



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Solitoni in fluidi e superfluidi

Relatore

Prof. Luca Salasnich

Laureando

Massimiliano Ballarin

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione	v
1 L'equazione di Korteweg-de Vries	1
2 L'equazione di Gross-Pitaevskii	7
2.1 Equazioni idrodinamiche	11
2.2 Trappola armonica	12
3 Bright Solitons nei fluidi e nei superfluidi	13
Conclusioni	21
Bibliografia	23

Introduzione

In questa tesi ci proponiamo di studiare le soluzioni solitoniche per due sistemi molto diversi tra loro: nei fluidi reali e nei superfluidi.

Un solitone è un'onda che si propaga con una certa velocità mantenendo inalterata la sua forma. Questa loro particolarità deriva dalla mancanza di effetti dispersivi, bilanciata a sua volta dall'interazione non lineare tra gli atomi del condensato.

I solitoni si ritrovano in molti ambiti della fisica, a partire dalla fluidodinamica dove furono osservati per la prima volta lungo i canali inglesi dallo scozzese John Scott Russell durante una delle sue uscite a cavallo. [1]

Nei superfluidi essi prendono la forma di "onde di materia" in cui la densità viene localmente ridotta o incrementata, generando rispettivamente "solitoni scuri" e "solitoni chiari".

Alla fine degli anni 90 del ventesimo secolo sono stati rivelati per la prima volta dei solitoni scuri in un condensato di Bose-Einstein costituito da atomi di Rubidio-87 e successivamente nel 2002 sono stati osservati anche i solitoni chiari in un condensato di Litio-7.

Nel primo capitolo del seguente elaborato studieremo le onde superficiali in acque poco profonde deducendo l'equazione di Korteweg-de Vries nella sua forma standard.

Successivamente passeremo nel secondo capitolo a discutere le proprietà di un sistema costituito da N bosoni nella condizione di formare un condensato di Bose-Einstein, ricavando tramite metodo variazionale l'equazione di Gross-Pitaevskii che descrive il sistema. Deriveremo la suddetta equazione sia nel caso stazionario che nel caso in cui il sistema dipenda dal tempo.

Infine, deriveremo i solitoni chiari per entrambi i sistemi esposti nei precedenti capitoli e metteremo a confronto i risultati che si troveranno.

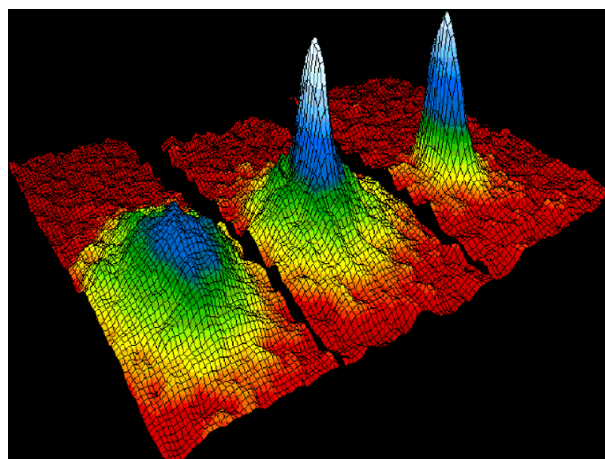


Figura 1: Profili di densità di un gas bosonico di atomi ultrafreddi per differenti temperature. La presenza di un piccolo centrale evidenzia la formazione di un condensato di Bose-Einstein

Capitolo 1

L'equazione di Korteweg-de Vries

L'equazione di Korteweg-de Vries è un'equazione differenziale alle derivate parziali non lineare scoperta da Diederick Korteweg e Gustav de Vries nel 1895 sulla scia dell'importante scoperta di John Scott Russel, un ingegnere scozzese, che notò la curiosa propagazione di un'onda imperturbata completamente al di sopra dell'acqua. Questa particolare classe di onde venne studiata negli anni successivi e gli venne dato il nome di solitoni.

I solitoni possiedono delle caratteristiche che sono ben diverse da quelle delle onde lineari. In primo luogo sono delle onde che possiedono una forma permanente, senza creste né ventri, e localizzate. Curioso inoltre è il caso in cui due solitoni collidono fra loro: due onde solitoniche che si muovono una in verso opposto all'altra, venendo a scontrarsi, si attraversano per poi riemergere senza subire alcuna modifica alla propria forma bensì uno sfasamento.

Prima di iniziare con la derivazione dell'equazione è necessario dare delle spiegazioni in merito alle varie ipotesi e semplificazioni che verranno utilizzate. Innanzitutto si farà riferimento a un modello di fluido ideale.

Per fluido ideale si intende un fluido incompressibile (ovvero con densità $\rho = \text{cost}$) con viscosità nulla in cui fra le sue diverse parti non avvengono scambi di calore (semplificazione di moto adiabatico). Inoltre si considera il fluido irrotazionale ovvero, identificando con $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ la velocità del fluido

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0$$

Essendo il campo di velocità del flusso irrotazionale è possibile esprimerlo come gradiente di un potenziale scalare, che definiamo potenziale di velocità

$$\mathbf{v} = \nabla \phi$$

Oltre a queste equazioni è necessario considerare anche quelle che esprimono la conservazione della massa e del momento del fluido. Scriviamo quindi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f} = -\nabla(P + U)$$

dove ρ è la densità del fluido, P è la pressione interna ed $\mathbf{f} = -\nabla U$ è una forza esterna. La restrizione al caso di un fluido incompressibile si traduce nelle due relazioni seguenti

$$\nabla \rho = 0, \quad \partial_t \rho = 0$$

Ci limiteremo a considerare inoltre il caso in cui la forza esterna che agisce sul sistema sia la forza di gravità $\mathbf{f} = -\rho g \hat{u}_y$.

Introduciamo un'identità molto utile per vettori irrotazionali che ci permetterà di semplificare i calcoli

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

Questo ci permette quindi una sostituzione nell'equazione di conservazione del momento che viene così riscritta come gradiente

$$\nabla \left(\partial_t \phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \frac{P}{\rho} + gy \right) = 0$$

Ora possediamo due equazioni per determinare il potenziale ϕ ossia

$$\partial_t \phi + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{P}{\rho} + gy = 0 \tag{1.1}$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Descriviamo ora il problema costruendo la geometria e determinando le condizioni al contorno. Tratteremo il caso di un canale la cui larghezza è tanto trascurabile da renderlo unidimensionale: in particolare nell'asse delle x poniamo la lunghezza dell'ipotetico canale d'acqua e l'asse y come sviluppo verticale dello spazio. Le onde in questo canale sono superficiali, ovvero adottiamo un'approssimazione di ampia lunghezza d'onda (sostanzialmente le onde sono molto più lunghe della profondità del canale). Descriviamo quindi la profondità del canale con h e la lunghezza caratteristica delle onde che è da ricercare è l . Assumiamo quindi che $l \gg h$.

Un'altra approssimazione che assumiamo è che non ci sia alcuna turbolenza nel moto e quindi, indicando con a l'ampiezza dell'onda, si dovrà avere $a \ll h$.

Supponiamo che il liquido a riposo abbia $y = 0$ e il fondo del canale invece $y = -h$. In una regione di spazio vicino la superficie (compresa) assumiamo non ci sia pressione.

Dal momento che il fondo è fisso si ha una condizione di bordo data da

$$\mathbf{v}|_{fondo} = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, 0) = 0$$

Definiamo l'ampiezza dell'onda in moto con $\eta = \eta(x, t)$, così che la superficie del liquido, se percorsa da onde, sia data da

$$y|_{superficie} = \eta(x, t)$$

Derivando rispetto il tempo l'equazione scritta sopra si ottiene la velocità alla superficie, ovvero

$$\mathbf{v}|_{superficie} = \frac{dy}{dt}|_{superficie} = \partial_t \eta + \partial_x \eta \frac{dx}{dt}|_{superficie}$$

e quindi

$$\phi|_{superficie} = \partial_t \eta + \phi_x|_{superficie} \partial_x \eta$$

Riscrivendo allora l'Eq. (1.1) alla superficie, ricordando che $P = 0$, si ottiene

$$\phi_t|_{superficie} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + g\eta = 0$$

dove è stato ignorato il termine gh perché costante.

Consideriamo ora l'approssimazione lineare per le equazioni scritte sopra, il che significa prendere delle ampiezze molto piccole. Perciò alla superficie avremo

$$\partial_t\eta - \partial_y\phi = 0 = \partial_t\phi + g\eta$$

differenziando e sostituendo è possibile eliminare η nella precedente equazione ottenendo

$$\partial_{tt}\phi + g\partial_y\phi = 0 \tag{1.2}$$

e questo ci permetterà poi di risalire all'espressione della η nel momento in cui troviamo quella per il potenziale di velocità.

Sperimentalmente è stato osservato che, nel caso lineare, le onde di superficie sono approssimabili con onde sinusoidali. Questo suggerisce di cercare una soluzione a variabili separabili per $\nabla^2\phi = 0$ con forma del tipo

$$\phi = Q(y) \sin(kx - \omega t)$$

Affinché soddisfi l'equazione di Laplace deve essere $Q(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$. Se invece viene inserito nell'equazione di bordo $\phi_y(x, y = -h) = 0$ si trova che $\frac{B}{A} = e^{-2kh}$.

In definitiva si ha quindi che la forma finale per ϕ è data da

$$\phi = 2A \frac{\cosh[k(y+h)] \sin(kx - \omega t)}{e^{kh}}$$

Per ottenere l'equazione della frequenza dell'onda è sufficiente inserire quella precedente per ϕ nell'equazione (1.1) e quindi

$$\omega^2 = gk \tanh[k(y+h)]|_{superficie} = gk \tanh(kh)$$

Infine, l'ampiezza dell'onda sarà data da

$$\eta = -\frac{1}{g}\phi_t = A\sqrt{\left(\frac{2k}{g}\right) \sinh(2kh)} \sin(kx - \omega t)$$

Proseguiamo ora la trattazione del nostro problema con un livello di perturbazione superiore, ovvero differenziamo l'equazione (1.1) lungo la direzione del canale (asse x) e valutiamo alla superficie. Si avrà quindi

$$\phi_{xt} + \phi_x\phi_{xx} + \phi_y\phi_{xy} + g\eta_x = u_t + uu_x + vv_x + g\eta_x = 0$$

dove $u = \phi_x$.

Esprimiamo in serie di potenze di y il potenziale di velocità: questo è un approccio standard quando si è in approssimazione di piccole ampiezze

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \phi_n(x, t) \xrightarrow{\frac{d}{dy}} \phi_y = \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} \phi_n(x, t)$$

La condizione sul fondo per cui $v|_{fondo} = 0$ ci da l'importante requisito per cui $\phi_1 = 0$. Inserendo invece l'approssimazione in serie di potenze nell'equazione di Laplace si ottiene una relazione ricorsiva tra i coefficienti

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n (\phi_{n,xx} + (n+2)(n+1)\phi_{n+2}) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi_{n,xx} + (n+2)(n+1)\phi_{n+2} = 0$$

Ma allora, dal momento che $\phi_1 = 0$, significa che anche tutti gli altri termini dispari dovranno essere nulli e quindi si può riscrivere ϕ nella seguente forma

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!} f^{(2m)}$$

dove $f = \phi_0(x, t)$.

EsPLICITIAMO anche le espressioni rispetto f e le sue derivate per u e v

$$\begin{aligned} u = \phi_x &= f_x - \frac{1}{2}y^2 f_{xxx} + \dots \\ v = \phi_y &= -y f_{xx} + \frac{1}{6}y^3 f_{xxxx} + \dots \end{aligned}$$

È conveniente a questo punto definire delle nuove variabili adimensionali. Scaliamo la x in termini di l e il tempo in termini di $c_0 = \sqrt{gh}$. Inoltre scaliamo anche l'ampiezza in termini del suo massimo a e così abbiamo

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{l/c_0}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{a}$$

Definiamo anche per semplicità due piccole quantità: $\epsilon = \frac{a}{h}$ e $\delta = \left(\frac{h}{l}\right)^2$. Inoltre si ha anche che

$$\tilde{\phi} = \frac{h\phi}{alc_0} = \frac{\phi}{\epsilon lc_0}$$

e, infine

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{\epsilon c_0} \\ \tilde{v} &= \frac{\delta}{\epsilon c_0} v \\ \tilde{f} &= \frac{f}{\epsilon lc_0} \end{aligned}$$

Con queste nuove variabili adimensionali ricaviamoci le equazioni che ci interessano. Fermando la serie perturbativa al primo ordine e indicando con O^2 i termini di ordine superiore per le quantità ϵ e δ si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= \tilde{f} - \frac{1}{2}(1 + \epsilon\tilde{\eta})^2 \delta \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}} + O^2 \\ \tilde{u} &= \tilde{f}_{\tilde{x}} - \frac{1}{2}\delta \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + O^2 \\ \tilde{v} &= -\delta \left[(1 + \epsilon\tilde{\eta}) \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{1}{6}\delta \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + O^2 \right] \end{aligned}$$

Riscriviamo la restrizione sulla componente della velocità lungo y (verticale) alla superficie rispetto le nuove quantità trovate e, dividendo tutto per $\epsilon c_0/\delta^{\frac{1}{2}}$, otteniamo

$$\tilde{\phi}_{\tilde{y}} = \delta(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \epsilon\tilde{\eta}_{\tilde{x}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}})$$

sostituendo a $\tilde{\phi}_{\tilde{x}}$ e $\tilde{\phi}_{\tilde{y}}$ gli sviluppi trovati sopra si ottiene

$$\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \epsilon\tilde{\eta}_{\tilde{x}}\tilde{f}_{\tilde{x}} + (1 + \epsilon\tilde{\eta})\tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{1}{6}\delta\tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} + O^2 = 0 \quad (1.3)$$

Allo stesso modo quando nelle altre condizioni al contorno alla superficie vengono sostituite le variabili e le funzioni riscalate si ottiene una nuova equazione che può essere ulteriormente semplificata dividendo semplicemente per il fattore comune ag , così che si trova

$$\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{1}{2}\epsilon \left[(\tilde{\phi}_{\tilde{x}})^2 + \frac{(\tilde{\phi}_{\tilde{y}})^2}{\delta} \right] + \tilde{\eta} = 0$$

e ancora una volta sostituendo alle quantità all'interno dell'equazione i vari sviluppi definiti precedentemente si ottiene

$$\tilde{f}_{\tilde{t}} - \frac{1}{2}\delta\tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}} + \frac{1}{2}\epsilon(\tilde{f}_{\tilde{x}})^2 + \tilde{\eta} + O^2 = 0 \quad (1.4)$$

Da adesso in avanti per alleggerire la notazione considereremo le variabili riscalate senza il simbolo \tilde{A} . Ora proseguiamo e, come fatto anche già nella trattazione lineare del problema, differenziamo rispetto la x le due equazioni (1.3) e (1.4) così da vedere come cambiano lungo la direzione del canale. Introduciamo anche una nuova variabile $\omega = \tilde{f}_{\tilde{x}}$ per semplificare la notazione. Abbiamo allora che

$$\begin{aligned} \omega_t - \frac{1}{2}\delta\omega_{xxt} + \epsilon\omega\omega_x + \eta_x &= 0 \\ \eta_t + \epsilon\omega\eta_x + (1 + \epsilon\eta)\omega_x - \frac{1}{6}\delta\omega_{xxx} &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Cerchiamo ora di risolvere queste due equazioni, assicurandoci prima di tutto che siano soddisfatte all'ordine zero. Quello che si fa è quindi ignorare tutti i termini in ϵ e δ riducendo così le equazioni a

$$\omega_t + \eta_x = 0 = \omega_x + \eta_t \quad (1.6)$$

All'ordine più basso si richiede che sia ω che η soddisfino le equazioni per le onde con velocità adimensionale pari a 1 ovvero: $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$.

Come si può vedere la ω e la η sono simili fra di loro all'ordine zero. Supponiamo allora che le loro differenze si trovino almeno al primo ordine e esprimiamo la soluzione di ω in termini di η , ϵ e δ piccoli

$$\omega = \eta + C(x, t)\epsilon + D(x, t)\delta + O^2$$

Fin'ora ϵ e δ sono state approssimate allo stesso modo sebbene siano fisicamente quantità diverse tra di loro e richiederebbero uno studio separato. Per questo motivo introduciamo un termine aggiuntivo

al primo ordine per la differenza tra u e η . Inseriamo la nuova espressione per ω nella (1.6). Questo ora implica che $\eta_t + \eta_x$ siano del primo ordine in ϵ e δ .

Dal momento che all'ordine più basso si ha che $\omega_t + \omega_x$ sparisce, si dovrà anche imporre la stessa proprietà per le nostre $C(x,t)$ e $D(x,t)$, ovvero:

$$C_t + C_x = O^1 \quad D_t + D_x = O^1$$

Inserendo quindi questo ansatz nelle due equazioni della (1.5) si ottiene

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x + \epsilon(C_t + \eta\eta_x) + \delta(D_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}) &= 0 \\ \eta_t + \eta_x + \epsilon(C_x + 2\eta\eta_x) + \delta(D_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}) &= 0 \end{aligned} \tag{1.7}$$

dove abbiamo ignorato i termini di ordine più alto.

Sottraiamo ora le due equazioni e vediamo che i termini di ordine zero si cancellano ottenendo

$$\epsilon(C_x - C_t + \eta\eta_x) + \delta\left(D_x - D_t - \frac{1}{6}\eta_{xxx} + \frac{1}{2}\eta_{xxt}\right) = 0 \tag{1.8}$$

Terminiamo ora la trattazione dando due semplici equazioni che ci permettono di determinare il modulo di C e D . Questo è possibile perché poco più sopra, assumendo che $\eta_t + \eta_x$ siano del primo ordine in ϵ e δ , ha fatto in modo di mettere in relazione le derivate rispetto la x e il tempo t per opportuni ordini. Si ha che

$$2C_x = -\eta\eta_x = -\frac{1}{2}(\eta^2)_x \quad 2D_x = \frac{2}{3}\eta_{xxx} \quad \rightarrow \quad C = -\frac{1}{4}\eta^2 \quad D = \frac{1}{3}\eta_{xx}$$

Sostituendo i moduli appena trovati per C e D nell'espressione di ω e inserendo proprio quest'ultima nella seconda delle due equazioni della (1.7) di partenza si ottiene infine l'equazione di Korteweg-de Vries:

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\epsilon\eta\eta_x + \frac{1}{6}\delta\eta_{xxx} = 0 \tag{1.9}$$

Ritornando alle variabili non adimensionali t, η e x otteniamo:

$$\eta_t + v\eta_x + \frac{3}{2} \frac{v}{h} \eta\eta_x + \frac{v}{6} h^2 \eta_{xxx} = 0$$

Possiamo inoltre con un ulteriore cambio di variabili ottenere una forma caratteristica della KdV molto nota. Definendo quindi

$$s = x - vt \quad \tau = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{g}{h}} t \quad X = \frac{s}{h} \quad \varphi = \frac{3}{2} \frac{\eta}{h}$$

si ottiene infine

$$\varphi_\tau + 6\varphi\varphi_X + \varphi_{XXX} = 0 \tag{1.10}$$

Capitolo 2

L'equazione di Gross-Pitaevskii

Ci proponiamo di trattare ora un sistema costituito da N bosoni in tre dimensioni il cui stato quantistico si trova a una temperatura di $T=0$ K. In queste condizioni essi costituiscono un condensato di Bose-Einstein¹. L'operatore hamiltoniano del sistema che prendiamo in esame ha la seguente forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1,$$

dove

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + U(\mathbf{r}_i) \right) = \sum_{i=1}^N \hat{h}_i$$

è l'hamiltoniano di particella singola non interagente (se non con un potenziale esterno $U(\mathbf{r}_i)$), e

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$$

è il termine di interazione fra le particelle costituenti il sistema.

Dal momento che si tratta di un problema a molti-corpi, la funzione d'onda degli N bosoni nello stato fondamentale di energia dipende dalle n coordinate \mathbf{r}_i che descrivono la posizione dell' i -esima particella. La nostra Ψ è quindi data da

$$\Psi = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$$

Nell'espressione sopra è stata omissa la dipendenza della funzione d'onda dai gradi di libertà di spin delle N particelle in quanto l'hamiltoniano del sistema non contiene alcuna dipendenza dallo spin.

Prima di proseguire con il calcolo dell'energia media $\langle \hat{H} \rangle$ adottiamo un'importante approssimazione, detta approssimazione di Hartree, in cui consideriamo la funzione d'onda delle N particelle fattorizzabile. Questo è possibile farlo perché i bosoni che formano il sistema sono a temperatura $T = 0$ K formano appunto un BEC. Scriviamo quindi

$$\Psi = \prod_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}_i)$$

¹Da qui in avanti contraiamo condensato di Bose-Einstein con la sigla BEC

dove le φ_i sono uguali tra loro ma sconosciute.

Utilizziamo ora il metodo variazionale per determinare la funzione d'onda $\varphi(x)$ generica minimizzando il valore di aspettazione dell'energia del sistema. Questo metodo è utilizzato per trovare approssimazioni allo stato fondamentale del sistema e poggia sul noto principio variazionale che stabilisce che calcolando il valore medio dell'Hamiltoniano su una funzione d'onda arbitraria, il valore calcolato non sarà mai inferiore all'energia dello stato fondamentale.

Dato il funzionale $E[\varphi] = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle$, imponiamo che la sua variazione si annulli

$$E[\varphi] = \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N \bar{\Psi}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N) \hat{H} \Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N) \quad (2.1)$$

Esplicitando la Ψ come produttoria delle N funzioni d'onda di particella singola si ottiene:

$$\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle = \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N \overline{\left(\prod_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}_i) \right)} \hat{H} \left(\prod_{i=1}^N \varphi(\mathbf{r}_i) \right)$$

dove con \bar{A} si intende il complesso coniugato di A .

Tenendo conto della condizione di normalizzazione delle funzioni d'onda di particella singola si può riscrivere l'equazione come:

$$\langle \hat{H} \rangle = N \int d^3r \bar{\varphi}(\mathbf{r}) \hat{h}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r d^3r' \bar{\varphi}(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \bar{\varphi}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}')$$

con condizione di normalizzazione:

$$\int d^3r |\varphi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (2.2)$$

Per ottenere l'equazione che cerchiamo è necessario imporre la stazionarietà dell'azione, ricordandoci sempre della condizione di normalizzazione. Introduciamo quindi un moltiplicatore di Lagrange λ e definiamo una nuova azione data da

$$\Omega[\varphi(\mathbf{r})] = E[\varphi(\mathbf{r})] - \lambda \int d^3r |\varphi(\mathbf{r})|^2 \quad (2.3)$$

Poniamo ora la variazione della nuova azione $\Omega[\varphi(\mathbf{r})]$ uguale a 0. Questa variazione è data sinteticamente dalla seguente espressione

$$\delta_\varphi \Omega = \int d^3r \left\{ \frac{\delta \Omega}{\delta \varphi} \delta \varphi + \frac{\delta \Omega}{\delta \bar{\varphi}} \delta \bar{\varphi} \right\}$$

ma, dato che nell'ultima equazione un addendo è il complesso coniugato dell'altro, basta imporre che uno dei due sia nullo. Annullando quindi la variazione per ogni $\delta \bar{\varphi}$ si ottiene:

$$N \int d^3r \delta \bar{\varphi}(\mathbf{r}) \left[\hat{h}(\mathbf{r}) + \frac{(N-1)}{2} \int d^3r' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}')|^2 - \lambda \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0$$

Affinché sia nullo l'integrale è necessario che sia nullo l'integrando. Si ottiene così l'equazione di Hartree (1920) l'equazione cercata conosciuta come equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria dedotta nel 1961 da Eugene Gross e Lev Pitaevskii

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3r' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}')|^2 \right] \varphi(\mathbf{r}) = \lambda \varphi(\mathbf{r}) \quad (2.4)$$

Supponendo ora che il potenziale $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ sia di contatto, ovvero

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

dove $g = \frac{4\pi\hbar a_s}{m}$ parametrizza l'intensità dell'interazione non-lineare e a_s è la lunghezza di scattering. Sfruttando le proprietà della Delta e calcolando l'integrale quindi del potenziale di interazione si ottiene l'equazione cercata conosciuta come equazione di Gross-Pitaevskii stazionaria dedotta nel 1961 da Eugene Gross e Lev Pitaevskii

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r}) + g(N-1)|\varphi(\mathbf{r})|^2 - \lambda \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.5)$$

Vediamo ora di esprimere l'equazione che descrive l'evoluzione temporale dello stato del sistema di N bosoni interagenti quando questi si trovano a formare un BEC. Questa equazione non è altro che la generalizzazione della GPE stazionaria al caso in cui si consideri il nostro sistema dipendente dal tempo. A tale proposito consideriamo un nuovo funzionale $S[\varphi]$ e imponiamo nuovamente che la sua variazione si annulli.

Si ha quindi

$$S[\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N \bar{\Psi}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H} \right) \Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \quad (2.6)$$

Esattamente come nel caso della GPE stazionaria adottiamo l'approssimazione di Hartree e fattorizziamo la funzione d'onda totale con le N funzioni d'onda di particella singola $\varphi(x)$. Riscriviamo ora i due addendi dell'azione S come

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle &= \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N \bar{\Psi}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \left(\hat{H} \right) \Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \\ \langle \Psi | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \Psi \rangle &= \int d^3r_1 d^3r_2 \dots d^3r_N dt \bar{\Psi}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Svolgendo i calcoli per i due termini, utilizzando anche i risultati trovati poco più sopra, si ottiene che

$$\langle \hat{H} \rangle = N \int d^3r \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) \hat{h} \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r d^3r' |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2$$

$$\langle i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rangle = N \int dt d^3r \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t)$$

Effettuiamo un ragionamento separato per le due equazioni per rendere più chiaro il procedimento. La variazione della prima delle due si ottiene tenendo conto della condizione di normalizzazione delle autofunzioni φ di particella singola e introducendo un moltiplicatore di Lagrange μ . Inoltre come per la derivazione della GPE stazionaria consideriamo anche qui solo il termine dipendente da $\delta\bar{\varphi}$. Si ha allora che

$$\begin{aligned} \delta \left[N \int d^3r \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) \hat{h} \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{N(N-1)}{2} \int d^3r d^3r' |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 - \mu \int dt d^3r |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \\ = N \int dt d^3r \delta\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) \left(\hat{h} \varphi(\mathbf{r}, t) + \frac{(N-1)}{2} \int d^3r' \varphi(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 - \mu \varphi(\mathbf{r}, t) \right) \end{aligned}$$

Imponendo che la variazione si annulli si ottiene quindi

$$\left[\hat{h}(\mathbf{r}, t) + \frac{(N-1)}{2} \int d^3r' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 - \mu \right] \varphi(\mathbf{r}, t) = 0$$

Ripetendo il procedimento anche per il secondo addendo dell'azione S e ponendo a zero la variazione si ottiene

$$\delta \left[N \int dt d^3r \bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) \right] = Ni\hbar \int dt d^3r \delta\bar{\varphi}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = 0$$

Uguagliando ora i due addendi dell'azione S si ottiene l'equazione di Hartree dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + (N-1) \int d^3r' V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') |\varphi(\mathbf{r}', t)|^2 - \mu \right] \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

Ora, come per la GPE stazionaria, assumiamo che l'interazione fra le particelle avvenga per mezzo di un potenziale di contatto

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

con $g = \frac{4\pi\hbar a_s}{m}$.

Risolvendo l'integrale del potenziale di interazione tramite uso delle proprietà della Delta si ottiene l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + g(N-1) |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2 - \mu \right] \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

2.1 Equazioni idrodinamiche

Vediamo ora come sia possibile dallo studio della GPE dipendente dal tempo ricavarsi un sistema di due equazioni che mostrano come il sistema di bosoni ultra-freddi che si sta studiando sottostia alle equazioni fondamentali dell'idrodinamica. Le due equazioni le chiameremo quindi come equazioni idrodinamiche per i superfluidi.

Si consideri a tal proposito l'equazione (2.9) e si assuma la seguente forma per la autofunzioni di particella singola

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)^{\frac{1}{2}} e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}$$

dove $\rho(\mathbf{r}, t)$ descrive la densità locale del sistema e $\phi(\mathbf{r}, t)$ la fase del condensato.

D'altra parte però la ρ è anche pari al modulo quadro della densità di probabilità φ

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\varphi(\mathbf{r}, t)|^2$$

Inoltre la fase è legata alla velocità del condensato tramite l'equazione

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi(\mathbf{r}, t)$$

da notare che il rotore della velocità del condensato così definita da risultato nullo. Questo significa che il fluido è irrotazionale.

Sostituendo ora le espressioni trovate nella GPE dipendente dal tempo si ottiene un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ m \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} + \nabla \left(U(\mathbf{r}) + g\rho - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}} \nabla^2 \rho^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

dove $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ è la velocità locale del superfluido.

Queste equazioni differenziali sono dette equazioni di Eulero per un fluido irrotazionale sotto l'azione di un potenziale esterno $U(\mathbf{r})$. Legata a questo sistema di equazioni vi è anche l'equazione di stato $P = \frac{1}{2} g \rho^2$ dove P è la pressione .

Esperimenti su superfluidi bosonici hanno poi evidenziato anche l'esistenza di vortici quantizzati in modo che la circuitazione della velocità locale del superfluido è quantizzata

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} n \quad (2.11)$$

dove n è un numero intero.

Dal momento che l'Eq.(2.11) non ha analogo classico questo ci suggerisce che la velocità del superfluido sia proprio il gradiente della fase $\phi(\mathbf{r}, t)$ della funzione d'onda quantistica utilizzata in partenza $\varphi(\mathbf{r}, t)$.

In generale, secondo la teoria di Landau per i superfluidi, definendo μ il potenziale chimico per un superfluido uniforme si ha che conoscendo l'equazione di stato $P = P(n)$, dalla termodinamica si ottiene la relazione seguente

$$n \frac{\partial \mu}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n}$$

Ovviamente, siccome $P = \frac{1}{2} g n^2$, dalla relazione precedente si ha che

$$\mu(n) = g n$$

2.2 Trappola armonica

Analizziamo ora il caso in cui il potenziale esterno $U(\mathbf{r})$ sia un potenziale di confinamento armonico nel piano (yz) , ovvero la cosiddetta trappola armonica:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m\omega^2}{2}(y^2 + z^2)$$

Dal momento che i bosoni del nostro sistema si trovano tutti nello stato fondamentale, la componente della funzione d'onda nelle coordinate (y, z) può essere pensata come autostato dell'oscillatore armonico quantistico. Questo però è rappresentato analiticamente da una gaussiana e quindi è possibile introdurre una forma per la $\varphi(\mathbf{r}, t)$ fattorizzata del tipo

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = f(x, t) \frac{e^{-\frac{(y^2+z^2)}{2\sigma(x,t)^2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\sigma(x,t)}$$

dove $f(x, t)$ è una funzione complessa e $\sigma(x, t)$ reale.

Per semplificare la trattazione, assumiamo che $\sigma(x, t) = a_{\perp} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \text{cost.}$ Minimizzando ora il nuovo funzionale d'azione S , ottenuto sostituendo la nuova forma della φ e dopo aver integrato sulle coordinate (y, z) , si trova l'equivalente unidimensionale dell'eq.(2.9)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma |f(x, t)|^2 - \mu \right] f(x, t) \quad (2.12)$$

dove $\gamma = \frac{gNm\omega}{2\pi\hbar}$.

Capitolo 3

Bright Solitons nei fluidi e nei superfluidi

In questo capitolo vediamo come si possono trovare delle soluzioni molto simili tra loro sia per la KdV che per la GPE dipendente dal tempo.

Vediamo prima come si ricava la soluzione analitica della KdV.

Data la KdV in forma standard come nell'Eq.(1.1), le soluzioni dell'onda per questa equazione sono $\varphi(x, t) = g(\chi)$, dove $\chi = x - vt$.

Sostituendo si ottiene

$$-vg' + 6gg' + g''' = 0$$

dove $\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \chi}(-v)$.

Integrando rispetto a χ si ottiene

$$-vg + g'' + 3g^2 = A \quad (3.1)$$

dove A è una costante di integrazione.

Se ora usiamo la G come un fattore integrante possiamo integrare nuovamente per ottenere

$$\frac{1}{2}(g')^2 = -g^3 + \frac{1}{2}vg^2 + Ag + B \quad (3.2)$$

dove B è un'altra costante di integrazione arbitraria.

Imponiamo a questo punto le condizioni al contorno per cui assumiamo che, sia g , che le sue derivate vadano a 0 per $\chi \rightarrow \infty$.

Per queste condizioni le due costanti di integrazioni sono nulle e riscriviamo l'Eq.(3.2) come

$$(g')^2 = g^2(v - 2g) \quad (3.3)$$

Integriamo questa equazione a variabili separabili

$$\int \frac{dg}{g(v - 2g)}^{\frac{1}{2}} = \pm \int d\chi$$

per poi sfruttare la sostituzione $g = \frac{1}{2}v \operatorname{sech}^2(\theta)$ per ricavare la soluzione analitica

$$g(\chi) = \frac{1}{2}v \operatorname{sech}^2\left(\frac{v}{2}\chi\right) \quad (3.4)$$

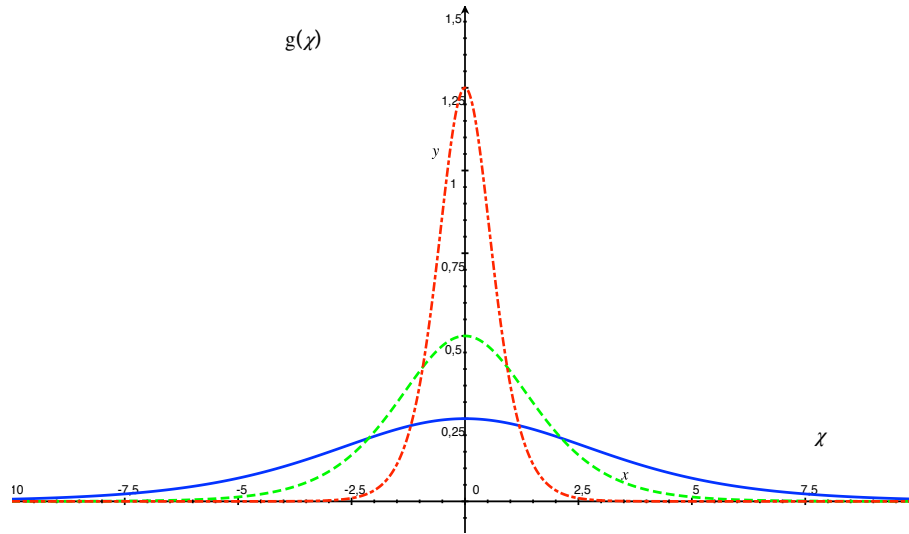


Figura 3.1: Solitoni chiari ottenuti dalla soluzione dell'equazione di Korteweg-de Vries per diversi valori del parametro v di velocità (si veda la soluzione analitica (3.4)).

La curva di colore blu con tratto pieno si riferisce ad un parametro $v = 0.5$, quella verde con tratto tratteggiato ad un $v = 1$ mentre quella rossa con tratto punto per un $v = 2.5$

Cerchiamo ora le soluzioni analitiche per l'equazione di Gross-Pitaevskii dipendente dal tempo. Studiamo delle particolari soluzioni dell'equazione (2.12) che hanno la particolarità di essere shape invariant, ovvero mantengono il profilo costante, e hanno la seguente forma

$$f(x, t) = \Phi(x - vt)e^{i\alpha(x, t)}$$

con Φ e α funzioni a valori reali.

Come è possibile vedere queste sono delle soluzioni che traslano rigidamente con moto rettilineo uniforme di velocità v e mantengono sempre inalterata la forma del modulo della funzione d'onda: vale infatti

$$|f(x, t)|^2 = |(x - vt)|^2$$

Inserendo ora questa forma per la f nell'equazione (2.12) si ottiene un'equazione complessa che avrà una parte reale e una parte immaginaria. Affinché possa essere risolta è quindi necessario che la parte reale dell'equazione sia soddisfatta tanto quanto la parte immaginaria. Da questo deriva quindi un sistema di due equazioni del tipo

$$f'' = \frac{2m}{\hbar} \left[f \left(\hbar \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 - \mu \right) + \gamma f^3 \right] \quad (3.5)$$

$$f'v = \frac{\hbar}{m} \left(f' \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{1}{2} f \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) \quad (3.6)$$

Prendiamo la seconda di queste equazioni e vediamo che è verificata se nel caso in cui $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ sia funzione della sola x . Assumiamo quindi che la α abbia forma generale del tipo

$$\alpha(x, t) = \Lambda(x - vt) + \beta(t)$$

Sostituendola nel sistema di equazioni scritto appena sopra si ottiene

$$f'' = \frac{2m}{\hbar^2} \left[f \left(\hbar \frac{d\beta}{dt} + \frac{\hbar^2}{2m} (\Lambda')^2 - \hbar v \Lambda' - \mu \right) + \gamma f^3 \right] \quad (3.7)$$

$$f'v = \frac{\hbar}{m} \left(f' \Lambda' + \frac{1}{2} f \Lambda'' \right) \quad (3.8)$$

Questo studio preliminare che facciamo è necessario per poter affrontare poi il caso del "Bright Soliton" (solitone chiaro) in modo più veloce e senza eccessive complicazioni.

Risolviamo quindi l'equazione della parte immaginaria per ottenere la Λ' in funzione della f che porge quindi la seguente relazione valida per $f(x) \neq 0$

$$v \frac{(f^2)'}{f} = \frac{\hbar}{m} \frac{(f^2 \Lambda')'}{f}$$

che integrata rispetto la x da

$$f^2(x) \left(v - \frac{\hbar}{m} \Lambda'(x) \right) = \xi$$

dove ξ è la costante di integrazione. Dal momento che il valore di quest'ultima dipende da quali condizioni al contorno si definiscono per la f scegliamo che valgano

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x - vt)| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Lambda'(x - vt) = 0$$

Quindi si ha che

$$\xi = 0$$

e sostituendo le varie espressioni si ottiene

$$\Lambda'(x - vt) = \frac{mv}{\hbar}$$

Consideriamo ora l'eq.ne per la derivata seconda della f sostituendo l'espressione trovata per Λ' , trovando

$$f'' = \left(\frac{2m}{\hbar}\right) \frac{d\beta}{dt} f - \left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2 f - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f + \frac{2m}{\hbar^2} \gamma f^3 \quad (3.9)$$

Scegliendo una forma specifica per la funzione β è possibile semplificare la (3.9) così da rendere più accessibili i calcoli successivi. La forma che dà luogo all'equazione più semplice è

$$\beta(t) = \frac{mv^2}{2\hbar} t$$

e quindi sostituendo si ottiene

$$f'' = -\frac{2m}{\hbar^2} \mu f + \frac{2m}{\hbar^2} \gamma f^3 \quad (3.10)$$

Ci accorgiamo però che l'Eq. (3.10) è integrabile per quadrature ed è possibile trattarla come una sorta di equazione di Newton 1D del tipo

$$f'' = -Af + Bf^3 = G(f) = -\frac{dW}{df}$$

dove $W(f)$ la possiamo pensare come energia potenziale del campo di forze conservativo e ha la seguente espressione

$$W = \frac{m}{\hbar^2} \mu f^2 - \frac{m}{2\hbar^2} \gamma f^4$$

A questo punto è possibile sfruttare l'integrale del moto dell'energia totale del sistema

$$K = \frac{1}{2} f'^2 + W(f) \quad (3.11)$$

Moltiplicando ambo i membri per 2, sostituendo l'espressione trovata prima per $W(f)$ e facendo la radice quadrata ambo i membri si ottengono due rami con segno opposto

$$f' = \pm \sqrt{2K - \frac{2m}{\hbar^2} \mu f^2 + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^4} = \pm F(f) \quad (3.12)$$

L'integrazione della precedente equazione la effettuiamo solo per il caso del Bright soliton avendo imposto che la f si annulli all'infinito così come la sua derivata.

In questo caso la densità di probabilità presenta un massimo isolato e la soluzione trasla di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità v .

Dell'Eq. (3.12) studiamo il ramo con derivata negativa nel primo quadrante. Si vede inoltre come, valutando l'Eq.(3.11) all'infinito, si trovi $K = 0$.

Quindi si ottiene

$$f' = -f \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} \mu + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^2} = \pm F(f) \quad (3.13)$$

Per semplicità poniamo

$$\zeta = x - vt$$

L'Eq. (3.13) è un'equazione differenziale a variabili separabili e quindi integrandola si ottiene

$$\zeta - \zeta_0 = - \int_{f(\zeta_0)}^{f(\zeta)} \frac{f}{f \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} \mu + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^2}} \quad (3.14)$$

dove scegliamo $\zeta_0 = 0$ e $f(\zeta_0) = f(0)$.

A questo punto quindi si ha

$$\zeta = - \int_{f(0)}^{f(\zeta)} \frac{df}{f \sqrt{-\frac{2m}{\hbar^2} \mu + \frac{m}{\hbar^2} \gamma f^2}} \quad (3.15)$$

La f assume il suo massimo in $\zeta = 0$ e il suo valore è dato da

$$f_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{2\mu}{\gamma}}$$

dove $\alpha = -\frac{2m}{\hbar^2} \mu$ e $\beta = \frac{m}{\hbar^2} \gamma$. Il secondo membro dell'Eq.(3.15) è integrabile tramite cambio di variabile ponendo

$$f = f_0 \cos(\nu)$$

che porge l'integrale indefinito seguente

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int \frac{d\nu}{\cos(\nu)} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} [\ln(1 + \sin(\nu)) - \ln(1 - \sin(\nu))] + c$$

Calcolando ora l'integrale definito rispetto a f si ottiene la seguente equazione

$$2\sqrt{\alpha}\zeta = \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_0^2}}} \right] \quad (3.16)$$

Per invertire la precedente equazione è necessario sommare ad ogni membro il suo inverso e dopo aver fatto le semplificazioni del caso si ottiene

$$f(\zeta) = f_0 \operatorname{sech}(f_0 \sqrt{\beta} \zeta) \quad (3.17)$$

Infine, dalla condizione di normalizzazione della f si ottiene una relazione che lega μ a γ , ovvero

$$\mu = -\frac{m\gamma^2}{8\hbar^2}$$

e di conseguenza si ha che il massimo della $f(\zeta)$ dipende esclusivamente da γ

$$f_0 = \sqrt{m\gamma} 4\hbar^2$$

Riscriviamo per completezza l'espressione della f normalizzata

$$f(\zeta) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \operatorname{sech}\left(\frac{\gamma}{2}\zeta\right) \quad (3.18)$$

dove le costanti m e \hbar sono state poste uguali a 1.

Come è possibile vedere, le equazioni (3.4) e (3.18) sono molto simili tra loro.

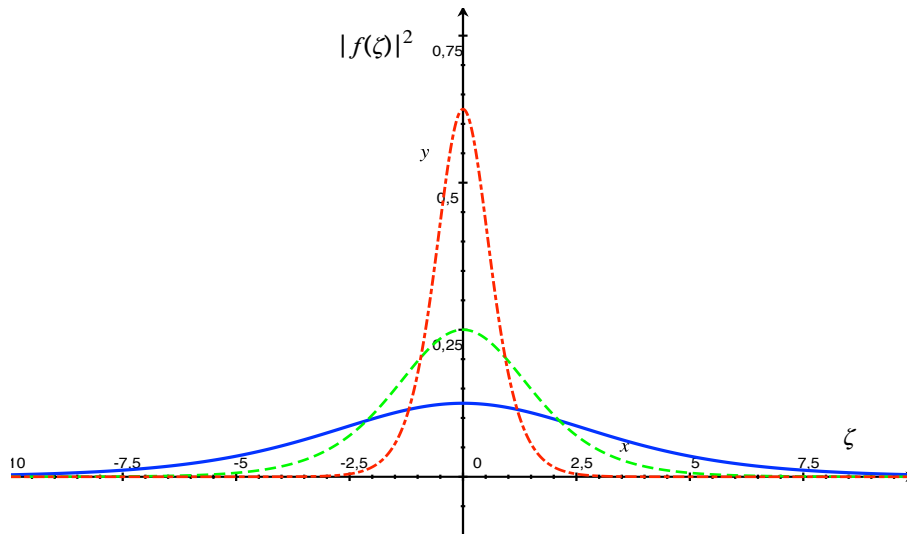


Figura 3.2: Modulo quadro dell'equazione per i solitoni chiari ottenuti dall'equazione di Gross-Pitaevskii per diversi valori del parametro γ di interazione (si veda la soluzione analitica (3.18)). La curva di colore blu con tratto pieno si riferisce ad un parametro $\gamma = 0.5$, quella verde con tratto tratteggiato ad un $\gamma = 1$ mentre quella rossa con tratto punto per un $\gamma = 2.5$

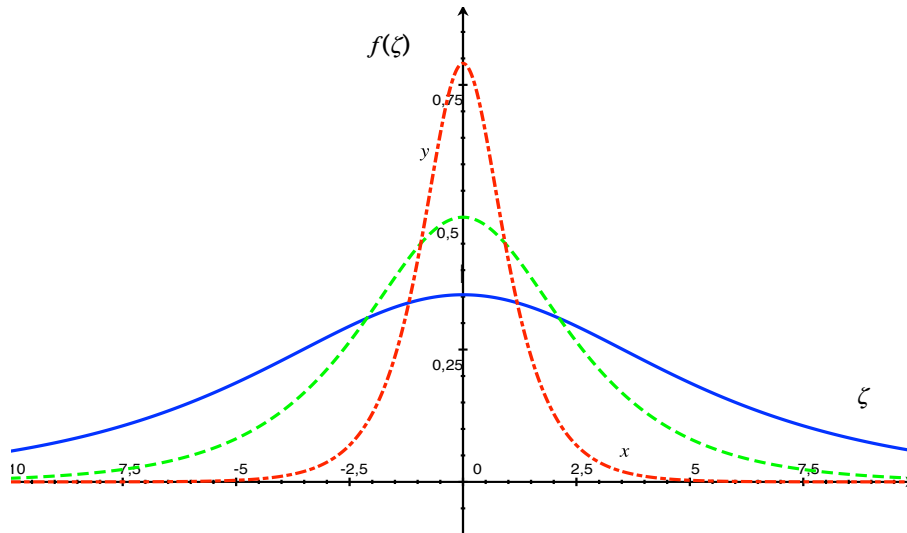


Figura 3.3: Solitoni chiari ottenuti dall'equazione di Gross-Pitaevskii per diversi valori del parametro γ di interazione (si veda la soluzione analitica (3.18)). La curva di colore blu con tratto pieno si riferisce ad un parametro $\gamma = 0.5$, quella verde con tratto tratteggiato ad un $\gamma = 1$ mentre quella rossa con tratto punto per un $\gamma = 2.5$

Conclusioni

In questo elaborato è stata ricavata innanzitutto l'equazione di Korteweg-de Vries classica nell'ambito delle onde d'acqua superficiali.

Successivamente sono state ricavate le equazioni di Gross-Pitaevskii nel caso stazionario e nel caso dipendente dal tempo. Questa equazione descrive il comportamento e l'evoluzione temporale dello stato di un qualsiasi condensato di bosoni a temperatura $T=0K$. Per l'equazione dipendente dal tempo è stata effettuata una riduzione ad un'equazione unidimensionale attraverso l'uso di un potenziale di confinamento armonico nel piano (yz) .

Infine sono state calcolate analiticamente le soluzioni solitoniche chiare per entrambe le equazioni e si è visto come le due diano risultate simili fra di loro.

Sebbene si sia trovata una certa analogia tra i due sistemi per quanto riguarda la forma analitica delle soluzioni, esse comunque presentano delle differenze. Ad uno sguardo più attento è possibile notare che la soluzione delle onde solitoniche chiare nei fluidi dipende espressamente dalla velocità che ne determina la forma. Nel caso invece dei solitoni nel superfluido bosonico l'Eq. (3.18) dipende dal parametro γ di interazione.

Bibliografia

- [1] J. E. Allen, *Phys. Scripta* 57, 436 (1998).
- [2] Y. A. Cengel e J. M. Cimbala. *Meccanica dei Fluidi*. McGraw-Hill, 2007.
- [3] C. Dainese. *Equazione di Korteweg-de Vries e sue soluzioni solitoniche*. Padova, 2010.
- [4] P. G. Drazin e R. S. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] E. P. Gross, *Nuovo Cimento* 20, 454 (1961).
- [6] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* 13, 451 (1961).
- [7] L. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein Condensation*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2003.
- [8] L. Salasnich. *Quantum Physics of Light and Matter*. Springer International, 2014.