

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Triennale in Astronomia

Tesi di Laurea

Espressioni analitiche, approssimazioni e confronti
sulla distanza di luminosità in un universo piatto
con materia oscura e costante cosmologica

Relatore

Prof. Sabino Matarrese

Laureando

Tommaso Molinari

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Introduzione	3
2	La distanza di luminosità	5
3	Funzioni matematiche	11
3.1	Integrali ellittici del primo tipo	11
3.2	Integrali ellittici di Carlson	13
3.3	Funzioni ipergeometriche	14
3.4	Approssimante di Padé	15
4	Espressioni esatte	17
4.1	Liu et al. (2011)	17
4.2	Mészáros & Rípa (2013)	18
4.3	Baes et al. (2017)	18
5	Approssimazioni	21
5.1	Pen (1999)	21
5.2	Adachi & Kasai (2012)	22
6	Confronti	25
7	Conclusioni	27
	Bibliografia	28

Capitolo 1

Introduzione

La misura delle distanze in cosmologia è uno dei dati ottenibili più importanti in quanto è proprio da questa che moltissime delle proprietà più interessanti del cosmo possono essere indagate. Basti pensare alla scoperta da parte di Hubble dell'espansione uniforme del nostro universo o allo studio delle supernove di tipo Ia che ha portato all'idea di espansione accelerata e di energia oscura. Le distanze possono essere definite in vari modi e a seconda di questi prendono nomi differenti, come la distanza di diametro angolare.

In questo scritto si è presa in considerazione la distanza di luminosità che pone in relazione la luminosità di una sorgente al flusso captato dai nostri telescopi. Il modello cosmologico in cui viene fatta la valutazione è quello di un universo piatto con materia oscura e costante cosmologica (Λ CDM). La distanza di luminosità, in questo caso, non può essere espressa attraverso funzioni elementari, è pertanto necessario fare ricorso a espressioni più complesse come integrali ellittici nella forma di Legendre e in quella di Carlson e funzioni ipergeometriche. È anche possibile utilizzare espressioni approssimate per la valutazione qualora la precisione richiesta per lo scopo a cui si è interessati non dovesse essere superiore all'errore dell'approssimazione utilizzata.

Vari autori si sono adoperati in questo senso e hanno trovato diversi metodi per risolvere il problema, in ognuno di questi si deve far ricorso a valutazioni numeriche per l'effettivo calcolo della distanza che talvolta si presentano piuttosto lunghe ed elaborate. Pertanto può essere utile discriminare il più efficace temporalmente tra i vari metodi proposti.

Lo scritto è così suddiviso: nel primo capitolo si spiega cosa sia la distanza di luminosità, per quali scopi possa essere utile e se ne deriva l'espressione integrale. Nel secondo si analizzano le varie funzioni e approssimazioni utilizzate nei capitoli successivi. Poi, nel terzo, si considerano gli articoli di Liu et al. (2011), Mészáros & Rípa (2013) e Baes et al. (2017) in cui sono presentate le espressioni esatte che utilizzano integrali ellittici nelle due forme e funzioni ipergeometriche. Nel quarto la distanza di luminosità è approssimata attraverso due metodi differenti nei lavori di Pen (1999) e Adachi & Kasai (2012). Nel quinto, si riporta un confronto attraverso

un esperimento effettuato da Baes (2017) per appurare quale delle espressioni proposte sia la più rapida da essere calcolata. Infine, nel sesto, si espongono le conclusioni e si riassume quanto trattato.

Capitolo 2

La distanza di luminosità

Uno degli osservabili più importanti in cosmologia è il flusso fotonico che è possibile raccogliere con un telescopio da una sorgente. Esso si può definire come:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} \quad (2.1)$$

Dove L è la luminosità intrinseca della sorgente (energia emessa al secondo) e d_L è la sua distanza di luminosità.

In un universo in espansione quest'ultima non sarà semplicemente la distanza comovente come sarebbe invece in un universo governato da una metrica euclidea, ma dipenderà anche dal redshift. Per inserire questa correzione in eq.(2.1) si consideri la metrica di Robertson-Walker per un universo piatto:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} a^2(t) [d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2] \quad (2.2)$$

Dove c è la velocità della luce nel vuoto e $a(t)$ è il fattore di scala al tempo cosmico t . Si è inoltre posto uguale a 1 il fattore di scala al tempo attuale. Consideriamo un raggio di luce ($ds^2 = 0$) che arriva fino a noi da una certa sorgente cosmica alla distanza radiale comovente χ_0 , esso viaggerà percorrendo una geodetica determinata dalla metrica di Robertson-Walker. Integriamo lungo la coordinata radiale

$$\int_0^{\chi_0} d\chi = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.3)$$

Dove t_o e t_e sono rispettivamente i tempi cosmici di ricezione ed emissione del fotone. Dato che la coordinata comovente è per definizione invariante al trascorrere del tempo cosmico possiamo considerare anche un raggio di luce che parta al tempo $t_e + dt_e$ e arrivi al tempo $t_o + dt_o$, pertanto avremo la seguente equazione:

$$\int_{t_e+dt_e}^{t_o+dt_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.4)$$

Spezzando gli integrali e semplificando otteniamo:

$$\int_{t_o}^{t_o+dt_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.5)$$

Inoltre, siccome $dt_o \ll t_o$ e $dt_e \ll t_e$, si ha rispettivamente $\frac{1}{a(t)} \approx \frac{1}{a(t_o)}$ e $\frac{1}{a(t)} \approx \frac{1}{a(t_e)}$. Pertanto possiamo portare fuori dagli integrali il fattore di scala:

$$\frac{dt_o}{a(t_o)} = \frac{dt_e}{a(t_e)} \quad (2.6)$$

Le frequenze dei fotoni emessi saranno inversamente proporzionali agli intervalli temporali e, ricordando la definizione di redshift $z = \frac{\Delta\nu}{\nu}$, abbiamo:

$$\frac{dt_o}{dt_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = 1 + z \quad (2.7)$$

A partire da questa relazione possiamo trovare un'espressione per il flusso che tenga conto dell'espansione dell'universo:

$$F = \frac{L}{4\pi\chi_0^2} \frac{1}{(1+z)^2} \quad (2.8)$$

Il fattore $(1+z)^2$ tiene conto sia della diminuzione di energia dei singoli fotoni, a causa dell'aumento della loro lunghezza d'onda, sia del ritardo nell'arrivo degli stessi rispetto al ritmo di emissione. Inoltre la coordinata radiale e il redshift sono legati dalla seguente relazione ricavata da eq.(2.3) sostituendo come variabile d'integrazione il fattore di scala al posto del tempo:

$$\int_0^{\chi_0} d\chi = \chi_0 = \int_{\frac{1}{1+z}}^1 \frac{cda}{a\dot{a}} \quad (2.9)$$

Il nostro intento è ora quello di risolvere questa equazione in un universo piatto con materia oscura e costante cosmologica ovvero considerando l'energia del vuoto. Prima di tutto definiamo i seguenti parametri cosmologici:

- Il parametro di Hubble: $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, la costante di Hubble non è altro che questo parametro calcolato al tempo cosmico attuale.
- Il parametro di densità relativo alla materia gravitante: $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m(t)}{3H(t)^2}$ dove $\rho_m(t)$ è la densità di materia gravitante.
- Il parametro di densità relativo all'energia del vuoto: $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda(t)}{3H(t)^2}$ dove $\rho_\Lambda(t)$ è la densità di energia del vuoto.

Con questi parametri e ricordando che abbiamo posto uguale a 1 il fattore di scala al tempo attuale l'equazione di Friedmann può essere scritta come:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{\Omega_m H_0^2}{a(t)} + \Omega_\Lambda H_0^2 a^2(t) = \frac{H_0^2}{(1+z)^2} [(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda] \quad (2.10)$$

dove H_0 è la costante di Hubble. Da eq.(2.7) si ha:

$$da = d \frac{1}{1+z} = - \frac{dz}{(1+z)^2} \quad (2.11)$$

Sostituendo eq.(2.10) e eq.(2.11) in eq.(2.9) otteniamo:

$$\chi_0 = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda}} \quad (2.12)$$

dove chiamiamo con lo stesso simbolo un estremo di integrazione e la variabile di integrazione, commettendo un errore formale per non appesantire ulteriormente la notazione.

Utilizziamo ora questa relazione nell'espressione per la distanza di luminosità $d_L = \chi_0(1+z)$ e, poiché abbiamo trascurato la presenza della radiazione, scriviamo $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$:

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 \Omega_m + (1 - \Omega_m)}} \quad (2.13)$$

Questo integrale non è risolvibile mediante funzioni elementari, bisognerà pertanto fare ricorso a funzioni complesse o ad approssimazioni.

La distanza di luminosità è forse la più importante scala di distanza, in quanto distanza di diametro angolare e distanza propria possono essere calcolate a partire da essa. Inoltre eq.(1.13) pone in relazione d_L con il redshift e questo porta ad una moltitudine di applicazioni, per esempio lo studio delle supernove di tipo Ia come candele campione: si ritiene che questo tipo di supernova, nata dal superamento della massa di Chandrasekhar da parte di una nana bianca in un sistema binario per accrescimento di una delle due stelle ai danni dell'altra, raggiunga, durante l'esplosione, sempre la stessa magnitudine assoluta. Però lo studio delle curve di luce di queste stelle mostra come il picco e la larghezza varino con la distanza mostrandosi meno luminose e più larghe a redshift maggiori (Fig.2.1).

Sappiamo da eq.(2.1) quale sia la relazione tra d_L e luminosità e consideriamo l'espressione che lega redshift e distanza di luminosità in un universo senza costante cosmologica (che si deriva a partire dalla relazione di Mattig):

$$d_L = \chi_0(1+z) = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{q_0^2} \quad (2.14)$$

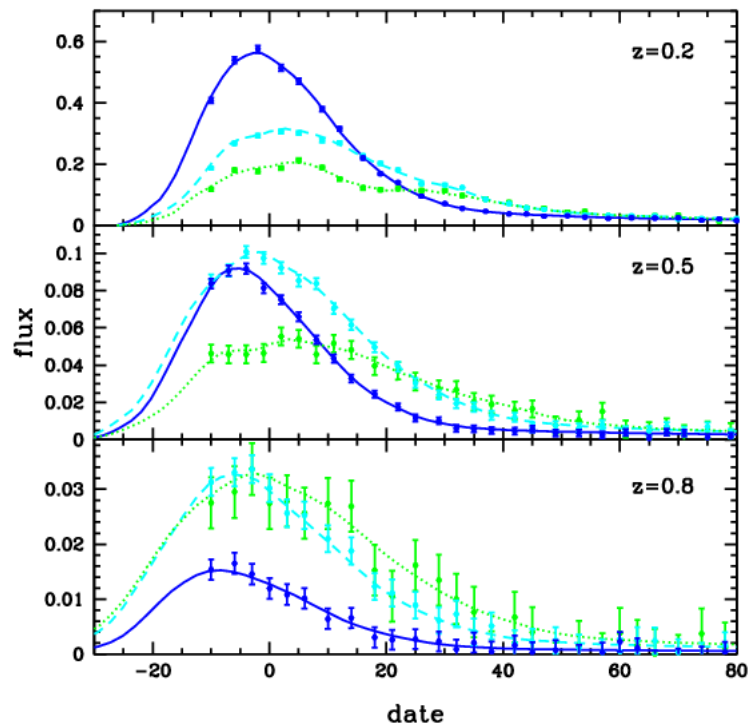


Figura 2.1: Esempio di curve di luce di una supernova a differenti redshift. La linea continua blu, quella tratteggiata ciano e quella punteggiata verde sono rispettivamente nelle bande g, R e I (Y. Gong, A. Cooray, X. Chen, ‘Cosmology with photometric surveys of type Ia supernovae’, The Astrophysical Journal, Volume 709, Number 2, 13 January 2010)

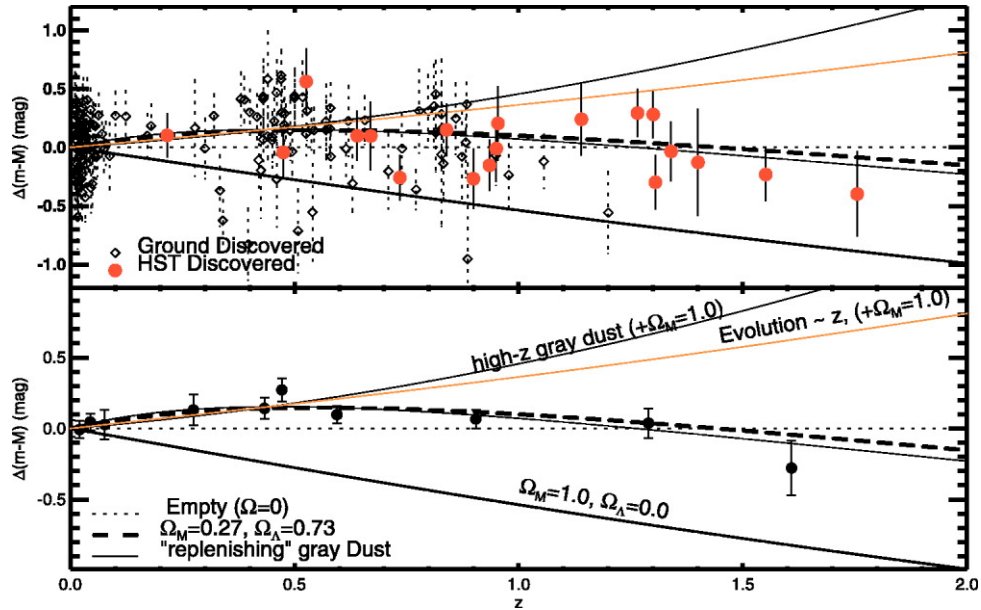


Figura 2.2: Diagramma di Hubble per varie supernove. Nel pannello superiore vi sono i dati presi con telescopi da terra e da HST, mentre nel pannello inferiore vi sono le relative medie pesate. Le linee continue, tratteggiate e a puntini rappresentano alcuni modelli cosmologici. (Riess et al., “Type Ia Supernova Discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution”, *The Astrophysical Journal*, Volume 607, Number 2, 2004)

dove $q(t) = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} = \frac{1}{2}\Omega_m(t)$ è detto parametro di decelerazione e q_0 è semplicemente calcolato al tempo cosmico attuale.

Costruendo un diagramma di Hubble per questo tipo di supernove (Fig.2.2) si nota come il loro flusso sia troppo piccolo rispetto a quanto previsto dal modello con $\Omega_m = 1$ che è quanto servirebbe per avere curvatura zero. Per risolvere il problema si potrebbe provare a diminuire la densità di materia gravitante in modo da aumentare la distanza di luminosità e quindi abbassare il valore del flusso, però anche per un modello di Milne ($\rho_m = 0$) esso risulterebbe troppo elevato. Pertanto bisogna introdurre un altro fattore: la costante cosmologica, ovvero un fattore repulsivo identificato con l'energia del vuoto che sottintende un'espansione accelerata dell'universo.

Capitolo 3

Funzioni matematiche

Per ottenere un'espressione analitica per la funzione di luminosità è necessario adoperare funzioni non elementari, in particolare i lavori esaminati fanno uso di integrali ellittici del primo tipo, di integrali ellittici di Carlson e di funzioni ipergeometriche. Per quanto riguarda invece le approssimazioni viene utilizzato l'approssimante di Padé.

3.1 Integrali ellittici del primo tipo

Se $R(x, y)$ è una funzione razionale con y^2 uguale a un polinomio di 3° o 4° grado in x allora

$$\int R(x, y) dx \quad (3.1)$$

è detto integrale ellittico.

Si può ricondurre ognuno di questi integrali a tre forme principali. Per la nostra trattazione sarà sufficiente analizzarne una soltanto.

Detto m il parametro e φ l'ampiezza, allora un integrale ellittico del primo tipo si scrive, nella forma canonica di Legendre, come:

$$F(\varphi | m) = \int_0^\varphi (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta \quad (3.2)$$

Inoltre, se il parametro m è reale, si potrà sempre porre $0 < m < 1$ nei seguenti modi:

- Se m è maggiore dell'unità si può effettuare la sostituzione $\sin \beta = m^{\frac{1}{2}} \sin \varphi$, ottenendo $F(\varphi | m) = m^{-\frac{1}{2}} F(\beta | m^{-1})$, così m può essere sostituito da un parametro minore dell'unità.

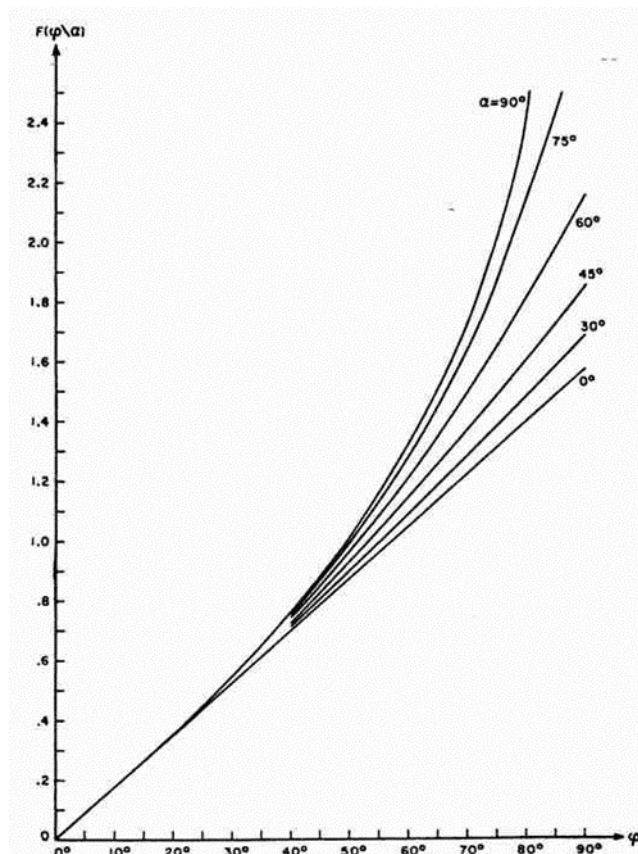


Figura 3.1: Integrale ellittico del primo tipo con α costante (M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, (1964) Dover Publications, New York. ISBN 0-486-61272-4. Vedi capitolo 17, pp. 587-627)

- Se m è negativo si può agire con la seguente manipolazione: $F(\varphi | -m) = -(1+m)^{-\frac{1}{2}} F(\frac{\pi}{2} - \varphi | m(1+m)^{-1})$

Un'altra forma in cui si possono presentare questi integrali si ottiene ponendo $m = \sin^2 \alpha$ dove α è detto angolo modulare (Fig.3.1).

La valutazione numerica degli integrali ellittici può essere effettuata adoperando la trasformazione di Landen con il metodo noto come media aritmetico-geometrica o con uno schema di integrazione di Newton-Raphson.

Il primo metodo fa uso della disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica: detti a_0 e b_0 i due numeri reali iniziali di due successioni, definiamo i successivi con una formula ricorsiva come segue

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n); b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (3.3)$$

Così definiti a_n è una successione decrescente e b_n è una successione crescente. Essi convergono allo stesso numero $M(a_0, b_0)$.

Detto modulo ellittico $k = \sqrt{m}$ e modulo ellittico complementare $k' = \sqrt{1-m}$ procediamo con alcune definizioni:

- $k_{n+1} = \frac{1-k'_n}{1+k'_n}$ con $k_0 = k$
- $\tan(\varphi_{n+1} - \varphi_n) = k'_n \tan(\varphi_n)$ con $\varphi_0 = \varphi$

Da qui utilizzando la trasformata di Landen si ottiene:

$$F(\varphi_{n+1}, k_{n+1}) = (1 + k'_n)F(\varphi_n, k_n) \quad (3.4)$$

Potendo scrivere $F(\varphi_n, k_n) = \varphi_n$ si ha:

$$F(\varphi_0, k_0) = \frac{2K}{\pi} \frac{\varphi_n}{2^n} \quad (3.5)$$

Ora, posto $a_0 = 1$ e $b_0 = k'$, all'aumentare di n $\frac{\varphi_n}{2^n}$ tende a un limite finito e dopo alcuni conti si ricava la seguente formula:

$$F(\varphi_0, k_0) = \frac{1}{M(a_0, b_0)} \frac{\varphi_n}{2^n} \quad (3.6)$$

Eq.(3.6) converge con estrema rapidità grazie alla grande velocità di convergenza della media aritmetico-geometrica.

3.2 Integrali ellittici di Carlson

Gli integrali ellittici possono essere posti in forme diverse da quelle classiche di Legendre, esse sono dette forme simmetriche di Carlson. Quella per noi rilevante è la seguente:

$$R_F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+x_1)(t+x_2)(t+x_3)}} \quad (3.7)$$

Utilizzando i teoremi di riduzione di Carlson è possibile, a partire da integrali definiti su un intervallo reale e con una funzione integranda contenente la radice quadrata di un polinomio cubico o quartico, ricondursi a un integrale simmetrico tra 0 e ∞ contenente la radice quadrata di un polinomio cubico.

Vediamo brevemente il procedimento per la valutazione numerica di questi integrali. Possiamo usare le formule di duplicazione:

$$R_F(x_1, x_2, x_3) = 2R_F(x_1 + \lambda, x_2 + \lambda, x_3 + \lambda) \quad (3.8)$$

dove $\lambda = \sqrt{(x_1)}\sqrt{(x_2)} + \sqrt{(x_2)}\sqrt{(x_3)} + \sqrt{(x_3)}\sqrt{(x_1)}$

Prima di procedere definiamo alcuni termini:

- $x_{1,0} = x_1, x_{2,0} = x_2, x_{3,0} = x_3, \lambda_0 = \lambda$
- $A_0 = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$
- $Q = (3r)^{-\frac{1}{6}} \max\{|A_0 - x_1|, |A_0 - x_2|, |A_0 - x_3|\}$

dove r è il valore al di sotto del quale deve essere l'errore relativo alla fine del computo

- $\lambda_m = \sqrt{x_{1,m}}\sqrt{x_{2,m}} + \sqrt{x_{2,m}}\sqrt{x_{3,m}} + \sqrt{x_{3,m}}\sqrt{x_{1,m}}$ con $m \in N$
- $A_{m+1} = \frac{A_m + \lambda_m}{4}$
- $x_{1,m+1} = \frac{x_{1,m} + \lambda_m}{4}, x_{2,m+1} = \frac{x_{2,m} + \lambda_m}{4}, x_{3,m+1} = \frac{x_{3,m} + \lambda_m}{4}$

Calcolando A_m per $m = 0, 1, 2, \dots, n$ dove $4^{-n}Q < |A_n|$, definiamo:

- $X_1 = \frac{A_0 - x_1}{4^n A_n}, X_2 = \frac{A_0 - x_2}{4^n A_n}, X_3 = -X_1 - X_2$
- $E_2 = X_1 X_2 - X_3^2, E_3 = X_1 X_2 X_3$

Dopo alcuni conti e utilizzando eq.(3.8) si ottiene per l'integrale ellittico:

$$R_F(x_1, x_2, x_3) \approx A_n^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{10} E_2 + \frac{1}{14} E_3 + 1/24 E_2^2 - 344 E_2 E_3 \right) \quad (3.9)$$

3.3 Funzioni ipergeometriche

Una serie è detta ipergeometrica quando il rapporto $\frac{c_{n+1}}{c_n}$ è una funzione razionale di n . Pertanto una funzione ipergeometrica è definita per mezzo di una serie ipergeometrica come:

$${}_pF_q = \left(\begin{matrix} a_1, & a_2, & \dots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n (b_2)_n \dots (b_q)_n n!} \quad (3.10)$$

con $a, b \in C$ e dove $(a)_n$ è detto simbolo di Pochhammer ed è definito come:

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n=0 \\ a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{per } n>0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Talvolta eq.(3.10) è chiamata funzione ipergeometrica generalizzata, dunque il termine funzione ipergeometrica va ad indicare il seguente caso particolare:

$${}_2F_1 = \left(\begin{matrix} a, & b \\ c \end{matrix}; z \right) = {}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n z^n}{(c)_n n!} \quad (3.12)$$

Per definire la rappresentazione del tipo di Eulero che ci servirà nelle sezioni successive, è necessario analizzare un altro caso particolare e la funzione beta(B):

$${}_2F_1 = \left(\begin{matrix} a, & b \\ c & \end{matrix}; z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-z)^n = (1-z)^{-a} \text{ con } |z| < 1 \quad (3.13)$$

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad (3.14)$$

dove $\Gamma(z)$ è la funzione gamma di Eulero.

A partire da eq.(3.13) e eq.(3.14) si può ricavare la rappresentazione del tipo di Eulero di una funzione ipergeometrica:

$${}_2F_1 = \left(\begin{matrix} a, & b \\ c & \end{matrix}; z \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(b-c)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt \quad (3.15)$$

La valutazione numerica delle funzioni ipergeometriche è solitamente complessa, ma si semplifica notevolmente se i parametri sono reali.

3.4 Approssimante di Padé

L'espansione di Padé è un metodo per stimare una funzione utilizzando il rapporto tra due polinomi, a differenza dell'approssimazione di Taylor, che è un caso particolare di quella di Padé, la quale utilizza semplicemente un polinomio.

Dati due interi $m \geq 0$ e $n \geq 1$, l'approssimante di Padé di ordine $[n/m]$ è dato dalla seguente espressione:

$$R_{n/m}(x) = \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m} \quad (3.16)$$

I coefficienti possono essere calcolati a partire da quelli dall'espansione di Taylor intorno al punto χ_0 della funzione $f(x)$ che si vuole approssimare:

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \quad (3.17)$$

Infatti deve essere:

$$f(x) - \frac{A_n(x)}{B_m(x)} = 0 \quad (3.18)$$

Questo fornisce la seguente serie di equazioni:

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_1 + c_0 b_1 = a_1 \\ c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = a_2 \\ \vdots \\ c_{m+n} + c_{m+n-1} b_1 + \dots + c_0 b_{m+n} = a_{m+n} \end{cases} \quad (3.19)$$

Capitolo 4

Espressioni esatte

In questa sezione si prendono in considerazione tre articoli di Liu et al.(2011), Mészáros & Řípa (2013) e Baes et al.(2017) in cui vengono trovate espressioni esatte per la distanza di luminosità adoperando integrali ellittici del primo tipo, integrali ellittici di Carlson e funzioni ipergeometriche.

Nel primo capitolo abbiamo trovato che la distanza di luminosità era espressa, in un universo Λ CDM, da eq.(2.13). A partire da questa poniamo $s = \sqrt[3]{\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m}}$ e effettuiamo la sostituzione $u = \frac{s}{1+z}$, così d_L può essere scritta come:

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{s\Omega_m}} \left[T(s) - T\left(\frac{s}{1+z}\right) \right] \quad (4.1)$$

dove

$$T(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{u(1+u^3)}} \quad (4.2)$$

4.1 Liu et al. (2011)

Utilizzando i teoremi di riduzione di Carlson e ponendo $m(x) = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}}{x} + \frac{2}{x} - 1$ possiamo ricondurre eq.(4.2) alla forma simmetrica di Carlson degli integrali ellittici di eq.(3.7):

$$T(x) = 4R_F(m, m+3+2\sqrt{3}, m+3-2\sqrt{3}) \quad (4.3)$$

Nell'articolo di Liu et al. (2011) viene anche proposto un altro metodo tramite approssimazione con una interpolazione modificata di Hermite, ma il risultato si mostra poco accurato e pertanto viene trascurato.

4.2 Mészáros & Řípa (2013)

Il risultato di questo lavoro, benché presentato come originale, era stato trovato già in precedenza da Eisenstein (1997).

A partire da eq.(4.2) si effettua la seguente sostituzione:

$$\theta = \arccos \left(\frac{1 + (1 - \sqrt{3})u}{1 + (1 + \sqrt{3})u} \right) \quad (4.4)$$

e si ottiene:

$$\frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1+u^3}} = \frac{d\theta}{\sqrt[4]{3}\sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}\sin^2\theta}} \quad (4.5)$$

Il secondo membro di eq.(4.5) è la funzione integranda di un integrale ellittico del primo tipo, infatti si ha che $m = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ ed è giustamente compreso tra 0 e 1.

Dunque, ricordando eq.(3.2) si ottiene:

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F \left(\arccos \left(\frac{1 + (1 - \sqrt{3})x}{1 + (1 + \sqrt{3})x} \right) \middle| \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \right) \quad (4.6)$$

4.3 Baes et al. (2017)

Una terza espressione esatta può essere ricavata facendo uso di funzioni ipergeometriche.

Si applica la sostituzione $t = \left(\frac{u}{x}\right)^3$ a eq.(4.2) e si ricava:

$$T(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x} \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{5}{6}}(1+x^3t)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.7)$$

In questa espressione si può riconoscere la rappresentazione del tipo di Eulero di una funzione ipergeometrica:

$$T(x) = 2\sqrt{x} {}_2F_1 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}; \frac{7}{6}; -x^3 \right) \quad (4.8)$$

L'unico problema con questa equazione sembra essere l'argomento negativo in quanto potrebbe cadere al di fuori del dominio di convergenza della corrispondente serie ipergeometrica. Pertanto, utilizzando le formule di trasformazione per le funzioni ipergeometriche si può ottenere:

$$T(x) = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{x}{1+x^3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{7}{6}; \frac{x^3}{1+x^3}\right) & x \leq 1 \\ T_\infty - \sqrt{\frac{x}{1+x^3}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{4}{3}; \frac{1}{1+x^3}\right) & x > 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

dove $T_\infty = \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u(1+u^3)}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{3\sqrt{\pi}}$

In questo modo l'argomento oscilla tra 0 e $\frac{1}{2}$ così che la corrispondente serie converge.

Capitolo 5

Approssimazioni

In questo capitolo si analizzano i lavori di Pen (1999) e Adachi & Kasai (2012) in cui vengono presentate due approssimazioni per la distanza di luminosità in un universo Λ CDM.

5.1 Pen (1999)

Partendo da eq.(4.2) possiamo effettuare uno sviluppo asintotico ottenendo:

$$T_1(u) = 2 [u^{-n} + n(2X)^{2n+1} + (2X)^{2n}]^{-\frac{1}{2n}} \quad (5.1)$$

dove n è un parametro libero e $X = T_\infty^{-1} = 0.3566$.

Eq.(5.1) converge a eq.(4.2) quando $u \rightarrow 0$ e quando $u \rightarrow \infty$.

Per migliorare ulteriormente l'approssimazione possiamo espandere u^{-1} usando due parametri liberi e porre $n = 4$:

$$T_2(u) = 2 [u^{-4} + c_1 u^{-3} + c_2 u^{-2} + 4(2X)^9 + (2X)^8]^{-\frac{1}{8}} \quad (5.2)$$

Si vuole ora minimizzare l'errore per il range di maggior interesse $0.2 < \Omega_m < 1$ scegliendo accuratamente i coefficienti. Attraverso un risolutore di equazioni non lineari si ottengono:

$$c_1 = -0.1540 \text{ e } c_2 = 0.4304$$

L'errore globale è di circa il 4%, mentre nella zona di interesse è al di sotto dello 0.4% (Fig.5.1).

Con questi valori dei coefficienti si ha:

$$T(x) \approx \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt[8]{1 - 0.1540x + 0.4304x^2 + 0.19097x^3 + 0.066941x^4}} \quad (5.3)$$

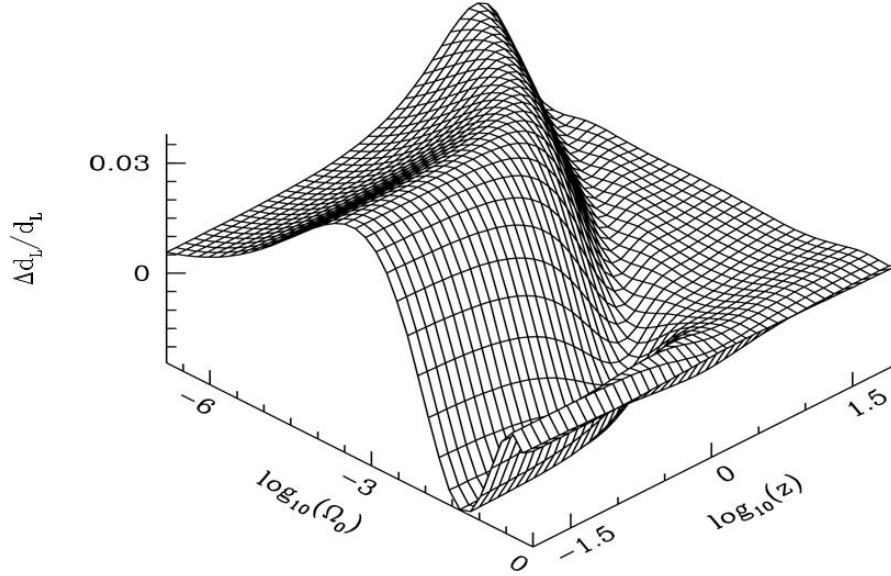


Figura 5.1: Superficie di errore globale (U. L. Pen, “Brief Note: Analytical Fit to the Luminosity Distance for Flat Cosmologies with a Cosmological Constant”, The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 120, numero1, 1999, pp.49-50)

5.2 Adachi & Kasai (2012)

In questo articolo viene fatto uso dell’espansione di Padé per approssimare $T(x)$. Come esposto in sezione 3 espandiamo in serie di MacLaurin la suddetta funzione:

$$T(x) = \sqrt{x} \left(2 - \frac{1}{7}a + \frac{3}{52}a^2 - \frac{5}{152}a^3 + \dots \right) \quad (5.4)$$

dove $a = \frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} x^3$.

Dopo aver espanso fino al sesto ordine possiamo ottenere l’approssimante di Padé di ordine 3/3 come mostrato in sezione 3:

$$T(x) \approx \sqrt{x} \frac{2 + 2.64086441x^3 + 0.883044401x^6 + 0.0531249537x^9}{1 + 1.39186078x^3 + 0.512094674x^6 + 0.0394382061x^9} \quad (5.5)$$

Come si vede in Tab.5.1 l’errore per questa formula è ovunque molto basso, eccetto per le regioni a basso redshift con un basso valore del parametro di densità. Notiamo inoltre che per $\Omega_m = 1$ l’espressione trovata è esatta.

Ω_m	$z = 0.03$	$z = 0.1$	$z = 1$	$z = 10$	$z = 1000$
0.2	1.87%	1.38%	0.25%	0.08%	0.06%
0.3	0.26%	0.18%	0.02%	0.01%	< 0.01%
0.4	0.03%	0.01%	< 0.01%	< 0.01%	< 0.01%
1	0	0	0	0	0

Tabella 5.1: Errore percentuale relativo (Adachi M., Kasai M., “An Analytical Approximation of the Luminosity Distance in Flat Cosmologies with a Cosmological Constant”, Progress of Theoretical Physics, Volume 127, numero 1, 1 January 2012, pp.145-152)

Capitolo 6

Confronti

Nell'articolo di Baes (2017) viene effettuato un esperimento per determinare quale dei metodi proposti nelle sezioni 4 e 5 sia il più veloce per il computo effettivo. Per quanto riguarda invece l'accuratezza certamente le espressioni esatte sono migliori e in accordo tra loro almeno fino all'ultima cifra significativa.

Le cinque espressioni vengono implementate in C++ usando gli algoritmi della Gnu Scientific Library (GSL). Il calcolo è eseguito 10 milioni di volte per ogni espressione in 101 punti distribuiti logaritmicamente tra redshift 10^{-2} e 10^3 considerando $\Omega_m = 0.308$. I risultati sono mostrati in Fig.6.1.

Come si vede dal grafico le espressioni esatte di Liu et al. (2011) e Mészáros & Rípa (2013) sono calcolate poco rapidamente per bassi redshift, mentre per alti redshift il computo procede più rapidamente: la diminuzione dei tempi procede per plateau in quanto diminuisce il numero di iterazioni da effettuare per raggiungere la convergenza. La velocità di calcolo per le due espressioni approssimate non dipende dal redshift in quanto il numero di iterazioni è sempre lo stesso. Con il metodo di Baes (2017), al contrario, i tempi aumentano fintanto che $x \leq 1$ in quanto si prende in considerazione la prima espressione di eq.(4.9), invece, per $x > 1$, il tempo di calcolo diminuisce diventando migliore delle altre espressioni esatte per $z > 1$. Per $z > 60$ diventa più veloce anche dell'approssimazione di Liu et al. (2011). Il metodo di Adachi & Kasai (2012) risulta essere il più veloce a qualunque redshift.

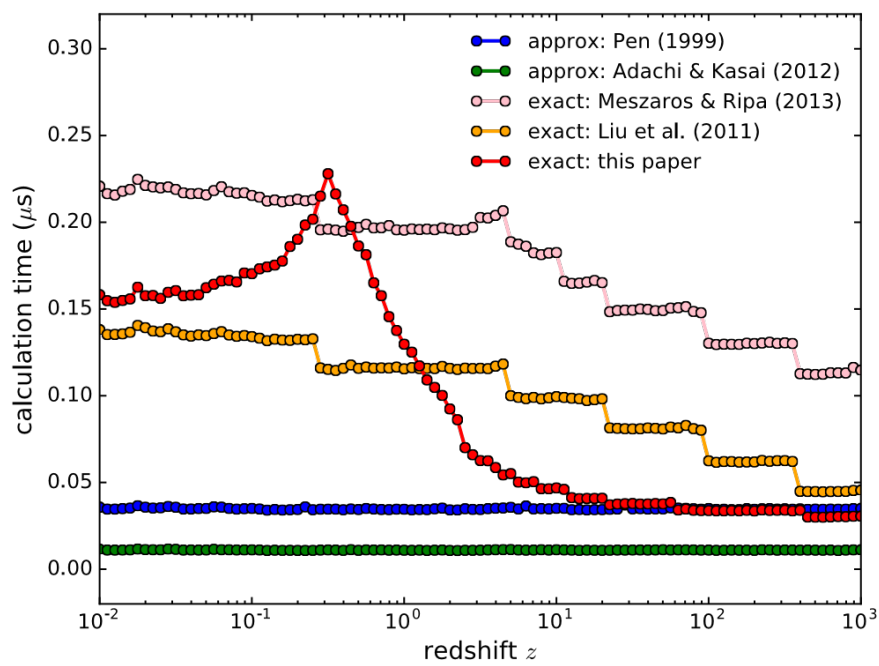


Figura 6.1: Tempo di calcolo per i vari metodi proposti in funzione del redshift (M. Baes, P. Camps, D. Van De Putte, “Analytical expression and numerical evaluation of the luminosity distance in a flat cosmology”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 468, number 1, 11 June 2017, pp. 927–930)

Capitolo 7

Conclusioni

Abbiamo mostrato cosa sia la distanza di luminosità (eq.(2.1)), quali siano le sue principali applicazioni e come derivarla, giungendo ad eq.(2.13). Quindi si sono trattate brevemente le funzioni e le approssimazioni usate per calcolarla, ovvero integrali ellittici del primo tipo nella forma di Legendre, integrali ellittici di Carlson, funzioni ipergeometriche e approssimante di Padé. Si sono presi poi in considerazione il lavoro di Liu et al. (2011) in cui viene trovata un'espressione esatta per la distanza di luminosità utilizzando integrali ellittici nella forma di Carlson; l'articolo di Mészáros & Řípa (2013) dove vengono utilizzati integrali ellittici del primo tipo e il lavoro di Baes et al. (2017) che utilizza invece funzioni ipergeometriche. Successivamente si sono analizzati gli articoli di Pen (1999) e di Adachi & Kasai (2012) in cui sono proposte soluzioni approssimate per la distanza di luminosità, in particolare la seconda fa uso dell'approssimante di Padé. Si è in seguito riportato un confronto presente nell'articolo di Baes (2017) tra i vari metodi proposti per determinare quale fosse il più veloce a vari redshift (Fig.6.1): l'approssimazione di Adachi & Kasai è la più rapida in assoluto, segue l'espressione esatta di Baes ma solo per alti redshift ($z > 60$), infatti per $10 < z < 60$ essa risulta confrontabile con l'approssimazione di Pen (1999), mentre a redshift minori quest'ultima è migliore. Le altre due espressioni esatte sono invece più lente, in particolare quella di Mészáros & Řípa (2013) è la peggiore tra tutte, eccetto per $z \approx 0.3$ per cui quella di Baes (2017) risulta peggiore.

Bibliografia

- [1] Adachi M., Kasai M., *An Analytical Approximation of the Luminosity Distance in Flat Cosmologies with a Cosmological Constant*, Progress of Theoretical Physics, Volume 127, Issue 1, 1 January 2012, Pages 145–152.
- [2] Baes M., Camps P., Van De Putte D., *Analytical expression and numerical evaluation of the luminosity distance in a flat cosmology*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 468, number 1, 11 June 2017, pp. 927–930.
- [3] Carlson B.C., Gustafson J.L., *Asymptotic approximations for symmetric elliptic integrals*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1994.
- [4] Carlson B.C., *Numerical computation of real or complex elliptic integrals*, Numerical Algorithms, March 1995, Volume 10, Issue 1, pp 13–26.
- [5] Carlson B.C., *Chapter 19 Elliptic Integrals*, Digital Library of Mathematical Functions (<https://dlmf.nist.gov/19>)
- [6] Eisenstein D.J., *An Analytic Expression for the Growth Function in a Flat Universe with a Cosmological Constant*, The Astrophysical Journal, 1997.
- [7] Franceschini A., *Corso di Cosmologia*, Laurea Triennale in Astronomia, Anno Accademico 2013-14
- [8] Gong Y., Cooray A., Chen X., *Cosmology with photometric surveys of type Ia supernovae*, The Astrophysical Journal, Volume 709, Number 2, 13 January 2010
- [9] Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York 1964.
- [10] King Louis Vessot, *On the direct numerical calculation of elliptic functions and integrals*, Cambridge University Press, 1924.
- [11] Koekoek R., *Hypergeometric functions*, Delft University of Technology
- [12] Liu D. Z., Ma C., Zhang T. J., Yang Z. L., *Numerical Strategies of Computing the Luminosity Distance*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Volume 412, Issue 4, 21 April 2011, Pages 2685–2688.
- [13] Mészáros A., Řípa J., *A curious relation between the flat cosmological model and the elliptic integral of the first kind*, Astronomy & Astrophysics, Volume 556, August 2013.

- [14] Olde Daalhuis A. B., *Chapter 15 Hypergeometric Function*, Digital Library of Mathematical Functions (<https://dlmf.nist.gov/15>)
- [15] Pen U. L., *Analytical Fit to the Luminosity Distance for Flat Cosmologies with a Cosmological Constant*, The Astrophysical Journal Supplement Series, Volume 120, Number 1