Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Sull'algebricità delle varietà analitiche proiettive

Relatore:
Prof. Ernesto Carlo Mistretta

Laureando:
Edoardo Mason
Matricola 1222755

Anno Accademico 2021/2022
23 Settembre 2022

La goccia scava la roccia.

Indice

Introduzione

La questione fondamentale che motiva il presente lavoro è quella dell'algebricità delle varietà analitiche sul campo dei numeri complessi, in particolare la determinazione di ipotesi sotto le quali una varietà analitica è algebrica. Un risultato cruciale in tale direzione è stato dimostrato da Wei-Liang Chow nel 1949 in [2], facendo ricorso a raffinate tecniche topologiche e analitiche: ogni sottovarietà analitica chiusa di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è un insieme algebrico cioè un chiuso di Zariski. Sette anni dopo, Jean-Pierre Serre pubblicava il suo celebre "*Géométrie algébrique et géométrie analytique*" in cui dimostrava i teoremi ora noti come teoremi GAGA. Tali teoremi, enunciati nella moderna formulazione della geometria algebrica, attraverso la teoria dei fasci, elaborata in quegli anni, costituiscono probabilmente la prospettiva più profonda e astratta sulla relazione tra varietà analitiche e algebriche. Nello stesso anno, il contributo anonimo [1] giunto al *American Journal of Mathematics*, che molti attribuiscono allo stesso Serre, forniva una semplice dimostrazione del teorema di Chow nel caso di sottovarietà analitiche prive di punti singolari. Scopo centrale di questa tesi è proprio presentare questa dimostrazione, che si basa su una stima del grado di trascendenza del campo delle funzioni meromorfe su una varietà complessa compatta.

L'elaborato è articolato come segue.

Nel primo capitolo si introducono gli oggetti fondamentali di studio della geometria algebrica e complessa. In particolare vengono definite e studiate le varietà algebriche affini e proiettive, le varietà complesse e analitiche e le loro funzioni. Si è cercato di seguire un'impostazione classica, senza ricorrere alle formulazioni più moderne e astratte, che, se certamente rinuncia a cogliere la massima generalità e profondità dei concetti, ha il pregio di alleggerire l'esposizione e ridurre al minimo i prerequisiti tecnici necessari alla comprensione del lavoro. La trattazione segue prevalentemente Hartshorne [4] e Huybrechts [5].

Il secondo capitolo costituisce il cuore tecnico della tesi. In esso dimostriamo che il campo delle funzioni meromorfe su una varietà complessa compatta di dimensione n ha grado di trascendenza al più n su $\mathbb{C}$. Da ciò si deduce il teorema di Chow per sottovarietà analitiche chiuse e lisce dello spazio proiettivo complesso. Infine vengono introdotte due importanti classi di varietà complesse, le varietà di Moishezon e di Kähler, e si enuncia una condizione sufficiente per l'algebricità dimostrata da Moishezon in [7].

Il terzo capitolo è dedicato a una trattazione specifica del caso delle superfici di Riemann compatte, ispirata prevalentemente a Miranda [6]. Viene in particolare introdotta la teoria dei divisori fino a enunciare il teorema di Riemann-Roch e si mostra come costruire, data una superficie di Riemann compatta X, un'immersione olomorfa $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$. Potremo dunque concludere che ogni superficie di Riemann compatta è isomorfa a una curva algebrica proiettiva. La tesi si conclude infine con la descrizione esplicita, tramite la funzione di Weierstrass, dell'equivalenza tra tori complessi e curve ellittiche in $\mathbb{P}^2$.

Capitolo 1

Geometria algebrica e geometria complessa

In questo primo capitolo ci occupiamo di chiarire i termini fondamentali della questione che ci siamo posti intorno all'algebricità delle varietà analitiche.

Iniziamo definendo le varietà algebriche affini e proiettive su un campo algebricamente chiuso e costruendo la topologia di Zariski. In particolare, ci soffermiamo ad analizzare i concetti di irriducibilità e dimensione, dandone una caratterizzazione topologica e algebrica. Citiamo nel corso del capitolo i risultati cruciali di algebra commutativa di cui ci serviamo, a partire dal teorema degli zeri di Hilbert. Ci occupiamo dunque di definire le funzioni regolari e razionali su una varietà algebrica Y e di studiare l'anello locale di un punto p su Y e il campo delle funzioni razionali su Y. Inoltre, chiariamo il rapporto tra una varietà proiettiva $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ e le sue componenti affini $Y_i = Y \cap U_i$ ove U_i è l'aperto affine in cui non si annulla l'i-esima coordinata di $\mathbb{P}^n$. Analizziamo poi il concetto di non-singolarità per un punto p di una varietà algebrica, partendo dal caso affine e arrivando a una caratterizzazione intrinseca in termini dell'anello locale di p. Mostriamo in particolare che l'insieme dei punti singolari di una varietà algebrica Y è un chiuso di Zariski in Y.

Passiamo in seguito ad analizzare le varietà complesse e le sottovarietà analitiche di una varietà complessa, dando alcuni primi esempi fondamentali. Caratterizziamo quindi l'irriducibilità di una sottovarietà analitica e iniziamo a stabilire un parallelo tra varietà algebriche e sottovarietà analitiche in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, mettendo in particolare in evidenza la coincidenza dei concetti di non-singolarità e irriducibilità dal punto di vista algebrico e analitico.

I riferimenti fondamentali per la trattazione sono Hartshorne [4] per la parte di geometria algebrica e Huybrechts [5] per quella di geometria complessa, per la dimostrazione dell'irriducibilità in senso analitico di una varietà algebrica in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ rimandiamo invece a Shafarevich [8].

1.1 Varietà affini e proiettive

Per introdurre in generale le varietà affini e proiettive supponiamo di lavorare su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso e indichiamo con $\mathbb{A}^n$ lo spazio affine di dimensione n su $\mathbb{K}$ e con $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo di dimensione n su $\mathbb{K}$.

Dato un insieme di polinomi $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ possiamo definire il luogo degli zeri di S nello spazio affine $\mathbb{A}^n$ come

$$V(S) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \quad \forall f \in S\}.$$

Viceversa, se V è un sottoinsieme di $\mathbb{A}^n$ allora possiamo definire l'ideale associato a V come

$$\mathfrak{I}(V) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0 \quad \forall p \in V\}.$$

Chiaramente, se $\mathfrak{I}$ è l'ideale generato da S, allora $V(S) = V(\mathfrak{I})$. Inoltre, poichè l'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano, ogni ideale ammette un insieme finito di generatori. Ne segue che ogni insieme $V(S)$ può essere espresso come luogo degli zeri di un insieme finito di polinomi.

Definizione 1.1.1. Un sottoinsieme Y di $\mathbb{A}^n$ è detto *insieme algebrico* se esiste $S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $Y = V(S)$.

Proposizione 1.1.2. *L'unione di due insiemi algebrici e l'intersezione di una famiglia arbitraria di insiemi algebrici sono insiemi algebrici. L'insieme vuoto e l'intero spazio affine sono insiemi algebrici.*

Dimostrazione. Se $Y = V(S)$ e $Z = V(T)$ sono insiemi algebrici, allora $T \cup Z = V(S \cdot T)$ ove $S \cdot T$ indica l'insieme di tutti i prodotti tra polinomi in S e polinomi in T. Infatti, se $p \in Y \cup Z$ allora p appartiene ad almeno a uno tra Y e Z dunque è zero di ogni polinomio in $S \cdot T$. Viceversa, se $p \in V(S \cdot T)$ e supponiamo $p \notin Y$, allora esiste $f \in S$ tale che $f(p) \neq 0$ e dunque, per ogni $g \in T$, poichè $(fg)(p) = 0$, si ha $g(p) = 0$ dunque $p \in Z$.

Data ora una famiglia arbitraria di insiemi algebrici $Y_\alpha = V(S_\alpha)$, indicizzata da $\alpha \in J$, allora è immediato verificare che $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha = V\left(\bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha\right)$ dunque anche $\bigcap_{\alpha \in J} Y_\alpha$ è un insieme algebrico.

Infine $\varnothing = V(\{1\})$ e $\mathbb{A}^n = V(\{0\})$. $\square$

Come conseguenza di questa proposizione, gli insiemi algebrici di $\mathbb{A}^n$ formano i chiusi di una topologia, detta *topologia di Zariski.*

Il seguente teorema, noto come *Hilbert Nullstellensatz*, caratterizza la corrispondenza tra insiemi algebrici affini e ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Teorema degli zeri di Hilbert. *Sia $\mathfrak{p}$ un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e f un polinomio che si annulla su ogni punto di $V(\mathfrak{p})$, allora $f^r \in \mathfrak{p}$ per qualche intero r.*

Tale teorema stabilisce una corrispondenza biunivoca tra insiemi algebrici affini e ideali radicali dell'anello di polinomi: più esplicitamente, per ogni ideale $\mathfrak{p}$ di $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si ha

$$\mathfrak{I}(V(\mathfrak{p})) = \sqrt{\mathfrak{p}} = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] : f^n \in \mathfrak{p} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}.$$

Definizione 1.1.3. Un insieme algebrico affine non vuoto Y si dice *irriducibile* se non può essere espresso come unione $Y = Y_1 \cup Y_2$, con Y_1, Y_2 sottoinsiemi propri di Y, chiusi secondo Zariski in Y. Un insieme algebrico irriducibile di $\mathbb{A}^n$ si dice *varietà algebrica affine*, o semplicemente varietà affine. Un sottoinsieme aperto di una varietà affine si dice *varietà quasi-affine.*

Osservazione 1.1.4. La definizione data di irriducibilità è formulata in termini puramente topologici dunque si può parlare di irriducibilità di un qualsiasi spazio topologico: uno spazio topologico è irriducibile se non può essere scritto come unione non banale di sottoinsiemi chiusi. In questa tesi ci limiteremo a considerare varietà algebriche e loro sottoinsiemi. Osserviamo però un paio di fatti generali che torneranno utili nel seguito. Innanzitutto è immediato vedere che uno spazio topologico è irriducibile se e solo se ogni coppia di sottoinsiemi aperti ha intersezione non vuota. Inoltre un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X è irriducibile se e solo se lo è la sua chiusura $\overline{Y}$. Notiamo infatti intanto che se U è un aperto di X e $U \cap Y = \varnothing$ allora $U \cap \overline{Y} = \varnothing$: se così non fosse, preso $p \in U \cap \overline{Y}$ e W intorno aperto di p, si avrebbe $W \cap Y \neq \varnothing$. Sia ora Y irriducibile. Se U e V sono insiemi aperti tali che $U \cap \overline{Y} \neq \varnothing$ e $V \cap \overline{Y} \neq \varnothing$ allora $U \cap Y \neq \varnothing$ e $V \cap Y \neq \varnothing$ dunque $Y \cap U \cap V \neq \varnothing$ per irriducibilità di Y. Ne segue $\overline{Y} \cap U \cap V \neq \varnothing$, quindi $\overline{Y}$ è irriducibile perchè ogni coppia di sottoinsiemi aperti di $\overline{Y}$ ha intersezione non vuota. L'altra implicazione si ottiene in modo analogo.

L'irriducibilità degli insiemi algebrici affini ha la seguente caratterizzazione algebrica.

Proposizione 1.1.5. *Un insieme algebrico Y è irriducibile se e solo se il suo ideale associato $\mathfrak{I}$ è primo.*

Dimostrazione. Se Y è irriducibile e $fg \in \mathfrak{I}$, allora $Y \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Dunque $Y = (Y \cap V(f)) \cup (Y \cap V(g))$ ove entrambi i fattori dell'unione sono chiusi in Y. Per l'irriducibilità si ha quindi $Y = Y \cap V(f)$ nel qual caso $Y \subseteq V(f)$ da cui segue $f \in \mathfrak{I}$ oppure $Y = Y \cap V(g)$ da cui segue $g \in \mathfrak{I}$. Quindi $\mathfrak{I}$ è primo. Viceversa se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo e $V(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$ allora $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(Y_1) \cap \mathfrak{I}(Y_2)$. Quindi $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(Y_1)$ da cui $V(\mathfrak{p}) = Y_1$ oppure $\mathfrak{p} = \mathfrak{I}(Y_2)$ da cui $V(\mathfrak{p}) = Y_2$. Dunque $V(\mathfrak{p})$ è irriducibile. □

Definizione 1.1.6. La dimensione di una varietà algebrica affine o quasi-affine Y è il massimo intero n tale che esiste una catena $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ di sottoinsiemi di Y distinti, chiusi secondo Zariski in Y e irriducibili.

Come nel caso dell'irriducibilità, anche la definizione di dimensione ha una caratterizzazione algebrica.

Definizione 1.1.7. Dato un anello commutativo R, l'*altezza* height $\mathfrak{p}$ di un suo ideale primo $\mathfrak{p}$ è l'estremo superiore delle lunghezze delle catene $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \cdots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ di ideali primi distinti contenuti in $\mathfrak{p}$. La *dimensione di Krull* $\dim R$ dell'anello R è l'estremo superiore delle altezze dei suoi ideali primi.

Proposizione 1.1.8. *La dimensione di una varietà algebrica affine $Y = V(\mathfrak{I})$ coincide con la dimensione di Krull del suo* anello delle coordinate $\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{\mathfrak{I}}$.

Dimostrazione. I sottoinsiemi chiusi irriducibili di $Y = V(\mathfrak{I})$ corrispondono agli ideali primi di $\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$ contenenti $\mathfrak{I}$ che a loro volta corrispondono agli ideali primi di $\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{\mathfrak{I}}$. Dunque la dimensione di Y è la lunghezza della massima catena di ideali primi in $\frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{\mathfrak{I}}$. □

In modo analogo si definiscono gli insiemi algebrici *proiettivi.* Infatti, dato un polinomio omogeneo $f \in \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ e un punto $p = [a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ si ha

$$f(\lambda a_0,\ldots,\lambda a_n) = \lambda^{\deg(f)} f(a_0,\ldots,a_n)$$

per ogni scalare non nullo $\lambda \in \mathbb{K}$. Dunque è ben definito il luogo degli zeri comuni $V(S)$ in $\mathbb{P}^n$ di una famiglia S di polinomi omogenei in $n+1$ indeterminate: un tale insieme è detto *insieme algebrico proiettivo.* Dato un ideale omogeneo $\mathfrak{I}$ in $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$, cioè generato da polinomi omogenei, definiamo $V(\mathfrak{I}) = V(S)$ ove S è l'insieme di tutti i polinomi omogenei di $\mathfrak{I}$ e viceversa definiamo l'ideale $\mathfrak{I}(Y)$ associato a un insieme algebrico $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ come l'ideale omogeneo generato dai polinomi omogenei che si annullano su tutti i punti di Y. Poichè $\mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ è noetheriano ogni insieme di polinomi omogenei S ha un sottoinsieme finito $\{f_1,\ldots,f_r\}$ tale che $V(S) = V(\{f_1,\ldots,f_r\})$.

Come nel caso affine, possiamo definire la topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$ prendendo come aperti i complementari degli insiemi algebrici. Le definizioni di irriducibilità e di dimensione coincidono con il caso affine poichè sono formulate in termini puramente topologici. Un insieme algebrico irriducibile in $\mathbb{P}^n$ viene detto *varietà algebrica proiettiva*, o semplicemente varietà proiettiva. Un suo sottoinsieme aperto si dice *varietà quasi-proiettiva.*

Osserviamo che $\mathbb{P}^n$ è ricoperto dagli aperti $U_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i$ ove H_i è l'iperpiano di equazione $x_i = 0$, per $i = 0,\ldots,n$. Definiamo per ogni i la mappa biiettiva $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ ponendo:

$$\varphi_i([x_0 : \cdots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i},\ldots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\ldots,\frac{x_n}{x_i}\right). \tag{1.1}$$

Proposizione 1.1.9. *Le mappe φ_i appena definite sono omeomorfismi rispetto alla topologia di Zariski.*

Dimostrazione. Assumiamo senza perdere generalità $i = 0$ e indichiamo con φ la mappa φ_0. Introduciamo le mappe

$$\alpha : \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n] \to \mathbb{K}[y_1,\ldots,y_n]$$

$$\beta : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n] \to \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

definite da

$$\alpha(f)(y_1, \dots, y_n) = f(1, y_1 \dots, y_n), \quad \beta(g)(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg(g)} g\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right).$$

Sia $Y = U_0 \cap V(\mathfrak{I})$ un chiuso in U_0 per la topologia di Zariski indotta sui sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n$. Sia $\mathfrak{a} = \{\alpha(f) : f \in \mathfrak{I}\}$, mostriamo che $\varphi(Y) = V(\mathfrak{a})$ da cui segue che φ manda chiusi di Zariski di U_0 in chiusi di Zariski affini. Dato infatti un punto $p = [x_0 : \dots : x_n] = \left[1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0}\right] \in U_0$ si ha $\varphi(p) \in \varphi(Y)$ se e solo se $p \in Y = V(\mathfrak{I}) \cap U_0$ cioè se e solo se $f\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = \alpha(f)\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = 0$ $\forall f \in \mathfrak{I}$. Ma ciò equivale a $\varphi(p) \in V(\mathfrak{a})$.

Viceversa sia $Y = V(\mathfrak{b}) \subseteq \mathbb{A}^n$ per un qualsiasi ideale $\mathfrak{b}$ di $\mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ e definiamo l'ideale omogeneo $\mathfrak{h}$ in $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ generato dai polinomi $\beta(g)$ al variare di $g \in \mathfrak{b}$. Si ha che $\varphi^{-1}(Y) = V(\mathfrak{h}) \cap U_0$. Infatti un punto $[1 : x_1 : \dots : x_n] \in U_0$ appartiene a $\varphi^{-1}(Y)$ se e solo se $(x_1, \dots, x_n) \in Y$ cioè se e solo se $g(x_1, \dots, x_n) = \beta(g)(1, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall g \in \mathfrak{b}$, ma ciò è equivalente a $[1 : x_1 : \dots : x_n] \in V(\mathfrak{h})$. Dunque anche φ^{-1} è una mappa chiusa. Possiamo quindi concludere che le mappe φ_i sono omeomorfismi rispetto alla topologia di Zariski. □

Data quindi una varietà proiettiva Y possiamo considerare il suo ricoprimento aperto formato dagli insiemi $Y_i = Y \cap U_i$: ogni Y_i è non vuoto a meno che Y sia tutta contenuta nell'iperpiano H_i e ogni Y_i non vuoto è omeomorfo a una varietà affine tramite la mappa φ_i definita sopra. È naturale aspettarsi che la dimensione di Y come varietà proiettiva sia uguale alla dimensione di ogni Y_i non vuoto: ciò è effettivamente quello che si verifica.

Proposizione 1.1.10. *Ogni sottoinsieme aperto non vuoto U di una varietà algebrica affine o proiettiva Y è denso in Y, in particolare U è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia Y una varietà algebrica, equivalentemente affine o proiettiva, cioè un chiuso di Zariski irriducibile. Prendiamo un arbitrario $p \in Y$ e sia V un suo intorno aperto in Y. Chiaramente $U \cap V$ è non vuoto, altrimenti sarebbe $Y = (Y \setminus U) \cup (Y \setminus V)$ unione di sottoinsiemi chiusi propri, il che contraddice l'irriducibilità di Y. Dunque p appartiene alla chiusura $\overline{U}$ di U nella topologia di Zariski e da ciò segue che $\overline{U} = Y$. L'irriducibilità segue ora dall'osservazione 1.1.4. □

Proposizione 1.1.11. *Siano X, Y varietà algebriche, affini o proiettive.*

i) *Se $Y \subseteq X$ allora* $\dim Y \leq \dim X$.

ii) *Dato un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di Y, si ha* $\dim Y = \sup\{\dim U_i\}$.

Dimostrazione. *i)* Sia $Y_0 \subset Y_1 \subset \dots \subset Y_n$ una catena di sottoinsiemi chiusi irriducibili di Y. Allora le loro chiusure in X sono irriducibili e formano la catena $\overline{Y_0} \subset \overline{Y_1} \subset \cdots \subset \overline{Y_n}$. Per ogni i si ha $\overline{Y_i} \cap Y = Y_i$ poichè Y_i è chiuso in Y, dunque se $\overline{Y_i} = \overline{Y_{i+1}}$ allora $Y_i = Y_{i+1}$. Quindi le catene hanno la stessa lunghezza e possiamo concludere che $\dim Y \leq \dim X$.

ii) Sia data una catena $Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_n$ di sottoinsiemi chiusi irriducibili di Y e sia $p \in Y_0$. Chiaramente esiste un indice j tale che $p \in U_j$. Per ogni $k = 0, \ldots, n$, $Y_k \cap U_j$ è un sottoinsieme chiuso irriducibile di U_j. Notiamo ora che $Y_k \cap U_j$ è aperto dunque denso in Y_k quindi $\overline{Y_k \cap U_j} = Y_k$. Da ciò segue che la catena $Y_0 \cap U_j \subset Y_1 \cap U_j \subset \cdots \subset Y_n \cap U_j$ ha lunghezza n. Concludiamo che per ogni catena di chiusi irriducibili in Y esiste una catena della medesima lunghezza in qualche U_i da cui segue la tesi. □

Una diretta applicazione della proposizione precedente mostra che la dimensione di una varietà proiettiva Y è il massimo delle dimensioni delle varietà affini $Y_i \neq \varnothing$ definite sopra. Vedremo al termine della prossima sezione che tutte le Y_i non vuote hanno medesima dimensione.

1.2 Funzioni e morfismi

Seguendo il consueto modo di procedere della matematica moderna, ora che abbiamo definito gli oggetti di interesse, ci occupiamo in questa sezione di definire le funzioni e le mappe che permettono di studiare tali oggetti. Nel seguito della sezione chiameremo aperti e chiusi, gli aperti e chiusi della topologia di Zariski.

Sia Y una varietà quasi-affine.

Definizione 1.2.1. Una funzione $f : Y \to \mathbb{K}$ si dice *regolare* in un punto $p \in Y$ se in un intorno $U \subseteq Y$ di p si ha $f = \frac{g}{h}$ ove $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ e h è diverso da zero in ogni punto di U. f si dice regolare su Y se lo è in ogni punto di Y.

La definizione si adatta facilmente al caso in cui Y è una varietà quasi-proiettiva in $\mathbb{P}^n$.

Definizione 1.2.2. Una funzione $f : Y \to \mathbb{K}$ si dice *regolare* in un punto $p \in Y$ se in un intorno $U \subseteq Y$ di p si ha $f = \frac{g}{h}$ ove $f, g \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ sono polinomi omogenei dello stesso grado e h è diverso da zero in ogni punto di U. f si dice regolare su Y se lo è in ogni punto di Y.

Definizione 1.2.3. Siano X, Y varietà algebriche, equivalentemente affini o proiettive, quasi-affini o quasi-proiettive. Un *morfismo* $\varphi : X \to Y$ è una funzione continua tale che per ogni aperto $V \subseteq Y$ e per ogni funzione regolare $f : V \to \mathbb{K}$, la funzione $f \circ \varphi : \varphi^{-1}(V) \to \mathbb{K}$ è regolare. Un *isomorfismo* tra varietà algebriche è un morfismo che ammette morfismo inverso.

Sia ora Y una varietà algebrica, equivalentemente affine o proiettiva, quasi-affine o quasi-proiettiva, e $p \in Y$. Denotiamo con $\mathcal{O}(Y)$ l'anello delle funzioni regolari su Y e con $\mathcal{O}_p$ l'*anello locale di p su Y* cioè l'anello dei germi di funzioni regolari su Y vicino a p. Precisamente, un elemento di $\mathcal{O}_p$ è una classe di equivalenza di coppie (U, f) ove U è un aperto di Y contenente p, f una funzione regolare su U e due coppie (U, f) e (V, g) sono equivalenti se f e g coincidono in qualche intorno di p contenuto in $U \cap V$. Osserviamo che $\mathcal{O}_p$ è effettivamente un anello locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$ formato dai germi di funzioni regolari che si annullano in p.

Definizione 1.2.4. Sia Y una varietà algebrica, definiamo il *campo delle funzioni razionali* $K(Y)$ di Y come l'insieme, con le operazioni di somma e prodotto puntuale, delle classi di equivalenza di coppie (U, f) ove U è un aperto non vuoto in Y, f è regolare su U e identifichiamo (U, f) con (V, g) se $f = g$ in $U \cap V$. Gli elementi di $K(Y)$ sono detti funzioni razionali sulla varietà.

Notiamo che $K(Y)$ è di fatto un campo. Poichè Y è irriducibile ogni coppia di aperti non vuoti ha intersezione non vuota, dunque le operazioni sono ben definite. Inoltre se $(U, f) \in K(Y)$ con $f \neq 0$ possiamo restringere f all'aperto $V = U \smallsetminus (U \cap \{p : f(p) = 0\})$: qui $\frac{1}{f}$ è una funzione regolare, quindi $(V, \frac{1}{f})$ è un inverso di (U, f).

Per studiare tali insiemi di funzioni abbiamo bisogno di fissare qualche notazione e di enunciare un risultato algebrico per la cui dimostrazione rimandiamo a qualche testo classico di algebra commutativa. Un *sistema moltiplicativo* in un anello commutativo R è un sottoinsieme $S \subseteq R$ contenente l'identità e chiuso rispetto alla moltiplicazione. La corrispondente *localizzazione* è l'anello delle classi di equivalenza delle frazioni r/s, con $r \in R$, $s \in S$, ove r_1/s_1 è equivalente a r_2/s_2 se esiste $s_3 \in S$ non nullo tale che $s_3(s_2 r_1 - s_1 r_2) = 0$. Se in particolare $\mathfrak{p}$ è un ideale primo, allora $R \smallsetminus \mathfrak{p}$ è un sistema moltiplicativo e la corrispondente localizzazione è indicata con $R_{\mathfrak{p}}$.

Ricordiamo inoltre che, data un'estensione di campi $L \subset M$, un sottoinsieme $S \subset M$ si dice algebricamente indipendente su L se per ogni polinomio non nullo $f \in L[x_1, \ldots, x_n]$ e per ogni scelta di $s_1, \ldots, s_n \in S$ (tutti distinti), si ha $f(s_1, \ldots, s_n) \neq 0$. Il *grado di trascendenza* di M su L è la cardinalità di un insieme algebricamente indipendente massimale.

Proposizione 1.2.5. *Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e D un dominio di integrità che sia una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Allora:*

i) la dimensione di Krull di D è uguale al grado di trascendenza su $\mathbb{K}$ del campo dei quozienti di D;

ii) per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di D, si ha $\operatorname{height} \mathfrak{p} + \dim D/\mathfrak{p} = \dim D$.

Proposizione 1.2.6. *Sia Y una varietà algebrica affine con ideale associato $\mathfrak{I}$ e anello delle coordinate $A(Y) = \frac{\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]}{\mathfrak{I}}$. Allora:*

i) per ogni $p \in Y$, $\mathcal{O}_p \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$, ove $\mathfrak{m}_p \subseteq A(Y)$ è l'ideale delle funzioni che si annullano in p, e $\dim \mathcal{O}_p = \dim Y$;

ii) *$K(Y)$ è isomorfo al campo dei quozienti di $A(Y)$, dunque $K(Y)$ è un'estensione finitamente generata di $\mathbb{K}$ di grado di trascendenza uguale a* $\dim Y$.

Dimostrazione. *i)* Iniziamo osservando che ogni polinomio in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ definisce una funzione regolare su Y, quindi abbiamo un omomorfismo di anelli $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathcal{O}(Y)$ il cui nucleo è l'ideale $\mathfrak{I}$. Resta dunque definito un omomorfismo iniettivo $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$. Fissato ora p, α induce un omomorfismo iniettivo $A(Y)_{\mathfrak{m}_p} \to \mathcal{O}_p$, che risulta suriettivo per definizione di funzione regolare. Ciò mostra che $\mathcal{O}_p \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$. Inoltre si ha $\dim \mathcal{O}_p = \text{height } \mathfrak{m}_p$ e $A(Y)/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{K}$, quindi per la proposizione precedente $\dim \mathcal{O}_p$ coincide con la dimensione di Krull di $A(Y)$ dunque con la dimensione di Y.

ii) Da (*i*) segue che il campo dei quozienti di $A(Y)$ è isomorfo al campo dei quozienti di $\mathcal{O}_p$ per ogni p, ma questo è uguale a $K(Y)$ poichè ogni funzione razionale è in qualche $\mathcal{O}_p$. Ora, $A(Y)$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata quindi $K(Y)$ è un estensione finitamente generata di $\mathbb{K}$. Infine per la proposizione precedente il grado di trascendenza di $K(Y)$ è uguale alla dimensione di Krull di $A(Y)$ quindi alla dimensione di Y. □

Per trattare il caso proiettivo osserviamo che vale la seguente:

Proposizione 1.2.7. *Le mappe $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ definite in (1.1) sono isomorfismi di varietà algebriche.*

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato che le φ_i sono omeomorfismi dunque è sufficiente osservare che le funzioni regolari sono le stesse in ogni aperto. Su U_i le funzioni regolari sono localmente quozienti di polinomi omogenei dello stesso grado, su $\mathbb{A}^n$ le funzioni regolari sono localmente quozienti di polinomi in $y_1, \ldots, y_n$ e questi due concetti sono identificati dalle mappe α e β introdotte nella dimostrazione della proposizione 1.1.9. □

Ne segue che, data una varietà proiettiva Y e considerato il suo ricoprimento tramite le varietà affini $Y_i = Y \cap U_i$, il campo delle funzioni razionali $K(Y)$ è isomorfo a $K(Y_i)$ a meno che $Y_i = \varnothing$, dunque per la proposizione 1.2.6 è un'estensione finitamente generata di $\mathbb{K}$ con grado di trascendenza uguale a $\dim Y_i$ per ogni i tale che Y non sia tutta contenuta nell'iperpiano H_i. Usando infine il punto *ii)* della proposizione 1.1.11, abbiamo dimostrato il seguente:

Corollario 1.2.8. *La dimensione di una varietà proiettiva Y è uguale alla dimensione di ogni $Y_i = Y \cap U_i$ (non vuota), vista come varietà affine tramite la mappa $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$, e coincide con il grado di trascendenza su $\mathbb{K}$ del campo delle funzioni razionali $K(Y)$.*

1.3 Punti non-singolari

Questa sezione ci avvicina alla relazione che sussiste tra le varietà algebriche e le varietà complesse, che definiremo nella prossima sezione. In questa definiamo il concetto di non-singolarità per punti di una varietà algebrica e ne diamo una caratterizzazione intrinseca.

Definizione 1.3.1. Sia Y una varietà affine di dimensione r e siano $f_1, \dots, f_k$ un insieme di generatori dell'ideale associato a Y. Un punto $p \in Y$ è detto *non-singolare*, o *liscio*, se il rango della matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}}$ è $n-r$. In caso contrario si dice *singolare*.

La matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}}$ è detta matrice Jacobiana.

La definizione che abbiamo dato dipende apparentemente dall'immersione della varietà nello spazio affine: tuttavia il concetto di non-singolarità può essere descritto intrinsecamente come mostreremo ora.

Definizione 1.3.2. Sia A un anello locale noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e sia $K = A/\mathfrak{m}$. A è un *anello locale regolare* se $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Teorema 1.3.3. *Sia Y una varietà affine di dimensione r e $p \in Y$. Allora p è non-singolare se e solo se l'anello locale $\mathcal{O}_p$ è un anello locale regolare.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di $\mathcal{O}_p$: notiamo che $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m} \cong \mathbb{K}$. Ometteremo per semplicità di notazioni il pedice $\mathbb{K}$ nell'indicare la dimensione di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Sia $p = (a_1, \dots, a_n)$ e $\mathfrak{a}_p = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ il corrispondente ideale massimale in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Definiamo la mappa lineare $\psi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}^n$ ponendo

$$\psi(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right).$$

Chiaramente $\psi(x_i - a_i)$ per $i = 1, \dots, n$ è una base di $\mathbb{K}^n$ quindi la restrizione di ψ a $\mathfrak{a}_p$ è una mappa lineare suriettiva. Inoltre $\psi(\mathfrak{a}_p^2) = 0$. D'altra parte se $f \in \mathfrak{a}_p$ soddisfa $\psi(f) = 0$ allora possiamo scrivere $f = (x_1 - a_1)g_1 + \dots + (x_n - a_n)g_n$ e si ha, per ogni $1 \le i \le n$:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = g_i(p)$$

da cui $g_i \in \mathfrak{a}_p$ e $f \in \mathfrak{a}_p^2$. Abbiamo così mostrato che $\ker(\psi_{|\mathfrak{a}_p}) = \mathfrak{a}_p^2$ dunque ψ induce un isomorfismo $\varphi : \mathfrak{a}_p/\mathfrak{a}_p^2 \to \mathbb{K}^n$. Sia ora $\mathfrak{I}$ l'ideale associato a Y e $f_1, \dots, f_k$ un suo insieme di generatori. Poichè $p \in Y$ si ha $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{a}_p$. Il rango di $J = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le n}}$ è proprio la dimensione di $\psi(\mathfrak{I})$ come sottospazio di $\mathbb{K}^n$. Usando ora l'isomorfismo φ si ha

$$\dim \psi(\mathfrak{I}) = \dim(\varphi^{-1} \circ \psi)(\mathfrak{I}) = \dim \frac{\mathfrak{I} + \mathfrak{a}_p^2}{\mathfrak{a}_p^2}.$$

D'altra parte, per la proposizione 1.2.6, $\mathcal{O}_p = A(Y)_{\mathfrak{m}_p}$ ove

$$\mathfrak{m}_p = \{f + \mathfrak{I} : f(p) = 0\} = \frac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{I}}$$

quindi $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_p$ può essere identificato con $\mathfrak{m}_p \subset A(Y)$. Si ha dunque

$$\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} \cong \frac{\mathfrak{m}_p}{\mathfrak{m}_p^2} \cong \frac{\dfrac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{I}}}{\dfrac{\mathfrak{a}_p^2}{\mathfrak{I} \cap \mathfrak{a}_p^2}} \cong \frac{\dfrac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{I}}}{\dfrac{\mathfrak{I} + \mathfrak{a}_p^2}{\mathfrak{I}}} \cong \frac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{I} + \mathfrak{a}_p^2}.$$

Contando le dimensioni si ottiene

$$n = \dim \frac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{a}_p^2} = \dim \frac{\mathfrak{a}_p}{\mathfrak{I} + \mathfrak{a}_p^2} + \dim \frac{\mathfrak{I} + \mathfrak{a}_p^2}{\mathfrak{a}_p^2} = \dim \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} + \operatorname{rg}(J).$$

Ora, per la proposizione 1.2.6, la dimensione di Krull di $\mathcal{O}_p$ è r, quindi $\mathcal{O}_p$ è regolare se e solo se $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = r$ e questo è equivalente per quanto visto a $\operatorname{rg}(J) = n - r$, che è la definizione di non-singolarità di p. □

Ora che sappiamo che il concetto di non-singolarità è intrinseco possiamo estendere la definizione a una varietà arbitraria.

Definizione 1.3.4. Data una varietà affine o proiettiva Y, un punto $p \in Y$ è detto non-singolare, o liscio, se l'anello $\mathcal{O}_p$ è un anello locale regolare. In caso contrario p si dice punto singolare di Y.

Proposizione 1.3.5. *Se A è un anello locale noetheriano con ideale massimale $\mathfrak{m}$ e $K = A/\mathfrak{m}$, allora $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$.*

Teorema 1.3.6. *Sia Y una varietà algebrica. Allora l'insieme dei punti singolari di Y è un chiuso di Zariski in Y.*

Dimostrazione. Possiamo ricondurci facilmente al caso affine. Infatti se Y è una varietà proiettiva consideriamo il suo ricoprimento tramite gli $Y_i = Y \cap U_i$ e, poichè le mappe φ_i sono isomorfismi, è sufficiente verificare che l'insieme dei punti singolari $\operatorname{Sing}(Y_i)$ di Y_i è chiuso per ogni i.

Assumiamo dunque $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affine di dimensione r, con ideale associato $\mathfrak{I}$. Grazie alla proposizione precedente e alla dimostrazione del teorema 1.3.3 sappiamo che il rango della matrice Jacobiana è sempre $\leq n - r$. Dunque i punti singolari di Y sono i punti in cui il rango della Jacobiana è $< n - r$. Ne segue che $\operatorname{Sing}(Y)$ è l'insieme algebrico definito dall'ideale generato da $\mathfrak{I}$ e da tutti i minori di ordine $n - r$ della matrice Jacobiana, che sono funzioni polinomiali nelle entrate della matrice. Concludiamo che $\operatorname{Sing}(Y)$ è chiuso in Y. □

Osservazione 1.3.7. Si può mostrare inoltre che i punti singolari di una varietà algebrica sono un sottoinsieme proprio. Lo dimostriamo nel caso di un'ipersuperficie, cioè una varietà algebrica il cui ideale associato è principale. Ci riconduciamo come sopra al caso affine: sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ con $\mathfrak{I}(Y) = (f)$. Poichè Y è irriducibile, (f) è primo, dunque f è un polinomio irriducibile. Ora, i punti singolari di Y sono i punti $p \in Y$ tali che $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$. Se fosse per assurdo $\operatorname{Sing}(Y) = Y$, le derivate parziali di f sarebbero identicamente nulle su Y cioè

$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in (f)$. Ma $\deg(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \leq \deg(f) - 1$ dunque per ogni i si avrebbe $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$. In caratteristica zero ciò è già un assurdo poichè se l'indeterminata x_j compare in f allora $\frac{\partial f}{\partial x_j} \neq 0$. Se invece la caratteristica di $\mathbb{K}$ è p il fatto che $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ implica che $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1^p, \ldots, x_n^p)$ per qualche polinomio g ma allora, prendendo le radici p-esime dei coefficienti otteniamo un polinomio h tale che $f = h^p$, cosa che contraddice l'irriducibilità di f. Concludiamo che $\mathrm{Sing}(Y)$ è un sottoinsieme proprio di Y.

1.4 Varietà complesse e analitiche

Ricordiamo che una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω aperto, è olomorfa in $z_0 \in \Omega$ se è differenziabile in senso complesso in ogni punto di un intorno di z_0 e olomorfa in Ω se lo è in ogni punto di Ω. Se scriviamo ora $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ separando parte reale e immaginaria si ha che f è olomorfa se e solo se u e v sono differenziabili in senso reale e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Introducendo le derivazioni per funzioni di variabile complessa:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

possiamo riscrivere le equazioni di Cauchy-Riemann nella forma più compatta $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Dato ora U aperto in $\mathbb{C}^n$, una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è olomorfa se sono olomorfe le sue restrizioni a ciascuna variabile cioè se, fissati $z_1, \ldots, z_{j-1}, z_{j+1}, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, è olomorfa la restrizione di f a

$$U \cap \{(z_1, \ldots, z_{j-1}, z, z_{j+1}, \ldots, z_n) : z \in \mathbb{C}\}$$

per ogni $j = 1, \ldots, n$. Ne segue che valgono le equazioni di Cauchy-Riemann per ogni variabile quindi $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0$ per ogni j. Infine una funzione $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ è olomorfa se lo sono le sue componenti $f_i : U \to \mathbb{C}$. Definiamo la matrice Jacobiana di f in un punto $z_0 \in U$ come la matrice:

$$J(f)(z_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z_0)\right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Una funzione $f : U \to V$ tra aperti di $\mathbb{C}^n$ si dice biolomorfa se è olomorfa e invertibile con inversa $f^{-1} : V \to U$ a sua volta olomorfa.

Come nel caso 1-dimensionale, una funzione olomorfa $f : U \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ammette nell'intorno di ogni punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ sviluppo in serie di potenze

$$\sum_{i_1, \ldots, i_n} c_{i_1, \ldots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \ldots (z_n - a_n)^{i_n}$$

con

$$c_{i_1,\dots,i_n} = \frac{1}{i_1!\dots i_n!}\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f}{\partial z_1^{i_1}\dots\partial z_n^{i_n}}.$$

Non entreremo nei dettagli della teoria delle funzioni olomorfe, ci limitiamo a enunciare i seguenti teoremi, che torneranno utili nel seguito.

Teorema del massimo modulo. *Sia U aperto connesso in $\mathbb{C}^n$ e $f : U \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $|f|$ ammette massimo in $z_0 \in U$, allora f è costante.*

Teorema della mappa aperta. *Ogni funzione olomorfa non costante $f : U \to \mathbb{C}$, con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, manda aperti in aperti.*

Teorema di Liouville. *Ogni funzione olomorfa e limitata $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è costante.*

Teorema della funzione inversa olomorfa. *Sia $f : U \to V$ una funzione olomorfa tra aperti $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$. Se $z_0 \in U$ è tale che*

$$\det J(f)(z_0) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z_0)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \neq 0$$

allora esistono intorni aperti U' e V' di z_0 e $f(z_0)$ rispettivamente, tali che f induce una funzione biolomorfa $f_{|U'} : U' \to V'$.

Teorema della funzione implicita olomorfa. *Sia U aperto in $\mathbb{C}^n$ e $f : U \to \mathbb{C}^m$ olomorfa, con $n \geq m$. Sia inoltre $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ tale che $f(a) = 0$ e le ultime m colonne della matrice Jacobiana di f in a siano linearmente indipendenti. Allora esistono aperti $V \subseteq \mathbb{C}^{n-m}$, $W \subseteq \mathbb{C}^m$ e una funzione olomorfa $\varphi : V \to W$ tali che $a \in V \times W$, $\varphi(a_1, \dots, a_{n-m}) = (a_{n-m+1}, \dots, a_n)$ e $f(z) = 0$ per $z = (z_1, \dots, z_n) \in V \times W$ se e solo se $\varphi(z_1, \dots, z_{n-m}) = (z_{n-m+1}, \dots, z_n)$.*

Osservazione. Naturalmente il teorema della funzione implicita si generalizza banalmente al caso generale in cui il rango della matrice Jacobiana sia m: in questo caso le variabili corrispondenti alle m colonne linearmente indipendenti della matrice Jacobiana si possono esprimere in funzione delle altre tramite una funzione olomorfa $\varphi : V \subseteq \mathbb{C}^{n-m} \to \mathbb{C}^m$.

Definizione 1.4.1. Dato uno spazio topologico X, un *atlante complesso* su X è una collezione di omeomorfismi, detti carte locali, $\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{C}^n$ tali che: $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di X, ogni V_i è aperto in $\mathbb{C}^n$ e la funzione $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, detta mappa di transizione, è olomorfa su $V_i \cap V_j$ per ogni coppia di indici i, j. Gli aperti U_i si dicono *aperti coordinati* e le coordinate complesse di V_i si dicono *coordinate locali.* Due atlanti complessi si dicono equivalenti se la loro unione è un atlante complesso. Una *varietà complessa* è il dato di uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile X e di una classe di equivalenza di atlanti complessi su X. Se ogni carta locale di un atlante prende valori in $\mathbb{C}^n$, diremo che la varietà complessa ha dimensione n.

La definizione di varietà complessa è dunque il naturale analogo in ambito complesso della nozione di varietà differenziabile, tuttavia la maggior rigidità delle funzioni olomorfe rispetto alle funzioni differenziabili in senso reale influenza fortemente la geometria delle varietà. Osserviamo inoltre che una varietà complessa di dimensione n è anche una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

Esempio 1.4.2. Un esempio fondamentale su cui torneremo in seguito è dato dai *tori complessi.* Sia X l'insieme $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$ dotato della topologia quoziente indotta dalla proiezione $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\mathbb{Z}^{2n}$. Se U è un aperto di $\mathbb{C}^n$ tale che $(U + (a_1 + ib_1, \dots, a_n + ib_n)) \cap U = \varnothing$ per ogni $0 \neq (a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^{2n}$ allora $\pi_{|U} : U \to \pi(U)$ è un omeomorfismo. Un ricoprimento di X formato da aperti del tipo $\pi(U)$ con U come sopra fornisce un atlante complesso di X le cui funzioni di transizione sono traslazioni di vettori in $\mathbb{Z}^{2n}$. Più in generale, se V è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n e $\Lambda \subset V$ è un sottogruppo abeliano discreto di ordine $2n$ generato da una $\mathbb{R}$-base di V, allora $X = V/\Lambda$ è una varietà complessa compatta di dimensione n, che si dice *toro complesso.* Ogni toro complesso di dimensione n è diffeomorfo come varietà differenziabile al prodotto di $2n$ copie di $\mathbb{S}^1$ ma dal punto di vista complesso le classi di isomorfismo sono più complicate e interessanti, come vedremo nel caso unidimensionale.

Definizione 1.4.3. Sia X una varietà complessa. Una funzione continua $f : X \to \mathbb{C}$ è detta olomorfa se per ogni carta locale (U_i, φ_i) di un suo atlante si ha che $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i) \to \mathbb{C}$ è olomorfa. Siano X, Y varietà complesse, una mappa continua $f : X \to Y$ è olomorfa se per ogni coppia di carte locali (U, φ), (V, ψ) di X e Y rispettivamente, la mappa $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(f^{-1}(V) \cap U) \to \psi(V)$ è olomorfa. X e Y si dicono isomorfe se esistono mappe olomorfe $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ l'una inversa dell'altra.

Proposizione 1.4.4. *Sia X una varietà complessa compatta e connessa, allora ogni funzione $f : X \to \mathbb{C}$ olomorfa è costante.*

Dimostrazione. Poichè X è compatta, ogni funzione olomorfa su X ammette massimo. Sia $x \in X$ punto di massimo. Se (U_i, φ_i) è una carta locale con $x \in U_i$ allora $f \circ \varphi_i^{-1}$ è costante in un intorno aperto di $\varphi_i(x)$ per il teorema del massimo modulo. Poichè infine X è connessa, f è costante su tutta X. □

La definizione di varietà analitica ha l'obiettivo di generalizzare la definizione di varietà complessa ammettendo la presenza di punti singolari. Ci limiteremo a dare tale definizione nel caso di sottovarietà analitiche di una varietà complessa.

Definizione 1.4.5. Data X varietà complessa di dimensione n, un sottoinsieme $S \subseteq X$ è una *sottovarietà analitica* di X se per ogni $p \in S$ esiste un intorno U di p in X tale che $U \cap S$ è il luogo degli zeri comuni di un insieme finito di funzioni olomorfe $f_1, \dots, f_k : U \to \mathbb{C}$. Un punto $p \in S$ si dice *non-singolare*, o *liscio* se le funzioni $f_1, \dots, f_k$ possono essere scelte in modo che, data una carta locale (U, φ) di X intorno a p, la matrice Jacobiana di $f = (f_1 \circ \varphi^{-1}, \dots, f_k \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \mathbb{C}^k$ calcolata in $\varphi(p)$ abbia rango k. Se invece tale condizione sul rango non è verificata allora il punto si dice *singolare*. Una sottovarietà analitica di X priva di punti singolari si dice *sottovarietà complessa* di X.

Osservazione 1.4.6. Osserviamo che una sottovarietà analitica ha struttura di varietà complessa al di fuori dei suoi punti singolari, in particolare una sottovarietà complessa è una varietà complessa. Sia infatti S una sottovarietà analitica di X e $p \in S$ un punto non-singolare. Allora, data una carta locale (U, φ) di X contenente p, S è in un intorno $V \subseteq U$ di p uguale al luogo degli zeri di un insieme di funzione olomorfe $f_1, \dots, f_k : V \to \mathbb{C}$ e il rango della matrice Jacobiana di $f = (f_1 \circ \varphi^{-1}, \dots, f_k \circ \varphi^{-1}) : \varphi(V) \to \mathbb{C}^k$ e uguale a k. Se ora indico con $(z_1, \dots, z_n)$ le coordinate della carta locale scelta, segue dal teorema della funzione implicita olomorfa che in un intorno di $\varphi(p)$, k di queste variabili si possono esprimere in funzione delle restanti $n-k$ tramite una funzione olomorfa. Ma allora la proiezione sulle $n-k$ restanti variabili è una carta locale per S e i cambi di carta risultano funzioni olomorfe. Dunque fuori dai punti singolari S ammette un atlante complesso. Se fuori dai punti singolari la matrice Jacobiana ha sempre rango k allora S ha struttura di varietà complessa di dimensione $n-k$ fuori dai punti singolari ed ha senso prendere questa come definizione di dimensione analitica di S. Precisamente la dimensione di S come sottovarietà analitica è la dimensione di S privata dei suoi punti singolari, come varietà complessa.

Definizione 1.4.7. Una sottovarietà analitica S di X si dice *irriducibile* se non può essere scritta come unione non banale $S = S_1 \cup S_2$, con S_1, S_2 sottovarietà analitiche chiuse di X.

Proposizione 1.4.8. *Se l'insieme dei punti non-singolari di una sottovarietà analitica S è connesso allora S è irriducibile.*

Dimostrazione. Sia S sottovarietà analitica della varietà complessa X. Suppongo per assurdo che $S = S_1 \cup S_2$, con S_1, S_2 sottovarietà analitiche chiuse: se l'intersezione $S_1 \cap S_2$ è vuota abbiamo già una contraddizione. Se invece esiste $p \in S_1 \cap S_2$, mostriamo che p è un punto singolare. Ne segue che l'insieme dei punti lisci di S è contenuto nell'unione disgiunta $(S_1 \smallsetminus (S_1 \cap S_2)) \cup (S_2 \smallsetminus (S_1 \cap S_2))$, il che contraddice l'ipotesi sulla connessione dei punti non-singolari di S. Sia dunque $p \in S_1 \cap S_2$ e suppongo che S_1 e S_2 siano date localmente dall'annullarsi degli insiemi di funzioni olomorfe $\{f_1, \dots, f_k\}$ e $\{g_1, \dots, g_m\}$ rispettivamente. Indico con le stesse lettere le espressioni di queste funzioni in una carta locale di X di coordinate $z_1, \dots, z_n$. Allora, in un intorno di p, S è data dall'annullarsi di tutti i possibili prodotti $f_i g_j$. Ma per ogni i, j, h

$$\frac{\partial f_i g_j}{\partial z_h}(p) = \frac{\partial f_i}{\partial z_h}(p) g_j(p) + f_i(p) \frac{\partial g_j}{\partial z_h}(p) = 0$$

poichè $p \in S_1 \cap S_2$. Dunque p è un punto singolare di S. $\square$

Il caso di cui ci occuperemo principalmente nel seguito è quello delle sottovarietà analitiche dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$. Possiamo realizzare

$\mathbb{P}^N$ come quoziente
$$\mathbb{P}^N = \frac{\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}}{\sim}$$
ove $(z_1, \ldots, z_N) \sim (w_1, \ldots, w_N)$ se e solo se esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ non nullo tale che $z_i = \lambda w_i$ per ogni $i = 0, \ldots, N$. Dunque possiamo definire sullo spazio proiettivo la topologia quoziente della usuale topologia euclidea di $\mathbb{C}^{N+1}$ tramite la proiezione indotta dalla relazione di equivalenza appena definita. Chiameremo questa topologia su $\mathbb{P}^N$, *topologia complessa*. Osserviamo ora che lo spazio proiettivo è una varietà complessa: un atlante è dato dalla collezione di aperti affini $U_i = \mathbb{P}^N \setminus H_i$, ove H_i è l'iperpiano di equazione $x_i = 0$, per $i = 0, \ldots, N$, e dalle mappe $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^N$ già definite in (1.1). Le mappe di transizione $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ sono date da
$$\varphi_{ij}(w_1, \ldots, w_N) = \left(\frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_{j-1}}{w_i}, \frac{1}{w_i}, \frac{w_{j+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_N}{w_i} \right)$$
che sono chiaramente biolomorfe nel loro dominio.

Poichè i polinomi sono funzioni olomorfe, chiaramente le varietà algebriche proiettive sono sottovarietà analitiche di $\mathbb{P}^N$, lisce nell'intorno dei punti non-singolari (in senso algebrico) per il criterio della Jacobiana. D'altra parte è interessante chiedersi quale spazio occupino le varietà algebriche proiettive nella classe, apparentemente molto più ampia, delle varietà analitiche in $\mathbb{P}^N$ cioè quali sottovarietà analitiche siano anche algebriche. Inoltre è interessante determinare sotto quali ipotesi una varietà complessa, che abbiamo definito intrinsecamente usando un atlante complesso, ammetta un'immersione proiettiva e possa essere vista quindi come sottovarietà di $\mathbb{P}^N$. Daremo nei prossimi capitoli alcune risposte fondamentali a queste domande.

Dedichiamo però subito qualche riga a una considerazione topologica che sarà utile nel seguito. Nelle prime sezioni abbiamo definito la topologia di Zariski in $\mathbb{P}^N$ prendendo come aperti i complementari degli insiemi algebrici, poi abbiamo notato che possiamo definire anche la topologia complessa, considerando $\mathbb{P}^N$ come quoziente di $\mathbb{C}^{N+1} \setminus \{0\}$. Abbiamo inoltre mostrato che i punti non-singolari di una varietà algebrica proiettiva Y sono un aperto di Zariski in Y ma non abbiamo ancora detto nulla sulle loro proprietà rispetto alla topologia complessa, che è quella da considerare quando consideriamo una varietà proiettiva come sottovarietà analitica.

Teorema 1.4.9. *L'insieme dei punti non-singolari di una varietà algebrica proiettiva $Y \subseteq \mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ è connesso nella topologia complessa.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo fatto è particolarmente tecnica. Ci limitiamo a fornire uno schema di dimostrazione, rimandando a Shafarevich [8] per i dettagli. Si procede per induzione sulla dimensione di Y. La base induttiva segue dal fatto che i punti singolari di una curva algebrica proiettiva Y sono un sottoinsieme proprio di Y chiuso secondo Zariski, dunque un insieme finito di punti che non può sconnettere la curva. Data ora Y una generica varietà proiettiva in $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ e detta X la varietà quasi-proiettiva formata dai punti non-singolari di Y, si costruisce, usando opportune sezioni iperpiane, un morfismo suriettivo $f : U \to V$, ove U è un aperto di X e V è una varietà proiettiva di dimensione $\dim Y - 1$, tale che ogni fibra di f è irriducibile e 1-dimensionale. Tale costruzione permette di provare il passo induttivo. $\square$

Dal teorema 1.4.9 e dalla proposizione 1.4.8 possiamo dunque dedurre il seguente:

Corollario 1.4.10. *Una varietà algebrica proiettiva in* $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ *è una sottovarietà analitica irriducibile.*

Capitolo 2

Il teorema di Chow

In questo capitolo diamo una dimostrazione del teorema centrale di questo lavoro: il teorema di Chow per sottovarietà analitiche chiuse e lisce dello spazio proiettivo complesso.

Iniziamo con lo studio del campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(X)$ su una varietà complessa compatta. In particolare dimostriamo che il grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ su $\mathbb{C}$ non può superare la dimensione di X. In seguito enunciamo il teorema di Chow in tutta generalità e lo dimostriamo nel caso di sottovarietà analitiche chiuse e lisce. L'aggiunta dell'ipotesi sull'assenza di punti singolari ci permette infatti di usare le nostre conoscenze sul campo delle funzione meromorfe su una sottovarietà complessa compatta $X \subseteq \mathbb{P}^n$ per mostrare che questa coincide necessariamente con la sua chiusura di Zariski in $\mathbb{P}^n$. Nella terza sezione infine, mettiamo in evidenza la relazione tra l'algebricità di una varietà complessa e l'esistenza di una sua immersione proiettiva e introduciamo due classi fondamentali di varietà algebriche, le varietà di Moishezon e di Kähler, spiegandone la relazione con la questione dell'algebricità.

La dimostrazione che presentiamo della stima del grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ si deve a Siegel ed è riportata per esempio in Huybrechts [5] e Shafarevich [8], mentre la dimostrazione della forma debole del teorema di Chow segue il procedimento presentanto nella lettera anonima [1] giunta al *American Journal of Mathematics*, attribuita da molti a Serre, che in quell'anno stava lavorando ai celebri teoremi GAGA e quindi alla questione della relazione tra varietà analitiche e algebriche da una prospettiva più intrinseca e astratta. La presentazione della relazione tra varietà algebriche, varietà di Moishezon e varietà di Kähler segue quella di Hartshorne [4]; per la dimostrazione di questi teoremi rimandiamo all'articolo originale di Moishezon [7].

2.1 Funzioni meromorfe

Siano f e g due funzioni olomorfe su un aperto di $\mathbb{C}^n$ a valori in $\mathbb{C}$: f e g si dicono *relativamente prime* in x se lo sono, nell'anello delle serie di potenze convergenti, i loro sviluppi in serie di potenze in x. Essendo tale nozione indipendente dalla scelta delle coordinate, la stessa definizione si applica a funzioni olomorfe su un aperto di una varietà complessa X. Dato ora un aperto U di una varietà complessa, una frazione meromorfa su U è una frazione $\frac{f}{g}$, ove f e g sono funzioni olomorfe relativamente prime in ogni punto di U e g non è identicamente nulla su alcuna componente connessa di U.

Definizione 2.1.1. Sia X una varietà complessa compatta e connessa. Una *funzione meromorfa* su X è data da un ricoprimento $\{U_i\}$ di X con aperti coordinati e da una collezione $\{f_i\}$ di frazioni meromorfe sugli U_i tali che le restrizioni di f_i e f_j a $U_i \cap U_j$ coincidono per ogni coppia di indici i e j.

Chiaramente le funzioni meromorfe su X formano un campo, indicato con $\mathcal{M}(X)$. Il risultato fondamentale di questa sezione è la seguente stima sul grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ su $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1.2. *Sia X una varietà complessa compatta e connessa di dimensione k. Allora il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(X)$ è un'estensione di $\mathbb{C}$ di grado di trascendenza al più k.*

Per dimostrare il teorema abbiamo bisogno del seguente lemma, noto come lemma di Schwarz.

Lemma 2.1.3. *Sia f una funzione olomorfa su un intorno del polidisco chiuso $P = \{(z_1, \ldots, z_n) : |z_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{C}^n$ che si annulla con molteplicità h nell'origine. Se M è il massimo di $|f|$ su P allora*

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leq M(\max_{i=1,\ldots,n} |z_i|)^h$$

per z nel polidisco aperto $|z_i| < 1$.

Dimostrazione. Per $z = (z_1, \ldots, z_n)$, sia $|z| = \max_{i=1,\ldots,n} |z_i|$. Se fissiamo ora $z \in \mathbb{C}^n$ con $|z| < 1$ e definiamo $g(t) = f(tz)$ per $t \in \mathbb{C}$ si ha che g è olomorfa nel disco $|t| \leq |z|^{-1}$ e i primi h coefficienti del suo sviluppo in serie di potenze centrato in zero sono nulli. Quindi $g(t)/t^h$ è olomorfa per $|t| \leq |z|^{-1}$. Per il teorema del massimo modulo in questo disco,

$$\left|\frac{g(t)}{t^h}\right| \leq \frac{M}{|z|^{-h}} = M\,|z|^h\,.$$

Prendendo il limite per $t \to 1$ si ottiene la tesi. $\square$

Dimostrazione. Procediamo ora con la dimostrazione del teorema. Siano $f_1, \ldots, f_{k+1}$ funzioni meromorfe su X, mostriamo che è possibile trovare un polinomio non nullo $F \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{k+1}]$ tale che $F(f_1, \ldots, f_{k+1})$ sia identicamente zero. Poichè X è compatto possiamo trovare ricoprimenti aperti $\{U_x\}, \{V_x\}, \{W_x\}$ di X ove x varia in un sottoinsieme finito di X, che supporremo di cardinalità r, tali che per ogni x:

i) $U_x \supset \overline{V_x} \supset \overline{W_x}$,

ii) $x \in W_x$,

iii) vi sono funzioni olomorfe $P_{i,x}$ e $Q_{i,x}$ relativamente prime in ogni punto di U_x, tali che $f_i = \frac{P_{i,x}}{Q_{i,x}}$ su U_x,

iv) vi è un sistema di coordinate $(z_{1,x}, \ldots, z_{k,x})$ su U_x centrato in x tale che $V_x = \{|z_{i,x}| < 1, i = 1, \ldots, k\}$ e $W_x = \{|z_{i,x}| < \frac{1}{2}, i = 1, \ldots, k\}$.

La condizione *iii)* implica che la funzione $\varphi_{i,x,y} = \frac{Q_{i,x}}{Q_{i,y}}$ è olomorfa e mai nulla in $U_x \cap U_y$ e limitata in $V_x \cap V_y$. Poniamo ora

$$\varphi_{x,y} = \prod_{i=1}^{k+1} \varphi_{i,x,y},$$

$$C = \max_{x,y} \max_{V_x \cap V_y} |\varphi_{x,y}| .$$

La costante C è maggiore o oguale a 1 poichè $\varphi_{x,y}\varphi_{y,x} = 1$. Sia ora F un polinomio di grado d in $k+1$ variabili, su U_x possiamo scrivere

$$F(f_1, \ldots, f_{k+1}) = \frac{R_x}{Q_x^d}$$

ove $Q_x = \prod_{i=1}^{k+1} Q_{i,x}$ e R_x è olomorfa. Osserviamo che, fissato comunque h, possiamo imporre che R_x si annulli in x con molteplicità almeno h per ogni x. Ciò infatti equivale a imporre che tutte le derivate di R_x di ordine minore di h si annullino in x: si tratta di $\binom{h+k-1}{k}$ condizioni lineari sui coefficienti di F per ogni x. Complessivamente si hanno dunque $r\binom{h+k-1}{k}$ condizioni; d'altra parte, per d sufficientemente grande

$$\dim\left(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{k+1}]_{\leq d}\right) = \binom{d+k+1}{k+1} > r\binom{h+k-1}{k} \tag{2.1}$$

quindi si può trovare un polinomio con la proprietà richiesta. Poniamo ora $M = \max_x \max_{V_x} |R_x|$. Dato che $R_x = \varphi_{x,y}^d R_y$ e che i W_x ricoprono X, si ottiene, per il lemma 2.1.3 e la proprietà *iv)* dei ricoprimenti scelti,

$$M \leq \frac{C^d}{2^h} M. \tag{2.2}$$

Infine osserviamo che, se h è sufficientemente grande, possiamo trovare d tale che valga la formula (2.1) e che $C^d < 2^h$. Infatti se $C = 2^\lambda$ con $\lambda \geq 0$ poichè $C \geq 1$, basta prendere $h \geq \lambda d$ in modo che h, d soddisfino la (2.1), cosa possibile poichè il grado in d del termine di sinistra in (2.1) è maggiore del grado in h del termine di destra. Ma allora, operando questa scelta, la (2.2) implica che $M = 0$ cioè che $F(f_1, \ldots, f_{k+1})$ vale identicamente zero. Concludiamo che in $\mathcal{M}(X)$ non possono esistere $k+1$ elementi algebricamente indipendenti su $\mathbb{C}$ dunque il grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ su $\mathbb{C}$ è al più k.

□

Osservazione 2.1.4. Abbiamo dunque dimostrato che il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(X)$ su una varietà complessa connessa e compatta coincide con $\mathbb{C}$ oppure contiene un'estensione trascendente di $\mathbb{C}$ di grado di trascendenza minore o uguale alla dimensione di X, ogni altra funzione meromorfa su X sarà algebrica su questa estensione. Di fatto, tale stima del grado di trascendenza non può essere migliorata in tutta generalità, cioè il grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ può assumere valori arbitrari tra zero e $\dim X$ al variare di X. Per esempio, per $n \geq 2$ esistono tori complessi di dimensione n privi di funzioni meromorfe non costanti. Al contrario, vedremo che l'esistenza di funzioni meromorfe non costanti su ogni superficie di Riemann compatta X gioca un ruolo cruciale nell'esistenza di un'immersione proiettiva $X \to \mathbb{P}^N$ e dunque nell'algebricità di X.

2.2 Il teorema di Chow

Siamo ora in grado di dare una prima risposta alla questione centrale che ci siamo posti intorno all'algebricità delle varietà analitiche. Nel caso di varietà analitiche nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^N$ la risposta è straordiariamente semplice ed elegante.

Teorema di Chow. *Ogni sottovarietà analitica chiusa di $\mathbb{P}^N$ è un'insieme algebrico proiettivo.*

La dimostrazione in tutta generalità di questo fatto è molto difficile e coinvolge avanzate tecniche analitiche, che vanno oltre gli scopi di questa tesi. Tuttavia, con gli strumenti che abbiamo presentato, siamo in grado di dimostrarne una forma un po' più debole, limitandoci al caso di sottovarietà analitiche prive di punti singolari, cioè sottovarietà complesse di $\mathbb{P}^N$. Seguiamo dunque la dimostrazione fornita dal contributo del corrispondente anonimo del *American Journal of Mathematics*, citato nell'introduzione.

Teorema 2.2.1. *Sia X una sottovarietà complessa chiusa di $\mathbb{P}^N$, allora X è algebrica.*

Dimostrazione. Segue dalla compattezza di X che il numero delle sue componenti connesse è finito e dunque possiamo lavorare su ogni componente connessa di X separatamente. Assumiamo dunque che X sia una sottovarietà complessa chiusa e connessa di $\mathbb{P}^N$, indichiamo con k la dimensione di X e con Y l'intersezione di tutti gli insiemi algebrici di $\mathbb{P}^N$ che contengono X, cioè la chiusura di X nella topologia di Zariski. Y è un insieme algebrico irriducibile cioè una varietà proiettiva; infatti se il prodotto fg di due polinomi omogenei si annulla su X, allora uno tra f e g si annulla su un sottoinsieme aperto di X, dunque su tutta X. Ma allora tale polinomio vale zero su tutto Y, essendo questo la chiusura di X nella topologia di Zariski. Sia n la dimensione di Y come varietà proiettiva. Chiaramente si ha $n \geq k$. Ora, ogni funzione razionale su Y dà per restrizione una funzione meromorfa su X, dunque

$$\mathbb{C}(Y) \subseteq \mathcal{M}(X). \tag{2.3}$$

Poichè le funzioni razionali su una varietà algebrica di dimensione n formano un campo di grado di trascendenza n su $\mathbb{C}$, segue dal teorema 2.1.2 e dall'inclusione (2.3) che $n \leq k$. Quindi X e Y hanno la stessa dimensione; d'altra parte, per il corollario 1.4.10, Y è una sottovarietà analitica irriducibile di $\mathbb{P}^N$ che contiene la sottovarietà k-dimensionale X quindi coincide con questa. Abbiamo così dimostrato che X è una varietà algebrica proiettiva. □

Dalla dimostrazione del teorema 2.2.1 e dal teorema 2.1.2 sappiamo che il campo delle funzioni meromorfe su una sottovarietà complessa connessa e chiusa $X \subseteq \mathbb{P}^N$ è un'estensione algebrica del campo delle funzioni razionali su X, vista come varietà algebrica proiettiva. Si può in realtà dimostrare di più, cioè che $\mathcal{M}(X)$ coincide proprio con il campo delle funzioni razionali su X; rimandiamo all'articolo originale di Chow [2] per la dimostrazione.

Corollario 2.2.2. *Ogni funzione meromorfa su una sottovarietà complessa connessa e chiusa $X \subseteq \mathbb{P}^N$ è una funzione razionale su X, vista come varietà algebrica proiettiva.*

2.3 Ulteriori sviluppi: varietà di Moishezon e di Kähler

In questa sezione ci occupiamo di introdurre due classi fondamentali di varietà complesse e di enunciare una condizione sufficiente di algebricità, dimostrata da Moishezon in [7].

Sappiamo dalla sezione precedente che ogni sottovarietà complessa chiusa di $\mathbb{P}^N$ è algebrica, dunque se una varietà complessa compatta X ammette un'immersione in $\mathbb{P}^N$ che sia un'isomorfismo di varietà complesse sull'immagine, allora X è chiaramente isomorfa a una varietà algebrica proiettiva. Ricordiamo però che la definizione di varietà complessa 1.4.1 è del tutto intrinseca e non è vero in generale che una varietà complessa ammetta una tale immersione proiettiva. Si tratta di un'altra manifestazione della maggior ricchezza dal punto di vista geometrico delle varietà complesse rispetto alle varietà differenziabili reali: infatti, per il teorema di Whitney, ogni varietà differenziabile di dimensione m ammette un'immersione differenziabile in $\mathbb{R}^{2m}$ mentre non è affatto scontato che una varietà complessa ammetta un'immersione olomorfa in uno spazio affine o proiettivo. Ciò è legato, come si può immaginare, alla maggior rigidità delle funzione olomorfe rispetto alle funzioni differenziabili in senso reale. Ad esempio, una varietà complessa connessa e compatta di dimensione positiva non ammette un'immersione olomorfa in $\mathbb{C}^n$: se infatti esistesse una mappa olomorfa $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : X \to \mathbb{C}^n$ allora ciascuna φ_i sarebbe una funzione olomorfa non costante su X, il che contraddice la proposizione 1.4.4. Quanto all'esistenza di un'immersione in qualche spazio proiettivo, ci si può aspettare che questa sia legata all'esistenza di funzioni meromorfe sulla varietà. Vedremo esplicitamente nel prossimo capitolo che ciò è il caso delle superfici di Riemann compatte, intanto è comunque in questa direzione che va la seguente:

Definizione 2.3.1. Una *varietà di Moishezon* è una varietà complessa compatta connessa di dimensione n il cui campo delle funzioni meromorfe ha grado di trascendenza n su $\mathbb{C}$.

La proprietà di Moishezon è sufficiente a garantire l'algebricità di una varietà complessa compatta X, nel senso dell'esistenza di un isomorfismo di varietà complesse tra X e una varietà algebrica proiettiva, solo in dimensione ≤ 2. Del caso unidimensionale ci occuperemo ampiamente nel prossimo capitolo, in dimensione 2 citiamo senza dimostrazione il seguente teorema, dimostrato da Chow e Kodaira in [3]:

Teorema 2.3.2. *Ogni varietà complessa di Moishezon di dimensione 2 è isomorfa a una varietà algebrica proiettiva.*

In dimensione ≥ 3 invece, esistono varietà di Moishezon che non sono isomorfe a varietà algebriche proiettive, come mostrato dallo stesso Moishezon.

La seconda classe di varietà che introduciamo si definisce invece a partire dalle proprietà metriche di una varietà complessa.

Ricordiamo che, dato uno spazio vettoriale complesso V di dimensione n, una *forma hermitiana* è una funzione $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che

$$\varphi(v, w) = \overline{\varphi(w, v)}$$

$$\varphi(\alpha_1 v + \alpha_2 w, u) = \alpha_1 \varphi(v, u) + \alpha_2 \varphi(w, u)$$

per ogni $v, w, u \in V$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$. Una forma hermitiana φ si dice *definita positiva* se $\varphi(v, v) > 0$ per ogni $v \in V$ non nullo. Se ora consideriamo V come spazio vettoriale reale di dimensione $2n$, possiamo porre $\alpha = \mathfrak{Re}(\varphi), \beta = \mathfrak{Im}(\varphi)$, in modo che $\varphi(v, w) = \alpha(v, w) + i\beta(v, w)$. Per le proprietà di φ, α e β sono forme $\mathbb{R}$-bilineari su V con α simmetrica e β antisimmetrica, inoltre

$$\alpha(iv, iw) = \alpha(v, w), \quad \beta(iv, iw) = \beta(v, w), \quad \alpha(v, w) = \beta(iv, w).$$

La forma $\omega = -\beta$ è detta forma bilineare antisimmetrica associata a φ. In coordinate possiamo scrivere $\varphi(v, w) = \sum_{i,j} h_{ij} v_i \overline{w_j}$ con $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$ e dunque

$$\omega(v, w) = \frac{i}{2} \sum_{i,j} (h_{ij} v_i \overline{w_j} - \overline{h_{ij}}\, \overline{v_i} w_j) = \frac{i}{2} \sum_{i,j} h_{ij} (v_i \overline{w_j} - w_i \overline{v_j}). \tag{2.4}$$

Sia ora X una varietà complessa di dimensione n e $p \in X$. Fissiamo una carta locale U di coordinate $(z_1, \dots, z_n)$ intorno a p. Possiamo considerare X come varietà differenziabile di dimensione $2n$, in particolare, se $z_j = x_j + iy_j$, un sistema di coordinate locali reali per X è dato da $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Considerando X come varietà differenziabile possiamo definirne lo spazio tangente in p come lo spazio vettoriale

$$T_p X_{\mathbb{R}} = \mathrm{Der}_p(\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(U))$$
$$= \{D : \mathcal{C}^\infty_{\mathbb{R}}(U) \to \mathbb{R} : D \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare, } D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)\}$$

delle derivazioni in p. Una base di questo spazio vettoriale è data da

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1} \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \right\}.$$

Lo spazio cotangente in p, duale di $T_p X_{\mathbb{R}}$ è invece generato dalla base duale

$$\{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_n\}.$$

Ogni spazio tangente ammette una naturale struttura complessa, cioè un endomorfismo $J : T_p X_{\mathbb{R}} \to T_p X_{\mathbb{R}}$ tale che $J^2 = -id$, definita da

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

J codifica l'operazione di moltiplicazione per lo scalare complesso i nel senso che, data una funzione olomorfa $f : U \to \mathbb{C}$ e dette u e v le sue parti reale e immaginaria rispettivamente, si ha, per le equazioni di Cauchy-Riemann

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f) = \frac{\partial f}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial y_j} + i\frac{\partial v}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j} + i\frac{\partial u}{\partial x_j} = i\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

e analogamente

$$J\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)(f) = -\frac{\partial f}{\partial x_j} = i\frac{\partial f}{\partial y_j}.$$

Dunque possiamo considerare la somma diretta $T_p X_{\mathbb{R}} \oplus J(T_p X_{\mathbb{R}})$ come uno spazio vettoriale complesso di dimensione $2n$, che chiamiamo spazio tangente complessificato e indichiamo $T_p X_{\mathbb{C}}$. Si può mostrare che questo è lo spazio che è naturale definire come spazio tangente a X come varietà complessa, infatti risulta isomorfo allo spazio vettoriale delle derivazioni in p delle funzioni $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$, definite in un intorno di p a valori in $\mathbb{C}$. Ricordando ora le derivazioni introdotte nel primo capitolo:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

si ha che una base di $T_pX_{\mathbb{C}}$ come spazio vettoriale complesso è data da:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \overline{z_n}}\right\}.$$

Calcolandone la base duale $\{dz_1, \dots, dz_n, d\overline{z_1}, \dots, d\overline{z_n}\}$ si ottiene per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$dz_j = dx_j + idy_j, \qquad d\overline{z_j} = dx_j - idy_j.$$

Il sottospazio $\left\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right\rangle$ è detto spazio tangente olomorfo a X e coincide con lo spazio vettoriale delle derivazioni di funzioni olomorfe definite in un intorno di p.

Una *metrica hermitiana* su X è il dato di un forma hermitiana definita positiva sullo spazio tangente olomorfo in ogni suo punto.

Una volta introdotta la base $\{dz_1, \dots, dz_n, d\overline{z_1}, \dots, d\overline{z_n}\}$ dello spazio cotangente a X in un punto p e le forme antisimmetriche

$$(dz_i \wedge d\overline{z_j})(v, w) = \det \begin{pmatrix} v_i & w_i \\ \overline{v_j} & \overline{w_j} \end{pmatrix}$$

possiamo scrivere la forma bilineare antisimmetrica ω associata alla forma hermitiana definita sullo spazio tangente olomorfo in p, che risulta, ricordando la relazione (2.4) e indicando con $(h_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice della forma hermitiana,

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij}(dz_i \wedge d\overline{z_j}).$$

Essendo ω una forma antisimmetrica definita sullo spazio tangente olomorfo a X in ogni suo punto, essa è una 2-forma differenziale su X, detta 2-forma associata alla metrica hermitiana.

Definizione 2.3.3. Una *varietà di Kähler* è una varietà complessa che ammette una metrica hermitiana la cui 2-forma differenziale associata ω è chiusa.

Esempio 2.3.4. Una classe fondamentale di varietà di Kähler è costituita proprio dalle sottovarietà complesse dello spazio proiettivo. Infatti $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ ammette una metrica hermitiana, detta metrica di Fubini-Study, che lo rende una varietà di Kähler: si veda Huybrechts [5] per la costruzione. Ogni sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ eredita tale metrica ed è dunque di Kähler.

Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema, dimostrato a Moishezon in [7], che fornisce una condizione sufficiente per l'algebricità di una varietà complessa.

Teorema 2.3.5. *Ogni varietà di Moishezon che sia anche di Kähler è isomorfa a una varietà algebrica proiettiva.*

Capitolo 3

Algebricità delle superfici di Riemann compatte

Questo capitolo è dedicato a una trattazione specifica del caso delle superfici di Riemann compatte, che ci permette di descrivere concretamente, se non perfino esplicitamente, nel caso dei tori complessi, molti dei concetti sviluppati nel capitolo precedente.

Dopo aver ricapitolato le proprietà fondamentali di funzioni e mappe olomorfe e meromorfe su una superficie di Riemann compatta X e la costruzione di 1-forme su X, procediamo definendo il gruppo dei divisori di X e in particolare i divisori principali e canonici. La teoria e il formalismo dei divisori ci permettono, nella prima sezione, di approfondire lo studio del campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(X)$. In particolare, diamo una dimostrazione *ad hoc* per superfici di Riemann compatte della stima del grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ su $\mathbb{C}$, che semplifica notevolmente la dimostrazione data nel secondo capitolo, e mostriamo che $\mathcal{M}(X)$ è un'estensione finitamente generata di $\mathbb{C}$. La prima sezione termina con l'enunciato del fondamentale teorema di Riemann-Roch.

Nella seconda sezione studiamo la relazione tra sistemi lineari di divisori e immersioni olomorfe in $\mathbb{P}^n$ fino a dimostrare che ogni superficie di Riemann compatta X ammette un'immersione proiettiva olomorfa. La nostra strategia, ispirata a Miranda [6], è quella di ricondurre la questione dell'esistenza di una tale immersione a un problema di esistenza di determinati divisori, detti molto ampi, su X, problema che risolveremo ricorrendo al teorema di Riemann-Roch.

Concludiamo infine con lo studio dei tori complessi di dimensione 1. In particolare, descriviamo le loro classi di isomorfismo e costruiamo esplicitamente il campo delle funzioni meromorfe su un toro T. Il teorema centrale della sezione esibisce un'isomorfismo tra T e una curva ellittica in $\mathbb{P}^2$. L'ingrediente fondamentale risulterà essere la funzione $\wp$ di Weierstrass e la relazione polinomiale che la lega alla sua derivata. Dimostriamo inoltre che $\mathcal{M}(T)$ è isomorfo al campo delle funzioni razionali sulla corrispondente curva ellittica.

3.1 Divisori e funzioni meromorfe

Ricordiamo che una superficie di Riemann è una varietà complessa di dimensione 1. Nel seguito considereremo superfici di Riemann *connesse* e *compatte*. Diamo subito un esempio fondamentale.

Esempio 3.1.1. Consideriamo l'insieme $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dotato della topologia data dalla compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$: gli aperti di X sono gli aperti di $\mathbb{C}$ e gli insiemi del tipo $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ ove K è un compatto in $\mathbb{C}$. Costruiamo un atlante su X prendendo come carte locali $(\mathbb{C}, \varphi_0)$ e $(\mathbb{C}^* \cup \{\infty\}, \varphi_1)$ ove $\varphi_0 = id_{\mathbb{C}}$, $\varphi_1(z) = \frac{1}{z}$ per ogni $z \in \mathbb{C}^*$ e $\varphi_1(\infty) = 0$.
Il cambiamento di carta è dato da $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}(t) = \frac{1}{t}$ che è chiaramente una funzione biiettiva e olomorfa. Lo spazio topologico X dotato di questo atlante complesso è una superficie di Riemann compatta che si dice *sfera di Riemann*. Osserviamo che la sfera di Riemann è isomorfa come varietà complessa alla retta proiettiva complessa $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dotata dell'atlante già definito nel primo capitolo per un generico spazio proiettivo complesso. L'isomorfismo è dato da $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X$ ove

$$f([x_0 : x_1]) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_0}, & \text{se } x_0 \neq 0 \\ \infty, & \text{se } [x_0 : x_1] = [0 : 1] \end{cases}$$

con inversa $f^{-1} : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ che si ottiene facilmente: $f^{-1}(z) = [1 : z]$ se $z \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(\infty) = [0 : 1]$. Essendo interessati naturalmente solo alle classi di isomorfismo di superfici di Riemann, indicheremo con $\mathbb{P}^1$ la sfera di Riemann, identificata con la retta proiettiva complessa tramite l'isomorfismo citato.

Prima di introdurre l'argomento centrale di questa sezione, il gruppo dei divisori su una superficie di Riemann X, riassumiamo struttura e proprietà delle funzioni olomorfe e meromorfe su X. Osserviamo innanzitutto che, poichè X è una varietà complessa compatta, tutte le funzioni olomorfe $f : X \to \mathbb{C}$ sono costanti. Date ora X, Y superfici di Riemann e una mappa olomorfa $f : X \to Y$, fissati un punto $p \in X$ e carte locali (U, φ), (V, ψ) centrate rispettivamente in p e in $f(p)$, cioè tali che $\varphi(p) = 0 = \psi(f(p))$, si ha che l'espressione di f in tali carte locali è $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) = z^m h(z)$ per qualche m naturale e h olomorfa tale che $h(0) \neq 0$. Si può verificare facilmente che m non dipende dalla scelta delle carte locali dunque possiamo definire m come la *molteplicità* $\mathrm{mult}_p(f)$ di f nel punto p. Inoltre, in opportune carte locali, f si lascia scrivere intorno a p come $z \longmapsto z^m$. I punti $p \in X$ in cui la molteplicità di f è ≥ 2 sono detti punti di ramificazione, le loro immagini punti di diramazione.

Proposizione 3.1.2. *Data una funzione olomorfa non costante $f : X \to Y$ tra superfici di Riemann connesse e compatte, il numero intero*

$$d_y(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \mathrm{mult}_x(f)$$

è costante al variare di $y \in Y$ ed è detto grado $\deg(f)$ *di f.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che da connessione e compattezza di X e Y segue che f è suriettiva e a fibre finite. Mostriamo che la funzione $y \longmapsto d_y(f)$ è una funzione localmente costante da Y in $\mathbb{Z}$: poichè Y è connesso, una funzione localmente costante su Y è costante, da cui la tesi.

Prima di procedere, consideriamo il disco aperto $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ e la funzione $g : D \to D$ che manda z in z^m con $m \geq 1$: il punto $z_0 = 0$ ha molteplicità m, tutti gli altri hanno molteplicità 1. Ora, se $w \in D$ è non nullo, w ha esattamente m controimmagini di molteplicità 1, mentre l'unica controimmagine di zero è $z_0 = 0$ con molteplicità m. Dunque $d_w(f) = m \quad \forall w \in D$, cioè in questo caso la tesi è verificata. Lo stesso vale naturalmente considerando una funzione definita allo stesso modo su un'unione disgiunta di dischi aperti: il nostro scopo è quindi mostrare che una funzione olomorfa non costante $f : X \to Y$ è data localmente da un'unione disgiunta di mappe del tipo $z \longmapsto z^m$.

Fissiamo ora $y \in Y$ e sia $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Come detto precedentemente possiamo scegliere opportune coordinate locali $\{z_i\}$ in modo che, intorno a ogni x_i, f abbia espressione locale $w = f(z_i) = z_i^{m_i}$. Restringendo opportunamente gli intorni dei punti x_i si ha la scrittura di f come unione disgiunta di funzioni del tipo $z \longmapsto z^m$.

Rimane infine da dimostrare che non ci sono controimmagini escluse dal precedente conteggio cioè che, se V è un intorno sufficientemente piccolo di y, allora $f^{-1}(V)$ è unione disgiunta di intorni U_i dei punti x_i. Se così non fosse, troveremmo una successione $\{p_n\} \subset X$ tale che $p_n \notin \bigcup_i U_i$ e $f(p_n)$ converge a y in Y. Per compattezza di X, $\{p_n\}$ ammette sottosuccessione convergente $p_{n_k} \to p_0$. Per continuità di f, $f(p_{n_k}) \to f(p_0) = y$ dunque $p_0 \in f^{-1}(y) \subseteq \bigcup_i U_i$. Ciò è una contraddizione poichè, essendo $X \setminus \bigcup_i U_i$ chiuso, si ha $p_0 \in X \setminus \bigcup_i U_i$. □

Osservazione 3.1.3. Dal punto di vista topologico, possiamo dire qualcosa di piuttosto preciso. Una funzione olomorfa non-costante $f : X \to Y$ tra superfici di Riemann connesse e compatte è un rivestimento ramificato di grado finito $\deg(f)$, uguale al numero di controimmagini contate con molteplicità di ogni punto di Y. In particolare, vale la *formula di Riemann-Hurwitz*, di cui omettiamo la dimostrazione:

$$2g(X) - 2 = \deg(f)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\mathrm{mult}_p(f) - 1)$$

ove $g(X)$ e $g(Y)$ indicano i generi di X e Y viste come superfici topologiche reali.

Passiamo ora alle funzioni meromorfe. Come spiegato nella sezione 2.1, una funzione meromorfa su X non è altro che una collezione di frazioni meromorfe sui suoi aperti coordinati, che coincidono sulle loro intersezioni. Ricordiamo ora che, data una funzione meromorfa f su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, esiste un sottoinsieme aperto $U \subseteq \Omega$ tale che $f_{|U}$ è olomorfa e $\Omega \setminus U$ è un sottoinsieme discreto di Ω costituito da punti di polo per f cioè punti $z_0 \in \Omega$ in cui $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$. Inoltre, dato un generico $a \in \Omega$, f si scrive in un intorno di a come serie di

Laurent:
$$f(z) = \sum_{n \geq m} c_n (z-a)^n.$$
L'intero $m = \min\{n \in \mathbb{Z} : c_n \neq 0\}$ si dice *ordine* di f nel punto a e si indica con $\mathrm{ord}_a(f)$. Osserviamo che chiaramente $\mathrm{ord}_a(f)$ è positivo se a è zero di f, negativo se è un polo, nullo se $f(a) \in \mathbb{C}^*$. Poichè tale definizione è invariante per cambi di coordinate, essa si può estendere a una funzione meromorfa f definita su una superficie di Riemann X: dato $p \in X$ e una qualsiasi carta locale (U, φ) intorno a p definiamo l'ordine di f in p come
$$\mathrm{ord}_p(f) \coloneqq \mathrm{ord}_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}).$$
Osserviamo inoltre che l'insieme dei poli di una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(X)$ su una superficie di Riemann compatta è un discreto in un compatto dunque è un insieme finito e che f può essere interpretata come una funzione olomorfa $g : X \to \mathbb{P}^1$, ponendo:
$$g(p) = \begin{cases} f(p) \in \mathbb{C}, & \text{se } p \text{ non è polo di } f \\ \infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Inoltre si ha chiaramente:
$$\mathrm{mult}_p(g) = \begin{cases} \mathrm{ord}_p(f - f(p)), & \text{se } p \text{ non è polo di } f \\ -\mathrm{ord}_p(f), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Dalla proposizione 3.1.2 segue allora immediatamente il seguente:

Corollario 3.1.4. *Sia X una superficie di Riemann connessa e compatta e $f \in \mathcal{M}(X)$, allora*
$$\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

Introduciamo ora il seguente concetto, elementare ma ricco di cruciali conseguenze.

Definizione 3.1.5. Il gruppo dei divisori di una superficie di Riemann compatta X è il gruppo delle somme formali sui punti di X con l'operazione di somma puntuale:
$$\mathrm{Div}(X) = \left\{ \sum_{p \in X} n_p[p] : n_p \in \mathbb{Z} \text{ nulli eccetto un numero finito} \right\}.$$

Il grado di un divisore $D = \sum_p n_p[p]$ è il numero intero $\deg(D) = \sum_p n_p$ e il suo supporto è l'insieme $\mathrm{supp}(D) = \{p \in X : n_p \neq 0\}$.

Un divisore della forma $\mathrm{div}(f) = \sum_p \mathrm{ord}_p(f)[p]$ con $f \in \mathcal{M}(X)$ è detto *principale*. Due divisori si dicono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è un divisore principale.

Dato un divisore $D = \sum_p n_p[p]$ indicheremo spesso n_p con $D(p)$ e ometteremo le parentesi quadre sui punti, quando sarà chiaro il significato dell'espressione.

Osserviamo che ogni divisore principale si può scrivere come

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f)$$

ove

$$\operatorname{div}_0(f) = \sum_{\substack{p \in X \text{ con} \\ \operatorname{ord}_p(f) > 0}} \operatorname{ord}_p(f)[p]$$

è detto *divisore degli zeri di f* e

$$\operatorname{div}_\infty(f) = \sum_{\substack{p \in X \text{ con} \\ \operatorname{ord}_p(f) < 0}} (-\operatorname{ord}_p(f))[p]$$

è detto *divisore dei poli di f*.

Per il corollario 3.1.4 tutti i divisori principali hanno grado nullo e dunque divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado. Osserviamo inoltre che

$$\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g), \qquad \operatorname{div}(f+g) \geq \min\{\operatorname{div}(f), \operatorname{div}(g)\}.$$

Introduciamo ora le 1-forme olomorfe e meromorfe su superfici di Riemann. Ricordiamo che una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ è un'espressione della forma $\alpha = f(z,\overline{z})dz + g(z,\overline{z})d\overline{z}$ ove f e g sono funzioni $\mathcal{C}^\infty$ su U a valori complessi. Inoltre una 1-forma olomorfa (rispettivamente meromorfa) su U è un espressione della forma $\omega = f(z)dz$ con f funzione olomorfa (rispettivamente meromorfa) su U. Come ci si aspetta, una 1-forma su una superficie di Riemann X è data da una 1-forma su ogni sua carta locale in modo che sia verificata un'opportuna condizione di "incollamento", che assicuri che le varie forme "locali" rappresentino la stessa 1-forma definita globalmente su X.

Definizione 3.1.6. Una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ su una superficie di Riemann X è una collezione di 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ $\alpha_i = f_i(z_i,\overline{z_i})dz_i + g_i(z_i,\overline{z_i})d\overline{z_i}$ per ogni carta locale $\{z_i\}$ di X tali che, indicando come di consueto con $\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ la mappa di transizione tra le carte locali φ_j e φ_i, si ha per ogni i, j

$$f_j(z_j,\overline{z_j}) = f_i(\varphi_{ij}(z_j),\overline{\varphi_{ij}(z_j)})\varphi'_{ij}(z_j)$$

$$g_j(z_j,\overline{z_j}) = g_i(\varphi_{ij}(z_j),\overline{\varphi_{ij}(z_j)})\overline{\varphi'_{ij}(z_j)}.$$

In particolare, una 1-forma olomorfa (rispettivamente meromorfa) su X è una collezione di 1-forme olomorfe (rispettivamente meromorfe) $\omega_i = f_i(z_i)dz_i$ per ogni carta locale $\{z_i\}$ di X tali che

$$f_j(z_j) = f_i(\varphi_{ij}(z_j))\varphi'_{ij}(z_j) \quad \forall i, j. \tag{3.1}$$

L'insieme delle 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ su X si indica con $\mathcal{A}^{(1)}(X)$, quello delle 1-forme olomorfe su X con $\Omega(X)$ e quello delle 1-forme meromorfe con $\mathcal{M}^{(1)}(X)$.

Osserviamo ora che, se $\varphi : X \to Y$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann che ha espressione locale $w = \varphi(z)$, e ω è una 1-forma meromorfa su Y, che si scrive localmente come $g(w)dw$ in una carta locale di coordinata w, allora è immediato verificare che l'espressione $g(\varphi(z))\varphi'(z)dz$ fornisce l'espressione locale di una 1-forma meromorfa su X, che si dice *pull-back* di ω e indichiamo con $\varphi^*\omega$.

Seguendo una prospettiva più intrinseca, cioè interpretando le 1-forme come sezioni del fibrato cotangente, possiamo dare la seguente descrizione. Ricordiamo che lo spazio tangente complessificato di X in un punto p è lo spazio delle derivazioni in p delle funzioni in $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}(U)$, con $U \subset X$ intorno di p, in particolare, nel caso di una superficie di Riemann, si ha $T_pX_{\mathbb{C}} = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right\rangle$. Allora la mappa olomorfa φ induce la cosiddetta *mappa differenziale* $\varphi_* : T_pX_{\mathbb{C}} \to T_{\varphi(p)}Y_{\mathbb{C}}$ che associa ad una derivazione D la derivazione φ_*D tale che

$$(\varphi_*D)(f) = D(f \circ \varphi)$$

per ogni f funzione $\mathcal{C}^\infty$ definita in un intorno di $\varphi(p)$ a valori complessi. Possiamo allora definire la mappa trasposta di φ_*, che indichiamo con φ^* e che è un omomorfismo di spazi vettoriali tra i duali degli spazi tangenti $T_{\varphi(p)}Y_{\mathbb{C}}$ e $T_pX_{\mathbb{C}}$. Ora, una 1-forma $\alpha \in \mathcal{A}^{(1)}(Y)$, associa a ogni $q = \varphi(p) \in Y$ la forma lineare $\alpha_q \in (T_qY_{\mathbb{C}})^*$, dunque per definizione di mappa trasposta, $\varphi^*(\alpha_q) \in (T_pX_{\mathbb{C}})^*$ è definita dalla relazione

$$(\varphi^*(\alpha_q))(v) = \alpha_q(\varphi_*(v)) \quad \forall v \in T_pX_{\mathbb{C}}.$$

Se nelle coordinate locali z di X e w di Y si ha che φ ha espressione $w = \varphi(z)$ e α ha espressione $f(w, \overline{w})dw + g(w, \overline{w})d\overline{w}$, allora è immediato verificare che $\varphi^*\alpha$ si scrive localmente come

$$\varphi^*\alpha = f(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\varphi'(z)dz + g(\varphi(z), \overline{\varphi(z)})\overline{\varphi'(z)}d\overline{z}.$$

In particolare, se $\omega = f(w)dw$ è una 1-forma meromorfa su Y, allora si ha $\varphi^*\omega = g(\varphi(z))\varphi'(z)dz$, che coincide dunque con la definizione di pull-back data inizialmente, il che giustifica la sovrapposizione di notazioni. Osserviamo che le "condizioni di incollamento" della definizione 3.1.6 ci assicurano che l'espressione in una carta locale di una 1-forma definita su X sia il pull-back dell'espressione della stessa forma in un'altra carta locale tramite la mappa di transizione tra le carte suddette. Torneremo sulla costruzione di 1-forme tramite pull-back in seguito.

Proposizione 3.1.7. *i) Se $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ e $f \in \mathcal{M}(X)$, allora $f\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$.*

ii) Se $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ con ω_1 non nulla, allora esiste un'unica funzione meromorfa f tale che $\omega_2 = f\omega_1$.

Dimostrazione. La dimostrazione ha solo difficoltà di carattere formale: diamo dunque l'idea di dimostrazione, lasciando i calcoli al lettore.

Per il primo punto è sufficiente osservare che, se per ogni carta locale di coordinata z_i indichiamo con $\omega_i = g_i(z_i)dz_i$ l'espressione locale di ω e con $f_i(z_i)$ l'espressione locale di f, allora le 1-forme $f_i(z_i)g_i(z_i)dz_i$, definite localmente, soddisfano la "condizione di incollamento" 3.1.

Per il secondo punto basta mostrare che, se nella carta locale di coordinata z_i le 1-forme ω_1, ω_2 si scrivono come $f_i(z_i)dz_i$ e $g_i(z_i)dz_i$, allora le funzioni

$$h_i(z_i) = \frac{g_i(z_i)}{f_i(z_i)}$$

definiscono globalmente una funzione meromorfa $h \in \mathcal{M}(X)$, poichè coincidono sulle intersezioni degli aperti coordinati. $\square$

Definizione 3.1.8. L'ordine $\mathrm{ord}_p(\omega)$ di una 1-forma meromorfa ω su X, la cui espressione locale intorno a p è $\omega_i = f_i(z_i)dz_i$, è l'ordine in p della funzione meromorfa f_i. Un divisore della forma $\mathrm{div}(\omega) = \sum_p \mathrm{ord}_p(\omega)[p]$ con $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ è detto *canonico.*

Come conseguenza della proposizione 3.1.7, tutti i divisori canonici sono linearmente equivalenti, in particolare hanno medesimo grado.

Osserviamo che possiamo definire un ordine parziale su $\mathrm{Div}(X)$ ponendo $D = \sum_p n_p[p] \geq 0$ se $n_p \geq 0$ per ogni $p \in X$, e diremo in questo caso che D è effettivo, e $D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2$ è effettivo.

Definizione 3.1.9. Dato un divisore $D \in \mathrm{Div}(X)$, lo spazio delle funzioni meromorfe con zeri e poli limitati da D è lo spazio vettoriale

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\}$$

e lo spazio delle 1-forme meromorfe con zeri e poli limitati da D è lo spazio vettoriale

$$L^{(1)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) : \mathrm{div}(\omega) + D \geq 0\}$$

Osservazione 3.1.10. Si nota facilmente che $L(0)$ coincide con l'insieme delle funzioni meromorfe su X e prive di poli dunque con l'insieme delle funzioni olomorfe su X, cioè con $\mathbb{C}$ poichè le funzioni olomorfe su una superficie di Riemann connessa e compatta sono costanti. Inoltre, se D è un divisore di grado negativo, allora $L(D) = \{0\}$. Infatti, se per assurdo esistesse $f \in L(D)$, allora si avrebbe $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$ per definizione e dunque

$$\deg(\mathrm{div}(f) + D) = \deg(\mathrm{div}(f)) + \deg(D) = \deg(D) \geq 0$$

che contraddice l'ipotesi su D.

Proposizione 3.1.11. *Siano* $D, E \in \mathrm{Div}(X)$ *divisori linearmente equivalenti e* K *un divisore canonico. Allora*

i) $L(D) \cong L(E)$

ii) $L^{(1)}(D) \cong L^{(1)}(E)$

iii) $L(D+K) \cong L^{(1)}(D)$

come spazi vettoriali.

Dimostrazione. i) Per ipotesi $D = E + \operatorname{div}(h)$ per qualche funzione meromorfa non nulla h. Costruisco la mappa

$$\begin{array}{rcl} \mu_h : L(D) & \longrightarrow & L(E) \\ f & \longmapsto & hf \end{array}$$

μ_h è ben definita poichè, se $\operatorname{div}(f) + D \geq 0$ allora $\operatorname{div}(hf) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(h) \geq \operatorname{div}(h) - D = -E$; inoltre è lineare e ammette inversa $\mu_{1/h}$ dunque è un isomorfismo di spazi vettoriali.

ii) Come nel punto precedente, la funzione

$$\begin{array}{rcl} \mu_h : L^{(1)}(D) & \longrightarrow & L^{(1)}(E) \\ \omega & \longmapsto & h\omega \end{array}$$

dà l'isomorfismo cercato.

iii) Sia ω tale che $K = \operatorname{div}(\omega)$. Considero la mappa

$$\begin{array}{rcl} \mu_\omega : L(D+K) & \longrightarrow & L^{(1)}(D) \\ f & \longmapsto & f\omega \end{array}$$

ove $f\omega$ è la 1-forma costruita nella dimostrazione della proposizione 3.1.7. μ_ω è ben definita poichè, se $\operatorname{div}(f)+D+K \geq 0$ si ha $\operatorname{div}(f\omega)+D = \operatorname{div}(f)+K+D \geq 0$; inoltre è lineare e iniettiva. Per verificare la suriettività, fissiamo $\omega' \in L^{(1)}(D)$ e $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $\omega' = f\omega$, la cui esistenza è assicurata dalla proposizione 3.1.7. Si ha

$$\operatorname{div}(f) + D + K = \operatorname{div}(f) + D + \operatorname{div}(\omega) = \operatorname{div}(f\omega) + D = \operatorname{div}(\omega') + D \geq 0,$$

dunque $f \in L(D+K)$ e chiaramente $\mu_\omega(f) = \omega'$. □

Occupiamoci ora di dare una stima delle dimensioni di tali spazi.

Proposizione 3.1.12. *Sia $D \in \operatorname{Div}(X)$ e $p \in X$, allora $L(D-p)$ coincide con $L(D)$ oppure è un iperpiano in $L(D)$.*

Dimostrazione. Fissiamo una carta locale di coordinata z centrata in p. Sia $D = \sum_x \lambda_x[x]$ e pongo $n = -\lambda_p$. Allora ogni $f \in L(D)$ ha forma $f(z) = cz^n + O(z^{n+1})$, con $c \in \mathbb{C}$, e l'applicazione lineare

$$\begin{array}{rcl} \psi : L(D) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & c \end{array}$$

ha nucleo $\ker(\psi) = L(D-p)$. Ma allora $\dim L(D) = \dim L(D-p) + \dim \psi(L(D)) \leq \dim L(D-p) + 1$ da cui la tesi. □

Proposizione 3.1.13. *Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ e $D = P - N$ la sua scomposizione in parte positiva e negativa, cioè con P, N divisori effettivi con supporti disgiunti. Allora* $\dim L(D) \leq \deg(P) + 1$.

Dimostrazione. Chiaramente da $D \leq P$ segue $L(D) \subseteq L(P)$ dunque è sufficiente dimostrare che se P è un divisore effettivo allora $\dim L(P) \leq \deg(P) + 1$.

Sia, per chiarire le idee, $P = p_1 + \cdots + p_d$, con $d = \deg(P)$, ammettendo eventuali ripetizioni nell'espressione. Allora abbiamo la catena di inclusioni di spazi vettoriali

$$L(P) \supseteq L(P - p_1) \supseteq L(P - p_1 - p_2) \supseteq \cdots \supseteq L(p_d) \supseteq L(0) = \mathbb{C}.$$

Per la proposizione precedente, a ogni inclusione la dimensione cala al più di 1, dunque $\dim L(P) \leq \deg(P) + 1$. □

Una conseguenza interessante della proposizione precedente è una dimostrazione *ad hoc* per le superfici di Riemann del teorema 2.1.2 sulla stima del grado di trascendenza del campo delle funzioni meromorfe su una varietà complessa compatta.

Teorema 3.1.14. *Il campo delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(X)$ su una superficie di Riemann connessa e compatta X ha grado di trascendenza al più 1 su $\mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Suppongo per assurdo che esistano due funzioni meromorfe non-costanti f e g su X che siano algebricamente indipendenti. Possiamo scegliere un divisore effettivo D tale che $f, g \in L(D)$, ad esempio è sufficiente prendere D maggiore dei divisori dei poli di f e g. Per ogni n intero positivo e i, j naturali tali che $i + j \leq n$ si ha che $f^i g^j \in L(nD)$ poichè

$$\mathrm{div}(f^i g^j) = i\mathrm{div}(f) + j\mathrm{div}(g) \geq -(i + j)D \geq -nD.$$

Ma allora $L(nD)$ contiene tutti i monomi di grado al più n in f e g e tali monomi sono linearmente indipendenti poichè f e g sono algebricamente indipendenti. Si ha quindi

$$\dim L(nD) \geq \binom{n+2}{n} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}. \tag{3.2}$$

D'altra parte nD è un divisore effettivo dunque per la proposizione 3.1.13

$$\dim L(nD) \leq \deg(nD) + 1 = n \deg(D) + 1.$$

Ciò costituisce una contraddizione: per n sufficientemente grande la dimensione di $L(nD)$ non cresce abbastanza da soddisfare la disuguaglianza 3.2. □

Siamo tornati dunque alla questione di "quante" funzioni meromorfe esistono su una superficie di Riemann compatta. Assumeremo ora il seguente fatto, la cui dimostrazione richiede complesse tecniche di analisi funzionale:

Teorema. *Ogni superficie di Riemann ammette una funzione meromorfa non costante.*

Dai due risultati precedenti concludiamo che il campo delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann compatta ha grado di trascendenza *esattamente* 1 su $\mathbb{C}$. Possiamo in realtà dire qualcosa di più:

Teorema 3.1.15. *Il campo delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann connessa e compatta è un'estensione finitamente generata di* $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Iniziamo scegliendo una funzione meromorfa non costante $f \in \mathcal{M}(X)$ e denotiamo con $\mathbb{C}(f)$ il campo delle combinazioni razionali di f. Abbiamo dunque la catena di inclusioni

$$\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(f) \subseteq \mathcal{M}(X).$$

Sappiamo dal teorema 3.1.14 che $\mathcal{M}(X)$ è un'estensione algebrica di $\mathbb{C}(f)$, dimostriamo ora che è anche finita, da cui la tesi. Abbiamo bisogno del seguente:

Lemma 3.1.16. *Sia E un divisore su una superficie di Riemann compatta X e $D = \mathrm{div}_\infty(f)$ il divisore dei poli di una funzione meromorfa non-costante f su X. Allora esiste un intero positivo m e una funzione meromorfa g tali che $E - \mathrm{div}(g) \le mD$. Inoltre, g può essere presa in modo che sia un polinomio in f, cioè $g = r(f)$ per qualche $r(t) \in \mathbb{C}[t]$.*

Dimostrazione. Siano $p_1, \ldots, p_k$ i punti del supporto di E che non sono poli di f e tali che $E(p_i) \ge 1$ per $1 \le i \le k$. Allora la funzione $(f - f(p_i))^{E(p_i)}$ ha gli stessi poli di f e uno zero in p_i di ordine almeno $E(p_i)$. Ma allora

$$g = \prod_{i=1}^{k} (f - f(p_i))^{E(p_i)}$$

è un polinomio in f tale che $E - \mathrm{div}(g)$ è positivo solo nei poli di f. Dunque per qualche intero positivo m si ha la tesi:

$$E - \mathrm{div}(g) \le mD.$$

□

Applicando il lemma con $E = -\mathrm{div}(h)$ ove $h \in \mathcal{M}(X)$ si ottiene immediatamente il seguente:

Corollario 3.1.17. *Date f, h funzioni meromorfe non costanti su X esiste un polinomio $r(t) \in \mathbb{C}[t]$ tale che la funzione $r(f)h$ non ha poli che non siano poli di f. Inoltre esiste un intero m tale che $r(f)h \in L(mD)$ ove $D = \mathrm{div}_\infty(f)$.*

Possiamo allora ottenere la seguente stima dal basso sulla dimensione di $L(mD)$ per m sufficientemente grande.

Lemma 3.1.18. *Data $f \in \mathcal{M}(X)$, sia $D = \mathrm{div}_\infty(f)$. Se il grado dell'estensione $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq k$ allora esiste una costante m_0 tale che per ogni $m \geq m_0$,*

$$\dim L(mD) \geq (m - m_0 + 1)k.$$

Dimostrazione. Siano $g_1, \dots, g_k$ elementi in $\mathcal{M}(X)$ linearmente indipendenti su $\mathbb{C}(f)$. Per il corollario precedente per ogni $1 \leq i \leq k$, esiste un polinomio $r_i(t)$ tale che i poli di $h_i = r_i(f)g_i$ possono essere solo poli di f. Osserviamo che anche $h_1, \dots, h_k$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{C}(f)$ e che esiste m_0 tale che $h_i \in L(m_0 D)$ per ogni i.

Ora, per ogni $m \geq m_0$, $f^j h_i \in L(mD)$ se $j \leq m - m_0$, quindi

$$\dim L(mD) \geq (m - m_0 + 1)k.$$

□

Possiamo finalmente concludere la dimostrazione del teorema 3.1.15, mostrando che in particolare

$$[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \leq \deg(D)$$

ove $D = \mathrm{div}_\infty(f)$. Se infatti fosse per assurdo $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] \geq \deg(D) + 1$ allora, per il lemma precedente, si avrebbe l'esistenza di un intero m_0 tale che

$$\dim L(mD) \geq (m - m_0 + 1)(\deg(D) + 1)$$

per $m \geq m_0$. D'altra parte per la proposizione 3.1.13

$$\dim L(mD) \leq \deg(mD) + 1 = m \deg(D) + 1.$$

Combinando le precedenti disuguaglianze si ottiene

$$m \deg(D) + 1 \geq (m - m_0 + 1)(\deg(D) + 1)$$

che è chiaramente una contraddizione per m sufficientemente grande. □

Osservazione 3.1.19. Affronteremo con maggiori dettagli la questione dell'immersione di una superficie di Riemann compatta nello spazio proiettivo nella prossima sezione. Possiamo però osservare subito informalmente che nei teoremi 3.1.14 e 3.1.15 è già "scritta" di fatto l'algebricità di una superficie di Riemann compatta X. Infatti, essendo $\mathcal{M}(X)$ finitamente generato, possiamo supporre che sia generato dalle funzioni meromorfe non costanti $f_0, \dots, f_n$. Allora, come mostreremo rigorosamente nel lemma 3.2.3 della prossima sezione, la funzione $\varphi(x) = [f_0(x) : \dots : f_n(x)]$ si estende a una mappa olomorfa di X in $\mathbb{P}^n$. Ora, poichè $\mathcal{M}(X)$ ha grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$, ogni funzione f_i è legata a f_0 da una relazione polinomiale, dunque l'immagine $\varphi(X)$ è contenuta nella varietà algebrica proiettiva definita da queste relazioni. Argomenti di dimensione-irriducibilità permetterebbero infine di concludere che X si può immergere in $\mathbb{P}^n$ in modo che l'immagine di X sia una curva algebrica proiettiva. Vedremo esplicitamente questa costruzione nel caso dei tori complessi nell'ultima sezione di questa tesi.

Concludiamo questa sezione con il seguente teorema fondamentale che dà un'informazione più precisa sulle dimensioni degli spazi di funzioni $L(D)$.

Teorema di Riemann-Roch. *Sia X una superficie di Riemann compatta di genere g come superficie topologica e K un divisore canonico. Allora, per ogni divisore D su X, si ha*

$$\dim L(D) - \dim L(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

3.2 Immersioni proiettive

In questa sezione ci occupiamo di dimostrare, come conseguenza del teorema di Riemann-Roch, che ogni superficie di Riemann compatta ammette un'immersione olomorfa in uno spazio proiettivo complesso e dunque può essere identificata con una sottovarietà complessa proiettiva. Iniziamo precisando questa nozione.

Definizione 3.2.1. Sia X una superficie di Riemann compatta. Un'applicazione $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ si dice olomorfa in $p \in X$ se esistono funzioni $g_0, \dots, g_n$ olomorfe in un intorno U di p a valori complessi tali che per ogni $x \in U$ si ha $\varphi(x) = [g_0(x) : \dots : g_n(x)]$. φ si dice olomorfa se è olomorfa in ogni punto di X. Una mappa $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ si dice *immersione olomorfa* se è iniettiva, olomorfa e se per ogni $p \in X$ esiste un intorno di $\varphi(p)$ in cui una delle coordinate proiettive fornisce una carta locale per $\varphi(X)$ intorno a $\varphi(p)$.

Osservazione 3.2.2. L'ultima condizione nella definizione è cruciale affinchè $\varphi(X)$ sia una superficie di Riemann immersa in $\mathbb{P}^n$. Consideriamo per esempio la mappa $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{P}^2$ che manda z in $\left[1 : z^2 : z^3\right]$, chiaramente olomorfa: l'immagine $\varphi(\mathbb{C})$ non è una superficie di Riemann immersa in $\mathbb{P}^2$. Infatti, nella carta locale U_0 di $\mathbb{P}^2$, φ ha espressione locale $z \longmapsto (z^2, z^3)$ e se $\varphi(\mathbb{C})$ ammettesse una carta locale ψ intorno a $[1 : 0 : 0]$, allora la composizione $\psi \circ \varphi$ sarebbe una funzione biolomorfa tra aperti di $\mathbb{C}$; tuttavia la derivata dell'espressione di φ in U_0 si annulla nell'origine dunque per la regola di derivazione delle funzioni composte la derivata della composizione $\psi \circ \varphi$ sarebbe zero nell'origine, che è una contraddizione. Lo stesso fenomeno si può osservare studiando l'immagine di φ come curva algebrica in $\mathbb{P}^2$: se indichiamo con $[X : Y : Z]$ le coordinate proiettive di $\mathbb{P}^2$ ed estendiamo olomorficamente φ a $\mathbb{P}^1$ ponendo $\varphi(\infty) = [0 : 0 : 1]$, allora l'immagine di φ è la curva algebrica di equazione $Y^3 - XZ^2 = 0$, che è una cubica cuspidale. Il punto $[1 : 0 : 0]$ annulla il gradiente del polinomio $Y^3 - XZ^2$ dunque è un punto singolare della curva algebrica, che dunque non è una varietà complessa intorno a tale punto. Lavorare con immersioni olomorfe nel senso della definizione 3.2.1 ci permette invece di identificare, tramite un isomorfismo, una superficie di Riemann compatta con una sottovarietà complessa dello spazio proiettivo e dunque di dimostrarne l'algebricità ricorrendo alla versione debole del teorema di Chow che abbiamo dimostrato nel capitolo precedente.

La questione che ci poniamo è dunque quella di costruire, data una superficie di Riemann compatta X, un'immersione olomorfa $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$. Per farlo ricorriamo alle funzioni meromorfe. Scegliamo $n+1$ funzioni meromorfe $f = (f_0, \dots, f_n)$ su X, non tutte identicamente nulle e definiamo $\varphi_f : X \to \mathbb{P}^n$ ponendo

$$\varphi_f(p) = [f_0(p) : \dots : f_n(p)] .$$

Osserviamo che a priori, φ_f è ben definita e olomorfa nei punti p che non sono né zeri comuni di tutte le f_i né poli di qualche f_i. Mostriamo ora che in realtà φ_f può essere estesa olomorficamente anche in questi punti.

Lemma 3.2.3. *Se le funzioni meromorfe $\{f_i\}$ non sono tutte nulle, allora la mappa φ_f definita sopra si estende a una mappa olomorfa da X in $\mathbb{P}^n$.*

Dimostrazione. Sia $p \in X$ e $m = \min_i \mathrm{ord}_p(f_i)$. Il problema si presenta esattamente quando $m \neq 0$: se p è polo di qualche f_i allora $m < 0$, se p è zero comune delle f_i allora $m > 0$. Ora, in un intorno di p possiamo supporre che nessuna f_i abbia poli diversi da p e che non ci siamo altri zeri comuni oltre, eventualmente, a p. Dunque, scelta una coordinata locale z centrata in p, le funzioni $f_i(z)$ sono olomorfe per $z \neq 0$ e non esiste z_0 vicino a zero che sia zero comune delle f_i. Ma allora possiamo moltiplicare ciascuna $f_i(z)$ per z^{-m} senza cambiare il valore di φ. Esplicitamente, posto $g_i(z) = z^{-m} f_i(z)$, si ha per $z \neq 0$:

$$\varphi_f(z) = [g_0(z) : \dots : g_n(z)] .$$

Tutte le componenti di quest'ultima espressione di φ_f sono funzioni olomorfe vicino a zero e almeno una non si annulla in p, ma allora possiamo estendere olomorficamente la mappa in p ponendo $\varphi_f(p) = [g_0(0) : \dots : g_n(0)]$. □

Ad ogni mappa olomorfa costruita in questo modo possiamo ora associare in modo naturale un insieme di divisori, detto sistema lineare; la strategia che seguiremo sarà dunque quella di determinare sotto quali ipotesi questo sistema lineare risulta associato a un'immersione olomorfa nel senso della definizione 3.2.1, traducendo quindi il problema dell'esistenza di un'immersione olomorfa in termini di un problema sui divisori. Il primo concetto che dobbiamo introdurre è il seguente:

Definizione 3.2.4. Dato un divisore D su X, il *sistema lineare completo* di D, denotato con $|D|$, è l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a D.

Osserviamo che $|D|$ ha una naturale struttura di spazio proiettivo con spazio vettoriale soggiacente $L(D)$.

Lemma 3.2.5. *La mappa*

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{P}(L(D)) &\longrightarrow |D| \\ [f] &\longmapsto \mathrm{div}(f) + D \end{aligned}$$

è una biiezione, dunque il sistema lineare completo di D ha una naturale struttura di spazio proiettivo su $L(D)$.

Dimostrazione. La mappa è chiaramente ben definita poichè se $\lambda \in \mathbb{C}^*$, allora $\mathrm{div}(\lambda f) = \mathrm{div}(f)$. Preso ora un divisore $E \in |D|$, esiste una funzione meromorfa f tale che $E = \mathrm{div}(f) + D$, poichè E e D sono linearmente equivalenti, inoltre $f \in L(D)$ poichè E è effettivo. Quindi ρ è suriettiva. D'altra parte, se $\mathrm{div}(f) + D = \mathrm{div}(g) + D$, allora $\mathrm{div}(\frac{f}{g}) = 0$, quindi $\frac{f}{g}$ è una funzione meromorfa su X priva di zeri e poli, ma allora è una costante non nulla, essendo X compatta, dunque f, g rappresentano lo stesso punto in $\mathbb{P}(L(D))$ e quindi ρ è iniettiva. □

Definizione 3.2.6. Un *sistema lineare* di divisori è un qualsiasi sottospazio proiettivo di un sistema lineare completo.

Sia ora $\varphi = [f_0 : \cdots : f_n]$ ove ciascuna f_i è una funzione meromorfa su X e sia $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\}$ ove il minimo è preso puntualmente, cioè per ogni $p \in X$, $D(p)$ è l'opposto del minimo degli ordini delle funzioni f_i in p. Per costruzione, $f_i \in L(D)$ per ogni i dunque lo spazio vettoriale generato dalle funzioni f_i è un sottospazio vettoriale, che indichiamo con V_f, di $L(D)$ a cui corrisponde il sottospazio proiettivo di $|D|$:

$$|\varphi| = |\varphi_f| = \{\mathrm{div}(g) + D : g \in V_f\}.$$

Tale sistema lineare si dice sistema lineare associato alla mappa φ.

Osservazione 3.2.7. Affinchè la definizione sia ben posta è chiaramente necessario verificare che $|\varphi|$ dipende solo da φ e non dalle funzioni f_i scelte come rappresentazione di φ. Lo facciamo in queste righe. Supponiamo che $\varphi = [f_0 : \cdots : f_n] = [g_0 : \cdots : g_n]$ con $f_i, g_i \in \mathcal{M}(X)$. Consideriamo tra le f_i e g_i le funzioni che non sono identicamente nulle: per queste funzioni, si ha $g_i(p) = \lambda(p) f_i(p)$ con $\lambda(p) \in \mathbb{C}^*$, in tutti i punti p che non sono zeri o poli delle f_i, g_i. In questi punti $\lambda(p)$ è una funzione chiaramente olomorfa, che può essere estesa a una funzione meromorfa su tutta X come rapporto $\frac{g_i}{f_i}$ di funzioni meromorfe su X. Quindi esiste una funzione meromorfa λ tale che $g_i = \lambda f_i$ per ogni i. Se ora poniamo $D' = -\min_i\{\mathrm{div}(g_i)\}$, si ha $D' = D - \mathrm{div}(\lambda)$ quindi D e D' sono linearmente equivalenti e $|D| = |D'|$. A questo punto è chiaro che $|\varphi_f| = |\varphi_g|$: un elemento di $|\varphi_g|$ ha forma

$$\mathrm{div}\left(\sum_i a_i g_i\right) + D' = \mathrm{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + \mathrm{div}(\lambda) + D' = \mathrm{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + D,$$

quindi appartiene a $|\varphi_f|$.

Lemma 3.2.8. *Sia $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ una mappa olomorfa. Allora per ogni $p \in X$ esiste un divisore $E \in |\varphi|$ il cui supporto non contiene p.*

Dimostrazione. Sia $\varphi = [f_0 : \cdots : f_n]$, $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\}$ e supponiamo che tale minimo sia realizzato dalla funzione f_j cioè $D(p) = -\mathrm{ord}_p(f_j)$. Chiaramente $E = \mathrm{div}(f_j) + D$ appartiene a $|\varphi|$ ma $E(p) = \mathrm{ord}_p(f_j) + D(p) = 0$ quindi il supporto di E non contiene p. □

I sistemi lineari che soddisfano questa proprietà sono detti *senza punti base.*

Definizione 3.2.9. Dato un sistema lineare Q, un punto p è detto *punto base* di Q se è contenuto nel supporto di ogni divisore appartenente a Q. Un sistema lineare si dice privo di punti base se non ammette punti base.

Restringiamo la nostra attenzione ai sistemi lineari completi.

Lemma 3.2.10. *Un sistema lineare completo $|D|$ è privo di punti base se e solo se per ogni $p \in X$, $\dim L(D-p) = \dim L(D) - 1$.*

Dimostrazione. Ci basta verificare che p è un punto base di $|D|$ se e solo se $L(D-p) = L(D)$. Ciò è vero poichè p è punto base se e solo se per ogni $f \in L(D)$ si ha $D(p) + \mathrm{ord}_p(f) \geq 1$ cioè $D(p) - 1 + \mathrm{ord}_p(f) \geq 0$, che equivale a $f \in L(D-p)$. $\square$

Ricapitolando, abbiamo associato a una mappa olomorfa $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$ un sistema lineare senza punti base: naturalmente possiamo anche procedere nella direzione opposta. Dato un sistema lineare senza punti base $Q \subseteq |D|$ di dimensione proiettiva n, corrispondente al sottospazio vettoriale V di $L(D)$ e scelta una base $\{f_0, \dots, f_n\}$ per V, la mappa $\varphi_Q = [f_0 : \cdots : f_n]$ è una mappa olomorfa che verifica $|\varphi_Q| = Q$.

Osserviamo che ci basta lavorare con sistemi lineari completi. Dato infatti un sistema lineare completo $|D|$, posto $F = \min\{E : E \in |D|\}$, si ha che $|D-F|$ è privo di punti base e $|D| = F + |D-F|$, cioè ogni divisore di $|D|$ si scrive come somma di F con un divisore di $|D-F|$. Inoltre $L(D) = L(D-F)$ dunque possiamo "restringere" $|D|$ fino a un sistema lineare completo senza punti base, senza alterare lo spazio di funzioni meromorfe associato.

Abbiamo quindi un modo di associare a un divisore D una mappa olomorfa, che indichiamo con φ_D, di X in qualche spazio proiettivo; la seguente proposizione caratterizza i divisori a cui resta associata in particolare un'immersione olomorfa. Il teorema di Riemann-Roch ci permetterà infine di concludere che ogni superficie di Riemann compatta ammette divisori di questo tipo, detti *molto ampi.*

Proposizione 3.2.11. *Sia X una superficie di Riemann compatta e D un divisore con sistema lineare completo $|D|$ di dimensione proiettiva n e privo di punti base. Allora la mappa φ_D è un'immersione olomorfa in $\mathbb{P}^n$ se e solo se per ogni p e q in X (compreso il caso $p = q$) si ha $\dim L(D-p-q) = \dim L(D) - 2$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, fissato $p \in X$, esiste una base $\{f_0, \dots, f_n\}$ di $L(D)$ tale che $\mathrm{ord}_p(f_0) = -D(p)$ e $\mathrm{ord}_p(f_i) > -D(p)$ per $i \geq 1$: infatti $L(D-p)$ ha codimensione 1 in $L(D)$ per il lemma 3.2.10, quindi basta prendere una base $f_1, \dots, f_n$ di $L(D-p)$ e completarla a una base di $L(D)$. Scegliamo di lavorare in questa base.

Procediamo dimostrando che, sotto le ipotesi della proposizione, φ_D è iniettiva se e solo se per ogni coppia di punti distinti p e q, si ha $\dim L(D-p-q) = \dim L(D) - 2$. Fissiamo un punto $q \neq p$ in X: nella base scelta $\varphi_D(p) = [1 : 0 :$

$\cdots : 0]$ dunque $\varphi_D(q) = \varphi_D(p)$ se e solo se $\mathrm{ord}_q(f_0) < \mathrm{ord}_q(f_i)$ per ogni $i \geq 1$, cioè se e solo se $\mathrm{ord}_q(f_0) = -D(q)$ e $\mathrm{ord}_q(f_i) > -D(q)$ per $i \geq 1$. Ciò è equivalente a richiedere che $\{f_1, \dots, f_n\}$ sia una base di $L(D-q)$ cioè che $L(D-q) = L(D-p)$. Questo ci dice che ogni funzione $f \in L(D)$ con $\mathrm{ord}_p(f) > -D(p)$ soddisfa anche $\mathrm{ord}_q(f) > -D(q)$, dunque $L(D-p) = L(D-q) = L(D-p-q)$. Ora, poichè $|D|$ è privo di punti base, $L(D-p)$ e $L(D-q)$ sono iperpiani in $L(D)$, quindi φ_D è iniettiva se e solo se per ogni coppia di punti distinti p, q, $L(D-p-q)$ è contenuto propriamente in $L(D-p)$ cioè è un sottospazio di codimensione 2 in $L(D)$.

Dimostriamo ora che, assumendo φ_D iniettiva, l'immagine di φ_D è una superficie di Riemann immersa in $\mathbb{P}^n$ intorno a $\varphi_D(p)$ se e solo se $L(D-2p) \neq L(D-p)$. Da ciò segue la tesi per un banale conteggio di dimensioni: la codimensione di $L(D-2p)$ in $L(D-p)$ è al più 1, e vale esattamente 1 per quanto detto, d'altra parte $L(D-p)$ ha codimensione 1 in $L(D)$ poichè $|D|$ è privo di punti base dunque $\dim L(D-2p) = \dim L(D) - 2$. Scelta una base come sopra, $\varphi_D(X)$ è una superficie di Riemann immersa intorno a $\varphi_D(p)$ se e solo se una delle coordinate proiettive di $\varphi_D(x)$ fornisce una carta locale per $\varphi_D(X)$ cioè se e solo se una delle funzioni f_i con $i \geq 1$, diciamo f_j, ha ordine esattamente $-D(p) + 1$ in p. Infatti ciò significa che, usando la coordinata locale z intorno a p e moltiplicando le coordinate di $\varphi_D(z)$ per il fattore $z^{-D(p)}$, la prima coordinata di $\varphi_D(z)$ non si annulla e almeno una delle altre coordinate, diciamo quella con indice j, ha zero semplice in p. Quindi $\frac{f_j}{f_0}$ dà una carta locale per l'immagine di φ_D. Riassumendo, se φ_D è iniettiva, allora è un'immersione olomorfa intorno a p se e solo se esiste una funzione meromorfa che appartiene a $L(D-p)$ ma non a $L(D-2p)$, da cui segue la tesi per quanto detto. $\square$

Un divisore che soddisfa la tesi della proposizione 3.2.11 si dice *molto ampio.* A questo punto è immediato vedere che un qualsiasi divisore D su una superficie di Riemann compatta X di grado sufficientemente alto è molto ampio: se infatti si pone $\deg(D)$ in modo che $\deg(K-D) + 2 < 0$ allora

$$L(K-D) = L(K-D+p) = L(K-D+p+q) = \{0\}$$

e dunque, per il teorema di Riemann-Roch, $\dim L(D-p) = \deg(D-p) + 1 - g = \dim L(D) - 1$ e $\dim L(D-p-q) = \deg(D-p-q) + 1 - g = \dim L(D) - 2$. Chiudiamo la sezione precisando questa limitazione sul grado.

Proposizione 3.2.12. *Data una superficie di Riemann compatta X di genere g come superficie topologia e K un qualsiasi divisore canonico, si ha* $\deg(K) = 2g - 2$.

Dimostrazione. Iniziamo con la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1$, che ha naturalmente genere zero. Consideriamo la 1-forma meromorfa $\omega_0 = dz$ definita sulla carta locale $(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}})$. Ricordando la formula 3.1, ω_0 si estende a una 1-forma meromorfa, che chiameremo ω, definita su tutta $\mathbb{P}^1$, prendendo sulla carta locale $(\mathbb{C}^*, w)$ la 1-forma $\omega_1 = -\frac{1}{w^2}dw$. Chiaramente $\mathrm{div}(\omega) = -2[\infty]$ e dunque la tesi è verificata.

Procediamo ora considerando una superficie di Riemann compatta X e costruiamo su di essa una 1-forma meromorfa tramite pull-back. Ricordiamo infatti che, se $\varphi : X \to Y$ è una mappa olomorfa tra superfici di Riemann che ha espressione locale $w = \varphi(z)$, e α è una 1-forma meromorfa su Y, che si scrive localmente come $g(w)dw$ in una carta locale di coordinata w, allora l'espressione $g(\varphi(z))\varphi'(z)dz$ fornisce l'espressione locale di una 1-forma meromorfa su X, detta *pull-back* di α e che indichiamo con $\varphi^*\alpha$. Osserviamo inoltre che per ogni $p \in X$

$$\mathrm{ord}_p(\varphi^*\alpha) = \mathrm{mult}_p(\varphi)(\mathrm{ord}_{\varphi(p)}(\alpha) + 1) - 1. \tag{3.3}$$

Infatti se z e w sono carte locali centrate rispettivamente in p e $\varphi(p)$ tali che φ ha espressione locale $w = z^m$ con $m = \mathrm{mult}_p(\varphi)$ e $\alpha = (cw^k + O(w^{k+1}))dw$ con $k = \mathrm{ord}_{\varphi(p)}(\alpha)$, allora $\varphi^*\alpha$ si scrive localmente intorno a p come $(cz^{km} + O(z^{m(k+1)}))mz^{m-1}dz$.

Tornando ora alla dimostrazione, sia $f \in \mathcal{M}(X)$ una funzione meromorfa non costante, $F : X \to \mathbb{P}^1$ la mappa olomorfa associata a f e $F^*\omega$ il pull-back di ω tramite F. Naturalmente ci basta mostrare ora che $\deg(\mathrm{div}(F^*\omega)) = 2g - 2$ per concludere, poichè tutti i divisori canonici di X hanno lo stesso grado. È chiaro infine dalla formula 3.3 che:

$$\begin{aligned}
\deg(\mathrm{div}(F^*\omega)) &= \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(F^*\omega) \\
&= \sum_{p\in X} \mathrm{mult}_p(F)\mathrm{ord}_{F(p)}(\omega) + \sum_{p\in X}(\mathrm{mult}_p(F) - 1) \\
&= (\deg(F))(\deg(\mathrm{div}(\omega)) + \sum_{p\in X}(\mathrm{mult}_p(F) - 1) \\
&= -2\deg(F) + \sum_{p\in X}(\mathrm{mult}_p(F) - 1) \\
&= 2g(X) - 2
\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Riemann-Hurwitz. □

Possiamo quindi concludere con il seguente:

Corollario 3.2.13. *Data una superficie di Riemann compatta X di genere g, ogni divisore di grado $d \geq 2g + 1$ è molto ampio. Di conseguenza X ammette un'immersione olomorfa in $\mathbb{P}^{g+1}$ ed è dunque isomorfa, come varietà complessa, a una curva algebrica proiettiva.*

Dimostrazione. Sia K un qualsiasi divisore canonico su X e D un divisore di grado $d \geq 2g + 1$. Si ha chiaramente $\deg(K - D) + 2 < 0$ da cui

$$L(K - D) = L(K - D + p) = L(K - D + p + q) = \{0\}$$

quindi per il teorema di Riemann-Roch, dati p e q punti qualsiasi di X:

$$\dim L(D - p) = \dim L(D) - 1, \quad \dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2.$$

Prendiamo ora per esempio un qualsiasi punto p e $D = (2g+1)p$, molto ampio per quanto appena mostrato. Si ha $\dim L(D) = g+2$ per il teorema di Riemann-Roch; inoltre, per la proposizione 3.2.11, φ_D è un'immersione olomorfa in $\mathbb{P}^{g+1}$. Infine, X è isomorfa all'immagine $\varphi_D(X)$, che è una sottovarietà complessa chiusa di $\mathbb{P}^{g+1}$ e dunque una curva algebrica proiettiva per il teorema 2.2.1. $\square$

3.3 Tori complessi e curve ellittiche

Dedichiamo l'ultima sezione di questo lavoro a un caso particolare, in cui vediamo concretizzarsi i concetti sviluppati nella tesi. Ci occupiamo in particolare dei tori complessi di dimensione 1. Ricapitoliamo e chiariamo i dettagli della loro costruzione come superfici di Riemann.

Sia Λ un sottogruppo discreto di $\mathbb{C}$, generato dagli elementi $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$: Λ si dice *reticolo.* Consideriamo l'insieme $T = \mathbb{C}/\Lambda$ dotato della topologia quoziente indotta dalla proiezione $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$. Osserviamo che, dato $z_0 \in \mathbb{C}$, per r sufficientemente piccolo, il disco $D = D_r(z_0)$ non contiene due punti z_1, z_2 tali che $z_1 - z_2 \in \Lambda$ dunque la restrizione $\pi_{|D} : D \to \pi(D)$ è un omeomorfismo; prendo quindi come carta locale intorno al punto $\pi(z_0) \in T$ l'inversa $\pi_{|D}^{-1}$. Prese ora due carte locali φ_1, φ_2 di dominio U_1 e U_2 rispettivamente e detta $\psi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$, si ha che se $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ allora $\pi(z) = \pi(\psi(z)) \in T$ dunque $z - \psi(z) \in \Lambda$. Ne segue che la mappa che associa a ogni $z \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ l'elemento $z - \psi(z)$ è continua con immagine contenuta in Λ. Poichè $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ è connesso, tale mappa non può che essere costante quindi $\psi(z) = z + \lambda$ per qualche $\lambda \in \Lambda$ cioè le mappe di transizione tra carte locali sono traslazioni, in particolare biolomorfe. Quindi le carte locali costruite come sopra formano un atlante complesso di dimensione 1 su T, che assume dunque la struttura di superficie di Riemann. Osserviamo inoltre che T è compatta e ha genere 1 come superficie topologica reale. D'ora in avanti chiameremo i tori complessi di dimensione 1 semplicemente tori complessi.

Dedichiamo ora qualche riga alla descrizione delle classi di isomorfismo dei tori complessi. Sia L un reticolo di $\mathbb{C}$ e α un numero complesso non nullo, allora $M = \alpha L$ è un reticolo e la moltiplicazione

$$\begin{aligned} \mu_\alpha : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \alpha z \end{aligned}$$

induce chiaramente un isomorfismo di superfici di Riemann tra $\mathbb{C}/L$ e $\mathbb{C}/M$. Se dunque consideriamo il reticolo $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ allora i tori complessi $\mathbb{C}/L, \mathbb{C}/M$ e $\mathbb{C}/N$, ove $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{\omega_1}{\omega_2}$ e $N = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\frac{\omega_2}{\omega_1}$, sono isomorfi. Abbiamo così mostrato che ogni toro complesso è isomorfo a un toro della forma $T_\tau = \mathbb{C}/L_\tau$ ove $L_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ e $\tau \in \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathfrak{Im}(z) > 0\}$.

Proposizione 3.3.1. *Siano L, M reticoli in $\mathbb{C}$. Allora ogni mappa olomorfa $f : \mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/M$ è indotta da una mappa affine $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \alpha z + \beta$, con*

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha L \subseteq M$. Inoltre f è un rivestimento non ramificato di grado $\deg(f)$ *uguale all'indice $[M : \alpha L]$ di αL in M.*

Dimostrazione. Dato $\beta \in \mathbb{C}$, la traslazione su $\mathbb{C}/M$, indotta da $z \longmapsto z + \beta$ è chiaramente biolomorfa. Quindi, componendo con una traslazione, possiamo ricondurci al caso $f(0) = 0$. Supponiamo inoltre f non costante.

Siano ora $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ e π_X, π_Y le rispettive proiezioni. Dato un cammino $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, la composizione $f \circ \pi_X \circ \gamma$ dà un cammino in Y: lo rialziamo rispetto al ricoprimento π_Y. In particolare, scelto un arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$ e il cammino $\gamma(t) = tz_0$, esiste un unico cammino $\tilde{\gamma}$ tale che $\tilde{\gamma}(0) = 0$ e $\pi_Y \circ \tilde{\gamma} = f \circ \pi_X \circ \gamma$. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$, poniamo $g(z_0) = \tilde{\gamma}(1)$. La funzione $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è olomorfa, infatti per ogni z_0 possiamo trovare intorni di $z_0 \in \mathbb{C}$, $\pi_X(z_0) \in X$ e $f(\pi_X(z_0)) \in Y$ tali che π_X, f, π_Y ristrette a questi intorni sono biolomorfe. Inoltre g è un rialzamento di f cioè, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\pi_Y(g(z_0)) = \pi_Y(\tilde{\gamma}(1)) = f(\pi_X(\gamma(1))) = f(\pi_X(z_0)).$$

Ora, fissato un arbitrario $l \in L$, si ha $g(z+l) \equiv g(z) \pmod M$ quindi la funzione olomorfa $\omega_l(z) = g(z+l) - g(z)$ assume valori nel reticolo M dunque è costante, essendo $\mathbb{C}$ connesso. Ne segue che $\omega_l'(z) = 0$, quindi $g'(z+l) = g'(z)$. Abbiamo così mostrato che la funzione g' è L-periodica, dunque limitata, d'altra parte è olomorfa perchè derivata di una funzione olomorfa, quindi è anch'essa costante. Ma allora $g'(z) \equiv \alpha$ e $g(z) = \alpha z$. Inoltre, poichè g manda L in M, si ha $\alpha L \subseteq M$.

Infine f non è ramificato per la fomula di Riemann-Hurwitz quindi

$$\deg(f) = \left|f^{-1}(0)\right| = |\{z \pmod L) : \alpha z \in M\}| = [M : \alpha L].$$

□

Prendiamo ora due tori complessi $T_\tau, T_{\tau'}$ con τ e τ' appartenenti al semipiano di Poincaré $\mathcal{H}$: in forza della proposizione precedente essi sono isomorfi se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che $\alpha(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ cioè tale che α e $\alpha\tau$ sono generatori del reticolo $L_{\tau'} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè α e $\alpha\tau$ appartengano a $L_{\tau'}$ è l'esistenza di $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha\tau = a\tau' + b$ e $\alpha = c\tau' + d$ ma allora

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

Inoltre, affinchè α e $\alpha\tau$ siano generatori di $L_{\tau'}$, la moltiplicazione per α deve indurre una biiezione tra L_τ e $L_{\tau'}$. Poichè tale funzione ha forma, per $m, n \in \mathbb{Z}$

$$m\tau + n \longmapsto m\alpha\tau + n\alpha = (am + cn)\tau' + (bm + dn)$$

essa induce una biiezione se e solo se l'applicazione lineare $\psi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ di matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right)$ è suriettiva. Non è difficile verificare che ciò accade se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc = \pm 1.$$

Infine, dati $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che $ad - bc \neq 0$ e preso $z \in \mathcal{H}$, calcoli elementari mostrano che

$$\mathfrak{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathfrak{Im}(z)$$

dunque $\frac{a\tau'+b}{c\tau'+d} \in \mathcal{H}$ se e solo se $ad - bc > 0$. Ricapitolando, abbiamo mostrato la seguente:

Proposizione 3.3.2. *Due tori complessi T_τ e $T_{\tau'}$ sono isomorfi se e solo se esiste $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ tale che $\tau = \frac{a\tau'+b}{c\tau'+d}$.*

Abbiamo quindi che le classi di isomorfismo dei tori complessi sono in biiezione con l'insieme delle orbite di $\mathcal{H}$ rispetto all'azione di gruppo

$$\begin{array}{ccc} SL_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \tau\right) & \longmapsto & \frac{a\tau+b}{c\tau+d}. \end{array}$$

Otteniamo in particolare che, mentre tutti i tori complessi sono diffeomorfi come superfici differenziabili, le loro classi di isomorfismo come superfici di Riemann formano un insieme non numerabile.

Avviciniamoci ora allo scopo di questa sezione, studiando le funzioni meromorfe su un toro complesso T. Abbiamo già detto che ogni superficie di Riemann ammette almeno una funzione meromorfa non costante, nel caso dei tori complessi possiamo trovare un esempio esplicito.

Definizione 3.3.3. Dato un reticolo $\Lambda \subset \mathbb{C}$, la funzione definita da:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

è detta *funzione $\wp$ di Weierstrass.*

Riassumiamo nella seguente proposizione le proprietà della funzione $\wp$.

Proposizione 3.3.4. *La funzione $\wp$ di Weierstrass è meromorfa su $\mathbb{C}$, olomorfa su $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$ e periodica rispetto a Λ, cioè $\wp(z+\omega) = \wp(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ e $\omega \in \Lambda$. La sua derivata, anch'essa Λ-periodica, è*

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

Inoltre

i) *$\wp$ è suriettiva e pari;*

ii) *$\wp'$ è dispari e $\wp'(z) = 0$ se $z \notin \Lambda$ e $2z \in \Lambda$;*

iii) *$\wp(z_1) = \wp(z_2)$ se e solo se $z_1 \pm z_2 \in \Lambda$.*

Dimostrazione. Sia $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Mostriamo che la serie $\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)$ converge totalmente su ogni compatto $K \subset \mathbb{C}\setminus\Lambda$, da cui otteniamo che $\wp$ è ben definita e olomorfa fuori da Λ. Per ogni disco compatto D della forma $\{|z| \le r\}$, preso $z \in D\setminus\Lambda$, si ha $|\omega| > 2|z|$ per ogni $\omega \in \Lambda$ escluso un insieme finito. Tutti i termini della serie escluso un numero finito si stimano dunque nel seguente modo:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right| = \left|\frac{z(2\omega - z)}{\omega^2(z-\omega)^2}\right| \le \frac{|z|\left(2+\left|\frac{z}{\omega}\right|\right)}{|\omega|^3\left(1-\left|\frac{z}{\omega}\right|\right)^2} \le \frac{10r}{|\omega|^3}.$$

Osserviamo ora che l'ultimo termine dà una serie convergente. Sia infatti, per ogni $n \ge 1$,

$$P_n = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : \max\{|t_1|, |t_2|\} = n\}.$$

P_1 contiene 8 punti di $\Lambda\setminus\{0\}$ e ciascun parallelogramma P_n con $n \ge 2$ contiene $8n$ punti di $\Lambda\setminus\{0\}$ in più del precedente P_{n-1}: ciascuno di questi punti ha distanza almeno kn dall'origine ove k è la minima distanza tra un punto di P_1 e l'origine. Dunque

$$\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{\substack{\omega\in P_n\\ n\ge 1}}\frac{1}{|\omega|^3} \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{8n}{k^3n^3} = \frac{8}{k^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

e possiamo concludere per confronto. Dalle stime dimostrate segue quindi la convergenza totale della serie che definisce $\wp$ su ogni compatto contenuto in $\mathbb{C}\setminus\Lambda$. Poichè la convergenza è totale possiamo calcolare la derivata derivando termine a termine, ottenendo facilmente la formula per $\wp'$. È ora immediato verificare che $\wp$ è pari e che $\wp'$ è dispari e Λ-periodica, cioè $\wp'(z+\omega) = \wp'(z)$ per ogni $\omega \in \Lambda$. Integrando tale espressione si ottiene

$$\wp(z+\omega) = \wp(z) + c(\omega)$$

da cui, ponendo $z = -\frac{\omega}{2}$, si ottiene, per parità di $\wp$, che $c(\omega) = 0$ dunque la Λ-periodicità di $\wp$. Ne segue che, avendo un polo di ordine 2 in zero, $\wp$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ con poli di ordine 2 in ogni punto di Λ. Per procedere abbiamo ora bisogno del seguente risultato di analisi complessa, di cui omettiamo la dimostrazione.

Lemma dell'indicatore logaritmico. *Dati un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{C}$ con bordo orientato $\partial\Omega$ e una funzione meromorfa f si ha*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a \text{ zero di } f \text{ in } \Omega}\mathrm{ord}_a(f) + \sum_{a \text{ polo di } f \text{ in } \Omega}\mathrm{ord}_a(f)$$

ove si noti che gli ordini dei poli sono negativi.

Procediamo con la dimostrazione della proposizione: sia $c \in \mathbb{C}$ e consideriamo la funzione meromorfa $f(z) = \wp(z) - c$. Scelgo $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che sui lati del parallelogramma P di vertici $\{z_0, z_0+\omega_1, z_0+\omega_2, z_0+\omega_1+\omega_2\}$ non vi siano né zeri di f né elementi del reticolo Λ. Osservando il comportamento di $\frac{f}{f'}$ sul bordo di P e per il lemma dell'indicatore logaritmico si ottiene:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = (\text{numero zeri di } f \text{ in } P \text{ con molteplicità}) - 2$$

dunque f ha due zeri con molteplicità in P e quindi $\wp$ è suriettiva.

Rimangono ora gli ultimi due punti. Abbiamo già osservato che $\wp'$ è dispari dunque se $z \notin \Lambda$, cioè z non è un polo di $\wp$, e $2z \in \Lambda$, cioè $z \equiv -z \pmod{\Lambda}$, allora $\wp'(z) = -\wp'(z) = 0$. Sia ora z_1 uno zero di $f(z) = \wp(z) - c$ in P. Se $z_1 \equiv -z_1 \pmod{\Lambda}$ allora $\wp'(z_1) = 0$ dunque z_1 ha molteplicità 2, altrimenti gli zeri di f in P sono 2 e sono distinti. In ogni caso, $\wp(z_1) = \wp(z_2) = c$ se e solo se $f(z_1) = f(z_2) = 0$ quindi se e solo se $z_1 \pm z_2 \in \Lambda$. □

Chiaramente le funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$ periodiche rispetto a Λ si fattorizzano attraverso la proiezione su $T = \mathbb{C}/\Lambda$, cioè per ogni $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ Λ-periodica esiste un'unica $g \in \mathcal{M}(T)$ tale che $f = g \circ \pi$. Tramite questa corrispondenza biunivoca possiamo identificare le funzioni $\wp$ e $\wp'$ con le funzioni meromorfe su T indotte da esse, che indicheremo, con un piccolo abuso di notazione, con le stesse lettere.

Proposizione 3.3.5. *Le funzioni meromorfe $\wp$ e $\wp'$ verificano l'equazione funzionale*

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

ove $g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4}$ *e* $g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}$

Dimostrazione. Scriviamo gli sviluppi in serie di Laurent di $\wp$ e $\wp'$ intorno a zero, essi hanno forma:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + O(z^6), \quad \wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + O(z^5)$$

da cui

$$\wp(z)^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a}{z^2} + 3b + O(z^2), \quad \wp'(z)^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a}{z^2} - 16b + O(z^2).$$

Ne segue che la funzione meromorfa $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a\wp(z)$ non ha poli, dunque è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. D'altra parte è Λ-periodica dunque è limitata. Ogni funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ e limitata è costante dunque $\wp'(z)^2 - 4\wp(z)^3 + 20a\wp(z) \equiv -28b$. Ma allora:

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

ove

$$g_2 = 20a = 10\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right)(0) = 60\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4},$$

$$g_3 = 28b = \frac{7}{6}\frac{\partial^4}{\partial z^4}\left(\wp(z) - \frac{1}{z^2}\right)(0) = 140\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}.$$

□

Osserviamo che questa proposizione è proprio una realizzazione, nel caso particolare dei tori complessi, del teorema generale 2.1.2: essendo il grado di trascendenza di $\mathcal{M}(T)$ al più 1, e dunque esattamente 1 vista l'esistenza di $\wp$, due qualsiasi funzioni meromorfe su T, quali $\wp$ e $\wp'$, sono per forza algebricamente dipendenti dunque esiste una relazione polinomiale che le lega. Nel nostro caso, la determinazione esplicita di questa relazione, data dalla proposizione 3.3.5, ci permette di determinare esplicitamente non solo un'immersione olomorfa di T nel piano proiettivo complesso ma anche l'immagine di questa immersione, che sappiamo essere una curva algebrica proiettiva.

Teorema 3.3.6. *Sia $T = \mathbb{C}/\Lambda$ un toro complesso con $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, π la proiezione sul quoziente T e $\pi(\lambda) = 0 \in T$ l'immagine di ogni elemento $\lambda \in \Lambda$. Allora la funzione olomorfa*

$$\begin{aligned} u : T \smallsetminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ z &\longmapsto [\wp(z) : \wp'(z) : 1] \end{aligned}$$

si estende a un isomorfismo di superfici di Riemann $\varphi : T \to E_\Lambda$ ove E_Λ è la cubica liscia di equazione

$$Y^2 Z = 4X^3 - g_2 X Z^2 - g_3 Z^3.$$

Dimostrazione. Essendo $\wp$ e $\wp'$ olomorfe su $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$, è chiaro che la funzione u è ben definita e olomorfa su $T \smallsetminus \{0\}$ che è appunto l'immagine di $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$ tramite la proiezione π sul quoziente. La estendiamo a una funzione olomorfa definita su tutto T come nella dimostrazione del lemma 3.2.3, moltiplicando per z^3 le coordinate proiettive di $u(z)$ vicino a zero, dunque $u(0) = [0 : 1 : 0]$. Otteniamo così una mappa olomorfa $\varphi : T \to \mathbb{P}^2$. Per la proposizione 3.3.5 l'immagine di $T \smallsetminus \{0\}$ è contenuta nella curva affine E di equazione $Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3$, tutta contenuta nell'aperto affine $U_2 = \{[X : Y : Z] : Z \neq 0\}$, dunque $\varphi(T)$ è contenuta nella curva E_Λ. Mostriamo ora che E_Λ è priva di punti singolari dunque è una superficie di Riemann. Partiamo dalla parte affine E: il suo ideale associato è generato dal polinomio $f(X,Y) = Y^2 - 4X^3 + g_2 X + g_3$ e

$$\frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{\partial}{\partial X}(4X^3 - g_2 X - g_3), \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = 2Y$$

dunque un eventuale punto singolare di E avrebbe per forza forma $[x_0 : 0 : 1]$ con x_0 zero multiplo del polinomio $4X^3 - g_2 X - g_3$. Ci basta quindi mostrare che tale polinomio ha tre radici distinte, in particolare che esistono $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tali che $\wp(z_1), \wp(z_2), \wp(z_3)$ sono distinti e $4\wp(z_i)^3 - g_2\wp(z_i) - g_3 = \wp'(z_i) = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Prendiamo $z_1 = \frac{\omega_1}{2}, z_2 = \frac{\omega_2}{2}$ e $z_3 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$: per i punti *ii*) e *iii*) della proposizione 3.3.4, i valori $\wp(z_i)$ sono distinti e $\wp'(z_i) = 0$. Possiamo quindi concludere che la curva $E \subset U_2$ è priva di punti singolari. Osserviamo ora che l'unico di punto E_Λ appartenente all'iperpiano di equazione $Z = 0$ è $[0 : 1 : 0] \in U_1 = \{[X : Y : Z] : Y \neq 0]$ e che in U_1 l'equazione affine di E_Λ è $g(X,Z) = Z - 4X^3 + g_2 X Z^2 + g_3 Z^3 = 0$. Poichè la derivata parziale rispetto a Z di

g non si annulla per $X = Z = 0$, il punto $[0 : 1 : 0]$ è non-singolare. Concludiamo dunque che E_Λ è una superficie di Riemann, compatta perchè chiusa in $\mathbb{P}^2$.

L'applicazione $\varphi : T \to E_\Lambda$ è una mappa olomorfa non-costante tra superfici di Riemann compatte, in particolare è suriettiva. Dimostriamo ora che $\deg(\varphi) = 1$ da cui segue che φ è un'isomorfismo di superfici di Riemann. Osserviamo innanzitutto che l'unica controimmagine di $[0 : 1 : 0]$ è $0 \in T$, inoltre per la dimostrazione della proposizione 3.3.4, un punto $[x_0 : y_0 : 1]$ ha al più 2 controimmagini cioè $\deg(\varphi) \leq 2$. In particolare, se $z_1, z_2 \in T$ soddisfano $\wp(z_1) = \wp(z_2)$ allora $z_1 \equiv \pm z_2 \pmod{\Lambda}$. Se ora fosse per assurdo $\deg(\varphi) = 2$ allora, poichè l'eventuale ramificazione coinvolge solo un numero finito di punti, ci sarebbero infiniti $z \in T$ tali che $\wp(z) = \wp(-z)$ e $\wp'(z) = \wp'(-z)$ quindi $\wp'(z) = 0$. Ciò è assurdo perchè gli zeri di una funzione meromorfa sono un insieme discreto nel compatto T quindi sono finiti. □

Osservazione 3.3.7. Una curva algebrica in $\mathbb{P}^2$ priva di punti singolari e definita da un polinomio di grado 3 si dice *curva ellittica*. Il teorema 3.3.6 dimostra dunque che ogni toro complesso è isomorfo come superficie di Riemann a una curva ellittica. Si può in realtà dimostrare che vale anche il viceversa cioè che ogni curva ellittica è isomorfa a un toro complesso. Non intendiamo dimostrare nei dettagli questo fatto, che richiede complessi argomenti topologici e il teorema di Abel-Jacobi: diamo però un'idea di come è possibile procedere. Data una qualsiasi cubica piana $E \subset \mathbb{P}^2$ priva di punti singolari si costruisce un sistema di riferimento proiettivo tale che E abbia equazione:

$$ZY^2 = 4X^3 + AXZ^2 + BZ^3$$

detta forma di Weierstrass. A questo punto un po' di semplici calcoli mostrano che la 1-forma $\frac{1}{Y}dX$, definita e olomorfa su $E \cap U_1 \cap U_2$, si estende a una 1-forma olomorfa mai nulla α su tutta E. Si mostra inoltre che l'insieme

$$\Lambda = \left\{ \int_\gamma \alpha \text{ al variare di } \gamma : [0,1] \to E \text{ cammino chiuso in } E \right\}$$

è un sottogruppo abeliano discreto di $\mathbb{C}$, generato da due elementi $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti, dunque un reticolo. Posto ora $p_0 = [0 : 1 : 0]$ si considera la mappa

$$\begin{aligned} v : E &\longrightarrow \quad \frac{\mathbb{C}}{\Lambda} \\ p &\longmapsto \textstyle\int_\gamma \alpha \pmod{\Lambda} \end{aligned}$$

ove γ è un qualsiasi cammino in E da p_0 a p. v risulta essere ben definita e olomorfa e si può mostrare che è un isomorfismo, dunque E è isomorfa al toro complesso $\mathbb{C}/\Lambda$.

Osservazione 3.3.8. Diamo ora una descrizione in termini della teoria dei divisori dell'immersione proiettiva $\varphi : T \to \mathbb{P}^2$ definita nel teorema 3.3.6, calcolandone il sistema lineare associato. La terna di funzioni meromorfe che definisce φ è $\{1, \wp, \wp'\}$, inoltre

$$\operatorname{div}(1) = 0, \quad \operatorname{div}(\wp) = -2[0] + [t] + [-t], \quad \operatorname{div}(\wp') = -3[0] + [s_1] + [s_2] + [s_3];$$

ove t e $-t$ sono gli zeri, eventualmente coincidenti, di $\wp \in \mathcal{M}(T)$ e gli s_i, per $i = 1, 2, 3$, sono gli zeri di $\wp'$. Ne segue che

$$D = -\min\{\mathrm{div}(1), \mathrm{div}(\wp), \mathrm{div}(\wp')\} = 3[0]$$

e dunque il sistema lineare associato a φ è

$$|\varphi| = \{D + \mathrm{div}(f) : f \in \langle 1, \wp, \wp' \rangle\} \subseteq |D| .$$

Dato ora un divisore canonico K su T, per la proposizione 3.2.12 e ricordando che il genere di T è 1, si ha $\deg(K) = 0$ e dunque $L(K - D) = \{0\}$. Ma allora per il teorema di Riemann-Roch

$$\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g(T) = 3$$

quindi $L(D) = \langle 1, \wp, \wp' \rangle$ e $|\varphi| = |D|$ è proprio un sistema lineare completo. Sempre per il teorema di Riemann-Roch è immediato verificare che D è molto ampio dunque abbiamo ritrovato da una diversa prospettiva la tesi del teorema 3.3.6: la mappa olomorfa $\varphi = \varphi_D$ è un'immersione olomorfa in $\mathbb{P}^2$ e dunque un isomorfismo di T sull'immagine $\varphi(T) = E_\Lambda$, che è una superficie di Riemann immersa in $\mathbb{P}^2$.

Concludiamo dicendo qualcosa in più sul campo delle funzioni meromorfe su un toro complesso $T = \mathbb{C}/\Lambda$ con $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Sappiamo già che $\mathcal{M}(T)$ è un'estensione finitamente generata di $\mathbb{C}$ con grado di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$, vogliamo mostrare ora in particolare che $\mathcal{M}(T)$ è generata da $\wp$ e $\wp'$.

Sia dunque $f \in \mathcal{M}(T)$, f si lascia scrivere come somma

$$f(z) = \frac{f(z) + f(-z)}{2} + \frac{f(z) - f(-z)}{2}$$

di una funzione pari e una dispari dunque ci basta dimostrare che ogni funzione pari e ogni funzione dispari in $\mathcal{M}(T)$ è combinazione razionale di $\wp$ e $\wp'$. Inoltre, poichè $\wp'$ è dispari, se f è dispari, $f\wp'$ è pari dunque ci basta dimostrarlo per funzioni pari.

Osserviamo ora che, se f è pari, derivando ripetutamente l'espressione $f(z) = f(-z)$, otteniamo

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n f^{(n)}(-z).$$

Dunque, poichè le derivate di f restano Λ-periodiche, se $2z_0 \in \Lambda$, allora

$$f^{(n)}(-z_0) = f^{(n)}(-z_0 + 2z_0) = f^{(n)}(z_0) = (-1)^n f^{(n)}(z_0),$$

quindi $f^{(n)}(z_0) = 0$ per gli n dispari, da cui si ottiene che $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ è pari. Consideriamo ora il parallelogramma P di vertici $\{0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2\}$, ove ω_1, ω_2 sono i generatori di Λ, e la sua "metà" M di vertici $\{0, \frac{\omega_1}{2}, \omega_2, \frac{\omega_1}{2} + \omega_2\}$. Naturalmente T si può vedere come immagine di P tramite la proiezione π, sia inoltre $N \subset T$ l'immagine di M tramite π. Ogni $p = \pi(w) \in T$ sta o in N o in $-N$, a meno che $2w \in \Lambda$, nel qual caso w e $-w$ sono identificati in $\mathbb{C}/\Lambda$ e $\mathrm{ord}_p(f)$ è pari per quanto detto prima. Il divisore di f ha dunque forma

$$\sum_{p\in N} n_p([p] + [-p]).$$

Consideriamo ora la funzione

$$g(z) = \prod_{p\in N\smallsetminus\{0\}} (\wp(z) - \wp(p))^{n_p}.$$

Ogni funzione $\wp(z) - \wp(p)$ ha divisore $[p] + [-p] - 2[0]$, dunque f e g hanno esattamente gli stessi zeri e poli, escluso eventualmente in 0. D'altra parte la somma degli ordini di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann compatta vale zero dunque f e g hanno lo stesso ordine anche in zero. Ciò significa che $\frac{f}{g}$ è una funzione olomorfa su T dunque costante per la proposizione 1.4.4. Ma allora possiamo concludere che $f = cg \in \mathbb{C}(\wp)$ e quindi che $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$.

Infine, possiamo dimostrare che

$$\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}(\wp, \wp') \cong \mathrm{Frac}\left(\frac{\mathbb{C}\,[X, Y]}{(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)}\right)$$

ove $\mathrm{Frac}(B)$ indica il campo dei quozienti di B e g_2, g_3 sono le costanti definite nella proposizione 3.3.5. Infatti, per la proposizione 3.3.5, la mappa

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(Y^2-4X^3+g_2X+g_3)} & \longrightarrow & \mathbb{C}\,[\wp, \wp'] \\ & X & \longmapsto & \wp \\ & Y & \longmapsto & \wp' \end{array}$$

è un ben definito omomorfismo di anelli. Per dimostrare che è un isomorfismo ci basta ora mostrare che gli unici polinomi $g(X, Y)$ tali che $g(\wp, \wp') = 0$ sono i multipli di $f(X, Y) = Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$. Ciò è immediato, infatti se $g \in \mathbb{C}\,[X, Y]$ verifica $g(\wp, \wp') = 0$ allora $g(X, Y)$ è identicamente nullo sulla curva piana affine $E = V\,(f\,(X, Y))$ ma allora, per il teorema degli zeri di Hilbert, g^r appartiene all'ideale generato da f per qualche intero positivo r e di conseguenza, essendo f irriducibile, g è un multiplo di f. Abbiamo quindi mostrato che ψ è un isomorfismo tra $\frac{\mathbb{C}[X,Y]}{(Y^2-4X^3+g_2X+g_3)}$ e $\mathbb{C}\,[\wp, \wp']$; passando al campo dei quozienti esso induce un isomorfismo

$$\mathrm{Frac}\left(\frac{\mathbb{C}\,[X, Y]}{(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)}\right) \cong \mathbb{C}(\wp, \wp').$$

Ricordando che $\mathcal{M}(T) = \mathbb{C}(\wp, \wp')$, abbiamo così dimostrato il seguente:

Teorema 3.3.9. *Il campo delle funzioni meromorfe su un toro complesso T è isomorfo al campo delle funzioni razionali sulla corrispondente curva ellittica:*

$$\mathcal{M}(T) \cong \mathrm{Frac}\left(\frac{\mathbb{C}\,[X, Y]}{(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)}\right).$$

Bibliografia

[1] Anonymous, *Correspondence*, American Journal of Mathematics, Vol. 78, No. 4, 1956

[2] Wei-Liang Chow, *On compact complex analytic varieties*, American Journal of Mathematics, Vol. 71, No. 4, 1949

[3] Wei-Liang Chow, Kunihiko Kodaira, *On analytic surfaces with two independent meromorphic functions*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 1952

[4] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer, 2013

[5] Daniel Huybrechts, *Complex geometry: an introduction*, Springer, 2005

[6] Rick Miranda, *Algebraic curves and Riemann surfaces*, American Mathematical Society, 1995

[7] B. G. Moishezon, *On n-dimensional compact varieties with n algebraically independent meromorphic functions*, American Mathematical Society Translations 63, 1967

[8] Igor R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 2: Schemes and Complex Manifolds*, Springer, 2013