UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Compatibilità tra modalità e realismo in meccanica quantistica

Relatore

Prof. Pieralberto Marchetti

Correlatrice

Prof.ssa Marzia Soavi

Laureando

Francesco Marzolla

Anno Accademico 2017/2018

Indice

Introduzione

Nei primi anni ‘70 il filosofo della scienza olandese Bastiaan Cornelis van Fraassen, interessato all'applicazione dei principi della teoria dei quanti alla logica (cioè alla *quantum logic*), propone un'interpretazione della meccanica quantistica modellata sulla *logica modale*. Questa è una branca della logica adatta a trattare credenze, espressioni temporali e morali, come "è obbligatorio che" o "è permesso che"; i concetti chiave con cui ha a che fare sono quelli di *necessità* e *possibilità*.
Facendo corrispondere le proprietà di un sistema a proposizioni (che saranno semplicemente della forma "Il sistema X ha la proprietà P"), Van Fraassen applica questo tipo di logica alla Meccanica Quantistica, creando così l'*interpretazione modale della Meccanica Quantistica*. In quegli anni con questa espressione si designava una singola interpretazione, tuttavia essa si è rivelata abbastanza feconda da designare oggi una *classe* di interpretazioni. L'idea cardine che esse condividono e che le caratterizza è che lo stato quantomeccanico si trovi nel dominio del *possibile*, che il suo significato sia il delimitare quali risultati delle misure siano possibili (quali impossibili e quali necessari) prima che una misurazione faccia affiorare come *reale* uno di essi. Questa visione è tuttavia già presente nel lavoro di uno dei padri della meccanica quantistica: Heisenberg (cfr. [10, p.53]).

Scopo di questa tesi è stabilire se l'interpretazione modale di Van Frassen (nella sua ultima versione, del 1991) soddisfi le ipotesi di un recente teorema, che si deve a Matthew Pusey, Jonathan Barrett e Terry Rudolph (da cui il nome PBR), e che è stato detto essere il più importante teorema relativo ai fondamenti della meccanica quantistica dopo quello di Bell [7]. Si tratta di un teorema *no-go*, ovvero che mostra come, sotto ragionevoli ipotesi, una particolare categoria di interpretazioni della meccanica quantistica preveda risultati sperimentali in contrasto con quelli predetti dalla versione di Copenhagen, e dunque sia da rigettare.
Vedremo come stabilire se l'interpretazione modale soddifi le ipotesi del teorema PBR significhi in sostanza determinare se la funzione d'onda possa essere al contempo reale e modale.
La risposta a questo quesito sarà più sottile e complessa di un monosillabo, come ci si può aspettare dall'analisi di un'interpretazione che deve rendere conto in modo coerente dei molti comportamenti non classici previsti dalla Meccanica Quantistica.

Capitolo 1

L'interpretazione modale di Van Fraassen

1.1 La necessità dell'interpretazione

La questione dell'interpretazione della meccanica quantistica si può riassumere nelle domande: sotto che condizioni possiamo ritenere vera questa teoria? Come ci dice che è il mondo? Com'è possibile che il mondo sia come la teoria dice che è?
I fenomeni quantistici in aperto contrasto con la nostra esperienza quotidiana sono innumerevoli ma probabilmente la radice del dubbio sul "significato" effettivo della teoria che si concretizza in quelle domande, è l'indeterminazione generata dall'interpretazione statistica della funzione d'onda; in altre parole, il fatto che lo stato quantico non determini in maniera univoca il risultato di una misura, ma solamente la distribuzione statistica dei possibili risultati. Quando poi si esegue di fatto la misura, si trova solo uno dei risultati possibili; sorge quindi spontanea una domanda: il sistema fisico aveva realmente l'attributo fisico corrispondente al risultato della misura prima che questa fosse compiuta?
In base a come rispondono a tale domanda, le interpretazioni della meccanica quantistica finora proposte possono essere divise in tre famiglie: quella realista, che risponde affermativamente alla domanda e considera l'indeterminismo frutto di un'incompletezza della teoria; quella fedele alla posizione cosiddetta ortodossa, secondo la quale è l'atto stesso della misura a creare la proprietà, col solo limite del vincolo statistico imposto dalla funzione d'onda; ed infine quella potremmo dire "agnostica", che si rifiuta di rispondere alla domanda, ritenendola una questione "metafisica". Quest'ultima posizione si fonda sul fatto che possiamo affermare a priori che qualsiasi risposta non può essere sottoponibile a verifica sperimentale. Infatti un'interpretazione realista si differenzia da una ortodossa per l'introduzione (da parte della prima) di variabili nascoste, ma con una clausola: che tutte tali variabili nascoste siano empiricamente superflue, che il loro contributo sia esclusivamente quello di permettere una più soddisfacente comprensione della meccanica quantistica così come è. Se d'altro canto le variabili nascoste introdotte portassero ad una versione della teoria non empiricamente equivalente a quella matematizzata da Von Neumann, avremmo ovviamente prodotto una nuova teoria, che può essere sottoposta a verifica sperimentale laddove predice risultati differenti da quella tradizionale. E' difatti proprio la diversa portata empirica che permette di escludere alcune interpretazioni tramite il teorema PBR.

Un'altra questione di lettura non univoca all'interno della teoria quantistica riguarda la natura della funzione d'onda: dobbiamo concepirla come una reale onda fisica, come la vedevano Schrödinger e de Broglie, o semplicemente come un'*onda di probabilità*, come la intesero Bohr, Heisenberg, Pauli e la scuola di Copenhagen? Se è vera la prima interpretazione, si tratta di un tipo di onda inusuale, essendo definita su uno spazio la cui dimensione cresce al crescere del numero di particelle, e quindi è lo spazio tridimensionale in cui viviamo solo per una funzione d'onda di particella singola. La seconda visione, che si fonda sull'interpretazione probabilistica di Born della ψ, può sembrare più *rassicurante*, ma proprio il teorema PBR, come vedremo, impone vincoli sui modelli che la prevedono tali da renderli ancora più distanti dall'immagine classica del mondo con cui abbiamo confidenza.

Un indizio della necessità di interpretare la Meccanica Quantistica si può scorgere anche nel fatto che Van Fraassen lo faccia a prezzo di esporsi ad un'apparente contraddizione. Egli infatti è noto per essere il padre dell'*empirismo costruttivo*, una posizione filosofica secondo cui la scienza mira ad essere empiricamente adeguata e nulla più. L'adeguatezza empirica è precisamente la corretta previsione dei risultati sperimentali [1], mentre il giudizio riguardo alla realtà degli enti e dei processi inosservabili[2] usati dalle teorie scientifiche per *spiegare* tali dati è sospeso, in quanto non può essere che arbitrario e, elemento cardine del suo pensiero, irrilevante per la comprensione della pratica scientifica. Pertanto sarebbe lecito aspettarsi che adottasse una posizione agnostica anche riguardo all'interpretazione della meccanica quantistica, invece ne propone una propria: la "variante di Copenhagen dell'interpretazione modale". In realtà non è possibile ravvisare alcuna contraddizione in questo, in quanto l'empirismo costruttivo apre alla non necessità di credere nella realtà delle entità inosservabili, non afferma affatto che esse siano false o non degne di essere presentate ed approfondite; solo lo scienziato non potrà essere tacciato di irragionevolezza qualora non creda nella realtà di parte o tutta la componente non esperibile delle teorie che egli accetta. Così, in accordo con la più generale posizione epistemica di Van Fraassen, il volontarismo, può essere solo un atto libero, motivato anche da considerazioni valoriali, quello di credere nella verità della sua interpretazione. Il suo scopo non è comunque quello di presentare un'interpretazione *vera*, ma di creare un "modello" coerente, tramite cui sia possibile predire i risultati sperimentali, che riconcili quella che lui vede come una frattura interna alla teoria, un'inconsistenza, tra da una parte il già citato indeterminismo dovuto alla possibilità di ottenere solo probabilità per i risultati delle misurazioni, noto lo stato, e dall'altra l'evoluzione perfettamente deterministica della funzione d'onda quando il sistema che essa descrive è isolato.
L'interpretazione modale è stata poi ripresa e modificata da altri filosofi della scienza in senso più realista, ovvero avendo come fine la formulazione di una teoria letteralmente vera sul mondo.

L'interpretazione di Van Fraassen è sia una correzione dell'interpretazione-ignoranza, che la rende compatibile con il teorema di Kochen-Specker, sia una variante modale dell'interpretazione a molti mondi di Everett, poiché interpreta i molti mondi di questa teoria come "mondi possibili".

[1] sia quelli già ottenuti, sia quelli che si otterranno in qualsiasi esperimento futuro. Per questo anche l'affermazione che una teoria sia empiricamente adeguata è una scommessa, come lo è affermare che sia vera, ma meno *impegnativa*.

[2] Nel contesto della filosofia di Van Fraassen il termine *osservabile* ha un significato diverso da quello che ha in fisica: per Van Fraassen un'entità è osservabile se esistono delle condizioni date le quali tale entità può essere percepita con i nostri organi di senso. Si noti che si tratta di un disposizionale, dunque si applica ad entità ipotetiche, indipendentemente dal fatto che siano mai state osservate in passato. Così sono osservabili le case, le lune di Giove e gli unicorni; non lo sono invece gli elettroni, i campi elettromagnetici e gli atomi.

1.2 La *variante di Copenhagen dell'interpretazione modale*

L'interpretazione di Van Fraassen prende le mosse da una riflessione critica su cosa significhi in fisica classica conoscere lo stato in cui si trova un sistema. A prima vista sembrerebbe significare conoscere il valore di tutte le osservabili che si ritengono necessarie a descriverlo; tuttavia questo è vero per la particolare natura delle leggi della fisica classica, per la quale noti i valori delle osservabili ad un dato istante possiamo conoscere anche come il sistema evolverà se isolato e come reagirà se si agisce su di esso. Queste ultime informazioni in meccanica quantistica non discendono tramite qualche legge di natura dalle prime, dunque è necessario, in tale ambito, tracciare una differenza tra stato effettivo, nel testo originale "value state", cioè l'insieme dei valori delle osservabili *che ne hanno uno*, e stato dinamico (nel testo "dynamic state"), che determina l'evoluzione temporale e la reazione del sistema ad ogni definita interazione con corpi esterni ad esso, compresi gli strumenti di misura; quest'ultimo è l'usuale stato quantomeccanico, un vettore nello spazio di Hilbert che descrive il sistema.
Ci chiediamo ora: «Se una misura di una grandezza G fornisce il risultato g, posso inferire che il sistema si trovasse effettivamente nel "value state" corrispondente a g e la procedura di misurazione sia stata solo un'acquisizione di conoscenza?». Per rispondere, dobbiamo fare alcuni ragionamenti preliminari: il sistema è descritto sempre da un value state; se in tale value state è definita l'osservabile G, per misure sufficientemente "ideali", si ha probabilità 1 di ottenere a seguito della misurazione il valore prescritto dal value state. La precedente domanda si traduce dunque in: «Quali sono le grandezze di un sistema che hanno un valore definito, ad un determinato istante?». L'insieme minimale di osservabili che dobbiamo ammettere che abbiano un valore (data l'esistenza di un value state) è quello delle osservabili che hanno tra i loro autostati lo stato quantomeccanico del sistema. Cioè se il sistema si trova in un autostato di G corrispondente all'autovalore g, allora la quantità G ha effettivamente valore g. All'altro estremo l'insieme massimale comprende tutte le osservabili: questo vorrebbe dire che ogni osservabile ha sempre un preciso valore. A causa del teorema Kochen-Specker, questo è possibile che avvenga solo se ammettiamo o che un singolo operatore hermitiano possa corrispondere a più di un'osservabile, o che i valori di osservabili funzionalmente collegate possano violare tale relazione funzionale, ovvero che mentre un'osservabile B assume valore b, l'osservabile A descritta dall'operatore $\hat{A} = f(\hat{B})$ possa assumere valore $a \neq f(b)$. Van Fraassen sceglie una strada intermedia tra queste due ed afferma che è simultaneamente definito un insieme *relativamente massimale* di osservabili, definito dalla seguente regola:

> Se tutte le attribuzioni di valori vere prima della misura sono anche vere dopo, allora è anche vero l'inverso; cioè esattamente le stesse attribuzioni di valori sono vere sia prima sia dopo la misura.

A questa regola il suo autore aggiunge un'assunzione, che attribuisce alla scuola di Copenhagen, ovvero che:

> Proposizioni riguardanti un sistema non possono essere contemporaneamente vere a meno che non possano essere contemporaneamente certe.

Cerchiamo di fare chiarezza su queste prescrizioni. Supponiamo di compiere una misura di una quantità B che commuta con A, sull'autostato di A corrispondente all'autovalore a; otteniamo il risultato b. Prima della misura sapevamo che la quantità A aveva valore a (a causa di quella che precedentemente avevo chiamato l'assunzione minimale sulle osservabili che devono avere un valore definito). Dopo la misura, poiché A e B commutano, non siamo usciti dall'autospazio di A relativo ad a, dunque il sistema continua ad avere definita la

quantità A con valore a, dunque tutte le attribuzioni di valori vere prima della misura sono anche vere dopo. Ora Van Fraassen ci dice che B aveva valore b anche prima che compissimo la misura, e questa è stata solo un'acquisizione di conoscenza.
Della seconda assunzione propongo invece una "traduzione" fisica: «I valori di osservabili che possono essere definiti contemporaneamente sono quelli che hanno autostati comuni.».

Van Fraassen introduce in pratica una nozione realista nella misura una dopo l'altra di osservabili compatibili: le informazioni che si hanno dopo aver misurato un insieme di osservabili compatibili si riferiscono a quantità che erano *già lì* quando si è misurata la prima osservabile dell'insieme.
Diverso invece è quello che accade quando si misura un'osservabile non compatibile con una misurata in precedenza, o comunque si misura A su un sistema descritto da un autostato di B con $\hat{A}$ e $\hat{B}$ che non commutano. In questo caso si realizza un altro value state, in quanto le osservabili che avevano un valore lo perdono, e nuove lo acquistano. Scrive infatti Van Fraassen:

> Il principio di indeterminazione esibisce non semplicemente un limite alla nostra conoscenza, ma un limite a cosa può essere oggettivamente vero allo stesso tempo.

Questa visione affronta dei problemi di consistenza nel caso in cui più osservabili, incompatibili tra loro, siano tutte compatibili con quelle precedentemente misurate.
Kochen (1985) e Dieks (1988) propongono un altro meccanismo di attualizzazione delle osservabili, che risolve questi problemi prevedendo che le quantità che hanno un valore definito siano determinate dall'accoppiamento tra il sistema e un apparato di misura, tramite il *teorema di decomposizione biortogonale*:
Teorema (Decomposizione Biortogonale). *Dato un vettore $|\psi\rangle \in \mathcal{H}^1 \otimes \mathcal{H}^2$, esistono una base $\{|a_i\rangle\}$ di $\mathcal{H}^1$ ed una $\{|p_i\rangle\}$ di $\mathcal{H}^2$ tali che $|\psi\rangle$ può essere scritto come combinazione lineare di termini del tipo $|a_i\rangle \otimes |p_i\rangle$. Se i moduli dei coefficienti di questa combinazione lineare sono tutti diversi, allora le basi sono uniche.*

É quindi possibile scrivere, in molti casi univocamente, lo stato $|\psi\rangle$ del sistema composto dall'oggetto della misura e dall'apparato sperimentale come una combinazione lineare di elementi di una base disaccoppiata. Gli ingredienti necessari per attuare questa decomposizione sono semplicemente lo stato quantomeccanico del sistema composto ed i sottosistemi in cui lo si intende suddividere; questi permettono quindi di determinare una base dello spazio di Hilbert dell'oggetto misurato, la quale a sua volta determina le proprietà definite.
Consideriamo di voler misurare un'osservabile A di un sistema S con un apparato di misura M. Prima dell'interazione, M è preparato in uno stato $|p_0\rangle$, autovettore dell'osservabile P che è quella che leggiamo sullo strumento, diciamo la posizione di un indicatore su una scala graduata, mentre lo stato di S sarà una sovrapposizione di autostati $|a_i\rangle$ di A. L'interazione tra S ed M introduce una correlazione tra gli autostati $|a_i\rangle$ di A e gli autostati $|p_i\rangle$ di P.

$$|\psi_0\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |p_0\rangle \to |\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |p_i\rangle \tag{1.1}$$

Il ragionamento procede così: siccome sappiamo che la posizione del puntatore P è un'osservabile definita, assumiamo che, ad interazione avvenuta, sia definita anche l'osservabile A di S. Se P assume valore p_k, A assumerà corrispondentemente valore a_k.
A volte ci si riferisce all'interpretazione modale che fa uso di questa regola come "interpretazione modale di Kochen-Dieks". Nella prospettiva di Van Fraassen, non è un problema il fatto che quale osservabile avesse un valore prima della misura dipenda da cosa si decide di misurare, in quanto lo scopo di una teoria, e dunque anche della sua interpretazione,

è solo quello di "salvare i fenomeni", ovvero di darne una descrizione, di catalogarli più che di spiegarli: lo scopo della scienza non trascende l'adeguatezza empirica. Van Fraassen non cerca un'interpretazione che ci dica l'esatta verità su cosa succede dietro le scene dell'osservazione, il suo scopo è proporre una teoria empiricamente adeguata che sia più coerente internamente della meccanica quantistica "standard". L'interpretazione modale di Kochen-Dieks, al contrario, sviluppa le idee di quella di Van Fraassen in modo più realistico.

In conclusione il significato dell'interpretazione modale della meccanica quantistica è suggerito dal suo nome: adottare un approccio *modale* riguardo un argomento significa interpretarlo tramite le categorie di *possibilità*, *impossibilità*, *necessità*. L'interpretazione di Van Fraassen è chiamata così in virtù di come essa interpreta lo stato quantistico: questo delimita il campo di possibilità entro cui può *muoversi* lo stato effettivo, quali valori *possono* avere le osservabili, quali osservabili è *impossibile* che ne abbiano uno, e quali valori *necessariamente* un'osservabile deve avere (nel caso di autostati).
In questo senso lo stato dinamico appartiene al dominio del possibile, mentre lo stato effettivo a quello del reale. [3]

Nella prossima sezione mi propongo di illustrare la lettura che Van Fraassen dà della misura. Si tratta di un approfondimento, non indispensabile per la comprensione dei concetti fondamentali della sua interpretazione, che tuttavia è interessante per due motivi: il primo è che è la ricerca di una spiegazione della misura coerente con il resto della teoria che spinge Van Fraassen a proporre un'interpretazione della Meccanica Quantistica, il secondo è che proprio nella misura, come vedremo più avanti, l'interpretazione modale trova una "scappatoia" al teorema PBR.

1.3 Cosa accade durante una misura

Per Van Fraassen non è soddisfacente la lettura che la scuola di Copenhagen dà della misura: innanzitutto la teoria dovrebbe essere autosussistente, dunque capace di descrivere anche l'apparato di misura, che invece è "classico" secondo l'interpretazione ortodossa; inoltre il postulato di proiezione introduce una "discontinuità" nella descrizione di un sistema nel momento in cui si effettua su di esso una misura: prima lo stato evolveva deterministicamente sotto l'effetto di un operatore unitario, e nell'istante della misura si ha un collasso della funzione d'onda sull'autospazio corrispondente all'autovalore che è stato il risultato della misura: questa transizione non è deterministica, è *acausale*.
Il collasso della funzione d'onda teorizzato da von Neumann ha due difese:

- La divisione sistema-apparato di misura è arbitraria: la teoria di von Neumann è consistente con questo, predice i medesimi risultati comunque si sposti il confine tra osservatore (necessariamente *classico*) e sistema misurato (ovviamente quantistico), ad esempio comprendendo lo strumento di misura ora nel mondo macroscopico, ora in quello quantistico.

[3] "Reale" nel contesto della filosofia di Van Fraassen è da intendersi come "reale all'interno del modello", ovvero in una prospettiva finzionalista, e non "ontologicamente reale" (cfr. [2]). Tuttavia l'interpretazione modale di Van Fraassen è indipendente dall'epistemologia del suo autore, dunque il lettore è libero interpretare il concetto in accordo con le sue convinzioni riguardo al potere conoscitivo della scienza.

- Predice esattamente cosa avviene in caso di misure ripetute: se non fosse vero il postulato, perché la misura immediatamente ripetuta di un'osservabile darebbe sempre lo stesso risultato?

Van Fraassen attacca entrambi questi punti:

- Riguardo alla consistenza con l'arbitrarietà della divisione sistema-apparato di misura riporta una critica di Margenau, ovvero che proprio questa prova di consistenza è altresì una prova di ridondanza empirica. Nel seguente senso: pensiamo di misurare una certa osservabile su un sistema X con un apparato M; misuriamo quindi su M il risultato della misura con un altro strumento S. Ora, è collassata la funzione d'onda di X durante la prima misura, o quella di $(X+M)$ durante la seconda? Supponiamo, com'è ovvio che le due misure siano separate da un certo intervallo temporale. Allora nei due casi abbiamo due descrizioni diverse, in particolare della realtà durante tale intervallo temporale, che non sono distinguibili empiricamente.

- Adottando il postulato accettiamo l'idea che la misurazione perturbi il sistema. Ma allora cosa vuol dire fare due misure ripetute? Vuol dire farle in sequenza senza avere la possibilità di leggere il risultato della prima. Appena leggiamo l'indicatore del primo strumento compiamo un'ulteriore misura, e nulla ci assicura di non aver perturbato il sistema *oggetto + apparato*.
  Questo tuttavia è vero solo se si adotta la visione di Van Fraassen secondo cui è possibile descrivere tutta la realtà, indipendentemente dalla scala, tramite la Meccanica Quantistica. Se poniamo la separazione di cui parlavo prima tra il sistema da misurare e l'apparato di misura, ecco che la nostra osservazione dell'indicatore deve sottostare alla fisica classica e di conseguenza non perturba il sistema.

Van Fraassen non accetta dunque il postulato di proiezione, afferma che tutta la realtà debba essere descrivibile tramite la meccanica quantistica e che l'evoluzione dei sistemi è sempre quella deterministica data dall'equazione di Schrödinger. In particolare quest'ultima richiesta vuol dire che la misura perde la sua unicità nel contesto delle interazioni fisiche, unicità che in effetti sembra insoddisfacentemente antropocentrica: gli atti umani ci aspetteremmo che non costituiscano una speciale categoria fisica.
Deve dunque proporre un meccanismo alternativo per spiegare cosa avviene durante una misura.

La situazione di un sistema X ad un tempo dato t è caratterizzata da uno stato dinamico ψ e da un value state x.
Se facciamo interagire X con uno strumento di misura Y, dovremo considerare il sistema composto $Z = X + Y$, ed avremo uno stato dinamico ed uno effettivo per ciascuno dei sistemi X, Y, e Z.
Le probabilità che si trovano tramite la regola di Born sono condizionali: sono probabilità di trovare un risultato *dato che la misura è stata fatta.* Per questo motivo consideriamo lo stato di Z, chiamiamolo ϕ, *alla fine della misura.*
Per Van Fraassen la misura è un processo che seleziona certe osservabili (mutualmente compatibili), e ci dice le probabilità per i loro possibili valori. Ho qui riportato letteralmente le parole usate dall'autore. E' interessante notare cosa intenda come misura: è inusuale, vorremmo che *misura* fosse quella che ci dà un singolo risultato; questo porterebbe a collegare direttamente la misura con il value state, mentre nella trattazione di Van Fraassen è centrale lo stato dinamico, in quanto sta descrivendo semplicemente un'interazione, tra lo strumento e l'oggetto: la misura non è nient'altro.
Scriviamo ora ϕ. Mettiamo di voler misurare l'osservabile A, definita sullo spazio di Hilbert

dell'oggetto da misurare X, ed indichiamo con $|b_i\rangle$ i possibili stati dell'indicatore dello strumento di misura; ϕ sarà quindi

$$\phi = \sum_i c_i \, |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle \tag{1.2}$$

Quello che sicuramente possiamo dire è che la probabilità che $|b_k\rangle$ sia il value state dello strumento Y è $|c_k|^2$. Se la misura sottostà ad alcune condizioni di idealità, ovvero è di von Neumann-Lueders, [4] è anche vero qualcosa di molto più interessante: che $|c_k|^2$ è anche la probabilità che $x = |a_k\rangle$, dove x era definita come il value state dell'oggetto misurato, e siamo certi (probabilità 1) che l'apparato di misura abbia correttamente indicato il value state finale di X, ovvero $p(x = |a_k\rangle \mid |b_k\rangle) = 1$. Se la misura non è di von Neumann-Lueders sarà possibile solo un'inferenza statistica per determinare quale sia (o ancor più *fosse*, prima della misura) lo stato del sistema, dato il risultato della misura. In particolare, la misura deve essere ripetuta più volte, per incrementare il livello di confidenza di questa inferenza.

In definitiva il significato della misura è di far affiorare come reale una delle possibilità concesse dallo stato dinamico. In particolare, se il risultato della misura è compatibile con quelli delle misure precedenti, possiamo credere che fosse già reale prima della misura, altrimenti sarà stata questa a *realizzare* un certo value state. Ciò che conta è che, non importa da quando, la misura rivela qual è il valore reale dell'osservabile. In questo modo non esiste una transizione di stato, una perdita di una parte dello stato del sistema durante una misura; solo una parte della funzione d'onda iniziale, quella che non si proietta sull'autospazio relativo al risultato della misura, descriveva una possibilità non reale, e così continuerà a fare anche dopo la misura, dunque la nostra attenzione si sposterà sulla parte di stato dinamico che ora sappiamo descrive anche la possibilità reale.

1.4 Cosa accade mentre *non si guarda*

Ora che abbiamo reso più chiaro cosa avvenga durante una misura, potremmo chiederci cosa succeda invece quando non se ne effettua alcuna. Van Fraassen risponde "può accadere tutto quello che è possibile", dove il campo di ciò che è possibile è determinato dallo stato dinamico in accordo con il vincolo precedentemente esposto che "proposizioni riguardanti attribuzioni di valori possono essere simultaneamente vere solo se possono essere simultaneamente certe".
Fermiamoci a riflettere su cosa *tutto il possibile* significhi. Per quanto esposto finora, il campo di possibilità evolve senza feedback dai valori reali: nell'equazione di Schrödinger non appare in alcun modo il value state. Questo vuol dire che non possiamo applicare una nozione di causa a quello che accade in realtà mentre non misuriamo. Ma se la meccanica quantistica deve spiegare tutta la realtà, questa mancanza di feedback non dovrebbe portare al caos? Van Fraassen fa un esempio per illustrare questo punto: immagina di guardare fuori dalla finesta e vedere un incidente stradale; le macchine si scontrano, poi i conducenti escono dalle vetture gesticolando, dei passanti si fermano a guardare, ed infine

[4] Una misura dell'osservabile A si dice di von Neumann se presenta tre caratteristiche: l'apparato di misura ha come groundstate uno stato puro, il suo operatore di evoluzione è unitario e se lo stato iniziale del sistema misurato è un autostato di A, allora il suo stato finale, dopo la misura, è lo stesso autostato di A. Le misure di von Neumann-Lueders sono una loro generalizzazione: la terza condizione è affievolita nella richiesta che lo stato finale sia la condizionalizzazione dello stato iniziale sulla partizione di autospazi dell'osservabile misurata.

una volante della polizia arriva e si ferma.
Ma se ad ogni istante le probabilità dei possibili eventi sono date dallo stato totale a quell'istante, non dovremmo aspettarci di vedere "serie scollegate"? Per esempio una macchina che si ferma da sola in mezzo all'incrocio, una volante della polizia che appare, dei passanti che si fermano, e poi un'altra macchina che urta la prima.
Van Fraassen risponde che anche in mancanza di feedback dai valori reali, lo stato (dinamico) totale del sistema fornisce probabilità zero o trascurabile alle combinazioni scorrelate di eventi. Il caos dunque non emerge.

Capitolo 2

Il teorema PBR

Il teorema Pusey-Barrett-Rudolph (PBR) è generalmente considerato un teorema *no-go*, ovvero capace di escludere alcune interpretazioni della meccanica quantistica da quelle plausibili, dove con plausibili si intende empiricamente equivalenti all'interpretazione di Copenhagen.
Studi successivi ([11]) ne hanno esplicitato alcune nuove necessarie ipotesi e ridimensionato le conseguenze, aprendo in particolare alla possibilità che gli effetti previsti dal teorema per i modelli ψ-epistemici (spigherò tra una sezione il significato di questo termine) non siano da considerare come contraddizioni in grado di invalidarli, ma come normali previsioni, peculiari di questa classe di modelli.
Nelle prossime pagine esporrò dapprima il teorema come apparso per la prima volta su Nature nel 2012 integrandolo unicamente con le ipotesi aggiunte in [11], e successivamente ne analizzerò le conseguenze.

2.1 Ipotesi

In questa sezione analizzerò le assunzioni da cui il teorema dipende.

Prima ipotesi: il realismo del modello

Benché sia proposto dai suoi autori come un risultato generale circa la realtà della funzione d'onda, il teorema PBR assume una prima ipotesi ingombrante: che un sistema quantomeccanico si trovi in ogni istante in uno stato cosiddetto *ontico* indipendente dall'osservatore, che determina completamente le proprietà fisiche del sistema considerato. In altre parole, assume l'oggettività delle proprietà fisiche del sistema. Quest'assunzione si traduce nell'applicabilità del teorema alle sole interpretazioni che nel primo capitolo ho chiamato *realiste* (o, equivalentemente, *ontologiche*).
Tra le interpretazioni non contenute in questa classe spicca quella da sempre più ampiamente accettata dai fisici: l'interpretazione di Copenhagen, per la quale la componente soggettiva introdotta dall'osservatore nell'atto della misura è imprescindibile, come espresse P. Jordan nel modo più netto

> Le osservazioni non solo *disturbano* ciò che si misura, esse lo *producono*.

Ma ci si può spingere oltre nell'attribuire valore alla componente soggettiva: London e Bauer nel 1939 proposero che fosse l'intervento della coscienza umana a rendere peculiare e per così dire *patologica* la misura, nel contesto di tutte le possibili interazioni fisiche. Questo filone di pensiero trova la sua più completa esposizione nell'interpretazione di Von Neumann–Wigner, secondo cui è la coscienza a causare il collasso della funzione d'onda, come è brillantemente illustrato nel paradosso dell'*amico di Wigner*.

Seconda ipotesi: il postulato di preparazione indipendente

La seconda ipotesi data la quale vale il teorema è che
Postulato (di preparazione indipendente)**.** Sia $\{|\psi_i\rangle\}$ un insieme di stati quantici di un modello ontologico, e siano $\mu_{\psi_i}(\lambda)$, al variare di i, le rispettive distribuzioni di probabilità sullo spazio ontico Λ. [1] Si considerino n sistemi fisici preparati indipendentemente, vale a dire ad esempio tramite diverse copie del medesimo apparato sperimentale, ognuno dei quali in uno stato quantistico $|\psi_i\rangle$ per qualche i. Il postulato afferma che la distribuzione di probabilità del sistema composto costituito dall'unione degli n sistemi è il prodotto delle distribuzioni di probabilià dei singoli sistemi:

$$\mu_{|\psi_i\rangle\otimes|\psi_j\rangle\otimes\cdots\otimes|\psi_l\rangle}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \mu_{\psi_i}(\lambda_1)\times\mu_{\psi_j}(\lambda_2)\times\cdots\times\mu_{\psi_l}(\lambda_n) \tag{2.1}$$

In maniera informale, usando le parole degli autori del teorema, il postulato di preparazione indipendente dice che sistemi che sono preparati indipendentemente hanno indipendenti stati fisici.

Terza ipotesi [2]

Ogni misurazione di un'osservabile deve produrre un risultato. Darò una formulazione matematica a questa richiesta dopo aver introdotto alcune quantità, nella prossima sezione.

Quarta ipotesi [2]

Se viene effettuata una misura, le probabilità per i possibili risultati sono determinate unicamente da λ. Questo equivale a richiedere che le funzioni di risposta, indicate con π più avanti, non dipendano in particolare dallo stato quantistico ψ. I modelli in cui accade questo si definiscono *ψ-indipendenti*, nel caso contrario si dicono *ψ-dipendenti*. Il teorema dunque si applica solo ai primi.

2.2 Modelli ψ-ontici e ψ-epistemici

Per formulare e dimostrare il teorema PBR è necessario ora formalizzare matematicamente una generica interpretazione realista a variabili nascoste. Dato un determinato sistema

[1] Le distribuzioni $\mu_\psi(\lambda)$ verranno introdotte rigorosamente nella prossima sezione. L'idea alla base della loro definizione è che $\mu_{\psi_0}(\lambda_0)$ fornisca la probabilità che un sistema nello stato quantomeccanico $|\psi_0\rangle$ abbia stato ontologico λ_0. Questa nozione va però raffinata tenendo conto della possibilità che gli stati λ siano continui: questo sarà compito della prossima sezione.

[2] Queste due ipotesi, fondamentali come vedremo per il nostro scopo, non sono presenti nell'articolo originale: la loro enunciazione si trova in [11].

quantomeccanico, costruire un modello a variabili nascoste significa introdurre per ogni stato $|\psi\rangle$ una distribuzione di probabilità μ_ψ definita su uno *spazio ontico* Λ, costituito dall'insieme degli stati ontici accessibili al sistema; la probabilità che, essendo nello stato quantico $|\psi\rangle$, il sistema si trovi in uno stato ontico compreso in una palla di raggio infinitesimo centrata in λ è pari a $\mu_\psi(\lambda)d\lambda$.
Nei modelli ψ-indipendenti (gli unici che analizzeremo) i risultati delle misure sono determinati unicamente dallo stato ontologico λ, dunque è μ_ψ che permette di fissare le probabilità per i risultati delle misure operate sul sistema. Affinché la teoria a variabili nascoste sia empiricamente equivalente alla meccanica quantistica comunemente intesa, tali probabilità devono essere coerenti con la regola di Born. Sia ora ρ la matrice densità del sistema, che nel caso semplice di uno stato puro che considereremo nel seguito è $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, k un autovalore di un'osservabile K ed E_k il proiettore sull'autospazio corrispondente all'autovalore k (dunque $E_k = |k\rangle\langle k|$). Indicando con $p(k|M, P)$ la probabilità di ottenere il risultato k per la misura M dell'osservabile K a seguito di una preparazione P del sistema quantomeccanico, la regola di Born si scrive

$$p(k|M, P) = Tr(\rho E_k) \tag{2.2}$$

Vediamo ora come sia possibile calcolare la quantità $p(k|M, P)$ facendo uso degli stati ontici. Definiamo a tal fine un'analoga quantità $\pi(k|M, \lambda)$ che esprime la probabilità di ottenere di nuovo il risultato k effettuando una misura M dell'osservabile K, stavolta sapendo che il sistema si trova nello stato ontico λ. Imponendo le usuali condizioni per cui la funzione $\mu_\psi(\lambda)$ possa rappresentare una distribuzione di probabilità, ovvero la normalizzazione ($\int_\Lambda \mu_\psi(\lambda)\, d\lambda$=1) e la non negatività ($\mu_\psi(\lambda) \geq 0 \quad \forall\lambda \in \Lambda$), la probabilità cercata si calcola così:

$$p(k|M, P) = \int_\Lambda \pi(k|M, \lambda)\mu_\psi(\lambda)\, d\lambda \tag{2.3}$$

Questa formula non è altro che un'applicazione della regola della probabilità composta più un'assunzione necessaria alla coerenza con la formula di Bohr: si tratta di una "somma" su tutti i possibili λ, della probabilità di ottenere il risultato k quando il sistema è nello stato λ, per la probabilità che il sistema sia nello stato λ (in realtà nella palla centrata in λ sopra discussa) se è descritto dallo stato $|\psi\rangle$. L'assunzione che permette la coerenza con la regola di Bohr è che vi sia una corrispondenza uno ad uno tra una particolare preparazione P ed un particolare stato $|\psi\rangle$; in altre parole che lo stato quantomeccanico descriva un ensemble di sistemi preparati tutti allo stesso modo; questa visione è condivisa da Van Fraassen nella sua interpretazione.
Imporre la consistenza delle previsioni della formula di Bohr con quelle del modello ontologico equivale a mettere a sistema la (2.2) e la (2.3).

L'introduzione della quantità π ci permette di dare ora la formulazione matematica promessa della terza ipotesi. Se indichiamo con $S(K)$ lo spettro dell'osservabile K, la richiesta che ogni misurazione debba produrre un risultato nel caso di spettro discreto si scrive così:

$$\sum_{k \in S(K)} \pi(k|M, \lambda) = 1 \tag{2.4}$$

se lo spettro è invece continuo avremo un analogo integrale.
Indicherò d'ora in poi la quantità a primo termine con $\pi(S(M)|M, \lambda)$, per brevità.

A questo punto siamo pronti per introdurre la classificazione delle interpretazioni a variabili nascoste che è il nocciolo delle ipotesi del teorema PBR. Essa si basa sulla dipendenza della funzione μ_ψ da $|\psi\rangle$: se al variare di $|\psi\rangle$ le distribuzioni di probabilità $\mu_\psi(\lambda)$ hanno supporto disgiunto nello spazio ontico Λ il modello si dice ψ-ontico, se invece i supporti si sovrappongono, anche parzialmente, per qualche coppia di stati distinti $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$, il modello si dice ψ-epistemico.
Vorremmo dunque formalizzare quest'idea definendo ψ-ontico un modello nel quale per ogni coppia di stati quantici $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$, si ha $\mu_\psi(\lambda)\mu_\phi(\lambda) = 0 \quad \forall\lambda$.
Tuttavia occorre affinare appena l'idea:

Definizione 1 (Modello ψ-ontico)**.** *Un modello ontologico si dice* ψ-ontico *se per ogni coppia di stati quantici* $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ *si ha* $\mu_\psi(\lambda)\mu_\phi(\lambda) \neq 0$ *al più su un insieme di misura nulla in* Λ*.*

Questa definizione richiede in altre parole l'annullarsi della quantità $\int_\Lambda \mu_\psi(\lambda)\, \mu_\phi(\lambda)\, d\lambda$, ovvero della probabilità classica che il sistema si trovi in uno stato ontico compatibile con due differenti stati quantomeccanici.
La definizione di modello ψ-epistemico invece non riserva sorprese:

Definizione 2 (Modello ψ-epistemico)**.** *Un modello ontologico si dice* ψ-epistemico *se non è ψ-ontico.*

Questo equivale a richiedere che esistano una coppia di stati quantici $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ ed una regione di misura non nulla $R \subset \Lambda$ tali che $\mu_\psi(\lambda)\mu_\phi(\lambda) \neq 0 \quad \forall\lambda \in R$.

Astraendo, il significato di questa classificazione è quello suggerito dalla termologia adottata: in un modello ψ-ontico ad una specifica reale configurazione del sistema, descritta dallo stato ontico, corrisponde un unico stato quantico, quindi questo è direttamente collegato alle proprietà del sistema. Usando le parole degli autori del teorema

> Ogni dettaglio dello stato quantistico è "scritto dentro" il reale stato fisico delle cose.

Al contrario, nel contesto dei modelli ψ-epistemici non è possibile attribuire allo stato quantico più valore che quello di informazione su quali stati ontici è possibile che descrivano realmente il sistema: non vi è un collegamento diretto tra le sue proprietà fisiche e lo stato quantico; questo descriverà quindi solamente la conoscenza (imperfetta) che lo sperimentatore ha della realtà.

In fisica classica, nello spazio delle fasi di un sistema le regioni corrispondenti a diversi valori di una stessa grandezza fisica sono disgiunte. Se due distribuzioni di probabilità definite sullo spazio delle fasi $\mu_L(x,p)$ e $\mu_{L'}(x,p)$ hanno supporti che si intersecano, allora L ed L' non possono riferirsi ad una proprietà fisica.
Possiamo supporre che valga un principio analogo anche in meccanica quantistica.

2.3 Il teorema

Nella conclusione dell'articolo di Pusey, Barrett e Rudolph è presente la seguente enunciazione del teorema da loro appena dimostrato:

> Abbiamo presentato un teorema *no-go*, che - date alcune assunzioni - mostra che i modelli nei quali lo stato quantistico è interpretato come mera informazione riguardo

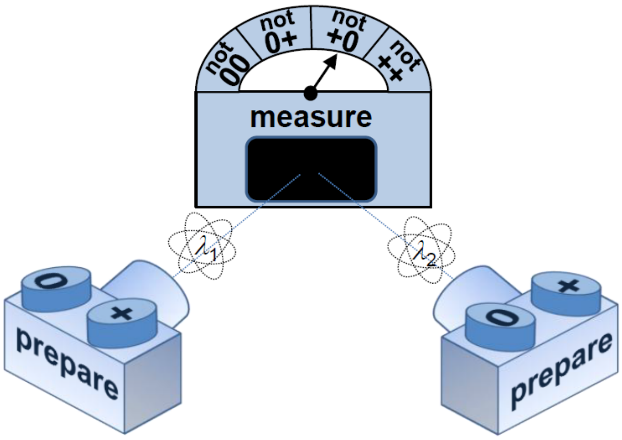

Figura 2.1

> ad uno stato fisico oggettivo di un sistema non possono riprodurre le predizioni della teoria quantistica.

O, usando la terminologia appena introdotta,
Teorema (PBR)**.** *I modelli ψ-epistemici non possono riprodurre le predizioni della teoria quantistica.*

Se ne propone ora una dimostrazione semplificata, valida solo nel caso in cui gli stati $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ le cui funzioni di probabilità si sovrappongono siano tali che $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle| = 1/\sqrt{2}$. Per una dimostrazione valida per stati $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ generici e robusta contro rumore ed errore sperimentale, dunque testabile, si rimanda all'articolo originale di Pusey Barrett e Rudolph [3].

La dimostrazione procede per assurdo. Si considerino due differenti metodi per preparare un sistema quantistico, corrispondenti rispettivamente agli stati quantistici $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, con $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle| = 1/\sqrt{2}$. Si scelga una base dello spazio di Hilbert tale per cui $|\psi_0\rangle = |0\rangle$ e $|\psi_1\rangle \equiv |+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$. Com'è intuibile, si supponga che i supporti delle distribuzioni $\mu_0(\lambda)$ e $\mu_1(\lambda)$ si sovrappongano su una regione R di misura non nulla.
Vi è quindi una probabilità $p > 0$ che un sistema preparato nello stato $|\psi_0\rangle$ si trovi in uno stato ontico λ appartenente alla regione R, ed analogamente una probabilità $q > 0$ che uno preparato nello stato $|\psi_1\rangle$ si trovi in uno stato λ' appartenente alla medesima regione di sovrapposizione.

Consideriamo ora un apparato capace di preparare il sistema sia nello stato $|\psi_0\rangle$ sia in quello $|\psi_1\rangle$; diciamo che metà delle volte l'apparato preparerà il sistema nel primo modo e metà delle volte nel secondo. Allora vi è una probabilità $r = (p + q)/2$ che il sistema si trovi in uno stato ontico appartenente alla regione di sovrapposizione. Ovviamente se le probabilità di ottenere una preparazione o l'altra sono diverse, la media andrà diversamente pesata, e se tali probabilità sono ignote, r sarà ignoto ma ciò che è fondamentale notare ai fini della dimostrazione è che r è un numero strettamente positivo ($r \geq min\{p, q\}$).

Si costruiscano ora due copie dell'apparato descritto, al fine di preparare due sistemi i cui stati quantistici non siano entangled, come illustrato in *Figura 2.1*.

Dal postulato di preparazione indipendente discende che vi sia una probabilità $r^2 > 0$ che gli stati ontologici λ_1 e λ_2 appartengano entrambi alla regione di sovrapposizione R.

Questo significa che lo stato fisico dei due sistemi è compatibile con tutti i seguenti stati quantistici:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle \qquad |0\rangle \otimes |+\rangle \qquad |+\rangle \otimes |0\rangle \qquad |+\rangle \otimes |+\rangle \tag{2.5}$$

Definiamo ora, in analogia con $|+\rangle$, $|-\rangle \equiv (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ e consideriamo un'osservabile K avente i seguenti quattro autostati ortogonali:

$$\begin{aligned}
|k_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle \;+\; |1\rangle \otimes |0\rangle\right)\\
|k_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |-\rangle \;+\; |1\rangle \otimes |+\rangle\right)\\
|k_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |1\rangle \;+\; |-\rangle \otimes |0\rangle\right)\\
|k_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle \otimes |-\rangle \;+\; |-\rangle \otimes |+\rangle\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Si operi quindi sui due sistemi sopra descritti una misura di K. Il primo autostato è ortogonale a $|0\rangle \otimes |0\rangle$, il secondo a $|0\rangle \otimes |+\rangle$, il terzo a $|+\rangle \otimes |0\rangle$ ed il quarto a $|+\rangle \otimes |+\rangle$. Dunque la meccanica quantistica predice che l'autovalore corrispondente al primo autostato abbia probabilità 0 di essere il risultato di una misura di K operata sul primo degli stati (2.5), quello corrispondente al secondo autostato abbia probabilità 0 sul secondo degli stati (2.5) e così via per ogni stato ortogonale.
Tuttavia r^2 delle volte i sistemi si troveranno nella regione compatibile con tutti e quattro gli stati (2.5) e dunque lo strumento di misura è incerto su quale preparazione sia stata usata; non potendo conoscerla rischia di produrre un risultato che la teoria quantistica predice si ottenga con probabilità 0.
Questo prova che le distribuzioni di $|0\rangle$ e $|+\rangle$ non possono sovrapporsi.

2.4 Conseguenze

Come anticipato, il teorema non elimina totalmente la possibilità di adottare modelli ontologici ψ-epistemici: questi si *salvano* a patto di non soddisfare almeno un'ipotesi.
Vediamo quindi ad una ad una in cosa si traduce la richiesta di non soddisfare ciascuna ipotesi. Rifacendomi all'ordine con cui le ho esposte in precedenza,

1. se il modello non è realistico, banalmente non può essere *psi*-epistemico;

2. se il modello non realizza il postulato di preparazione indipendente, deve prevedere correlazioni non locali anche tra stati non *entangled*;

3. se non tutte le misurazioni di un'osservabile devono produrre un risultato, esistono delle *built-in inefficiencies.*

4. se il modello è *psi*-dipendente si affievolisce la nostra capacità di conoscere la realtà, descritta dallo stato ontico, ed inoltre risulta difficile comprendere come una funzione d'onda *epistemica* possa condizionare il processo fisico della misurazione.

Approfondirò ora il secondo e terzo caso, lasciando l'analisi del quarto all'ultimo capitolo, per motivi che si faranno chiari più avanti.

2.4.1 Negazione del postulato di preparazione indipendente

Il postulato di preparazione indipendente a prima vista può sembrare convincente: è ragionevole pensare che stati quantisticamente non correlati non prevedano correlazioni nemmeno a livello ontico, e dunque la distribuzione di probabilità sullo stato ontico del sistema composto formato dall'unione dei due sistemi scorrelati sia banalmente il prodotto delle distribuzioni di probabilità di questi ultimi.

Tuttavia quando possiamo affermare con sicurezza che due sistemi non siano correlati?

Supponiamo di considerare due sperimentatori differenti che decidono di preparare rispettivamente gli stati quantistici $[\psi]_A$ e $[\phi]_B$. Supponiamo inoltre che l'intersezione dei coni luce passati degli eventi corrispondenti alle due preparazioni abbia alcune proprietà fisiche descritte da uno stato ontico che chiamiamo $\lambda_{passato}$. Anche nel caso in cui le preparazioni avvengano separate da un intervallo spaziotemporale di tipo spazio, può sorgere una correlazione tra gli stati ontici dei due sistemi λ_A e λ_B dovuta dalla loro comune dipendenza da $\lambda_{passato}$, e quindi la distribuzione di probabilità sullo spazio ontico associata allo stato $[\psi]_A \otimes [\phi]_B$ non è banalmente il prodotto delle distribuzioni dei sistemi singoli, ma è:

$$\mu_{[\psi]_A \otimes [\phi]_B}(\lambda_A, \lambda_B) = \sum_{\lambda_{passato}} Pr(\lambda_A | [\psi]_A, \lambda_{passato}) Pr(\lambda_B | [\psi]_B, \lambda_{passato}) Pr(\lambda_{passato}) \quad (2.7)$$

La presenza della prior $Pr(\lambda_{passato})$ rende impossibile la fattorizzazione.

Data questa possibile debolezza, il teorema PBR è stato riformulato e dimostrato anche sotto un'ipotesi meno stringente del postulato di preparazione indipendente: in [11] si mostra che è sufficiente richiedere la *compattezza* delle distribuzioni di probabilità degli stati quantistici $|1\rangle$ e $|2\rangle$ che descrivono i sottosistemi di $|1\rangle \otimes |2\rangle$. Con compattezza in questo contesto si intende
Definizione 3 (Compattezza)**.** *Le distribuzioni di probabilità $\mu_1(\lambda)$ e $\mu_2(\lambda)$ associate rispettivamente agli stati $|1\rangle$ e $|2\rangle$ si dice che soddisfano alla nozione di* compattezza *se, nel caso in cui condividano almeno un λ nei loro supporti, esiste un λ_c nel supporto delle distribuzioni associate con qualunque prodotto tensore della forma $|x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_L\rangle \quad x_i \in \{1, 2\}$ (con L qualsiasi).*

Schlosshauer e Fine, gli autori dell'articolo [11] in cui viene proposta questa nozione, affermano che equivalga a richiedere che la proposizione "tutti hanno una madre" implichi "esiste una madre di tutti noi". Io ritengo che questo non sia corretto: λ e λ_c non hanno nessuna correlazione *a priori*, ed in particolare certamente $\lambda \neq \lambda_c$. Dunque richiedere la compattezza equivale ad affermare che "tutti hanno una madre" implichi "siamo tutti figli". Proprio per questo motivo anche negare la compattezza è *costoso*.
Infatti negare il postulato di preparazione indipendente significa ammettere la possibilità di correlazioni, come abbiamo visto anche capaci di violare la causalità, anche tra stati non *entangled*.
D'altro canto negare la compattezza significa dire che sistemi che hanno *qualcosa in comune* quando li si considera separatamente, possano dare luogo, se combinati diversamente, a composti che non hanno niente in comune tra loro.

2.4.2 *Built-in inefficiencies*

Negare che ogni misurazione debba produrre un risultato (al netto di inefficienze dell'apparato di misura) significa ammettere delle *built-in inefficiencies*, ovvero delle inefficienze

intrinseche del sistema composto *sistema + apparato di misura*, tali per cui alcune misurazioni non si traducono in alcuna risposta da parte dello strumento di misura.
Per contemplare questa possibilità occorre aggiungere un "valore" nullo ϑ allo spettro $S(M)$, formando così uno spettro $S^+(M)$, e richiedere che

$$\pi(S^+(M)|M,\lambda) = 1 \tag{2.8}$$

al posto che (2.4).
Occorre correggere con un fattore di normalizzazione anche l'equazione (2.3) che connette le funzioni di risposta con la regola di Bohr. Tenendo conto di ϑ essa diventa:

$$p(k|M,P) = \frac{\int_\Lambda \pi(k|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,d\lambda}{\int_\Lambda \pi(S(K)|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)\,d\lambda} \tag{2.9}$$

Ammettendo questa possibilità, si può sfuggire alla contraddizione esposta nella dimostrazione del teorema se si ammette che

$$\pi(\vartheta|M,\lambda) = 1 \qquad \forall\lambda \in R \tag{2.10}$$

Se questo è vero, gli stati ontici della regione di sovrapposizione restituiscono come esito della misurazione "incerta" di K il valore nullo, ovvero non si registra nessuna variazione nell'indicatore dello strumento di misura e la contraddizione è sanata.
É da notare però come l'introduzione di queste inefficienze sia fatta ad hoc per preservare la validità dei modelli ψ-epistemici.

L'interpretazione modale esclude esplicitamente la possibilità di *built-in inefficiencies*: Van Fraassen ribadisce più volte in [1] che la somma sullo spettro delle probabilità di ottenere un valore a seguito di una misura di un'osservabile è 1 (cioè vale (2.4)).

Capitolo 3

Confronto

Ci proponiamo finalmente di determinare se il teorema PBR sia applicabile all'interpretazione di Van Fraassen. Ovviamente la domanda fondamentale è: tale interpretazione è un modello ontologico ψ-epistemico?

3.1 Ψ-epistemicità del modello

La funzione d'onda per le interpretazioni modali è parte della realtà: la *guida*, sia nel senso che permette di determinare l'evoluzione temporale di un sistema, sia nel senso che delimita quali stati ontici è possibile che il sistema assuma, in particolare prescrivendo quali osservabili assumano un valore ad un determinato istante. Questi due ruoli dello stato quantistico ci impediscono nettamente di considerarlo pura informazione in possesso dello sperimentatore.

Tuttavia se è vero che se la funzione d'onda è interpretabile come mera informazione stiamo considerando un modello ψ-epistemico, non è vero l'inverso.
Appena non tutta l'informazione contenuta nella funzione d'onda è immediatamente collegata a dati di realtà, si apre la possibilità che il modello non sia ψ-ontico.

Analizziamo dunque quali *parti* della funzione d'onda abbiano un corrispettivo diretto nella realtà secondo l'interpretazione di Van Fraassen.
Consideriamo un sistema isolato. Abbiamo detto che innanzitutto la ψ governa l'evoluzione temporale del sistema. Tuttavia non lo fa in una modalità peculiare dell'interpretazione, come nel caso ad esempio dell'onda-pilota della teoria di Bohm: l'evoluzione temporale è esattamente quella standard descritta dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{3.1}$$

Dunque l'operatore di evoluzione temporale è, al solito, $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$, che è funzione dell'operatore hamiltoniano. Ora un operatore ed una sua funzione condividono i medesimi autostati. Il fatto che le condizioni per cui un modello è ψ-ontologico devono valere *per tutti* gli stati di un qualunque sistema ci permette di fare liberamente ipotesi ad hoc sul sitema che vogliamo considerare per creare un controesempio. Consideriamo quindi un sistema il cui operatore hamiltoniano ha almeno un autospazio degenere. Consideriamo ora due vettori linearmente indipendenti in tale autospazio; essi, condividendo il valore dell'energia, condivideranno anche la medesima evoluzione temporale. Se questi due stati sono tali per cui hanno le stesse osservabili con valori definiti, hanno lo stesso rappresentativo nello spazio ontologico. Ora se anche la probabilità che il sistema si trovi in tale stato ontico è non nulla, il modello di Van Fraassen è ψ-epistemico.

Mi propongo quindi di trovare due stati quantici come quelli descritti.

Si consideri un sistema quantistico, diciamo un fermione di spin 1/2, in una regione in cui è presente un potenziale che non contiene termini dipendenti dallo spin, ad esempio di accoppiamento spin-orbita. Sia ψ una funzione d'onda spaziale, che descriva quindi una particella senza spin, e si considerino i due stati

$$|1\rangle = \psi\,\chi_\uparrow \qquad\qquad |2\rangle = \psi\,\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_\uparrow + \chi_\downarrow) \tag{3.2}$$

dove $\chi_\uparrow$ e $\chi_\downarrow$ sono gli spinori corrispondenti alla terza componente dello spin rispettivamente uguale a $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$.
Condividendo la stessa funzione d'onda spaziale, essi appartengono allo stesso autospazio dell'hamiltoniana. Nel caso dello stato $|1\rangle$ è definita la terza componente dello spin, in quanto è un autostato di questa grandezza. Nel caso del secondo stato non è necessario che tale quantità sia definita, ma è possibile (e ciò è sufficiente alla dimostrazione): sarà definita se $|2\rangle$ descrive un sistema su cui non è stata ancora misurata nessuna componente dello spin, ma nel futuro verrà misurata la terza componente. Oppure alternativamente, per l'interpretazione modale di Kochen-Dieks, la terza componente dello spin sarà definita su entrambi gli stati qualora questi descrivano particelle che sono accoppiate con uno strumento capace di misurare tale quantità.
Dunque esistono condizioni tali per cui gli stati ontologici compatibili con $|1\rangle$ sono tutti compatibili anche con $|2\rangle$.

Resta ancora da provare che

$$\int_\Lambda \mu_{|1\rangle}(\lambda)\,\mu_{|2\rangle}(\lambda)\,d\lambda \neq 0 \tag{3.3}$$

Indico con κ le variabili nascoste che si riferiscono allo spin, mentre con λ_ψ tutte le restanti. Per quanto esposto in precedenza, indicando con $\kappa_\uparrow$ l'autostato corrispondente all'autovalore $+\hbar/2$ della terza componente dello spin

$$\mu_{|1\rangle}(\lambda) = \mu_\psi(\lambda_\psi)\delta(\kappa_\uparrow - \kappa) \qquad \mu_{|2\rangle}(\lambda) = \mu_\psi(\lambda_\psi)\mu(\kappa) \tag{3.4}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
&\int_\Lambda \mu_{|1\rangle}(\lambda)\,\mu_{|2\rangle}(\lambda)\,d\lambda = \\
&\int_\Lambda \mu_\psi^2(\lambda_\psi)\,\delta(\kappa-\kappa_\uparrow)\,\mu(\kappa)\,d\lambda_\psi d\kappa = \\
&\int_{\Lambda_\psi} \mu_\psi^2(\lambda_\psi)\,d\lambda_\psi \int_{\Lambda_\kappa} \delta(\kappa-\kappa_\uparrow)\,\mu(\kappa)d\kappa = \\
&\int_{\Lambda_\psi} \mu_\psi^2(\lambda_\psi)\,d\lambda_\psi \quad \mu(\kappa_\uparrow) \neq 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Il modello è quindi ψ-epistemico.[1]

[1] Questa mia conclusione è in contrasto con quanto suggerito in [6].

Questo esempio è un caso speciale di un principio generale: si possono usare come coordinate per lo spazio ontologico istante per istante i valori delle osservabili che ne hanno uno e la decomposizione dello stato quantico in autostati dell'hamiltoniana per identificare l'evoluzione temporale del sistema. Se l'hamiltoniana ha almeno un autospazio degenere, gli stati dinamici rappresentati da diversi vettori appartenenti a tale autospazio, se hanno le stesse osservabili definite, possono avere lo stesso rappresentativo nello spazio ontologico, ovvero possono *descrivere la stessa realtà*. Questa "libertà di movimento" all'interno dell'autospazio degenere mantenendo fissa la situazione fisica, implica che vi è una parte dello stato dinamico *superflua*, non collegata alla realtà fisica, ed esattamente questa caratteristica rende il modello ψ-epistemico.

Tuttavia la classificazione dell'interpretazione di Van Fraassen tra i modelli psi-epistemici sembra tradire le intenzioni del suo autore; egli infatti ribadisce più volte che la definizione dello stato di un sistema è altra cosa rispetto alla definizione dei valori delle osservabili che lo descrivono. L'identificazione dei due concetti è di derivazione classica, mentre l'attribuire un valore preminente allo stato dinamico nella descrizione della realtà, come lui sembra fare, significa porsi in un'ottica nuova, che forse la meccanica quantistica rivela essere più fondamentale: significa studiare ed interpretare la realtà tramite il concetto di modalità, nel caso quantistico di possibilità quantificata dalla probabilità.
Scrive infatti

> Il concetto di stato dinamico rimane il fondamentale [in confronto allo stato effettivo].

e

> In altre parole, lo stato delimita cosa può e non può succedere - delimita possibilità, impossibilità e probabilità di occorrenza - ma non dice cosa in realtà succeda. La transizione dal possibile al reale ("actual") non è una transizione di stato, ma una transizione descritta dallo stato.

Thomas Kuhn afferma che i parametri che vengono ritenuti salienti per descrivere la natura non siano immutabili o necessariamente quelli attuali, e che anzi siano mutati durante le rivoluzioni scientifiche passate.
Nell'attuale paradigma scientifico non possiamo esimerci dal considerare i valori esatti assunti dalle osservabili determinanti per descrivere le proprietà fisiche del sistema considerato, ma potremmo immaginare di pórci in una prospettiva in cui a priori si sceglie che lo spazio ontologico corrisponda con lo spazio di Hilbert del sistema. In tal modo il modello sarebbe ψ-ontico per così dire *a priori*.

3.2 Ψ-dipendenza del modello

Benché il modello di Van Fraassen sia ψ-epistemico, non è possibile applicarvi il teorema PBR. Questo perché è anche ψ-dipendente.

Scrive infatti Van Fraassen:

> Si noti che la misura è un'interazione, dunque la predizione dei risultati di una misura appartiene ai ruoli dello stato dinamico.

Questo è vero a fortiori per le interpretazioni che fanno uso della decomposizone biortogonale.

Confrontando l'interpretazione di Van Fraassen con la teoria formulata per enunciare e dimostrare il teorema PBR, la ψ-dipendenza del modello si sostanzia nella non applicabilità della formula (2.3), ovvero

$$p(k|M, P) = \int_\Lambda \pi(k|M, \lambda)\mu_\psi(\lambda)\, d\lambda$$

Nell'interpretazione modale non vi è una nozione di questo genere: lo stato quantico delimita una regione in Λ, dunque potremmo integrare su quella, $\pi(k|M, \lambda)$ è ben definita (solo) nel caso il value state comprenda un valore per l'osservabile K, ma non vi è alcuna nozione di $\mu_\psi(\lambda)$: qualsiasi value state accessibile è possibile, non vi è nessun vincolo.

3.3 Realismo del modello

É necessaria un'ultima precisazione. Si dà il caso che in molte interpretazioni modali (Bub e Clifton 1996; Bub, Clifton, and Goldstein 2000; Dieks 2005) le osservabili di un sistema che hanno ad un dato istante un valore definito siano determinate dallo stato quantistico ψ, ma solo in relazione ad un osservatore privilegiato R. Questo significa che non esiste uno stato ontologico in cui si trova il sistema *indipendentemente dall'osservatore*, ovvero non sono modelli ontologici. Non è tuttavia questo il caso dell'interpretazione di Van Fraassen, per cui il sistema si trova sempre in un *value state*, anche se isolato, ed i possibili *value state* sono determinati solamente dallo stato ψ, sia a tempo fissato, sia nella loro evoluzione temporale. Questa definizione oggettiva dello stato è da una parte conseguenza dell'accento che Van Fraassen pone sulla *realtà* della ψ e dall'altra è concessa dalla ψ-dipendenza del modello. In altre parole Van Fraassen, dovendo rendere conto dei peculiari comportamenti quantistici, preferisce lasciar cadere parte della nostra capacità conoscitiva della realtà, attuando uno scollamento tra quest'ultima e i risultati delle nostre misure, piuttosto che negare l'esistenza di una realtà oggettiva, indipendente dall'osservatore.

3.4 Conclusione

In definitiva, la *variante di Copenhagen dell'interpretazione modale* non soddisfa le ipotesi del teorema PBR, e per questo risulta particolarmente interessante: pur essendo un modello ψ-epistemico, non è forzato a prevedere i comportamenti più *patologici* che ho esposto nella sezione (2.4). In particolare, anche la possibilità di una funzione d'onda *epistemica* che giochi però un ruolo nel processo reale della misurazione sembrava contraddittoria. Tuttavia nel modello di Van Fraassen non lo è, proprio perché la sua essenza non è ψ-epistemica: benché i supporti delle distribuzioni di probabilità non siano segregati, la funzione d'onda è considerata in parte *reale*, e dunque non sorprende che possa influenzare i processi fisici. Tuttavia siamo liberi dalla necessità di interpretarla *tutta* come reale, ed esattamente questo permette una spiegazione molto naturale di quello che accade durante una misura.

La variante di Copenhagen dell'interpretazione modale è dunque molto soddisfacente per un empirista costruttivo: è internamente più coerente della versione di von Neumann e predice altrettanto esattamente i risultati sperimentali.
Benché non sia possibile dimostrare che le nostre teorie hanno altra validità al di fuori dell'esatta previsione dei risultati sperimentali, e il solo fine dell'adeguatezza empirica sia

sufficiente a spiegare la pratica scientifica, uno scienziato potrebbe avere più cara l'idea che il fine della scienza sia il fornire una storia letteralmente vera di ciò che è il mondo, e che le attuali teorie colgano almeno degli aspetti della realtà anche al di là del mero dato sperimentale. In questa visione, l'interpretazione di Van Fraassen non sembra essere più soddisfacente quando designa cosa è reale ad un dato istante.

Altre interpretazioni modali, come la già citata di Kochen-Dieks e quella successiva di Vermaas-Dieks, mantengono le idee fondamentali di quella di Van Fraassen, ma propongono metodi di attualizzazione delle osservabili compatibili con il realismo scientifico; queste possono essere divise tra quelle che prevedono che le proprietà di un sistema siano definite solo in relazione ad un altro e quelle che prevedono che le proprietà di un sistema non abbiano carattere relazionale.
L'introduzione della nozione di relazionalità è motivata dal seguente fatto. Si consideri un sistema composto $\alpha\beta$, le cui componenti α e β sono descritte da vettori negli spazi di Hilbert rispettivamente $\mathcal{H}^\alpha$ e $\mathcal{H}^\beta$. Si consideri ora l'operatore $\hat{A}$ definito su $\mathcal{H}^\alpha$, e $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_\beta$ definito su $\mathcal{H}^\alpha \otimes \mathcal{H}^\beta$. Le regole di selezione delle osservabili definite che si fondano sul teorema di decomposizione biortogonale, e le loro generalizzazioni, prevedono che $\hat{A}$ possa avere valori definiti per α mentre $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_\beta$ non li ha per $\alpha\beta$ (per la dimostrazione si veda Vermaas 1998). Per spiegare questo fatto abbiamo due alternative:

- o neghiamo (con van Fraassen) che gli operatori $\hat{A}$ e $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_\beta$ rappresentino la stessa osservabile
- o neghiamo che i sistemi α e $\alpha\beta$ abbiano proprietà definite *di per sé* (illustrerò in dettaglio questa possibilità tra qualche riga).

La situazione che ho esposto è un caso particolare del fatto che uno stesso sistema può essere diviso in diverse parti, e ad ogni parte è possibile assegnare un insieme di proprietà definite. Se affermiamo che tali proprietà sono possedute intrinsecamente dalle parti e che possono venire confrontate come si fa usualmente, arriviamo ad una contraddizione derivante dal teorema di Kochen-Specker.
La prima alternativa delle due sopra esposte, anche se lecita, lascia inspiegata l'indistinguibilità sperimentale dei due operatori: se una misura di $\hat{A}$ fornisce un certo risultato, allora una di $\hat{A} \otimes \mathbb{1}_\beta$ fornisce esattamente lo stesso.
La seconda alternativa, proposta da Kochen nel 1985 e sviluppata da Bene e Dieks nella loro interpretazione chiamata "PMI" (Perspectival Modal Interpretation) del 2002, prevede che le proprietà di un sistema abbiano natura *relazionale*, ovvero siano definite solo rispetto ad un altro sistema fisico che serve da "sistema di riferimento". Le proprietà del primo sistema devono essere "testimoniate" dal secondo (ad esempio uno strumento di misura). Lo stesso oggetto, al variare del "sistema di riferimento", ovvero della prospettiva da cui lo si analizza, ammette diverse osservabili definite, ovvero diverse descrizioni, tutte oggettive e tutte corrispondenti alla realtà fisica, che dunque ha essa stessa carattere relazionale.
Una nozione di *relazionalità*, seppur molto più debole, è d'altronde sempre stata presente nella fisica: la velocità di un oggetto è definita solo in relazione ad un altro punto dello spazio, la semplice relatività galileiana ammette che diverse descrizioni della realtà siano simultaneamente vere, ed in contesto relativistico, specialmente in Relatività Generale, si ammette che lo siano anche descrizioni *radicalmente* diverse della realtà.

Indipendentemente da quale sua specifica versione siamo interessati a considerare, con questa tesi ho mostrato come l'interpretazione modale sia ad oggi adeguata a spiegare il significato della meccanica quantistica tanto quanto quella di Copenhagen, con il vantaggio di dare una visione del mondo più unitaria e meno distante da quella classica, che ci permette di comprendere con più facilità cosa un'osservabile sia e rende la misura non più *misteriosa*, o quantomeno singolare. [2]

D'altro canto i prezzi che è necessario "pagare" nell'adottare questa interpretazione sono quello di una maggiore complessità, data da elementi e meccanismi inosservabili, che come tali sono stati introdotti senza possibilità di verifica, e quello dell'adozione di *una* delle seguenti tre posizioni:

- la Meccanica Quantistica non ha potenzialità all'infuori dell'esatta predizione dei risultati sperimentali
- non è possibile confrontare le proprietà dei sistemi con quelle delle loro parti anche quando sembrerebbe esserci un modo ovvio di farlo
- le proprietà dei sistemi sono relazionali.

[2] così facendo risolve ad esempio il paradosso del gatto di Schrödinger: grazie al value state il gatto è sempre o vivo o morto. In [12] si sostiene tra l'altro che esattamente le osservabili che l'interpretazione di Kochen-Dieks prevede siano definite siano il minimo che è necessario richiedere perché il gatto non sia mai contemporaneamente vivo e morto.

Bibliografia

[1] B. C. VAN FRAASSEN, *Quantum Mechanics: An Empiricist View*, Clarendon Press, Oxford, 1991

[2] B. C. VAN FRAASSEN, *L'immagine scientifica*, CLUEB, Bologna, 1985

[3] M. F. PUSEY, J. BARRETT, T. RUDOLPH, *On the reality of the quantum state*, Nature Phys. 8, 475; arXiv:1111.3328 (2012)

[4] A. SANGIOVANNI, P. MARCHETTI *La natura dello stato quantistico: realtà o informazione*, Tesi, Università di Padova, 2016

[5] DAVID J. GRIFFITHS, *Introduzione alla meccanica quantistica*, Casa editrice ambrosiana, Milano, 2005

[6] M. S. LEIFER, *Is the quantum state real? An extended review of ψ-ontology theorems*, Quanta 3, 67-155; arXiv:1409.1570, 2014

[7] E. S. REICH, *Quantum theorem shakes foundations*, Nature, 2011

[8] LOMBARDI, OLIMPIA, DIEKS, DENNIS *Modal Interpretations of Quantum Mechanics*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, edizione Primavera 2017, Edward N. Zalta (ed.),
URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/qm-modal/>

[9] ATMANSPACHER, HARALD *Quantum Approaches to Consciousness*, in The Stanford Encyclopedia of Philosophy, edizione Estate 2015, Edward N. Zalta (ed.),
URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/qt-consciousness/>

[10] W. HEISENBERG, *Fisica e filosofia*, Il Saggiatore, Milano, 1961

[11] M. SCHLOSSHAUER, A. FINE, *Implications of the Pusey-Barrett-Rudolph Quantum No-Go Theorem*, Physical review letters 108, 260404, 2012

[12] R. CLIFTON, *Independently Motivating the Kochen-Dieks Modal Interpretation of Quantum Mechanics*, The British Journal for the Philosophy of Science, Vol. 46, No. 1 (Mar., 1995), pag.33-57