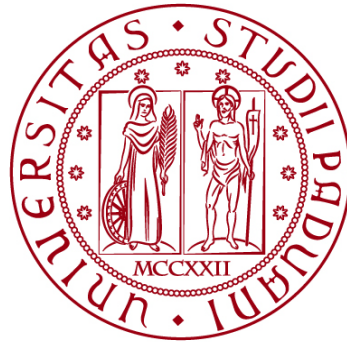


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE E AMBIENTALE
Corso di Laurea in Ingegneria per l'ambiente e il territorio



TESI DI LAUREA:

Indagine sperimentale sulla probabilità di cattura e di
rilascio di particelle galleggianti ad opera di un cilindro
parzialmente emerso

Experimental investigation on the probability of capture and
escaping of floating particles by a partly emergent cylinder

Relatore: Prof. Defina Andrea
Correlatore: Prof. Peruzzo Paolo

Laureanda: Bolletta Giada
Matricola: 1011459

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

Alla mia famiglia.

*“ Se vi è una magia su questo pianeta,
è contenuta nell'acqua. “*

Loren Eiseley

Indice

| | |
|--|----|
| Introduzione | 1 |
| 1. Moto di particelle solide a contatto con correnti a pelo libero | 3 |
| 1.1 Tensione superficiale e capillarità | 3 |
| 1.2 Raggruppamento di particelle | 7 |
| 1.3 Efficienza di cattura di particelle da parte di un collettore | 9 |
| 1.4 Probabilità di cattura e velocità di fuga | 14 |
| 2. Caso studio in esame | 19 |
| 2.1 Strumentazione utilizzata | 19 |
| 2.2 Svolgimento delle prove | 20 |
| 3. Modello e risultati sperimentali | 23 |
| 3.1 Probabilità di cattura | 23 |
| 3.2 Velocità e tempi di distacco | 26 |
| Conclusioni | 37 |
| Bibliografia | 39 |

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è lo studio dei meccanismi di cattura di particelle galleggianti ad opera della vegetazione in un canale a pelo libero attraverso delle prove sperimentali in una canaletta nel laboratorio di Idraulica del dipartimento ICEA dell'Università degli Studi di Padova. A questo scopo si è utilizzato un collettore cilindrico parzialmente emerso per simulare le piante e una serie di palline in legno di piccolo diametro per simulare dei semi. In questo modo è stato possibile studiare le interazioni delle particelle galleggianti al variare del diametro del collettore cilindrico e della portata nella canaletta, e verificare la validità di un modello teorico in grado di stimare la probabilità di cattura delle particelle.

Capitolo 1

MOTO DI PARTICELLE SOLIDE A CONTATTO CON CORRENTI A PELO LIBERO

La teoria del moto delle correnti a pelo libero di solito descrive il moto di un fluido a contatto superiore solo con l'aria, ma cosa succede se sulla superficie libera del canale si pongono delle particelle solide galleggianti tra le due superfici? Come interagiscono con queste? Valutiamo i vari fenomeni che governano queste interazioni.

1.1 Tensione superficiale e capillarità

La tensione superficiale e l'azione capillare sono proprietà fisiche delle sostanze liquide.

La **tensione superficiale** è un fenomeno in cui la superficie di un liquido, in cui esso è a contatto con un gas, si comporta come un sottile foglio elastico.

Le molecole liquide nella superficie del liquido sono attratte dalle molecole nel mezzo del liquido: queste forze attrattive (vedi Figura 1) sono definite *forze di coesione*. Invece l'attrazione tra le molecole liquide e le molecole d'aria è definita come *forza di adesione*. Pertanto, questo strato superficiale di molecole liquide agisce come una membrana elastica.

Lo strato superficiale di molecole liquide è sotto tensione perché non ci sono forze di attrazione sufficienti per bilanciare l'azione delle forze coesive su di esse; questa condizione è chiamata tensione superficiale:

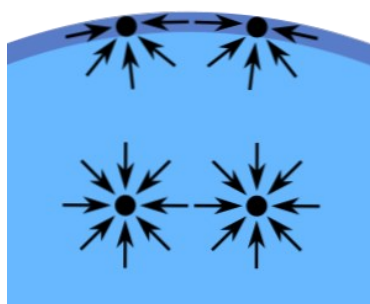


Figura 1. Forze attrattive molecolari di Van der Waals.

La tensione superficiale è definita come il rapporto tra la forza superficiale F e la lunghezza d lungo la quale agisce la forza, ed è misurata in N/m:

$$\sigma = \frac{F}{d} \quad \rightarrow \quad \sigma_{H_2O} = 0,073 \frac{N}{m} \quad (1.1)$$

Nel momento in cui si dovesse tenere conto della presenza di particelle solide tra superficie liquida e gassosa, non è più sufficiente considerare le sole forze di coesione, in quanto la presenza di un altro corpo ha influenza sui valori della tensione: quando liquido e solido vengono in contatto, a causa delle interazioni tra le differenti fasi, viene a stabilirsi una tensione interfacciale definita come energia addizionale per unità di area dovuta alla formazione di un'interfaccia solido/liquido e solido/gas.

Definiamo quindi **capillarità** l'insieme di fenomeni dovuti a coesione, adesione e tensione superficiale. La relazione tra le forze di coesione ed adesione determina un fattore importante nella capillarità poiché:

- *Coesione* > *Adesione* \rightarrow il liquido non bagna il solido, con abbassamento del livello del liquido nei pressi del solido (vedi Figura 2 - destra);
- *Adesione* > *Coesione* \rightarrow il liquido bagna il solido, con innalzamento del livello del liquido nei pressi del solido (vedi Figura 2 - sinistra).

Un effetto parallelo a quello di risalita o abbassamento è la curvatura sulla superficie libera del liquido, definita come menisco:

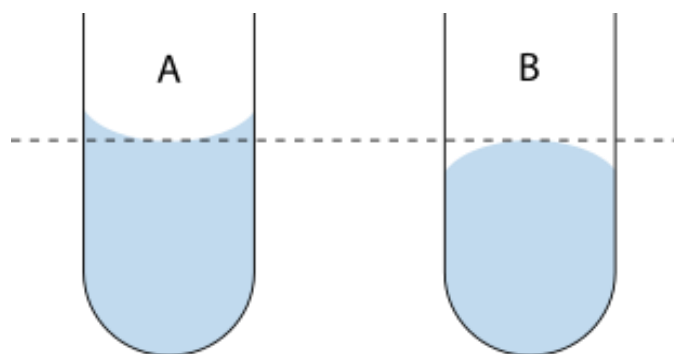


Figura 2. Menisco per effetto della capillarità: a) concavo, b) convesso.

L'azione capillare viene misurata come l'altezza della colonna liquida che viene tirata verso l'alto, contro la gravità. Nello specifico, come si può vedere in Figura 3, si ha:

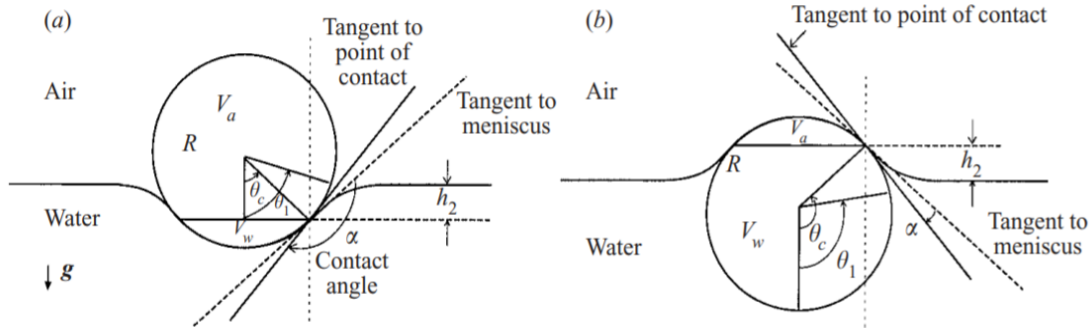


Figura 3. a) Particelle idrofobe; b) particelle idrofile in sospensione.

La forza capillare F_c è funzione del raggio della particella R , il coefficiente di tensione superficiale σ , l'angolo di riempimento θ_c e l'angolo di contatto α :

$$F_c = 2\pi(R \sin \theta_c)\sigma \sin[\theta_c - (\pi - \alpha)] = -2\pi R\sigma \sin \theta_c \sin(\theta_c + \alpha) \quad (1.2)$$

La risultante verticale della pressione F_p intorno alla sfera può essere scritta:

$$F_p = \rho_L g V_w + \rho_A g (V - V_w) - (\rho_L - \rho_A) g h_2 A \quad (1.3)$$

- dove:
- ρ_L : densità del liquido
 - ρ_A : densità dell'aria
 - h_2 : depressione generata dalle particelle
 - $V = \frac{4\pi R^3}{3}$: volume della sfera
 - $V_w = \pi R^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \theta_c + \frac{\cos^3 \theta_c}{3} \right)$: volume sfera immersa
 - $A = \pi (R \sin \theta_c)^2$: area dell'anello di contatto

All'equilibrio quindi, la forza di gravità G è bilanciata dalla forza capillare più la risultante verticale della pressione intorno alla sfera:

$$F_c + F_p = G \quad (1.4)$$

$$\text{dove: } G = \frac{4\rho_p \pi R^3 g}{3}$$

Si ha quindi, come *posizione di equilibrio* della sfera:

$$\begin{aligned} \sin \theta_C \sin(\theta_C + \alpha) = & -\frac{1}{2}B\left[\frac{4}{3}\psi_1 - \left(\frac{2}{3} - \cos \theta_C + \frac{1}{3}\cos^3 \theta_C\right) - \right. \\ & \left. - \psi_2\left(\frac{2}{3} + \cos \theta_C - \frac{1}{3}\cos^3 \theta_C\right) + \right. \\ & \left. + (1 - \psi_2)(\cos \theta_C - \cos \theta_1) \operatorname{sen}^2 \theta_C\right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \text{dove: } -(\cos \theta_C - \cos \theta_1) &= \frac{h_2}{R} \\ -B &= \frac{\rho_L R^2 g}{\gamma} \\ -\psi_1 &= \frac{\rho_p}{\rho_L} ; \psi_2 = \frac{\rho_A}{\rho_L} \end{aligned}$$

Si nota che le particelle idrofobe possono sempre essere sospese in superfici fluide indipendentemente dal loro peso; inoltre, le particelle siedono sulla parte superiore del fluido o sono tenute in posizione dalla capillarità.

Se la particella è irregolare, l'angolo di contatto non funziona: le particelle idrofile affonderanno a causa di una instabilità. La tensione superficiale è una proprietà che modella i cambiamenti rapidi su uno strato di piccole dimensioni: il concetto di angolo di contatto potrebbe perdere significato se la dimensione della particella fosse più piccola della dimensione dello strato.

Oltre all'azione verticale, la deformazione dovuta a piccole particelle intrappolate dà luogo a *forze capillari laterali* (vedi Figura 4):

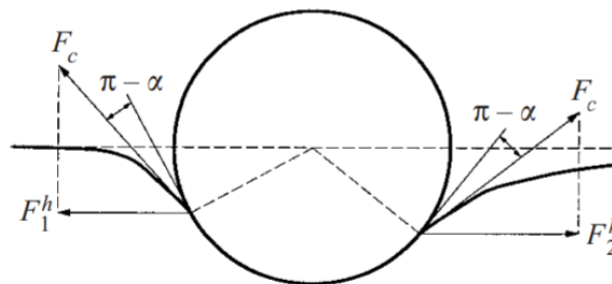


Figura 4. Componenti orizzontali contrapposte F_1^h e F_2^h della forza capillare in particelle idrofobe.

Per una particella più pesante del liquido, il menisco è sotto il livello indisturbato: le particelle si sbilanciano asimmetricamente rispetto al

menisco causando uno squilibrio della componente orizzontale delle forze capillari. Le particelle idrofile più leggere del liquido invece (Figura 5) saliranno nella sezione elevata del menisco e si uniranno:

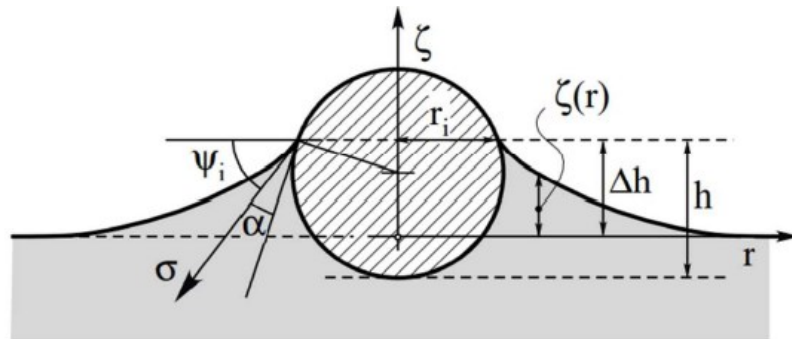


Figura 5. Particelle idrofile con densità minore dell'acqua.

Definiamo in questo caso l'altezza di immersione della sfera, come funzione dell'angolo di inclinazione del menisco ψ_i :

$$h = \frac{R}{2} [1 + \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \psi_i)}] = \frac{R}{2} [1 + \cos(\alpha + \psi_i)] \quad (1.6)$$

1.2 Raggruppamento di particelle

Per solidi che galleggiano su una superficie liquida, quando ho la presenza di più particelle esse tendono a raggrupparsi secondo un fenomeno definito **cluster**. Le particelle inizialmente distribuite in modo casuale che galleggiano su una superficie liquida tendono a raggrupparsi a causa delle forze capillari laterali attrattive tra le particelle: esse formano inizialmente piccoli gruppi, poi i piccoli cluster si fondono lentamente fino a creare un unico cluster (Figura 6).

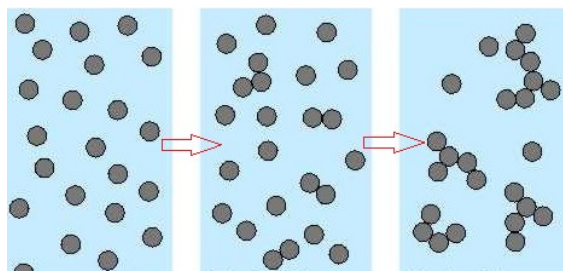


Figura 6. Formazione di cluster di particelle galleggianti.

Nello specifico, se consideriamo due particelle, notiamo che il menisco liquido si deforma in modo tale che l'energia potenziale gravitazionale diminuisce quando esse si avvicinano:

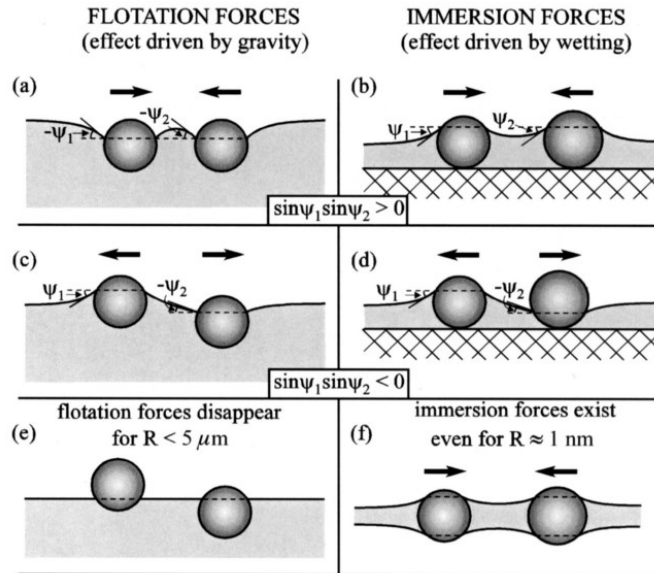


Figura 7. Forze capillari agenti tra due particelle.

Esse possono attrarsi o respingersi in base al segno che assumono i relativi angoli di contatto φ_1 e φ_2 (vedi Figura 7): si attraggono quando $\text{sen}\varphi_1 * \text{sen}\varphi_2 > 0$, mentre si respingono se $\text{sen}\varphi_1 * \text{sen}\varphi_2 < 0$. Se $\varphi = 0$ non ho interazione capillare.

La forza capillare laterale tra le particelle è calcolata come:

$$F = -2\pi\sigma Q_1 Q_2 q K_1(qL) [1 + O(q^2 R_k^2)] \quad \text{con } r_k \ll L \quad (1.7)$$

dove: σ = tensione interfacciale
 R_k = raggi delle particelle
 r_i = raggi linee di contatto
 Q_i = carica capillare della particella = $r_i \text{sen}\varphi_i$
 $\Delta\rho$ = differenza di densità tra i fluidi
 $q^2 = \frac{\Delta\rho g}{\sigma}$ o $q^2 = \frac{(\Delta\rho g - \Pi')}{\sigma}$ in base allo spessore del film
 $K_1(x)$ = funzione di Bessel al 1° ordine

Quando $qL \ll 1$, si ha: $F = \frac{-2\pi\sigma Q_1 Q_2}{L} \quad \text{con } r_k \ll L \ll q^{-1} \quad (1.8)$

Vale la pena notare che le forze di immersione e di galleggiamento mostrano la stessa dipendenza funzionale dalla distanza interparticellare. Pertanto, la forza di galleggiamento diminuisce mentre la forza di immersione aumenta quando la tensione interfacciale aumenta. Inoltre, la forza di galleggiamento diminuisce molto di più con la diminuzione di R rispetto alla forza di immersione. Le piccole particelle galleggianti sono troppo leggere per creare una deformazione sostanziale della superficie del liquido, e la forza capillare laterale è trascurabile.

Nel caso delle forze di immersione, le particelle sono limitate in direzione verticale dal substrato solido o dal film liquido; pertanto, man mano che il film diventa più sottile, la deformazione della superficie del liquido aumenta dando così luogo ad una forte attrazione interparticellare.

Quindi, come già detto, le forze di immersione possono essere uno dei fattori principali che causano il cluster di particelle.

1.3 Efficienza di cattura di particelle da parte di un collettore

Consideriamo la presenza di un collettore sulla traiettoria delle particelle, e vediamo come interagisce con le particelle, cercando di trovare una equazione empirica per la previsione dell'efficienza di cattura.

L'**efficienza di cattura** η è l'efficienza associata a un singolo cilindro, e sarà data da diversi tipi di processi meccanici:

- *interazione diretta* (η_R)
- *impatto inerziale* (η_I)
- *sedimentazione gravitazionale* (η_G)
- *deposizione diffusiva* (η_D).

L'efficienza totale di cattura η è data quindi da:

$$\eta = \eta_R + \eta_I + \eta_G + \eta_D \quad (1.9)$$

Per un cilindro emergente di diametro d_c , η è definito come:

$$\eta = \frac{b}{d_c} \quad (1.10)$$

dove b = larghezza del flusso delle particelle catturate

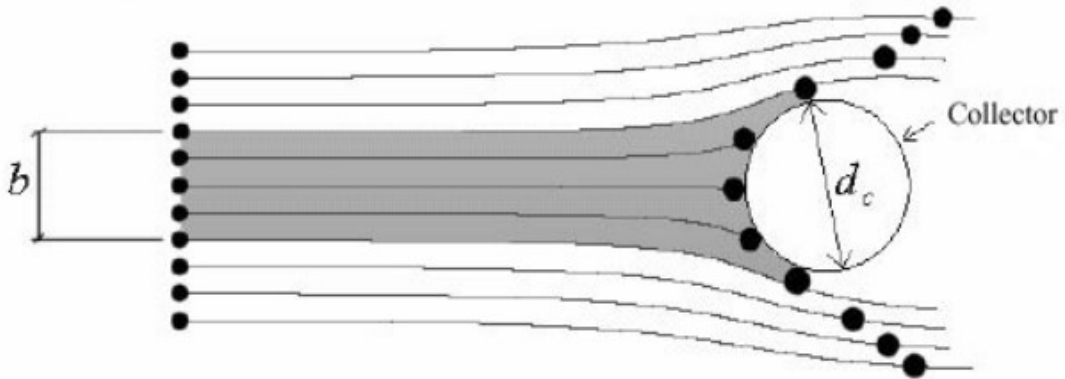


Figura 8. Efficienza di cattura di un collettore cilindrico.

L'efficienza η rappresenta la frazione di particelle rimosse dal volume di acqua che passa attraverso l'area proiettata del cilindro (Figura 8). Il flusso è definito da Reynolds: η è una funzione di Re_c , del peso specifico delle particelle s , del rapporto delle particelle R (diametro delle particelle d_p / diametro del cilindro d_c) e del numero di Stokes Stk .

a. *Interazione diretta* (η_R):

Se una particella che viaggia su una linea di flusso si avvicina a un collettore, entrerà in contatto con esso e sarà catturata con un'efficienza:

$$\eta_R = \frac{1}{(2 - \ln Re_c)} \left[(1 + R) \ln(1 + R) - \frac{R(2+R)}{2(1+R)} \right] \quad (1.11)$$

dove:

$$- \text{se } R < 0,01 \rightarrow \eta_R = \frac{R^2}{(2 - \ln Re_c)}$$

$$- \text{se } Re_c > 1000 \rightarrow \eta_R = 1 + R - \frac{1}{1 + R} \cong 2R$$

b. *Impatto inerziale* (η_I):

Si verifica quando l'inerzia di una particella la induce a deviare da una linea di flusso e a collidere con il collettore; con valore di $Stk=0,08$ vale:

$$\begin{cases} \eta_I = \frac{Stk^2}{(Stk+0,25)^2} & \text{per } Stk > 0,08 \\ \eta_I = 0 & \text{per } Stk < 0,08 \end{cases} \rightarrow \eta_I \cong 1 \text{ (} Stk \gg 0,25 \text{)} \quad (1.12)$$

c. *Sedimentazione gravitazionale* (η_G):

Si verifica quando le particelle si depositano fuori dalla colonna d'acqua su superfici orizzontali. Date w_s velocità di sedimentazione e u velocità del flusso, l'efficienza è:

$$\eta_G = \frac{w_s}{u} = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho)}{u 18\mu} \quad (1.13)$$

d. *Deposizione diffusiva* (η_D):

Deriva da qualsiasi processo casuale (ad es. turbolenza) che porta le particelle a depositarsi su un collettore:

$$\eta_D = \frac{1,17\pi D^{\frac{2}{3}}}{u d_c} \left[\frac{Re_c v}{2(2 - \ln Re_c)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (1.14)$$

$$\text{con: } D = \text{coeff. diffusione} = \frac{kT}{3\pi\mu d_p}$$

k = cost. di Boltzmann

T = T° assoluta

μ = viscosità del fluido

Nei sistemi reali:

$$1 \leq Re_c \leq 1000; 1 \text{ mm} \leq d_c \leq 2 \text{ cm}; 0,1 \leq u \leq 10 \text{ cm/s}; 20 \leq d_p \leq 2000 \text{ }\mu\text{m}.$$

Consideriamo un cilindro di lunghezza l_c , e sia P il numero di concentrazione di particelle nell'acqua. Allora il flusso F di particelle che si avvicinano al cilindro nella regione definita dall'area frontale del cilindro è:

$$F = Pud_c l_c \quad (1.15)$$

$$\text{con: } P = \text{conc. numerica} = \frac{C}{V_P \rho_P}; V_P = \text{volume particella}$$

Il tasso al quale le particelle sono catturate sul cilindro è:

$$\frac{dN_C}{dt} = \eta Pud_c l_c \quad (1.16)$$

$$\text{con: } N_C = n^\circ \text{ di particelle catturate nel tempo } t$$

Gli elementi di rugosità sulla superficie di un collettore possono influenzare la cattura *direttamente* fornendo una superficie aggiuntiva, o *indirettamente* alterando il campo di flusso locale.

$P(t)$ è stimato per il flusso di particelle sul letto del canale:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{-w_s}{h} P \quad (1.17)$$

$$\text{con: } w_s = \text{velocità di Stokes}; h = \text{altezza tirante}$$

Integrando, otteniamo la concentrazione di particelle nel tempo:

$$P(t) = P_0 e^{-kt} \quad (1.18)$$

Si stima quindi l'efficienza di cattura come:

$$\eta = \frac{N_C k}{P_0 u d_c l_c (1 - e^{-kt})} \quad (1.19)$$

$$\text{con } t = 0, t \text{ e } P_0 = n^\circ \text{ particelle con cilindro immerso}$$

L'equazione di cattura di un singolo collettore è riscritta come:

$$\frac{1}{V} \frac{dN_C}{dt} = \frac{\eta P u d_c l_c}{V} = \eta P u d_c l_c' \quad (1.20)$$

$$\text{con: } l_c' = \text{lunghezza collettore per unità di volume dell'acqua}$$

Impieghiamo un modello di sedimentazione in cui la turbolenza mantiene la concentrazione verticalmente uniforme.

Il tasso totale di cambiamento della concentrazione di particelle è quindi:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\eta P u d_c l'_c - \frac{w_s}{h} P \quad (1.21)$$

Se consideriamo $K_c = \eta u d_c l'_c$ e $k_s = \frac{w_s}{h}$, otteniamo che dopo l'integrazione la soluzione per la concentrazione nella colonna d'acqua è:

$$\frac{P}{P_0} = \exp(-(K_c + K_s)t) \quad (1.22)$$

Possiamo anche definire infine la lunghezza della zona umida utile per ridurre la concentrazione di particelle del 50%:

$$L_{50} = 0,693 \left(\frac{u}{K_c + K_s} \right) \quad (1.23)$$

dove: $K_c = 0$ per l'assestamento

La rimozione per cattura delle particelle è significativa per $u \geq 3 \text{ cm/s}$: al di sopra di questo, il tasso di rimozione dovuto alla cattura delle particelle è un ordine di grandezza superiore al tasso di rimozione della sedimentazione.

Per il tipo e la dimensione della rugosità, l'efficienza di cattura delle particelle aumenta con la rugosità.

Tuttavia, la cattura sulla faccia anteriore del cilindro avviene anche se il cilindro è liscio.

La resistenza aggiuntiva creata dagli elementi di rugosità crea un piccolo cambiamento nel diametro Δd (vedi Figura 9): se il diametro effettivo non è molto più grande del diametro reale d_c , la resistenza addizionale non altera molto il campo di flusso e le linee di flusso che passano tra gli elementi di rugosità migliorano la cattura; al contrario, se la resistenza aggiuntiva è abbastanza alta, le linee di flusso sono spinte oltre gli elementi di rugosità e le particelle non raggiungono gli elementi di rugosità, diminuendo l'efficienza complessiva di cattura del cilindro.

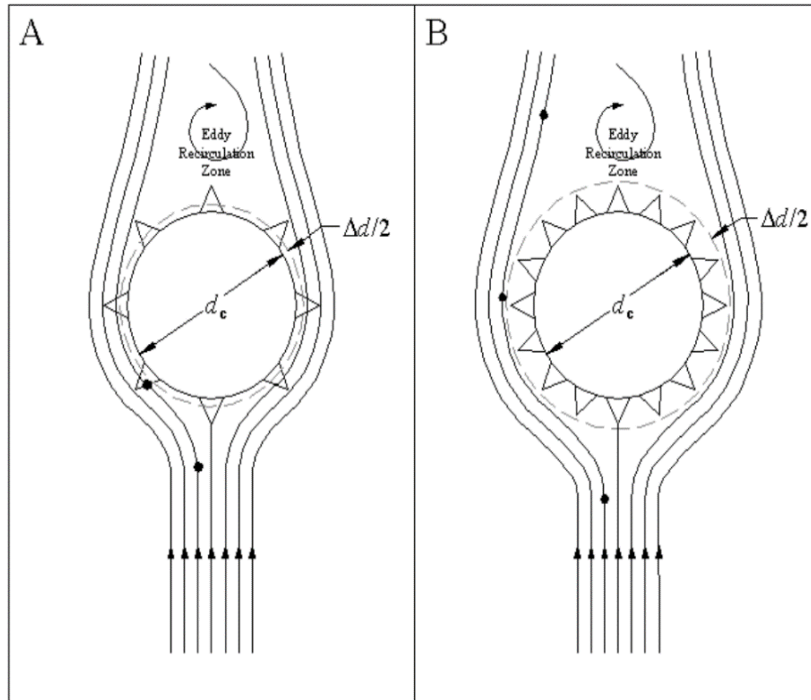


Figura 9. Influenza della rugosità sull'efficienza di cattura.

Quindi, livelli moderati di rugosità sul cilindro migliorano la cattura delle particelle, ma una rugosità eccessiva probabilmente può ridurre l'efficienza.

1.4 Probabilità di cattura e velocità di fuga

Ora che abbiamo definito l'efficienza di cattura da parte di un collettore, valutiamo le forze effettive che la influenzano (Figura 10).

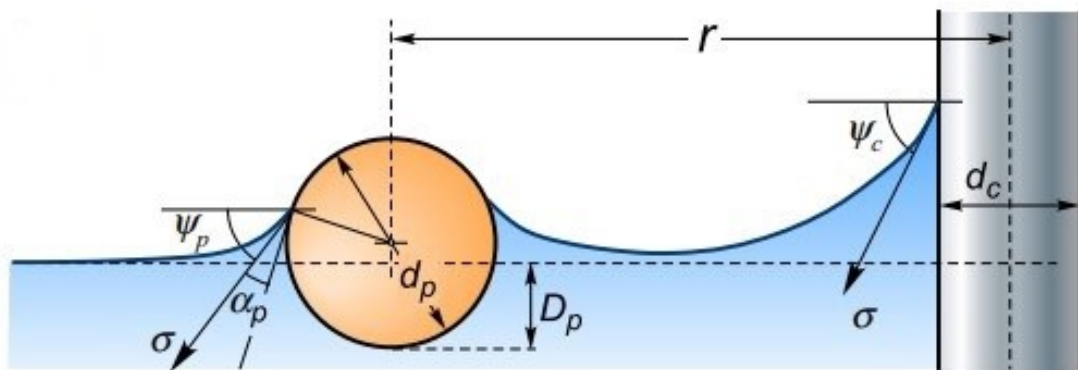


Figura 10. Interazione tra particella e collettore cilindrico.

L'interazione è prettamente governata da due forze:

1. Forza capillare

La forza di attrazione capillare F_c agisce sulla particella attraendola al cilindro: gli angoli ψ_p e ψ_c sono grandi per massimizzare l'effetto della tensione superficiale e la forza capillare è soggetta agli effetti dinamici della corrente. Sarà:

$$F_c = k_c \frac{\pi}{\lambda} d_p d_c \sigma \sin(\alpha_p + \psi_p) \sin(\psi_p) \sin(\psi_c) K_1 \left(\frac{d_p + d_c}{2\lambda} \right) \vec{r} \quad (1.24)$$

dove: $\sigma =$ tensione superficiale $(0.073 \frac{N}{m})$
 $\lambda =$ lunghezza capillare $(0,0027 m)$
 $\psi_p =$ angolo menisco particella
 $\psi_c =$ angolo menisco cilindro
 $\alpha_p =$ angolo contatto particella – acqua
 $L_0 = \frac{(d_p + d_c)}{2}$
 $k_c =$ fattore correttivo (quando $L \cong L_0$)
 $K_1 \left(\frac{L}{\lambda} \right) =$ funzione modificata di Bessel di ordine 1
 $\vec{r} =$ versore che collega centro particella e cilindro

2. Forza di drag

La forza di drag F_D è la risultante delle forze dovute alle turbolenze e ai vortici: se risulta prevalente rispetto alla F_c , la particella non viene catturata dal collettore e procede nel suo percorso. Vale:

$$F_d = C_d \rho A_p \frac{u^2}{2} = k_D \nu D_p U \quad (1.25)$$

dove: $C_d =$ coefficiente di drag o trascinamento
 $\rho =$ densità dell'acqua
 $A_p =$ area parte immersa particella $= k_a d_p D_p$
 con: $k_a \approx 0,8$ fattore di forma
 $D_p =$ profondità immersione particella
 $u =$ velocità relativa fluido (vel. fluido – vel. particella)
 $k_D =$ coefficiente riassuntivo costanti $\cong 10$
 $\nu =$ viscosità cinematica
 $U = -u\vec{r} =$ vel. random (> 0 : si allontana; 0 si avvicina)

Dopo aver caratterizzato le forze agenti tra particella e collettore, introduciamo un nuovo parametro che chiamiamo **velocità di fuga** U_e e definiamo il rapporto tra F_c e F_d , esprimendo la **probabilità di cattura** P_c come la probabilità che la particella rimanga attaccata permanentemente al collettore. Viene espressa in funzione della densità di probabilità $p(f)$ della variabile f come:

$$P_c = P(f < f_c) = \int_0^{f_c} p(f)df \quad (1.26)$$

dove: $U = \text{velocità flusso}$
 $U_e = \text{velocità di fuga}$
 $F_M = \text{forza di riferimento} = k_D \nu D_p k U$
 $F_c = \text{forza capillare} = k_D \nu D_p k U_e$
 $f_c = \frac{F_c}{F_M} = \frac{U_e}{U}$

Eguagliando la (1.24) e (1.25), è possibile definire la velocità di fuga come:

$$U_e = k_e \left(\frac{g \lambda^2}{\nu} \right) \frac{d_p d_c}{\lambda D_p} \sin(\alpha_p + \psi_p) \sin(\psi_p) \sin(\psi_c) K_1 \left(\frac{d_p + d_c}{2\lambda} \right) \quad (1.27)$$

dove: $k_e = \frac{\pi k_c}{2 k k_D}$
 $\lambda^2 = \frac{\sigma}{\rho g}$
 $\frac{\lambda^2 g}{\nu} = 71,5 \text{ m/s per l'acqua}$

In seguito a misurazioni sperimentali, la probabilità di cattura P_c è stata definita con una legge che decresce esponenzialmente:

$$P_c = \begin{cases} 1 & \text{per } U/U_e \leq 1 \\ e^{1-U/U_e} & \text{per } U/U_e > 1 \end{cases} \quad (1.28)$$

Se vogliamo generalizzare la distribuzione esponenziale, possiamo esprimere la probabilità di cattura P_c tramite la funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$:

$$P_c = P(f < f_c) = \int_0^{f_c} p(f)df = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{f_c} f^{\alpha-1} e^{-f/\beta} df \quad (1.29)$$

dove per $\Gamma(\alpha)$: $\text{Media} = \alpha\beta$; $\text{Varianza} = \alpha\beta^2$;
 $\text{Moda: si ricava da } p(f) = 0 \rightarrow f_{max} = \beta(\alpha - 1)$

Da cui si ricava infine:

$$p(f_{\max}) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha-1} (\alpha - 1)^{\alpha-1} e^{1-\alpha} = \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{1-\alpha} \quad (1.30)$$

Poiché il valore massimo della probabilità di cattura è stato fissato a 0.95, i parametri α e β risultano inevitabilmente legati e quindi determinando α si può ricavare β e viceversa.

Capitolo 2

CASO STUDIO IN ESAME

Si è deciso di studiare il legame tra la variazione di velocità in canaletta e la capacità di ritenzione delle particelle da parte di un collettore cilindrico.

2.1 Strumentazione utilizzata

La sperimentazione, per ricreare il corso d'acqua naturale, avviene all'interno di una canaletta in plexiglass di ridotte dimensioni lunga circa 3 m e larga 8 cm, alimentata a monte da una pompa centrifuga immersa in un serbatoio pieno d'acqua; a valle il livello è sostenuto da una paratoia a stramazzo di altezza regolabile. La portata scaricata è infine raccolta e inviata per gravità verso il serbatoio di monte chiudendo il circuito (Figura 11):



Figura 11. Canaletta utilizzata nel caso studio.

Per ricreare le particelle sono state utilizzate delle sferette in legno dal diametro $d_p = 6 \text{ mm}$, mentre per il collettore cilindrico sono stati usati dei bastoncini in legno con rispettivi diametri $d_c = 4, 5, 8 \text{ mm}$ (Figura 12).



Figura 12. Particelle e collettori usati nel caso studio.

2.2 Svolgimento delle prove

La prima parte dell'esperimento è avvenuto rilasciando a monte del collettore una particella di legno alla volta. L'esperimento è stato ripetuto per un numero consistente di volte registrando il numero di particelle catturate permanentemente dal collettore, al variare di:

- velocità della corrente ($3 \text{ cm/s} \leq v \leq 6,5 \text{ cm/s}$)
- diametro del collettore cilindrico ($0,4 \text{ cm} \leq d_c \leq 0,8 \text{ cm}$)

La velocità media è stata stimata dal rapporto tra la lunghezza di un certo tratto ΔL e il tempo impiegato per percorrerlo t .

A questo scopo sono state svolte una serie di 150 lanci ciascuna al crescere man mano della velocità di $0,5 \text{ cm/s}$, durante le quali è stato collocato il collettore cilindrico del diametro desiderato all'interno del canale in modo che fosse parzialmente emergente.

La particella è stata rilasciata poco a monte del cilindro in modo che fosse certa la probabilità di interazione con esso: se essa continuava il suo percorso aggirando il cilindro veniva considerata non catturata, se invece vi rimaneva attaccata era considerata catturata.

In questo modo è stato possibile calcolare la probabilità di cattura effettuando il rapporto tra i lanci catturati e quelli totali.

La seconda parte dell'esperimento invece è avvenuta svolgendo 3 serie di 60 lanci ciascuna, durante le quali è stato cronometrato il tempo t dal momento di cattura di una particella fino al suo rilascio avvenuto grazie ad un aumento costante della velocità (Figura 13). Si è partiti da una velocità $v = 3 \text{ cm/s}$, e circa ogni 60 secondi si è proceduto ad aumentare la velocità di un valore di $\Delta v = 0,5 \text{ cm/s}$ fino a quando ad un certo valore limite della velocità si è osservato il distacco della particella. In questo caso sono stati calcolati, per tutti i 60 lanci e per tutti i collettori, la velocità e il tempo di distacco delle particelle.



Figura 13. Particella e collettore durante i set di esperimenti.

Capitolo 3

MODELLO E RISULTATI SPERIMENTALI

3.1 Probabilità di cattura

Innanzitutto è stato fatto un confronto tra probabilità di cattura e velocità effettiva a cui sono state catturate le 150 particelle lanciate durante il primo set di esperimenti (Tabella 1):

Tabella 1. Set di misure su probabilità di cattura dei vari collettori:

| SET con cilindro da 4 mm | | | SET con cilindro da 5 mm | | | SET con cilindro da 8 mm | | |
|--------------------------|-----------|-------|--------------------------|-----------|-------|--------------------------|-----------|-------|
| v [cm/s] | catturate | Pc | v [cm/s] | catturate | Pc | v [cm/s] | catturate | Pc |
| 3 | 116 | 0,773 | 3 | 136 | 0,907 | 3 | 148 | 0,987 |
| 3,5 | 65 | 0,433 | 3,5 | 120 | 0,800 | 3,5 | 131 | 0,873 |
| 4 | 67 | 0,447 | 4 | 123 | 0,820 | 4 | 109 | 0,727 |
| 4,5 | 15 | 0,100 | 4,5 | 80 | 0,533 | 4,5 | 122 | 0,813 |
| 5 | 5 | 0,033 | 5 | 47 | 0,313 | 5 | 108 | 0,720 |
| - | - | - | 5,5 | 10 | 0,067 | 5,5 | 70 | 0,467 |
| - | - | - | 6 | 1 | 0,007 | 6 | 28 | 0,187 |
| - | - | - | - | - | - | 6,5 | 3 | 0,020 |

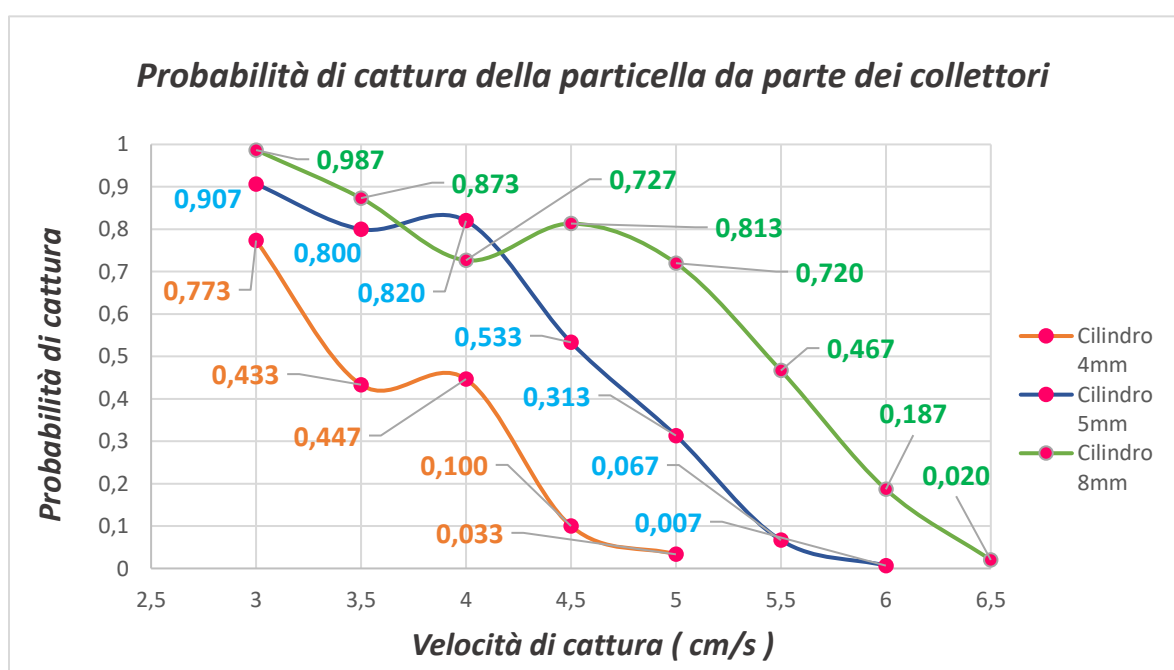


Figura 14. Confronto tra le probabilità di cattura stimate per i tre collettori

Notiamo che a parità di velocità all'aumentare del diametro del collettore, il valore della probabilità di cattura cresce (Figura 14), mentre man mano che la velocità aumenta, i valori decrescono esponenzialmente sino a zero: per $d_c = 4\text{ mm}$, la probabilità si avvicina allo zero con un valore $v \cong 5\text{ cm/s}$; per $d_c = 5\text{ mm}$, la probabilità si avvicina allo zero con un valore $v \cong 6\text{ cm/s}$; per $d_c = 4\text{ mm}$, la probabilità si avvicina allo zero con un valore $v \cong 6,5\text{ cm/s}$.

In seguito, è stata tabellata (Tabella 2) e graficata la probabilità di cattura P_c tramite la funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ e la velocità di fuga U_e : si è cercata la distribuzione di probabilità che meglio si adattasse ai punti sperimentali trovati, facendo variare i parametri U_e e α .

Tabella 2. Confronto tra U/U_e e probabilità di cattura dei vari collettori:

| $d_c=4\text{ mm}$ | | | | $d_c=5\text{ mm}$ | | | | $d_c=8\text{ mm}$ | | | |
|-------------------|--------------|----------|-------|-------------------|--------------|----------|-------|-------------------|--------------|----------|-------|
| U (cm/s) | U_e (cm/s) | U/ U_e | P_c | U (cm/s) | U_e (cm/s) | U/ U_e | P_c | U (cm/s) | U_e (cm/s) | U/ U_e | P_c |
| 3,0 | 2,75 | 0,72 | 0,77 | 3,0 | 3,6 | 0,83 | 0,91 | 3,0 | 4,15 | 0,72 | 0,99 |
| 3,5 | 2,75 | 0,84 | 0,43 | 3,5 | 3,6 | 0,97 | 0,80 | 3,5 | 4,15 | 0,84 | 0,87 |
| 4,0 | 2,75 | 0,96 | 0,45 | 4,0 | 3,6 | 1,11 | 0,82 | 4,0 | 4,15 | 0,96 | 0,73 |
| 4,5 | 2,75 | 1,08 | 0,10 | 4,5 | 3,6 | 1,25 | 0,53 | 4,5 | 4,15 | 1,08 | 0,81 |
| 5,0 | 2,75 | 1,20 | 0,03 | 5,0 | 3,6 | 1,39 | 0,31 | 5,0 | 4,15 | 1,20 | 0,72 |
| - | - | - | - | 5,5 | 3,6 | 1,53 | 0,07 | 5,5 | 4,15 | 1,33 | 0,47 |
| - | - | - | - | 6,0 | 3,6 | 1,67 | 0,01 | 6,0 | 4,15 | 1,45 | 0,19 |
| - | - | - | - | - | - | - | - | 6,5 | 4,15 | 1,57 | 0,02 |

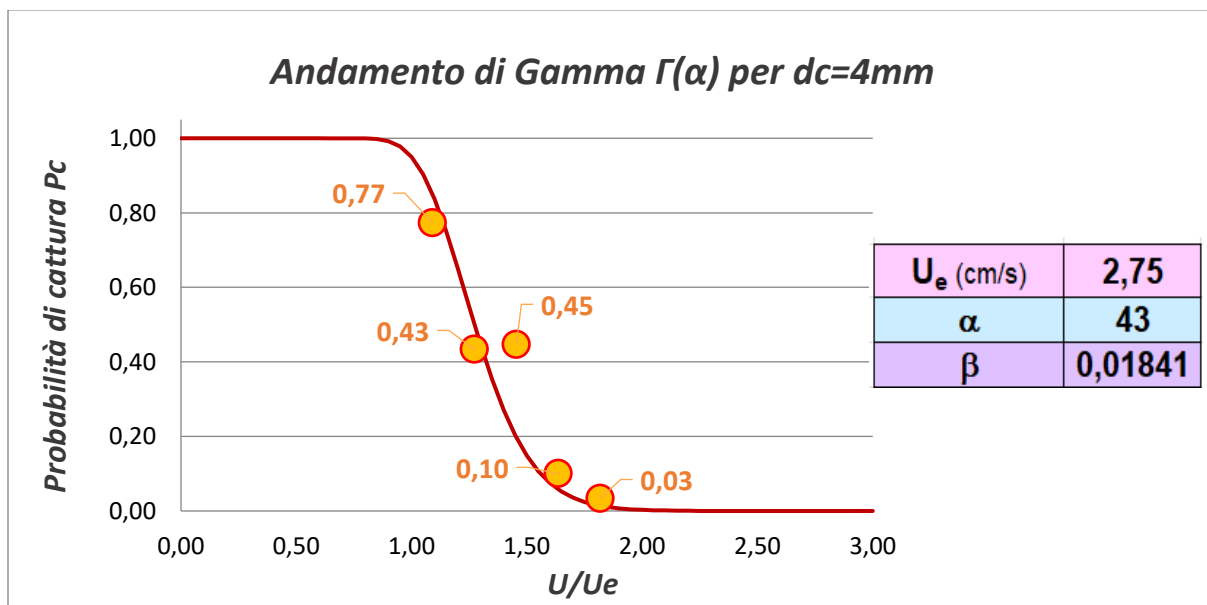


Figura 15. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $d_c=4\text{ mm}$

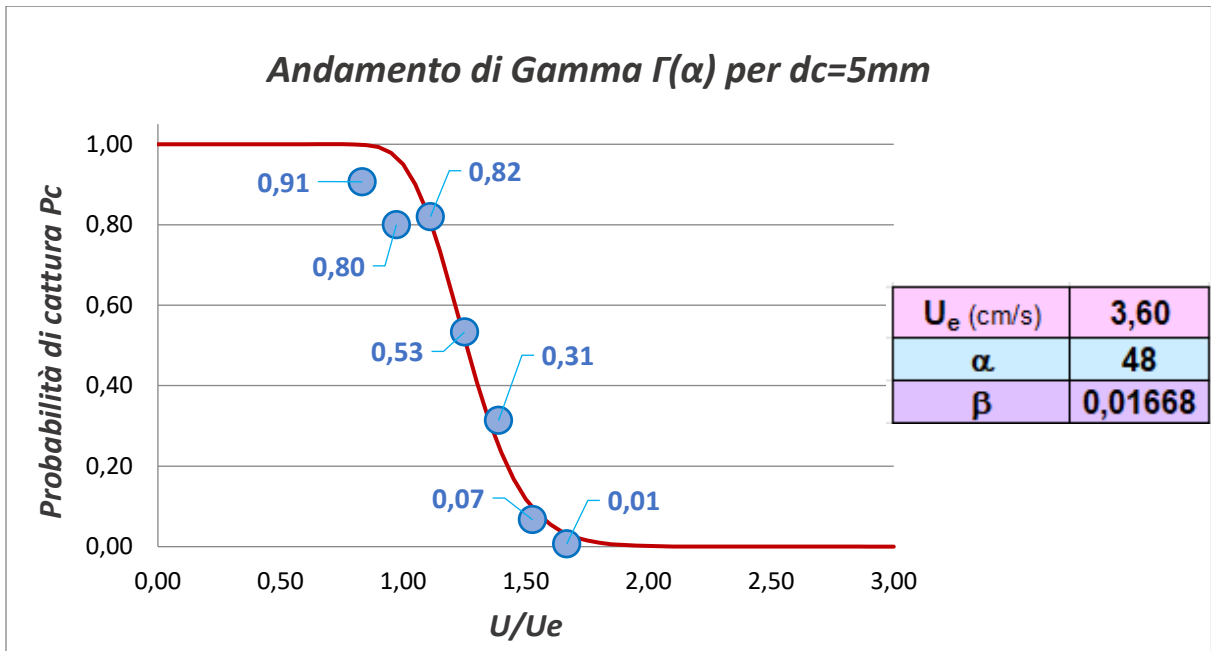


Figura 16. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $dc=5mm$

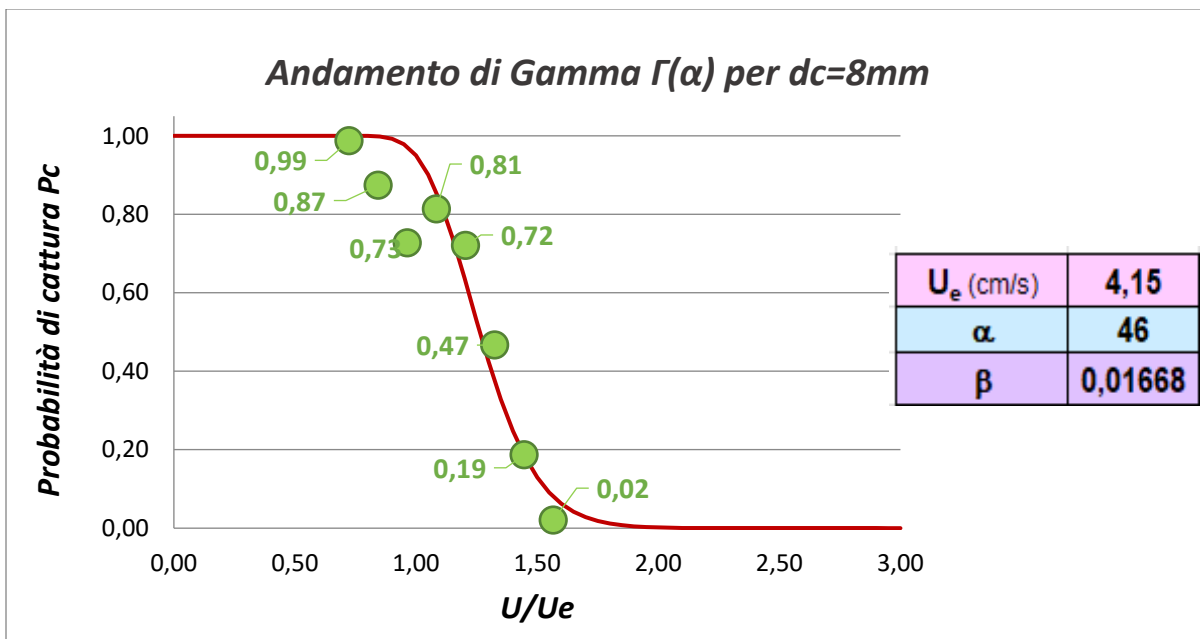


Figura 17. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $dc=8mm$

Per minimizzare gli scarti si è modificato in particolare il parametro α che, come si può notare in Figura 15, Figura 16 e Figura 17, determina la pendenza della curva: α , introdotto con la funzione Gamma, esprime la velocità con la quale decresce la probabilità di cattura P_c . Alcuni punti della P_c si discostano anche in maniera significativa dalla curva: questo può dipendere da una non perfetta risalita del menisco lungo il cilindro

ancora non perfettamente bagnato. In ogni caso nel complesso i dati si adattano alla curva in maniera accettabile.

Per ogni collettore si nota che la velocità di fuga U_e aumenta all'aumentare del diametro del cilindro d_c ; inoltre, un valore elevato di α , corrisponde ad una riduzione molto marcata della probabilità di cattura P_c all'aumentare della velocità U .

3.2 Velocità e tempi di distacco

Successivamente sono stati riassunti in Tabella 3 e Tabella 4 le misurazioni effettuate nella seconda parte delle sperimentazioni, in cui sono state misurate velocità e tempi di distacco, e i relativi valori medi:

Tabella 3. Set di misure su velocità e tempi di distacco:

| PROVE | COLLETTORE da 4mm | | COLLETTORE da 5mm | | COLLETTORE da 8mm | |
|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|-------------------|-------|
| | Vd [cm/s] | T [s] | Vd [cm/s] | T [s] | Vd [cm/s] | T [s] |
| 1 | 6,12 | 39,78 | 7,22 | 2 | 8,59 | 19,25 |
| 2 | 6,87 | 4,53 | 7,78 | 26,5 | 7,73 | 51,28 |
| 3 | 6,65 | 19,72 | 7,93 | 8,28 | 8,42 | 28,53 |
| 4 | 6,83 | 9,31 | 7,76 | 22,84 | 9,22 | 21,18 |
| 5 | 7,83 | 41,97 | 6,34 | 17,13 | 9,14 | 3,04 |
| 6 | 6,64 | 11,25 | 7,81 | 19,22 | 8,13 | 9,78 |
| 7 | 6,79 | 3,9 | 6,75 | 30,12 | 8,42 | 32,72 |
| 8 | 6,81 | 58,53 | 7,56 | 1,22 | 8,96 | 33,84 |
| 9 | 6,2 | 58,91 | 7,73 | 45,38 | 9,28 | 38,69 |
| 10 | 7,14 | 68,12 | 7,58 | 3,81 | 9,55 | 2,22 |
| 11 | 6,83 | 15,47 | 7,64 | 5,75 | 8,66 | 12,69 |
| 12 | 7,44 | 24,65 | 7,77 | 49,88 | 8,78 | 60 |
| 13 | 7,28 | 3,37 | 6,51 | 57,58 | 8,56 | 14,06 |
| 14 | 5,76 | 10 | 6,77 | 51,57 | 8,69 | 3,31 |
| 15 | 6,32 | 43,22 | 8,59 | 15,56 | 8,7 | 6,56 |
| 16 | 6,68 | 18,28 | 6,43 | 22,43 | 8,17 | 19,84 |
| 17 | 7,18 | 13 | 6,83 | 59,4 | 9,09 | 14,88 |
| 18 | 6,91 | 38,13 | 6,65 | 27,94 | 8,87 | 47,06 |
| 19 | 7,18 | 25,62 | 8,25 | 17,28 | 8,97 | 47,87 |
| 20 | 7,8 | 40,66 | 7,26 | 53,34 | 9 | 18,37 |
| 21 | 8,03 | 21,03 | 7,65 | 24,78 | 8,91 | 12,63 |
| 22 | 7,25 | 6,82 | 7,43 | 38,75 | 8,14 | 12,81 |

| | | | | | | |
|----|------|-------|------|-------|------|-------|
| 23 | 7,6 | 12,19 | 8,77 | 11,12 | 8,21 | 8,12 |
| 24 | 7,74 | 62,34 | 8,09 | 40,12 | 8,47 | 4,81 |
| 25 | 7,39 | 15,6 | 7,88 | 1,53 | 7,48 | 25,59 |
| 26 | 7,87 | 7,2 | 7,07 | 30,1 | 7,49 | 29,72 |
| 27 | 7,03 | 58,59 | 7,26 | 54,19 | 7,9 | 35,6 |
| 28 | 6,72 | 16,05 | 7,92 | 27,16 | 7,57 | 16,47 |
| 29 | 7,88 | 10,75 | 8,1 | 63,53 | 7,87 | 34,93 |
| 30 | 7,2 | 37,44 | 7,52 | 19,62 | 8,07 | 2,59 |
| 31 | 7,2 | 7,78 | 7,44 | 25,59 | 9,53 | 7,13 |
| 32 | 6,5 | 38,87 | 8,32 | 24,35 | 7,18 | 24,63 |
| 33 | 6,96 | 16,38 | 7,21 | 23,19 | 7,82 | 29,79 |
| 34 | 6,64 | 32,88 | 7,73 | 50,16 | 7,33 | 18,91 |
| 35 | 6,75 | 12,47 | 8,28 | 20,47 | 8,15 | 71,12 |
| 36 | 7,65 | 4,94 | 7,57 | 47,97 | 7,8 | 59,75 |
| 37 | 6,45 | 21,19 | 7,7 | 32,06 | 7,56 | 15,19 |
| 38 | 7,48 | 3,59 | 7,4 | 23,12 | 7,61 | 22,47 |
| 39 | 6,74 | 12,88 | 8,05 | 17,62 | 7,26 | 37,87 |
| 40 | 7,12 | 15,72 | 7,6 | 27,07 | 8,67 | 13,79 |
| 41 | 7,62 | 23,83 | 7,77 | 9,19 | 8,13 | 16,59 |
| 42 | 7,17 | 39,5 | 7,76 | 12,07 | 7,95 | 44,3 |
| 43 | 7,43 | 29,82 | 7,09 | 6,63 | 7,55 | 4,07 |
| 44 | 6,67 | 31,75 | 7,01 | 18,34 | 7,9 | 36,81 |
| 45 | 7,23 | 23,91 | 7,92 | 40,88 | 8,29 | 42,53 |
| 46 | 7,97 | 2,1 | 7,49 | 10,59 | 6,99 | 51,63 |
| 47 | 7,02 | 11,72 | 5,71 | 42,07 | 7,34 | 28,81 |
| 48 | 7,36 | 28 | 8,84 | 44,66 | 8,5 | 23,15 |
| 49 | 6,38 | 44,69 | 8,94 | 28,56 | 8,38 | 31,6 |
| 50 | 7,58 | 8,68 | 8,62 | 2,62 | 8,5 | 24,38 |
| 51 | 8,01 | 57,84 | 8,59 | 25,37 | 8,48 | 17,43 |
| 52 | 7 | 6,06 | 7,57 | 36,94 | 8,48 | 45,13 |
| 53 | 6,69 | 50,06 | 8,18 | 33,91 | 8,23 | 10,47 |
| 54 | 7,4 | 11,94 | 8,21 | 22,63 | 7,83 | 42,53 |
| 55 | 6,74 | 50,54 | 8,43 | 37,56 | 8,72 | 21,9 |
| 56 | 7,4 | 4,66 | 8,89 | 3,44 | 8,3 | 50,93 |
| 57 | 7,13 | 4,5 | 8,74 | 17,94 | 8,57 | 3,45 |
| 58 | 6,36 | 3,68 | 8,28 | 29,78 | 8,03 | 16,73 |
| 59 | 7,27 | 1,1 | 7,58 | 5,37 | 7,96 | 53,52 |
| 60 | 6,82 | 3,12 | 7,44 | 37,57 | 8,21 | 37,16 |

Tabella 4. Valori medi e deviazione standard di velocità e tempi di distacco:

| DIAMETRO [mm] | Vmedia [cm/s] | Tmedio [s] | Dev.Std. Vmedia | Dev.Std. Tmedio |
|---------------|---------------|------------|-----------------|-----------------|
| 4 | 7,079 | 23,344 | 0,507 | 18,487 |
| 5 | 7,687 | 26,764 | 0,676 | 16,395 |
| 8 | 8,272 | 26,204 | 0,597 | 16,914 |

In primis, si è voluta confrontare la velocità di distacco per i vari collettori rispetto al valore medio di velocità e allo scarto quadratico medio.

Notiamo (Figura 18) che normalizzando la velocità di distacco con il suo valore medio V_d/V_{dmedia} le tre distribuzioni mostrano un andamento piuttosto simile. In tutti i casi la v ha una probabilità molto bassa di essere minore di $0.7 \div 0.8$; ha una probabilità del 50% di essere 1 e ha probabilità sempre maggiore di essere minore di un valore limite pari a 1.2 (probabilità di non superamento):

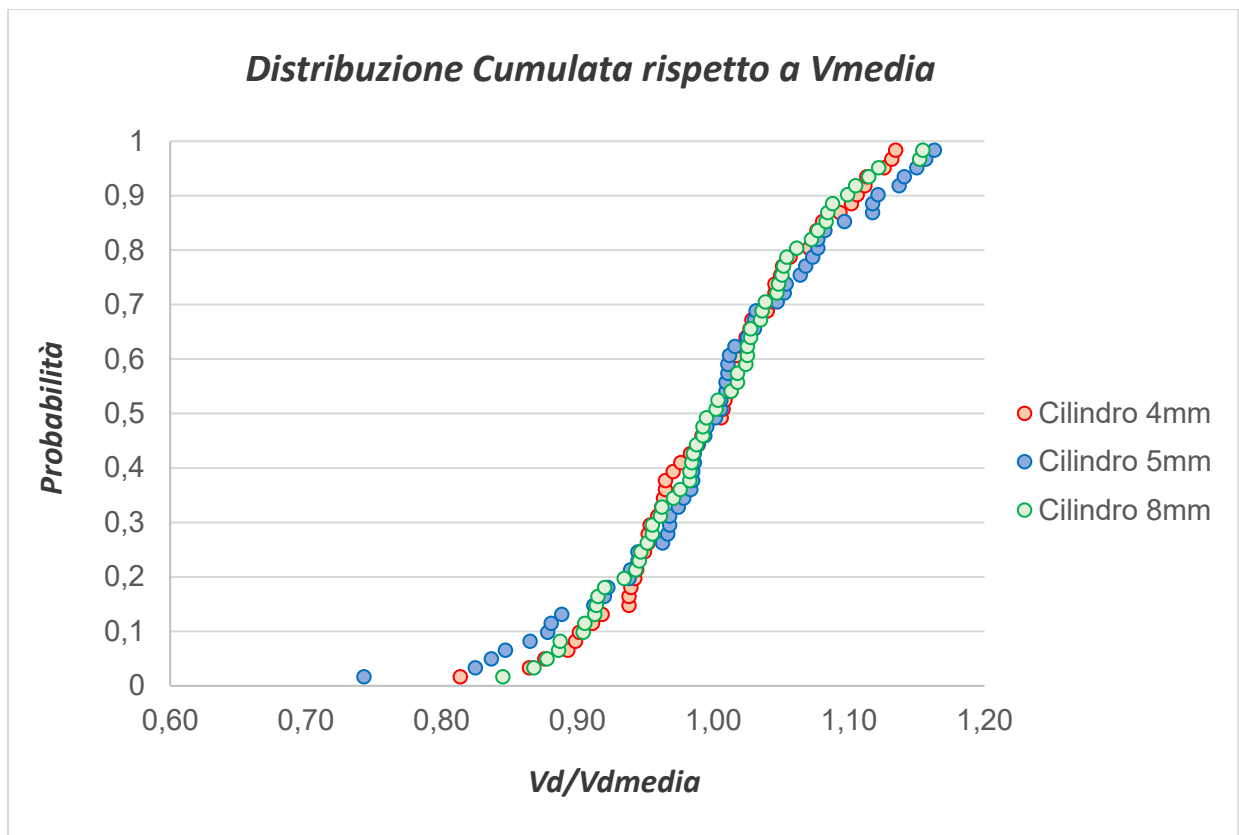


Figura 18. Distribuzione di probabilità rispetto alla V_{media}

Una volta effettuata la calibrazione della curva di probabilità con la prima parte degli esperimenti, è stata anche evidenziata nella curva la posizione del punto in cui ho il distacco per tutti i collettori (Figura 19) (Figura 20) (Figura 21):

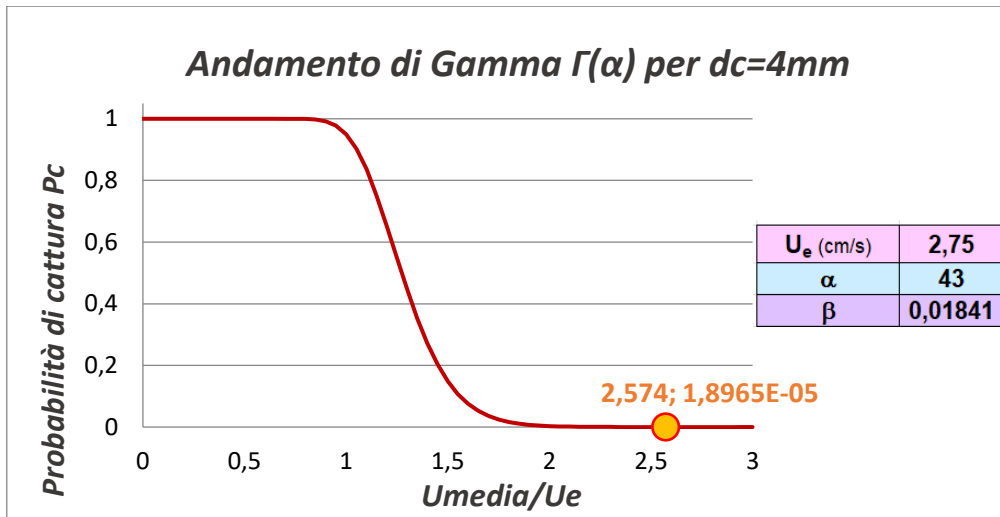


Figura 19. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $dc=4mm$ e relativo punto di distacco

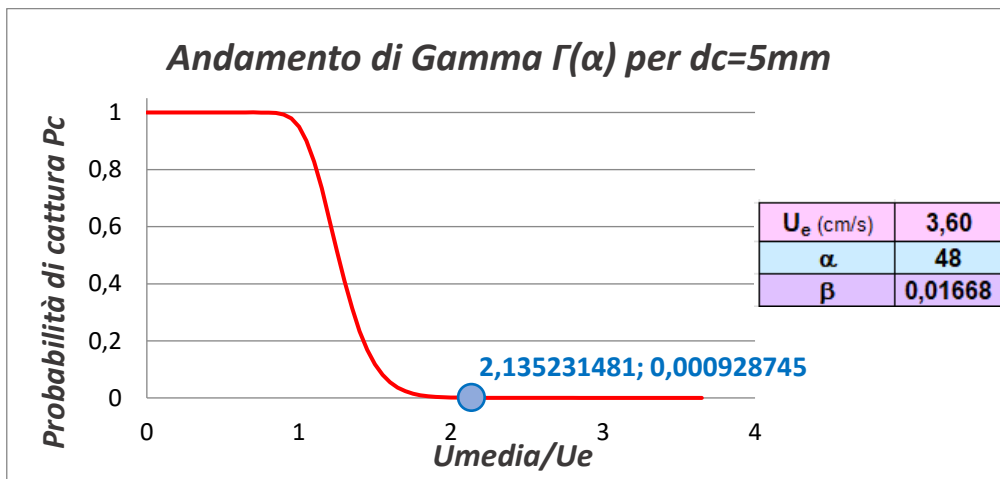


Figura 20. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $dc=5mm$ e relativo punto di distacco

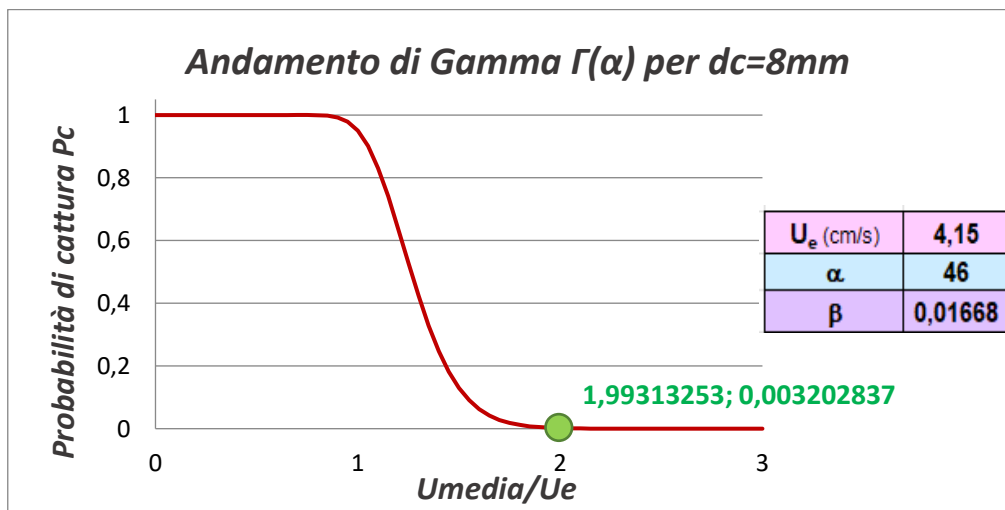


Figura 21. Funzione Gamma $\Gamma(\alpha)$ per $dc=8mm$ e relativo punto di distacco

Per verificare la presenza di potenziali bias nei dati raccolti, come ad esempio una progressiva riduzione della forza capillare a causa dell'imbibizione delle particelle, sono state confrontate le velocità di distacco e i tempi di distacco rispetto al numero di lanci effettuati (Figura 22), (Figura 23), (Figura 24), (Figura 25), evidenziando una sostanziale indipendenza del dato dal fattore temporale.

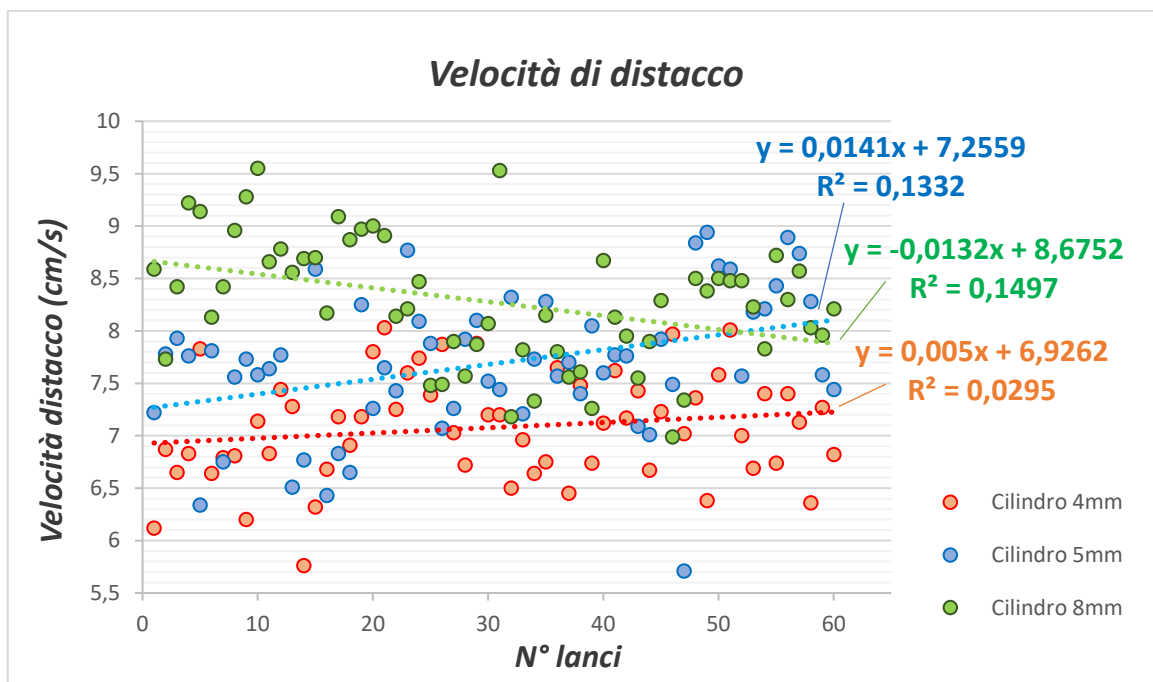


Figura 22. Confronto tra velocità di distacco e numero di lanci

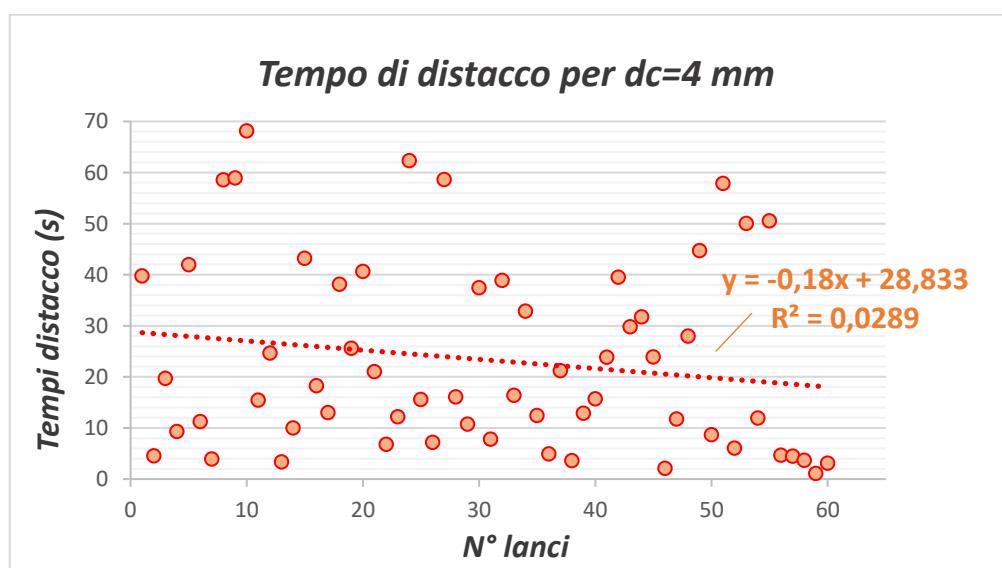


Figura 23. Confronto tra tempi di distacco e numero di lanci per $dc=4\text{mm}$

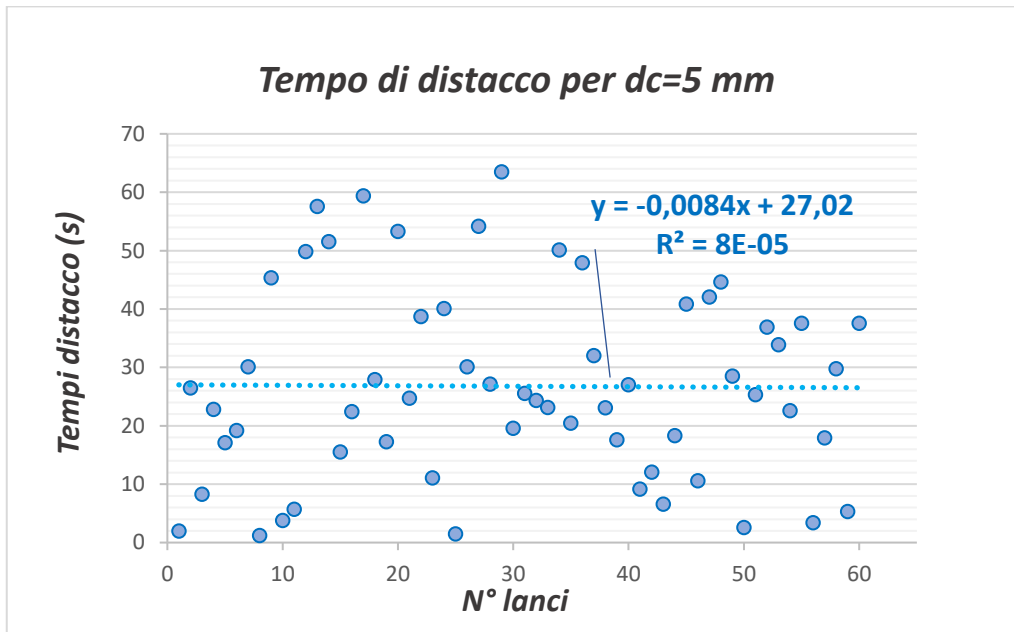


Figura 24. Confronto tra tempi di distacco e numero di lanci per $dc=5$ mm

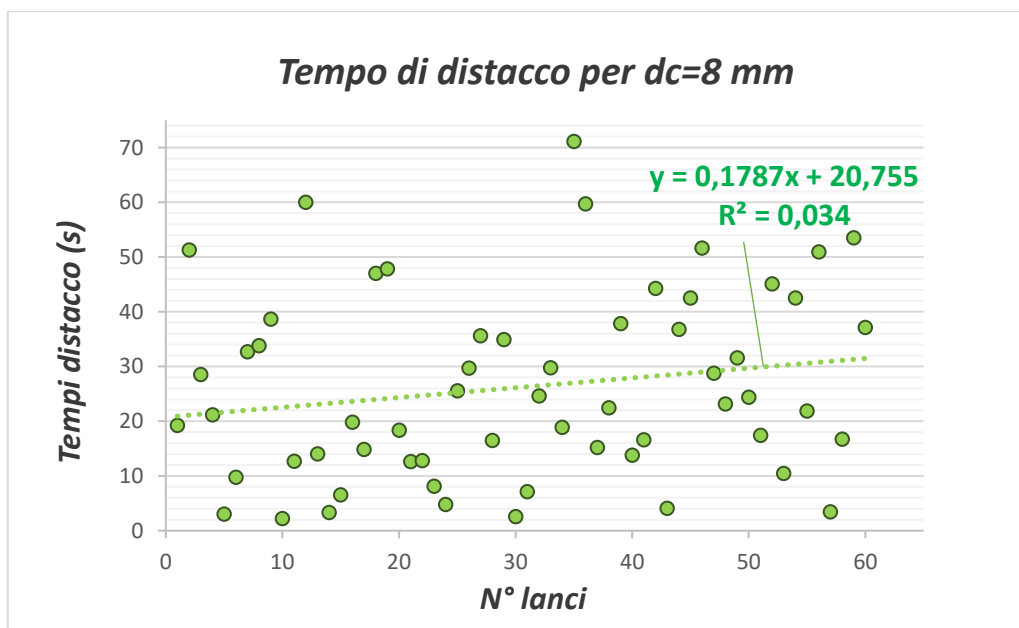


Figura 25. Confronto tra tempi di distacco e numero di lanci per $dc=8$ mm

In tutti i casi analizzati il relativo coefficiente di correlazione di Pearson R^2 è infatti molto piccolo.

Si è anche confrontata la velocità rispetto al tempo di distacco:

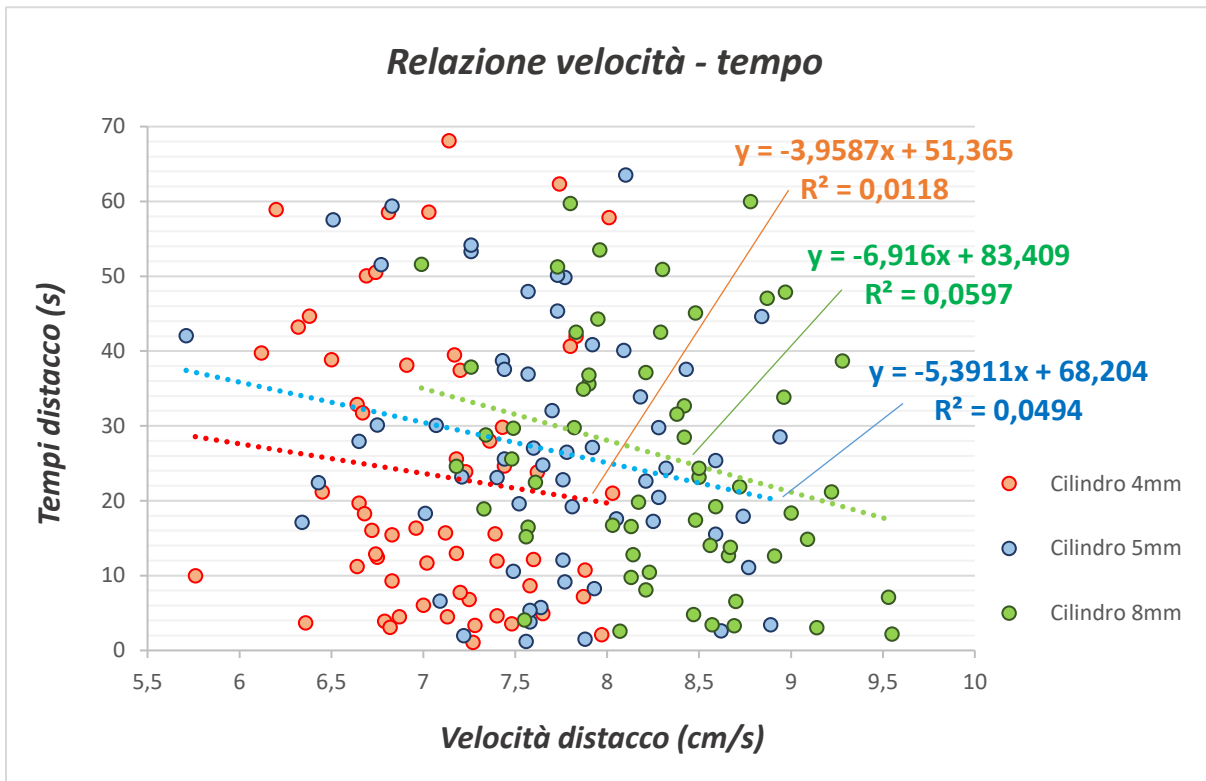


Figura 26. Confronto tra velocità e tempo

Anche in questo caso (Figura 26), il coefficiente di correlazione R^2 è prossimo allo zero per tutti i collettori, quindi non troviamo correlazione statistica.

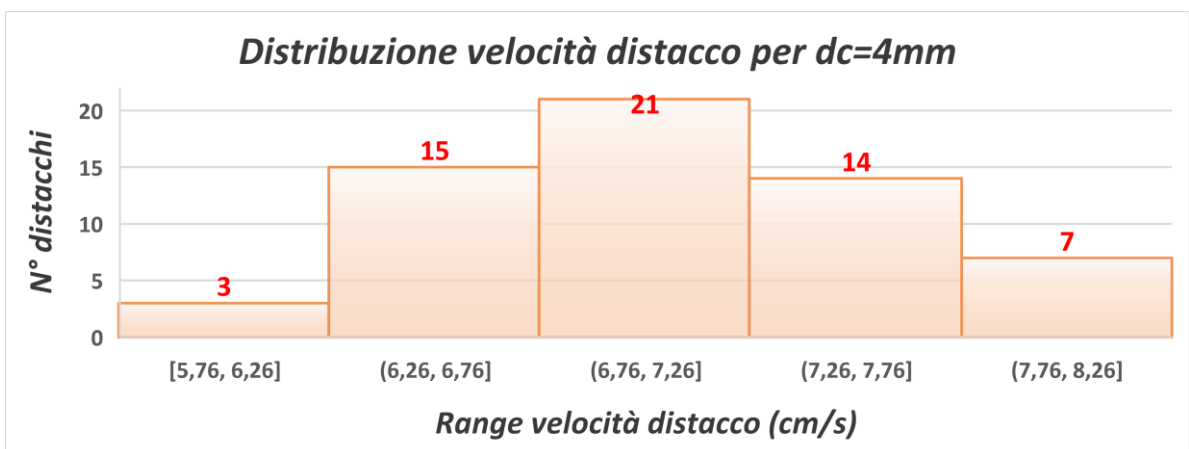


Figura 27. Distribuzione velocità distacco $d_c = 4mm$

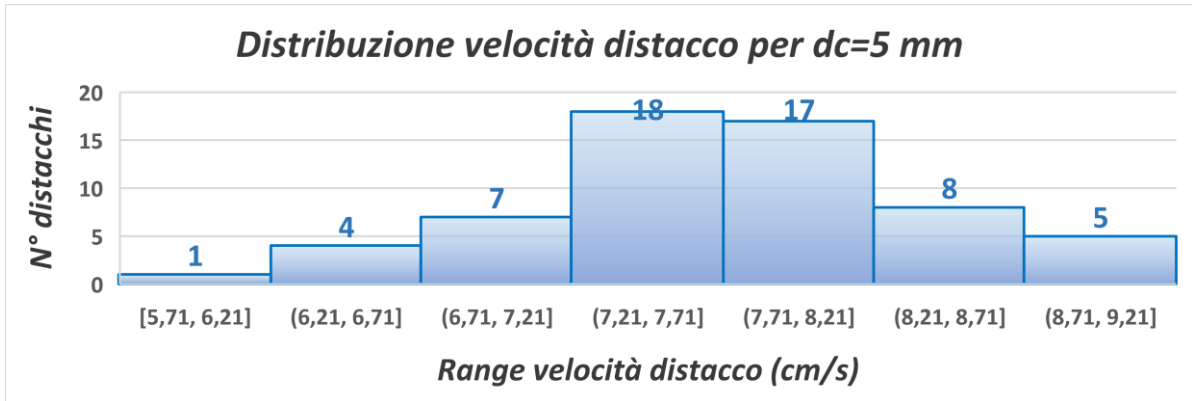


Figura 28. Distribuzione velocità distacco $d_c = 5$ mm

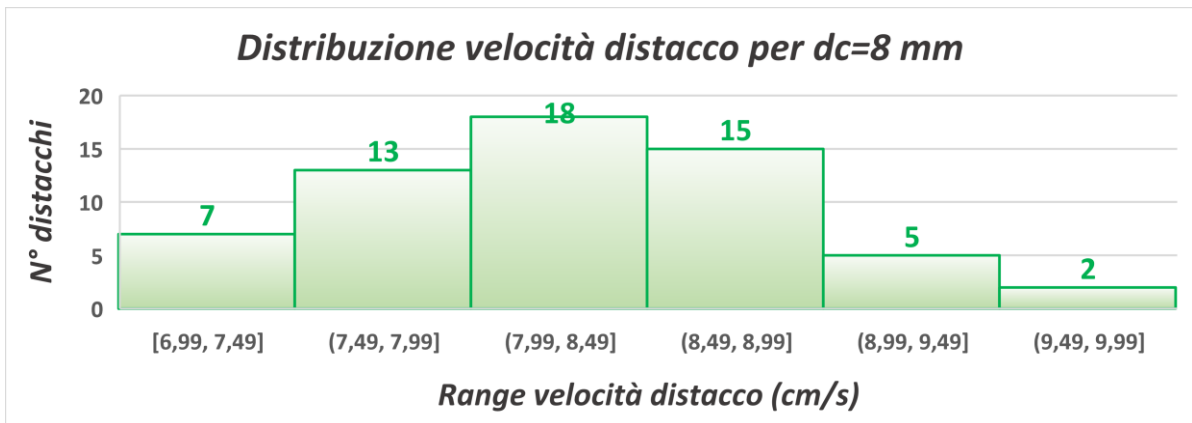


Figura 29. Distribuzione velocità distacco $d_c = 8$ mm

Dalle Figura 27, Figura 28, Figura 29 si nota che la distribuzione delle velocità è di tipo Gaussiano e rispettano quindi le caratteristiche della distribuzione normale e la casualità dei dati.

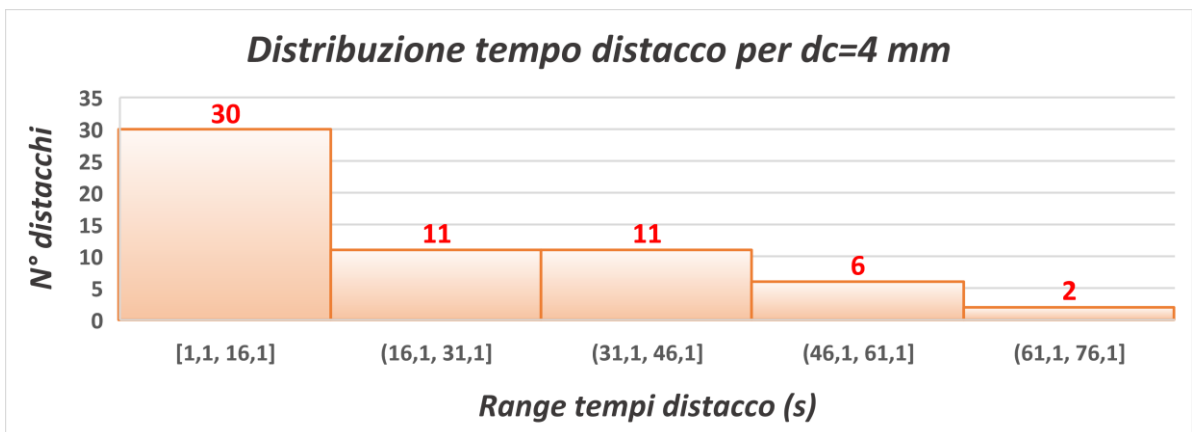


Figura 30. Distribuzione tempo distacco $d_c = 4$ mm

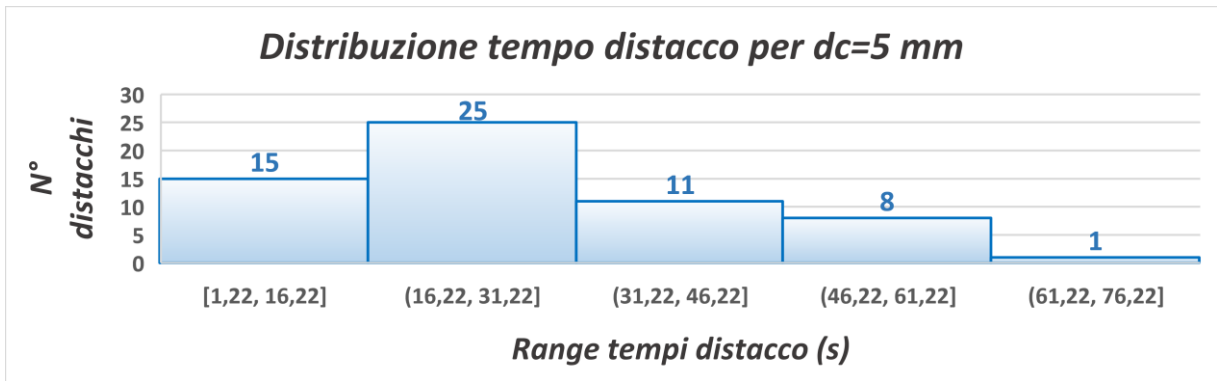


Figura 31. Distribuzione tempo distacco $dc = 5$ mm

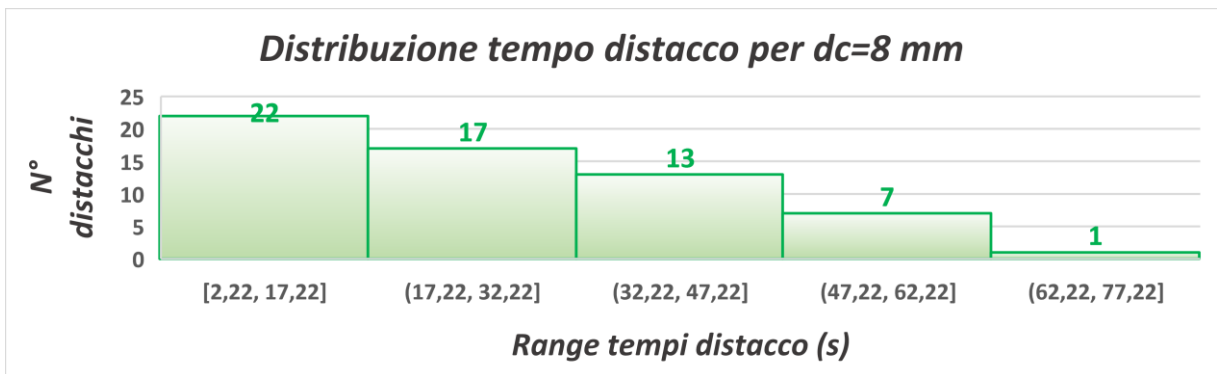


Figura 32. Distribuzione tempo distacco $dc = 8$ mm

Si nota invece in Figura 30, Figura 31 e Figura 32 che la distribuzione dei tempi ha un'andamento sostanzialmente esponenziale. Infine, confrontando velocità media e tempo medio rispetto al collettore:

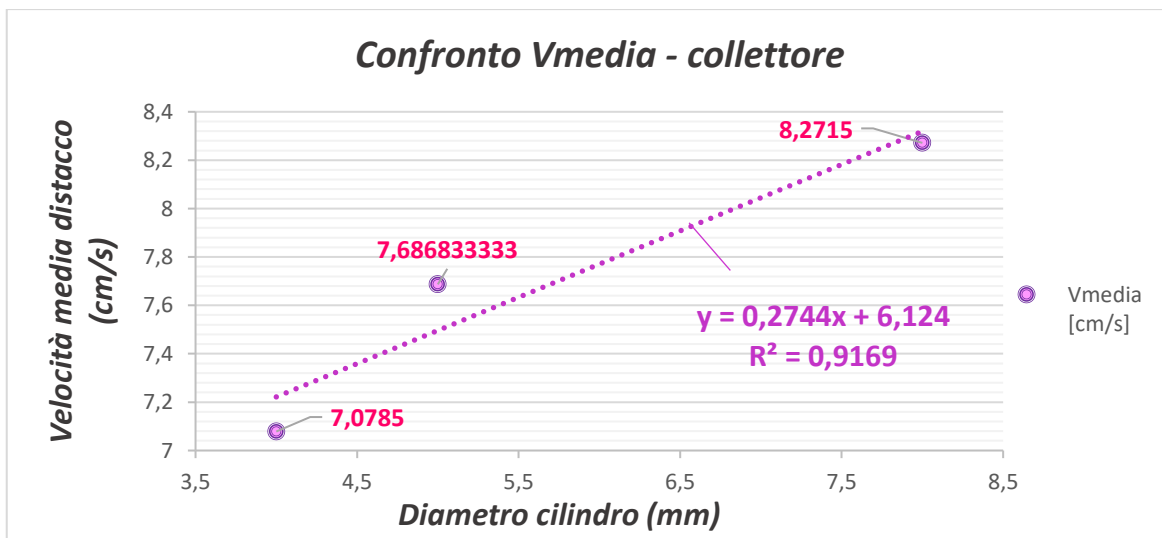


Figura 33. Confronto tra velocità media e dc

Il coefficiente di correlazione R^2 è prossimo a 1 (Figura 33), quindi esiste una correlazione tra le velocità medie di distacco misurate coi vari collettori, ed è di tipo lineare.

Per il confronto dei tempi invece il coefficiente di correlazione R^2 è piccolo, quindi di nuovo la correlazione tra i dati è molto debole: con le misurazioni effettuate, non è possibile trovare una forte correlazione.

Conclusioni

Riassumendo, sono stati presentati i principali meccanismi di cattura delle particelle galleggianti da parte della vegetazione in un corso d'acqua, soffermandosi sull'effetto Cheerios in quanto principale meccanismo di cattura e quindi si sono illustrati i fenomeni della tensione superficiale, la forza di drag e la forza capillare.

Si è definita la probabilità di cattura che è stata poi espressa tramite formulazione del modello matematico basato sulla distribuzione di probabilità Gamma; essa è definita in funzione di due sole variabili: la velocità di fuga U_e e il parametro caratteristico α .

Successivamente sono stati illustrati apparato sperimentale e procedura delle prove svolte in laboratorio necessarie alla calibrazione del modello matematico; in particolare le prove sono state effettuate variando la velocità di flusso e il diametro del collettore cilindrico.

È stato calibrato poi il modello funzione della distribuzione Gamma cercando di farlo adattare nel miglior modo possibile ai dati raccolti: i risultati visibili sono tali da confermare la validità del modello proposto.

Possiamo concludere evidenziando che:

- la velocità di distacco è legata alla P_c e tende a crescere all'aumentare del diametro dei collettori; il tempo di distacco sembra non essere correlato in alcun modo: non abbiamo nessun tipo di correlazione statistica tra velocità di distacco e tempo di distacco;
- esiste una correlazione tra le velocità medie di distacco misurate coi vari collettori ed è una correlazione di tipo lineare, mentre non vale altrettanto per i tempi;
- all'aumentare del diametro del collettore d_c aumenta la velocità di fuga U_e , mentre decresce sempre più velocemente la probabilità di cattura P_c , rappresentata dall'incremento del valore di α .

Bibliografia

- Peruzzo P., Defina A. and Nepf H. (2012) - *“Capillary trapping of buoyant particles within regions of emergent vegetation.”* - Water Resources Research, vol. 48
- Peruzzo P., Defina A. and Daniele Pietro Viero (2016) - *“A semi-empirical model to predict the probability of capture of buoyant particles by a cylindrical collector through capillarity.”* - Water Resources Research, vol. 97
- Peruzzo P., Defina A., Nepf H. and Stocker R. (2013) - *“Capillary interception of floating particles by surface-piercing vegetation.”* - Physical Review Letters, 111;
- Palmer, M.R., H.M. Nepf e Peterson (2003) – *“Observations of particle capture on a cylindrical collector “*
- Peter A. Kralchevsky, Nikolai D. Denkov (2001) – *“Capillary forces and structuring in layers of colloid particles”*
- Peter A. Kralchevsky & K. Nagayama (2000) – *“Capillary interactions between particles bound to interfaces, liquid films and biomembranes”* - Adv. Colloid Interf. Sci. 85, 145-192.
- Joseph, D.D, J.Wang, R.Bai, B.H.Yang e H.H.Hu (2003) – *“Particle motion in a liquid film rimming the inside of a partially filled rotating cilinder”* - Journal of Fluid Mechanics, vol. 496, pp. 139–163.

