UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM.FF.NN.

Laurea in Matematica
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

TESI DI LAUREA

ALCUNE OPERAZIONI SULL'IND-FASCIO DELLE DISTRIBUZIONI TEMPERATE

Relatore: Prof. Andrea D'Agnolo
Correlatore: Prof. Giuseppe Zampieri

Laureando: Luca Prelli

ANNO ACCADEMICO 2000-2001

Indice

Introduzione

Ci sono oggetti nell'analisi, come le distribuzioni temperate, che non sono di natura locale e che non si adattano quindi alla teoria dei fasci.

Per questo in [8] viene introdotta la nozione di ind-fascio. Dato uno spazio topologico localmente compatto X e un anello commutativo k, si costruisce la categoria degli ind-k_X-moduli, i cui oggetti soni gli ind-oggetti di $\mathrm{Mod}^c(k_X)$. È una categoria molto più grande in cui si immerge $\mathrm{Mod}(k_X)$, e che permette di studiare oggetti che fasci non sono, come le distribuzioni temperate. Inoltre, si possono tradurre nel linguaggio degli ind-fasci le sei operazioni di Grothendieck, che ci consentono di trattare in maniera funtoriale questi nuovi oggetti.

Data una varietà analitica reale X, una maniera di costruire degli ind-fasci consiste nel modificare la nozione di ricoprimento di un aperto, introducendo l'uso delle topologie di Grothendieck. Nel nostro caso specifico definiremo il sito sottoanalitico X_{sa}, e vedremo che i fasci sottoanalitici (tra cui le distribuzioni temperate $\mathcal{D}b^t$) si possono identificare con la sottocategoria $\mathrm{I}_{\mathbb{R}}\text{-c}(k_X)$ di $\mathrm{I}(k_X)$, formata dagli ind-fasci $\mathbb{R}$-costruibili a supporto compatto.

Nell'ultimo capitolo verranno trattate alcune operazioni sull'ind-fascio delle distribuzioni temperate, che estendono al caso degli ind-fasci dei risultati di [6]. Nello stabilire isomorfismi nella categoria derivata degli ind-fasci costruttibili si procede risolvendo due problemi ben distinti: cercare un morfismo, problema trattato da G. Morando nel suo lavoro du tesi, e mostrare che è un isomorfismo, parte che è stata svolta da me utilizzando il fatto che $F, G \in D^b(\mathrm{I}_{\mathbb{R}}\text{-c}(k_X))$ sono isomorfi se e solo se lo sono le loro contrazioni sui fasci $\mathbb{R}$-costruibili a supporto compatto.

Come referenze, si prendano come riferimento [4] per una dettagliata esposizione degli ind-oggetti, [5] per quanto riguarda fasci e categorie derivate, [3] per la definizione del funtore $\mathrm{T}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b)$ e [16] per un'introduzione alla teoria dei $\mathcal{D}$-moduli.

Capitolo 1

Ind-oggetti

1.1 Definizione di ind-oggetto

Sia $\mathcal{U}$ un universo (vedi [13]). Se $\mathcal{C}$ è una $\mathcal{U}$-categoria, chiameremo $\mathcal{C}^\wedge$ la categoria dei funtori contravarianti da $\mathcal{C}$ a **Set**, la categoria degli ($\mathcal{U}$-piccoli) insiemi.

Definiamo ora il funtore

$$\begin{array}{rccl} h^\wedge : & \mathcal{C} & \mapsto & \mathcal{C}^\wedge \\ & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\cdot, X) \end{array}$$

Per il lemma di Yoneda, se $\mathrm{G} \in \mathcal{C}^\wedge$, abbiamo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h^\wedge(X), G) \simeq G(X).$$

In particolare

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\wedge}(h^\wedge(X), h^\wedge(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

e perciò $h^\wedge$ è pienamete fedele. Identificheremo $\mathcal{C}$ con la sua immagine in $\mathcal{C}^\wedge$ tramite $h^\wedge$.

Sia $\mathcal{I}$ una categoria filtrante piccola, e sia $i \mapsto X_i$ un sistema induttivo in $\mathcal{C}$ indiciato da $\mathcal{I}$. Chiameremo "$\varinjlim$"X_i l'oggetto di $\mathcal{C}^\wedge$ definito da

$$\mathcal{C} \ni Y \mapsto \varinjlim_i \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X_i)$$

Definizione 1.1.1 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un ind-oggetto X in $\mathcal{C}$ è un oggetto di $\mathcal{C}^\wedge$ isomorfo a "$\varinjlim$"X_i.*

Chiameremo $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ la sottocategoria di $\mathcal{C}^\wedge$ composta da ind-oggetti.

Osservazione 1.1.2 *Si noti che in* $\mathcal{C}^\wedge$ "$\varinjlim$"X_i *è ben diverso dall'elemento* $\varinjlim X_i$. *Si consideri infatti* V_n, *lo spazio vettoriale su* $\mathbb{R}$ *generato dai vettori* $e_i = (0, \dots 0, \underset{i}{1}, 0, \dots)$. *Esistono dei morfismi iniettivi* $V_n \to V_m$ *per ogni* $m \geq n$. *Si ha che*

$$V := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}}; x_i \in \mathbb{R}\} \simeq \varinjlim_n V_n,$$

ma id_V *non è un elemento di* $\varinjlim_n \mathrm{Hom}(V, V_n)$.

Supponiamo ora che $\mathcal{C}$ sia abeliana. La sottocategoria $\mathcal{C}^{\wedge,add}$ dei funtori additivi è anch'essa abeliana e il funtore $h^\wedge : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\wedge,add}$ è esatto a sinistra. Inoltre, tramite $h^\wedge$, $\mathcal{C}$ diventa una sottocategoria abeliana piena di $\mathcal{C}^{\wedge,add}$.

Siccome il funtore Hom è esatto a sinistra e i limiti induttivi filtranti sono esatti, gli ind-oggetti definiscono dei funtori esatti a sinistra.

Teorema 1.1.3 (Vedi [4])

1. *La categoria* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *è abeliana.*
2. *Il funtore naturale* $\mathcal{C} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *è pienamente fedele ed esatto.*
3. *Il funtore naturale* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{\wedge,add}$ *è pienamente fedele ed esatto a sinistra.*
4. *La categoria* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *ammette limiti induttivi filtranti (piccoli) esatti.*
5. *Se in* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *esistono prodotti (piccoli) di oggetti di* $\mathcal{C}$ *allora* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *ammette limiti proiettivi (piccoli) e il funtore* $\varprojlim$ *è esatto a sinistra.*

Chiameremo "$\varinjlim$" il limite induttivo usuale in $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$, in questo modo, identificheremo $\mathcal{C}$ con la sua immagine tramite $h^\wedge$ senza creare confusione.

Proposizione 1.1.4 *Sia* $\mathcal{C}$ *una categoria abeliana piccola. Allora* $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ *è equivalente alla sottocategoria piena* $\mathcal{C}^{\wedge,add,l}$ *di* $\mathcal{C}^{\wedge,add}$ *costituita dai funtori additivi esatti a sinistra.*

Fino ad ora abbiamo definito gli oggetti di $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ a partire dagli oggetti di $\mathcal{C}$. Si può fare lo stesso anche con i funtori, infatti in [4] si dimostra la seguente

Proposizione 1.1.5 *Sia* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *un funtore. Allora esiste un unico funtore* $IF : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$ *tale che:*

1. *il seguente diagramma sia commutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h^\wedge"] & \mathcal{C}' \arrow[d, "h^\wedge"] \\ \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \arrow[r, "IF"] & \mathrm{Ind}(\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

2. *IF commuta coi limiti induttivi.*

1.2 La categoria derivata

Considereremo anche la categoria derivata di $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ (per una trattazione più approfondita dell'argomento si vedano [4] e [8]).

Proposizione 1.2.1 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana, $D^b_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ la sottocategoria triangolata di $D^b(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ formata da oggetti a coomologia in $\mathcal{C}$, il funtore naturale $D^b(\mathcal{C}) \mapsto D^b_{\mathcal{C}}(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}))$ è un'equivalenza di categorie.*

Anche se la categoria $\mathcal{C}$ ammette abbastanza iniettivi, non è detto che $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ ammetta abbastanza iniettivi in generale. Per questo introdurremo gli oggetti quasi-iniettivi.

Definizione 1.2.2 *Sia $A \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$. A è quasi-iniettivo se il funtore*

$$\begin{array}{ccl} \mathcal{C}^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ X & \mapsto & A(X) \quad (= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(X, A)) \end{array}$$

è esatto.

Questi oggetti quasi-iniettivi ci saranno molto utili, perché sufficienti per derivare molti funtori.

Definizione 1.2.3 *Sia $\mathcal{C}$ una categoria abeliana. Un sistema di generatori stretti di $\mathcal{C}$ è una famiglia $\{G_i; i \in \mathrm{I}\}$ di oggetti di $\mathcal{C}$ tali che:*

1. *per ogni $X \in \mathcal{C}$, $i \in \mathrm{I}$ esista $\bigoplus_{s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G_i, X)} G_i$*
2. *per ogni $X \in \mathcal{C}$, esistano $i \in \mathrm{I}$ tali che il morfismo $\bigoplus_{s \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G_i, X)} G_i \to X$ sia un epimorfismo.*

Esempio 1.2.4 *Sia k un anello commutativo, X uno spazio topologico. Consideriamo la categoria dei k_X-moduli. La famiglia $\{k_U, U \subset X \text{ aperto}\}$ costituisce un sistema di generatori stretti per $\mathrm{Mod}(k_X)$.*

Proposizione 1.2.5 *Supponiamo che $\mathcal{C}$ abbia abbastanza iniettivi ed un sistema di generatori stretti. Allora $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ ammette abbastanza quasi iniettivi.*

Chiameremo $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(\mathcal{C})$ la categoria degli oggetti quasi iniettivi di $\mathcal{C}$.

Teorema 1.2.6 *Nelle ipotesi della Proposizione 1.2.5, sia $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un funtore esatto a sinistra, e $IF : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$ il funtore esatto a sinistra associato. Allora*

1. *la categoria $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(\mathcal{C})$ è IF-iniettiva*
2. *il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} D^+(\mathcal{C}) \arrow[r, "RF"] \arrow[d] & D^+(\mathcal{C}') \arrow[d] \\ D^+(\mathrm{Ind}(\mathcal{C})) \arrow[r, "RIF"] & D^+(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}')) \end{tikzcd}$$

3. *il funtore R^kIF commuta con "$\varinjlim$"*

Capitolo 2

Topologie di Grothendieck

Analizzeremo brevemente il concetto di topologia di Grothendieck. Per una trattazione più dettagliata si vedano [4] e [14] (per quanto riguarda la parte sui fasci).

2.1 Siti, prefasci e fasci

Considereremo categorie $\mathcal{C}$ che ammettano prodotti finiti e prodotti fibrati, inoltre, se $\mathcal{C}$ ammette un oggetto terminale X, allora $\mathcal{C}$ ammette prodotti fibrati se e solo se ammette limiti proiettivi finiti, e i prodotti sono i prodotti fibrati su X.

Chiameremo $\mathcal{C}_U$ la categoria delle frecce $U' \to U$, $U \in \mathcal{C}$, e se $V \to U$ è un morfismo e $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$, chiameremo $V \times_U S$ l'insieme $\{V \times_U W \to V; W \in S\} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_V)$.

Definizione 2.1.1 *Siano $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$, diremo che S_1 è un raffinamento di S_2 se per ogni $V_1 \to U \in S_1$ esiste $V_2 \to U \in S_2$ tale che $V_1 \to V_2 \to U$. Scriveremo $S_1 \preceq S_2$.*

Definizione 2.1.2 *Una topologia di Grothendieck su $\mathcal{C}$ associa ad ogni $U \in \mathcal{C}$ una famiglia* $\mathrm{Cov}(U)$ *di sottinsiemi di* $\mathrm{Ob}(C_U)$ *che soddisfano i seguenti assiomi:*

GT1 $\{U \overset{id}{\to} U\} \in \mathrm{Cov}(U)$

GT2 se $\mathrm{Cov}(U) \ni S_1 \preceq S_2 \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$*, allora* $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$

GT3 se $S \in \mathrm{Cov}(U)$*, allora, per ogni* $V \to U$, $V \times_U S \in \mathrm{Cov}(V)$

GT4 se $S_1, S_2 \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$, $S_1 \in \mathrm{Cov}(U)$ *e* $V \times_U S_2 \in \mathrm{Cov}(V)$*, allora* $S_2 \in \mathrm{Cov}(U)$

Chiameremo $S \in \mathrm{Cov}(U)$ *un ricoprimento di* U.

Definizione 2.1.3 *Un sito* X *è una categoria* $\mathcal{C}_X$ *che ammette prodotti finiti e prodotti fibrati finiti dotato di una topologia di Grothendieck (nel caso* $\mathcal{C}_X$ *ammetta un oggetto terminale, lo chiameremo* X*).*

Un funtore di siti $f : X \to Y$ *è dato da un funtore* $f^t : \mathcal{C}_Y \to C_X$ *che commuta coi prodotti fibrati e tale che per ogni* $U \in \mathcal{C}_Y$ *e per ogni* $S \in \mathrm{Cov}(U)$ *si abbia* $f^t(S) \in \mathrm{Cov}(f^t(U))$.

Esempio 2.1.4 *Sia* X *uno spazio topologico,* Op_X *la categoria degli aperti di* X*, ordinata per inclusione. Le frecce* $V \to U$ *indicheranno quindi le inclusioni, e i prodotti fibrati* $V \times_X U$ *le intersezioni. Chiaramente, in base a questa definizione, se* $U \in \mathrm{Op}_X$*, allora* $(\mathrm{Op}_X)_U = \mathrm{Op}_U$.

Definiamo quindi il sito X *come il sito ottenuto dotando la categoria* Op_X *della seguente topologia: diremo che* $S \subset \mathrm{Cov}(U)$ *è un ricoprimento di* U *se* $\bigcup_{V \in S} V = U$ *(che soddisfa gli assiomi della Definizione 2.1.2).*

Se $f : X \to Y$ *è una funzione continua, allora il funtore* f *definito da* $f^t : V \mapsto f^{-1}(V)$, $V \in \mathrm{Op}_Y$ *è un funtore di siti.*

Ci concentreremo ora nello studio dei fasci di k-moduli, ove k è un campo.

Definizione 2.1.5 *Sia* X *un sito. Un prefascio di* k*-moduli su* X *è un funtore* $\mathcal{C}_X^{op} \to \mathrm{Mod}(k)$.

Chiameremo $\mathrm{Psh}(k_X)$ *la categoria abeliana dei prefasci di* k*-moduli su* X.

Un funtore di prefasci $\phi : F \to G$ *è dato da una mappa* ϕ_U *per ogni* $U \in \mathcal{C}_X$ *tale che per ogni* $V \to U$ *il diagramma seguente commuti:*

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & G(U) \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_{VU}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{VU}} \\ F(V) & \xrightarrow{\phi(V)} & G(V) \end{array}$$

Definizione 2.1.6 *Se* F *è un prefascio di* k*-moduli su* X *e* $S \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_U)$ *si definisce*

$$F(S) = \ker\Big(\prod_{V \in S} F(V) \rightrightarrows \prod_{V', V'' \in S} F(V' \times_U V'')\Big)$$

Diremo che F *è separato se per ogni* $U \in \mathcal{C}_X$ *e per ogni* $S \in \mathrm{Cov}(U)$ *il morfismo naturale* $F(U) \to F(S)$ *è un monomorfismo.*

Diremo invece che F *è un fascio se il morfismo sopracitato è un isomorfismo.*

Sia X un sito. Vogliamo ora costruire, dato un prefascio, il suo fascio associato. Più precisamente troveremo un funtore aggiunto al funtore immersione $\iota : \mathrm{Mod}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$.

Notiamo innanzi tutto che la relazione "$\preceq$" definisce un preordine su $\mathrm{Cov}(U)$, $U \in \mathcal{C}_X$. Diamo ora una struttura di categoria a $\mathrm{Cov}(U)$:

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cov}(U)}(S_1, S_2) = \{\mathrm{pt}\}$ oppure $\varnothing$ a seconda che $S_1 \preceq S_2$ o meno.

Sia ora $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$, definiremo un funtore $\mathrm{Cov}(U)^{op} \to \mathrm{Mod}(k)$. Innanzi tutto dati $S_1 \preceq S_2$ definiamo $\prod_{V \in S_2} F(V) \to F(V_1)$, $V_1 \in S_1$ scegliendo un $V_2 \in S_2$ tale che $V_2 \to V_1$.

Componendo $F(S_2) \to \prod_{V \in S_2} F(V) \to F(V_1)$ otteniamo un morfismo che non dipende dalla scelta di $V_2 \in S_2$, e quindi definisce $F(S_1) \to F(S_2)$. Abbiamo quindi trovato il funtore che cercavamo $(\cdot)^+$ che ad ogni $U \in \mathcal{C}_X$ associa il prefascio F^+ definito da:

$$F^+(U) = \varinjlim_{S \in \mathrm{Cov}} F(S)$$

Riusciremo ora a trovare un aggiunto al funtore ι grazie al seguente

Teorema 2.1.7

1. *il funtore* $^+ : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_X)$ *è esatto a sinistra*
2. *dato* $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$, F^+ *è separato*
3. *dato un prefascio separato* F, F^+ *è un fascio*
4. *dati* $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$ *e* $G \in \mathrm{Mod}(k_X)$, *vale la formula di aggiunzione:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Psh}(k_X)}(F, \iota G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}(F^{++}, G)$$

Chiameremo F^{++} il fascio associato ad F.

2.2 Operazioni esterne

Siano X e Y due siti. Consideriamo un morfismo di siti f associato a $f^t : \mathcal{C}_Y \to \mathcal{C}_X$.

Siano $F \in \mathrm{Psh}(k_X)$, $G \in \mathrm{Psh}(k_Y)$, $U \in \mathcal{C}_X$, $V \in \mathcal{C}_Y$. Definiamo i funtori

$$f_* : \mathrm{Psh}(k_X) \to \mathrm{Psh}(k_Y) \tag{2.1}$$

$$f^{\leftarrow} : \mathrm{Psh}(k_Y) \to \mathrm{Psh}(k_X)$$

nella seguente maniera

$$(f_*F)(V) = F(f^t(V))$$

$$(f^{\leftarrow}F)(U) = \varinjlim_{U \to f^t(V)} G(V)$$

Definizione 2.2.1 *Sia $f : X \to Y$ un funtore di siti*

1. *chiameremo funtore immagine diretta $f_* : \mathrm{Mod}(k_X) \to \mathrm{Mod}(k_Y)$ il funtore indotto da (2.1)*
2. *chiameremo funtore immagine inversa $f^{-1} : \mathrm{Mod}(k_Y) \to \mathrm{Mod}(k_X)$ il funtore definito da $f^{-1}G = (f^{\leftarrow}G)^{++}$, ove $G \in \mathrm{Mod}(k_Y)$*

Proposizione 2.2.2

1. *Il funtore f_* è esatto a sinistra e commuta con $\varprojlim$*
2. *Il funtore f^{-1} è esatto e commuta con $\varinjlim$*
3. *Per ogni $F \in \mathrm{Mod}(k_Y)$ e $G \in \mathrm{Mod}(k_X)$, vale la formula di aggiunzione*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_X)}(f^{-1}F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(k_Y)}(F, f_*G)$$

Consideriamo ora un caso interessante. Consideriamo il sito $\mathcal{C}_U$ (ove, dato $V \in \mathcal{C}_U$, diremo che S è un ricoprimento di V se lo è in $\mathcal{C}_X$) e definiamo il funtore:

$$\begin{array}{rcl} i_U^t : \mathcal{C}_X & \to & \mathcal{C}_U \\ V & \mapsto & U \times V. \end{array}$$

Si vede immediatamente che commuta coi prodotti fibrati, e quindi definisce il funtore di siti $i_U : X \to U$.

Dato $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$, scriveremo spesso $F|_U$ al posto di $i_U^{-1}F$ e $\Gamma_U F$ al posto di $i_{U*}i_U^{-1}F$.

Consideriamo ora il funtore:

$$\begin{array}{rcl} j_U^t : \mathcal{C}_U & \to & \mathcal{C}_X \\ V & \mapsto & V. \end{array}$$

che definisce il funtore di siti $j_U : X \to U$.

Scriveremo $i_{U!}$ al posto di j_U^{-1}.

Proposizione 2.2.3

1. $j_{U*} = i_U^{-1}$
2. $i_{U!}$ *è un aggiunto a sinistra di* i_U^{-1}

Molto spesso scriveremo F_U al posto di $i_{U!}i_U^{-1}F$.

2.3 Operazioni interne

Definizione 2.3.1 *Sia* X *un sito e siano* $F, G \in \mathrm{Mod}_(k_X)$

1. *chiameremo* $\mathcal{H}om_{k_X}(F, G)$ *il fascio* $U \mapsto \mathrm{Hom}_{k_U}(F|_U, G|_U)$
2. *chiameremo* $F \otimes G$ *il fascio associato al prefascio* $U \mapsto F(U) \otimes_k G(U)$

Vediamo alcune relazioni coi funtori precedentemente definiti.

Proposizione 2.3.2 *Siano* $F, F' \in \mathrm{Mod}(k_X)$*,* $G, G' \in \mathrm{Mod}(k_Y)$*,* $K \in \mathrm{Mod}(K_U)$

1. $\mathcal{H}om_{k_Y}(G, f_*F) \simeq f_*\mathcal{H}om_{k_X}(f^{-1}G, F)$
2. $i_U^{-1}\mathcal{H}om(F, F') \simeq \mathcal{H}om(i_U^{-1}F, i_U^{-1}F')$
3. $\mathcal{H}om_{k_U}(i_{U!}K, F) \simeq i_{U*}\mathcal{H}om_{k_X}(F, i_U^{-1}K)$
4. $f^{-1}(G \otimes G') \simeq f^{-1}G \otimes f^{-1}G'$
5. $i_{U!}(K \otimes i_U^{-1}F) \simeq i_{U!}K \otimes F$

Osservazione 2.3.3 *Notiamo che, nel caso dell'Esempio 2.1.4, riotteniamo la definizione di fascio e dei funtori di immagine diretta e inversa che ben conosciamo(cioè quella di [5], [11]). Infatti la nozione di fascio dipende esclusivamente dalla scelta della categoria* Op_X *degli aperti su* X *e dalla definizione di ricoprimento.*

Capitolo 3

Stacks

3.1 Definizione di Stack

Definizione 3.1.1 *Una prestack $\mathcal{C}$ su uno spazio topologico X è data da:*

1. *per ugni aperto U di X, una categoria $\mathcal{C}(U)$*
2. *per ogni aperto $V \subset U$ un funtore (detto di restrizione) $\rho_{UV} : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(V)$*
3. *dati gli aperti U,V,W con $W \subset V \subset U$, un isomorfismo di funtori $\lambda_{WVU} : \rho_{WV} \circ \rho_{VU} \xrightarrow{\sim} \rho_{WU}$*

tali che

1. $\rho_{UU} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(U)}$
2. *dati gli aperti $\{U_i\}$, i=1,2,3,4, $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset U_4$ il diagramma seguente commuti:*

$$\begin{tikzcd}
\rho_{12} \circ \rho_{23} \circ \rho_{34} \arrow[r, "\lambda_{234}"] \arrow[d, "\lambda_{123}"] & \rho_{12} \circ \rho_{24} \arrow[d, "\lambda_{124}"] \\
\rho_{13} \circ \rho_{34} \arrow[r, "\lambda_{134}"] & \rho_{14}
\end{tikzcd}$$

Scriveremo per semplicità $F|_V$ al posto di $\rho_{VU}(F)$
Inoltre, data una prestack $\mathcal{C}$ su X si può definire la restrizione $\mathcal{C}|_U$, che è una prestack su U.

Definizione 3.1.2 *Una prestack $\mathcal{C}$ è una stack se soddisfa:*

1. *assioma ST1: per ogni aperto U di X, e ogni $F, G \in \mathcal{C}(U)$, il prefascio $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}|_U}(F, G)$ è un fascio su U*

2. *assioma ST2: per ogni aperto* $U \subset X$*, ogni ricoprimento aperto* $U = \bigcup_{i \subset I} U_i$*, ogni famiglia* $F_i \in \mathcal{C}(U_i)$*, ogni famiglia di isomorfismi* $\theta_{ij} : F_{i|U_{ji}} \xrightarrow{\sim} F_{i|U_{ji}}$ *tale che:*

$$\theta_{ij|U_{ijk}} \circ \theta_{jk|Uijk} = \theta_{ik|U_{ijk}}$$

esiste $F \in \mathcal{C}(U)$ *ed esistono degli isomorfismi* $\theta_i : F_{|U_i} \xrightarrow{\sim} F_i$ *tali che:*

$$\theta_{ij} \circ \theta_{j|U_{ij}} = \theta_{i|U_{ij}}$$

Esempio 3.1.3 *Se* $\mathcal{A}$ *è un fascio di* k*-algebre su* X *allora* $U \mapsto \mathrm{Mod}(\mathcal{A}|_U)$ *è una stack di categorie abeliane.*

Definizione 3.1.4 *Siano* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}'$ *due prestacks su* X*. Un funtore di prestacks* $\Phi : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{C}'$ *è dato da:*

1. *per ogni aperto* $U \subset X$*, un funtore* $\Phi_U : \mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}'(U)$
2. *per ogni aperto* $V \subset U$*, un isomorfismo di funtori* $\theta_{VU} : \Phi_V \circ \rho_{VU} \xrightarrow{\sim} \rho'_{VU} \circ \Phi_U$*, tale che per ogni aperto* $W \subset V \subset U$ *il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
\Phi_W \circ \rho_{WV} \circ \rho_{VU} \arrow[r, "\lambda_{WVU}"] \arrow[d, "\theta_{WV}"'] & \Phi_W \circ \rho_{WU} \arrow[dd, "\theta_{WU}"'] \\
\rho'_{WV} \circ \Phi_V \circ \rho_{VU} \arrow[d, "\theta_{VU}"'] & \\
\rho'_{WV} \circ \rho'_{VU} \circ \Phi_U \arrow[r, "\lambda'_{WVU}"] & \rho'_{WU} \circ \Phi_U
\end{tikzcd}$$

Un funtore di stack è il funtore della prestack associata

Definizione 3.1.5 *Siano* Φ *e* Φ' *due funtori di prestack. Un morfismo di funtori di prestack* f *associa, ad ogni aperto* $U \subset X$*, un morfismo* $f_U : \Phi_U \to \Phi'_U$ *di funtori da* $\mathcal{C}(U)$ *in* $\mathcal{C}'(U)$ *, tale che per ogni aperto* $V \subset U$ *il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{tikzcd}
\Phi_V(\rho_{UV} F) \arrow[r, "f_V(\rho_{VU} F)"] \arrow[d, "\theta_{VU}(F)"'] & \Phi'_V(\rho_{VU} F) \arrow[d, "\theta'_{VU}(F)"] \\
\rho'_{VU}(\Phi_U F) \arrow[r, "\rho'_{VU}(f_U F)"] & \rho'_{VU}(\Phi'_U F)
\end{tikzcd}$$

Da adesso con X intenderemo un spazio topologico localmente compatto di Hausdorff con una base numerabile di aperti. Inoltre $\mathcal{C}$ sarà sempre una prestack di categorie abeliane.
Infine, scriveremo i_U^{-1} al posto di ρ_{UX}.

Definizione 3.1.6 *Una stack propria $\mathcal{C}$ è una prestack di categorie abeliane con le seguenti proprietà :*

1. *$\mathcal{C}$ soddisfa l'assioma ST1*
2. *per tutti gli aperti $V \subset U \subset X$ il funtore ρ_{VU} è esatto*
3. *per ogni aperto $U \subset X$, $\mathcal{C}(U)$ ammette limiti induttivi filtranti, il funtore $\varinjlim$ è esatto e commuta con il funtore restrizione*
4. *per ogni aperto $U \subset X$, $\mathcal{C}(U)$ ammette limiti proiettivi filtranti, il funtore $\varprojlim$ è esatto e commuta con il funtore restrizione*
5. *il funtore i_U^{-1} ammette un aggiunto a sinistra, che chiameremo $i_{U!}$ che soddisfa $\mathrm{id}_{\mathcal{C}(U)} \xrightarrow{\sim} i_U^{-1} \circ i_{U!}$*

Si dimostra (vedi [8]) che una stack propria è una stack, e che se una stack è propria, lo è anche la sua restrizione ad una aperto $U \subset X$.

Possiamo ora estendere alcuni risultati della teoria dei fasci alle stack proprie (vedi [8]).

Definizione 3.1.7 *Sia $F \in \mathcal{C}(X)$:*
se U è una aperto di X, definiamo $F_U := i_{U!} i_U^{-1} F$
se S è un chiuso di X definiamo F_S tramite la sequenza esatta:

$$0 \to F_{X \setminus S} \to F \to F_S \to 0$$

se $Z = U \cap S$ è un localmente chiuso di X definiamo $F_Z = (F_U)_S$, si noti che questa definizione è indipendente dalla scelta di U ed S.

Proposizione 3.1.8 *Sia $F \in \mathcal{C}(X)$, e sia $Z \subset X$ localmente chiuso, allora:*

1. *se $G \in \mathcal{C}(X)$ il funtore $G \mapsto \Gamma_Z(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(F, G))$ è rappresentabile da F_Z*
2. *$\mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(F_Z, G) \simeq \Gamma_Z \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(F, G)$*
3. *il funtore $F \mapsto F_Z$ è esatto e commuta coi limiti induttivi*
4. *se Z_1 e Z_2 sono localmente chiusi, allora $(F_{Z_1})_{Z_2} \simeq F_{Z_1 \cap Z_2}$*

5. *se Z' è chiuso in Z, allora la sequenza*

$$0 \to F_{Z \setminus Z'} \to F_Z \to F_{Z'} \to 0$$

è esatta

Analogamente a quanto succede nella teoria dei fasci, possiamo trovare un aggiunto a destra del funtore i_U^{-1}.

Definizione 3.1.9 *Sia $U \subset X$ una aperto, e sia $F \in \mathcal{C}(U)$ si definisce:*

$$i_{U*} = \varinjlim_{K \subset U} i_{U!}(F_K), \quad K \text{ compatto}$$

Proposizione 3.1.10 *Il funtore i_{U*} è un aggiunto a destra di i_U^{-1}*

Inoltre, anche il funtore $(\cdot)_Z$ ha un aggiunto a destra, che chiameremo, sempre richiamandoci alla teoria dei fasci, Γ_Z. Quindi:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X)}(G_Z, F) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X)}(G, \Gamma_Z(F))$$

Proposizione 3.1.11 *Sia $Z \subset X$ localmente chiuso, allora:*

1. *il funtore Γ_Z è esatto a sinistra e commuta coi limiti proiettivi*
2. $\Gamma_{Z_1} \circ \Gamma_{Z_2} \simeq \Gamma_{Z_1 \cap Z_2}$
3. *se Z' è chiuso in Z, allora abbiamo la sequenza esatta*

$$0 \to \Gamma_{Z \setminus Z'} \to \Gamma_Z \to \Gamma_{Z'} \to 0$$

4. $\Gamma_Z(F)$ *rappresenta il funtore* $G \mapsto \Gamma_Z(X, \mathcal{H}om_{\mathcal{C}}(G, F))$

3.2 La stack $\mathrm{I}\mathcal{C}(X)$

Sia $\mathcal{C}$ una stack propria di categorie abeliane. Definiamo la sottocategoria piena $\mathcal{C}_c(X)$ di $\mathcal{C}(X)$:

$$Ob(\mathcal{C}_c(X)) = \{F \in \mathcal{C}(X);\ F \text{ a supporto compatto}\}$$

Per comodità scriveremo $\mathrm{I}\mathcal{C}(X)$ al posto di $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}_c(X))$.

Se $U \subset X$ è un aperto, si definisce il funtore di restrizione $\mathcal{C}(X) \ni F \mapsto F|_U \in \mathcal{C}(U)$ nella maniera seguente:

$$F|_U = \text{“}\varinjlim_i\text{”}\,\text{“}\varinjlim_{V \subset\subset U}\text{”}(F_{iV}|_U)$$

Si dimostra (vedi [8]) che il prefascio $U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}\mathcal{C}(U)}(F|_U, G|_U)$ è un fascio e che il funtore restrizione ammette un aggiunto a sinistra che chiameremo $i_{U!!}$

$$i_{U!!}\,``\varinjlim_i"\,F_i = ``\varinjlim_i"\,i_{U!}F_i$$

ove $F_i \in \mathcal{C}_c(U)$.

Si prova anzi un risultato più importante, che, contrariamente a $U \mapsto \mathrm{Ind}\mathcal{C}(U)$, $U \mapsto \mathrm{I}\mathcal{C}(U)$ è una stack propria.

Sia ora $G \in \mathcal{C}_c(X)$. Definiamo ora il funtore:

$$\begin{array}{rcl} \iota_X : \mathcal{C}(X) & \to & \mathrm{I}\mathcal{C}(X) \\ F & \mapsto & (G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(X)}(G, F)) \end{array}$$

Inoltre (vedi [8])

$$\iota_X F \simeq ``\varinjlim_{U \subset\subset X}"\,F_U \simeq ``\varprojlim_{K \subset X}"\,F_K$$

ove U appartiene alla famiglia degli aperti relativamente compatti di X, e K a quella dei sottinsiemi compatti di X.

Proposizione 3.2.1 *Il funtore ι_X è pienamente fedele, esatto e commuta con i limiti proiettivi.*

D'ora in poi, identificheremo spesso la categoria $\mathcal{C}(X)$ con la sua immagine in $\mathrm{I}\mathcal{C}(X)$ tramite ι_X, ed F con $\iota_X F$.

Introduciamo ora il funtore α_X che va da $\mathcal{C}(X)$ a $\mathrm{I}\mathcal{C}(X)$:

$$\alpha_X\left(``\varinjlim_i"\,F_i\right) = \varinjlim_i F_i$$

Proposizione 3.2.2
1. *Il funtore α_X è esatto, pienamente fedele e commuta con $\varinjlim$ e $\varprojlim$*
2. *Il funtore α_X è aggiunto a sinistra del funtore ι_X*
3. *$\alpha_X \circ \iota_X \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}(X)}$*

Osservazione 3.2.3 *Con delle particolari ipotesi, che vengono soddisfatte nel caso degli ind-fasci, il funtore α_X ammette un aggiunto a sinistra, di cui parleremo nel prossimo capitolo.*

Sia ora $Z \subset X$ localmente chiuso e $F \in \mathrm{I}\mathcal{C}(X)$. Visto che $\mathrm{I}\mathcal{C}$ è una stack propria, gli oggetti F_Z e $\Gamma_Z(F)$ sono ben definiti. In generale abbiamo che, a differenza di quanto accade per Γ_Z, non vale $\iota_X \circ (\cdot)_Z \simeq (\cdot)_Z \circ \iota_X$. Useremo quindi una notazione diversa, ${}_ZF$ al posto di F_Z.

Per la Proposizione 3.1.8 questo funtore è rappresentabile, e valgono

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}({}_ZF, G) & \simeq & \Gamma_Z \mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}(F, G) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}\mathcal{C}}({}_ZF, G) & \simeq & \Gamma_Z(X; \mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}(F, G)) \end{array}$$

Proposizione 3.2.4 *Sia $Z \subset X$ localmente chiuso e $F \in \mathrm{I}\mathcal{C}(X)$:*

1. *se $G \in \mathcal{C}(X)$ vale l'isomorfismo*

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}(G, F)_Z \simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}(G, {}_Z F)$$

2. *il funtore $\mathcal{C}_c(X) \ni G \mapsto \Gamma(X, \mathcal{H}om_{\mathrm{I}\mathcal{C}}(G, F)_Z)$ è rappresentabile da ${}_ZF$.*

Capitolo 4

Ind-fasci

4.1 Definizione di ind-fascio

In questo capitolo, tutti gli spazi topologici saranno di Hausdorff, localmente compatti e con una base numerabile di aperti.

Sia k un campo $\mathcal{A}$ un fascio di k-algebre su uno spazio topologico X. Chiameremo $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ la categoria abeliana costituita dai fasci di $\mathcal{A}$-moduli, e $\mathrm{Mod}^c(\mathcal{A})$ la sua sottocategoria piena costituita dai fasci di $\mathcal{A}$-moduli a supporto compatto. Scriveremo, se $\mathcal{A} = k_X$, $\mathcal{H}om$ e $\otimes$ al posto di $\mathcal{H}om_{k_X}$ e $\otimes_{k_X}$.

Definizione 4.1.1 *Un ind-fascio di $\mathcal{A}$-moduli è un oggetto di* $\mathrm{Ind}(\mathrm{Mod}^c(\mathcal{A}))$

Dunque, se F è un ind-fascio, di può trovare un sistema induttivo filtrante di $\mathcal{A}$-moduli a supporto compatto $\{F_i\}_i$ tale che:

$$F = \text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i$$

Scriveremo, per semplicità , $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ al posto di $\mathrm{Ind}(\mathrm{Mod}^c(\mathcal{A}))$.

Si prova (vedi [7], [8]) che, contrariamente a $\mathrm{Ind}(\mathrm{Mod}(\mathcal{A}))$, $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ è una stack propria.

Definiamo ora il funtore:

$$\begin{array}{rcl} \iota_X : \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) & \to & \mathrm{I}(\mathcal{A}) \\ F & \mapsto & (G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(G, F)) \end{array}$$

ove $G \in \mathrm{Mod}^c(X)$.

Inoltre (vedi [8])

$$\iota_X F \simeq \text{“}\varinjlim_{U \subset\subset X}\text{”} F_U \simeq \text{“}\varprojlim_{K \subset X}\text{”} F_K$$

ove U appartiene alla famiglia degli aperti relativamente compatti di X, e K a quella dei sottinsiemi compatti di X.

Proposizione 4.1.2 *Il funtore ι_X è pienamente fedele, esatto e commuta con i limiti proiettivi.*

D'ora in poi, identificheremo spesso la categoria $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ con la sua immagine in $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ tramite ι_X, ed F con $\iota_X F$.

Introduciamo ora il funtore α_X che va da $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ a $\mathrm{I}(\mathcal{A})$:

$$\alpha_X\Big(\text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i\Big) = \varinjlim_i F_i$$

Proposizione 4.1.3

1. *Il funtore α_X è esatto, pienamente fedele e commuta con $\varinjlim$ e $\varprojlim$*
2. *Il funtore α_X è aggiunto a sinistra del funtore ι_X*
3. $\alpha_X \circ \iota_X \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}(\mathcal{A})}$

Il funtore α_X ammette anche un aggiunto a sinistra, infatti:

Proposizione 4.1.4 *Il funtore α_X ammette un aggiunto a sinistra β_X :* $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \to \mathrm{I}(A)$ *che soddisfa le seguenti proprietà :*

1. *Il funtore β_X è esatto a destra, pienamente fedele e commuta con $\varprojlim$*
2. $\alpha_X \circ \beta_X \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Mod}(\mathcal{A})}$

4.2 I funtori hom interno e prodotto tensoriale interno

Definizione 4.2.1 *Siano F, G due oggetti di* $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ *definiamo il funtore hom interno:*

$$\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(F,G) = \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}\Big(\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i, \text{“}\varinjlim_i\text{”}G_j\Big) = \varprojlim_i \text{“}\varinjlim_j\text{”}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(F_i, G_j)$$

e il funtore prodotto tensoriale interno:

$$F \otimes_{\mathcal{A}} G = \Big(\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i\Big) \otimes_{\mathcal{A}} \Big(\text{“}\varinjlim_j\text{”}G_j\Big) = \text{“}\varinjlim_{i,j}\text{”}(F_i \otimes_{\mathcal{A}} G_j)$$

Allo stesso modo si definiscono i funtori $\mathcal{I}hom_{k_X}$ e $\otimes_{k_X}$ che scriveremo per comodità $\mathcal{I}hom$ e $\otimes$.

Dalla definizione segue immediatamente il fatto che $\otimes_{\mathcal{A}}$ commuta con "$\varinjlim$" ed è esatto a destra e che $\mathcal{I}hom$ è esatto a sinistra.

Adesso stabiliremo una relazione tra i funtori $\mathcal{I}hom_{A}$ e $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}$ tramite il funtore α_X:

$$\alpha_X(\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(\cdot,\cdot)) \simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(\cdot,\cdot)$$

Infatti abbiamo la seguente proposizione:

Proposizione 4.2.2 *Siano F e G due ind-fasci, allora*

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F,G) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(F_i,G_j)$$

inoltre

1. *per ogni $G \in \mathrm{I}(\mathcal{A})$*

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}\Big(\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i, G\Big) \simeq \varprojlim_i \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F_i,G)$$

2. *per ogni $F \in \mathrm{Mod}(\mathcal{A})$*

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}\Big(F, \text{“}\varinjlim_i\text{”}G_i\Big) \simeq \varinjlim_i \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F,G_i)$$

Proposizione 4.2.3 *Il seguenti diagrammi sono commutativi:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\iota_X \times \iota_X"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\iota_X"] \\
\mathrm{I}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{I}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}"] \arrow[dr, "\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}"'] & \mathrm{I}(k_X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
 & \mathrm{Mod}(k_X)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\otimes_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\iota_X \times \iota_X"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\iota_X"] \\
\mathrm{I}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{I}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\otimes_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\alpha_X \times \alpha_X"] & \mathrm{I}(k_X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\otimes_{\mathcal{A}}"] & \mathrm{Mod}(k_X)
\end{tikzcd}$$

Inoltre, ritroviamo delle formule di aggiunzione per gli ind-fasci simili a quelle per i fasci:

Proposizione 4.2.4 *Sia $K \in \mathrm{Mod}k_X$, F, $G \in \mathrm{I}(\mathcal{A})$, allora:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(K \otimes F, G) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(K, \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(F, G)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, \mathcal{I}hom(K, G))
\end{aligned}$$

In particolare valgono le formule di aggiunzione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(K \otimes F, G) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(K, \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(F, G)) \\
&\simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, \mathcal{I}hom(K, G))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(K \otimes F, G) &\simeq \mathcal{I}hom(K, \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(F, G)) \\
&\simeq \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(F, \mathcal{I}hom(K, G))
\end{aligned}$$

Infine, vediamo alcune relazioni tra i funtori $\otimes$, $\mathcal{I}hom$ e β_X.

Proposizione 4.2.5 *Se F,G sono oggetti di $\mathrm{Mod}(k_X)$ il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(k_X)^{op} \times \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\beta_X \times \beta_X"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\beta_X"] \\
\mathrm{I}(k_X)^{op} \times \mathrm{I}(k_X) \arrow[r, "\otimes"] & \mathrm{I}(k_X)
\end{tikzcd}$$

Proposizione 4.2.6 *Sia $K \in \mathrm{Mod}_{k_X}$, F, $G \in \mathrm{I}(\mathcal{A})$, allora:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(\beta_X K \otimes F, G) \simeq \mathrm{Hom}(K, \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, G))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(\beta_X K \otimes F, G) \simeq \mathrm{Hom}(K, \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, G))$$

Proposizione 4.2.7 *Sia $K \in \mathrm{Mod}_{k_X}$, F, $G \in \mathrm{I}(\mathcal{A})$, allora:*

$$\mathcal{I}hom(F, G \otimes \beta_X K) \simeq \mathcal{I}hom(F, G) \otimes \beta_X K$$

$$\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, G \otimes \beta_X K) \simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(F, G) \otimes K$$

4.3 Operazioni esterne

Consideriamo ora la funzione $f : X \to Y$ continua, con X e Y spazi topologici di Hausdorff, localmente compatti e con una base numerabile di intorni.

Definizione 4.3.1 *Sia $G \in \mathrm{I}(k_Y)$, si definisce funtore immagine inversa il funtore $f^{-1} : \mathrm{I}(k_Y) \to \mathrm{I}(k_X)$:*

$$f^{-1}(G) = \text{“}\varinjlim_{i}\text{”}\text{“}\varinjlim_{U \subset\subset X}\text{”} f^{-1}(G_i)_U$$

Il funtore f^{-1} ammette un aggiunto a destra, che chiameremo f_*.
Abbiamo infatti, se

$$F = \text{“}\varinjlim_{i}\text{”} F_i \text{ e } G = \text{“}\varinjlim_{j}\text{”} G_j$$

ove F,$G \in \mathrm{Mod}^c(k_X)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}G, F) \simeq \varprojlim_{U \subset\subset X} \varprojlim_{j} \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}_{k_X}((f^{-1}G_j)_U, F_i)$$

per l'aggiunzione dei funtori $(\cdot)_U$ e Γ_U (vedi [5]) abbiamo quindi

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}G, F) \simeq \varprojlim_{U \subset\subset X} \varprojlim_{j} \varinjlim_{i} \mathrm{Hom}_{k_X}(f^{-1}G_j, \Gamma_U F_i)$$

Possiamo quindi arrivare alla seguente

Definizione 4.3.2 *Sia $F \in \mathrm{I}(k_X)$, si definisce funtore immagine diretta il funtore $f_* : \mathrm{I}(k_X) \to \mathrm{I}(k_Y)$:*

$$f_*(F) = \text{“}\varinjlim_{i}\text{”}\text{“}\varinjlim_{U \subset\subset X}\text{”} f_*\Gamma_U(F_i)$$

In questo modo il funtore immagine diretta è individuato in maniera unica.
Abbiamo quindi effettivamente, la seguente

Proposizione 4.3.3 *Per ogni $F \in \mathrm{I}(k_Y)$ e $G \in \mathrm{I}(k_X)$ i funtori f^{-1} e f_* soddisfano la formula di aggiunzione*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_Y)}(F, f_*G)$$

inoltre valgono anche le seguenti formule di aggiunzione:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}hom(f^{-1}F, G) &\simeq \mathcal{I}hom(F, f_*G) \\ f_*\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}F, G) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_Y)}(F, f_*G) \end{aligned}$$

Vediamo ora alcune proprietà dei funtori f^{-1} e f_*

Proposizione 4.3.4 *1. Il funtore f^{-1} è esatto e commuta con "$\varinjlim$"*

2. Il funtore f_* è esatto a sinistra e commuta con $\varprojlim$

3. I seguenti diagrammi sono commutativi:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\iota_Y"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\iota_X"] \\
\mathrm{I}(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\alpha_Y"] & \mathrm{I}(k_X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathrm{Mod}(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathrm{Mod}(k_X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(k_X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\iota_X"] & \mathrm{Mod}(k_Y) \arrow[d, "\iota_Y"] \\
\mathrm{I}(k_X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\alpha_X"] & \mathrm{I}(k_Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\mathrm{Mod}(k_X) \arrow[r, "f_*"] & \mathrm{Mod}(k_Y)
\end{tikzcd}$$

Dal fatto che f_* e α sono aggiunti di f^{-1} e β, abbiamo la seguente

Proposizione 4.3.5 *Il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\beta_Y"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\beta_X"] \\
\mathrm{I}(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] & \mathrm{I}(k_X)
\end{tikzcd}$$

Definiamo ora il funtore di immagine diretta propria per gli ind-fasci.

Definizione 4.3.6 *Sia $F \in \mathrm{I}(k_X)$, si definisce funtore immagine diretta propria il funtore $f_{!!} : \mathrm{I}(k_X) \to \mathrm{I}(k_Y)$:*

$$f_{!!}\text{“}\varinjlim_i\text{”}F_i = \text{“}\varinjlim_i\text{”}f_! F_i$$

Vediamo ora alcune proprietà di $f_{!!}$:

Proposizione 4.3.7 *1. Il funtore $f_{!!}$ è esatto a sinistra e commuta con i limiti induttivi in $\mathrm{I}(k_X)$*

2. Il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}(k_X) \arrow[r, "f_{!!}"] \arrow[d, "\alpha_X"] & \mathrm{I}(k_Y) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
\mathrm{Mod}(k_X) \arrow[r, "f_!"] & \mathrm{Mod}(k_Y)
\end{tikzcd}$$

3. *Se* $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$ *ha supporto proprio su* Y*, allora il morfismo* $f_{!!}F \to f_*F$ *è un isomorfismo*

Si noti che in generale $f_{!!}$ e ι non commutano.

Proposizione 4.3.8 *Se il supporto di* F *è proprio su* Y*, allora* $f_{!!}\iota_X F \xrightarrow{\sim} \iota_Y f_! F$

4.4 Ind-fasci associati a sottoinsiemi localmente chiusi

Sia $Z \subset X$ localmente chiuso, e $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$. Come già visto in precedenza, essendo $\mathrm{I}(k_X)$ una stack propria, possiamo definire gli ind-fasci F_Z e $\Gamma_Z F$.

Proposizione 4.4.1 *Siano* $F \in \mathrm{I}(k_X)$ *e* $G \in \mathrm{Mod}(k_X)$*,* $Z \subset X$ *localmente chiuso.*

1. ${}_Zk \simeq \beta_X k_Z$, ${}_ZF \simeq F \otimes_Z k$

2. $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(G, F \otimes_Z k) \simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G) \otimes_Z k$

Proposizione 4.4.2 *Per ogni* $Z \subset X$ *localmente chiuso ed ogni* $F \in \mathrm{I}(k_X)$ *si ha* $\Gamma_Z F \simeq \mathcal{I}hom({}_Zk, F)$.

Capitolo 5

Ind-fasci derivati

Chiameremo $D(\mathcal{A})$ e $D(k_X)$ le categorie derivate di $\mathrm{Mod}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{Mod}(k_X)$, $D(\mathrm{I}(\mathcal{A}))$ e $D(\mathrm{I}(k_X))$ le categorie derivate di $\mathrm{I}(\mathcal{A})$ e $\mathrm{I}(k_X)$.

5.1 Oggetti quasi iniettivi

Come già visto, la categoria degli ind-fasci non ammette in generale abbastanza iniettivi, però la maggior parte dei funtori che ci interessano possono essere derivati mediante l'uso di sequenze di quasi iniettivi.

Ricordiamo che un ind-fascio F è quasi iniettivo se il funtore

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot, F)$$

è esatto in $\mathrm{Mod}^c(k_X)$.

Inoltre, (vedi [8]) se F è un ind-fascio quasi iniettivo, abbiamo che

$$F \simeq \text{“}\varinjlim_i\text{”} F_i,$$

con $F_i \in \mathrm{Mod}(k_X)$ e F_i quasi iniettivi.

Proposizione 5.1.1 *Sia $F \in \mathrm{I}(k_X)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *F è quasi iniettivo;*
2. *il funtore $\mathcal{I}hom(\cdot, F)$ è esatto, e se $G \in \mathrm{I}(k_X)$, il funtore $\mathcal{I}hom$ è esatto;*
3. *il funtore $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot, F)$ è esatto, e se $G \in \mathrm{I}(k_X)$, il k_X-modulo $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(G, F)$ è soffice;*
4. *il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot, F)$ è esatto*

D'ora in poi indicheremo con $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$ la categoria dei k_X-moduli quasi iniettivi.

Corollario 5.1.2 *Sia* $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$*, allora per ogni successione esatta in* $\mathrm{I}(k_X)$

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

con $G' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$ *si hanno le seguenti successioni esatte*

$$0 \to \mathcal{I}hom(F, G') \to \mathcal{I}hom(F, G) \to \mathcal{I}hom(F, G'') \to 0$$

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G') \to \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G) \to \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G'') \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G') \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G'') \to 0$$

Infine (vedi [4], [8]), il seguente teorema è molto importante nell'ottica dello studio della categoria derivata degli ind-fasci, e, in particolare, per quanto riguarda la derivazione dei funtori definiti in precedenza:

Teorema 5.1.3 *La categoria* $\mathrm{I}(k_X)$ *ammette abbastanza quasi iniettivi.*

5.2 Operazioni interne

Introduciamo ora una nuova sottocategoria di $\mathrm{I}(k_X)$:

$$\mathcal{P} := \{``\oplus_i" F_i, F_i \in \mathrm{Mod}(k_X)\}$$

che ci permetterà di derivare il funtore $\mathcal{I}hom$.

Teorema 5.2.1 *La categoria* $\mathcal{P}(k_X) \times \mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$ *è* $\mathcal{I}hom(\cdot,\cdot)$*-iniettiva, rimane quindi ben definito il bifuntore*

$$R\mathcal{I}hom(\cdot,\cdot) \quad : \quad D^-(\mathrm{I}(k_X))^{op} \times D^+(\mathrm{I}(k_X)) \to D^+(\mathrm{I}(k_X))$$

Grazie al seguente lemma deriveremo anche i funtori $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}$ e $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}$

Lemma 5.2.2 *Siano* $F \in \mathcal{P}(k_X)$ *e* $G \in \mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$

1. $\mathcal{I}hom(F, G) \in \mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$*;*
2. $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, G)$ *è soffice*

Abbiamo quindi

Proposizione 5.2.3 *La categoria* $\mathcal{P}(k_X) \times \mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}(k_X)$ *è iniettiva rispetto ai funtori* $\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot,\cdot)$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot,\cdot)$*, rimangono quindi ben definiti i bifuntori*

$$\begin{array}{rcl} R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot,\cdot) & : & D^-(\mathrm{I}(k_X))^{op} \times D^+(\mathrm{I}(k_X)) \to D^+(\mathrm{Mod}(k_X)) \\ \mathrm{RHom}_{\mathrm{I}(k_X)}(\cdot,\cdot) & : & D^-(\mathrm{I}(k_X))^{op} \times D^+(\mathrm{I}(k_X)) \to D^+(k_X) \end{array}$$

Inoltre, analogamente a quanto visto in precedenza

Proposizione 5.2.4 *Siano* $F \in D^-(\mathrm{I}(k_X))$ *e* $G \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$

1. $R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F,G) \simeq \alpha_X R\mathcal{I}hom(F,G)$
2. $\mathrm{RHom}_{\mathrm{I}(k_X)}(F,G) \simeq \Gamma(X, R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F,G))$

Le formule di aggiunzione si estendono alla categoria derivata

Proposizione 5.2.5 *Siano* $F, K \in D^-(\mathrm{I}(k_X))$ *e* $G \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$

$$R\mathcal{I}hom(F \otimes K, G) \simeq R\mathcal{I}hom(F, R\mathcal{I}hom(K,G))$$

Infine valgono anche in categoria derivata i seguenti isomorfismi

Proposizione 5.2.6 *Siano* $F \in D^-(\mathrm{I}(k_X))$*,* $G \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$*,* $K \in D^-(k_X)$ *e* $L \in D^+(k_X)$*:*

1. $R\mathcal{H}om(\beta_X K, G) \simeq R\mathcal{H}om(K, \alpha_X G)$
2. $R\mathcal{H}om(\beta_X K \otimes G, F) \simeq R\mathcal{H}om(K, G \otimes F)$
3. $R\mathcal{I}hom(K, F \otimes \beta_X L) \simeq R\mathcal{I}hom(K,F) \otimes \beta_X L$

5.3 Operazioni esterne

Sia ora $f : X \to Y$ continua, ove X e Y sono spazi topologici di Hausdorff, localmente compatti e con una base numerabile di aperti.

Deriveremo i funtori di immagine inversa, immagine diretta e immagine diretta propria.

Proposizione 5.3.1 *La categoria* $\mathcal{Q}_{\mathcal{I}n}$ *è iniettiva rispetto a* f^{-1}, f_* *e* $f_{!!}$ *rimangono quindi ben definiti i funtori:*

$$\begin{array}{l} f^{-1} : D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \to D^+(\mathrm{I}(k_X)) \\ Rf_* : D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \to D^+(\mathrm{I}(k_X)) \\ Rf_{!!} : D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \to D^+(\mathrm{I}(k_X)) \end{array}$$

Analogamente a quanto succede nella categoria degli ind-fasci, anche in quella derivata questi tre funtori mantengono le proprietà di esattezza e di aggiunzione, come si può vedere dalle seguenti proposizioni.
Vediamo prima cosa succede derivando i funtori f^{-1} ed f_*

Proposizione 5.3.2 *1. Il funtore f^{-1} è esatto e commuta con "$\varinjlim$"*

2. Il funtore Rf_* è esatto a sinistra e commuta con $\varprojlim$

3. I seguenti diagrammi sono commutativi:

$$\begin{tikzcd}
D^+(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\iota_Y"] & \mathcal{D}^+(k_X) \arrow[d, "\iota_X"] \\
D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\alpha_Y"] & D^+\mathrm{I}(k_X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
\mathcal{D}^+(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] & D^+(k_X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}(k_X) \arrow[r, "Rf_*"] \arrow[d, "\iota_X"] & \mathrm{Mod}(k_Y) \arrow[d, "\iota_Y"] \\
D^+(\mathrm{I}(k_X)) \arrow[r, "Rf_*"] \arrow[d, "\alpha_X"] & D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\
D^+(k_X) \arrow[r, "Rf_*"] & D^+(k_Y)
\end{tikzcd}$$

Proposizione 5.3.3 *Per ogni $F \in D^+(\mathrm{I}(k_Y))$ e $G \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$ i funtori f^{-1} e Rf_* soddisfano la formula di aggiunzione*

$$\mathrm{RHom}_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}F, G) \simeq \mathrm{RHom}_{\mathrm{I}(k_X)}(F, Rf_*G)$$

inoltre valgono anche le seguenti formule di aggiunzione:

$$\begin{aligned}
R\mathcal{I}hom(f^{-1}F, G) &\simeq R\mathcal{I}hom(F, Rf_*G) \\
Rf_*R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(f^{-1}F, G) &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(k_X)}(F, Rf_*G)
\end{aligned}$$

E dalle due proposizioni precedenti otteniamo la seguente

Proposizione 5.3.4 *Il diagramma seguente è commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
D^+(k_Y) \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[d, "\beta_Y"] & D^+(k_X) \arrow[d, "\beta_X"] \\
D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \arrow[r, "f^{-1}"] & D^+(\mathrm{I}(k_X))
\end{tikzcd}$$

Ed ora vediamo cosa succede derivando il funtore di immagine diretta propria

Proposizione 5.3.5 *1. Il funtore $Rf_{!!}$ è esatto a sinistra e commuta con i limiti induttivi in $\mathrm{I}(k_X)$*

2. *Il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} D^+(\mathrm{I}(k_X)) \arrow[r, "Rf_{!!}"] \arrow[d, "\alpha_X"] & D^+(\mathrm{I}(k_Y)) \arrow[d, "\alpha_Y"] \\ D^+(k_X) \arrow[r, "Rf_!"] & D^+(k_Y) \end{tikzcd}$$

3. *Se $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$ ha supporto proprio su Y, allora il morfismo $Rf_{!!}F \to Rf_*F$ è un isomorfismo*

Inoltre abbiamo le seguenti relazioni tra f^{-1} e $Rf_{!!}$

Proposizione 5.3.6 *Sia $F \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$ e $G \in D^-(\mathrm{I}(k_Y))$ allora*

$$G \otimes Rf_{!!}F \simeq Rf_{!!}(f^{-1}G \otimes F)$$

Inoltre, se $G \in D^-(k_Y)$, il morfismo

$$Rf_{!!}R\mathcal{I}hom(f^{-1}G, F) \to R\mathcal{I}hom(G, f_{!!}F)$$

è un isomorfismo.

5.4 Dualità di Poincaré-Verdier

Come accade per fasci (vedi [5]), anche nel caso degli ind-fasci il funtore immagine diretta propria ammette un aggiunto a destra (vedi [2], [8]).

Teorema 5.4.1 *Sia $f : X \to Y$ continua tale che $f_{!!}$ sia di dimensione coomologica finita, allora il funtore $Rf_{!!}$ ammette un aggiunto a destra, che chiameremo $f^!$ che soddisfa*

$$\mathrm{Hom}_{D^+(\mathrm{I}(k_Y))}(Rf_{!!}F, G) \simeq \mathrm{Hom}_{D^+(\mathrm{I}(k_X))}(F, f^!G)$$

Inoltre, $\iota_X f^! \simeq f^! \iota_Y$

Corollario 5.4.2 *Per ogni $F \in D^+(\mathrm{I}(k_X))$ e $G \in D^+(\mathrm{I}(k_Y))$ i funtori $f^!$ e $Rf_{!!}$ soddisfano le seguenti formule di aggiunzione*

$$R\mathcal{I}hom(Rf_{!!}F, G) \simeq Rf_*R\mathcal{I}hom(F, f^!G)$$

$$R\mathcal{H}om(Rf_{!!}F, G) \simeq Rf_*R\mathcal{H}om(F, f^!G)$$

Vediamo ora alcune relazioni tra $f^!$ e i funtori già introdotti in precedenza

Proposizione 5.4.3 *Siano $F, G \in D^+(\mathrm{I}(k_Y))$ e $K \in D^-(\mathrm{I}(k_Y))$*

1. *c'è un morfismo naturale*

$$f^! F \otimes f^{-1} G \to f^!(F \otimes G)$$

2. $R\mathcal{I}hom(f^{-1}K, f^! G) \simeq f^! R\mathcal{I}hom(K, G)$

3. *se f è l'inclusione chiusa allora*

$$f^! \simeq f^{-1}\mathcal{I}hom((k_Y)_X, \cdot)$$

inoltre, $id \xrightarrow{\sim} f^! Rf_{!!}$.

5.5 Ind-anelli

Parleremo ora brevemente di anelli in $\mathrm{I}(k_X)$ e di moduli su ind-anelli.

Definizione 5.5.1 *Un ind-anello è definito da un oggetto $\mathcal{A} \in \mathrm{I}(k_X)$ e dai morfismi $\mu_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ e $\varepsilon_{\mathcal{A}} : k_X \to \mathcal{A}$, tali che i seguenti diagrammi siano commutativi:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}}"'] & k_X \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "\mu_{\mathcal{A}}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}}"'] & k_X \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \varepsilon_{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "\mu_{\mathcal{A}}"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \mu_{\mathcal{A}}"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "\mu_{\mathcal{A}}"] \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}}"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}.$$

Definizione 5.5.2 *Un ind-modulo (o più semplicemente, un $\mathcal{A}$-modulo) sinistro è dato da un oggetto $M \in \mathrm{I}(k_X)$ ed un morfismo $\mu_M : \mathcal{A} \otimes M \to M$ tali che i seguenti diagrammi siano commutativi:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes M \arrow[r, "\mu_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_M"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \mu_M"'] & \mathcal{A} \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_M"] & \mathcal{A}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{id}_M"'] & k_X \otimes M \arrow[d, "\varepsilon_{\mathcal{A}} \otimes \mathrm{id}_M"] \\
M & \mathcal{A} \otimes M \arrow[l, "\mu_{\mathcal{A}}"]
\end{tikzcd}$$

Definizione 5.5.3 *Un morfismo $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(M, N)$ di $\mathcal{A}$-moduli è un morfismo tale che il diagrama seguente sia commutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes M \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \varphi"] \arrow[d, "\mu_M"'] & \mathcal{A} \otimes N \arrow[d, "\mu_N"] \\
M \arrow[r, "\varphi"] & N
\end{tikzcd}$$

Otteniamo quindi una categoria, la categoria degli $\mathcal{A}$-moduli, che chiameremo $\mathrm{I}(\mathcal{A})$.

Esempio 5.5.4 *Sia $\mathcal{A}$ un fascio di k_X-algebre, allora $\beta_X\mathcal{A}$ è un anello in $\mathrm{I}(k_X)$. Dal fatto che β_X commuta con $\otimes$ segue che, se M è un fascio di $\mathcal{A}$-moduli, $\beta_X M$ è un fascio di $\beta_X\mathcal{A}$-moduli.*

Definizione 5.5.5 *Sia $\phi : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ definito nella maniera seguente: $\phi : a\otimes b \mapsto b\otimes a$. Chiameremo $\mathcal{A}^{op}$ l'ind-anello $\mathcal{A}$ con i morfismi $\varepsilon_{\mathcal{A}^{op}} := \varepsilon_{\mathcal{A}}$ e $\mu_{\mathcal{A}^{op}} := \mu_{\mathcal{A}} \circ \phi$. Un $\mathcal{A}^{op}$-modulo verrà chiamato $\mathcal{A}$-modulo destro.*

Lemma 5.5.6 *La corrispondenza $U \mapsto \mathrm{I}(\mathcal{A}|_U)$ è una stack propria.*

Definiamo ora i bifuntori $\otimes$ e $\mathcal{I}hom$ anche per gli $\mathcal{A}$-moduli. A tal fine introduciamo prima i seguenti morfismi:

$$d = \mu_M \otimes N - M \otimes \mu_N$$

$$\delta = \mathcal{I}hom(\mu_M, N) - \mathcal{I}hom(M, \nu_N)$$

ove $\nu_N : N \to \mathcal{I}hom(\mathcal{A}, N)$ è il morfismo dedotto da μ_N tramite l'isomorfismo $\mathrm{Hom}(\mathcal{A}\otimes M, M) \simeq \mathrm{Hom}(M, \mathcal{I}hom(\mathcal{A}, M))$.

Definizione 5.5.7 *Sia $\mathcal{A}$ un ind-anello, definiamo i bifuntori*

$$\cdot \otimes_{\mathcal{A}} \cdot : \mathrm{I}(\mathcal{A}^{op}) \times \mathrm{I}(\mathcal{A}) \to \mathrm{I}(k_X)$$

$$\mathcal{I}hom(\cdot,\cdot) : \mathrm{I}(\mathcal{A})^{op} \times \mathrm{I}(\mathcal{A}) \to \mathrm{I}(k_X)$$

nella seguente maniera:

$$M \otimes_{\mathcal{A}} N := \mathrm{coker}(M \otimes \mathcal{A} \otimes N \xrightarrow{d} M \otimes N)$$

$$\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(M, N) := \ker(\mathcal{I}hom(M, N) \xrightarrow{\delta} \mathcal{I}hom(\mathcal{A}\otimes M, N))$$

Proposizione 5.5.8 *Vale l'isomorfismo*

$$\alpha_X \mathcal{I}hom_{\mathcal{A}}(M, N) \simeq \mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\mathcal{A})}(M, N)$$

Consideriamo ora più anelli su $\mathrm{I}(k_X)$

Proposizione 5.5.9 *Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ tre ind-anelli.*

1. *Il funtore $\otimes_{\mathcal{A}_2}$ induce un funtore:*

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2^{op}) \times \mathrm{I}(\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3^{op}) \to \mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_3^{op})$$

2. *Il funtore $\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}_1}$ induce un funtore:*

$$\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^{op} \times \mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_3) \to \mathrm{I}(\mathcal{A}_2^{op} \otimes \mathcal{A}_3)$$

Possiamo anche derivare i funtori precedentemente definiti. Infatti in [8] si dimostra il seguente

Teorema 5.5.10 *Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ tre ind-anelli. Allora i seguenti funtori sono ben definiti:*

$$\begin{array}{rl} \overset{L}{\underset{\mathcal{A}_2}{\otimes}} : & D^-(\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2^{op})) \times D^-(\mathrm{I}(\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3^{op})) \to D^-(\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_3^{op})) \\ R\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}_1} : & D^-(\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)^{op}) \times D^+(\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_3)) \to D^+(\mathrm{I}(\mathcal{A}_2^{op} \otimes \mathcal{A}_3)) \end{array}$$

Similmente si possono derivare anche i funtori $\mathcal{H}om$ e Hom.

Proposizione 5.5.11 *Siano $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4$ quattro ind-anelli. Vale allora il seguente isomorfismo in $D^+(\mathrm{I}(\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_4^{op}))$:*

$$R\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}_2}({}_2M_3, R\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}_1}({}_1M_2, {}_1N_4)) \simeq R\mathcal{I}hom_{\mathcal{A}_1}({}_1M_2 \otimes {}_2M_3, {}_1N_4),$$

ove ${}_iM_j \in D^-(\mathrm{I}(\mathcal{A}_i \otimes \mathcal{A}_j)^{op})$ e ${}_1N_4 \in D^+(\mathrm{I}(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_4^{op}))$.

Cercheremo adesso di estendere le operazioni esterne già definite in precedenza agli ind-anelli.
D'ora in poi $f : X \to Y$ sarà una funzione continua, e $\mathcal{A}$ un ind-anello, supporremo inoltre che $\mathrm{Mod}(k_X)$ abbia dimensione coomologica finita.

Teorema 5.5.12 *Con $D^\sharp$ intenderemo D, D^+, D^-, D^b.*

1. $f^{-1} : \mathrm{I}(k_Y) \to \mathrm{I}(k_X)$ *induce un funtore* $f^{-1} : D^\sharp\mathrm{I}(\mathcal{A}) \to D^\sharp\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A})$
2. $f_* : \mathrm{I}(k_X) \to \mathrm{I}(k_Y)$ *induce un funtore* $Rf_* : D^\sharp\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A}) \to D^\sharp\mathrm{I}(\mathcal{A})$
3. $f_{!!} : \mathrm{I}(k_X) \to \mathrm{I}(k_Y)$ *induce un funtore* $Rf_{!!} : D^\sharp\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A}) \to D^\sharp\mathrm{I}(\mathcal{A})$

Teorema 5.5.13 *Per $F \in D^+\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A})$ e $G \in D^+\mathrm{I}(\mathcal{A})$ vale la formula di aggiunzione*

$$\mathrm{Hom}_{D^+\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A})}(f^{-1}G, F) \simeq \mathrm{Hom}_{D^+\mathrm{I}(\mathcal{A})}(G, Rf_*F).$$

Teorema 5.5.14 *Per $F \in D^-\mathrm{I}(f^{-1}\mathcal{A})$ e $G \in D^-\mathrm{I}(\mathcal{A}^{op})$ vale il seguente isomorfismo:*

$$G \overset{L}{\underset{\mathcal{A}}{\otimes}} Rf_{!!}F \simeq Rf_{!!}(f^{-1}G \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{A}}{\otimes}} F).$$

Vedremo ora alcuni risultati per $\mathcal{A} = \beta\mathcal{B}$, ove $\mathcal{B}$ è un fascio di k_X-algebre. Il funtore β_X induce un funtore esatto

$$\beta : \mathrm{Mod}(\mathcal{B}) \to \mathrm{I}(\beta\mathcal{B})$$

Teorema 5.5.15 *Siano $K \in D^b(k_X)$, $F \in D^b(\mathcal{B})$, $M \in D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{B}^{op}))$, $N \in D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{B}))$. Valgono i seguenti isomorfismi:*

1. $\alpha(M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} N) \simeq \alpha M \overset{L}{\underset{\mathcal{B}}{\otimes}} \alpha N,$

2. $R\mathcal{I}hom(K, M) \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} \beta F \xrightarrow{\sim} R\mathcal{I}hom(K, M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} \beta F),$

3. $R\mathcal{H}om(K, M) \overset{L}{\underset{\mathcal{B}}{\otimes}} F \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(K, M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} \beta F).$

Teorema 5.5.16 *Siano $G \in D^b\mathrm{I}(\mathcal{B}^{op})$, $F \in D^b(\mathcal{B})$, $M \in D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{B}))$. Valgono i seguenti isomorfismi:*

1. $\beta(G \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} F) \simeq \beta G \overset{L}{\underset{\mathcal{B}}{\otimes}} \beta F,$

2. $R\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\alpha M, F) \simeq \alpha R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{B}}(M, F) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\beta\mathcal{B})}(M, F),$

3. $R\mathcal{H}om_{\mathrm{I}(\beta\mathcal{B})}(\beta F, M) \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(F, \alpha M).$

Teorema 5.5.17 *Siano $M \in D^b\mathrm{I}(\beta\mathcal{B}^{op})$, $F \in D^b(\mathcal{B})$. Vale il seguente isomorfismo:*

$$f^!(M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{B}}{\otimes}} \beta F) \simeq f^! M \overset{L}{\underset{\beta f^{-1}\mathcal{B}}{\otimes}} \beta f^{-1} F.$$

Capitolo 6

Fasci sottoanalitici e ind-fasci

In questo capitolo X sarà una varietà analitica reale. Per una trattazione più dettagliata degli insiemi sottoanalitici si vedano [3], [5], per quanto riguarda fasci sottoanalitici e ind-fasci si prenda come riferimento [8].

6.1 Il sito sottoanalitico

Richiamiamo innnanzi tutto la definizione di insieme sottoanalitico

Definizione 6.1.1 *Un sottoinsieme $Z \subset X$ si dice sottoanalitico in $x \in X$ se esiste un intorno U di x, delle varietà analitiche compatte Y_j^i ($i = 1, 2$ $1 \leq j \leq N$) e morfismi $f_j^i : Y_j^i \to X$ tali che*

$$Z \cap U = U \cap \bigcup_{j=1}^{N} (f_j^1(Y_j^1) \backslash f_j^2(Y_j^2))$$

Z si dice sottoanalitico in X se è sottoanalitico in ogni $x \in X$

Vediamo ora alcune proprietà dei suddetti insiemi che ci saranno utili in seguito

Proposizione 6.1.2

1. *Unione e intersezione di famiglie localmente finite di sottoinsiemi sottoanalitici sono sottoanalitiche*
2. *Il complementare di un sottoinsieme sottoanalitico è sottoanalitico*
3. *L'interno, la chiusura e la frontiera di un sottoinsieme sottoananlitico sono sottoanalitici*

Proposizione 6.1.3 *Un sottoinsieme sottoanalitico relativamente compatto ha un numero finito di componenti connesse.*

Proposizione 6.1.4 *Sia $f : X \to Y$ un morfismo di varietà analitiche reali. Allora*

1. *se $W \subset Y$ è sottoanalitico su Y, $f^{-1}(W)$ è sottoanalitico su X*
2. *se $Z \subset X$ è sottoanalitico su X e f è propria su $\overline{W}$, $f(W)$ è sottoanalitico su Y*

Consideriamo ora la categoria $\mathrm{Op}_{sa,X}$, i cui oggetti sono gli aperti sottoanalitici di X, in cui frecce e prodotti fibrati sono definiti come nell'Esempio 2.1.4.

Definiamo una topologia di Grothendieck su X nella maniera seguente: dato $U \in \mathrm{Op}_{sa,X}$, diremo che $S \subset \mathrm{Op}_{sa,X}$ è un ricoprimento di U se per ogni compatto $K \subset X$ esiste un numero finito di U_i, $\{U_i\} \subset S$, tali che $K \cap U = K \cap \left(\bigcup_i U_i\right)$. Gli assiomi della Definizione 2.1.2 sono soddisfatti. Chiameremo sito sottoanalitico X_{sa} il sito ottenuto dotando $\mathrm{Op}_{sa,X}$ della topologia sopra definita. Allo stesso modo definiamo il sito $X_{sa,c}$ considerando solo gli aperti relativamente compatti di X.

Se $f : X \to Y$ è un morfismo di varietà analitiche reali resta definito il morfismo di siti $f : X_{sa} \to Y_{sa}$ associato al funtore

$$\begin{array}{rcl} f^t : \mathrm{Op}_{sa,Y} & \to & \mathrm{Op}_{sa,X} \\ U & \mapsto & f^{-1}(U) \end{array}$$

Potremo quindi costruire dei fasci sul sito X_{sa} e dato un funtore di fiti f potremo calcolare i funtori di fasci immagine diretta e immagine inversa.

6.2 Ind-fasci sottoanalitici

Vedremo ora una corrispondenza tra fasci sul sito sottoanalitico e ind-fasci

Chiameremo Op_{sa} gli aperti sottoanalitici di X e $\mathrm{Op}_{sa,c}$ quelli relativamente compatti.

Introduciamo ora la categoria $\mathcal{K}$ i cui oggetti sono

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{K}) = \{(I, \{U_i\}_{i\in I}); I \text{ finito}, U_i \in \mathrm{Op}_{sa}, U_i \neq \varnothing\}$$

ed i morfismi sono dati da

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}((I, \{U_i\}_i), (J, \{V_j\}_j)) = \{(a_{ji})_{j\in J, i\in I}; a_{ji} \in k, a_{ji} \neq 0 \Rightarrow U_i \subset V_j\}$$

Allo stesso modo definiamo $\mathcal{K}_c$, in cui $U_i \in \mathrm{Op}_{sa,c}$.

Possiamo identificare $\mathcal{K}$ come una sottocategoria di $\mathrm{Mod}(k_X)$ tramite il funtore fedele $\mathcal{K} \to \mathrm{Mod}(k_X)$ che associa a $(I, \{U_i\}_i)$ il fascio $\bigoplus_i k_{U_i}$.

Definizione 6.2.1 *Sia $F \in \mathrm{Mod}(k_X)$*

1. *F è $\mathcal{K}_c$-finito se esiste $G \in \mathcal{K}_c$ e un epimorfismo $G \twoheadrightarrow F$*
2. *F è $\mathcal{K}_c$-pseudocoerente se per ogni morfismo $\phi : G \to F$ con $G \in \mathcal{K}_c$, $\ker\phi$ è $\mathcal{K}_c$-finito*
3. *F è $\mathcal{K}_c$-coerente se è sia $\mathcal{K}_c$-finito che $\mathcal{K}_c$-pseudocoerente*

Chiameremo $\mathrm{Coh}(X_{sa})$ la sottocategoria di $\mathrm{Mod}(k_X)$ costituita dagli oggetti $\mathcal{K}_c$-coerenti.

Teorema 6.2.2 *La categoria $\mathrm{Coh}(X_{sa})$ è stabile per nuclei, conuclei e somme dirette finite (è quindi abeliana), e il funtore naturale $\mathrm{Coh}(X_{sa}) \to \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ è esatto. Inoltre $\mathrm{Coh}(X_{sa})$ contiene $\mathcal{K}_c$.*

Vediamo ora alcune proposizioni che ci porteranno a vedere i fasci sui sottoanalitici come ind-fasci.

Chiameremo ρ il funtore di siti associato al funtore

$$\begin{array}{rcl} \rho^t : \mathrm{Op}_{sa} & \to & \mathrm{Op}_X \\ U & \mapsto & U, \end{array}$$

e chiameremo $\rho_{sa_*} : \mathrm{Coh}(X_{sa}) \to \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ la restrizione di ρ_* a $\mathrm{Coh}(X_{sa})$.

Proposizione 6.2.3 *Sia dato il funtore di siti $\rho : X \to X_{sa}$ definito in precedenza:*

1. *Il funtore ρ_* è pienamente fedele, e vale $\rho^{-1} \circ \rho_* \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$*
2. *Il funtore ρ^{-1} ammette un aggiunto a sinistra che chiameremo $\rho_!$*

Proposizione 6.2.4 *Il funtore ρ_{sa_*} è esatto e pienamente fedele, e $\rho^{-1}\rho_{sa_*}$ è isomorfo al funtore canonico $\mathrm{Coh}(X_{sa}) \to \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$.*

Proposizione 6.2.5 *Sia $G \in \mathrm{Coh}(X_{sa})$, e sia $\{F_i\}_i$ un sistema induttivo in $\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ (indiciato da una categoria I filtrante). Allora il morfismo naturale*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{k_{X_{sa}}}(\rho_* G, F_i) \to \mathrm{Hom}_{k_{X_{sa}}}\left(\rho_* G, \varinjlim_i F_i\right)$$

è un isomorfismo.

Proposizione 6.2.6 *Sia* $F \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$*. Allora vale il seguente isomorfismo*

$$F \simeq \varinjlim_i \rho_* F_i$$

ove $\{F_i\}_i$ *è un sistema induttivo in* $\mathrm{Coh}(X_{sa})$*.*

Consideriamo ora la categoria $\mathrm{Ind}(\mathrm{Coh}(X_{sa}))$, che per semplicità scriveremo $\mathrm{I}(\mathrm{Coh}(X_{sa}))$. Costruiamo un funtore

$$\lambda : \mathrm{I}(\mathrm{Coh}(X_{sa})) \to \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$$

estendendo il funtore ρ_{sa_*} nel modo seguente

$$\lambda\Big(\text{“}\varinjlim_i\text{''} F_i\Big) = \varinjlim_i \rho_{sa_*}(F_i)$$

Teorema 6.2.7 *Il funtore* λ *è un'equivalenza di categorie*

Introduciamo ora dei nuovi funtori per rendere più completo il quadro delle corrispondenze tra fasci, fasci sottoanalitici e ind-fasci.

Chiameremo $\iota_{X_{sa}}$ il funtore naturale $\mathrm{Coh}(X_{sa}) \to \mathrm{Mod}(k_X)$, da cui deduciamo un funtore $\mathrm{ICoh}(X_{sa}) \to \mathrm{I}(k_X)$, e quindi, vista l'equivalenza di categorie, un funtore $I_{X_{sa}} : \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \to \mathrm{I}(k_X)$. Quest'ultimo è esatto e commuta coi limiti induttivi.

Visto che $\mathrm{I}(\mathrm{Coh}(X_{sa}))$ è equivalente alla categoria $\mathrm{Coh}(X_{sa})^{\wedge,add,l}$ (Proposizione 1.1.4), possiamo definire un funtore $J_{X_{sa}} : \mathrm{I}(k_X) \to \mathrm{I}(\mathrm{Coh}(X_{sa})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$: dati $F \in \mathrm{I}(k_X)$ e $G \in \mathrm{Coh}(X_{sa})$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(\mathrm{Coh}(X_{sa}))}(G, J_{X_{sa}}F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}(k_X)}(\iota_X \iota_{X_{sa}} G, F)$. Si dimostra (vedi [8]) che $J_{X_{sa}}$ è aggiunto a destra di $I_{X_{sa}}$ e commuta coi limiti induttivi (filtranti).

Riassumiamo ora coi seguenti diagrammi le compatibilità tra i funtori definiti in questo capitolo.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}(X_{sa}) \arrow[r, "\iota_{X_{sa}}"] \arrow[d, "\rho_{sa_*}"'] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[d, "\iota_X"] \\
\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \arrow[r, "I_{X_{sa}}"] & \mathrm{I}(k_X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}(X_{sa}) \arrow[r, "\iota_{X_{sa}}"] \arrow[d, "\rho_{sa_*}"] & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[dl, shift left, "\rho_*"] \\
\mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \arrow[ur, shift left, "\rho^{-1}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[dl, "\rho_*"'] \arrow[d, "\iota_X"] \\ \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) & \mathrm{I}(k_X) \arrow[l, "J_{X_{sa}}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Mod}(k_X) \\ \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \arrow[ur, "\rho^{-1}"] \arrow[r, "I_{X_{sa}}"] & \mathrm{I}(k_X) \arrow[u, "\alpha_X"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Mod}(k_X) \arrow[dl, "\rho_!"'] \arrow[d, "\beta_X"] \\ \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \arrow[r, "I_{X_{sa}}"] & \mathrm{I}(k_X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{Mod}(k_X) \\ \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}}) \arrow[ur, "\rho^{-1}"] & \mathrm{I}(k_X) \arrow[u, "\alpha_X"'] \arrow[l, "J_{X_{sa}}"] \end{tikzcd}$$

Abbiamo così un'idea delle relazioni tra la categoria dei fasci, quella dei fasci sottoanalitici e degli ind-fasci.

6.3 Costruzione di ind-fasci

In questo capitolo X sarà una varietà analitica reale. Come in precedenza, chiameremo X_{sa} il sito sottoanalitico.
Chiameremo $\mathbb{R}\text{-C}(k_X)$ la categoria abeliana dei fasci $\mathbb{R}$-costruibili (vedi [3], [5]), e con $\mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$ la sottocategoria piena dei fasci $\mathbb{R}$-costruibili a supporto compatto.

Chiameremo $\mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$ la categoria $\mathrm{Ind}(\mathbb{R}\text{-C}^c(k_X))$.

In [8] viene dimostrato un teorema, che, unito all'equivalenza tra $\mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$ e $\mathrm{Coh}(X_{sa})$, porta al seguente risultato:

Teorema 6.3.1 *Sia $F \in \mathrm{Psh}(k_{X_{sa,c}})$ tale che:*

1. $F(\varnothing) = 0$
2. *per ogni $U, V \in \mathrm{Op}_{sa,c}$ la sequenza $0 \to F(U \cup V) \to F(U) \oplus F(V) \to F(U \cap V)$ sia esatta.*

Allora $F \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa,c}})$ e esiste un unico $\widetilde{F} \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$ tale che $\widetilde{F}(U) \simeq F(U)$ per ogni $U \in \mathrm{Op}_{sa,c}$.

Inoltre vale la seguente

Proposizione 6.3.2 *Sia $F \in \mathrm{Mod}(k_{X_{sa}})$ tale che per ogni $U, V \in \mathrm{Op}_{sa,c}$, con $U \subset V$ la sequenza*

$$F(V) \to F(U) \to 0$$

sia esata, allora F è quasi-iniettivo in $\mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$.

Chiameremo $D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$ la sottocategoria piena di $D^b(\mathrm{I}(k_X))$ costituita da oggetti a coomologia in $\mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$. Il funtore esatto $I_{X_{sa}} : \mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X) \to \mathrm{I}(k_X)$ induce un funtore triangolato

$$D^b(\mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)) \to D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X)). \tag{6.1}$$

Teorema 6.3.3 *Il funtore (6.1) è un'equivalenza di categorie triangolate.*

Lemma 6.3.4 *Sia $f : X \to Y$ analitica reale e sia $F \in D^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$. Allora i seguenti funtori sono ben definiti:*

1. $Rf_{!!} : D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X)) \to D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_Y))$
2. $f^! : D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_Y)) \to D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$
3. $\otimes : D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X)) \times D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X)) \to D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$
4. $R\mathcal{I}hom(F, \cdot) : D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X)) \to D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$

Proposizione 6.3.5 *Sia $f : F \to G$ un morfismo in $D^b_{\mathbb{IR}\text{-c}}(\mathrm{I}(k_X))$, allora f è un isomorfismo se e solo se per ogni $K \in \mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$ induce un isomorfismo $R\mathcal{H}om(K, F) \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om(K, G)$.*

Dim. Consideriamo il triangolo distinto

$$F \to G \to L \xrightarrow{+1}$$

e supponiamo che per ogni $K \in \mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$, $R\mathcal{H}om(K, L) = 0$. Sia $\overline{k} \in \mathbb{Z}$ tale che $H^k = 0$ per $k < \overline{k}$. Allora abbiamo che $\mathcal{H}om(K, H^{\overline{k}}(L)) \simeq H^{\overline{k}} R\mathcal{H}om(K, L)$. Perciò $\mathrm{Hom}(K, H^{\overline{k}}(L)) = 0$ e quindi, visto che $H^{\overline{k}}(L) \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$, si ha che $H^{\overline{k}}(L) = 0$.

□

Proposizione 6.3.6 *Sia $F \in \mathrm{I}_{\mathbb{R}\text{-c}}(k_X)$ e supponiamo che il funtore $\mathcal{H}om(\cdot, F)$ sia esatto sulla categoria $\mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$. Allora per ogni $G \in \mathbb{R}\text{-C}^c(k_X)$ e per $i \neq 0$, $H^i R\mathcal{H}om(G, F) = 0$.*

Capitolo 7

Distribuzioni temperate

7.1 Definizione di distribuzione temperata

Introduciamo ora la definizione di distribuzione temperata (si vedano [3], [9]). D'ora in poi X sarà una variatà analitica reale.

Definizione 7.1.1 *Sia u una distribuzione su un aperto $U \subset X$. Diremo che u è temperata nel punto $x \in X$ se esiste un intorno V di x ed una distribuzione v definita su V tale che $u|_{U \cap V} = v|_{U \cap V}$. Diremo che u è temperata in X, se lo è in ogni punto.*

Abbiamo inoltre il seguente

Lemma 7.1.2 *Sia u una distribuzione definita su $U \subset X$. Sono equivalenti:*

1. *u è temperata in X,*
2. *u è temperata in ogni punto della frontiera di U,*
3. *esiste una distribuzione v definita su X tale che $u = v|_U$.*

Come conseguenza di un risultato di Lojasiewicz (vedi [10]) abbiamo il seguente

Teorema 7.1.3 *Sia $U \subset X$ un aperto sottoanalitico e sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento di U con tutti gli U_i sottoanalitici. Una distribuzione u definita su U è temperata se e solo se lo sono tutte le sue restrizioni $u|_{U_i}$.*

7.2 Il funtore $\mathrm{T}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b)$

In [3] viene definito il fascio $\mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)$, sottofascio di $\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X)$ nella seguente maniera:

Definizione 7.2.1 *Sia F un fascio $\mathbb{R}$-costruibile su X, $U \subset X$ un aperto. Le sezioni $\Gamma(U, \mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$ sono le $\varphi \in \Gamma(U, \mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X))$ tali che per ogni aperto sottoanalitico relativamente compatto V di U, e $s \in F(V)$, $\varphi(s)$ sia una distribuzione temperata in U.*

Inoltre, si dimostrano le seguenti due proposizioni

Proposizione 7.2.2 *Sia $U \subset X$ aperto sottoanalitico, e $V \subset X$ un aperto. Allora*

$$\Gamma(V, \mathrm{T}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_U, \mathcal{D}b_X) = \{u \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{D}b_X); \\ u \textit{ temperata in ogni punto di } V\}$$

Proposizione 7.2.3 *Per ogni chiuso sottoanalitico $S \subset X$ si ha*

$$\mathrm{T}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_S, \mathcal{D}b_X) = \Gamma_S(\mathcal{D}b_X)$$

Se adesso prendiamo in considerazione la categoria dei $\mathcal{D}_X$-moduli (che chiameremo $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$), notiamo subito che il funtore $\mathrm{T}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_X)$, è un funtore contravariante dalla categoria $\mathbb{R}$-C$(\mathbb{C}_X)$ alla categoria $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$.

Inoltre si dimostra il seguente

Teorema 7.2.4 *Il funtore $\mathrm{T}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_X)$ è un funtore esatto.*

Sia ora $U \subset X$ aperto sottoanalitico, $S = X \backslash U$ e consideriamo la sequenza esatta

$$0 \to \mathbb{C}_U \to \mathbb{C}_X \to \mathbb{C}_S \to 0,$$

applicando il funtore esatto contravariante $\mathrm{T}\mathcal{H}om(\cdot, \mathcal{D}b_X)$, otteniamo la sequenza esatta

$$0 \to \Gamma_S(\mathcal{D}b_X) \to \mathcal{D}b_X \to \mathrm{T}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_U, \mathcal{D}b_X) \to 0.$$

7.3 L'ind-fascio delle distribuzioni temperate

Definiamo ora $\mathcal{D}b^t(U)$, lo spazio delle distribuzioni temperate su un aperto sottoanalitico $U \subset X$ tramite la successione esatta

$$0 \to \Gamma_{X \backslash U}(X; \mathcal{D}b_X) \to \Gamma(X; \mathcal{D}b_X) \to \mathcal{D}b^t_X(U) \to 0.$$

Si vede subito che

$$\mathrm{T}\mathcal{H}om(\mathbb{C}_U, \mathcal{D}b_X) = V \to \mathcal{D}b^t_X(U \cap V).$$

Inoltre per il Teorema (7.1.3) si ricava il seguente

Lemma 7.3.1 *Siano $U, V \subset X$ due aperti sottoanalitici. Allora al sequenza*

$$0 \to \mathcal{D}b_X^t(U \cup V) \to \mathcal{D}b_X^t(U) \oplus \mathcal{D}b_X^t(V) \to \mathcal{D}b_X^t(U \cap V) \to 0$$

è esatta.

Grazie al Teorema 6.3.1, $\mathcal{D}b_X^t$ diventa un fascio su X_{sa}. Inoltre, sempre per il Teorema 7.1.3, la sequenza

$$\mathcal{D}b^t(V) \to \mathcal{D}b^t(U) \to 0$$

con $V \subset U$ aperti sottoanalitici è esatta, e quindi, applicando la Proposizione 6.3.2, il funtore $\mathcal{D}b^t(\cdot)$ è esatto sulla categoria $\mathbb{R}\text{-}\mathrm{C}^c(\mathbb{C}_X)^{op}$.
Inoltre, in [8] si dimostra che $\mathcal{D}b_X^t$, è anche un $\rho_!\mathcal{D}_X$-modulo, quindi, applicando il funtore $I_{X_{sa}}$ otteniamo che $I_{X_{sa}}(\mathcal{D}b_X^t) \in \mathrm{I}(\beta\mathcal{D}_X)$. Identificheremo $\mathcal{D}b_X^t$ con la sua immagine tramite $I_{X_{sa}}$, ottenendo così l'ind-fascio delle distribuzioni temperate. Vale la seguente

Proposizione 7.3.2 *Sia $F \in \mathbb{R}\text{-}\mathrm{C}^c(\mathbb{C}_X)^{op}$, allora*

$$\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X^t) \simeq \mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X).$$

Quindi, applicandola Proposizione 6.3.6 otteniamo la seguente

Proposizione 7.3.3 *Sia $F \in D^b_{\mathbb{R}\text{-c}}(\mathbb{C}_X)$, allora*

$$R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X^t) \simeq \mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_X).$$

Capitolo 8

Ind-fasci su varietà analitiche

8.1 $\mathcal{D}$-moduli

D'ora in poi X sarà una varietà analitica complessa. Chiameremo $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni olomorfe su X, Ω_X il fascio delle forme di grado massimo.

Introduciamo $\mathcal{D}_X$, il fascio di anelli degli operatori differenziali di ordine finito a coefficienti olomorfi (come referenze si vedano [1], [16]). Localmente, una sezione $P \in \Gamma(U, \mathcal{D}_X)$ si può scrivere in modo unico nella forma seguente

$$P = \sum_{\alpha \leq n} f_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

ove $f_\alpha(x)$ è olomorfa su U. Chiameremo quindi $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ (rispettivamente $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^{op})$ la categoria dei $\mathcal{D}_X$-moduli sinistri (destri), cioè dei fasci $\mathcal{M}$ su X tali che $\Gamma(U, \mathcal{M})$ sia un $\Gamma(U, \mathcal{D}_X)$-modulo sinistro (destro) per ogni aperto $U \subset X$. Possiamo passare dai $\mathcal{D}_X$-moduli sinistri ai $\mathcal{D}_X$-moduli destri, abbiamo infatti la seguente

Proposizione 8.1.1 *Il funtore da* $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ *in* $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^{op})$ *definito da*

$$\mathcal{M} \mapsto \Omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$$

è un'equivalenza di categorie. Il suo quasi-inverso è dato dal funtore

$$\mathcal{N} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{N}) \simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^{\otimes(-1)}$$

ove $\mathcal{N} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X^{op})$.

Sia ora $f : X \to Y$ un morfismo di varietà complesse. Introdurremo ora i bimoduli di trasferimento

$$\mathcal{D}_{X \leftarrow Y} = \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{D}_Y$$

$$\mathcal{D}_{Y\to X} = \Omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} (f^{-1}\Omega_Y)^{\otimes(-1)}.$$

Il primo è un $(\mathcal{D}_X, f^{-1}\mathcal{D}_Y)$-bimodulo, il secondo un $(f^{-1}\mathcal{D}_Y, \mathcal{D}_X)$-bimodulo.

Notiamo che se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono morfismi di varietà complesse, e $h = g\circ f$, abbiamo che

$$\mathcal{D}_{X\to Z} \simeq \mathcal{D}_{X\to Y} \otimes \mathcal{D}_{Y\to Z}.$$

Ricordando che ogni morfismo si fattorizza in un'immersione chiusa (nel grafico) ed una proiezione, concentriamoci su questi due casi.

Proposizione 8.1.2 *Siano U, V due intorni dello 0 in $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$. Allora:*

1. *Il modulo di trasferimento della proiezione*

$$\begin{array}{rcl} p : U\times V & \to & V \\ (u,v) & \mapsto & v \end{array}$$

   come $\mathcal{D}_{U\times V}$-modulo sinistro è isomorfo a

$$\mathcal{D}_{U\times V}/\mathcal{D}_{U\times V}\partial_{u_1} + \cdots + \mathcal{D}_{U\times V}\partial_{u_n}.$$

   È coerente, e il complesso di Koszul

$$K(\mathcal{D}_{U\times V}, \cdot\partial_{u_1}, \cdots, \cdot\partial_{u_n})$$

   è una sua risoluzione di lunghezza n.

2. *Il modulo di trasferimento dell'inclusione chiusa*

$$\begin{array}{rcl} i : U & \to & U\times V \\ u & \mapsto & (u,0) \end{array}$$

   come $\mathcal{D}_{U\times V}$-modulo destro è isomorfo a

$$\mathcal{D}_{U\times V}/v_1\mathcal{D}_{U\times V} + \cdots + v_m\mathcal{D}_{U\times V}.$$

   È coerente, e il complesso di Koszul

$$K(\mathcal{D}_{U\times V}, v_1\cdot, \cdots, v_m\cdot)$$

   è una sua risoluzione di lunghezza m.

Definiamo infine $\underline{f}^{-1}$, $\underline{f}_*$, $\underline{f}_!$, i funtori immagine inversa, immagine diretta e immagine diretta propria per i $\mathcal{D}$-moduli sinistri (oppure, più in generale, per $\mathcal{M} \in \mathrm{Ob}(D^b(\mathcal{D}_X))$):

$$\underline{f}^{-1}\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes}} f^{-1}\mathcal{M}$$

$$\underline{f}_*\mathcal{M} = Rf_*(\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M})$$

$$\underline{f}_!\mathcal{M} = Rf_!(\mathcal{D}_{Y\to X} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{M}).$$

Sia ora M una varietà analitica reale, X una sua complessificazione, $i : M \hookrightarrow X$ l'inclusione. Denoteremo con $\mathcal{D}_M = i^{-1}\mathcal{D}_X = (\mathcal{D}_X|_M)$ l'anello degli operatori differenziali a coefficienti analitici. Definiamo dunque i $\mathcal{D}_M$-moduli. Introduciamo $\mathcal{A}_M$, il fascio delle funzioni analitiche su M (che altro non è che $\mathcal{O}_X|_M$) e $\mathcal{A}_M^\vee = \Omega_M \otimes or_M$, il fascio delle densità analitiche.

Se $f : M \to N$ è un morfismo di varietà analitiche, i bimoduli di trasferimento diventano

$$\mathcal{D}_{M\to N} = \mathcal{D}_M \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_N} f^{-1}\mathcal{A}_M$$

$$\mathcal{D}_{N\leftarrow M} = \mathcal{A}_N^\vee \otimes_{\mathcal{A}_N} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \otimes_{f^{-1}\mathcal{A}_M} (f^{-1}\mathcal{A}_M^\vee)^{\otimes(-1)}.$$

Il primo è un $(\mathcal{D}_M, f^{-1}\mathcal{A}_N)$-bimodulo, il secondo un $(f^{-1}\mathcal{A}_N, \mathcal{D}_M)$-bimodulo.

8.2 Operazioni sulle distribuzioni temperate

Come già visto in precedenza, l'ind-fascio $\mathcal{D}b_M^t$ è un $\mathrm{I}(\beta\mathcal{D}_M)$-modulo sinistro. Chiameremo invece $\mathcal{D}b_M^{t,\vee}$ l'$\mathrm{I}(\beta\mathcal{D}_M^{op})$-modulo

$$\mathcal{D}b^{t,\vee} = \beta\mathcal{A}_M^\vee \otimes_{\beta\mathcal{A}_M} \mathcal{D}b^t$$

Lo scopo di questo capitolo è quello di descrivere le proprietà funtoriali dell'ind-fascio delle distribuzioni temperate. In particolare, stabiliremo una serie di isomorfismi nella categoria derivata degli ind-fasci costruibili. A tal fine, utilizzeremo i morfismi ottenuti in [12], ed i risultati di [6].

Proposizione 8.2.1 (vedi [12]). *Sia $f : M \to N$ un morfismo di varietà analitiche reali. Esiste un morfismo in $D^b(\mathrm{I}(\beta f^{-1}\mathcal{D}_N^{op}))$:*

$$\mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\mathcal{D}_{M\to N} \to f^!\mathcal{D}b_N^{t,\vee} \tag{8.1}$$

Proposizione 8.2.2 *Il morfismo (8.1) è un isomorfismo.*

Dim. Basta dimostrare che per ogni $F \in \mathbb{R}\text{-}\mathrm{C}^c(\mathbb{C}_M)$ valga l'isomorfismo

$$\mathrm{RHom}(F, \mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\mathcal{D}_{M\to N}) \simeq \mathrm{RHom}(F, f^!\mathcal{D}b_N^{t,\vee}).$$

Abbiamo che, per ogni $F \in \mathbb{R}\text{-C}^c(\mathbb{C}_M)$

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\mathcal{D}_{M\to N}) &\simeq R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M^{t,\vee}) \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}_{M\to N} \\ &\simeq \mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_M^{\vee}) \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}_{M\to N}. \end{aligned}$$

Dall'altra parte abbiamo che

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(F, f^!\mathcal{D}b_N^{t,\vee}) &\simeq R\mathcal{H}om(Rf_{!!}F, \mathcal{D}b_N^{t,\vee}) \\ &\simeq \mathrm{T}\mathcal{H}om(Rf_!F, \mathcal{D}b_N^{\vee}) \\ &\simeq Rf_!(\mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_N^{\vee}) \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}_{M\to N}), \end{aligned}$$

ove il terzo isomorfismo viene dal Teorema (4.4) di [6]. Sapendo che, se $G \in \mathbb{R}\text{-C}^c(\mathbb{C}_M)$, $\Gamma(X, G) \simeq \Gamma(Y, Rf_!G)$ otteniamo il risultato desiderato.

□

Grazie a questo isomorfismo possiamo provare la seguente

Proposizione 8.2.3 *Sia $f : M \to N$ un morfismo di varietà analitiche, e sia $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}_N)$. Vale allora l'isomorfismo in $D^b(\mathrm{I}(\mathbb{C}_M))$:*

$$\mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\underline{f}^{-1}\mathcal{N} \xrightarrow{\sim} f^!(\mathcal{D}b_N^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_N}{\otimes}} \beta\mathcal{N})$$

Dim. È dato dagli isomorfismi

$$\begin{aligned} f^!(\mathcal{D}b_N^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_N}{\otimes}} \beta\mathcal{N}) &\simeq f^!\mathcal{D}b_N^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta f^{-1}\mathcal{D}_N}{\otimes}} \beta f^{-1}\mathcal{N} \\ &\simeq \mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\mathcal{D}_{M\to N} \overset{L}{\underset{\beta f^{-1}\mathcal{D}_N}{\otimes}} \beta f^{-1}\mathcal{N} \\ &\simeq \mathcal{D}b_M^{t,\vee} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\underline{f}^{-1}\mathcal{N} \end{aligned}$$

□

Per l'equivalenza tra moduli $\mathcal{D}$-moduli destri e $\mathcal{D}$-moduli sinistri, la (8.1) ci dà il seguente isomorfismo in $D^b(\mathrm{I}(\beta f^{-1}\mathcal{D}_N))$:

$$\beta\mathcal{D}_{N\leftarrow M} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}b_M^t \simeq f^!\mathcal{D}b_N^t.$$

Proposizione 8.2.4 *Sia $f : M \to N$ morfismo liscio di varietà analitiche. Vale allora in $D^b(\mathrm{I}(\beta f^{-1}\mathcal{D}_N))$ il seguente isomorfismo:*

$$R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{D}_M}(\beta\mathcal{D}_{M\to N}, \mathcal{D}b^t_M) \simeq f^{-1}\mathcal{D}b^t_N$$

Dim. Sia $d = \mathrm{dim}N - \mathrm{dim}M$, consideriamo i seguenti isomorfismi

$$\begin{aligned} R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{D}_M}(\beta\mathcal{D}_{M\to N}, \mathcal{D}b^t_M) &\simeq \beta R\mathcal{H}om(\mathcal{D}_{M\to N}, \mathcal{D}_M) \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}b^t_M \\ &\simeq \beta\mathcal{D}_{N\leftarrow M} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \mathcal{D}b^t_M \otimes or_{M/N}[-d] \\ &\simeq f^!\mathcal{D}b^t_N \otimes or_{M/N}[-d] \\ &\simeq f^{-1}\mathcal{D}b^t_N \end{aligned}$$

Il primo isomorfismo è stato ottenuto rimpiazzando $\mathcal{D}_{M\to N}$ col complesso di Koszul, il secondo, essendo f liscia, deriva dall'isomorfismo

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_M}(\mathcal{D}_{M\to N}, \mathcal{D}_M) \otimes or_{M/N} \simeq \beta\mathcal{D}_{N\leftarrow M}[-d],$$

e l'ultimo dall'isomorfismo $f^![d] \simeq f^{-1} \otimes or_{M/N}$.

□

Sia ora $f : M \to N$ un'inclusione chiusa si può dimostrare (vedi [12]) la seguente

Proposizione 8.2.5 *Esiste un morfismo in $D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{D}_N))$:*

$$Rf_!\mathcal{D}b^t_M \to R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{D}_N}(\beta Rf_!\mathcal{D}_{N\leftarrow M}, \mathcal{D}b^t_N) \tag{8.2}$$

Proposizione 8.2.6 *Il morfismo (8.2) è un isomorfismo.*

Dim. Per ogni $F \in \mathbb{R}\text{-}\mathrm{C}^c(\mathbb{C}_M)$ abbiamo i seguenti isomorfismi

$$\begin{aligned} R\mathcal{H}om(F, Rf_!\mathcal{D}b^t_M)) &\simeq Rf_!R\mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}b^t_M) \\ &\simeq Rf_!\mathrm{T}\mathcal{H}om(f^{-1}F, \mathcal{D}b_M) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(Rf_!\mathcal{D}_{N\leftarrow M}, \mathrm{T}\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b_N)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_N}(Rf_!\mathcal{D}_{N\leftarrow M}, R\mathcal{H}om(F, \mathcal{D}b^t_N)) \\ &\simeq R\mathcal{H}om(F, R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{D}_N}(\beta Rf_!\mathcal{D}_{N\leftarrow M}, \mathcal{D}b^t_N)), \end{aligned}$$

ove il terzo isomorfismo viene dal Teorema (4.5) di [6]. Grazie alla Proposizione 6.3.5 otteniamo l'isomorfismo desiderato.

□

Adesso X sarà una varietà analitica complessa, con fascio strutturale olomorfo $\mathcal{O}_X$. Chiameremo $\overline{X}$ la varietà complessa coniugata (con fascio strutturale antiolomorfo $\mathcal{O}_{\overline{X}}$), e $X_{\mathbb{R}}$ la varietà analitica sottostante, identificata con la diagonale di $X \times \overline{X}$.

Definiamo ora l'ind-fascio $\mathcal{O}^t_X \in D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{D}_X))$ delle funzioni olomorfe temperate nella maniera seguente:

$$\mathcal{O}^t_X := R\mathcal{I}hom_{\beta\mathcal{D}_{\overline{X}}}(\beta\mathcal{O}_{\overline{X}}, \mathcal{D}b^t_{X_{\mathbb{R}}})$$

Consideriamo anche l'ind-fascio $\Omega^t \in D^b(\mathrm{I}(\beta\mathcal{D}^{op}_X))$:

$$\Omega^t_X := \mathcal{D}b^{t,\vee}_{X_{\mathbb{R}}} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_{\overline{X}}}{\otimes}} \beta\mathcal{O}_{\overline{X}}[-d_X].$$

Proposizione 8.2.7 *Sia M una varietà analitica reale, X una sua complessificazione, $i : M \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora vale il seguente isomorfismo:*

$$i^!\Omega^t_X \simeq \mathcal{D}b^{t,\vee}_M[-d_X]$$

Dim.

$$\begin{aligned}
i^!\Omega^t_X &\simeq i^!(\mathcal{D}b^{t,\vee}_{X_{\mathbb{R}}} \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_{\overline{X}}}{\otimes}} \beta\mathcal{O}_{\overline{X}})[-d_X] \\
&\simeq i^!\mathcal{D}b^{t,\vee}_{X_{\mathbb{R}}} \overset{L}{\underset{\beta i^{-1}\mathcal{D}_{\overline{X}}}{\otimes}} \beta i^{-1}\mathcal{O}_{\overline{X}}[-d_X] \\
&\simeq \mathcal{D}b^{t,\vee}_M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta\mathcal{D}_{M\to X_{\mathbb{R}}} \overset{L}{\underset{\beta i^{-1}\mathcal{D}_{\overline{X}}}{\otimes}} i^{-1}\beta\mathcal{O}_{\overline{X}}[-d_X] \\
&\simeq \mathcal{D}b^{t,\vee}_M \overset{L}{\underset{\beta\mathcal{D}_M}{\otimes}} \beta i^{-1}\mathcal{D}_X[-d_X] \\
&\simeq \mathcal{D}b^{t,\vee}_M[-d_X],
\end{aligned}$$

ove il penultimo isomorfismo è dato da

$$\mathcal{D}_{M\to X_{\mathbb{R}}} \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_{\overline{X}}|_M} \mathcal{O}_{\overline{X}}|_M \simeq \mathcal{D}_X|_M.$$

□

A questo punto, grazie alla Proposizione 5.4.3 troviamo che

$$i^{-1}R\mathcal{I}hom(\mathbb{C}_M, \Omega^t_X) \simeq \mathcal{D}b^{t,\vee}_{X_{\mathbb{R}}}[-d_X],$$

entrambi i membri hanno supporto in M, quindi, passando ai moduli sinistri otteniamo

$$R\mathcal{I}hom(D'\mathbb{C}_M, \mathcal{O}^t_X) \simeq \mathcal{D}b^t_M,$$

applicando a destra e a sinistra il funtore α e ricordando la Proposizione 7.3.3, si ha

$$\mathrm{T}\mathcal{H}om(D'\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X) \simeq \alpha\mathcal{D}b^t_M.$$

Il Teorema (5.10) di [6] ci dice che

$$\mathrm{T}\mathcal{H}om(D'\mathbb{C}_M, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{D}b_M$$

quindi

$$\alpha\mathcal{D}b^t_M \simeq \mathcal{D}b_M.$$

Bibliografia

[1] A. Borel; Algebraic $\mathcal{D}$-modules; Perspectives in mathematics, Academic Press (1987).

[2] F. Ivorra; Ind-faisceaux et faisceaux sous-analitiques; Mémoire du DEA, Université Pierre et Marie Curie, Paris (2001).

[3] M. Kashiwara; The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems; Publ. RIMS, Kyoto Univ. **20**, pp. 319-365 (1984).

[4] M. Kashiwara, P. Schapira; Categories and sheaves; in preparazione.

[5] M. Kashiwara, P. Schapira; Sheaves on manifolds; Grunderlen der Math. **292** Springer-Verlag, Berlin (1990).

[6] M. Kashiwara, P. Schapira; Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves; Mém. Soc. Math. de France **64** (1996).

[7] M. Kashiwara, P. Schapira; Ind-sheaves, distributions and microlocalisation; Sem. Ec. Polytechnique Palaiseau (1999).

[8] M. Kashiwara, P. Schapira; Ind-sheaves; Astérisque **271** (2001).

[9] M. Lanza de Cristoforis; Appunti del corso di Istituzioni di Analisi Superiore, Fascicoli $3^o, 4^o$ (1998).

[10] S. Lojasiewicz; Sur le problème de la division; Studia Mathematica **18**, pp. 87-136 (1959).

[11] C. Marastoni; Appunti di topologia algebrica; Corso di topologia algebrica Univ. Padova, http://www.math.unipd.it/˜maraston/downloads (1999)

[12] G. Morando; Studio di ind-fasci su varietà analitiche; Tesi di laurea, Università di Padova (2001).

[13] S. Mc Lane; Categorie nella pratica matematica; Serie di logica matematica, Boringhieri, Torino (1977).

[14] P. Schapira; Elementary sheaf theory; Cours Univ. Paris VI, http://www.math.jussieu.fr/˜schapira/publications (2001).

[15] P. Schapira, J. P. Schneiders; Index theorem for elliptic pairs; Astérisque **224** (1994).

[16] J. P. Schneiders; An introduction to $\mathcal{D}$-modules; Bull. Soc. Royale des Sciences de Liège **63**, pp. 223-295 (1994).