora esaurita.[33]

Gli stessi bourbakisti, in definitiva, concordano nel constatare che i principi che inizialmente avevano enunciato conferendogli un'ambizione di eternità, erano in realtà contingenti all'epoca in cui venivano formulati, destinati pertanto ad essere superati dalle convinzioni delle epoche successive.
Un esempio di superamento di un'idea bourbakista, da parte degli stessi bourbakisti, è il concetto di categoria. È infatti legittimo pensare che esso sia un evoluzione dell'idea bourbakista di struttura, notando le seguenti corrispondenze. I padri della teoria delle categorie sono Samuel Eilenberg (1913 - 1998), che fu membro Bourbaki, e Saunders Mac Lane (1909 - 2005), che Cartier qualifica "close in spirit"[34]. Il primo libro di testo di algebra omologica, *Homological Algebra*, è una collaborazione Cartan-Eilenberg pubblicato nel 1956, periodo in cui entrambi erano molto attivi nel gruppo. E pure Grothendieck contribuì molto alla teorizzazione ed estensione del concetto di categoria.
Cartier sostiene:

> I have been using categories in a conscious or unconscious way in much of my work, and so had most of the Bourbaki members. But because the way of thinking was too dogmatic, or at least the presentation in the books was too dogmatic, Bourbaki could not accommodate a change of emphasis, once the publication process was started.[35]
> *Ho usato le categorie consapevolmente e inconsapevolmente in gran parte del mio lavoro, e così hanno fatto la maggior parte dei membri di Bourbaki.*
> *Ma poiché il modo di pensare era troppo dogmatico, o almeno l'esposizione nei libri era troppo dogmatica, Bourbaki non poté assecondare il cambio di enfasi, una volta che il processo di pubblicazione era avviato.*

[33] [Bourbaki 1948] traduzione italiana in [Israel 2013]
[34] [Senechal 1998]
[35] Ibidem.

Vi fu un periodo, infatti, verso la fine degli anni cinquanta, che coincide grossomodo con la presenza di Grotendieck all'interno del gruppo, in cui ci si chiese se fosse opportuno riprendere in mano i primi libri e modificare l'impostazione generale degli *Eléments* in favore di un approccio categoriale. Tale impresa avrebbe comportato però, nei fatti, una completa riscrittura dell'opera. L'idea fu quindi abbandonata e venne invece deciso, per potersi dedicare piuttosto alla stesura di libri su argomenti nuovi e più moderni, di scrivere semplicemente una nuova edizione dei libri fondamentali che inserisse alcune piccole modifiche non sostanziali.

In conclusione, ritengo sia questa l'ambiguità del pensiero bourbakista: esso da un lato sostiene una visione strumentale che svincola i fondamenti da una verità contenutistica, e affida al "senso comune del matematico"[36] o ad un "intuizione fulminea"[37] la scelta del fondamento più opportuno a seconda del contesto. Dall'altro rimane nell'illusione, propria dell'atteggiamento ideologico del XX secolo, di essere in possesso di una verità assoluta, immutabile nel tempo.[38]

Nicolas Bourbaki si trova dunque nel paradosso di sostenere nello stesso momento che i fondamenti possano e non possano mutare. In questo stanno, forse, tanto la sua forza quanto la sua debolezza. La forza dell'assolutezza, che gli ha conferito un'autorità tale da influenzare la matematica del novecento, e la debolezza della sua ambivalenza, che ora tuttavia gli consente di rimanere un riferimento attuale, pur nelle condizioni mutate del nuovo millennio.

[36] [Bourbaki 1970, pag. 11]

[37] [Cartan 1958, pag. 177]

[38] The following axiom was always present during the editorial work: "Among all the possible ways, there is for each mathematical question a best way of treating it, an optimal way." The search for this optimum made up (and still makes up) the greatest part of the menus at the Bourbaki congresses. [Guedj 1985]
Il seguente assioma era sempre presente nel lavoro editoriale: "tra tutte le vie possibili, per ogni questione matematica c'è una via migliore per affrontarla, una via ottimale." La ricerca di questo ottimo costituì (e ancora costituisce) la parte principale dei menù ai congressi Bourbaki.)

Appendice A

Storia di un personaggio collettivo

> *Una "banda di matti" molto misteriosa e dal nome bizzarro, costituita da forti personalità che sono al tempo stesso matematici brillanti, un modus operandi originale, un rinnovamento che garantisce un'eterna giovinezza, un voluminosissimo trattato le cui 7000 pagine hanno garantito fama e influenza: tutto questo è Nicolas Bourbaki.*[1]

A.1 La nascita di Nicolas Bourbaki

Come accennato nel primo capitolo, Bourbaki è lo pseudonimo adottato da un gruppo di giovani matematici francesi verso gli anni '30 del ventesimo secolo. L'idea iniziale di costituire un gruppo fu del ventisettenne André Weil, stimolato dall'insistenza dell'altrettanto giovane collega Henri Cartan. Entrambi, al tempo, erano docenti all'Università di Strasburgo (Cartan dal 1931, Weil dal 1933). Insegnando calcolo differenziale e integrale spesso si trovavano a discutere su quale fosse il grado di generalità di alcuni enunciati e su cosa fosse più opportuno presentare agli studenti. Di una cosa tuttavia erano certi: il manuale di analisi che dal 1902 veniva usato in tutta la Francia, *Cours d'analyse mathématique* di Goursat, era inadeguato. Così, racconta Weil nella sua autobiografia, nell'inverno del 1934 nacque l'idea di coinvolgere alcuni altri docenti, dello stesso corso ma di altre università, nel progetto di redigere un nuovo testo di analisi che fosse più chiaro, più moderno, più adeguato.

[1] [Morange 2003]

Quando Weil condivise l'idea con Cartan, aveva probabilmente già pensato a quali matematici rivolgersi. I due, infatti, erano soliti recarsi a Parigi ogni due settimane per prendere parte al *Seminaire de Mathematiques* che si teneva all'Istituto Henri-Poincaré a lunedì alterni. Lì avevano occasione non solo di mantenersi aggiornati sulle discussioni e sui problemi aperti, ma anche di incontrare i vecchi compagni di studio dell'Ècole Normale Superieur.
I matematici che Weil coinvolse furono: Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel, Szolem Mandelbrojt, Paul Dubreil e Jean Leray. Gli ultimi due elencati, però, dopo non molte riunioni decisero di sfilarsi dal gruppo e vennero dunque sostituiti da Jean Coulomb e Charles Ehresmann.

Le prime riunioni

Il progetto iniziale era dunque redigere in modo collettivo un testo, si pensava ad un migliaio di pagine pubblicabili nel giro di un semestre. A questo scopo Weil e Cartan convocarono la prima riunione il 10 Dicembre 1934 presso il cafè A. Capoulade a Parigi. Si costituì in tale occasione il "comitato di redazione del trattato di analisi" che si riunì a più riprese. I membri del comitato erano tutti matematici eccellenti con già diverse pubblicazioni a proprio nome, giovani docenti in università di provincia, quasi tutti si erano formati all'Ecole Normale Superieur di Parigi, unica eccezione è Mandelbrojt che si era trasferito in Francia a partire dal dottorato. Il comitato aveva lo scopo di definire meglio il progetto di lavoro scegliendo gli argomenti da trattare, l'ordine di presentazione e la suddivisione dei capitoli.
Secondo Weil, si trattava di

> fissare per 25 anni le materie dell'abilitazione di calcolo differenziale e integrale redigendo in comune un trattato di analisi. È inteso che questo trattato sarà il più moderno possibile[2].

Tuttavia fin dalla seconda riunione il progetto prese una piega ancora più ambiziosa:

> Bisogna fare un trattato utile a tutti: ai ricercatori (abilitati o meno), agli "inventori", ai candidati alle funzioni dell'insegnamento pubblico, ai fisici e a tutti i tecnici.

Bisognava quindi fornire ai potenziali lettori una collezione di strumenti matematici "quanto più possibile robusti e universali"[3]. L'obiettivo era molto

[2] Liliane Beaulieu, storica canadese che ha avuto accesso ai verbali delle prime riunioni, in [Morange 2003]

[3] [Morange 2003]

alto ed, infatti, non è difficile da immaginare che la concretizzazione si rivelò molto più complicata da raggiungere rispetto agli intenti e alle aspettative iniziali. Ci vollero una decina di incontri e un lavoro in sottocommissioni solo per arrivare alla riunione "plenaria di fondazione" del gruppo, che si tenne dal 10 al 17 Luglio del 1935 a Besse-en-Chandesse, ad una quarantina di chilometri da Clemont-Ferrand.

A.2 Le regole e il metodo di lavoro

Con la "plenaria di fondazione" vennero stabilite le poche regole e le modalità di lavoro. Data l'inclinazione anarchica di diversi membri, non fu prevista nessuna suddivisione gerarchica interna, si stabilì, al contrario, che ciascuno aveva diritto di veto, ovvero che potessero essere prese, solitamente dopo accesi dibattiti, solo decisioni unanimi.

Venne pure stabilito di usare un nome di fantasia come unico autore del volume, il nome prescelto fu Bourbaki[4], la scelta di usare un decimo nome concretizzava l'intenzione che l'opera fosse radicalmente collettiva. All'epoca vi erano già stati molti casi di collaborazioni e di redazioni di libri a più mani, ma, per come era stato concepito, questo testo doveva essere diverso.

Durante soggiorni di studio in Germania, molti tra i bourbakisti avevano potuto apprezzare, anzi erano rimasti letteralmente affascinati, dallo stile innovativo: sobrio e allo stesso tempo estremamente rigoroso, del manuale *Moderne Algebra* pubblicato da B. L. Van der Waerden nel 1930-31. Senza esitazione decisero, dunque, che anche l'opera di Bourbaki dovesse assumere lo stesso stile. I giovani francesi erano intenzionati a ricalcarne soprattutto la presentazione concisa e rigorosa che, unita ad un'organizzazione ben strutturata degli argomenti, consentiva ai concetti più importanti e generali di emergere in modo chiaro.

I criteri fondamentali che l'opera doveva soddisfare erano, dunque, i seguenti tre: il metodo assiomatico, l'assenza di generalizzazioni, e l'autoreferenzialità. L'opera doveva cioè, partendo da alcuni assiomi, dedurre i risultati

[4]vi sono diverse leggende legate all'origine del nome, Chevalley in un intervista del 1981 racconta:

> Weil had spent two years in India and for the thesis of one of his pupils he needed a result he couldn't find anywhere in the literature. He was convinced of its validity, but he was too lazy to write out the proof. His pupil, however, was content to put a note at the bottom of the page which referred to "Nicolas Bourbaki, of the Royal Academy of Poldavia." When we needed to deck ourselves out with a collective name, Weil proposed to revive this tall story.

[Guedj 1985]

più generali e poi via via arrivare a deduzioni più specifiche e alla presentazione di teorie particolari, mai viceversa. Inoltre l'autoreferenzialità unita al divieto di generalizzazioni imponeva una scelta molto oculata dell'indice, doveva essere consentito, infatti, citare solamente risultati appartenenti a capitoli precedenti. Dati questi criteri si può comprendere il motivo delle ripetute riunioni e discussioni riguardanti l'indice e la scelta, non solo degli argomenti, ma anche dell'ordine di esposizione.

Per quanto riguarda, invece, la partecipazione individuale, l'idea di usare uno pseudonimo collettivo ebbe come naturale risvolto un maggior affiatamento tra i membri del gruppo, al punto che cominciarono a comportarsi quasi come se fossero una setta: imposero assoluta segretezza sulle riunioni, sui lavori e sui partecipanti.

Il numero di membri venne limitato a nove, anche se poi negli anni vi saranno periodi di maggiore o minore partecipazione, non si eccederà mai la dozzina di collaboratori.

Originale fu, infine, la regola di obbligo di abbandono del gruppo oltre il cinquantesimo anno di età. Tale regola rispecchia l'animo rivoluzionario dei giovani matematici, i quali vollero in questo modo assicurare eterna giovinezza e vitalità anche a Bourbaki.

Poiché la redazione doveva risultare veramente collettiva, o meglio dell'unico aurore Bourbaki, si era accordato il seguente metodo di scrittura: inizialmente veniva affidata ad uno o due membri la prima stesura di una data parte, questa, una volta pronta, veniva letta integralmente ad un congresso plenario; durante la lettura, la prima bozza doveva essere impietosamente criticata dagli altri membri del gruppo, al termine della lettura la bozza veniva quindi affidata, per una correzione e riscrittura, ad altri membri i quali avrebbero successivamente ripresentato al gruppo il testo emendato. La seconda bozza a sua volta veniva sottoposta al procedimento di vaglio e riscrittura appena esposto; infine ogni capitolo poteva ritenersi pronto per essere pubblicato solo quando veniva raggiunto l'accordo unanime. È evidente che questo processo richiedesse molto lavoro e che i tempi di scrittura fossero destinati a diventare estremamente lunghi.

A.3 L'opera

Il progetto

Il progetto approvato nel luglio del 1935 consisteva in un libro di 3200 pagine che presentasse i contenuti classici di un manuale di analisi: funzioni di variabili reali e complesse, integrali, equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali, funzioni speciali, etc... con l'aggiunta di qualche capitolo di premesse teoriche: algebra, topologia, teoria degli insiemi; questi capitoli, chiamati "pacchetto astratto", dovevano servire come preambolo per fornire al lettore una base sufficiente che gli consentisse di affrontare i temi dei capitoli successivi presentati in modo moderno.

La scelta di una presentazione assiomatica e di un ordine lineare di esposizione degli argomenti, impose ai bourbakisti di focalizzarsi innanzi tutto sul "pacchetto astratto", parte che era ritenuta da ridurre al minimo indispensabile, ma che invece, ad ogni discussione si vedeva aumentare di ruolo e numero di pagine. La pretesa di linearità e di esaustività nell'esposizione, unita alla forte discussione critica di ogni paragrafo, ampliarono di molto il lavoro preventivato, così il primo testo pubblicato fu un fascicoletto sul primo capitolo del libro, riguardante la teoria degli insiemi, in cui venivano presentati definizioni e risultati fondamentali ma senza dimostrazione; questo venne pubblicato nel 1939, ovvero 4 anni dopo l'inizio dei lavori!

Nel frattempo, nel 1938, era stato deciso di cambiare il titolo dell'opera, dato che ormai non aveva più le caratteristiche di un semplice "trattato di analisi", il titolo diventò *"Eléments des mathematique"*. In questo titolo è evidente il richiamo all'opera di Euclide, non solo per il rigore e la trattazione assiomatica, ma anche per l'intento di raccogliere e presentare in modo ordinato tutti i risultati già noti: come Euclide aveva raccolto in un'unica opera le proprietà geometriche e i teoremi conosciuti ai suoi tempi, senza aggiungere nulla di proprio eccetto la decisione dell'ordine di presentazione degli argomenti, così volevano essere gli *Eléments*. Un'altra caratteristica eloquente del titolo è "matematica" al singolare; in Francia si usa spesso la parola "matematiche" sottintendendo che, dato che esistono diverse branche della matematica, si vogliono considerare tutte. In questo caso, invece, l'espressione al singolare rispecchia la visione di profonda unità della matematica in quanto disciplina assiomatica.

Il progetto iniziale non smise mai di essere modificato ad ogni riunione successiva, così, nel 1941 il lavoro che si prospettava era diventato faraonico, gli *Eléments* sarebbero dovuti diventare 25 libri organizzati in quattro parti:

- PARTE I: Strutture fondamentali dell'analisi (8 libri)
- PARTE II: Analisi funzionale (7 libri)
- PARTE III: Topologia differenziale (2 libri)
- PARTE IV: Analisi algebrica (8 libri)

I primi otto libri, quelli fondamentali, sarebbero stati:

- Teoria degli insiemi,
- Algebra,
- Topologia generale,
- Spazi vettoriali topologici,
- Calcolo differenziale,
- Integrazione,
- Topologia combinatoria e varietà differenziabili,
- Funzioni analitiche.

Questo progetto, tuttavia, venne seguito solo virtualmente. Il metodo di scrittura collettiva descritto al precedente paragrafo consentiva infatti di lavorare contemporaneamente su capitoli e libri diversi. L'ordine delle pubblicazioni non era dunque tenuto a rispettare l'ordine previsto dal progetto.

La realizzazione

Come si può notare dai seguenti elenchi, la pubblicazione dei vari Capitoli[5] rispetta solo parzialmente la struttura originariamente pensata.

Ad oggi i libri pubblicati sono 11, ciascuno diviso in tomi[6], in più vi è un volume intitolato *Éléments d'histoire des mathématiques* che raccoglie alcune note storiche. Vi sarebbe molto da dire sulla visione di Bourbaki rispetto alla storia della matematica, ciò su cui concordano quasi la totalità dei critici di storia è che la visione proposta nel volume citato, principalmente dovuta al pensiero di Dieudonné, ripropone una lettura del passato in funzione del presente come se la storia delle teorie fosse un progressivo univoco tendere, anche attraverso errori e difficoltà, allo stato presente della matematica.

Degli 11 libri i primi sei, ovvero Teoria degli insiemi, Algebra, Topologia generale, Funzioni ad una variabile reale, Spazi vettoriali topologici e Integrazione, seguono l'ordine lineare di presentazione degli argomenti e fungono da base comune di sviluppo per i libri successivi, i quali, essendo più specifici, si diramano seguendo percorsi paralleli.

[5]Nella dicitura scelta da Bourbaki i capitoli sono talvolta interi volumi da centinaia di pagine.

[6]Ho riportato l'elenco completo così come viene presentato sul sito dell'associazione dei collaboratori di Bourbaki (http://www.bourbaki.ens.fr/Ouvrages.html) aggiungendo le pubblicazioni precedenti all'esistenza dell'associazione stessa (queste lo ho trovate documentate in [O'Connor-Robertson]).

A.4 Elenco dei volumi pubblicati

per titolo:

Théorie des ensembles, (fasc. rés.)	1939
Théorie des ensembles, 1 - 4	1970 (ristampa 1998)
Algèbre, 1	1942
Algèbre, 2	1947
Algèbre, 3	1948
Algèbre (nou. éd.), 1 - 3	1970 (en.1989)
Algèbre, 4 - 5	1950
Algèbre, 6 - 7	1952
Algèbre (nou. éd.), 4 - 7	1981 (en.1990)
Algèbre, 8	2012
Algèbre, 9	1959 (ristampa 1973)
Algèbre, 10	1980
Topologie Générale, 1 - 2	1940
Topologie Générale, 3 - 4	1942
Topologie Générale (nou. éd.), 1 - 4	1971 (rist. 1990) (en. 1989)
Topologie Générale, 5 - 7	1947
Topologie Générale, 9	1948
Topologie Générale, 10	1949
Topologie Générale (nou. éd.), 5 - 10	1974 (en. 1989)
Fonctions d'une Variable Réelle, 1	1949
Fonctions d'une Variable Réelle, 4	1951
Fonctions d'une Variable Réelle (nou. éd.), 1 - 7	1976
Espaces Vectoriels Topologiques, 1 - 5	1981 (en. 1987)
Intégration, 1 - 4	1952
Intégration (nou. éd.), 1 - 4	1965 (ristampa 1973)
Intégration, 5	1967
Intégration, 6	1959
Intégration, 7 - 8	1963
Intégration, 9	1969
Algèbre commutative, 1 - 4	1968-69 (rist. 1985) (en. 1989)
Algèbre commutative, 5 - 7	1964-65 (rist. 1985) (en. 1989)
Algèbre commutative, 8 - 9	1983
Algèbre commutative, 10	1998
Variétés différentielles et analytiques, (fasc. rés.)	1971 (ristampa 1998)
Groupes et algèbres de Lie, 1	1971 (engl. 1989)
Groupes et algèbres de Lie, 2 - 3	1972 (engl. 1989)
Groupes et algèbres de Lie, 4 - 6	1968 (ristampa 1981)

Groupes et algèbres de Lie, 7 - 8	1975 (ristampa 1998)
Groupes et algèbres de Lie, 9	1982
Théories spectrales, 1 - 2	1967
Éléments d'histoire des mathématiques	1960
Éléments d'histoire des mathématiques (nou. éd.)	1974 (ristampa 1984)
Topologie algébrique, 1 - 4	2016

per anno:

Théorie des ensembles, (fasc. rés.)	1939
Topologie Générale, 1 - 2	1940
Topologie Générale, 3 - 4	1942
Algèbre, 1	1942
Topologie Générale, 5 - 7	1947
Algèbre, 2	1947
Topologie Générale, 9	1948
Algèbre, 3	1948
Fonctions d'une Variable Réelle, 1	1949
Topologie Générale, 10	1949
Algèbre, 4 - 5	1950
Fonctions d'une Variable Réelle, 4	1951
Algèbre, 6 - 7	1952
Intégration, 1 - 4	1952
Algèbre, 9	1959 (ristampa 1973)
Intégration, 6	1959
Éléments d'histoire des mathématiques	1960
Intégration, 7 - 8	1963
Algèbre commutative, 5 - 7	1964-65 (rist. 1985) (en. 1989)
Intégration (nou. éd.), 1 - 4	1965 (ristampa 1973)
Intégration, 5	1967
Théories spectrales, 1 - 2	1967
Groupes et algèbres de Lie, 4 - 6	1968 (ristampa 1981)
Algèbre commutative, 1 - 4	1968-69 (rist. 1985) (en. 1989)
Intégration, 9	1969
Théorie des ensembles, 1 - 4	1970 (ristampa 1998)
Algèbre (nou. éd.), 1 - 3	1970 (en.1989)
Topologie Générale (nou. éd.), 1 - 4	1971 (rist. 1990) (en. 1989)
Variétés différentielles et analytiques, (fasc. rés.)	1971 (ristampa 1998)
Groupes et algèbres de Lie, 1	1971 (engl. 1989)

Groupes et algèbres de Lie, 2 - 3	1972 (engl. 1989)
Topologie Générale (nou. éd.), 5 - 10	1974 (en. 1989)
Éléments d'histoire des mathématiques (nou. éd.),	1974 (ristampa 1984)
Groupes et algèbres de Lie, 7 - 8	1975 (ristampa 1998)
Fonctions d'une Variable Réelle (nou. éd.), 1 - 7	1976
Algèbre, 10	1980
Algèbre (nou. éd.), 4 - 7	1981 (en.1990)
Espaces Vectoriels Topologiques, 1 - 5	1981 (en. 1987)
Groupes et algèbres de Lie, 9	1982
Algèbre commutative, 8 - 9	1983
Algèbre commutative, 10	1998
Algèbre, 8	2012
Topologie algébrique, 1 - 4	2016

Da questi elenchi si può facilmente notare come l'attenzione e l'interesse iniziale fosse in realtà principalmente algebrico e topologico.

Inoltre, mentre inizialmente vi fu (esclusi gli anni di guerra) una pubblicazione costante di uno o due volumi all'anno, le pubblicazioni si arrestarono all'inizio degli anni ottanta. Vi fu poi una pubblicazione isolata nel 1998 e dopo altri quattordici anni una ripresa con le ultime due recenti pubbilcazioni.

A.5 Gli sviluppi

La grande intensità di riunioni iniziali, una volta delineato il progetto, si ridusse a tre congressi all'anno della durata di una settimana in primavera e in autunno, due d'estate.

I congressi si tenevano solitamente in case di campagna in località immerse nella natura, alcune foto testimoniano discussioni all'aria aperta attorno alla lavagna sul prato. Cartan racconta:

> The participants work an average of 7-8 hours a day; the rest of the time is devoted to walking and dining[7].

La pubblicazione dei volumi procedeva dunque molto lentamente, nel 1942, a sette anni dall'inizio erano stati pubblicati solamente 5 capitoli oltre al fascicoletto iniziale. A causa della seconda guerra mondiale vi furono degli anni di arresto nelle pubblicazioni, dovuti anche al fatto che membri come Weil e Chevalley furono costretti ad emigrare in America. Il gruppo tuttavia

[7][Cartan 1958]

non si sciolse, anzi, continuò a lavorare: ciascuno sui capitoli assegnatigli.[8] Fu del tutto naturale quindi riprendere le pubblicazioni a partire dal 1947.

Data la regola del congedo dopo i cinquant'anni e l'allontanamento spontaneo dei membri che non si trovavano più in sintonia con lo spirito del gruppo, si cominciò a coinvolgere nell'impresa nuovi giovani matematici. A tale scopo non vigevano prestabilite regole di reclutamento, semplicemente, dato che tutti i bourbakisti erano anche professori in varie università, ogni qualvolta veniva notato da qualcuno un matematico promettente, particolarmente brillante ma soprattutto con un'apertura mentale che gli permettesse di spaziare tra le diverse teorie matematiche, egli veniva invitato ad un congresso come "cavia". La prova che il giovane doveva sostenere consisteva nel partecipare attivamente alle discussioni sulle bozze. Se finito il convegno i membri del gruppo lo ritenevano adatto, senza cerimonie particolari, egli sarebbe stato invitato anche agli incontri successivi, altrimenti, non conoscendo data e luogo dell'incontro successivo, sarebbe rimasto automaticamente escluso[9].

Dopo la guerra si aggiunsero all'annovero dei bourbakisti Roger Godement, Pierre Samuel, Jaques Diximer e Jean-Pierre Serre. E negli anni cinquanta Samuel Eilenberg, Louis Koszul e Laurent Schwartz, questi vengono detti della seconda generazione.

I libri ebbero subito un grande successo e così, con l'aumentare delle pubblicazioni, aumentava pure la fama di Bourbaki. In seguito ai viaggi all'estero dei membri, la figura di Bourbaki divenne nota anche a livello internazionale, di contro divenne sempre più difficile mantenere segreta l'identità di N. Bourbaki[10]. Così quando comparve un articolo sulla rivista dell'Enciclopedia Britannica in cui si svelava l'identità di Bourbaki, Nicolas stesso rispose con un articolo in cui si sosteneva che pure Mr. Boas, redattore esecutivo di recensioni matematiche, autore dell'articolo era in realtà un acronimo: B.O.A.S., sostenenne Bourbaki, indicava un gruppo di redattori.

---

[8] Weil venne persino incarcerato, a causa delle bozze sul capitolo sull'integrazione a cui stava lavorando, nell'inverno tra il 1939 e il 1940 accusato, in Svezia, di essere una spia.

[9] Racconta Chevalley:

> "Guinea pig" was the name given to non-bourbakist mathematicians invited to participate in the congresses. It was from this group that the new members were chosen. Those elected were those who, by their personal and mathematical qualities, would preserve the unanimity. (But no woman had the honour of being crowned Bourbakie.)

[Guedj 1985]

[10] Il nome Nicolas sembra sia stato inventato in un secondo momento rispetto al cognome, N. inizialmente significava soltanto "Nom".

Il 20 Agosto del 1952, per motivi burocratici, fu fondata l'*Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*. L'associazione, infatti, pur mantenendo l'alone di mistero attorno all'ormai autorevole matematico Nicolas Bourbaki, consentiva di disporre di una sede legale, gestire i proventi dei libri e organizzare dei seminari matematici. Cominciarono così i "Séminaire N. Bourbaki" all'Ecole Normale. Durante i seminari vi era modo di approfondire e discutere sulle idee e sulla matematica più moderna, cosa che dall'altra parte era diventata meno frequente ai congressi ove si continuava a discutere ogni bozza per circa sette o otto anni. Alla fine degli anni cinquanta si era giunti a completare la stesura solamente dei primi sei libri del ciclopico programma, quelli riguardanti le Strutture fondamentali dell'analisi.

Nel corso degli anni cinquanta e sessanta si aggiunsero tra i collaboratori i membri della terza generazione, soprannominati "i giovani". I fondatori, invece, cominciarono ad abbandonare il gruppo per raggiunta anzianità. I membri emeriti continuavano tuttavia ad essere aggiornati sui lavori dei congressi grazie ad un bollettino interno chiamato "La Tribù" il quale conteneva, con l'aggiunta di celie ironiche, il resoconto dei lavori e delle discussioni.

Il modo di fare matematica negli anni sessanta era ormai completamente diverso da ciò contro cui si erano battuti Weil e Cartan. Il loro obiettivo in questo aveva sicuramente funzionato, al punto che i collaboratori della terza generazione erano cresciuti studiando sui manuali dello stesso Bourbaki. Con una vena polemica Chevalley riassumerà questo fenomeno dicendo che Bourbaki era nato e si era battuto contro il potere e l'imposizione degli anziani professori ed infine si ritrovò ad essere egli stesso quel potere impositore.

Inoltre, completati i libri fondamentali, emerse il bisogno di definire un nuovo obiettivo. Fu ai collaboratori della terza e quarta generazione che spettò decidere quale direzione scegliere al seguente bivio: ampliare il corpus dei libri fondamentali presentando teorie ancora più generali, o sviluppare le teorie più specifiche? Non è difficile immaginare che vi furono molte discussioni ed un acceso dibattito interno. Infine prevalse la fazione dei realisti, i quali ritenevano più adeguato proseguire lungo la strada già tracciata e dedicarsi alla scrittura dei libri sugli argomenti più specifici e più attuali. Gli idealisti come Grothendieck, di contro, avrebbero preferito privilegiare la mission di trattazione unitaria della matematica attraverso lo sviluppo di teorie sempre più generali.

Un altro fattore di rallentamento nelle pubblicazioni si presentò negli anni '70 all'insorgere di una disputa legale con la casa editrice dovuta ai diritti d'autore. I bourbakisti vinsero infine la causa, ma dovettero sostenere forti spese legali e cambiare casa editrice.

Con l'avvento degli anni ottanta e novanta le pubblicazioni e il successo bourbakisti diminuirono drasticamente, al punto che iniziò a diffondersi la voce che ormai questa grande esperienza fosse giunta al suo epilogo.

Ciò nonostante i seminari N. Bourbaki continuarono ad essere organizzati e scolgersi regolarmente.

D'improvviso, dopo 14 anni di silenzio dall'ultima pubblicazione e 39 dalla penultima, nel 2012 la voce di Bourbaki tornò ad esprimersi nuovamente con la pubblicazione dell'ottavo capitolo (lungo ben 489 pagine!) del libro di Algebra e con i primi quattro capitoli di Topologia algebrica due anni fa.

A.6 Cosa permane oggi

Ai giorni nostri, oltre che un'opera monumentale, restano principalmente altre due cose: la prima è l'associazione dei collaboratori di Bourbaki che continua ad organizzare quattro seminari all'anno, uno per stagione. Inoltre, novità del 2018 è la proposta di un secondo seminario *"Séminaire B. Bourbaki"*, intitolato a Betty Bourbaki nipote di Nicolas. Questo seminario ha l'intento di coinvolgere maggiormente le nuove generazioni.
Così dice di se stesso:

> J'ai créé ce séminaire en pensant aux mathématicien-ne-s, et notamment aux plus jeunes. J'y demande à des collègues de présenter le contexte mathématique de certains exposés du Séminaire de mon aïeul, N. Bourbaki, pour les rendre plus accessibles; ils pourront aussi en introduire quelques outils ou des motivations plus lointaines. — Betty B., Nancago, Janvier 2018.[11]

Il secondo elemento bourbakista che permane oggi consiste nei moltissimi tratti dello stile di Bourbaki ereditati inconsapevolmente attraverso il linguaggio e il modo di presentare e affrontare gli argomenti che caratterizzano i testi Bourbaki.

Una delle innovazioni portate dagli *Eléments* di cui finora non ho parlato, ma molto rilevante perché ormai acquisita universalmente, è la scelta accurata del linguaggio, o meglio, un uso studiato dei termini con cui vengono espressi i concetti. Uno dei motivi del successo di Bourbaki è dovuto al fatto che i bourbakisti riuscirono a riorganizzare e ripresentare i concetti e contenuti classici con un'estrema efficacia espositiva caratterizzata da essenzialità e chiarezza.

Bourbaki nella sua opera non ha paura di creare parole nuove o dare un preciso significato matematico a vocaboli presi dalla lingua parlata, purché sia fatto con eleganza ed efficacia. Questo atteggiamento è ormai naturale

[11] [Bourbaki]

e diffuso, ma negli anni trenta e quaranta era qualcosa di inaudito. I nuovi Elementi si riproponevano di prendere le distanze dalla ridondanza dei manuali francesi e di superare lo stile inglese che, a causa delle abbreviazioni, rendeva i testi pressoché illeggibili. A tal proposito Jean Dieudonnè, nella conferenza in Romania che tenne nel 1968, spiegando lo stile di Bourbaki disse:

> Bourbaki ha abolito puramente e semplicemente questa terminologia (obsoleta, ad esempio “non decrescente” per dire “crescente”), come molte altre. Ha anche inventato nuovi termini, usando come tutti il greco quando necessario, ma anche una grande quantità di parole della lingua corrente, la qual cosa ha fatto storcere il naso a molti tradizionalisti che ammettono difficilmente che si possa chiamare *palla*, o *pavè* qualcosa che altrimenti si sarebbe chiamato *parallelotopo* o *ipersferoide* ... É in questo stile che Bourbaki scrive, in una lingua che sia riconoscibile e non in un gergo disseminato di abbreviazioni, come si vede spesso nei testi anglosassoni, nei quali vi si parla della C.F.T.C. che è legata a una A.L.V. a meno che non sia una B.S.F. o una Z.D. eccetera. In capo a dieci pagine non si sa più di che cosa si stia parlando. Noi pensiamo che l’inchiostro non sia poi così costoso da far sì che non si possano scrivere le cose per esteso, con un vocabolario scelto in modo appropriato.[12]

Alcuni esempi di neologismi dovuti a Bourbaki sono gli aggettivi per le funzioni “iniettiva” e “suriettiva” che combinati tra loro danno luogo ad una funzione “biiettiva”. Nella creazione di nuovi vocaboli, tuttavia, Bourbaki sta sempre ben attento a mantenere un purismo linguistico e non creare ibridazioni greco-latine in parole come “equimorfo”.

Oltre alla parola “palla” vi sono molte altre parole come ad esempio “germe” e “filtro” che sono state ormai assunte universalmente. Altri termini invece non hanno avuto la stessa fortuna, come ad esempio la scelta di chiamate ”stranieri” due numeri interi che siano primi tra loro, o “algebre stellari” le “C*-algebre”.

[12][Dieudonné 1970]

A.7 Elenco dei collaboratori di Bourbaki

Per quanto riguarda le prime tre generazioni ho mantenuto la suddivisione come viene riportata da Chevally[13]. Non ho trovato fonti attendibili, invece, per la suddivisione nelle generazioni successive. Si noti soltanto che, essendo tuttora segreto l'elenco preciso dei collaboratori, qui sono riportati solamente coloro che ormai non sono più membri attivi di Bourbaki.

I "fondatori":

Henri Cartan (Nancy 1904, 2008)
Figlio di Elie Cartan (1869-1951), i primi incontri si tennero nella loro casa in campagna. Fondamentale la figura di Elie Cartan anche come garante dell'esistenza di Bourbaki all'interno dell'accademia nazionale[14].

André Weil (Paris 1906, Princetown 1998)
Ideatore di Bourbaki, leader naturale del gruppo fin dai suoi esordi.

Claude Chevalley (Johannesberg 1909, Paris 1984)
Unico attivista anche in politica, anarchico. Dovette insistere alle prime riunioni perchè venissero inseriti i primi capitoli di logica[15].

Jean Delsarte (Fourmies 1903, Nancy 1968)

Jean Alexandre Eugéne Dieudonné (Lille 1906, Paris 1992)
Estensore del gruppo, fino agli anni cinquanta era incaricato di redigere la copia finale dei capitoli da portare all'editore[16].

[13]In un intervista nel 1981 racconta:

> Since then, numerous guinea pigs have entered the group. The bourbakist nomenclature is thus: first the "Founders," then the "Middles," then the Bourbakis of the third age called the "Young Ones" [in English, translator's note], and finally the "Bourbakis of today."

[Guedj 1985]

[14]Pierre Cretier di lui dice: "the Bourbaki recognized only one godfather, Elie Cartan." [Senechal 1998]. Maggiori dettagli al paragrafo A.8

[15]"In the beginning, people were against it; they thought that logic would not be interesting. I was the one who imposed it and who wrote the first versions of the book on logic." [Guedj 1985]

[16]When Dieudonné was the scribe of Bourbaki, for many many years, every printed word came from his pen. Of course there had been many drafts and preliminary versions, but the printed version was always from the pen of Dieudonné. And with his fantastic memory, he knew every single word. [Senechal 1998]

René de Possel (Marsilles 1905, Paris 1974)

Szolem Mandelbrojt (Warsaw 1899, Paris 1983)
Unico non francese di nascita, di origini polacche, fu lo zio del celebre Benoît Mandelbrojt (1924, 2010) dei frattali. Si trasferì in Frencia per gli studi di dottorato. Collega di de Possel all'università di Clemont-Ferrand.

Paul Dubreil (Le Mans Maine 1904, Soisy sur École 1994)
Partecipò solo alle prime riunioni e decise di non prender parte al progetto criticando lo stile disordinato di discussione.

Jean Leray (Chantenay 1906, La Baule 1998)
Partecipò solo alle prime riunioni e decise di abbandonare il gruppo offeso dal modo sgarbato con cui erano state respinte le sue proposte.

Charles Ehresmann (Strasbourg (Alsace) 1905, Amiens 1979)
Abbandonò il gruppo nel 1950 per ragioni non deltutto chiare.

Jean Coulomb (Bilda 1904, Paris 1999)
Unico non matematico (fisico) nel gruppo, collega di de Possel e Mandelbrojt all'università di Clermont-Ferrand. Abbandonerà il gruppo nel 1937.

I "medi", dopo la guerra:

Roger Godement (Le Havre 1921, Paris 2016)

Pierre Samuel (Paris 1921, Paris 2009)

Jaques Diximer (Saint-Étienne 1924, in vita)

Jean-Pierre Serre (Bâges 1926, in vita)
Più giovane vincitore della medaglia Fields, nel 1954. Primo vincitore del premio Abel nel 2003. "Serre was the natural leader in the second generation because, like Weil in the first generation, he was the only one with a really universal approach to mathematics." [Senechal 1998]

Samuel Eilenberg (Warsaw 1913, New-York 1998)
Inventore della teoria delle categorie, assieme a Saunders Mac Lane (1909, 2005). Rimase membro del gruppo fino al 1966 (ovvero fino all'età di 53 anni).

Jean-Louis Koszul (Strasbourg 1921, Grenoble 2018)

Laurent Schwartz (Paris 1915, Paris 2002)
Vinse la medaglia Fileds nel 1950. Noto per la teoria delle distribuzioni (1944).

I "giovani", anni '50 - '60:

Armand Borel (La Chaux-de-Fonds 1923,Princeton (New Jersey) 2003)
Svizzero, bourbakista dal 1949 al 1973.[17]

Alexandre Grothendieck (1928-2014)
Vincitore della medaglia Fields nel 1966.

Francois Bruhat (Paris 1929, 2007)

Pierre Cartier (Sedan 1932, in vita) Bourbakista dal 1955 al 1983. All'uscita di Dieudonné dal gruppo assunse il ruolo di estensore.

Serge Lang (Saint-Germain-en-Laye 1927, Berkeley 2005)

John T. Tate (Minneapolis (Minnesota) 1925, in vita)
Matematico statunitense. Vincitore del premio Abel nel 2010.

Le generazioni successive:

Charles Pisot (Obernai (Alsace-Moselle) 1909, Paris 1984)

Claude Chabauty (Oran (Algeria) 1910, Grenoble 1990)

Hyman Bass (Houston (Texas) 1932, in vita)
Vinse il premio Cole[18] (1975), fu insignito della National Medal of Science (USA) nel 2006.

---

[17] If you look at the volumes on Lie groups, you will see that the later ones have chapters that you don't expect in Bourbaki. It became more and more explicit; there are tables and drawings. I think this was basically the influence of one person, Armand Borel. He was fond of quoting Shaw, "It's the Swiss national character, my dear lady," and very often during a discussion he would say, "I'm the Swiss peasant." [Senechal 1998]

[18] Il premio "Frank Nelson Cole Prize", è uno dei due premi stabiliti dalla American Mathematical Society per contributi eccellenti in Algebra (The Cole Prize in Algebra to be awarded at the end of 1934 for papers published during the years 1929-33; in http://www.ams.org/journals/bull/1930-36-01/S0002-9904-1930-04851-X/S0002-9904-1930-04851-X.pdf) oppunre in Teoria dei Numeri (The Cole Prize in the Theory of Numbers to be awarded at the end of 1931 for papers published during the years 1926- 30 inclusive; Ibudem).

Adrien Douady (La Tronche 1935, Saint-Raphaël 2006)
Allievo di Henri Cartan.

Jean-Louis Verdier (1937, 1989)
Collaboratore stretto di Grothendieck.

Michel Demazure (Neuilly-sur-Seine 1937, in vita)
Allievo di Grothendieck.

Michel Raynaud (Riom 1938, 2018).
Allievo di Grothendieck, vinse il Premio Ampère[19] (1987) della e, assieme a David Harbater, il Premio Cole (1995) per aver risolto la congettura di Abhyankar.

Luc Illusie (1940, in vita)
Studente di Henri Cartan, scrisse la tesi di dottorato con Grothendieck. Nel 2012, fu premiato con la Émile Picard Medal dall'Académie des Sciences francese.

Bernard Tessier (1945, in vita)

Alain Connes (Draguignan 1947, in vita)
Vinse il premio Ampère (1980), la medaglia Fields (1982) e il premio Crafoord (2001).

Arnaud Beauville (Boulogne-Billancourt 1947, in vita)
Allievo di Verdier.

Daniel Bennequin (1952, in vita)

Guy Henniart (Santes 1953, in vita)
Allievo di Pierre Cartier.

Joseph Oesterlé (Alsace 1954, in vita)

Georges Skandalis (Atene 1955)
Allievo di Alan Connes.

Olivier Mathieu (1956?)
Membro dell'Istitut Camille Jordan

Patrick Gérard (1957?)

[19]Elargito dall'Académie des Sciences francese.

Jean-Christophe Yoccoz (Paris 1957, 2016)
Vinse la medaglia Fields nel 1994.

Gérard Ben Arous (1957, in vita)

Pierre Julg (Marseille 1959, in vita)

Marc Rosso (b. 1962?)
Allievo di Pierre Cartier.

A.8 La famiglia di Nicolas Bourbaki

Creato il personaggio, non tardarono curiosi dettagli sulla vita privata di Nicolas Bourbaki. Per sostenere l'esistenza di questo matematico fu opportuno, infatti, fornire alcune note biografiche.

La prima descrizione risale al 1935 quando, attraverso una lettera ad Elie Cartan, Weil chiese che venisse pubblicato sulla rivista *Comptes Rendus de l'Académie des Science* un articolo che esponeva interessanti considerazioni sulla teoria dell'integrazione da lui apprese dall'emerito professore Bourbaki. Weil scrive:

> Vi invio allegata, per i "Comptes Rendus", una nota che il signor Bourbaki mi ha pregato di trasmettervi. Voi non ignorate di certo che il signor Bourbaki è il vecchio professore all'Università Reale di Besse-in-Poldavia, di cui ho fatto la conoscenza qualche tempo fa in un café di Clichy nel quale passa la maggior parte della giornata e anche della notte; avendo perduto non solo la sua posizione, ma quasi tutta la sua fortuna negli eventi che hanno fatto scomparire dalla carta d'Europa la sfortunata nazione della poldava, si guadagna attualmente da vivere dando in questo café lezioni di "belote", un gioco di carte di cui è un vero maestro. Giura di non volersi più occupare di matematica, ma non di meno ha accettato di intrattenersi con me su qualche problema importante, permettendomi di gettare l'occhio su parte dei suoi scritti. Sono riuscito a persuaderlo di pubblicare, per cominciare, la nota allegata, che contiene un risultato molto utile per la teoria moderna dell'integrazione ...[20]

L'articolo in questione si intitolava *Sur un théoreme de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiqes.*

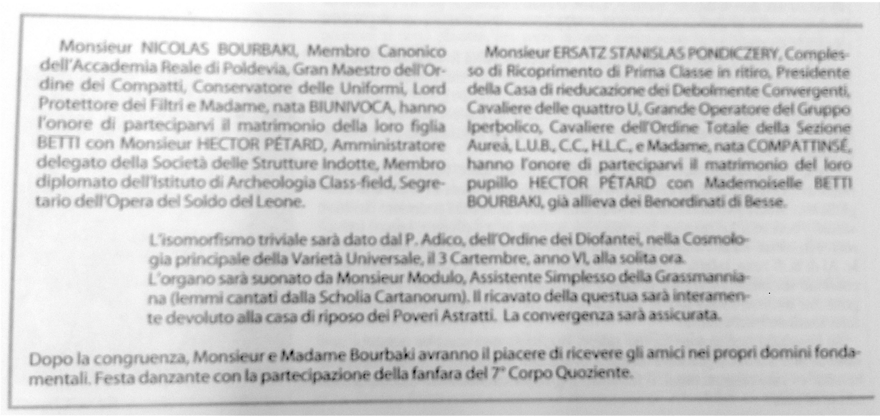
[20][Morange 2003, pag. 18]

Fu così che Elie Cartan supportò attivamente le imprese del figlio garantendo l'esistenza di Bourbaki di fronte all'Académie des Sciences.

Successivamente altri articoli sulla biografia di questo misterioso eccellente matematico della Poldavia furono pubblicati in riviste divulgative.

In un'intervista del 1958 Henri Cartan racconta la "vera" storia delle origini di questo matematico:

> "Does Nicolas Bourbaki really exist?" To try to put an end to this confusion, we turn to a man in whom we can have the utmost confidence: Prof. Dr. Gottfried Köthe, former rector of the Gutenberg University in Mainz. Köthe examined Bourbaki's work in the series "Forscher und Wissenschaftler im heutigen Europa" (Researchers and Scientists in Europe Today). He writes: "The biographical data on our author are somewhat mysterious and complex", but nothing more. Fortunately, a Greek friend of mine provided me with a clue for uncovering the origins of the Bourbaki family. As a result, I am today able to tell you the following story. According to legend, Cretan patriots fought the Turkish invaders in the 17th Century under the leadership of two brothers - Emanuel and Nicolas Skordylis. Their heroic bravery so impressed the Turks that they came to call them "Vourbachi", or battle chieftains. Nicolas and Emanuel bore this laudatory surname proudly, and passed it on to their descendants. In doing so they hellenized the name, changing the V to β and the ch to χ. More than a century later one of Emanuel's great-grandchildren, Soter Bourbaki, had made a name for himself as a seafarer on the Mediterranean. General Bonaparte was engaged at that time in his Egyptian campaign. His brother Jérôme sent Soter Bourbaki to Egypt with the message that the general should return to France as quickly as possible, for the time had become ripe for a coup d'état. As you all know Napoléon succeeded in grasping the reins of power; but what you probably don't know is that, out of gratitude to Soter Bourbaki, Napoléon took upon himself the responsibility of rearing the man's three sons. One of these three sons, who later became a French officer, was the father of Charles Soter Bourbaki, a famous general in the French army. General Bourbaki managed to lead his troops over the Swiss border during the Franco-Prussian War of 1870 - 71, thus saving them from falling into the hands of the in- vading Germans. His sister married one of Nicolas Vourbachi's descendants and from this union of the two branches of the Bourbaki family, so the



Monsieur NICOLAS BOURBAKI, Membro Canonico dell'Accademia Reale di Poldevia, Gran Maestro dell'Ordine dei Compatti, Conservatore delle Uniformi, Lord Protettore dei Filtri e Madame, nata BIUNIVOCA, hanno l'onore di parteciparvi il matrimonio della loro figlia BETTI con Monsieur HECTOR PÉTARD, Amministratore delegato della Società delle Strutture Indotte, Membro diplomato dell'Istituto di Archeologia Class-field, Segretario dell'Opera del Soldo del Leone.

Monsieur ERSATZ STANISLAS PONDICZERY, Complesso di Ricoprimento di Prima Classe in ritiro, Presidente della Casa di rieducazione dei Debolmente Convergenti, Cavaliere delle quattro U, Grande Operatore del Gruppo Iperbolico, Cavaliere dell'Ordine Totale della Sezione Aureà, L.U.B., C.C., H.L.C., e Madame, nata COMPATTINSÉ, hanno l'onore di parteciparvi il matrimonio del loro pupillo HECTOR PÉTARD con Mademoiselle BETTI BOURBAKI, già allieva dei Benordinati di Besse.

L'isomorfismo triviale sarà dato dal P. Adico, dell'Ordine dei Diofantei, nella Cosmologia principale della Varietà Universale, il 3 Cartembre, anno VI, alla solita ora. L'organo sarà suonato da Monsieur Modulo, Assistente Simplesso della Grassmanniana (lemmi cantati dalla Scholia Cartanorum). Il ricavato della questua sarà interamente devoluto alla casa di riposo dei Poveri Astratti. La convergenza sarà assicurata.

Dopo la congruenza, Monsieur e Madame Bourbaki avranno il piacere di ricevere gli amici nei propri domini fondamentali. Festa danzante con la partecipazione della fanfara del 7° Corpo Quoziente.

Figura A.1: Pubblicazioni di Matrimonio tra Betti Bourbaki e Hector Pétard in [Morange 2003]

> story goes, sprang the mathematician Nicolas Bourbaki, who is today a member of the Royal Poldavian Academy. In spite of my Greek friend's information most mathematicians today are still convinced that Nicolas Bourbaki does not exist.[21]

Nel 1938 un gruppo di matematici americani di Princeton della cerchia di Ralph Boas e Frank Smithies, venne probabilmente a conoscenza di Bourbaki attraverso l'incontro con Weil o Chevalley. Decisero dunque di creare pure loro un personaggio fittizio al quale diedero il nome di "Pétard", ma talvolta usarono anche "Ersatz Stanislas Pondiczery". Con questi pseudonimi pubblicarono alcuni articoli senza però avere un obiettivo matematico preciso. Si riporta ad esempio un articolo che sviluppava teoremi matematici applicabili alla caccia al leone pubblicato sull'"American Mathematical Monthly"[22].

Nella primavera del 1939, in occasione di una visita a Cambridge, in Inghilterra, André Weil incontrò Ralph Boas e Frank Smithies. I tre ebbero così l'idea di stampare e spedire ai loro colleghi una partecipazione di matrimonio tra Betti[23] Bourbaki ed Hector Pétard. Tale invito, oltre ad essere ricco di termini matematici ironicamente privati del loro significato tecnico, mette in ridicolo l'altisonanza di certi ambienti dell'alta borghesia del tempo.

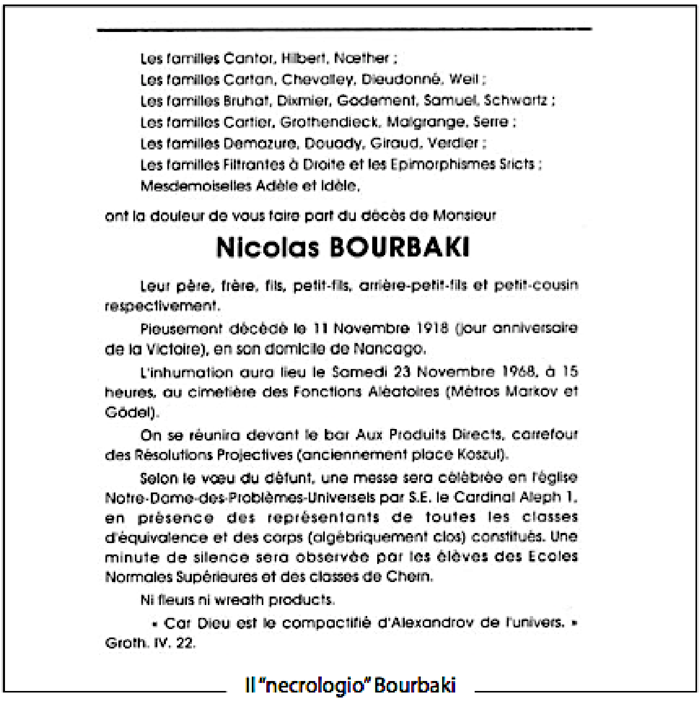
Meno gioioso fu, invece, uno scherzo analogo che ebbe luogo nel 1968. Un autore anonimo decise di far circolare il necrologio di Nicolas.

---

[21] [Cartan 1958]

[22] [H. Pétard, *A conribution to the Mathematical Theory of Big Game Hunting*, American Mathematical Monthly, XLV (1938), p.446ss]

[23] Pare che il nome Betti sia stato scelto in richiamo ai numeri di Betti. Enrico Betti (1832 - 1892) fu un matematico italiano che lavorò nell'ambito della topologia algebrica.



Les familles Cantor, Hilbert, Noether ;
Les familles Cartan, Chevalley, Dieudonné, Weil ;
Les familles Bruhat, Dixmier, Godement, Samuel, Schwartz ;
Les familles Cartier, Grothendieck, Malgrange, Serre ;
Les familles Demazure, Douady, Giraud, Verdier ;
Les familles Filtrantes à Droite et les Epimorphismes Stricts ;
Mesdemoiselles Adèle et Idèle,

ont la douleur de vous faire part du décès de Monsieur

Nicolas BOURBAKI

Leur père, frère, fils, petit-fils, arrière-petit-fils et petit-cousin respectivement.

Pieusement décédé le 11 Novembre 1918 (jour anniversaire de la Victoire), en son domicile de Nancago.

L'inhumation aura lieu le Samedi 23 Novembre 1968, à 15 heures, au cimetière des Fonctions Aléatoires (Métros Markov et Gödel).

On se réunira devant le bar Aux Produits Directs, carrefour des Résolutions Projectives (anciennement place Koszul).

Selon le vœu du défunt, une messe sera célébrée en l'église Notre-Dame-des-Problèmes-Universels par S.E. le Cardinal Aleph 1, en présence des représentants de toutes les classes d'équivalence et des corps (algébriquement clos) constitués. Une minute de silence sera observée par les élèves des Ecoles Normales Supérieures et des classes de Chern.

Ni fleurs ni wreath products.

« Car Dieu est le compactifié d'Alexandrov de l'univers. »
Groth. IV. 22.

Il "necrologio" Bourbaki

Figura A.2: Annuncio funebre della morte di Nicolas Bourbaki in [Bolondi 2007]

Bibliografia

[Agazzi 1999] Evandro Agazzi (a cura di), Novecento novecenti. La cultura di un secolo, La Scuola Editrice, Brescia, 1999, p. 197-213, Pubb.: Collana Secondaria Superiore. Saggi

[Berto 2008] Francesco Berto, Tutti pazzi per Gödel! La guida completa al Teorema di Incompletezza, Gius. Laterza e Figli, Roma-Bari, 2008.

[Bolondi 2007] G. Bolondi, Bourbaki - un matematico dalla Poldavia, pp. 173-182; in: Vite matematiche Protagonisti del '900 - da Hilbert a Wiles (I blu), C. Bartocci, R. Betti, A. Guerraggio, R. Lucchetti (a cura di) , Springer Verlag, Milano, 2007.

[Bottazzini 1996] Umberto Bottazzini, Teoremi e Congetture, capitolo terzo, p.115-144, in: Enrico Bellone e Corrado Mangione (a cura di), Ludovico Geymonat - Storia del pensiero filosofico e scientifico, vol. 10, Il Novecento (4), Garzanti ed., 1996.

[Bourbaki 1939] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Livre 1 - Thèorie des ensembles (fascicule de résultats), Hermann, Paris, 1939.

[Bourbaki 1948] N. Bourbaki, L'architecture des Mathematiques. La Mathematuque, ou les Mathematiques?, Le Lionnais, Paris, 1948; trad. it. in [Israel 2013].

[Bourbaki 1949] N. Bourbaki, Foundations of Mathematics for the Working Mathematician, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 14, No. 1 (Mar., 1949), p. 1-8, Published by Association for Symbolic Logic.

[Bourbaki 1960] N. Bourbaki, Èléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 1960; trad. it. M. L. Vesentini Ottolinghi, Feltrinelli, Milano, 1963.

[Bourbaki 1970] N. Bourbaki, Eléments de mathématique 1 - Thèorie des ensembles, Diffusion C.C.L.S., Paris, 1970 (nou. tir. 1977).

[Cartan 1943] Henri Cartan, Sour le fondement logique des mathématiques, Revue Scientifique, LXXXI (1943), p. 3-11; trad. it. in [Israel 2013].

[Cartan 1958] Henri Cartan, Nicolas Bourbaki and Contemporary Mathematics, The Mathematical Intelligencer, Volume 2, Issue 4 (1980),p.175-180, Springer. (This talk was delivered in Düsseldorfon January 8th, 1958 at the 76th Meeting of the Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen.)

[Corry 1997] Leo Corry, The origins of eternal truth in modern mathematics Hilbert to Bourbaki and beyond, Science in context, SIC Cambridge, Vol. 10, No. 2 (1997), p. 253-296, Cambridge Univ. Press.

[Di Saverio 2003] La Crisi dei Fondamenti della Matematica, tratto da: G. Di Saverio, Dal paradiso di Hilbert all'inferno di Gödel, Tesi di Laurea, Facoltá di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, Universitá degli Studi di Perugia, Perugia 2003.

[Dieudonné 1939] Jean Dieudonné, Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, Revue Scientifique, Institut des Hautes Ètudes, Bruxelles, LXXII (1939), p. 224-232; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1949] Jean Dieudonné, L'axiomatique dans les mathématiques modernes, Congrès International de Philosophie des Science (Paris, 1949), p.47-53, Hermann, Paris; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1968] Jean Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Paris, Hermann, 1968; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1970] Jean A. Dieudonné, The Work of Nicholas Bourbaki, The American Mathematical Monthly Vol. 77, No. 2 (Feb., 1970), p. 134-145, Published by: Taylor and Francis, Ltd. on behalf of the Mathematical Association of America; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1973] Jean A. Dieudonné, Views: Should We Teach "Modern" Mathematics? An affirmation from a founder of Bourbaki of the principles of the new curricula in mathematics, American Scientist, Vol. 61, No. 1 (January-February 1973), p. 16-19, Published by: Sigma Xi, The Scientific Research Honor Society; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1978] Jean A. Dieudonné (sous la direction de), Albegé d'historie des mathématiques 1700-1900, vol. 2, Paris, Hermann, 1978; trad. it. in [Israel 2013].

[Dieudonné 1982] Jean A. Dieudonné, Panorama des mathematiques pures - Le choix bourbachique, Bordas, 1977; English transl. I.G. Macdonald, A panorama of pure mathematics - as seen by N. Bourbaki, Pure and Applied Mathematics, Vol. 97, Academic Press, Elsevier, New York, 1982.

[Frege 1884] Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Wilhelm Koebner, Breslau, 1884.

[Guedj 1985] Denis Guedj, Nicholas Bourbaki, collective Mathematician - An Interview with Claude Chevalley, trans. by Jeremy Gray, 1985, The Mathematical Intelligencer, Vol. 7, No. 2 (1985), p.18-22, Springer Verlag, New York.

[Hermann 1986] Robert Herrmann, Mathematics and Bourbaki, The Mathematical Intelligencer, Vol. 8, No. 1 (1986), p.32-33, Springer Verlag, New York.

[Hersh 2001] Reuben Hersh, What is mathematics, really?, Oxford University Press, 1999; trad. it. Rosalba Giomi, Cos'è davvero la matematica, Baldini and Castoldi ed., Milano, 2001.

[Israel 1978] Giorgio Israel, La matematica assiomatica e il bourbakismo, p. 49-67, in: I fondamenti della matematica dall'800 a oggi, Ettore Casari, Federico Marchetti e Giorgio Israel, Guaraldi editore, feb 1978.

[Israel 2013] Giorgio Israel, Il bourbakismo, saggio sull'ideologia di una delle ultime scuole scientifiche con un antologia di testi, Edizione Kindle, 2013.

[Kline 1972] Morris Kline, Mathematical Thought From Ancient to Modern Times : Volume 2, Oxford University press, New York, 1972; ed. it. Alberto Conte (a cura di), trad. Luca Lamberti, Storia del pensiero matematico, volume secondo dal settecento a oggi, Enaudi, Torino, 1991.

[Lolli 2011] Gabriele Lolli, La guerra dei trent'anni(1900-1930), Da Hilbert a Gödel, ETS, Pisa, 2011.

[Lolli 2009] Gabriele Lolli, La nuova immagine della matematica, Scuola Normale Superiore di Pisa, testo ampliato dell'intervento al Convegno dell'aila "Quale logica per la didattica", Verona, 24-25 ottobre 2009.

[Lolli 2004] Gabriele Lolli, Da Euclide a Gödel, il Mulino, Bologna, 2004.

[Marmier 2013] Anne-Marie Marmier, Una storia del Novecento: Bourbaki e la Matematica nelle riforme dell'insegnamento in Francia, Lettera Matematica Pristem, Vol. 2014, No. 90 (2014), p. 41-49.

[Mathias 1992] A.R.D. Mathias, The Ignorance of Bourbaki, The Mathematical Intelligencer, vol. 14, n. 3 (1992), p. 4-13, Springer Verlag, New York.

[Morange 2003] Michel Morange, Bourbaki: una società segreta di matematici, trad. Massimo Scaglione, i grandi della scienza n. 32 (marzo 2003), p. 1-94, Le Scienze, Milano.

[Weil 1948] André Weil, L'avenir des mathématiques, in Le Lionnais, Paris, 1948, p. 307-320; trad. it. in [Israel 2013].

[Sambin 2005] Giovanni Sambin, Alla ricerca della certezza perduta (forma - contenuto nei fondamenti della matematica), p.1-24; in: Per una dinamica nei fondamenti - Un modo di concepire matematica e logica Raccolta degli 'scritti senza formule' 1987-2000, 29 maggio 2005.

[Senechal 1998] Marjorie Senechal, The Continuing Silence of Bourbaki - An interview with Pierre Cartier, June 18, 1997, The mathematical intelligencer, Vol. 20, No. 1 (1998), p. 22-27, Springer Verlag, New York.

Sitografia

[Bourbaki] sito dell'*Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki*;
http://www.bourbaki.ens.fr

[Meusnier] Norbert Meusnier, Bourbaki e la Probabilità, MATEpristem, 2008;
http://matematica.unibocconi.it/node/861

[Michon] Gérard P. Michon, The Many Faces of Nicolas Bourbaki, 2000-2017 (1 Luglio 2018);
http://www.numericana.com/fame/bourbaki.htm

[Nastasi] Pietro Nastasi, La matematica in francia nel periodo tra le due guerre, Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, (1 Luglio 2018);
http://media.accademiaxl.it/pubblicazioni/Matematica/link/Matema tica%20in%20Francia.pdf

[O'Connor-Robertson] J. J. O'Connor and E. F. Robertson (a cura di), MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland (1 Luglio 2018); http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/index.html

Vorrei infine ringraziare coloro che hanno reso possibile la realizzazione di questo lavoro:

il professor Giovanni Sambin per la proposta del tema e l'appoggio accademico;

il professor Francesco Ciraulo per la disponibilità e pazienza nella correzione delle bozze;

il professor Angelo Guerraggio e il professor Pierre Cartier per aver risposto con solerzia alle mie richieste;

Katharina Spiess, prof. Jörn Steuding, dr. Nicola Oswald che mi hanno aiutato a credere che tutto ciò fosse possibile;

Geraldina Rozzi che mi ha spronato a difendere le mie convinzioni;

Giulia Pertile e la professoressa Monica Cazzola senza le quali forse non avrei mai pensato di intraprendere la carriera matematica;

la mia famiglia, gli amici e Francesco che mi hanno supportato costantemente, soprattutto nei momenti in cui ho pensato di mollare.