UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA
Corso di laurea in Fisica

Tesi di Laurea Triennale

La natura dello stato quantistico: realtà o informazione

Laureando
Andrea Sangiovanni

Relatore
Prof. Pieralberto Marchetti

Anno accademico 2015/2016

Indice

Introduzione

Nell'ambito della meccanica quantistica il problema dei fondamenti è, fin dalla sistematizzazione della teoria negli anni '20 e '30, uno dei più impegnativi, nonché, proprio in virtù della sua difficoltà, uno dei più prolifici in termini di interpretazioni, teoremi ed ipotesi che sono state formulate per risolverlo.
Basti ricordare, a questo proposito, alcune delle più note ipotesi sulla natura della meccanica quantistica: la meccanica di de Broglie-Bohm, l'interpretazione di Copenhagen, il Quantum Bayesianism, l'interpretazione modale, l'interpretazione a molti mondi, ecc.
Nonostante siano scaturiti da problematiche diverse, teoremi come quello di Bell [1] e di Kochen-Specker [2] (esempi di *no-go theorems*) hanno aiutato a chiarire e a delimitare i requisiti e le modalità con cui è possibile costruire una descrizione quantomeccanica della realtà[1].
Sulla stessa scia, anche se in un ambito più ristretto che delineeremo tra breve, Pusey Barrett e Rudolph hanno recentemente dimostrato un teorema [3] (d'ora in poi il "teorema PBR") che impone delle restrizioni su alcune classi di modelli proposti come base teorica della meccanica quantistica. Più precisamente, tale risultato si concentra su teorie che presuppongono l'esistenza di uno stato fisico λ (non necessariamente descritto dalla meccanica quantistica) che determina univocamente i risultati delle misure sperimentali, analizzando la dicotomia tra i modelli che assegnano valore ontologico agli stati quantistici e quelli che invece conferiscono loro carattere informazionale. Questo teorema contribuisce pertanto a gettare nuova luce sul problema della natura degli stati quantici, oltre che a rinnovare l'interesse per questo settore di ricerca.
L'obiettivo di questa tesi consiste innanzitutto nel chiarire ed evidenziare il substrato teorico alla base del teorema PBR, esporne le assunzioni e fornire esempi dei modelli ai quali si applica.
Una volta mostrato il nucleo del teorema si procederà ad analizzarne le critiche, le precisazioni e le riformulazioni proposte in articoli successivi. Congruo spazio verrà poi dedicato alla descrizione delle ricadute teoriche di PBR, prendendo in considerazione possibili scappatoie al risultato *no-go* del teorema (in primis il Quantum Bayesianism), oppure ad interpretazioni che sono in accordo con i modelli non proibiti dal teorema, con particolare attenzione alla meccanica di de Broglie-Bohm e all'interpretazione modale ideata da Van Fraassen.

[1] È sempre pericoloso parlare di "realtà" senza specificare esattamente che cosa si intende: per ora la consideriamo come l'insieme dei risultati sperimentali, più avanti daremo definizioni più precise relative ai vari modelli studiati.

Capitolo 1

Il background del teorema PBR

1.1 *La distinzione tra modelli ontologici ψ-ontici e ψ-epistemici*

Il teorema PBR prende in considerazione esclusivamente modelli realistici (che chiameremo pertanto "modelli ontologici"), nel senso tecnico del termine, intendendo con ciò teorie che suppongono che vi sia un ente λ (che alcuni chiamano "stato ontico" [4], ed altri "variabili nascoste"[1] [5]), indipendente dall'osservatore, e che determina completamente le proprietà fisiche del sistema considerato. È necessario precisare che ciò implica semplicemente che la probabilità di ottenere un certo risultato a seguito di una misura è completamente determinata da λ, non che il risultato stesso sia totalmente determinato. In altri termini, assumere l'esistenza dello stato ontico λ non implica affatto il determinismo; naturalmente, nel caso in cui λ fornisse probabilità appartenenti solo all'insieme $\{0, 1\}$ otterremmo una teoria deterministica, che è quindi solo un caso particolare di questo tipo di modellizzazione.[2]
Gli stati ontici λ dovranno appartenere ad uno spazio Λ, denominato appunto spazio ontico. Assumiamo inoltre, d'ora in poi, di considerare solamente stati quantistici puri, cioè di informazione massimale.
Affinché una teoria che implementi lo stato λ riproduca le previsioni della meccanica quantistica comunemente intesa deve essere rispettata la regola di Born. Sia ρ la matrice densità di uno stato puro $|\psi\rangle$ in cui si trova il sistema (si avrà pertanto $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$), k un autovalore di un'osservabile K, mentre sia l'operatore E_k il proiettore nell'autospazio corrispondente all'autovalore k. $p(k|M, P)$ è la probabilità di ottenere il risultato k con una misura M a seguito di una preparazione P. Con "misura" si intende la misurazione di un'osservabile, mentre con "preparazione" si indica una procedura sperimentale attraverso la quale si porta il sistema in un determinato stato quantistico $|\psi\rangle$. La regola di Born si scriverà quindi come:

$$p(k|M, P) = Tr(\rho E_k) \tag{1.1}$$

Introduciamo ora, del tutto genericamente, una funzione $\mu_\psi(\lambda)$, che costituisca una distribuzione di probabilità sullo spazio ontico Λ e che dipenda dallo stato quantico $|\psi\rangle$, per la quale dovrà valere: $\int_\Lambda \mu_\psi(\lambda) d\lambda = 1$.
Intuitivamente $\mu_\psi(\lambda)$ esprime la probabilità che, essendo nello stato quantico $|\psi\rangle$, il sistema

[1] Eviteremo l'uso di questo termine, che può generare confusione con il suo impiego usuale e che verrà utilizzato in seguito.

[2] Più precisamente, gli esiti di una misura dipenderanno esclusivamente da λ e da come viene effettuata la misura, in modo da contemplare anche l'opzione della contestualità.

si trovi nello stato ontico λ.
Consideriamo poi una funzione $\xi(k|M,\lambda)$ che esprima la probabilità di ottenere il risultato k effettuando una misura M dell'osservabile K, e trovandosi nello stato ontico λ. Se indichiamo con $S(K)$ lo spettro (continuo o discreto) dell'osservabile collegata alla misura M, si dovrà avere necessariamente:

$$\sum_{k\in S(K)} \xi(k|M,\lambda) = 1 \quad \text{(nel caso continuo avremo un integrale)} \tag{1.2}$$

Ciò significa, in sostanza, che misurando un'osservabile il risultato della misura sarà uno degli autovalori dell'operatore ad essa associato[3]. Per brevità, inoltre, spesso indicheremo l'equazione precedente con $\xi(S(K)|M,\lambda) = 1$. Notiamo, in aggiunta, che abbiamo implicitamente assunto che la funzione ξ non dipenda dallo stato $|\psi\rangle$: vedremo nel capitolo 3 delle obiezioni e delle possibili risposte a questa supposizione.
L'equazione che collega la descrizione con gli stati ontici λ alla regola di Born risulta quindi essere la seguente:

$$p(k|M,P) = \int_\Lambda \xi(k|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda \tag{1.3}$$

Il significato fisico di questa espressione è che la probabilità di ottenere il risultato k con una misura M ed una preparazione P è pari al prodotto tra la probabilità di ottenere il risultato k quando si è nello stato λ e la probabilità di essere nello stato λ se il sistema è descritto dallo stato $|\psi\rangle$, sommato su tutti i possibili λ: ciò non è altro che l'applicazione della regola della probabilità composta.
A questo stadio risulta indispensabile discutere più approfonditamente la forma della funzione $\mu_\psi(\lambda)$, in particolare la sua dipendenza da $|\psi\rangle$[4].
In generale vi sono due possibilità: al variare di $|\psi\rangle$ le distribuzioni di probabilità $\mu_\psi(\lambda)$ hanno supporto disgiunto nello spazio ontico Λ, oppure si sovrappongono parzialmente, anche se non è necessario che tale sovrapposizione si verifichi per ogni coppia di stati quantici distinti $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$.
Nel primo caso si tratterà di modelli ψ-ontici, nel secondo di modelli ψ-epistemici. Formalizzando matematicamente quest'idea otteniamo le seguenti definizioni:

Definizione 1.1. *Un modello ontologico si dice* ψ***-ontico*** *se per ogni coppia di stati quantici* $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ *si ha* $\mu_\psi(\lambda)\mu_\phi(\lambda) = 0$ *per ogni* λ.

Definizione 1.2. *Un modello ontologico si dice* ψ***-epistemico*** *se esiste una coppia di stati quantici* $\{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ *e uno stato* λ *per i quali* $\mu_\psi(\lambda)\mu_\phi(\lambda) \neq 0$ *(si richiede che ciò accada su un insieme di misura non nulla).*

Applicando il teorema di Bayes otteniamo immediatamente che per i modelli ψ-ontici ad ogni stato λ corrisponde uno e un solo stato quantico $|\psi\rangle$, laddove nei modelli ψ-epistemici esistono degli stati ontici λ ai quali corrispondono almeno due stati quantici.
Il significato della terminologia adottata risulta quindi chiaro: nei modelli ψ-ontici ad uno stato ontico corrisponde un unico stato quantico, il che significa che gli stati quantistici sono

[3]Verranno esaminate nel paragrafo 3.2 delle sottigliezze riguardo a quest'aspetto ed alle *built-in inefficiencies.*
[4]Una definizione esaustiva di questi modelli si trova nell'articolo di Spekkens e Harrigan [4]

direttamente collegati con le proprietà del sistema (vedremo tra un attimo che questo fatto non implica che gli stati quantici determinino *tutte* le caratteristiche del sistema fisico), acquisendo in tal modo un valore ontologico preciso (ovvero gli stati quantici sono elementi della realtà, poiché un cambiamento dello stato quantico determina necessariamente un mutamento dello stato ontico λ); nei modelli ψ-epistemici, invece, la conoscenza dello stato quantico fornisce solamente delle informazioni (o, se si vuole, delle probabilità) sullo stato ontico in cui il sistema effettivamente si trova: in altre parole, gli stati quantistici hanno carattere informazionale, rappresentando uno strumento conoscitivo su una realtà che appartiene allo spazio Λ.
Come abbiamo già notato, nei modelli ψ-ontici al variare dello stato quantico cambia anche lo stato ontico λ, ma non necessariamente il viceversa (la mappa dallo spazio degli stati ontici Λ a quello degli stati quantici $\mathcal{PH}$ sarà pertanto suriettiva, ma non iniettiva): si rende utile quindi un'ulteriore specificazione.

Definizione 1.3. *Un modello ontologico (ψ-ontico) si dice **ψ-completo** se lo spazio di Hilbert proiettivo $\mathcal{PH}$ è isomorfo allo spazio ontico Λ e se ad ogni stato quantico $|\psi\rangle$, corrispondente ad uno stato ontico λ_ψ, è associata una distribuzione di probabilità $\mu_\psi(\lambda) = \delta(\lambda - \lambda_\psi)$ (dove δ è la delta di Dirac).*

Definizione 1.4. *Un modello ontologico (ψ-ontico) si dice **ψ-supplementato** se non è ψ-completo, ovvero se per individuare lo stato ontico λ all'interno dello spazio Λ è necessario specificare lo stato quantico $|\psi\rangle$ **e** dei parametri aggiuntivi ("variabili nascoste") ω.*

Nel caso dei modelli ψ-completi, pertanto, la conoscenza dello stato quantico costituisce una conoscenza *completa* delle proprietà del sistema, mentre nei modelli ψ-supplementati sono necessarie altre informazioni: è questo il caso di teorie con variabili nascoste, come la meccanica di de Broglie-Bohm, che esamineremo più avanti.
Diamo infine due definizioni sui modelli ψ-epistemici che risulteranno utili successivamente.

Definizione 1.5. *Un modello ontologico (ψ-epistemico) si dice **massimamente non triviale** se la sovrapposizione tra le distribuzioni di probabilità per due stati quantici distinti ha misura nulla solo per stati quantici ortogonali tra loro.*

Definizione 1.6. *Un modello ontologico (ψ-epistemico) si dice **simmetrico** se la distribuzione di probabilità $\mu_\psi(\lambda)$, con $\Lambda = \mathcal{CP}^{d-1}$ (e con d la dimensione dello spazio di Hilbert degli stati quantici), è una funzione solo di $|\langle\psi|\lambda\rangle|$, ovvero se la distribuzione di probabilità rimane invariata sotto trasformazioni unitarie che lasciano invariato lo stato $|\psi\rangle$.*

Mostriamo ora che esistono effettivamente dei modelli ψ-ontici e ψ-epistemici fornendo degli esempi specifici.

1.1.1 *Il modello di Beltrametti-Bugajski (ψ-ontico)*

Il modello di Beltrametti-Bugajski costituisce una riformulazione in chiave ψ-ontica della meccanica quantistica usuale, e la riproduzione della regola di Born viene ottenuta assumendo che lo spazio ontico Λ coincida con lo spazio di Hilbert proiettivo $\mathcal{PH}$, ed associando a ciascun stato quantico $|\psi\rangle$ una distribuzione di probabilità data dalla delta di Dirac:

$$\mu_\psi(\lambda) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle) \tag{1.4}$$

Dal punto di vista fisico, l'identificazione $\Lambda = \mathcal{PH}$ denota la natura ontologicamente costitutiva degli stati quantici: la "realtà" (in termini operativi: tutto ciò che, attribuito ad un sistema fisico, è responsabile dei risultati delle misure) coincide totalmente con gli stati quantistici. Assumiamo ora che la funzione di risposta sia:

$$\xi(k|M,\lambda) = tr(|\lambda\rangle\langle\lambda| E_k) \tag{1.5}$$

Calcoliamo dunque la probabilità di ottenere il risultato k con una misura M ed una preparazione P:

$$p(k|M,P) = \int_\Lambda \xi(k|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda = \int_\Lambda tr(|\lambda\rangle\langle\lambda| E_k)\delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle)d\lambda = tr(|\psi\rangle\langle\psi| E_k) \tag{1.6}$$

Di conseguenza si osserva immediatamente il modello di Beltrametti-Bugajski rispetta la regola di Born.

1.1.2 *Il modello di Kochen-Specker (ψ-epistemico)*

Prima di passare all'analisi di un esempio generale di modello epistemico in dimensione arbitraria, è utile presentare il modello per uno spazio di Hilbert bidimensionale ideato da Kochen e Specker (KS) in [2], sul quale la costruzione che mostreremo più avanti è basata.
Il modello KS considera come spazio ontico Λ la sfera unitaria (la sfera di Bloch) e attribuisce ad un generico stato $|\psi\rangle$ la seguente distribuzione di probabilità:

$$\mu_\psi(\lambda) = \frac{1}{\pi}\Theta(\vec{\psi}\cdot\vec{\lambda})\vec{\psi}\cdot\vec{\lambda} \qquad \text{con } \Theta \text{ la funzione di Heaviside} \tag{1.7}$$

Si nota immediatamente che tale funzione non è piccata in corrispondenza dello stato quantico (come nel caso dei modelli ψ-ontici), ma assegna una probabilità non nulla a tutti gli stati ontici che formano un angolo minore di 90° con lo stato quantistico scelto (la probabilità è pertanto diversa da zero su un intero emisfero).
La funzione di risposta assegnata dal modello per la misurazione lungo un arbitrario proiettore $|\phi\rangle\langle\phi|$ viene imposta essere:

$$\xi(\Phi|\,|\phi\rangle\langle\phi|\,,\lambda) = \Theta(\vec{\phi}\cdot\vec{\lambda}) \tag{1.8}$$

ove Φ è uno degli autovalori relativi all'operatore $|\phi\rangle\langle\phi|$, che corrisponde alla procedura di misurazione M.
Unendo le precedenti imposizioni si ottiene la regola di Born per le probabilità di transizione:

$$p(\phi|\psi) = \int d\lambda \frac{1}{\pi}\Theta(\vec{\psi}\cdot\vec{\lambda})\vec{\psi}\cdot\vec{\lambda}\ \Theta(\vec{\phi}\cdot\vec{\lambda}) = \frac{1}{2}(1+\vec{\psi}\cdot\vec{\phi}) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \tag{1.9}$$

in quanto, nella sfera di Bloch, la funzione densità associata ad uno stato quantico viene definita come: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}(I+\vec{\psi}\cdot\vec{\sigma})$ con $\vec{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, ovvero il vettore delle matrici di Pauli (che insieme all'identità formano una base dello spazio di Hilbert bidimensionale).

1.1.3 *Modelli ψ-epistemici in dimensione arbitraria*

Il principale interesse del teorema PBR, che esamineremo più avanti, consiste nell'analisi da esso effettuata sulle teorie ψ-epistemiche: risulta pertanto opportuno presentare un esempio di questi modelli valido per uno spazio di Hilbert di dimensione finita arbitraria, in modo da ottenere un'argomentazione di carattere generale. La seguente costruzione [6] prende spunto dal cosiddetto modello di Bell (una variante dell'esempio di Kochen-Specker presentato pocanzi) fondato sulla sfera di Bloch, e si basa sostanzialmente su un'accorta definizione delle funzioni di risposta del sistema.

Nel modello originale si considera uno spazio ontico di dimensione 2, composto di coppie ($|\lambda\rangle$,x) con $|\lambda\rangle$ appartenente allo spazio proiettivo complesso $\mathcal{CP}^1$, e x un numero reale compreso tra 0 e 1 (estremi inclusi): lo spazio ontico Λ è pertanto isomorfo al prodotto cartesiano tra la sfera unitaria (sfera di Bloch) e l'intervallo $[0,1]$. Definiamo ora la distribuzione di probabilità e la funzione di risposta del sistema:

$$\mu_\psi(|\lambda\rangle\,,x) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle) \times \mu_{fix} \quad \text{con } \mu_{fix} \text{ uniforme sull'intervallo } [0,1] \tag{1.10}$$

$$\xi(k|\,|\phi_k\rangle\,\langle\phi_k|\,,\{|\lambda\rangle\,,x\}) = \Theta[(|\langle\lambda|\phi_0\rangle|^2 - x)(-1)^k] \tag{1.11}$$

dove in quest'ultima equazione abbiamo indicato con $|\phi_k\rangle\,\langle\phi_k|$ un generico proiettore (che corrisponde alla misurazione M) appartenente all'insieme di proiettori (generati da vettori ortonormali) $\{|\phi_0\rangle\,\langle\phi_0|\,,|\phi_1\rangle\,\langle\phi_1|\}$ e lo stato ontico come la coppia $(|\lambda\rangle\,,x)$.

Come di consueto è necessario che la regola di Born venga soddisfatta, si richiede quindi:

$$\int \mu_\psi(|\lambda\rangle\,,x)\xi(k|\,|\phi_k\rangle\,\langle\phi_k|\,,\{|\lambda\rangle\,,x\})d\lambda dx = |\langle\psi|\phi_k\rangle\,|^2 \tag{1.12}$$

Verifichiamolo nel caso $k=0$ (quello $k=1$ è analogo):

$$\begin{aligned}&\int \mu_\psi(|\lambda\rangle\,,x)\xi(k|\,|\phi_0\rangle\,\langle\phi_0|\,,\{|\lambda\rangle\,,x\})d\lambda dx = \int \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle)\Theta[(|\langle\lambda|\phi_0\rangle|^2 - x)]d\lambda dx = \\ &\int \Theta[(|\langle\psi|\phi_0\rangle|^2 - x)]dx = \int_0^{|\langle\psi|\phi_0\rangle|^2} 1 \ \ dx = |\langle\psi|\phi_0\rangle|^2 \qquad \text{come si voleva.}\end{aligned} \tag{1.13}$$

Il significato intuitivo della funzione di risposta nel modello di Bell è il seguente: una misura lungo il proiettore $|\phi_0\rangle$ fornisce risultato Φ_0 (uno degli autovalori relativi a $|\phi_0\rangle$) con probabilità 1 negli stati ontici che si trovano lungo un segmento di lunghezza $|\langle\lambda|\phi_0\rangle|^2$, con tale segmento contenuto nell'intervallo $[0,1]$, mentre la misura lungo il proiettore $|\phi_1\rangle$ ha successo nella restante parte del segmento. Il punto cruciale, che servirà per la costruzione successiva, è che il supporto della funzione di risposta può essere distribuito arbitrariamente lungo l'intervallo $[0,1]$, fermo restando il rispetto della regola di Born (nel nostro caso si è scelto di suddividere il segmento in due parti, avendo due proiettori, ma nulla vieta distribuzioni differenti).

Notiamo che il modello in questione è ψ-supplementato, in quanto per specificare lo stato ontico $\{\lambda, x\}$ è necessario indicare lo stato quantico $|\psi\rangle$, che individua $|\lambda\rangle$ tramite la delta di Dirac, ed una "variabile nascosta" x. Vediamo ora come modificarlo in un modello ψ-epistemico di dimensione 2.

Scegliamo un asse preferenziale sulla sfera di Bloch, ed indichiamolo con il ket $|z\rangle$, supponendo inoltre che indichi il polo nord della sfera. Denominando $cos(\theta_\lambda) = \vec{\lambda} \cdot \vec{z}$, ove θ_λ è la colatitudine di $|\lambda\rangle$, vengono individuati in modo naturale due emisferi R_0 e R_1, costituiti da vettori λ che formano rispettivamente angoli minori o maggiori di $\frac{\pi}{2}$ con l'asse z. Assumiamo inoltre l'esistenza di una relazione d'ordine tra i prodotti scalari dei vettori che corrispondono alla misurazione M e l'asse z:

$$|\langle z|\phi_0\rangle|^2 \geq |\langle z|\phi_1\rangle|^2 \tag{1.14}$$

(ciò significa semplicemente che il vettore $|\phi_0\rangle$ forma con l'asse z un angolo minore rispetto a $|\phi_1\rangle$). Impiegando le funzioni di risposta definite nell'equazione (1.11) possiamo inoltre definire due sottoinsiemi dello spazio ontico Λ:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(|\lambda\rangle\,, x) : |\lambda\rangle \in R_0 \wedge 0 \leq x < (1 - sen\theta_\lambda)/2\} \\ S_1 &= \{(|\lambda\rangle\,, x) : |\lambda\rangle \in R_1 \wedge (1 + sen\theta_\lambda)/2 < x \leq 1\} \end{aligned} \tag{1.15}$$

Si nota immediatamente che, data la supposizione (1.14), tutti gli stati ontici nella regione

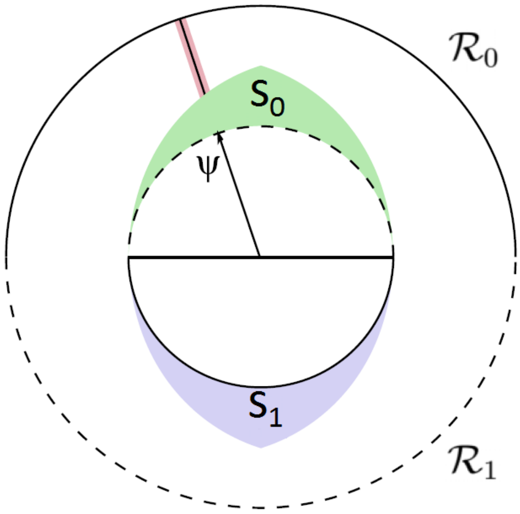

Figura 1.1: Schema dello spazio ontico e dei sottinsiemi S_0 e S_1: il cerchio interno rappresenta la superficie della sfera di Bloch; dove la linea è tratteggiata $x = 0$, mentre dove non lo è $x = 1$. (fonte [6])

S_0 danno risultato $|\phi_0\rangle$ a seguito di una misura, mentre gli stati ontici contenuti in S_1 hanno come esito $|\phi_1\rangle$. A questo punto si opera la modifica decisiva: se ad uno stato quantico $|\psi\rangle$ corrisponde una distribuzione di probabilità $\mu_\psi(|\lambda\rangle\,, x)$ (che ricordiamo essere una delta centrata su $|\lambda\rangle$ e una distribuzione uniforme su x) che abbia integrale non nullo sul sottoinsieme S_0, allora è possibile redistribuire il valore di tale probabilità su tutto S_0 senza mutare la validità della prescrizione di Born. Un ragionamento analogo vale naturalmente anche per S_1.
Un esempio di tale ripartizione può essere il seguente, una volta fissato $|\psi\rangle \in S_0$, e detta θ_ψ la colatitudine di $|\psi\rangle$:

$$\mu_\psi(|\lambda\rangle\,, x) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle)\Theta[x - \frac{1}{2}(1 - sen\theta_\psi)] + \frac{1}{2}(1 - sen\theta_\psi)\mu_{S_0}(|\lambda\rangle\,, x) \tag{1.16}$$

ove $\mu_{S_0}(|\lambda\rangle, x)$ è una distribuzione di probabilità arbitraria su S_0 (per semplicità la si può scegliere uniforme). Si verifica subito che la (1.16) è una distribuzione di probabilità[5], in cui il contributo all'integrale della regione esterna a S_0 (a tutti gli effetti un segmento, per la presenza della delta di Dirac) è rimasto invariato (primo termine), mentre l'apporto del sottoinsieme S_0 è stato diluito su tutto il sottoinsieme stesso (secondo termine). La regola di Born rimane quindi rispettata, con l'importante differenza che ad un singolo stato ontico non corrisponde un unico stato quantico, rendendo in tal modo il modello ψ-epistemico.
Vediamo ora di ampliare la precedente argomentazione ad uno spazio di Hilbert di dimensione arbitraria d.
Consideriamo sempre come spazio ontico $\Lambda = \mathcal{CP}^{d-1} \times [0,1]$, e come distribuzione di probabilità la $\mu_\psi(|\lambda\rangle, x) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle)$. Per le funzioni di risposta risulta indispensabile modificare leggermente la loro definizione: se nell'esempio bidimensionale avevamo suddiviso l'intervallo $[0,1]$ in due segmenti di lunghezza proporzionale al prodotto scalare dei vettori lungo cui si effettua la misura M con lo stato ontico, in questo caso d-dimensionale l'intervallo verrà invece diviso in d segmenti, di lunghezza $|\langle\lambda|\phi_k\rangle|^2$, per ciascun $k \in \{0, ..., d-1\}$. Ancora una volta, in questa configurazione di partenza, abbiamo quindi un modello ψ-supplementato.
Sia ora $|0\rangle$ un vettore che indichi una direzione preferenziale (l'analogo di $|z\rangle$ nel caso 2D), e ordiniamo i vettori su cui si basa l'insieme dei proiettori $\{|\phi_0\rangle\langle\phi_0|, ..., |\phi_{d-1}\rangle\langle\phi_{d-1}|\}$ in maniera tale che si abbia:

$$|\langle 0|\phi_0\rangle|^2 \geq ... \geq |\langle 0|\phi_{d-1}\rangle|^2 \tag{1.17}$$

Ora possiamo definire le funzioni di risposta come:

$$\begin{cases} \xi(k|\,|\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \{|\lambda\rangle, x\}) = 1 & \text{se} \quad \sum_{i=0}^{k-1}|\langle 0|\phi_i\rangle|^2 \leq x < \sum_{i=0}^{k}|\langle 0|\phi_i\rangle|^2 \\ \xi(k|\,|\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \{|\lambda\rangle, x\}) = 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{1.18}$$

con l'accortezza di specificare che $\sum_{i=0}^{k-1}|\langle 0|\phi_i\rangle|^2 = 0$ per $k = 0$, e che nell'estremo superiore dell'intervallo, ovvero per $x = 1$, si ha $\xi(k|\,|\phi_k\rangle\langle\phi_k|, \{|\lambda\rangle, x\}) = 1$ solo per $k = d-1$.
Come nel caso 2D, dobbiamo ora costruire un sottoinsieme S_0 di Λ i cui stati ontici diano esito univoco (in questo caso $|\phi_0\rangle$) a seguito di una misurazione. Osserviamo innanzitutto che $|\langle 0|\phi_0\rangle|^2 \geq 1/d$: poiché difatti i d prodotti scalari $|\langle 0|\phi_i\rangle|^2$ devono "riempire" l'intero segmento $[0,1]$, ed essendo $|\langle 0|\phi_0\rangle|^2$ il più grande di essi, risulta immediata la diseguaglianza sopra scritta. Utilizzando questo fatto e supponendo $|\langle 0|\lambda\rangle|^2 > (d-1)/d$ si dimostra che $|\langle\lambda|\phi_0\rangle|^2 > 0$.
Definiamo ora la seguente variabile, dipendente da un arbitrario stato $|\chi\rangle$:

$$a(|\chi\rangle) = \inf_{|\phi\rangle : |\langle 0|\phi\rangle|^2 \geq 1/d} |\langle\phi|\chi\rangle|^2 \tag{1.19}$$

Siamo ora in grado di definire il sottoinsieme S_0 come:

$$S_0 = \{(|\lambda\rangle, x) : |\langle 0|\lambda\rangle|^2 > (d-1)/d \quad \wedge \quad 0 \leq x < a(|\lambda\rangle)\} \tag{1.20}$$

La condizione $|\langle 0|\lambda\rangle|^2 > (d-1)/d$ equivale alla definizione dell'emisfero nel caso 2D, mentre la $0 \leq x < a(|\lambda\rangle)$ all'individuazione della regione d'interesse all'interno dell'emisfero. La proprietà che ha portato alla costruzione di questo sottoinsieme è che tutti gli stati ontici in

[5]ovvero che $\int_\Lambda \mu_\psi(|\lambda\rangle, x) d\lambda dx = 1$

esso contenuti danno come risultato $|\phi_0\rangle$ dopo una misura: in analogia con il caso 2D, sarà possibile redistribuire la probabilità assegnata da un generico stato quantico $|\psi\rangle$ alla regione S_0 su tutta la regione stessa.
A questo scopo si definisce la distribuzione di probabilità in questo modo:

$$\begin{cases} \mu_\psi(|\lambda\rangle, x) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle) \quad \text{se} \quad |\langle 0|\psi\rangle|^2 \leq (d-1)/d \\ \mu_\psi(|\lambda\rangle, x) = \delta(|\lambda\rangle - |\psi\rangle)\Theta[x - a(|\psi\rangle)] + a(|\psi\rangle)\mu_{S_0}(|\lambda\rangle, x) \quad \text{se} \quad |\langle 0|\psi\rangle|^2 > (d-1)/d \end{cases} \tag{1.21}$$

con $\mu_{S_0}(|\lambda\rangle, x)$ arbitraria, ma che può essere scelta come uniforme su S_0.
Ragionamenti simili possono essere impiegati per costruire insiemi i cui stati ontici diano come unico esito uno degli altri proiettori, ottenendo un modello ψ-epistemico.
Notiamo, in conclusione, che la simmetria sferica del sistema iniziale di Bell è stata rotta attraverso la scelta di una direzione preferenziale, definita da $|0\rangle$, rispetto alla quale calcolare i prodotti scalari.
Un ulteriore approfondimento del risultato appena presentato viene realizzato in [7]: si dimostra che, se si considerano modelli ontologici ψ-epistemici non simmetrici, allora è possibile costruirne di massimamente triviali in qualsiasi dimensione finita d.
Conclusa questa panoramica dei modelli ψ-ontici e ψ-epistemici possiamo concentrarci sull'analisi del principale risultato in discussione, il teorema PBR.

Capitolo 2

Il teorema PBR

2.1 *Premessa 1: prodotto tensore tra spazi di Hilbert*

Una delle assunzioni fondamentali del problema PBR poggia sulla possibilità di costruire sistemi fisici indipendenti l'uno dall'altro (daremo più avanti una definizione precisa di indipendenza): risulta quindi utile fissare, senza dimostrazione, alcuni concetti basilari sulla descrizione di sistemi interagenti, tramite il formalismo del prodotto tensoriale [8].
Siano $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ due spazi di Hilbert di dimensione rispettivamente d_1 e d_2 (il formalismo vale sia che siano finite che infinite), e denotiamo gli elementi di $\mathcal{H}_1$ con $\psi_i(1)$, e quelli di $\mathcal{H}_2$ con $\phi_j(2)$ (gli indici i e j permettono di selezionare ciascun vettore del rispettivo spazio); definiamo quindi il seguente spazio di Hilbert:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \tag{2.1}$$

i cui elementi saranno definiti come:

$$|\psi_i(1)\rangle \otimes |\phi_j(2)\rangle \quad \forall i, j \qquad \text{(come notazione si può utilizzare anche: } |\psi_i(1)\phi_j(2)\rangle) \tag{2.2}$$

Il prodotto tensore così definito è lineare rispetto alla moltiplicazione per coefficienti complessi ed è distributivo rispetto alla somma di vettori. Una base dello spazio di Hilbert tensore è l'insieme di tutte le combinazioni possibili del prodotto tensore tra gli elementi di base dei singoli spazi di Hilbert, ovvero, se $b_i(1)$ e $b_j(2)$ costituiscono, al variare di i e j, delle basi di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, allora una base di $\mathcal{H}$ è composta da: $\quad b_i(1) \otimes b_j(2) \quad \forall i, j$. Pertanto la dimensione di $\mathcal{H}$ è $d = d_1 d_2$.
Definiamo inoltre il prodotto scalare tra due elementi dello spazio $\mathcal{H}$. Se $|\psi(1)\phi(2)\rangle$ e $|\psi'(1)\phi'(2)\rangle$ sono due elementi di questo spazio, il loro prodotto scalare è definito come:

$$\langle\psi(1)\phi(2)|\psi'(1)\phi'(2)\rangle = \langle\psi(1)|\psi'(1)\rangle \langle\phi(2)|\phi'(2)\rangle \tag{2.3}$$

Gli operatori nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ possono essere definiti per estensione a partire da quelli di $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$. Sia per esempio $A(1)$ un operatore agente sugli elementi dello spazio $\mathcal{H}_1$: la sua naturale estensione su $\mathcal{H}$ sarà (un discorso analogo vale per gli operatori su $\mathcal{H}_2$):

$$[A(1) \otimes \mathbb{1}][|\psi_i(1)\rangle \otimes |\phi_j(2)\rangle] = [A(1)\,|\psi_i(1)\rangle] \otimes [\mathbb{1}\,|\phi_j(2)\rangle] \tag{2.4}$$

Tutte le nozioni qui presentate possono essere facilmente estese ad un prodotto tensoriale di un numero arbitrario di spazi di Hilbert. A questo proposito, quando un operatore A viene applicato su n spazi diversi useremo la seguente convenzione:

$$\underbrace{A \otimes ... \otimes A}_{n \quad \text{volte}} = A^{\otimes n} \tag{2.5}$$

2.2 *Premessa 2: Qubit e porte logiche quantistiche*

Presentiamo ora qualche concetto basilare di teoria della computazione quantistica necessario ad una più completa comprensione del teorema PBR.
Iniziamo delineando l'unità fondazionale della teoria, il qubit. In generale si definisce qubit un elemento dello spazio di Hilbert $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ e pertanto, come abbiamo già accennato precedentemente, può essere descritto tramite la rappresentazione sulla sfera di Bloch. Se si sceglie una base sulla sfera, per esempio i vettori $|0\rangle$ e $|1\rangle$ corrispondenti al polo nord e sud (ricordiamo che sulla sfera di Bloch i vettori ortogonali tra loro sono diretti verso due punti antipodali), un qubit può essere intuitivamente pensato come una combinazione lineare, una sovrapposizione di stati, dei vettori di base; si avrà pertanto che un generico qubit è descritto da:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \qquad \text{con } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2.6}$$

Contrariamente al caso classico, quindi, un qubit non deve necessariamente assumere il valore "0" o "1", ma può trovarsi in una combinazione pesata di entrambi. Un utile accorgimento per rappresentare il prodotto tensore di qubit consiste nell'usare la notazione in base dieci, rimpiazzando (posto di tenere a mente il numero di stati con cui si sta lavorando) la successione di "0" e di "1", considerata come un numero in base 2, con il corrispettivo valore in base dieci. Lo stato $|111\rangle$, per esempio, con questa notazione diverrà $|7\rangle$.
Le porte logiche quantistiche, in analogia con le porte logiche classiche, sono degli operatori unitari che agiscono sui qubit, costituendo gli elementi fondamentali dei "circuiti quantistici". Tra le altre proprietà, è rilevante segnalare che l'azione di una porta logica su un qubit conserva la sua normalizzazione. Vediamo alcuni esempi di porte logiche che saranno utili nel seguito:

- Le porte di Hadamard, indicate con la lettera H, sono definite dalla seguente matrice:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

  Dal punto di vista geometrico H rappresenta una combinazione di una rotazione di angolo $\pi/2$ attorno all'asse y seguita da una di π attorno all'asse x. L'azione della porta di Hadamard sulla base di $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ risulta:

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \qquad H |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \tag{2.8}$$

  Si trova quindi immediatamente (usando la notazione decimale) che, applicando H ad un insieme di qubit che si trovino tutti nello stato iniziale $|0\rangle$ si ottiene:

$$H^{\otimes n} \underbrace{|0...0\rangle}_{n \text{ volte}} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=0}^{2^n-1} |i\rangle \tag{2.9}$$

L'azione su un generico stato $|i\rangle$ sarà conseguentemente

$$H|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{\vec{i}\cdot\vec{j}} |j\rangle \tag{2.10}$$

dove con la notazione $\vec{i} \cdot \vec{j}$ si intende il prodotto scalare qubit a qubit dei due stati.

- Le porte di cambiamento di fase Z_β parametrizzate dal parametro β:

$$Z_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

  che agendo sui vettori di base mutano la fase di $|1\rangle$ di un angolo β lasciando invece invariata la fase di $|0\rangle$.

- Delle altre particolari porte di cambiamento di fase R_α, dipendenti da α, che agiscono sullo stato $|0...0\rangle$ mutandone la fase: $R_\alpha |0...0\rangle = e^{i\alpha} |0...0\rangle$, mentre operano come l'identità su tutti gli altri stati. Notiamo che questo tipo di porte logiche, contrariamente alle precedenti, possono agire su un numero arbitrario di qubit.

2.3 *Il teorema PBR per gradi*

Il teorema PBR, dovuto a Pusey, Barrett e Rudolph [3], contribuisce a gettare nuova luce sulla distinzione tra modelli ontologici ψ-epistemici e ψ-ontici; intuitivamente, il risultato è il seguente: assumendo alcune ipotesi "ragionevoli"[1] si dimostra che, se la realtà è descritta da un modello ontologico ψ-epistemico, allora si giunge a previsioni sperimentali che contraddicono quelle offerte dalla meccanica quantistica convenzionale.
Seguendo l'impostazione di [3], presentiamo innanzitutto una prova del teorema in un caso particolare.
Siano $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ due stati quantici distinti appartenenti ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione arbitraria d (non specifichiamo se finita o infinita), ottenuti tramite due preparazioni sperimentali differenti in maniera tale che si abbia $|\langle\psi_0|\psi_1\rangle| = 1/\sqrt{2}$. Definiamo ora una base dello spazio di Hilbert $\{|0\rangle, |1\rangle, ..., |d\rangle\}$ in maniera tale che i due vettori scelti vengano descritti in questo modo:

$$\begin{cases} |\psi_0\rangle = |0\rangle \\ |\psi_1\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \equiv |+\rangle \end{cases} \tag{2.12}$$

Definiamo inoltre $(|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2} \equiv |-\rangle$. La prova del teorema procede per assurdo: supponiamo quindi che il sistema sia descritto da un modello ontologico ψ-epistemico e deriviamo una contraddizione. Poiché siamo nel caso ψ-epistemico, a ciascuno degli stati $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ saranno associate delle distribuzioni di probabilità, rispettivamente $\mu_{\psi_0}(\lambda)$ e $\mu_{\psi_1}(\lambda)$: supponiamo ulteriormente che tali distribuzioni siano entrambe diverse da zero su un insieme di misura non nulla R. Di conseguenza dovrà esistere una probabilità p strettamente maggiore di zero che, una volta preparato il sistema fisico in uno qualsiasi dei due stati quantici, esso si trovi in uno stato ontico λ appartenente alla regione R in cui le distribuzioni di probabilità

[1] vedremo nel prosieguo le critiche rivolte in particolare all'ipotesi di preparazione indipendente.

si sovrappongono.
Introduciamo ora il postulato fondamentale alla base del teorema PBR:

Postulato (preparazione indipendente) Sia $\{|\psi_i\rangle\}$ un insieme di stati quantici di un modello ontologico ψ-epistemico, e siano $\mu_{\psi_i}(\lambda)$, al variare di i, le rispettive distribuzioni di probabilità sullo spazio ontico Λ. Si dice che n sistemi fisici descritti da tale modello ontologico sono stati preparati indipendentemente se a ciascuno corrisponde uno stato quantico dell'insieme $\{|\psi_i\rangle\}$, e se la distribuzione di probabilità del sistema composto è il prodotto delle distribuzioni di probabilità dei singoli sistemi:

$$\mu_{|\psi_i\rangle\otimes|\psi_j\rangle\otimes...\otimes|\psi_l\rangle}(\lambda_1,...,\lambda_n) = \mu_{\psi_i}(\lambda_1)\times\mu_{\psi_j}(\lambda_2)\times...\times\mu_{\psi_l}(\lambda_n) \tag{2.13}$$

Consideriamo ora il caso particolare $n = 2$, utilizzando $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ come possibili preparazioni di ciascun sistema: poiché le distribuzioni di probabilità del sistema composto si moltiplicano tra loro, otteniamo immediatamente che la probabilità che entrambi gli stati ontici dei due sistemi, λ_1 e λ_2, ricadano nella regione di sovrapposizione delle distribuzioni è p^2. Conseguentemente, se il sistema totale si trova in questa condizione (entrambi gli stati ontici all'interno della regione R), deduciamo, applicando le regole del prodotto tensoriale esposte all'inizio del capitolo, che il suo stato quantico può essere ciascuno dei seguenti:

$$\begin{cases} |\phi_1\rangle = |0\rangle\otimes|0\rangle & |\phi_2\rangle = |0\rangle\otimes|+\rangle \\ |\phi_3\rangle = |+\rangle\otimes|0\rangle & |\phi_4\rangle = |+\rangle\otimes|+\rangle \end{cases} \tag{2.14}$$

Operiamo ora una misura congiunta sui 2 sistemi fisici, proiettando lungo i seguenti quattro stati quantici:

$$\begin{cases} |\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|1\rangle + |1\rangle\otimes|0\rangle) \\ |\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\otimes|-\rangle + |1\rangle\otimes|+\rangle) \\ |\chi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\otimes|1\rangle + |-\rangle\otimes|0\rangle) \\ |\chi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle\otimes|-\rangle + |-\rangle\otimes|+\rangle) \end{cases} \tag{2.15}$$

Si osserva subito applicando la definizione di prodotto scalare che questi quattro stati sono ortogonali ai possibili stati quantici del sistema con lo stesso indice, ovvero:

$$\langle\phi_1|\chi_1\rangle = 0 \qquad \langle\phi_2|\chi_2\rangle = 0 \qquad \langle\phi_3|\chi_3\rangle = 0 \qquad \langle\phi_4|\chi_4\rangle = 0 \tag{2.16}$$

Dal punto di vista fisico ciò significa che, se il sistema è nello stato $|\phi_1\rangle$, allora la misura restituisce il risultato $|\chi_1\rangle$ con probabilità 0. Un ragionamento analogo vale per tutti gli altri stati quantici di partenza. Ora, abbiamo mostrato precedentemente che, con una probabilità p^2, entrambi gli stati ontici possono appartenere alla regione R di sovrapposizione: in tutti questi casi al momento della misurazione non è possibile determinare quale sia lo stato di partenza, e pertanto il risultato della misurazione (uno degli stati $|\chi\rangle$) rischia di essere incompatibile con lo stato iniziale, generando una contraddizione. In altri termini, l'apparato di misurazione, non conoscendo lo stato di partenza (a causa della sovrapposizione delle distribuzioni) potrebbe dare come risultato uno stato quantico che, secondo la teoria quantistica, dovrebbe invece avvenire con probabilità 0, portando ad una conclusione errata. Il punto determinante è che le proprietà del sistema fisico, e quindi il risultato della misura, sono determinate esclusivamente dallo stato ontico λ, e *non* dagli stati quantici. Un altro

modo di evidenziare la contraddizione consiste nel notare che, dato che a ciascuno stato $|\phi_i\rangle$ corrisponde un risultato $|\chi_i\rangle$ che la meccanica quantistica prevede verificarsi con probabilità nulla, allora, se il sistema si trova in uno stato ontico della regione R, qualsiasi esito non avviene mai: ciò significa che il sistema non può trovarsi in tale stato ontico, generando pertanto un conflitto con le premesse iniziali.
L'inferenza che gli autori traggono da questo ragionamento è che l'ipotesi errata che ha condotto al risultato assurdo sia da ricercare nell'assunzione di un modello ontologico ψ-epistemico.
Cerchiamo ora di estendere la dimostrazione ad un sistema fisico composto da n sistemi indipendenti, secondo la nozione formalizzata nel postulato.
Consideriamo ancora una volta due stati quantici non ortogonali tra loro $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ appartenenti ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione d, e sia θ l'angolo minore tra di essi (sarà quindi $0 < \theta < \pi/2$), individuato sul sottospazio bidimensionale generato dai due vettori. Notiamo che i due stati sono quindi totalmente arbitrari, fatta salva la loro non ortogonalità (contrariamente al caso precedente in cui possedevano un valore ben preciso del loro prodotto interno). Si può pertanto scegliere una base dello spazio di Hilbert $\{|0\rangle, |1\rangle, ..., |d\rangle\}$ in modo tale che si abbia:

$$\begin{cases} |\psi_0\rangle = cos(\theta/2)\,|0\rangle + sin(\theta/2)\,|1\rangle \\ |\psi_1\rangle = cos(\theta/2)\,|0\rangle - sin(\theta/2)\,|1\rangle \end{cases} \tag{2.17}$$

Per semplificare la trattazione è utile restringersi al sottospazio bidimensionale individuato dai vettori $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$: il singolo sistema fisico preparato in uno di questi due stati potrà quindi essere trattato con il formalismo dei qubit.
L'ipotesi di partenza, ovvero che il sistema sia descritto da un modello ontologico ψ-epistemico, porge immediatamente che, dopo la preparazione in uno degli stati quantici $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, lo stato ontico del sistema possa trovarsi nella regione di sovrapposizione delle due distribuzioni R con probabilità p strettamente maggiore di zero.
Consideriamo ora un insieme di n stati descritti da questo formalismo: il loro stato quantico totale è il prodotto tensore dei singoli stati quantici, e risulterà pertanto:

$$|\Psi(k_1, ..., k_n)\rangle = |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle \tag{2.18}$$

con $k \in \{0, 1\}$ a seconda che lo stato quantico del singolo sistema sia $|\psi_0\rangle$ o $|\psi_1\rangle$. Osserviamo che il numero totale di stati possibili è 2^n. Scriviamo inoltre l'insieme dei valori di k in questo modo: $\vec{k} = (k_1, ..., k_n)$. Ripetiamo ora il ragionamento svolto nella prima parte: una volta che gli n sistemi vengono considerati congiuntamente secondo l'equazione (2.13) vi è una probabilità p^n che gli stati ontici di *tutti* i singoli sistemi siano nella regione di sovrapposizione R.
Per concludere la prova si tenterà ora di costruire una misurazione del sistema complessivo tale che per ciascun esito esista almeno uno stato di partenza (vale a dire una particolare sequenza di valori di k) che ne preveda il verificarsi con probabilità nulla. Una possibile configurazione di tale misura è costituita dallo schema seguente: a ciascuno stato $|\psi_{k_i}\rangle$ viene applicata una porta di cambiamento di fase Z_β (2.11); successivamente, si fa agire la porta di *phase shifting* R_α sullo stato complessivo risultante. Si fa quindi passare ogni singolo qubit per una porta di Hadamard (2.7) e, infine, si proietta ciascun singolo stato lungo i vettori della base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e si registra il risultato.
L'azione complessiva del circuito è pertanto dipendente dai parametri α e β, e corrisponde

a $U_{\alpha,\beta} = H^{\otimes n} R_\alpha Z_\beta^{\otimes n}$, seguito da una misura proiettiva lungo i vettori di base. Rimane da

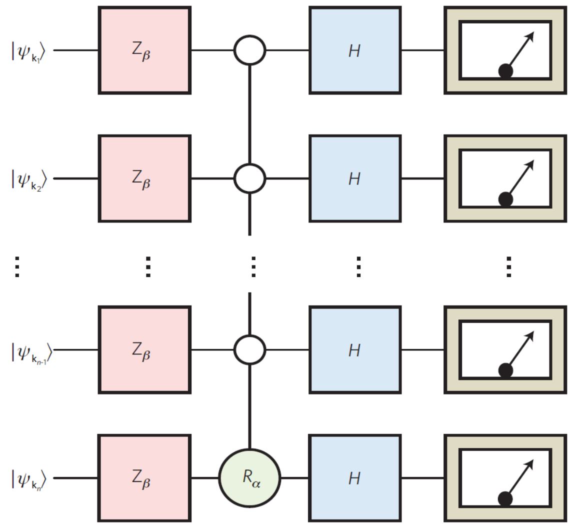

Figura 2.1: Una schematizzazione del circuito utilizzato per la misura (fonte [3])

dimostrare che tale procedura produce gli esiti desiderati: in altri termini, che per ogni stato finale esiste uno stato di partenza che ne prevede il verificarsi con probabilità nulla. A questo scopo, mostriamo ora che, se si sceglie un numero di sistemi fisici opportunamente grande (in particolare, tale che $2^{1/n} - 1 \leq tg(\theta/2)$) e, come abbiamo già osservato precedentemente, si considerano angoli θ compresi tra 0 e $\pi/2$, allora è possibile operare una scelta dei parametri α e β consistente con la richiesta sulle probabilità appena esposta. Calcoliamo pertanto la probabilità di ottenere un particolare esito - nello specifico, lo stato quantico $|k_1...k_n\rangle$, costituito dai vettori di base, in quanto ciascun k assume valori nell'insieme $\{0,1\}$ - a partire dallo stato iniziale $|\Psi(k_1,...,k_n)\rangle = |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle$. Applicando i postulati della meccanica quantistica otteniamo:

$$\begin{aligned}
&\langle k_1...k_n|\, |H^{\otimes n} R_\alpha Z_\beta^{\otimes n}\, |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle = \\
&1.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}} \langle j| \right) R_\alpha Z_\beta^{\otimes n}\, |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle = \\
&2.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(e^{i\alpha} \langle 0...0| + \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}} \langle j| \right) Z_\beta^{\otimes n}\, |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle = \\
&3.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(e^{i\alpha} \langle 0...0| + \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}} \langle j| \right) \otimes_{i=1}^{n} \big(cos(\theta/2)\,|0\rangle + (-1)^{k_i} e^{i\beta} sen(\theta/2)\,|1\rangle \big) = \\
&4.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[(cos(\theta/2))^n e^{i\alpha} + \sum_{j=1}^{2^n-1} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}} (cos(\theta/2))^{n-|\vec{j}|} (sen(\theta/2))^{|\vec{j}|} e^{i|\vec{j}|\beta} (-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}} \right] = \\
&5.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left[(cos(\theta/2))^n e^{i\alpha} + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (cos(\theta/2))^{n-l} (sen(\theta/2))^{l} e^{il\beta} \right] = \\
&6.\ \frac{1}{\sqrt{2^n}} (cos(\theta/2))^n \left[e^{i\alpha} + \left(1 + tg(\theta/2) e^{i\beta}\right)^n - 1 \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Spieghiamo ora con ordine i vari passaggi effettuati:

1. È stata applicata la formula (2.10) dell'effetto della porta di Hadamard su un generico stato.
2. La porta di cambiamento di fase R_α agisce esclusivamente sullo stato $|0...0\rangle$, lasciando invariati gli altri (per questa ragione la sommatoria ora parte da 1).
3. La porta Z_β agisce sugli stati $|\psi_{k_i}\rangle$ lasciando invariata la loro prima componente, e moltiplicando la seconda per il fattore $e^{i\beta}$, cambiandola eventualmente di segno a seconda che k sia 0 o 1.
4. Abbiamo usato l'accorgimento $|\vec{j}| = \sum_{i=1}^{n} j_i$. Consideriamo la prima parentesi. Il termine $e^{i\alpha}\langle 0...0|$ ha prodotto scalare nullo con tutti gli stati eccetto se stesso, e pertanto l'unico termine che sopravvive dopo la moltiplicazione con la parentesi è quello con tutti i coseni, che sono appunto moltiplicati per lo stato $|0\rangle$. Il secondo termine, invece, è costituito da $2^n - 1$ stati, ciascuno con prodotto scalare non nullo con se stesso. Lo stato $|j\rangle$ ha per definizione $|\vec{j}|$ "uni", pertanto si combinerà solamente con un numero equivalente di seni: conseguentemente i termini con il coseno saranno $n - |\vec{j}|$. Anche l'esponenziale $e^{i\beta}$ è elevato alla $|\vec{j}|$ perché fa parte del termine con il seno, che compare $|\vec{j}|$ volte. Il fattore $(-1)^{k_i}$ nella seconda parentesi del passaggio 3 fa comparire un $(-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}}$ per la stessa ragione.
5. Cambiamo gli indici della sommatoria: ora sommiamo su tutti i possibili numeri di "1" presenti negli stati $|j\rangle$; per tenere conto della posizione degli "1" introduciamo il coefficiente binomiale che ne conta le combinazioni. I due $(-1)^{\vec{k}\cdot\vec{j}}$ si cancellano tra loro.
6. Per il binomio di Newton si ha:
$\sum\limits_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(cos(\theta/2))^{n-l}(sen(\theta/2))^{l}e^{il\beta} = \left[cos(\theta/2) + sen(\theta/2)e^{i\beta}\right]^n - (cos(\theta/2))^n$ in quanto la sommatoria parte da 1 e non da 0. Raccogliendo un coseno, che portiamo fuori dalla parentesi, otteniamo $(cos(\theta/2))^n\left[\left(1 + tg(\theta/2)e^{i\beta}\right)^n - 1\right]$. Raccogliendo ulteriormente si ottiene il passaggio desiderato.

Si tratta ora di trovare una coppia di valori per α e β che azzeri il risultato dell'ultimo passaggio:

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}(cos(\theta/2))^n\left[e^{i\alpha} + \left(1 + tg(\theta/2)e^{i\beta}\right)^n - 1\right] = 0 \tag{2.20}$$

La probabilità che partendo dallo stato $|\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle$ e applicando l'operatore unitario $U_{\alpha,\beta}$ il sistema si ritrovi nello stato finale $|k_1...k_n\rangle$ è il modulo quadro dell'espressione finale appena trovata. Se quest'ultima è nulla sarà conseguentemente zero anche la probabilità, come desiderato.

Precedentemente avevamo richiesto che n fosse sufficientemente grande da soddisfare la condizione:

$$2^{1/n} - 1 \leq tg(\theta/2) \Rightarrow 2\text{arctg}\left(2^{1/n} - 1\right) \leq \theta \leq \pi/2 \tag{2.21}$$

Con questa prescrizione, richiediamo pertanto che il termine tra parentesi della (2.20) sia nullo:

$$e^{i\alpha} + \left(1 + tg(\theta/2)e^{i\beta}\right)^n - 1 = 0 \tag{2.22}$$

Supponiamo per esempio $\alpha = 0$ oppure π. Di conseguenza, si dovrà imporre:

$$\left|1 - \left(1 + tg(\theta/2)e^{i\beta}\right)^n\right| = 1 \tag{2.23}$$

Affinché questa condizione sia soddisfatta è necessario che dal punto di vista geometrico la funzione $f(\beta) = 1 - \left(1 + tg(\theta/2)e^{i\beta}\right)^n$ intersechi nel piano complesso il cerchio unitario in almeno un punto. A questo scopo, sfruttando la continuità di $f(\beta)$, impieghiamo il teorema di esistenza degli zeri trovando un punto della curva interno ed uno esterno al cerchio unitario. Utilizzando la condizione (2.21) si mostra che:

$$f(0) = 1 - (1 + tg(\theta/2))^n \leq 1 - \left(1 + 2^{1/n} - 1\right)^n = -1 \tag{2.24}$$

Pertanto $f(0)$ è sicuramente all'esterno (o, al più, sul bordo) del cerchio unitario. La (2.21) implica altresì che $0 \leq tg(\theta/2) \leq 1$ e quindi:

$$f(\pi) = 1 - (1 - tg(\theta/2))^n \leq 1 - (1 - 1)^n = 1 \tag{2.25}$$

Di conseguenza $f(\pi)$ è all'interno o sul bordo del cerchio unitario. Si è pertanto mostrato che esiste una particolare scelta di α e β che soddisfi l'equazione (2.20).

È utile, a questo punto della trattazione, e alla luce delle possibili applicazioni sperimentali, esporre una versione leggermente più formale della dimostrazione che tenga conto dei possibili errori: in altre parole, mostrare la robustezza della dimostrazione anche in presenza di rumore e di errore sperimentale.

Consideriamo quindi sempre due stati non ortogonali tra loro $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$, che possiedano distribuzioni di probabilità sullo spazio ontico Λ $\mu_{\psi_0}(\lambda)$ e $\mu_{\psi_1}(\lambda)$. Lo stato complessivo sarà quindi $|\Psi(k_1, ..., k_n)\rangle = |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle$.

Ricordiamo inoltre che tali distribuzioni di probabilità, per il postulato di preparazione indipendente (2.13) e per la consistenza con la regola di Born (1.3) devono soddisfare:

$$\begin{cases} \mu_{|\psi_{k_1}\rangle\otimes|\psi_{k_2}\rangle\otimes...\otimes|\psi_{k_n}\rangle}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mu_{\psi_{k_1}}(\lambda_1) \times \mu_{\psi_{k_2}}(\lambda_2) \times ... \times \mu_{\psi_{k_n}}(\lambda_n) \\ p(e|M, |\Psi(k_1, ..., k_n)\rangle) = \int_\Lambda \xi(e|M, \lambda_1, ..., \lambda_n)\mu_{\psi_{k_1}}(\lambda_1)\mu_{\psi_{k_2}}(\lambda_2)...\mu_{\psi_{k_n}}(\lambda_n) \end{cases} \tag{2.26}$$

dove abbiamo indicato con e invece che k l'esito della misura in modo da non creare confusione nella notazione. A volte inoltre, per brevità, impiegheremo $\vec{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Dal punto di vista pratico, una volta condotta la misurazione tramite il circuito in figura 2.1, sarà possibile stimare la compatibilità del risultato sperimentale con la previsione della meccanica quantistica entro un margine di errore ϵ. Definiamo ora una grandezza aggiuntiva che tornerà utile tra breve, la distanza di variazione totale:

$$D(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) = \frac{1}{2}\int_\Lambda |\mu_{\psi_0}(\lambda) - \mu_{\psi_1}(\lambda)|\, d\lambda \tag{2.27}$$

Questa quantità assume valore 1 quando le distribuzioni $\mu_{\psi_0}(\lambda)$ e $\mu_{\psi_1}(\lambda)$ non si sovrappongono (o lo fanno su un insieme di misura nulla), e vale 0 se le distribuzioni sono completamente sovrapposte (o differiscono tra loro solo su un insieme di misura nulla). Ci aspettiamo pertanto che, se - come afferma il teorema PBR - i modelli ψ-epistemici contraddicono le

previsioni delle meccanica quantistica, la distanza di variazione totale sia molto vicina a 1, ovvero che il modello ontologico che descrive il sistema fisico sia ψ-ontico.
Ci accingiamo quindi a dimostrare che, tenendo conto di un errore ϵ sui risultati delle misure, se si vuole ottenere la compatibilità con le previsioni della meccanica quantistica la distanza di variazione totale deve soddisfare a:

$$D(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) \geq 1 - 2\sqrt[n]{\epsilon} \tag{2.28}$$

Da una prospettiva fisica ciò significa che, se si riduce l'errore ϵ sulle misure, la teoria prevede che la descrizione del sistema debba diventare sempre più distante da un modello ontologico ψ-epistemico: questa condizione sulla distanza di variazione totale impone un vincolo sul grado di sovrapponibilità delle distribuzioni di probabilità. Chiaramente deve ancora valere la condizione su n (2.21) affinché esistano degli α e β appropriati per ottenere la misurazione desiderata.
Definiamo ora un'altra quantità dipendente dalle distribuzioni sullo spazio Λ, la sovrapponibilità ω:

$$\omega(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) = \int_\Lambda \min\{\mu_{\psi_0}(\lambda), \mu_{\psi_1}(\lambda)\}\, d\lambda \tag{2.29}$$

Sostanzialmente questa funzione prende il valore più basso, a λ fissato, delle due distribuzioni di probabilità, e lo integra punto per punto su tutto lo spazio ontico. Osserviamo che la distanza di variazione totale D e la sovrapponibilità ω sono collegate dalla:

$$\omega(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) = 1 - D(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) \tag{2.30}$$

Dimostriamolo (usiamo 0 e 1 invece che indicare gli stati):

$$\begin{aligned}
&1 - D(\mu_0, \mu_1) = 1 - \frac{1}{2}\int_\Lambda |\mu_0(\lambda) - \mu_1(\lambda)|\, d\lambda = \\
&\int_{\mu_0>\mu_1} \mu_0 + \int_{\mu_0<\mu_1} \mu_0 - \frac{1}{2}\int_{\mu_0>\mu_1} (\mu_0 - \mu_1) + \frac{1}{2}\int_{\mu_0<\mu_1} (\mu_0 - \mu_1) = \\
&\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{\mu_0>\mu_1} \mu_1 + \int_{\mu_0<\mu_1} (\mu_0 - \frac{1}{2}\mu_1) = \\
&\int_{\mu_0<\mu_1} \mu_0 + \int_{\mu_0>\mu_1} \mu_1 + \frac{1}{2}\int_{\mu_0<\mu_1} \mu_1 - \frac{1}{2}\int_{\mu_0<\mu_1} \mu_1 = \\
&\int_{\mu_0<\mu_1} \mu_0 + \int_{\mu_0>\mu_1} \mu_1 = \omega(\mu_0, \mu_1)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Possiamo inoltre generalizzare la definizione della sovrapponibilità in questo modo:

$$\omega(\mu_{\psi_0}, ..., \mu_{\psi_n}) = \int_\Lambda \min_i \mu_{\psi_i}(\lambda) d\lambda \tag{2.32}$$

Dal postulato di preparazione indipendente deduciamo che:

$$\min_{\vec{k}} \mu_{\vec{k}}(\vec{\lambda}) = \min\{\mu_0(\lambda_1), \mu_1(\lambda_1)\} \times ... \times \{\mu_0(\lambda_n), \mu_1(\lambda_n)\} \tag{2.33}$$

Integrando ambo i membri risulta (indichiamo con Λ^n il prodotto cartesiano di n spazi ontici Λ):

$$\omega(\mu_{\vec{k}}) = \int_{\Lambda^n} \min_{\vec{k}} \mu_{\vec{k}}(\vec{\lambda}) = [\omega(\mu_0, \mu_1)]^n \tag{2.34}$$

Operiamo ora, a partire da uno stato iniziale $|\Psi(\vec{k})\rangle$, la misurazione tramite l'operatore $U_{\alpha,\beta}$ seguito dalla proiezione lungo la base: la meccanica quantistica predice che la probabilità del risultato $|\vec{k}\rangle$ è zero. Pertanto, tenendo conto dell'errore sperimentale, dovrà risultare:

$$p\left(\vec{k}|M, \Psi(\vec{k})\right) = \int_{\Lambda^n} \xi\left(\vec{k}|M, \vec{\lambda}\right) \mu_{\vec{k}}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} \le \epsilon \tag{2.35}$$

Possiamo minorare la precedente quantità utilizzando i minimi delle distribuzioni di probabilità (e tenendo conto del fatto che sia ξ che μ sono funzioni sempre positive o al più nulle):

$$\int_{\Lambda^n} \xi\left(\vec{k}|M, \vec{\lambda}\right) \min_{\vec{k}} \mu_{\vec{k}}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} \le \epsilon \tag{2.36}$$

Ora sfruttiamo la proprietà di completezza delle funzioni di risposta (1.2), che richiede nel caso discreto $\sum_{\vec{k}} \xi\left(\vec{k}|M, \vec{\lambda}\right) = 1$; applicando la somma su $\vec{k}$ ad entrambi i membri otteniamo:

$$\omega(\mu_{\vec{k}}) \le 2^n \epsilon \tag{2.37}$$

A destra compare 2^n e non $2^n - 1$ perchè stiamo sommando su tutti gli stati, compreso $|0...0\rangle$. Utilizzando ora il risultato della (2.34) risulta che:

$$[\omega(\mu_0, \mu_1)]^n \le 2^n \epsilon \tag{2.38}$$

Infine dobbiamo impiegare la relazione (2.30) tra la distanza totale di variazione e la sovrapponibilità, ottenendo immediatamente (risostituiamo gli indici):

$$D(\mu_{\psi_0}, \mu_{\psi_1}) \ge 1 - 2\sqrt[n]{\epsilon} \tag{2.39}$$

Quest'ultima è l'equazione (2.28), e ciò conclude la prova.

A conclusione di questa sezione possiamo riassumere il teorema PBR in poche parole: i modelli ontologici che assegnano agli stati quantistici un valore informazionale su una realtà che determina completamente i risultati delle misure (i modelli ψ-epistemici) producono previsioni sperimentali in contrasto con quelle della meccanica quantistica.
Abbiamo anche osservato, però, che questa conclusione si basa su alcune assunzioni, tra tutte il postulato di preparazione indipendente, che possono essere messe in discussione, e lascia inoltre aperte innumerevoli domande sul reale statuto ontologico degli stati quantici. Esamineremo queste ed altre problematiche nella prossimo capitolo; ora esponiamo invece alcune osservazioni sul rapporto tra teorema PBR e il teorema di Bell.

2.4 *Confronto tra teorema PBR e teorema di Bell*

Il postulato di preparazione indipendente, alla base del teorema PBR, esprime la possibilità di fattorizzare la distribuzione di probabilità di un insieme di n sistemi fisici come il prodotto tra le singole distribuzioni; matematicamente, come dettato dall'equazione (2.13), ciò significa:

$$\mu_{|\psi_i\rangle\otimes|\psi_j\rangle\otimes...\otimes|\psi_l\rangle}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mu_{\psi_i}(\lambda_1) \times \mu_{\psi_j}(\lambda_2) \times ... \times \mu_{\psi_l}(\lambda_n) \tag{2.40}$$

A prima vista questa posizione potrebbe rassomigliare all'ipotesi di località di Bell (che viene violata dalla nota disuguaglianza), che indica l'indipendenza dei risultati di una misura su di un sistema composto da due parti (è per esempio il caso di una coppia di particelle in uno stato di singoletto) separate da una distanza di tipo spazio: in altri termini, la località vieta la possibilità che l'esito di una misura su una parte del sistema influisca istantaneamente sul risultato di una misurazione effettuata sull'altra componente. Grazie alla località, in sostanza, è possibile fattorizzare la probabilità composta dell'esito di una misura su entrambe le parti del sistema come il prodotto delle singole probabilità. Potremo conseguentemente scrivere (gli apici 0 e 1 si riferiscono ai due costituenti del sistema):

$$\xi^{01}(\{k_0, k_1\}|M_{01}, \lambda) = \xi^0(k_0|M_0, \lambda) \times \xi^1(k_1|M_1, \lambda) \tag{2.41}$$

ove λ è lo stato ontico complessivo del sistema k_0 (k_1) è un possibile esito della misura M_0 (M_1) del costituente 0 (1) del sistema. Nel caso del sistema congiunto la misurazione M_{01} si riferirà anch'essa ad ambo le parti del sistema.
È legittimo chiedersi, dunque, in che misura il postulato di preparazione indipendente si distingua dalla località di Bell, vista la loro somiglianza, in quanto la violazione di quest'ultima è un risultato teorico e sperimentale più che assodato.
Esiste, infatti, una differenza sostanziale tra il postulato di preparazione indipendente e la località di Bell: mentre il primo contiene essenzialmente prodotti tra le distribuzioni sullo spazio ontico $\mu_\psi(\lambda)$, che esprimono la probabilità, dato uno stato quantico ψ, di trovarsi nello stato ontico λ, la seconda si riferisce ai risultati delle misure, e pertanto entrano in gioco esclusivamente le funzioni di risposta $\xi(k|M, \lambda)$. Detto in altri termini, nonostante si sia definito, nel capitolo 1, lo stato ontico λ come un entità che determina completamente i risultati delle misure, tali probabilità vengono espresse dalle funzioni di risposta $\xi(k|M, \lambda)$, *non* dalle $\mu_\psi(\lambda)$. Queste ultime, difatti, indicano solamente la probabilità di trovarsi in un punto dello spazio Λ dato uno stato quantico ψ, non riferendosi pertanto in alcun modo ai risultati delle misure. Il collegamento tra la $\mu_\psi(\lambda)$ e gli esiti della misurazione, in ultima analisi, è mediato proprio dalle funzioni di risposta, tramite la legge che abbiamo introdotto precedentemente:

$$p(k|M, \psi) = \int_\Lambda \xi(k|M, \lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda \tag{2.42}$$

La differenza tra località di Bell e postulato di preparazione indipendente risulta pertanto sostanziale: tutti i modelli ontologici (sia ψ-ontici che ψ-epistemici) violano la disuguaglianza di Bell, e sono pertanto non locali. Il teorema PBR, quindi, si inserisce all'interno del contesto del teorema di Bell (che viene sempre soddisfatto) e, solo in tale ambito, mette in luce le contraddizioni insite nei modelli ψ-epistemici dopo aver assunto il postulato di preparazione indipendente.
A questo proposito Harrigan e Spekkens, in [4], espongono una prova del fatto che la sola assunzione di un modello ontologico ψ-ontico porta ad una violazione della località, senza chiamare in causa il teorema di Bell. Per i modelli ψ-epistemici, invece, risulta necessario impiegare il teorema del fisico nord-irlandese. Mostriamo rapidamente tale dimostrazione:

Teorema 2.1. *Un modello ontologico ψ-ontico compatibile con le previsioni della meccanica quantistica viola la località di Bell.*

Dimostrazione. Siano A e B due componenti di un sistema entangled (descritto per esempio dallo stato quantico $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle)$; sia M_{01} una misurazione lungo la base

$\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$, e $M_\pm$ un'altra misura lungo la base $\{|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}\}$. Denotiamo inoltre con P_0 (P_1) la "preparazione remota" che il sistema A effettua su B a seguito di una misura M_{01} con risultato 0 (1). Dato che il sistema è entangled, difatti, se A ottiene come risultato $|0\rangle$ allora B verrà preparato nello stato $|1\rangle$, e viceversa. Sia invece P_{01} una preparazione riferita alla misura M_{01} senza prendere in considerazione il risultato della misura stessa. Definiamo analogamente P_+,P_- e $P_\pm$. Poiché le probabilità di trovare il sistema, dato lo stato $|\psi\rangle$ descritto pocanzi, nello stato $|0\rangle\,|1\rangle$ o $|1\rangle\,|0\rangle$ sono uguali, è possibile scrivere, chiamando λ lo stato ontico di B (al posto di scrivere gli stati quantici come di consueto usiamo la notazione con le preparazioni):

$$\begin{aligned} \mu_{P_{01}}(\lambda) &= \frac{1}{2}\mu_{P_0}(\lambda) + \frac{1}{2}\mu_{P_1}(\lambda) \\ \mu_{P_\pm}(\lambda) &= \frac{1}{2}\mu_{P_+}(\lambda) + \frac{1}{2}\mu_{P_-}(\lambda) \end{aligned} \tag{2.43}$$

Cerchiamo ora di dimostrare il risultato assumendo la località di Bell e derivando una contraddizione.
Dato che, proprio in virtù della località, una misura sul costituente A del sistema non influisce sullo stato ontico di B deve valere:

$$\mu_{P_{01}}(\lambda) = \mu_{P_\pm}(\lambda) \tag{2.44}$$

Moltiplichiamo ora le due equazioni (2.43) tenendo conto della (2.44), ottenendo:

$$4\mu_{P_{01}}(\lambda)^2 = \mu_{P_+}(\lambda)\mu_{P_0}(\lambda) + \mu_{P_+}(\lambda)\mu_{P_1}(\lambda) + \mu_{P_-}(\lambda)\mu_{P_0}(\lambda) + \mu_{P_-}(\lambda)\mu_{P_1}(\lambda) \tag{2.45}$$

Poiché esiste almeno un insieme di misura non nulla di stati ontici λ per i quali sia $\mu_{P_{01}}(\lambda) \neq 0$, deduciamo che almeno una delle seguenti disuguaglianza deve essere valida:

$$\begin{aligned} &\mu_{P_+}(\lambda)\mu_{P_0}(\lambda) > 0 \qquad && \mu_{P_+}(\lambda)\mu_{P_1}(\lambda) > 0 \\ &\mu_{P_-}(\lambda)\mu_{P_0}(\lambda) > 0 && \mu_{P_-}(\lambda)\mu_{P_1}(\lambda) > 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

A questo punto si trova un assurdo: se anche solo una delle disuguaglianze è soddisfatta, viene violata la definizione stessa di stato ψ-ontico, che afferma che, per due preparazioni distinte P e P', valga:

$$\mu_P(\lambda)\mu_{P'}(\lambda) = 0 \tag{2.47}$$

ovvero che le distribuzioni di probabilità corrispondenti a preparazioni differenti non si sovrappongano. Contrariamente a ciò, abbiamo dedotto che il modello ontologico è ψ-epistemico, contraddicendo l'ipotesi iniziale. In conclusione, pertanto, per i modelli ontologici ψ-ontici la località di Bell è naturalmente violata. $\square$

Capitolo 3

Critiche e conseguenze del teorema PBR

Come abbiamo già accennato, il teorema PBR presenta nella sua formulazione delle possibili debolezze, che, se fondate, potrebbero ridimensionarne il valore teorico. In particolare, in letteratura sono state rivolte alcune critiche al postulato di preparazione indipendente [5]: sono state proposte quindi delle formulazioni alternative del postulato stesso, richiedendo vincoli più deboli sul comportamento delle distribuzioni di probabilità composte. Quest'analisi ci permetterà di esporre alcuni risultati simili al teorema PBR presentati da altri autori [9].
Un altro versante di critica è costituito dall'interpretazione della definizione delle funzioni di risposta, nonché dalla natura costitutiva della distinzione tra stati ψ-epistemici e ψ-ontici: in altre parole ci si è domandati [5] se tale dicotomia abbia significato fisico rilevante oppure se sia esclusivamente una distinzione convenzionale.
In ultimo, dal punto di vista prettamente sperimentale, sono state rilevate delle criticità riguardanti le *built-in inefficiencies*, un concetto che definiremo nel seguito.
Una volta esposte le difficoltà inerenti al teorema PBR, proveremo ad esaminare parzialmente lo spettro di teorie ψ-ontiche attualmente in voga che possano costituire una base per la ricerca futura, alla luce degli stringenti vincoli posti dal teorema sulle teorie ψ-epistemiche.
In quest'ottica esamineremo brevemente la teoria di de Broglie-Bohm e l'interpretazione modale della meccanica quantistica.
In conclusione presenteremo il Quantum Bayesianism, una teoria che, non basandosi su modelli ontologici, potrebbe costituire una valida scappatoia al risultato del teorema.

3.1 *Le funzioni di risposta*

Nel capitolo 1 avevamo definito le funzioni di risposta $\xi(k|M,\lambda)$ come delle funzioni che, data una misurazione M effettuata su un sistema fisico che si trovi nello stato ontico λ, restituiscono la probabilità che il risultato della misura sia k. Naturale conseguenza della definizione è che sommando (o integrando, nel caso continuo) su tutti i possibili risultati k, si ottiene un valore di probabilità 1, avendo considerato tutto lo spettro dell'osservabile. Deve quindi valere, usando la notazione del capitolo 1:

$$\xi(S(K)|M,\lambda) = 1 \qquad \text{con } S(K) \text{ lo spettro dell'osservabile } K \text{ che viene misurata} \tag{3.1}$$

Notiamo che, nella definizione della funzione di risposta, non è stato fatto alcun riferimento ad un'eventuale dipendenza dallo stato quantico $|\psi\rangle$: in altri termini, ciò significa che, nel contesto di un modello ontologico ψ-epistemico, al variare dello stato $|\psi\rangle$, ma tenendosi fissi sullo stesso punto dello spazio ontico Λ, la funzione di risposta non cambia. Ciò che invece dipende esplicitamente (e necessariamente, se si vuole riprodurre la regola di Born) dallo stato quantico è la distribuzione di probabilità sullo spazio ontico $\mu_\psi(\lambda)$ che esprime la probabilità che il sistema sia nello stato ontico λ una volta fissato lo stato quantico $|\psi\rangle$.
La critica che è stata rivolta a questo tipo di approccio consiste nell'osservare che, se si fa dipendere anche la funzione di risposta dallo stato quantico $|\psi\rangle$, la contraddizione esibita dal teorema PBR svanisce; vediamo ora in che modo.
Riformuliamo innanzitutto il teorema PBR in maniera leggermente alternativa: sia M un'osservabile (per comodità indichiamo con la stessa lettera una misurazione di tale osservabile) e $m = 1, 2, ..., N$ i suoi autovalori, corrispondenti ad altrettanti autostati $|1\rangle, ..., |N\rangle$. Siano ora $|\psi_k\rangle$ degli stati quantici tali che esista un insieme R di misura non nulla dello spazio ontico che appartenga al supporto delle distribuzioni di probabilità di ciascuno stato. Si abbia altresì $\langle\psi_k|k\rangle = 0$.
Con queste ipotesi si mostra immediatamente che, *se* le funzioni di risposta sono indipendenti dagli stati quantici, e dato che le distribuzioni di probabilità $\mu_{\psi_k}(\lambda)$ non sono nulle su R, allora deve necessariamente aversi (con "$\lambda \in R$" intendiamo che il sistema si trova in uno stato ontico appartenente alla regione in comune tra le varie distribuzioni di probabilità):

$$\xi(1|M, \lambda \in R) = \xi(2|M, \lambda \in R) = ... = \xi(N|M, \lambda \in R) = 0 \tag{3.2}$$

Altrimenti, infatti, essendo sia ξ che μ funzioni non negative, la regola di Born $p(k|M, \psi) = \int_\Lambda \xi(k|M, \lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda$ non verrebbe soddisfatta.
L'equazione (3.1), d'altro canto, impone che la somma di tutte queste funzioni di risposta assommi ad 1: si genera quindi una contraddizione.
Se, invece, si fanno dipendere anche le funzioni di risposta dagli stati quantici l'assurdo viene facilmente evitato: assumiamo come funzioni $\mu_{\psi_k}(\lambda)$ delle distribuzioni uniformi sullo spazio Λ; questa posizione indica che, dato uno stato $|\psi\rangle$ il sistema fisico può trovarsi indifferentemente in qualsiasi stato λ, senza particolari preferenze. Il rispetto della regola di Born viene pertanto affidato al contributo delle funzioni di risposta, ponendo:

$$p(k|M, \psi) = \xi^\psi(k|M, \lambda) \quad \text{con } k \text{ un generico risultato relativo ad una certa osservabile} \tag{3.3}$$

Calcoliamo ora $\int_\Lambda \xi(k|M, \lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda$: la funzione ξ non dipende più da λ e pertanto si può estrarre dall'integrale, in cui rimane solo la distribuzione di probabilità che, integrata su tutto lo spazio ontico Λ dà risultato 1. La regola di Born è quindi banalmente rispettata.
Sembrerebbe, di conseguenza, che una semplice ridefinizione delle funzioni di risposta permetta di creare una scappatoia ai vincoli posti dal teorema PBR. Ciononostante, vi è una difficoltà insita in questa argomentazione: nella costruzione delle definizioni basilari dei costituenti di un modello ontologico si era affermato che lo stato ontico λ determina *completamente* le proprietà del sistema: in altre parole, che il risultato di una misura effettuata sul sistema è specificato interamente da λ, e non dallo stato quantico $|\psi\rangle$ in cui si trova. Conseguentemente è possibile far dipendere le funzioni di risposta dagli stati quantici, ma solo nel caso di un modello ψ-ontico: in tal caso, difatti, ad uno stato ontico corrisponde un unico stato quantico. Se, invece, come è stato mostrato nell'esempio precedente, si considera

un modello ψ-epistemico in cui le ξ dipendano dagli stati quantici si cade nella contraddizione di assumere che le proprietà fisiche del sistema dipendano esclusivamente da λ, e poi descriverne il comportamento a seguito di una misura introducendo una dipendenza da $|\psi\rangle$. Ciò implica che lo stato ontico è stato definito in partenza in maniera non appropriata, in quanto evidentemente non specifica tutte le proprietà del sistema considerato.
In conclusione questo tipo di critica, seppur risulti utile facendo ricordare di porre estrema attenzione nelle definizioni dei costituenti di un modello ontologico, sembrerebbe essere più una questione di nomenclatura che di effettiva sostanzialità fisica.

3.2 *Le built-in inefficiencies*

Nella dimostrazione generale del teorema PBR è stato considerato un insieme n di sistemi fisici preparati in uno stato $|\Psi(k_1, ..., k_n)\rangle = |\psi_{k_1}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{k_n}\rangle$, con $k_i \in \{0, 1\}$, assumendo inoltre che le distribuzioni μ_{ψ_0} e μ_{ψ_0} siano sovrapposte su una regione di misura non nulla R dello spazio ontico Λ. Uno dei passaggi chiave del teorema poggia sul fatto che, per ciascuno scelta di $\vec{k} = (k_1, ..., k_n)$, esista un risultato vietato dalle previsioni della meccanica quantistica. Se un tale insieme di risultati esiste, si nota quindi che se il sistema si trovasse in uno stato ontico del sistema complessivo $\lambda \in R$ ne scaturirebbe una contraddizione. Notiamo altresì, però, che se uno qualsiasi dei rivelatori preposti alla misurazione del risultato sperimentale non "segnala" alcun esito l'incoerenza viene evitata. Semplificando il ragionamento, possiamo immaginare che, a seguito di una misurazione, la "lancetta" del rivelatore, inizialmente posta su una tacca di default, si sposti su un valore corrispondente allo stato che è stato misurato. Pertanto, se ammettiamo che il rivelatore possa essere affetto da un'inefficienza intrinseca di questo tipo (*built-in inefficiency*), ne consegue che il paradosso derivante dal fatto che per ciascun risultato la meccanica quantistica prevede probabilità zero svanisce, in quanto, appunto, il risultato non è stato rivelato a causa della mancata risposta da parte del rivelatore. È importante inoltre distinguere tra inefficienza sperimentale ed inefficienza intrinseca: la prima è dovuta alle consuete fonti di errore sperimentale e dipende dalla sofisticatezza dell'apparato e della relativa tecnologia, mentre l'inefficienza intrinseca è connaturata allo stato ontico in cui si trova il sistema fisico. Ciò vale a dire che potrebbe darsi il caso che gli stati ontici nella regione di sovrapposizione R non producono alcun risultato sul rivelatore secondo una certa legge di probabilità.
Cerchiamo ora di formalizzare matematicamente tale linea di ragionamento. Nel paragrafo precedente si era mostrato che, assumendo l'indipendenza delle funzioni di risposta dagli stati quantici in cui sono preparati i sistemi, e ammettendo tutte le ipotesi del teorema PBR, deve valere l'equazione $\xi(1|M, \lambda \in R) = \xi(2|M, \lambda \in R) = ... = \xi(N|M, \lambda \in R) = 0$, contraddicendo immediatamente la $\xi(S(K)|M, \lambda) = 1$, che prevede che la somma su tutti i possibili esiti delle funzioni di risposta dia 1. Sia ora ν un "valore nullo", ovvero un simbolo per indicare che come risultato della misura congiunta sul sistema nello stato $|\Psi(k_1, ..., k_n)\rangle$ si ottiene una mancata rilevazione del segnale da parte dell'apparato sperimentale (ovvero che non si ottiene un risultato).
In quest'ottica estendiamo lo spettro $S(K)$ aggiungendo il possibile "risultato" ν: sia $S^+(K)$ il nuovo spettro dell'osservabile misurata. Come prima, richiediamo che valga:

$$\xi(S^+(K)|M, \lambda) = 1 \tag{3.4}$$

Possiamo ora ridefinire la compatibilità del modello ontologico con la regola di Born: invece di richiedere $p(k|M,\psi) = \int_\Lambda \xi(k|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda$ imponiamo:

$$p(k|M,\psi) = \frac{\int_\Lambda \xi(k|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda}{\int_\Lambda \xi(S(K)|M,\lambda)\mu_\psi(\lambda)d\lambda} \tag{3.5}$$

Notiamo che l'integrale al denominatore non somma più a 1 in quanto abbiamo esteso lo spettro, e quindi $\xi(S(k)|M,\lambda) \neq 1$: la definizione è pertanto sensata. Ne consegue che, nel caso specifico del teorema PBR in cui si effettua una misura congiunta sul sistema, l'unico modo per sfuggire alla contraddizione è che sussista:

$$\xi(\nu|M,\lambda \in R) = 1 \tag{3.6}$$

Detto a parole, ciò implica che per "sfuggire" alle restrizioni poste dalla meccanica quantistica (ovvero che ciascun risultato avvenga con probabilità nulla) gli stati ontici nella regione R che generano tale difficoltà devono restituire come unico esito il "valore nullo". Notiamo come da ciò segua che, se si accetta questo tipo di costruzione, il teorema PBR non neghi tanto la plausibilità dei modelli ψ-epistemici, quanto invece mostri l'emergere di fenomeni di *built-in inefficiencies* quando si effettuano misure congiunte su sistemi fisici descritti da un modello ψ-epistemico. In tale visione, pertanto, la potenza del teorema PBR viene ampiamente ridimensionata, poiché non escluderebbe più un'intera categoria di modelli, ma mostrerebbe invece un loro particolare comportamento.
D'altro canto, nonostante la comparsa di inefficienze intrinseche non sia da escludere, sembra piuttosto implausibile che quasi tutti i risultati di un esperimento atto a verificare il teorema PBR ricadano invariabilmente nel "valore nullo" (in cui sostanzialmente i detector non rilevano alcunché), anche alla luce di alcune evidenze sperimentali [10]. L'introduzione ad hoc di queste inefficienze, inoltre, non appare motivata da ragioni fisiche cogenti, risultando utile unicamente a preservare la validità dei modelli ψ-epistemici.
Per quanto riguarda, invece, le inefficienze sperimentali e quelle intrinseche parziali (ovvero nei casi in cui la mancata rilevazione del risultato non avvenga solo con una certa probabilità) Pusey, Barrett e Rudolph hanno presentato l'argomentazione già esposta nella conclusione del capitolo 2, mentre Dutta, Pawlowski e Zukowski hanno approfondito la questione attraverso analisi numeriche in [11].

3.3 *Differenza tra modelli ψ-epistemici e ψ-ontici*

Il teorema PBR, come si è visto, ha come fondamentale prerequisito la netta distinzione tra i modelli ontologici ψ-epistemici e ψ-ontici, di cui è stata data la definizione. In [5] Schlossauer e Fine mettono in discussione tale dicotomia, proponendo una visione in cui i modelli ψ-epistemici e ψ-ontici non sono altro che due aspetti di un'unica descrizione probabilistica della realtà fisica, e suggerendo che esista sempre un modo per passare da un modello all'altro e viceversa. Vediamo in che modo partendo da un esempio.
Consideriamo un modello ψ-epistemico deterministico, con spazio ontico $\Lambda = [0,1]$. In tale modello assumiamo che la distribuzione di probabilità $\mu_\psi(\lambda)$ sia costante e le funzioni di risposta (le consideriamo genericamente dipendenti dallo stato quantico ψ) per una certa osservabile soddisfino a:

$$\xi^\psi(k|M,\lambda) \in \{0,1\} \tag{3.7}$$

Consideriamo inoltre che l'osservabile esaminata sia un qubit, e che possa pertanto assumere il valore 1 o 0. Il valore assunto dalla funzione di risposta pertanto non è altro che il risultato della misura. Definiamo quindi più specificamente le funzioni di risposta:

$$\xi^{\psi}(k|M,\lambda) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad 0 < \lambda < p(1|M,\psi) \quad \text{e 0 negli altri casi} \tag{3.8}$$

Risulta quindi immediatamente che tale modello soddisfa la regola di Born, essendo:

$$p(1|M,\psi) = \int_0^1 \xi^{\psi}(k|M,\lambda)d\lambda = \int_0^{p(1|M,\psi)} d\lambda = p(1|M,\psi) \tag{3.9}$$

Analogamente possiamo costruire un modello ψ-ontico che soddisfi alla regola di Born: consideriamo un cerchio unitario, ed associamo a ciascuna direzione (ovvero a ciascun angolo) il supporto della distribuzione di probabilità $\mu_{\psi}(\lambda)$ di uno stato quantico $|\psi\rangle$ distinto. In tal maniera viene quindi rispettata la segregazione dei supporti imposta dal modello ψ-ontico. Si può quindi procedere come nell'esempio precedente definendo le funzioni di risposta in modo tale che la regola di Born venga esaudita. Si nota, altresì, la similarità tra questi due modelli "giocattolo", derivante dalla loro costruzione comune.
L'idea ora è di mostrare, anzitutto, che da un modello ψ-epistemico è sempre possibile passare ad un corrispondente modello ψ-ontico attraverso un'opportuna trasformazione. Sia quindi λ un generico stato ontico appartenente al supporto della distribuzione $\mu_{\psi}(\lambda)$ di un certo stato quantico ψ: ridefiniamo lo stato ontico come la coppia (λ, ψ). Il nuovo spazio ontico non sarà più Λ, ma Λ', formato dalle coppie (λ, ψ) al variare di λ e ψ. Pertanto, anche se le distribuzioni di probabilità di due stati quantici λ e ϕ si sovrapponevano su un insieme di misura non nulla, ora i loro supporti sono disgiunti, per via della ridenominazione degli stati ontici. Le nuove funzioni di risposta, invece di $\xi^{\psi}(k|M,\lambda)$, saranno $\xi'^{\psi}(k|M,(\lambda,\psi))$: in tal modo si ricostruisce la struttura probabilistica del modello ψ-epistemico iniziale, che rimane invariata. Nel contesto degli esempi presentati precedentemente, la ridefinizione dello spazio ontico Λ corrisponde al ripartire la distribuzione di probabilità uniforme del modello ψ-epistemico sul cerchio unitario, sostituendola con delle delta di Dirac dipendenti dall'angolo.
Nonostante la logica del ragionamento precedente sia chiara (estendere lo spazio ontico al prodotto cartesiano dello spazio iniziale con lo spazio di Hilbert contenente gli stati quantici), non è scontata invece la sua estensione al viceversa, ovvero al problema di trasformare un qualsiasi modello ψ-ontico in un corrispettivo ψ-epistemico. Si può notare, inoltre, che la precedente costruzione è stata effettuata con delle funzioni di risposta deterministiche. Resta in conclusione da approfondire la questione del rapporto tra modelli ontologici ψ-ontici e ψ-epistemici, e della loro intrinseca differenza.

3.4 *Risultati di concerto al teorema PBR*

Il teorema PBR, ponendo degli stringenti vincoli sull'autosussistenza dei modelli ontologici ψ-epistemici, ha dato vita ad una serie di tentativi di rilassarne le ipotesi (in particolare, il postulato di preparazione indipendente), pur mantenendo sostanzialmente invariato il risultato *no-go* per i modelli ψ-epistemici, e ad approcci alternativi che permettano di porre delle condizioni su tali modelli, indipendentemente dal teorema PBR. Consideriamo innanzitutto un esempio di tali proposte, presentato da Patra, Pironio e Massar in [9].

La sostanziale differenza dell'accostamento di [9] al problema dei modelli ψ-epistemici rispetto a PBR risulta nel fatto che i primi pongono delle restrizioni su tali teorie considerando un unico sistema fisico; ciononostante, il risultato analogo al teorema PBR che presenteremo nel prossimo paragrafo e sempre dovuto a [9] richiede l'analisi di più di un sistema fisico, come nel caso di PBR.
Prendiamo pertanto in considerazione un singolo sistema fisico, descritto genericamente da uno stato quantico $|\psi\rangle$ appartenente ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione d. Supponiamo, inoltre, che la rappresentazione del sistema sia da attribuire ad un modello ψ-epistemico, con spazio degli stati ontici Λ. Per rendere più agile la dimostrazione consideriamo discreto lo spazio ontico Λ (che sarà pertanto l'insieme dei singoli stati ontici: $\Lambda = \{\lambda\}$); la seguente analisi è comunque valida anche nel caso continuo (cfr. [9]).
L'idea generale del presente risultato consiste nel mostrare che, assumendo una ragionevole nozione di "continuità" per le distribuzioni di probabilità degli stati quantici $|\psi\rangle$ sullo spazio Λ, è possibile porre un vincolo sulla fondatezza di una descrizione ψ-epistemica del sistema fisico considerato.
Forniamo pertanto la definizione centrale:

Definizione 3.1. *Consideriamo una palla chiusa $B_\psi(\epsilon)$ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, di raggio $\epsilon > 0$ e centrata sullo stato $|\psi\rangle$. Un modello ontologico si dice ϵ-continuo se, per ciascuno stato $|\psi\rangle$ esiste almeno uno stato ontico λ tale che, per ogni stato $\psi' \in B_\psi(\epsilon)$ si abbia $\mu_{\psi'}(\lambda) > 0$.*

Notiamo che la palla è ben definita se si considera una nozione di distanza nello spazio di Hilbert procurata dal prodotto scalare: gli stati $\psi' \in B_\psi(\epsilon)$ saranno per definizione quegli stati che soddisfano a:

$$1 - D(\psi', \psi) = |\langle\psi|\psi'\rangle| \geq 1 - \epsilon \tag{3.10}$$

Per visualizzare intuitivamente questa osservazione è possibile immaginare uno stato quantico $|\psi\rangle$ sulla sfera di Bloch: gli stati appartenenti a $B_\psi(\epsilon)$ sono quelli sufficientemente vicini a $|\psi\rangle$ da avere il modulo del prodotto scalare con esso maggiore di $1 - \epsilon$ (notiamo quindi che la minima distanza si ha quando il prodotto scalare vale 1).
Il senso della definizione di ϵ-continuità è che, se si modifica lievemente lo stato quantico ψ (ovvero si prende un altro stato all'interno della palla, con ϵ sufficientemente piccolo), allora anche la distribuzione di probabilità muta di poco: più precisamente, la nuova distribuzione $\mu_{\psi'}(\lambda)$ conterrà almeno uno degli stati quantici λ su cui la precedente $\mu_\psi(\lambda)$ era non nulla. Naturalmente formalmente la definizione è arbitraria, ma appare ragionevole dal punto di vista fisico in casi ordinari. Puntualizziamo, inoltre, che tale condizione è valida per ϵ con un determinato valore: le distribuzioni di probabiltà di stati quantici troppo distanti tra loro pertanto potranno non aver alcuno stato ontico λ in comune nei loro supporti (ovvero i loro supporti saranno disgiunti nello spazio Λ).
Veniamo ora al risultato dimostrato da Patra Pironio e Massar, che pone tramite una disuguaglianza un preciso limite all'entità di ϵ, ferma restando la compatibilità del modello ontologico ψ-epistemico che descrive il sistema con la meccanica quantistica.

Teorema 3.2. *Un modello ontologico ϵ-continuo non è compatibile con le previsioni della meccanica quantistica se vale:*

$$\epsilon \geq 1 - \sqrt{1 - 1/d} \quad \textit{con } d \textit{ la dimensione dello spazio di Hilbert } \mathcal{H} \tag{3.11}$$

Osserviamo immediatamente che il vincolo diviene via via più stringente all'aumentare della dimensione d dello spazio di Hilbert. Diamo ora la dimostrazione del precedente risultato:

Dimostrazione. Consideriamo un insieme di d stati quantici distinti $|\psi_i\rangle$, indicizzati da $i \in \{1, ..., d\}$, tutti contenuti in una palla di raggio ϵ. Il centro della palla può essere posizionato arbitrariamente, fermo restando il fatto che tutti gli $|\psi_i\rangle$ devono esservi contenuti. Applichiamo ora la definizione di modello ϵ-continuo: per tutti gli stati $|\psi_i\rangle$ contenuti nella palla di raggio ϵ vale $\mu_{\psi_i} > 0$, pertanto è ben definita la seguente quantità, che è inoltre strettamente positiva:

$$\min_i \mu_{\psi_i}(\lambda) > 0 \tag{3.12}$$

Così facendo si può altresí introdurre una quantità analoga a quella definita nel capitolo 2 dall'equazione (2.32), che al tempo avevamo denominato "sovrapponibilità"; la sostanziale differenza è che in questo caso siamo in uno spazio Λ discreto, per cui l'integrale viene sostituito da una sommatoria:

$$\omega(\mu_{\psi_1}, ..., \mu_{\psi_d}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \min_i \mu_{\psi_i}(\lambda) \tag{3.13}$$

Tale grandezza, essendo collegata alla "distanza" tra le distribuzioni definita dall'equazione (2.27), rappresenta il grado di sovrapponibilità delle distribuzioni di probabilità degli stati $|\psi_i\rangle$ contenuti nella palla. Introduciamo ora un'osservabile K, che misurata con un'opportuna procedura M dia come esiti i suoi possibili autovalori $i = 1, ..., d$. Risulta quindi la seguente relazione:

$$\begin{aligned} &\sum_i p(i|M, \psi_i) = \sum_i \sum_{\lambda \in \Lambda} \xi(i|M, \lambda) \mu_{\psi_i}(\lambda) \\ &\geq \sum_i \sum_{\lambda \in \Lambda} \xi(i|M, \lambda) \min \mu_{\psi_i}(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \min \mu_{\psi_i}(\lambda) = \omega(\mu_{\psi_1}, ..., \mu_{\psi_d}) > 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

La prima uguaglianza non è altro che la regola di Born nel caso discreto, mentre l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la somma della funzione di risposta (che ricordiamo essere indipendente dallo stato $|\psi_i\rangle$ considerato) su tutti i possibili autovalori restituisce l'unità, come garantito dall'equazione (1.2).
Mostriamo ora che, scegliendo opportunamente gli stati quantici $|\psi_i\rangle$, scaturisce una contraddizione con l'equazione (3.14) se sussiste $\epsilon \geq 1 - \sqrt{1 - 1/d}$.
Sia $\{|l\rangle \, | l = 1, ..., d\}$ una base ortonormale dello spazio di Hilbert che stiamo considerando. Costruiamo ora l'insieme di stati $|\psi_i\rangle$ ed un altro stato $|\psi\rangle$ nel seguente modo:

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{l \neq i} |l\rangle \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_l |l\rangle \tag{3.15}$$

Osserviamo che la "distanza", così come definita nell'equazione (3.10), tra gli $|\psi_i\rangle$ e $|\psi\rangle$ risulta:

$$\begin{aligned} &1 - D(\psi_i, \psi) = |\langle \psi_i | \psi \rangle| = \\ &\frac{1}{\sqrt{d-1}} \sum_{l \neq i} \langle l| \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_l |l\rangle = \frac{1}{\sqrt{(d-1)d}} \sum_{l \neq i} \langle l|l\rangle = \\ &\frac{d-1}{\sqrt{(d-1)d}} = \sqrt{1 - 1/d} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ciò significa in sostanza che gli stati ψ_i sono sul bordo e perciò appartengono alla palla $B_\psi(1-\sqrt{1-1/d})$. Operiamo ora una misura M lungo i proiettori corrispondenti alla base ortonormale $\{|l\rangle\}$; la probabilità di ottenere l'autovalore $i=1,...,d$ vale in tal caso, applicando la regola di Born:

$$p(i|M,\psi_i)=|\langle\psi_i|i\rangle|^2=0 \quad \text{poiché in } \psi_i \text{ manca il termine proporzionale a } |i\rangle \tag{3.17}$$

Il risultato appena trovato è in contraddizione con l'equazione (3.14): si può pertanto dedurre che, se $\epsilon \geq 1-\sqrt{1-1/d}$, la descrizione del modello ontologico ψ-epistemico considerato confligge con le previsioni della meccanica quantistica. □

La precedente dimostrazione mostra un interessante vincolo sui modelli ψ-epistemici prendendo in considerazione un unico sistema fisico (non sono state infatti impiegate misure congiunte), ma non rappresenta un risultato forte quanto il teorema PBR, che, dato il postulato di preparazione indipendente e un insieme di n sistemi fisici, deriva una contraddizione per *qualsiasi* modello ψ-epistemico, senza restrizioni. Vedremo nel prossimo paragrafo come il risultato di PBR possa essere riformulato con un indebolimento del postulato di preparazione indipendente.

3.5 *Critiche al postulato di preparazione indipendente e riformulazione del teorema PBR*

Come abbiamo accennato, l'ipotesi maggiormente messa in discussione del teorema PBR è il postulato di preparazione indipendente, che permette di fattorizzare la distribuzione di probabilità di un sistema composto come il prodotto delle distribuzioni dei singoli sistemi. È per questa ragione che si parla di "preparazione indipendente": la distribuzione di probabilità totale non dipende da effetti di correlazione tra i sottosistemi; si assume in sostanza di poterli preparare indipendentemente l'uno dall'altro. Alcuni autori hanno pertanto tentato di richiedere delle condizioni meno stringenti, che allo stesso tempo permettano di mantenere gran parte dell'efficacia del teorema PBR; a questo proposito, Schlossauer e Fine in [5], propongono la nozione, molto più conservativa rispetto al postulato di preparazione indipendente, di "compattezza":

Definizione 3.3. *Siano $|\psi_0\rangle$ e $|\psi_1\rangle$ due stati quantici distinti, associati rispettivamente alle distribuzioni di probabilità $\mu_{\psi_0}(\lambda)$ e $\mu_{\psi_1}(\lambda)$. Se tali distribuzioni sono entrambe diverse da zero su un insieme S di misura non nulla dello spazio ontico Λ, si dice che soddisfano alla condizione di* ***compattezza*** *se la distribuzione di probabilità del sistema composto di n sottosistemi descritto dallo stato $|\psi_{x_0}\rangle \otimes ... \otimes |\psi_{x_n}\rangle$, con $x_i \in \{0,1\}$, è non nulla su un sottoinsieme S' dello spazio Λ (non deve necessariamente valere $S=S'$), per qualsiasi scelta degli x_i.*

La definizione può essere estesa in modo naturale ad un numero arbitrario di stati quantici. Il significato fisico di tale richiesta è che se c'è uno stato ontico all'interno delle distribuzioni di entrambi gli stati quantici che descrivono certi sottosistemi, allora ci dev'essere anche uno stato ontico (non necessariamente lo stesso) che descrive il comportamento dell'insieme dei sottosistemi. Non è possibile, utilizzando un linguaggio approssimativo, che dei sistemi che avevano "qualcosa in comune", se presi singolarmente, perdano questa affinità se considerati come un tutto unico. Su questa base Patra Pironio e Massar in [9] hanno avanzato una definizione leggermente più restrittiva, che ha permesso di riderivare in maniera alternativa il teorema PBR, con un procedimento che ci accingiamo ad esporre.

Definizione 3.4. *Si $|\psi\rangle$ uno stato quantico, con $\mu_\psi(\lambda) > 0$ su uno stato ontico λ (consideriamo esclusivamente il caso in cui Λ sia discreto). Si dice che un modello ontologico è **separabile** se la distribuzione di probabilità $\mu_{|\psi\rangle\otimes...\otimes|\psi\rangle}(\vec{\lambda})$ è maggiore di zero in corrispondenza dello stato $\vec{\lambda} = (\underbrace{\lambda, ..., \lambda}_{n\, volte})$.*

Notiamo immediatamente che la definizione di separabilità è più stringente rispetto a quella di compattezza data precedentemente, in quanto si richiede che lo stato ontico comune sia l'analogo n-dimensionale dello stato ontico singolo. Nel seguito useremo anche la notazione $\underbrace{|\psi\rangle \otimes ... \otimes |\psi\rangle}_{n\,\text{volte}} = |\psi^{\otimes n}\rangle$. Veniamo ora alla dimostrazione del risultato, utilizzando il formalismo del teorema 3.2.

Teorema 3.5. *Un modello ontologico ψ-epistemico che soddisfa alla condizione di separabilità confligge con le previsioni della meccanica quantistica in uno spazio di Hilbert di dimensione $d \geq 3$.*

Dimostrazione. Costruiamo innanzitutto i seguenti d stati quantici (al variare di i), usando la base ortonormale $\{|l\rangle \, | l = 1, ..., d\}$:

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= \alpha\,|i\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{d}} \sum_{l=1}^{d} |l\rangle \qquad & |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{l=1}^{d} |l\rangle \\ \alpha &= -\sqrt{1 - \left[\frac{d-2}{d-1}\right]^{1/n}} \qquad & \beta &= -\frac{\alpha}{\sqrt{d}} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{d} + \left[\frac{d-2}{d-1}\right]^{1/n}} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Impiegando gli α e β indicati, si verifica che gli stati $|\psi_i\rangle$ sono normalizzati, e che soddisfano a:

$$|\langle\psi_i|\psi_l\rangle| = \left[\frac{d-2}{d-1}\right]^{1/n} \qquad \text{per } i \neq l \tag{3.19}$$

La distanza tra $|\psi_i\rangle$ e $|\psi\rangle$ data dall'equazione (3.10) risulta:

$$1 - D(\psi_i, \psi) = |\langle\psi_i|\psi\rangle| = \sqrt{1 - \alpha^2(1 - 1/d)} \equiv 1 - \epsilon \tag{3.20}$$

Con l'ϵ definito sopra, possiamo affermare che in un modello ϵ-continuo gli stati $|\psi_i\rangle$ condividono uno stato ontico λ nelle loro distribuzioni di probabilità. Inoltre, sfruttando la definizione di separabilità, deduciamo che anche gli stati $|\psi_i^{\otimes n}\rangle$ hanno uno stato ontico in comune e, seguendo il ragionamento del teorema 3.2, otteniamo che:

$$\omega_n \equiv \sum_{\lambda\in\Lambda} \min_i \mu_{\psi_i^{\otimes n}}(\vec{\lambda}) > 0 \implies \sum_i p(i|M, \psi_i^{\otimes n}) \geq \omega_n > 0 \tag{3.21}$$

ove con k si è indicato il risultato di una misura M con possibili esiti $i = 1, ..., d$. Gli stati $|\psi_i^{\otimes n}\rangle$ sono ancora normalizzati, ed il loro prodotto scalare vale semplicemente:

$$|\langle\psi_i^{\otimes n}|\psi_l^{\otimes n}\rangle| = (|\langle\psi_i|\psi_l\rangle|)^n = \frac{d-2}{d-1} \tag{3.22}$$

Di conseguenza è possibile individuare una trasformazione unitaria U, che agisca nel sottospazio $S_d \subset \mathcal{C}_d^{\otimes n}$ individuato dai d stati quantici $|\psi_i^{\otimes n}\rangle$, e che abbia come effetto:

$$U\,|\psi_i^{\otimes n}\rangle = |\phi_i\rangle \qquad \text{con } |\phi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{d-1}}\sum_{l\neq i}|l\rangle \tag{3.23}$$

Poiché gli stati $|\phi_i\rangle$ soddisfano esattamente alle stesse caratteristiche richieste dal teorema 3.2, ciò significa che per una misura M effettuata lungo i vettori di base $\{|l\rangle\}$ deve valere $\sum_i p(i|M,\phi_i) = 0$. Questo fatto, però, implica altresì che, per un'appropriata misurazione M', sussista $\sum_i p(i|M',\psi_i^{\otimes n}) = 0$, contraddicendo pertanto l'equazione (3.21). □

Il teorema precedente ha quindi mostrato come, pur indebolendo il postulato di preparazione indipendente, sia possibile dimostrare un risultato analogo al teorema PBR. È da notare, però, come sia stato necessario chiamare in causa una nozione di "vicinanza" tra gli stati quantici introducendo la ϵ-continuità, artificio che nel teorema PBR non era presente.
Dopo aver analizzato in questi ultimi paragrafi le critiche e gli aggiustamenti al teorema PBR, tenteremo ora di presentare un rapido sguardo ad alcune concrete possibilità di teorie della meccanica quantistica che il teorema permette, cercando di inserirle nel contesto dei modelli ontologici.

3.6 *La teoria di de Broglie-Bohm*

Come abbiamo sottolineato in precedenza, il teorema PBR non pone alcun vincolo sui modelli ontologici ψ-ontici, lasciando quindi aperta la possibilità a questi ultimi di costituire una descrizione fondata della meccanica quantistica. Uno dei più rilevanti modelli ψ-ontici è la teoria di de Broglie-Bohm (proposta per la prima volta nel 1952 da Bohm), o dell'onda pilota: viene chiamata in questo modo per i motivi che vedremo immediatamente.
Il fondamento teorico dell'ipotesi di Bohm consiste nell'assegnare, in analogia con la fisica classica, una posizione definita istante per istante alle particelle costituenti un sistema fisico. Tali posizioni però, contrariamente alla meccanica Newtoniana, seguono un'evoluzione temporale che dipende dalla funzione d'onda che descrive il sistema: la funzione d'onda, in altri termini, funge da "pilota" nei confronti delle posizioni delle particelle. Il principio di indeterminazione di Heisenberg, inoltre, non viene violato in quanto l'unico oggetto che è possibile manipolare sperimentalmente è lo stato quantico, che corrisponde ad una determinata preparazione del sistema: ciò implica che le posizioni delle particelle non sono direttamente conoscibili (se così fosse si può mostrare che sarebbe possibile inviare segnali a velocità superluminale, cfr [12]): ciò che invece potrà essere rilevato sperimentalmente è l'accordo tra la distribuzione di probabilità delle posizioni, che non è altro che la funzione d'onda (più precisamente, il quadrato del suo modulo), e le posizioni effettive misurate dall'apparato. In altri termini, un sistema viene definito in equilibrio quantistico quando le posizioni delle particelle seguono proprio la distribuzione data dalla funzione d'onda che

descrive il sistema: questo fatto garantisce la compatibilità tra le previsioni della meccanica quantistica standard e la teoria di Bohm. Le posizioni delle particelle, essendo inconoscibili, vengono appunto denominate “variabili nascoste”.
Dal punto di vista matematico alla base della meccanica Bohmiana sono quindi due equazioni: l'equazione di Schrödinger, che governa l'evoluzione della funzione d'onda, e l'equazione dell'onda pilota, che dirige lo sviluppo temporale delle posizioni. Se denominiamo con $(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n)$ le posizioni di n particelle, con m_i le loro masse, e con $\psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t)$ la funzione d'onda che descrive il sistema al tempo t, le due equazioni in questione saranno:

$$
\begin{aligned}
&\text{Equazione di Schrödinger:}\\
&i\hbar\frac{\partial\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\hbar^2}{2m_i}\nabla^2\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t) + V(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n)\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)\right]\\
&\text{Equazione dell'onda pilota:}\\
&\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{i\hbar\left[\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)\vec{\nabla}_i\psi^*(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t) - \psi^*(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)\vec{\nabla}_i\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)\right]}{2m_i|\psi(\vec{r}_1,...,\vec{r}_n,t)|^2}
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Da queste due equazioni si dimostra che (considerando il caso di una funzione d'onda che descriva una sola particella), detta $\rho(\vec{r}, t)$ la densità di particelle al tempo t nel punto $\vec{r}$ nello spazio tridimensionale, se si impone la condizione iniziale $\rho(\vec{r}, 0) = |\psi(\vec{r}, 0)|^2$, al tempo t vale analogamente $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$: questo risultato matematico garantisce la sensatezza dell'ipotesi dell'equilibrio quantistico.
Nonostante le posizioni delle particelle siano a rigore perfettamente definite istante per istante, ciò non significa che sia possibile recuperare tutte le caratteristiche delle teorie classiche: il teorema di Bell, difatti, impone la violazione dell'omonima disuguaglianza e pertanto scarta le teorie locali. La conseguenza diretta di ciò è che la teoria di Bohm è non locale. Tale teoria, inoltre, a causa del teorema di Kochen e Specker, è non contestuale: il valore di una grandezza fisica (per esempio lo spin di una particella rispetto ad un dato asse) dipende da tutto il contesto sperimentale utilizzato per misurarla, e non esclusivamente dalla funzione d'onda e dalle variabili nascoste (in questo caso le posizioni).
All'inizio del paragrafo è stato affermato che la teoria di de Broglie-Bohm è un esempio di modello ontologico ψ-ontico, vediamo ora per quale motivo. Consideriamo un sistema di n particelle, descritte dalle posizioni $(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n)$ e da una funzione d'onda $\psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t) \in \mathcal{PH}$: definiamo lo stato ontico λ del sistema e lo spazio ontico Λ come la coppia:

$$\lambda = (\psi(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_n, t), \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n) \qquad \Lambda = \mathcal{PH} \times \mathbb{R}^{3n} \tag{3.25}$$

Per specificare un punto dello spazio ontico Λ sarà pertanto necessario indicare la funzione d'onda del sistema e tutte le posizioni dei suoi costituenti: da ciò deduciamo che la teoria di de Broglie-Bohm è un modello ontologico ψ-ontico (una variazione della funzione d'onda porta necessariamente ad una variazione dello stato ontico λ), ma non ψ-completo, in quanto la funzione d'onda non è sufficiente a specificare λ. Conseguentemente la meccanica Bohmiana è un modello ontologico ψ-supplementato. Apparentemente potrebbe non essere necessario includere la funzione d'onda nello stato ontico (portando quindi ad un modello ψ-epistemico): dall'equazione (3.24), però, osserviamo immediatamente che se muta ψ allora muta tutta l'evoluzione temporale del sistema di particelle: in altri termini, un qualsiasi cambiamento di ψ comporta un cambiamento del sistema fisico. In ultima analisi, una variazione di ψ si riflette necessariamente in una variazione dei risultati delle misure: se quindi ψ non appartenesse allo stato ontico λ verrebbe violata la definizione stessa di stato ontico, che impone che i risultati delle misure dipendano esclusivamente da esso. Sussiste, però, un problema: nella trattazione sui modelli ontologici operata nel capitolo 1 non è stato fatto cenno alla contestualità, mentre la teoria di Bohm, come abbiamo visto, la richiede necessariamente per soddisfare il teorema di Kochen e Specker; come ricordano Harrigan e Spekkens in [4] resta perciò da approfondire in che modo la contestualità possa venire inserita nel contesto dei modelli ontologici.

3.7 *L'interpretazione modale*

La prima proposta di una nuova interpretazione della meccanica quantistica di tipo modale, volta precipuamente alla risoluzione del problema del collasso, si deve al lavoro di Van Fraassen negli anni '70, e alla formalizzazione della teoria in [13], ed in molti altri articoli (per esempio [14]), che hanno portato alla definizione di numerose varianti dell'interpretazione stessa.
Il punto di partenza della teoria modale, al fine di descrivere un sistema fisico, consiste nell'operare una distinzione tra lo *stato dinamico* del sistema ed il suo *stato effettivo* (in inglese rispettivamente *dynamical state* e *value state*): il primo coincide con lo stato quantico descritto dalla meccanica quantistica standard, ed evolve sempre soddisfando l'equazione di Schrödinger; lo stato effettivo, invece, è costituito dall'insieme di proprietà fisiche che il sistema possiede ad una dato istante (l'individuazione del tempo in cui vengono considerate le proprietà è saliente, come vedremo). Tali proprietà, inoltre, vengono considerate come perfettamente definite: per evitare di ricadere nelle ipotesi dei teoremi di Bell e Kochen-Specker solo alcune di queste potranno essere definite simultaneamente. A questo stadio le varie interpretazioni modali divergono riguardo alla maniera con cui individuare le proprietà del sistema che sono assegnate ad un dato istante: in altre parole, è necessario introdurre un criterio con cui definire tali proprietà.
Una delle vie maggiormente percorse per aggirare questo ostacolo (proposto per esempio in [14]) consiste nello sfruttare il teorema di decomposizione biortogonale (o di Schmidt). Consideriamo un sistema fisico composto da due parti A e B (queste due componenti potrebbero, per esempio, essere una particella e l'apparato sperimentale che ne misura lo spin): lo spazio di Hilbert complessivo potrà venire scomposto nel prodotto tensore dei singoli spazi di Hilbert riferiti alle singole parti: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Il teorema di decomposizione ortogonale afferma che, assumendo che il sistema possieda uno stato quantico totale $|\psi\rangle$, sia possibile scomporlo in modo unico (se i coefficienti c_i sono distinti) come:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i \, |a_i\rangle \otimes |b_i\rangle \tag{3.26}$$

ove $|a_i\rangle \in \mathcal{H}_A$, $|b_i\rangle \in \mathcal{H}_B$, e gli $\{|a_i\rangle\}$ sono mutualmente ortogonali per indici distinti, e formano una base di $\mathcal{H}_A$ (lo stesso vale per i $\{|b_i\rangle\}$). Si postula, pertanto, che l'osservabile A collegata agli autostati $\{|a_i\rangle\}$ e l'osservabile B in relazione ai $\{|b_i\rangle\}$ assumano un valore definito istante per istante: in altri termini, la scelta delle osservabili che possiedono un valore preciso è da attribuirsi alla decomposizione biortogonale. In questo formalismo una misura ideale avviene nel seguente modo: inizialmente l'apparato di misura è nello stato di partenza $|p_0\rangle$, un autostato dell'osservabile P (che potremmo immaginare come la posizione del puntatore dell'apparato) in cui è "pronto" a misurare, mentre il sistema in analisi si trova in una sovrapposizione degli autostati $|a_i\rangle$ dell'osservabile A che sta venendo misurata: $|a\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$. La misurazione si svolge quindi attraverso un'interazione tra sistema fisico e apparato di misura, ottenendo (chiamando rispettivamente $|\psi_{IN}\rangle$ e $|\psi_{OUT}\rangle$ gli stati complessivi iniziale e finale):

$$|\psi_{IN}\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |p_0\rangle \implies |\psi_{OUT}\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \otimes |p_i\rangle \tag{3.27}$$

In altri termini, è stata introdotta una correlazione tra gli autostati dell'osservabile A e quelli dell'osservabile P: dal punto di vista fisico, ciò significa che se l'osservabile A assume l'autovalore corrispondente a $|a_i\rangle$, allora il puntatore si porterà nella posizione corrispondente a $|p_i\rangle$.

Nell'interpretazione classica della meccanica quantistica si afferma che, a seguito di una misura ideale, il sistema collassa in uno dei suoi autostati (postulato di proiezione): in questo caso ciò implica che tutti i coefficienti c_i nello stato finale sono tutti nulli eccetto uno (nello stato iniziale, invece, devono riflettere le probabilità fornite dalla regola di Born). Il collasso della funzione d'onda, dunque, garantisce il fatto che l'osservabile A e P assumano un valore definito (valore che non possedevano prima della misura).

L'interpretazione modale invece, afferma che la funzione d'onda complessiva *non* collassa, e che i coefficienti c_i rimangono quelli della regola di Born: il significato fisico dello stato quantico, perciò, è di esprimere quali autovalori può assumere un'osservabile e con quale probabilità ciò si verifichi, fermo restando che tale osservabile ha un valore definito. Di conseguenza lo stato quantico, vale a dire lo stato dinamico, esprime le varie modalità con cui può presentarsi lo stato effettivo (da qui l'appellativo di "interpretazione modale"). La differenza sostanziale rispetto all'interpretazione classica è che il legame autovalore-autostato viene a cadere, in quanto un'osservabile del sistema può assumere un valore definito (un autovalore) anche se non si trova in un autostato, ma in una sovrapposizione di stati.

Nell'ottica dei modelli ontologici, pertanto, l'interpretazione modale sembrerebbe costituirsi come un modello ψ-epistemico, ovvero passibile dell'azione del teorema PBR: lo stato dinamico, difatti, rappresenta una distribuzione di probabilità sull'effettivo valore di un'osservabile ed ha pertanto un valore prettamente epistemico. Se, invece, si considera il fatto che quali variabili siano definite istante per istante dipende dallo stato dinamico (che quindi "governerebbe" l'evoluzione temporale di tali variabili; nulla, inoltre, proibisce che l'insieme di variabili definite al tempo t sia diverso al tempo $t' \neq t$), sarebbe ipoteticamente possibile, analogamente a quanto fatto con la teoria di Bohm, includere la funzione d'onda nello stato ontico, andando a costituire pertanto un modello ontologico ψ-ontico. La questione risulta indubbiamente ambigua e meritevole di ulteriori approfondimenti.

3.8 *Il Quantum Bayesianism*

Una strada completamente diversa dalle precedenti e che permette di mantenere un completo accordo con il teorema PBR è rappresentata dal Quantum Bayesianism (abbreviato anche in QBism), un'interpretazione della meccanica quantistica sviluppatasi recentemente

[15], nel solco della teoria dell'informazione. Il concetto centrale del QBism consiste nel non considerare gli stati quantici come elementi della realtà - quindi, in riferimento alla problematica dei modelli ontologici, la realtà non viene descritta da un modello ψ-ontico - né come degli oggetti matematici che danno delle informazioni sullo stato di cose del mondo (ovvero tramite un modello ψ-epistemico): gli stati quantistici non sono altro che l'insieme delle informazioni che un osservatore possiede nei confronti di un sistema con cui può interagire (per esempio attraverso una misura), e tale informazione permette all'osservatore di poter "scommettere"[1], con più o meno confidenza a seconda della natura delle informazioni in suo possesso, sull'esito di tale interazione.
La weltanschauung del QBism, quindi, considera il mondo come un insieme di osservatori (o agenti, nella terminologia Bayesiana), ciascuno con delle credenze $|\psi\rangle$ (stati con informazione massimale) o ρ (stati misti) sui sistemi fisici, su cui possono operare delle azioni (per esempio tramite un operatore quantistico standard) da cui trarre un risultato (un autovalore dell'osservabile misurata): lo strumento che permette di scommettere ragionevolmente sul risultato di una tale interazione è la regola di Born, che fornisce proprio le probabilità per il verificarsi dei vari possibili esiti.
La meccanica quantistica, pertanto, viene assimilata alle leggi classiche della probabilità, di cui costituirebbe una variante, in particolare tramite la regola di Born: tale prescrizione non costituisce quindi una probabilità oggettiva (ovvero esterna all'osservatore) del sistema di assumere un certo autovalore a seguito della misurazione di una data osservabile, quanto un "attrezzo" utile all'osservatore per prevedere i risultati di una tale misura. La conseguenza di questa visione è che, essendo lo stato quantistico il complesso delle informazioni possedute da un agente su di un sistema, non esiste uno stato "oggettivo" che descriva un sistema fisico: in base alla quantità ed alla natura delle informazioni a disposizione dell'osservatore, lo stato (in generale uno stato misto) assegnato al sistema potrà essere diverso (cfr [15] sull'esperimento mentale dell'"amico di Wigner").
Un risultato importante riguardo a questi aspetti è costituito dal teorema quantistico di de Finetti, che si può riassumere nel seguente modo: supponiamo che un agente voglia caratterizzare lo stato di un insieme n di sistemi fisici preparati identicamente da un apposito apparato. Se l'agente assume che scambiando due di questi sistemi la statistica risultante da una qualsiasi misura che potrebbe effettuare non ne risulterebbe mutata, allora vale la seguente relazione:

$$\rho^{(n)} = \int p(\rho)\rho^{\otimes n} d\rho \tag{3.28}$$

ove $p(\rho)$ è una certa distribuzione di probabilità sullo spazio degli operatori densità dei singoli sistemi. La rilevanza di questo teorema risiede nel fatto che l'agente possa fare l'assegnazione $\rho^{(n)}$ all'insieme di n sistemi, operando come se ciascun sistema possedesse lo stato ρ (e pesando ciascun prodotto $\rho^{\otimes n}$ con la distribuzione $p(\rho)$, che esprime la sua ignoranza su quale sia lo stato del singolo sistema).
Per quanto riguarda l'analisi effettuata nei capitoli precedenti, risulta chiaro come il Quantum Bayesianism possa porsi come valida alternativa alle teorie ψ-ontiche, in quanto ne rigetta completamente i presupposti - per il QBism è privo di senso parlare di una realtà preesistente alla misura (lo stato ontico λ) e che ne determina probabilisticamente il risultato; si discute esclusivamente delle informazioni in possesso dell'agente e di come può

[1] impieghiamo qui il linguaggio tipico del ragionamento Bayesiano

scommettere sull'esito di una misura - evitando il teorema PBR. In aggiunta, presenta anche notevoli pregi in termini della soluzione del problema del collasso della funzione d'onda, che in un'ottica QBista corrisponde ad un innocuo aggiornamento delle informazioni in possesso ad un agente, e non ad un'effettiva ed istantanea riduzione del pacchetto d'onda.
Malgrado ciò, molte sono le difficoltà che affliggono il QBism, in primis la definizione univoca di cosa sia un agente e quali requisiti debba soddisfare: in [15] si fa cenno a questa ed altre problematiche.

Bibliografia

[1] J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics **1**, 195 (1964)

[2] S. Kochen e E. Specker, Journal of Mathematics and Mechanics **17** (1967)

[3] M. F. Pusey, J. Barrett, and T. Rudolph, Nature Phys. **8**, 475 (2012)

[4] N. Harrigan and R. Spekkens, Found.Phys. **40**, 125-157 (2010)

[5] M. Schlosshauer and A. Fine, Phys.Rev.Lett. **108**, 260404 (2012)

[6] P. Lewis, D. Jennings, J Barrett, T. Rudolph, Phys.Rev.Lett. **109**, 150404 (2012)

[7] S. Aronson, A. Bouland, L. Chua, G. Lowther, Physical Review A, **88**, 032111 (2013)

[8] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Vol. 1 (1991)

[9] M.K. Patra, S. Pironio, S. Massar, Phys.Rev.Lett **111**, 090402 (2013)

[10] A.J. Leggett, J.Physics: Condens.Matter, **14**:R415-R451, (2002)

[11] A. Dutta, M. Pawlowski, M. Zukowski, Phys.Rev.A **91**, 042125 (2015)

[12] G. Boniolo, *Filosofia della fisica*, Mondadori, Milano (1997)

[13] B.C. Van Fraassen, *Quantum Mechanics, An Empiricist View*, Clarendon Press, Oxford (1991)

[14] D. Dieks, Physical Review A, **49**, (1994)

[15] C. Fuchs, arXiv:1003.5209, (2010)