UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Didattica della matematica: concezione e prospettive nella visione del costruttivismo dinamico

Relatore:
Prof. Giovanni Sambin

Laureanda:
Maddalena Antonini, 1156201

19 luglio 2019

Indice

Introduzione **iii**

1 Il problema della comprensione in matematica **1**

1.1 Breve storia della didattica della matematica in Italia 3

1.2 L'educazione matematica da un punto di vista epistemologico 4

2 La filosofia della matematica **7**

2.1 Il problema dei fondamenti della matematica 8

2.2 La visione fallibilista 10

2.3 La filosofia della matematica riconcettualizzata 12

2.4 Il costruttivismo dinamico come filosofia della matematica . . 16

2.4.1 L'astrazione come attività biologica 18

2.4.2 Le astrazioni matematiche 22

2.5 La responsabilità in matematica 25

3 La filosofia dell'educazione matematica **27**

3.1 La teoria di Perry 28

3.2 Gli scopi dell'educazione matematica 32

3.3 Un modello di ideologia educativa per la matematica 37

3.4 Alcuni esempi di ideologie matematiche 38

4 L'ideologia del costruttivismo dinamico **45**

4.1 Gli elementi primari 45

4.1.1 La filosofia della matematica 45

4.1.2 L'epistemologia 46

4.1.3 L'insieme di valori morali 47

4.1.4 La teoria del bambino 48

4.1.5 La teoria della società 48

4.1.6 Gli scopi educativi 49

4.2 La visione del relativismo fallibilista dei *public educator* 50
4.3 Gli elementi secondari 55
4.3.1 Gli scopi dell'educazione matematica 55
4.3.2 La teoria della conoscenza matematica scolastica 55
4.3.3 La teoria dell'apprendimento della matematica 56
4.3.4 Teoria dell'abilità matematica 56
4.3.5 La teoria dell'insegnamento della matematica 56
4.3.6 La teoria delle risorse per l'educazione matematica . . 57
4.3.7 La teoria della valutazione dell'apprendimento della matematica 58
4.3.8 La teoria della diversità sociale all'interno dell'educazione matematica 58
4.4 Una valutazione critica nei confronti della posizione dei *public educator* 59
4.4.1 Punti di forza 59
4.4.2 Punti di debolezza 60

5 Conclusione e prospettive **63**

Introduzione

Verso la fine del mio percorso di Laurea Triennale in Matematica, ho partecipato a un progetto nato all'interno dell'Ente di Formazione Collegio Mazza, il cui obiettivo era quello di formare un team di tutor specializzati nella propria disciplina, che fossero in grado di fornire un supporto personalizzato nello studio a studenti delle scuole medie e superiori. È stato proprio grazie a questo progetto che ho cominciato a conoscere il mondo della didattica della matematica dal punto di vista di chi insegna.

La fase di avviamento del progetto interna al Collegio si è conclusa con la creazione, nel gennaio del 2017, di un'entità indipendente - *Sinapsi Learning Consultancy* - per la quale attualmente lavoro e la cui missione è quella di porsi come punto di riferimento presente sul territorio in grado di aiutare il mondo scolastico-accademico tradizionale.

Durante gli anni di insegnamento, ho avuto modo di ricevere molta formazione anche in ambito psico-pedagogico e, di conseguenza, ho sviluppato e condiviso numerose riflessioni riguardanti la didattica della matematica, sia con i miei collaboratori, che con altri professionisti del settore.

Una delle domande fondamentali riguardanti l'educazione matematica, però, mi è sorta durante la frequentazione del corso "Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore", tenuto dal professor Sambin nell'anno accademico 2016/2017. Infatti, quando alla fine del corso il professor Sambin ci ha presentato la sua visione riguardante i fondamenti della matematica, mi sono chiesta come una prospettiva così differente da quelle che si incontrano usualmente all'interno del mondo scolastico avrebbe potuto influenzare l'insegnamento di questa disciplina.

È proprio alla ricerca di una possibile risposta a questa domanda che ho dedicato il mio lavoro di tesi.

Nel primo capitolo, ho cercato di analizzare il problema della comprensione e, più in generale, dell'apprendimento in matematica, proponendo innanzi tutto una breve panoramica storica della didattica della matematica in Italia, a partire dagli anni Cinquanta dello scorso secolo. Come suggerito da molti autori, tra cui Von Glasersfeld (1983), Thom (1973), Hersh(1979) e altri, è emersa la necessità di affrontare tale questione da un punto di vista epistemologico, analizzando quindi in primo luogo la natura della matematica e non solo l'efficacia di diverse metodologie didattiche.

Poiché risultano di fondamentale importanza le diverse visioni riguardanti la conoscenza matematica, il secondo capitolo è dedicato alla filosofia matematica. Ho ripercorso brevemente le tappe storiche che hanno portato alla crisi dei fondamenti nei primi anni del '900, per poi presentare le varie soluzioni proposte da Formalisti, Logicisti ed Intuizionisti. Particolare rilevanza è stata data all'analisi della visione fallibilista del costruttivismo dinamico di Sambin, che fornisce la base per un atteggiamento globalmente nuovo nei confronti della matematica, con risvolti interessanti anche dal punto di vista educativo.

Il terzo capitolo è dedicato alla filosofia dell'educazione matematica. Come proposto da Ernest nel suo libro *The Philosophy of Mathematics Education* (2004), partendo dalla teoria psicologica di Perry, che riguarda lo sviluppo delle posizioni epistemologiche ed etiche degli individui, sono state individuate cinque possibili ideologie che costituiscono un valido modello per l'analisi dell'educazione in generale e, più nello specifico, di quella matematica. Ernest, per ognuna di queste ideologie, ha analizzato vari elementi che secondo lui è fondamentale considerare per poter avere una visione globale sulla didattica della matematica.

Nel quarto capitolo, ho ripreso la presentazione della quinta ideologia proposta da Ernest, quella dei *public educator*, apportando alcune modifiche, per renderla compatibile con la visione del costruttivismo dinamico di Sambin. Ho quindi analizzato questa prospettiva, considerando tutti gli elementi proposti dal modello di Ernest.

Infine, ho riportato alcune critiche al modello proposto da Ernest, per metterne in evidenza sia i punti di forza, che quelli di debolezza. Sono così emerse possibili aree di ricerca futura.

Capitolo 1

Il problema della comprensione in matematica

> "We are in a class of the fourth grade. The teacher is dictating: ‘A circle is the position of the points in a plane which are at the same distance from an interior point called the centre.’ The good pupil writes this phrase in his copy-book and the bad pupil draws faces, but neither of them understands. Then the teacher takes the chalk and draws a circle on the board. ‘Ah’, think the pupils, ‘why didn’t he say at once, a circle is a round, and we should have understood.’"[1]
> (Poincaré, 2003)

Nel momento in cui si sperimenta la pratica dell’insegnamento della matematica, inevitabilmente ci si scontra con la problematica della comprensione e, più in generale, dell’apprendimento. Sorgono quindi spontanee alcune domande basilari: come bisogna insegnare per far sì che gli studenti capiscano? Perché, nonostante tutto l’impegno messo dai docenti per far sì che le spiegazioni siano chiare, gli studenti non riescono ad assimilare alcuni concetti matematici e a metterli in pratica nella risoluzione dei problemi? Cos’è esattamente che gli studenti non capiscono? Quali strategie e metodologie

[1] "Siamo in una classe delle medie. L’insegnante sta dettando: ’Un cerchio è costituito dai punti di un piano che sono alla stessa distanza da un punto interno chiamato centro’. L’allievo modello scrive questa frase nel suo quaderno mentre il peggior studente della classe scarabocchia, ma nessuno di loro capisce. L’insegnante quindi prende il gesso e disegna un cerchio sulla lavagna. ’Ah’, pensano i ragazzi, ’perché non l’ha detto subito, un cerchio è un tondo, così avremmo capito immediatamente.’" Traduzione da Henri Poincaré, *Science and Method*, 2003.

didattiche è meglio utilizzare per far sì che l'apprendimento sia facilitato?

Per rispondere a tali domande è necessario affrontare questioni molto più profonde, ma di fondamentale importanza, prima fra tutte la natura della conoscenza matematica. "Infatti, che lo si desideri o no, tutta la pedagogia matematica, anche se scarsamente coerente, si basa su una filosofia della matematica"[2] (Thom, 1973). La questione principale a cui è necessario trovare una risposta, dunque, non è tanto quale sia il miglior modo per insegnare, ma cosa sia realmente la matematica; le problematiche riguardanti l'insegnamento, infatti, non possono essere risolte senza confrontarsi con i problemi riguardanti la natura della matematica (Hersh, 1979).

Eppure, come sostiene Von Glasersfeld nel suo articolo *Learning as a Constructive Activity* (1983), non c'è niente di più pericoloso nell'introdurre questioni epistemologiche all'interno delle discussioni riguardanti l'educazione. Fino agli inizi del '900 sembrava che analizzare l'educazione da un punto di vista epistemologico fosse un modo sicuro per commettere un suicidio intellettuale. Negli ultimi anni, tuttavia, il mondo dell'educazione ha cominciato a cambiare.

Soprattutto per quanto riguarda la matematica, si nota un'apertura nei confronti della connessione tra filosofie della matematiche e l'educazione matematica, in particolare per quanto riguarda le convinzioni personali dei singoli docenti e le metodologie didattiche adottate. Thompson infatti sottolinea:

> "The observed consistency between the teachers' professed conceptions of mathematics and the way they typically presented the content strongly suggest that the teachers' views, beliefs and preferences about mathematics do influence their instructional practice."[3] (Thompson, 1984)

[2]Traduzione da René Thom, *Modern Mathematics: does it exist?*, in Howson (1973).

[3]"La coerenza osservata tra le concezioni sostenute degli insegnanti di matematica e il modo in cui di solito essi presentano i contenuti suggerisce che le opinioni, le credenze e le preferenze degli insegnanti riguardo alla matematica influenzino la loro pratica didattica." Traduzione da Alba Gonzalez Thompson, *The Relationship Between Teachers Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice*, 1984.

1.1 Breve storia della didattica della matematica in Italia

I rapidi cambiamenti riguardanti le metodologie educative della matematica che hanno avuto luogo a partire dalla metà del '900 non hanno portato ai miracoli che ci si aspettava da essi. In particolare, in Italia abbiamo assistito, durante il governo Mussolini, nel 1923, alla riforma Gentile, che prese il nome da Giovanni Gentile, il suo principale ispiratore. La riforma promossa da Gentile intendeva ridare una fondazione in senso idealistico della pedagogia, negandone i nessi con la psicologia e con l'etica: nel suo pensiero l'educazione doveva essere intesa come un divenire dello spirito stesso, il quale realizzava così la propria autonomia.

Dal punto di vista strutturale Gentile individuò l'organizzazione della scuola secondo un ordinamento gerarchico e centralistico. Promosse una visione della scuola di tipo aristocratico, cioè pensata per e dedicata "ai migliori" e rigidamente suddivisa, a livello secondario, in un ramo classico-umanistico proprio dei dirigenti e in un ramo professionale proprio del popolo e della classe lavoratrice. Le scienze naturali e la matematica furono messe in secondo piano, mentre le discipline tecniche ad esse correlate acquisivano importanza solo a livello professionale. La scuola concepita da Gentile era sicuramente severa ed elitaria.

La riforma Gentile, così come era stata concepita ed approvata nel 1923, rimase in vigore soltanto pochi anni; i principali cambiamenti da apportare, voluti soprattutto da Mussolini stesso, furono delineati ne "La carta della scuola" (1939), una proposta di riforma complessiva del sistema scolastico dovuta all'allora ministro della Pubblica Istruzione Giuseppe Bottai che però, a causa dello scoppio della seconda guerra mondiale, rimase in gran parte sulla carta.

L'ondata bourbakista che travolse negli anni Cinquanta il mondo accademico e la scuola secondaria portò un cambiamento radicale nell'impostazione metodologica e nei contenuti della didattica. Ciò può essere verificato analizzando le variazioni subite in questo periodo dai programmi ministeriali e le conseguenti polemiche apparse su numerose riviste del settore.

Gli anni Sessanta si aprirono con vivaci dibattiti sull'insegnamento della matematica. In particolare, la domanda principale a cui si cercava di dare una risposta era la seguente: gli sconvolgimenti che la matematica aveva vissuto nei precedenti cinquant'anni, con la rapida transizione da una visione euclideo-kantiana ad un nuovo assetto assiomatico di matrice hilbertiano-bourbakista, in che modo potevano modificare l'insegnamento della matematica?

Nel 1959 a Royaumont, nei pressi di Parigi, si tenne un Convegno promosso dall'Organizzazione per la Cooperazione Economica Europea, dal titolo "Le nuove matematiche", con il preciso obiettivo di fare il punto sulla situazione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria. Durante una delle conferenze, Jean Dieudonné, uno dei fondatori di Bourbaki, lanciò il grido *A bas Euclid* ("abbasso Euclide"), a voler significare l'inattualità non solo della geometria greca ma, più in generale, di tutto l'insegnamento tradizionale.

Gli anni Sessanta furono segnati da vari convegni e congressi con l'obiettivo di riformulare i programmi di insegnamento della matematica, sia a livello di scuola secondaria di primo che di secondo grado. Tali riforme, concentrandosi prevalentemente sui contenuti da trasmettere agli studenti, non risolsero i problemi più profondi legati all'insegnamento e all'apprendimento della matematica. Il loro fallimento creò uno stato d'animo che non era più in grado di alimentare l'entusiasmo per nuovi esperimenti.

Si arrivò quindi verso la fine degli anni Ottanta ad un clima di disillusione più o meno generale. Questa disillusione, però, è stata sana e propizia perché ha spinto a rivedere alcuni dei presupposti fondamentali delle teorie tradizionali dell'educazione. Tra questi presupposti troviamo la nostra concezione di insegnamento e apprendimento e, soprattutto, la concezione di ciò che significa "conoscere".

1.2 L'educazione matematica da un punto di vista epistemologico

All'inizio del '900 sarebbe stato quasi inconcepibile sottoporre ad educatori e a ricercatori nell'ambito dell'educazione un discorso che pretendeva di trattare una teoria della conoscenza. Gli educatori erano preoccupati di far sì che la conoscenza entrasse nelle teste dei loro studenti e i ricercatori educativi erano interessati a trovare i modi migliori per farlo. Non c'era quindi nessuna incertezza su quale fosse la conoscenza che gli studenti dovevano acquisire e non c'era alcun dubbio sul fatto che, in un modo o nell'altro, la conoscenza potesse essere trasferita da un insegnante a uno studente. L'unica domanda a cui si cercava una risposta era quale potesse essere il modo migliore per implementare quel trasferimento - e i ricercatori educativi, con i loro test di riferimento e i loro sofisticati metodi statistici, avrebbero fornito la risposta definitiva.

Eppure, apparentemente, qualcosa è andato storto: le nuove metodologie didattiche non hanno funzionato come previsto. Questo fallimento ha portato a un clima di delusione e questa delusione non si è limitata soltanto all'educazione matematica, ma è arrivata a coinvolgere l'insegnamento in generale e i metodi didattici di quasi tutte le discipline. Dunque, se gli sforzi educativi che hanno caratterizzato tutto il '900 hanno portato ad un fallimento, i presupposti su cui, implicitamente o esplicitamente, questi sforzi sono stati fondati devono essere messi in discussione, proprio a partire dal significato di ciò che significa conoscere. Diventa quindi fondamentale domandarsi cosa significhi davvero fare matematica, analizzando anche la storia come spunto per riflessioni più profonde e realistiche.

Più in particolare, per far sì che il problema dell'educazione matematica sia analizzato in maniera corretta, è necessario affrontare almeno quattro insiemi di problematiche, come suggerisce Ernest nel suo libro *The Philosophy of Mathematics Education* (2004):

1. *La filosofia della matematica*: che cos'è la matematica e come possiamo considerare la sua natura? Quali filosofie della matematica sono state sviluppate nella storia? Da chi?

2. *La natura dell'apprendimento*: quali assunzioni filosofiche sostengono l'apprendimento della matematica? Sono assunzioni valide? Quali epistemologie e teorie dell'apprendimento assumiamo?

3. *Gli scopi dell'educazione*: quali sono gli scopi dell'educazione matematica? Sono validi? Per chi? Su quali valori si basano? Chi vince e chi perde?

4. *La natura dell'insegnamento*: quali assunzioni filosofiche sostengono l'insegnamento della matematica? Sono valide? Quali mezzi vengono

adottati per raggiungere gli obiettivi dell'educazione matematica? I fini e i mezzi sono coerenti?

Nei prossimi capitoli saranno prese in considerazione tutte e quattro queste tematiche, cominciando proprio dalla filosofia della matematica - a cui è dedicato il prossimo capitolo - ripercorrendo brevemente la storia che ha portato al problema dei fondamenti in matematica e analizzando nel dettaglio la visione del costruttivismo dinamico di Sambin. Tale visione costituisce un cambiamento importante non solo per quanto riguarda la visione della matematica in sé, ma anche per quanto riguarda la pratica educativa.

Capitolo 2

La filosofia della matematica

La filosofia della matematica è la branca della filosofia il cui obiettivo è ragionare e riflettere sulla natura della matematica. Un approccio molto comune in epistemologia è quello di considerare la conoscenza in ogni campo come un insieme di proposizioni, accompagnate da un insieme di procedure che servono per verificare la loro validità o per fornire una garanzia riguardo le loro asserzioni. Poiché le dimostrazioni matematiche sono basate soltanto sul ragionamento, la conoscenza matematica è generalmente considerata la conoscenza più certa in assoluto. L'assunzione principale fatta da molti è che il ruolo della filosofia della matematica sia quello di fornire una fondazione sistematica e assolutamente sicura della conoscenza matematica. Si tratta di un'assunzione profondamente legata alla visione assolutista della matematica. Questa prospettiva sostiene la certezza assoluta della matematica, che risulta quindi essere un sistema di verità sicure ed immutabili.

La filosofia della matematica, però, si trova all'interno di una rivoluzione kuhniana: per oltre duemila anni, infatti, la matematica è stata considerata come una verità oggettiva e infallibile, la pietra d'angolo su cui si basavano tutte le altre scienze. Attualmente questa visione è messa in discussione da molti matematici e filosofi, i quali sono convinti che la matematica, come ogni altra conoscenza, sia un prodotto dell'invenzione umana e, proprio per questo, fallibile e modificabile nel tempo (Ernest, 2004). Tale rivoluzione è cominciata nel XX secolo, dopo un periodo di ampio dibattito nella comunità dei matematici, riguardante la natura della matematica. Durante il XIX secolo, infatti, la matematica ha subito profondi cambiamenti, a cui si è risposto con vari tentativi di formalizzazione da parte di alcuni matematici, i quali cercarono di dare una rigorosa fondazione logica ai contenuti delle proposizioni matematiche, con l'obiettivo di produrre una giustificazione assoluta della loro validità. Tuttavia, l'insorgere di difficoltà inaspettate, in particolare una serie di paradossi portati alle loro estreme conseguenze da Gödel nel 1931, finì per dimostrare l'incompletezza di gran parte della matematica.

2.1 Il problema dei fondamenti della matematica

Il problema dei fondamenti della matematica sorse nell'Ottocento, a causa di una serie di profondi cambiamenti subiti dalla matematica durante il XIX secolo. Come possibile risposta alla richiesta di una fondazione della certezza della matematica, Cantor introdusse la teoria degli insiemi, grazie alla quale sembrava che il problema dei fondamenti potesse essere risolto. Tuttavia questa teoria si mostrò contraddittoria. Infatti, all'inizio del '900, lo stesso Cantor, Russell e altri si accorsero di alcuni paradossi legati alla teoria degli insiemi. Si aprì in questo modo la cosiddetta crisi dei fondamenti. La comparsa dei paradossi, infatti, rese necessario il bisogno di una sicura fondazione della matematica. L'obiettivo era quello di riuscire a conciliare l'indiscussa utilità della teoria degli insiemi con la sua affidabilità. Non avendo idea di quale strada potesse essere percorsa per riuscire a risolvere le contraddizioni interne alla teoria di Cantor, il dibattito si estese al problema, ben più generale e profondo, della natura della conoscenza matematica. Le principali scuole di pensiero che emersero nei primi anni del '900 sono tre: il Logicismo di Russell, il Formalismo di Hilbert e l'Intuizionismo di Brower. Si tratta di visioni che presentano divergenze molto significative sul modo di concepire la matematica.

Il tedesco Hilbert fu il primo a credere nel metodo assiomatico come mezzo per eliminare i paradossi della teoria degli insiemi, convinto che le gravi difficoltà insorgessero qualora si avesse a che fare con gli insiemi infiniti; Hilbert propose, per evitare il sorgere di contraddizioni, di unificare metodo assiomatico e logica simbolica e di studiare la matematica dopo averla completamente assiomatizzata e formalizzata. In tal modo una qualunque dimostrazione doveva essere assolutamente chiara e rigorosa. In particolare, gli obiettivi di Hilbert erano quelli di mostrare che la matematica può essere espressa in sistemi formali, nei quali le verità matematiche sono rappresentate da teoremi formali, e che la sicurezza di tali sistemi può essere dimostrata in termini della loro consistenza, attraverso l'utilizzo di una meta-matematica.

In collaborazione con Alfred North Whitehead (1861-1947), Russell elaborò un nuovo sistema logico in grado di evitare il possibile sorgere di contraddizioni e di ricostruire l'intero edificio matematico a partire da un numero ristretto di assiomi. In particolare, essi sostenevano che tutti i concetti matematici possono, in ultima istanza, essere ricondotti a concetti logici e che tutte le verità della matematica possono essere dimostrate a partire da assiomi e regole d'inferenza della sola logica.

Gli intuizionisti, le cui posizioni erano state anticipate da Poincaré, sostenevano l'impossibilità di fondare su basi logiche la matematica, poiché nella loro interpretazione questa è un'attività costruttiva, e dunque precede la logica, che invece è un'attività descrittiva. Per questo motivo, la matematica non è realmente messa in crisi da alcun paradosso logico. I loro obiettivi erano quelli di dimostrare che la strada classica di costruire le nozioni matematiche e le operazioni logiche era contraddittoria e non legittimata e che invece quella intuizionistica era coerente e legittimata. Tuttavia anch'essi cercavano di dare una fondazione, seppur di tipo intuizionistico, alla certezza matematica.

Zermelo, allievo di Hilbert, diede una rigorosa impostazione assiomatica alla teoria degli insiemi: cercò di riformulare la teoria di Cantor in termini non contraddittori, ricorrendo ad un'efficace sistema di assiomi, poiché a suo avviso il sorgere di paradossi poteva derivare da un'insufficiente definizione del concetto di insieme. La teoria di Zermelo si basava su sette assiomi, che erano sufficienti per ottenere tutti i risultati importanti della teoria degli insiemi e non creavano nessuna delle antinomie conosciute. La sua teoria fu quindi concepita come una teoria matematica e non come una teoria logica, come invece quella di Russell. Nonostante ciò, la sua teoria si dimostrò troppo debole, non sufficiente, cioè, a garantire una completa revisione della teoria di Cantor: lasciava aperti i problemi dell'indipendenza e della coerenza degli assiomi. Queste e altre debolezze teoriche rilevate nel sistema di Zermelo furono superate, negli anni Venti, dal norvegese Albert Thoralf Skolem (1887-1963); qualche anno dopo, anche Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891-1965) riprese i risultati di Zermelo, li perfezionò e propose un sistema assiomatico, noto come teoria di Zermelo-Fraenkel.

Alla fine degli anni Venti, il dibattito era diventato leggermente più statico: il Logicismo di Russell fu, delle tre, la dottrina meno seguita; l'Intuizionismo di Brouwer attecchì solo su un gruppo ristretto di studiosi; il Formalismo di Hilbert fu di fatto considerato vincente. Perché il trionfo fosse definitivo era però necessaria la fatidica dimostrazione di coerenza e di completezza di un sistema assiomatico formale che potesse esprimere l'aritmetica. All'inizio degli anni Trenta, il giovanissimo Kurt Gödel (1906-1978) arrivò a dei risultati che misero fine alla speranza di ottenere una tale dimostrazione e, quindi, alla possibilità di avere una matematica che si autogiustificasse.

2.2 La visione fallibilista

In seguito alle dimostrazioni dei teoremi di incompletezza di Gödel, alcuni matematici cominciarono a mettere in discussione il fatto che fosse possibile arrivare a giustificare in qualche modo la certezza matematica. Imre Lakatos (1922-1974), in particolare, mostrò che la richiesta di certezza in matematica, porta inevitabilmente ad un circolo vizioso, perché non c'è alcun modo di riuscire a fare a meno di assunzioni:

> "Mathematical truth ultimately depends on an irreducible set of assumptions, which are adopted without demonstration. But to qualify as true knowledge, the assumptions require a warrant for their assertion. There is no valid warrant for mathematical knowledge other than demonstration or proof. Therefore the assumptions are beliefs, not knowledge, and remain open to challenge, and thus to doubt."[1]
> (Lakatos, 1978)

Si tratta di una visione completamente diversa rispetto a quella che aveva dominato la storia della matematica fino a quel momento, in quanto viene messo in discussione il carattere assolutista della matematica. Per alcuni matematici, l'accettazione di una visione fallibilista costituiva un passo troppo grosso da compiere: la perdita della certezza assoluta era vissuta come una cacciata dal paradiso. Essi portarono avanti una forma di ipotetico-deduttivismo, che negava la correggibilità della matematica e la possibile esistenza di errori radicati nel suo sviluppo. Tale posizione considerava gli

[1] "La verità matematica, in definitiva, dipende da un insieme irriducibile di assunzioni, che sono adottate senza dimostrazione. Ma per poterle qualificare come conoscenza vera, tali assunzioni necessitano di un garante per le loro asserzioni. Non esiste alcun garante valido per la conoscenza matematica, oltre alle dimostrazioni e alle prove. Dunque tali assunzioni sono credenze, non conoscenza, e rimangono aperte al cambiamento e di conseguenza anche al dubbio." Traduzione da Imre Lakatos, *Mathematics, Science and Epistemology*, Philosophical Papers, Volume 2, 1978.

assiomi come ipotesi dalle quali i teoremi sono logicamente dedotti e, in relazione ad essi, i teoremi risultano essere assolutamente certi. Nonostante quindi gli assiomi della matematica fossero soltanto dei tentativi, la logica e l'utilizzo della logica per derivare i teoremi dagli assiomi garantivano uno sviluppo sicuro della matematica, sebbene le basi non fossero altro che assunzioni.

> "The absolute truth point of view must be discarded. The 'facts' of any branch of pure mathematics must be recognised as being assumptions (postulates or axioms), or definitions or theorems... The most that can be claimed is that *if* the postulates are true *and* the definitions are accepted, and *if* the methods of reasoning are sound, *then* the theorems are true. In other words we arrive at a concept of *relative truth* (of theorems in relation to postulates, definitions, and logical reasoning) to replace the *absolute truth* point of view."[2] (Stabler, 1953)

Questa visione indebolita dell'assolutismo si basa su assunzioni che lasciano ugualmente aperta la strada alle critiche fallibiliste. Infatti la verità della matematica dipende non solo dagli assiomi, ma anche dalla validità della logica sottostante e la logica stessa manca di solide fondamenta. Inoltre, il fatto che la matematica sia fondamentalmente priva di errori è una presunzione assolutista (basti pensare ancora una volta ai teoremi di Gödel).

Rifiutare la visione assolutista della matematica porta dunque inevitabilmente ad accettare una visione fallibilista di tale conoscenza. Questo significa che non esiste una verità assoluta e che la conoscenza matematica è correggibile e costantemente sotto revisione. Questo rifiuto non deve essere visto come un esilio dal giardino dell'Eden, il reame della certezza e della verità, infatti la mancanza di certezza non coincide con la mancanza di conoscenza.

[2] "Il punto di vista della verità assoluta deve essere rifiutato. I 'fatti' di ogni branca della matematica pura devono essere considerati come assunzioni (postulati o assioni), o definizioni, o teoremi... Il massimo che possiamo affermare è che se i postulati sono veri e le definizioni sono accettate e se i metodi di ragionamento sono validi, allora i teoremi sono veri. In altre parole, si arriva a un concetto di verità relativa (dei teoremi in relazione ai postulati, alle definizioni e al ragionamento logico) per sostituire il punto di vista della verità assoluta." Traduzione da Edward Russel Stabler, *An Introduction to Mathematical Thought*, 1953.

Via via che la nostra conoscenza riguardo la natura della matematica diventa più profonda e che impariamo di più sulle sue basi, ci accorgiamo che l'assolutismo altro non è che un'idealizzazione, un mito, e questa consapevolezza rappresenta un avanzamento nella conoscenza, non un indietreggiamento rispetto alla certezza passata.

> "The absolutist Garden of Eden was nothing but a fool's paradise."[3] (Ernest, 2004)

2.3 La filosofia della matematica riconcettualizzata

Nel momento in cui si rifiuta la visione assolutista della matematica, si è obbligati a riconsiderare anche la natura della filosofia della matematica. Infatti, nella visione assolutista, lo scopo della filosofia della matematica è quello di giustificare la certezza delle verità matematiche. Nel momento in cui si rifiuta tale visione, accettando la fallibilità della conoscenza matematica, anche il ruolo della filosofia deve essere riconsiderato.

Priest parla della questione riguardante la filosofia della matematica come segue:

> "All the problems concerning the philosophy of mathematics can nearly be summarized by the question:
>
> Question 0. What is pure mathematics?...
>
> Firstly, what is meant by 'mathematics'? The only answer we can give without begging the question is 'That which is done and has been done for the last thousand years by mathematicians.'... Knowledge on the nature of mathematics lies in an ability to do it.
> [To answer question 0 we need to answer the following]
>
> Question 1. Why are the truths of mathematics true?
> Any reasonable answer must also permit reasonable answers to the following questions
>
> Question 1(a). Why is that such truths appear necessary and inviolable, and why are we unable to conceive of them being false?
>
> Question 1(b). How is it we come to know such truths?

[3]"Il giardino dell'Eden assolutista non era altro che un paradiso per sciocchi." Traduzione da Paul Ernest, *The Philosophy of Mathematics Education*, 2004.

> Question 1(c). Why is it that the truths of mathematics can be applied in practical matters e.g., surveying, building bridges, sending rockets to the moon, etc. In short, why are they useful?...
>
> Now the naive answer to question 1 is that mathematical truths are so because they are true of certain objects such as numbers, functions, propositions, points, groups, models etc., i.e., these are what mathematics is about.
>
> Hence we must be able to answer:
>
> Question 2. What exactly are the above objects, and in what sense do they exist?...
>
> Question 2 (cont.). And if they don't exist, why is it we have such a strong impression that they do?"[4] (Priest, 1973)

Tuttavia, le risposte a tali domande non forniscono un resoconto soddisfacente della natura della matematica, se non consideriamo anche il contesto del pensiero umano e della storia. Infatti senza tale contesto, secondo Lakatos, la filosofia della matematica perde il suo contenuto.

> "Under the present dominance of formalism (i.e., foundationism), one is tempted to paraphrase Kant: the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy has become *blind*, while the philosophy

[4] "Tutti i problemi riguardanti la filosofia della matematica possono essere riassunti dalla domanda: Domanda 0. Che cos'è la matematica pura?... Innanzi tutto, cosa significa 'matematica'? L'unica risposta che possiamo proporre senza dare qualcosa per scontato è 'Quello che fanno e hanno fatto negli ultimi mille anni i matematici.'... La conoscenza della natura della matematica risiede nell'abilità di metterla in pratica. [Per rispondere alla domanda 0 dobbiamo rispondere anche alle seguenti] Domanda 1. Perché le verità della matematica sono vere? Ogni risposta ragionevole deve fornire risposte ragionevoli anche alle seguenti domande. Domanda 1(a). Perché queste verità ci appaiono così necessaire e inviolabili e perché non siamo in grado di concepire il fatto che possano essere false? Domanda 1(b). Come facciamo ad arrivare a conoscere tali verità? Domanda 1(c). Perché le verità della matematica possono essere applicate in questioni pratiche, ad esempio l'agrimensura, la costruzione di ponti, il lancio di razzi sulla luna, eccetera. In sintesi, perché queste verità sono utili?... Una risposta naive alla domanda 1 è che le verità matematiche sono tali perché sono verità che riguardano determinati oggetti come i numeri, le funzioni, le proposizioni, i punti, i gruppi i modelli, eccetera, ossia esse sono ciò di cui tratta la matematica. Dunque dobbiamo essere in grado di rispondere alla: Domanda 2. Cosa sono esattamente questi oggetti e in quale senso essi esistono?... Domanda 2 (cont.) E se non esistono, perché siamo così convinti che lo siano?" Traduzione da Graham Priest, *A beside reader's guide to the conventionalist philosophy of mathematics*, 1973.

> of mathematics turning its back on the most intriguing phenomena in the history of mathematics, has become *empty*."[5] (Lakatos, 2015)

La filosofia della matematica, quindi, deve abbracciare molto di più rispetto alla sola giustificazione della conoscenza matematica. Essa deve prendere in considerazione la sua complessità e dare una risposta anche alle seguenti domande: qual è lo scopo della matematica? Qual è il ruolo degli esseri umani in matematica? Com'è possibile che la conoscenza soggettiva degli individui diventi la conoscenza oggettiva della matematica? Com'è evoluta la conoscenza matematica? In quale modo la sua storia può far luce sulla filosofia della matematica? Quale relazione esiste tra la matematica e le altre aree della conoscenza e dell'esperienza umana? Perché le teorie della matematica pura si sono rivelate così potenti e utili nelle loro applicazioni alla scienza e ai problemi pratici?

Possiamo dunque selezionare tre questioni di particolare importanza, sia dal punto di vista filosofico che educativo. Ognuna di queste questioni è espressa in termini di una dicotomia, che evidenzia il contrasto tra la visione assolutista e quella fallibilista.

1. Innanzi tutto bisogna considerare il contrasto tra la conoscenza vista come prodotto finito, ampiamente espressa come corpo di proposizioni, e l'attività di conoscere e di acquisire conoscenza. Questa seconda visione si preoccupa di spiegare la genesi della conoscenza e il contributo dell'uomo nel processo di creazione della stessa. La visione assolutista, invece, non solo si focalizza sulla conoscenza come un prodotto finito, ma spesso nega la legittimità filosofica di considerare la genesi della conoscenza, in quanto ritiene che sia un compito che spetta alla psicologia e alle scienze sociali. Al contrario, la visione fallibilista, accettando il ruolo degli errori in matematica, non può evitare di considerare il contesto umano che caratterizza la creazione della conoscenza e la genesi storica della matematica.

2. In secondo luogo troviamo la distinzione tra matematica come disciplina isolata e discreta e matematica come parte indissolubile della

[5] "Sotto l'attuale dominio del formalismo (ossia del fondazionalismo), si è tentati di parafrasare Kant: la storia della matematica, perdendo la guida della filosofia è diventata cieca, mentre la filosofia della matematica, voltando le spalle ai fenomeni più intriganti della storia della matematica, è diventata vuota." Traduzione da Imre Lakatos, *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, 2015.

conoscenza umana. La visione assolutista della matematica considera la matematica (assieme alla logica) come l'unico reame certo della conoscenza. Questa condizione, assieme alla negazione della rilevanza della storia e del contributo umano nel processo di creazione della conoscenza, serve per marcare la matematica come una disciplina discreta e isolata. Nella visione fallibilista, invece, dal momento che la matematica è considerata come prodotto del pensiero umano, essa non può essere categoricamente separata dalla conoscenza empirica (e quindi fallibile) delle altre scienze e nemmeno da considerazioni riguardanti la cultura umana in generale. Per questo motivo, secondo tale prospettiva, la matematica è vista come parte indissolubile di tutta la conoscenza umana.

3. La terza distinzione può essere vista come un ulteriore sviluppo della seconda: la matematica può essere considerata come una conoscenza oggettiva e priva di valori oppure come parte integrante della cultura umana e quindi pienamente impregnata di valori umani. La prospettiva assolutista rispecchia la prima di queste due visioni, mentre quella fallibilista, sottolineando la connessione tra la matematica e il resto della conoscenza umana, sostiene che la matematica giochi un ruolo fondamentale nel suo sviluppo e nelle sue applicazioni, proprio perché impregnata di valori sociali e morali.

Secondo la prospettiva fallibilista, dunque, la filosofia della matematica dovrebbe includere, oltre alle domande interne riguardanti la conoscenza, l'esistenza degli oggetti matematici e la loro giustificazioni, anche le domande esterne riguardanti le origini storiche e il contesto sociale della matematica. In sintesi, secondo Ernest (2004), una filosofia della matematica può considerarsi esaustiva se considera le seguenti tematiche:

i. la conoscenza matematica: la sua natura, giustificazione e origine;

ii. gli oggetti della matematica: la loro natura e origine;

iii. le applicazioni della matematica: la loro efficacia nelle altre discipline;

iv. la pratica matematica: le attività dei matematici, presenti e passate.

Questi criteri rappresentano sicuramente una possibile riconcettualizzazione del ruolo della filosofia della matematica, il cui scopo non è più quello di limitarsi a studiare le fondazioni logiche della conoscenza matematica.

Tuttavia, "la storia dell'umanità ci ricorda che il fare matematica non ha alcun bisogno di essere giustificato o redento o fondato o ridotto ad altro, ma solo compreso, liberato e riportato a ciò che comunque è di fatto: un aspetto essenziale della capacità umana di acquistare conoscenza della realtà."[6] (Sambin, 1991). Per questo motivo, la domanda fondamentale che esige una risposta non è tanto che cos'è la matematica o qual è la natura dei suoi enti, ma cosa significa fare matematica. Infatti è soltanto analizzando questa attività che possiamo provare a dare una risposta anche a tutte le domande sopra citate. Nel tentativo di rispondere a questa questione, Giovanni Sambin ha elaborato una nuova filosofia della matematica e della logica chiamata costruttivismo dinamico, che analizzeremo nella sezione successiva.

2.4 Il costruttivismo dinamico come filosofia della matematica

Il dibattito sui fondamenti della matematica, nonostante si sia ristretto a pochi cultori e abbia perso la capacità di modificare la sostanza, rimane una questione di fondamentale importanza secondo Sambin. Un esempio sono le richieste degli informatici per nuove strutture e strumenti alternativi, a cui i matematici devono sempre di più far fronte e che richiedono chiarezza dal punto di vista filosofico. Le sue riflessioni sui fondamenti partono da una critica nei confronti delle tre scuole di pensiero, sorte dopo la dimostrazione dei teoremi di incompletezza di Gödel.

> "Per evitare la stagnazione e l'isolamento, a mio parere prima o poi fatale per la matematica stessa, mi sembra che si debba uscire dalle tre scuole, abbandonare le ideologie che le hanno generate, tornare a porci la domanda di base: che cosa significa fare matematica? e cercare di rispondere direttamente, assumendosene la responsabilità. [...] Una debolezza comune alle diverse scuole, dovuta forse al momento storico di difesa in cui sono nate, è infatti il concepire la matematica in modo scisso, come qualcosa che si fa sì liberamente, ma la cui vera identità sta in ciò che dovrebbe essere, e che è sempre qualcos'altro:

[6] Giovanni Sambin, *Per una dinamica nei fondamenti*, 1991.

> matematica da esprimere come giustificabile gioco di formule (secondo i formalisti), da rifondare su principi logici (secondo i logicisti), da purificare da alcuni peccati (le applicazioni, il linguaggio, il dominio sulla realtà) tramite il misticismo e le libere costruzioni del soggetto (secondo gli intuizionisti)."[7] (Sambin, 1991)

Quindi, nonostante il carattere costruttivo del suo approccio non sia una novità (esso infatti era già stato essenzialmente espresso nell'Intuizionismo delle origini di Brouwer), Sambin si distacca notevolmente dalle posizioni delle tre scuole, cercando di comprendere l'uomo e i suoi prodotti, tra cui la matematica, vedendoli come risultato del cammino dell'evoluzione naturale della specie. Intendere la comprensione dell'attività del fare matematica sullo sfondo dell'Evoluzionismo e della Biologia possiede "il vantaggio di non richiedere né una spiegazione totale o definitiva o ultima, né una giustificazione che faccia uso di costrutti che, sulla scala evoluzionistica, sono prodotti successivi a ciò che si pretende fondare"[8] (Negro, 2007). Il rifiuto di una qualsiasi fondazione non va però inteso come rinuncia di un'analisi feconda e adeguata della pratica matematica, ma come rifiuto di un certo tipo di visione dei problemi e delle soluzioni. Sambin, in generale, non propone nuovi principi guida da sostituire ai vecchi, ma indica, nella maniera più generale, un'attitudine che reputa, oltre che più fedele ai fatti, anche particolarmente fruttuosa.

> "Un atteggiamento naturalistico-evolutivo è del tutto sufficiente, e anzi più conveniente [...] non solo per spiegare il corpo e la mente umani, ma anche tutti i prodotti intellettuali dell'uomo, inclusi quelli considerati più esatti, come la logica o la matematica. Queste sono frutto delle nostre menti, e *quindi* per spiegarle non abbiamo bisogno se non di quello che serve ai biologi per spiegare la mente. [...] Il principio di evoluzione, se così vogliamo chiamarlo, è solo una guida utile per trovare buone spiegazioni e nuovi risultati, un'idea a cui ispirarsi e non una assunzione da cui dedurre nuove conoscenze. Queste, quando sono convincenti, stanno in piedi da sole, senza alcun bisogno di assunzioni che le sorreggano."[9] (Sambin, 2002)

Applicare questo approccio al problema dei fondamenti della matematica permette anche di metterne in evidenza il carattere dinamico:

[7] ivi.

[8] Antonio Negro, *On the possibility of a Dynamic Concept*, 2007.

[9] Giovanni Sambin, *Steps toward a dynamic constructivism*, 2002.

> "Quando la teoria generale qui sviluppata è applicata alla questione dei fondamenti, ha come conseguenza diretta un'idea di base che si lascia esprimere in poche parole: vedere come principio unificante un processo dinamico di cui le tre filosofie tradizionali vedono un solo aspetto. Logicismo, intuizionismo, formalismo risultano sostanzialmente compatibili quando riusciamo a vederli come momenti diversi di un unico movimento, come fotogrammi diversi di un unico film. Lo scontro tra le diverse fondazioni, e nello stesso momento il loro fallimento, comincia quando ciascun punto di vista, pur statico, pretende d'essere totale, cioè appunto una fondazione. La matematica, come ogni altra forma di conoscenza umana, si costituisce in un processo sempre in moto, che non si può ricostruire dal frammento di un'unica immagine istantanea, per quanto importante e ampia."[10]
> (Sambin, 1991)

Ogni soggetto coinvolto nella pratica della matematica, non deve essere visto come un recipiente da colmare con una certa verità oggettiva, ma come artefice e co-responsabile della conoscenza matematica, che si sviluppa sotto forma di conoscenza soggettiva e che, attraverso un processo dinamico, si astrae dalle conoscenze e dagli errori degli individui per arrivare ad una verità condivisibile da tutti, ma non di certo assoluta. Per analizzare questo processo dinamico e sociale che porta alla costruzione della conoscenza è necessario esaminare il più generale processo di astrazione dal punto di vista naturalistico ed evolutivo, che caratterizza la creazione di ogni concetto matematico.

2.4.1 L'astrazione come attività biologica

"Ogni aspetto dell'uomo, incluse tutte le facoltà mentali, è parte della sua natura biologica, e quindi in linea di principio il risultato di meccanismi biochimici."[11] (Sambin, 1991). Anche la capacità di operare astrazioni è un fenomeno biologico, che nell'uomo è diventato una regola generale, un bisogno sempre in funzione, una necessità. Si tratta di un risultato manifesto di un istinto che caratterizza gli esseri umani: l'istinto di conoscere.

Così come nelle scienze naturali il vantaggio del punto di vista evoluzionistico consiste nel passaggio da una rigida classificazione in specie diverse al processo con cui le varie specie si formano, analogamente, nell'affrontare

[10] Giovanni Sambin, *Per una dinamica nei fondamenti*, 1991.
[11] ivi.

il tema dell'astrazione, secondo Sambin, conviene considerare non tanto i risultati dell'astrazione, classificati in vario modo, quanto il processo con cui nuove astrazioni vengono formate.

> "In questo modo anche le astrazioni più elevate perdono ogni aspetto magico, immanente o contingente, e vengono inserite in un quadro sì più complesso e magmatico, ma più naturale e fedele ai fatti, in cui ogni astrazione risulta semplicemente impossibile senza una gran varietà di altre astrazioni di livello inferiore, più vicine alla realtà materiale e base della nostra quotidiana interazione con l'ambiente. In altre parole, se nella realtà includiamo non solo le fonti delle sensazioni, ma anche, come sembra più corretto, i risultati che da esse derivano con l'elaborazione mentale, allora ogni astrazione, anche i concetti più generali che talvolta si considerano punto di partenza di una disciplina, appare direttamente costruita a partire dalla realtà, e quindi piuttosto punto d'arrivo d'una storia evolutiva."[12] (Sambin, 1991)

Adottando questo approccio, si ottiene il vantaggio di poter considerare sostanzialmente un unico processo di astrazione, indipendentemente dal tipo di risultato. Per mostrare come questo sia possibile, Sambin prende in considerazione ogni tipo di astrazione e cerca di individuare i meccanismi comuni che operano nel processo della loro formazioni.

> "La prima sorpresa è dover constatare quanto lavoro mentale, spesso inconsapevole e quindi fortunatamente dimenticato, sia necessario per giungere a cogliere non solo i casi più elevati e volontari, ciò che appunto comunemente chiamiamo astrazioni, ma anche oggetti, segni, forme, immagini, colori, proprietà, funzioni e tutte le innumerevoli astrazioni usate quotidianamente e poco considerate proprio perché automatiche, perfettamente adeguate allo scopo e quindi non problematiche. È ad esse invece che conviene, contrariamente al solito, rivolgere particolare attenzione, perché ci manifestano in modo più diretto e incontaminato le caratteristiche naturali del processo di astrazione.
>
> Si scopre allora che, in questo senso esteso e più corretto, il processo di astrazione è ovunque e sempre in moto: è la base essenziale sia del rapporto di un individuo con l'ambiente, in quanto consente la percezione e il riconoscimento di situazioni, sia del rapporto di individui diversi tra di loro, in quanto consente la comunicazione di conoscenze

[12] ivi.

ed esperienze. I due aspetti, individuale e sociale, sono inestricabilmente legati uno all'altro, come risulta evidente se si ripensa al modo in cui vengono imparate ed usate da un individuo anche le parole più comuni; in un primo momento, tuttavia, conviene artificiosamente limitare l'attenzione solo al primo."[13] (Sambin, 1991)

Se consideriamo un oggetto qualunque, una prima astrazione necessaria è quella che ci permette di cogliere tale oggetto come distinto da ciò che lo circonda e dotato di una sua unità. Una seconda astrazione è quella che ci permette di concepire l'oggetto come identità che permane indipendentemente dal contesto spaziale e temporale e non come una cosa concreta presente in questo determinato luogo e soltanto in questo istante. Questa seconda astrazione ci permette di ricreare nella nostra mente un'immagine dell'oggetto in questione, che possiamo richiamare all'occorrenza dello stesso oggetto in un contesto diverso.

> "L'immagine mentale di un oggetto, o brevemente l'oggetto mentale, non è il semplice riflesso passivo di una realtà esterna, come è una fotografia, ma il risultato dell'attività mentale necessaria per dargli identità ed esistenza soggettiva, cioè sia per dare unità in sé a ciò che altrimenti è solo un insieme di sensazioni (indotte dall'esterno) sia per riconoscere e legare tra loro situazioni esterne come occorrenze dello stesso oggetto in contesti diversi. [...] È il legame tra la realtà esterna e tale oggetto interiorizzato, astratto delle (ed estratto dalle) diverse esperienze delle sensazioni da essa indotte, ciò che produce quello che usualmente chiamiamo un oggetto, e che opportunamente trattiamo come esistente in sé e puramente esterno, lasciando inavvertito tutto il lavoro mentale fisiologico, tanto da con-fondere l'immagine con ciò che la produce, proprio per non appesantire la percezione della realtà, cioè per motivi di economia."[14] (Sambin, 1991)

L'obiettivo di queste osservazioni di Sambin è quello di mettere alla luce quanto lavoro mentale sia implicito nei processi di astrazione che compiamo quotidianamente: basti pensare, come mostrato, alla sola capacità di cogliere un oggetto sensibile. Se si analizza meglio questo processo, ci si rende conto che in ogni momento l'astrazione di un oggetto "è il risultato temporaneo di un processo dinamico sempre in moto, in bilico tra aspettativa e verifica, alla

[13] ivi.
[14] ivi.

ricerca di connessioni più stabili e profonde, e quindi più utili, ottenute sottraendo le caratteristiche meno frequenti, ma soprattutto meno determinanti nel rapporto con la realtà"[15] (Sambin, 1991).

Tale processo caratterizza non solo la formazione di concetti riguardanti oggetti o classi di oggetti, ma anche quella di concetti astratti di tipo diverso come forme e figure, o più elevati (ossia ottenuti con connessioni tra altre connessioni), come proprietà e funzioni. In generale, "un'astrazione è una connessione che rende alcuni oggetti o concetti come uguali o equivalenti in quanto intersostituibili rispetto ad un certo modo prescelto di metterci in relazione ad essi, e che nello stesso tempo dal rapporto con essi è modificata"[16] (Sambin, 1991).

Per quanto riguarda l'aspetto sociale del processo di astrazione, non possiamo dimenticare che l'uomo è un animale che vive in società e che ha un istinto naturale che lo spinge a comunicare con i suoi simili. Se non prendessimo in considerazione la comunicazione tra individui, saremmo costretti a concludere che ogni uomo ha un'idea assolutamente soggettiva delle parole e dei concetti, che potrebbe essere anche incompatibile con l'idea di un un altro individuo. Tuttavia la comunicazione ci permette di trovare un accordo tra le astrazioni soggettive di ogni individuo. Per quanto riguarda gli oggetti materiali, l'accordo tra soggetti viene raggiunto grazie alla sostanziale uguaglianza degli organi di percezione di ogni individuo, mentre per quanto riguarda i concetti astratti l'accordo non è altrettanto semplice. Per raggiungere tale accordo, è necessario il dialogo, "un complesso processo dialettico di mutuo adattamento e scambio, che consiste nel sottrarre aspetti particolari (le mie idee) per poter trovare una connessione (con le tue), ovvero, esattamente ciò che abbiamo chiamato processo di astrazione, purché tra i dati a disposizione si includano, come giusto e usuale, anche quelli che ci giungono indirettamente dalla realtà attraverso l'elaborazione di altre menti"[17] (Sambin, 1991). Affinché tale accordo sia reale conoscenza, però, Sambin specifica che "questo processo di fusione non può avere un unico verso, non può essere costituito dal solo consenso, in cui il soggetto si perde nell'accettazione passiva e nel sacrificio delle proprie vedute, ma richiede che ogni individuo responsabile lo tenga in vita attivamente partecipando alla costruzione del-

[15] ivi.
[16] ivi.
[17] ivi.

la conoscenza comune (e del comune buon senso), cioè svolgendo il proprio ruolo di tramite tra realtà e astrazioni collettive"[18] (Sambin, 1991).

Queste considerazioni portano con sé molte conseguenze dal punto di vista pedagogico: nel processo di apprendimento, infatti, "da una parte, ogni individuo deve adeguarsi al concetto universale e recepirlo passivamente come una realtà oggettiva, ma dall'altra deve farlo proprio e ricrearlo dentro di sé, interiorizzando le esperienze e ricapitolando il processo che lo ha prodotto, per poterlo usare nel vedere la realtà con i propri occhi; il vero apprendimento quindi è un passaggio di istruzioni per un itinerario che deve comunque essere percorso camminando da sé, e non solo studiato sulla mappa"[19] (Sambin, 1991).

In questo modo, i concetti sociali e universali sono ottenuti da quelli individuali, astraendo dalle associazioni puramente soggettive. Per quanto però si cerchi di sottrarre soggettività ad un concetto, non è possibile giungere ad un concetto puramente oggettivo, a meno che non si intenda l'oggettività come la stabilizzazione del processo dinamico che ci porta alla creazione e alla condivisione di tale concetto. Se pensiamo infatti alla stabilità e all'affidabilità dei concetti matematici, è difficile rinunciare a un qualche senso di oggettività. Ma dal momento che la genesi degli enti matematici può essere spiegata attraverso gli stessi processi dinamici di formazione delle astrazioni in generale, per poter spiegare il motivo per cui essi ci appaiono così stabili e concreti è sufficiente considerare la stabilità rispetto a tutta l'attività mentale con cui essi sono in relazione. Tale stabilità, tuttavia, di certo non costituisce il termine dei processi dinamici che hanno portato alla definizione condivisa di quel determinato ente.

2.4.2 Le astrazioni matematiche

Cerchiamo ora di esaminare più da vicino come si possa da un punto di vista analitico caratterizzare l'astrazione in matematica, rispetto all'astrazione in generale. Abbiamo osservato, nella sezione precedente, che l'oggettività caratterizzante i concetti matematici può essere spiegata come la stabilizzazione del processo dinamico che porta alla creazione di tali concetti. Il carattere di assolutezza e necessità che siamo abituati ad attribuire agli enti matematici deriva dal fatto che generalmente ci focalizziamo su uno solo degli aspetti del

[18] ivi.
[19] ivi.

processo dinamico che porta alla creazione di tali enti oppure soltanto sul suo risultato finale. Le scuole di pensiero che si sono sviluppate durante il XX secolo, infatti, hanno colto diversi aspetti del processo dinamico di formazione, ignorando però i punti di vista delle altre. Questi atteggiamenti sono tutti necessari per riuscire a creare oggetti stabili, ma, come già sottolineato, secondo Sambin, è necessario che essi siano visti come parti essenziali di un unico processo.

Per riuscire ad analizzare l'intero processo di genesi degli oggetti matematici, è necessario soffermarsi dove è possibile scorgere il movimento dell'evoluzione, ossia sulla storia della matematica, sull'apprendimento dei bambini o sulla fase creativa dei matematici di professione. Se consideriamo ad esempio i numeri naturali, essi non sono comparsi nella storia come li conosciamo oggi e non compaiono improvvisamente nella mente di un bambino nel modo in cui li conosce un adulto. Si tratta di un concetto che viene formato molto lentamente attraverso successive astrazioni, simili a quelle analizzate nella sezione precedente. Tali astrazioni possono essere prese ad esempio per cercare di comprendere la genesi di tutti gli altri concetti matematici, anche se la complessità dei processi sottostanti non ci permette di identificare dei criteri rigidi e formulabili a priori che possano descrivere le caratteristiche di ogni processo coinvolto nella pratica matematica. Eppure è solo grazie alla quantità di lavoro mentale necessaria e alla complessità dei processi di astrazione dalla realtà e di idealizzazione, che riusciamo "a concepire i numeri naturali in modo talmente semplice, invariante e adeguato alla realtà da poterli considerare mentalmente come oggetti esistenti ad ogni effetto pratico"[20] (Sambin, 1991). I numeri naturali, quindi, come tutte le astrazioni, provengono dalla realtà attraverso la semplificazione di una idealizzazione senza riscontro reale, ed è proprio questa idealizzazione a renderli concetti stabili, invarianti e incredibilmente efficaci. Non possiamo infatti dimenticare il fatto che l'affidabilità della matematica risulta essere necessaria in tutte le sue applicazioni nella vita quotidiana, alle quali sarebbe difficile pensare di rinunciare.

> "Ma se si può dire che il compito più tipico e creativo della matematica è la produzione di strumenti così assoluti e stabili da poter essere adoperati con certezza e senza sorprese, si deve subito aggiungere che il mezzo più efficace per raggiungere questo scopo non è bloccare fittiziamente il processo dinamico di astrazione, ma piuttosto lasciarlo

[20]ivi.

> fluire fino a che si chiuda in se stesso e si stabilizzi in un movimento circolare. Per quanto possa apparire paradossale, infatti, solo il lavoro di confronto e adattamento reciproco tra realtà ed astrazione, tra contenuti interni ed espressione esterna, tra intuizione e verifica, tra soggettivo ed oggettivo, permette di mantenere sotto controllo l'idealizzazione, di raggiungere ragionevolmente l'aspettativa che il processo si ripeterà sempre uguale e con ciò la possibilità di interiorizzarlo e infine dimenticarlo."[21] (Sambin, 1991)

Infatti, una volta che siamo giunti alla creazione di un concetto matematico grazie a una serie di astrazioni e idealizzazioni successive, si riesce a raggiungere la stabilizzazione del processo di creazione di tale concetto solo attraverso un continuo passaggio da intuizione a verifica, e viceversa, e di conseguenza esso risulta utilizzabile senza incongruenze o risultati inaspettati.

> "Tuttavia non basta che un concetto sia definito precisamente; per renderlo matematico, è necessario che con esso e su di esso si possa operare con la certezza delle dimostrazioni. Le dimostrazioni sono quei procedimenti del pensiero che senza l'apporto di nuove informazioni consentono di acquisire nuove certezze: ciò che usualmente, in senso lato, si chiama logica. [...] L'ovvia etimologia di dimostrazione (de-monstrare è un intensivo di mostrare) ci aiuta a vedere quanto il lavoro mentale di idealizzare e oggettificare, pur presente nel processo di astrazione in generale, sia necessario in matematica e applicato in modo massiccio virtualmente ad ogni concetto, anche se non perfettamente determinato."[22] (Sambin, 1991)

Infatti, le intuizioni soggettive hanno bisogno di essere comunicate attraverso il linguaggio matematico delle dimostrazioni per poter essere pienamente comprese: non si può infatti mostrare ciò che resta solo interno ed è quindi sempre necessario far corrispondere al processo interno dell'intuizione, un percorso esterno che abbia la stessa conclusione, ma che sia costituito in ogni passo dall'applicazione di una regola. Il continuo passaggio tra interno ed esterno, tra intuizione ed oggetti, tra asserzioni linguistiche e formule è la base su cui la logica matematica poggia la sua esistenza. In questo senso,

[21] ivi.
[22] ivi.

dunque, rivediamo ancora una volta come le visioni delle tre scuole costituiscano vari aspetti dell'unico processo dinamico che sta alla base della pratica matematica.

2.5 La responsabilità in matematica

Le considerazioni fatte fino a questo momento, ci portano a una conclusione fondamentale: "è l'umanità stessa che produce, in un processo dinamico, tutte le astrazioni che usa per conoscere la realtà. In particolare, siamo noi stessi che creiamo anche le astrazioni e gli strumenti della matematica, che poi consideriamo così certi e affidabili; in questo senso, il vero fondamento, la fonte ultima della certezza sta in noi stessi"[23] (Sambin, 1991).

Questo punto di vista fornisce la base per un atteggiamento globalmente nuovo nei confronti della matematica: se infatti la perdita della certezza assoluta non viene vissuta come un dramma, ma come una liberazione da restrizioni ideologiche, ci possiamo rendere conto che la matematica è un frutto di scelte e non di necessità esterne, il che implica necessariamente l'assunzione di responsabilità. La proposta positiva di Sambin è dunque quella di acquisire maggior conoscenza e sensibilità per i problemi di ecologia epistemologica, sospendendo in primo luogo la delega incondizionata alla logica classica e ai principi di base dell'usuale teoria degli insiemi e dedicando "maggiori risorse allo studio di quali siano le idealizzazioni e i principi implicitamente assunti e quali tra essi siano davvero necessari per gli scopi perseguiti, in modo da poter valutare in ogni momento fino a che punto i risultati specifici siano adeguati e in armonia con la realtà e l'intuizione e quanto invece siano una forzatura artificiale e inutile"[24] (Sambin, 1991). L'essere responsabili della scelta dei risultati matematici che vogliamo mantenere in vita, ci costringe ad essere il più possibile consapevoli di cosa stiamo facendo, cercando di tenere collegate tra loro intuizione e dimostrazione formale e facendo emergere il contenuto costruttivo e intuitivo delle astrazioni di volta in volta coinvolte.

La richiesta di consapevolezza dovrebbe essere auspicabile non solo nel modo di concepire la matematica, ma anche nel modo di produrla, di insegnarla e nei suoi rapporti con le altre discipline. Questa nuova visione della matematica, infatti, porta con sé numerose conseguenze sotto molti punti di

[23] ivi.
[24] ivi.

vista, primo tra tutti l'insegnamento della matematica, che non può essere considerato come una semplice trasmissione di nozioni e regole da applicare. L'aver mostrato il carattere umano della matematica, infatti, rende possibile la partecipazione di tutti i soggetti coinvolti nel processo di apprendimento, facendo sì che ognuno si assuma le responsabilità che gli spettano. Nei capitoli successivi, quindi, analizzeremo la pratica dell'insegnamento della matematica, alla luce di questa nuova visione del costruttivismo dinamico.

Capitolo 3

La filosofia dell'educazione matematica

Diverse filosofie della matematica hanno risultati estremamente differenti per quanto riguarda la pratica educativa. Tuttavia la connessione tra visioni della matematica e metodologie d'insegnamento non è lineare e quindi un'indagine sulle filosofie che sostengono l'insegnamento della matematica e i vari curricola ad essa relativi ci impone di considerare anche i valori, le ideologie e i gruppi sociali che aderiscono ad esse (Ernest, 2004).

Dal momento che il concetto di "ideologia" sarà centrale per le trattazioni che faremo successivamente, è opportuno chiarirne il significato. Un'ideologia è costituita dal complesso delle idee e delle mentalità proprie di una società o di un gruppo sociale in un determinato periodo storico; si tratta di una filosofia o di una visione del mondo in generale ricca di valori, di un ampio sistema di idee e credenze interconnesse, che relaziona posizioni sia epistemologiche che morali. Le ideologie non devono essere viste come sostitute dei contenuti della scienza e della matematica, ma come sostenitrici di questi campi della conoscenza, in quanto sono in grado di permeare il pensiero dei gruppi associati ad esse. Meighan (1997) sostiene che un'ideologia è vista come "il modo in cui le cose stanno nella realtà"[1] secondo le persone che vi aderiscono, dal momento che spesso si tratta di un substrato invisibile che alimenta le relazioni di potere e di dominio all'interno della società.

Lo scopo di questo capitolo è quello di creare un collegamento tra le filosofie della matematica, sia pubbliche che personali, e l'educazione. Infatti,

[1] Traduzione da Roland Meighan, *A Sociology of Educating*, 1997.

oltre alle filosofie pubblicamente espresse, ci interessano anche i taciti sistemi di convinzioni di individui o gruppi di persone. Queste credenze non sono spesso separabili dai loro contesti di esistenza come accade per le filosofie pubbliche, dal momento che fanno parte di un'unica connessione ideologica. Le ideologie personali comprendono molte componenti interconnesse, che includono epistemologie personali, insiemi di valori e altre teorie personali, e proprio per questo è necessario riuscire a metterle in collegamento con le filosofie pubbliche per riuscire ad analizzare la pratica dell'insegnamento della matematica. Questa relazione è stata analizzata anche da Ernest (2004) e nel corso del capitolo ne riporteremo gli elementi fondamentali.

Come base per distinguere vari tipi di ideologie, in analogia a quanto proposto da Ernest (2004), sarà adottata la teoria di William G. Perry (1913-1998). Si tratta di una teoria psicologica che riguarda lo sviluppo delle posizioni epistemologiche ed etiche degli individui. È una teoria strutturale, che fornisce uno schema dentro il quale possono essere analizzate diverse filosofie e insiemi di valori.

3.1 La teoria di Perry

La teoria di Perry identifica una sequenza di fasi di sviluppo, di cui, per semplicità, ne prenderemo in considerazione soltanto tre. Il passaggio da una fase a quella successiva è un processo non lineare, che prevede anche la stabilizzazione di un soggetto ad un determinato livello o il suo indietreggiamento. Le fasi che prendiamo in considerazione, seguendo la proposta di Ernest (2004), sono il dualismo, la molteplicità e il relativismo. Alla base di questo schema c'è l'assunzione che lo sviluppo etico ed intellettuale parta da un insieme indiscusso di credenze, progredisca attraverso una serie di livelli di distacco critico e infine si reinserisca in un insieme di principi etici ed intellettuali. I tre stadi che abbiamo citato consentono di distinguere tre ideologie strutturalmente differenti.

1. *Dualismo*: il semplice dualismo è una strutturazione biforcata del mondo tra bene e male, giusto e sbagliato, noi e gli altri. Le visioni dualistiche sono caratterizzate da semplici dicotomie e da una forte dipendenza dagli assoluti e dall'autorità come fonti di verità, valori e controllo. Dal punto di vista epistemologico, il dualismo implica una visione assolutista della conoscenza, divisa tra verità e falsità e dipendente da un'autorità nel suo arbitrio. La conoscenza non è giustificata razionalmente,

ma solo in riferimento all'autorità. Dal punto di vista etico, ogni azione è semplicemente giusta o sbagliata.

2. *Molteplicità*: questa visione riconosce una pluralità di risposte, approcci e prospettive, sia epistemologicamente che eticamente, ma non fornisce una base per poter fare una scelta razionale tra le alternative.

3. *Relativismo*: epistemologicamente, il relativismo richiede che la conoscenza, le risposte e le scelte siano viste come dipendenti dalle caratteristiche del contesto e che siano valutate o giustificate all'interno di sistemi controllati di principi o di regole. Eticamente le azioni vengono giudicate come desiderabili o non desiderabili a seconda del contesto e di un sistema appropriato di valori e principi.

Un gran numero di ricercatori educativi considera lo schema di Perry come un'utile cornice per descrivere lo sviluppo intellettuale ed etico delle credenze personali. La sua teoria, infatti, viene spesso utilizzata per descrivere le filosofie personali, in particolare in matematica.

Possiamo dunque relazionare la teoria di Perry a diverse posizioni nella filosofia della matematica, in particolare a filosofie pubbliche, ossia esplicitamente espresse ed esposte al dibattito pubblico. Quello che più ci interessa dal punto di vista pedagogico, però, come abbiamo già sottolineato, sono le filosofie personali della matematica, ossia quelle teorie private ed implicite che caratterizzano il pensiero di un singolo individuo. La teoria di Perry può essere applicata anche a tali filosofie personali e in questo modo possiamo distinguere varie visioni della matematica ad ognuno dei tre livelli.

Visioni dualistiche considerano la matematica come interessata ai fatti, alle regole, alle procedure corrette e alle semplici verità determinate da un'autorità assoluta. La matematica è vista come un corpo di conoscenza statico ed esatto, con un'unica struttura. Fare matematica vuol dire solamente seguire delle regole.

Nella visione molteplicista della matematica sono prese in considerazione più risposte e più strade possibili per arrivare ad una soluzione, ma sono considerate tutte ugualmente valide, o una questione di preferenza personale. Non siamo a conoscenza di tutte le verità matematiche, dei modi per raggiungerle o delle loro applicazioni, quindi viene lasciato spazio alla creatività. Tuttavia mancano dei criteri per poter scegliere in modo consapevole all'interno di tale molteplicità.

Nella visione relativistica sono prese in considerazione diverse risposte e diversi approcci alla risoluzione dei problemi matematici, ma la loro valutazione dipende dal sistema matematico in considerazione e dal contesto generale. In questo modo la conoscenza matematica dipende dal sistema adottato, specialmente dalla logica interna della matematica, che fornisce principi e criteri per la valutazione.

La teoria di Perry, oltre ad analizzare varie visioni espistemologiche, come citato precedentemente, descrive anche le posizioni etiche individuali relative ad ognuno dei tre stadi.

Il dualismo corrisponde ad una posizione etica estrema, in quanto relaziona questioni morali ad un'autorità assoluta senza una giustificazione razionale e nega la legittimità di valori o prospettive alternative.

Una posizione etica molteplicista, invece, riconosce che possano esistere diverse posizioni morali riguardo a una qualsiasi questione, ma non fornisce dei principi razionali per poter scegliere o giustificare una posizione piuttosto che un'altra.

Così come il maggior numero di filosofie personali è compatibile con il relativismo, allo stesso modo ci sono diverse prospettive etiche in accordo con esso. Il relativismo, infatti, richiede semplicemente un insieme consistente di valori assieme ad un metodo di riconoscimento della legittimità delle alternative.

Seguendo quanto proposto da Ernest (2004), possiamo combinare il contesto epistemologico della teoria di Perry, le filosofie personali della matematica e gli insiemi di valori morali per fornire un modello di ideologie differenti. Ernest seleziona cinque ideologie differenti per i seguenti motivi:

i. a livello dualistico è possibile considerare soltanto una visione assolutista della matematica, così come possiamo prendere in considerazione soltanto semplici valori morali dualistici;

ii. anche a livello molteplicista è opportuno considerare solamente una visione assolutista della matematica, così come gli unici valori morali che si adattano a tale posizione sono quelli di utilità ed opportunità;

iii. a livello relativistico, invece, possiamo adottare in maniera consistente sia visioni assolutiste che fallibiliste della matematica e possiamo in modo consistente associare alla visione relativistica assolutista sia posizioni morali separate che connesse[2]. A seconda dell'insieme dei valori scelto, è possibile distinguere immediatamente due posizioni ideologiche. Inoltre, il fallibilismo può essere combinato con il relativismo, considerando come valori principali quelli della giustizia sociale.

Nonostante rimangano aperte le possibilità per ulteriori prospettive, abbiamo quindi identificato cinque ideologie possibili:

i. il dualismo assolutista;

ii. la molteplicità assolutista;

iii. il relativismo assolutista separato (si focalizza sull'oggettività e sulle regole);

iv. il relativismo assolutista connesso (si focalizza sul soggetto conoscente);

v. il relativismo fallibilista.

Sebbene la teoria di Perry sia preferibile rispetto ad altre teorie sullo sviluppo etico ed intellettuale degli individui, sono necessarie due precisazioni. Innanzitutto l'adozione della teoria di Perry altro non è che un'assunzione lavorativa: viene adottata nello spirito di una visione ipotetico-deduttiva della conoscenza, in quanto fornisce un modo semplice e fruttuoso di relazionare diverse filosofie della matematica con altrettanti sistemi di convinzioni soggettive.

In secondo luogo, a causa della sua semplicità, è probabile che questa teoria venga falsificata dal momento che sostiene che lo sviluppo etico ed intellettuale di ogni individuo possa essere posizionato su una semplice scala lineare, mentre in realtà potrebbe essere che diversi sottoinsiemi di credenze potrebbero essere posizionati a livelli diversi su tale scala. Tuttavia, con le dovute considerazioni, questa teoria costituisce una buona base di partenza per analizzare diverse ideologie sottostanti l'educazione matematica.

[2]Si tratta di una distinzione proposta da Gilligan. La prospettiva separata si folcalizza sulle regole e sui principi e oggettivizza le aree di interesse e gli oggetti della conoscenza. In questa prospettiva il ragionamento morale spesso è basato su una giustizia cieca, che applica in modo imparziale le proprie regole senza preoccuparsi delle questioni umane. Al contrario, la prospettiva morale connessa si focalizza sulle connessioni umane, prendendo in considerazione le relazioni, l'empatia e la premura nei confronti degli altri.

3.2 Gli scopi dell'educazione matematica

Una caratteristica fondamentale dell'educazione è il fatto che si tratta di un'attività intenzionale. Le intenzioni che sostengono questa attività, espressi in termini dei loro propositi e risultati attesi, costituiscono gli scopi dell'educazione in generale.

A partire da Taba (1962), comunemente viene fatta una distinzione tra obiettivi educativi a breve termine e "scopi generali", ossia gli obiettivi meno specifici e a lungo termine. Alcuni studiosi, come ad esempio Hirst (2010), considerano tale distinzione inutile e preferiscono utilizzare soltanto il termine obiettivi. Tuttavia, una specificazione riguardante gli scopi dell'educazione può essere utile anche per un altro motivo, ossia per poter criticare e giustificare la pratica educativa, sia teorica che pratica, prendendo in considerazione, oltre agli altri fattori, anche il contesto sociale e politico. Al contrario, un approccio limitato ai soli obiettivi, focalizzandosi soltanto su particolari risultati nell'apprendimento degli alunni, accetta gran parte del contesto e dello *status quo* dell'educazione senza metterlo in discussione e senza considerarne le possibili influenze. Secondo questa prospettiva, i contesti sociali e politici dell'educazione e le rispettive visioni della natura della conoscenza sono viste come basi prefissate su cui vengono costruiti i curricola scolastici. Nel seguito della nostra analisi, manterremo la distinzione tra obiettivi e scopi, ma ci concentreremo prevalentemente sui secondi. Come abbiamo visto, questo ci permetterà di evitare di presupporre che la natura delle assunzioni su cui si basa l'educazione sia priva di problemi e potremo quindi considerare anche il contesto e le influenze sociali.

Come abbiamo già sottolineato, l'educazione è un'attività intenzionale e le affermazioni sottostanti queste intenzioni sono ciò che costituisce gli scopi dell'educazione. Si tratta però di intenzioni che non esistono in astratto, ma che devono sempre essere collegate a degli individui. Gli scopi dell'educazione, infatti, rappresentano sempre le intenzioni di un determinato gruppo di persone: diversi gruppi sociali hanno diversi scopi educativi, che si relazionano alle proprie ideologie e ai propri interessi. Se trattassimo gli scopi dell'insegnamento senza relazionarli a dei soggetti, commetteremmo l'errore di pensare che ci sia un accordo universale per quanto riguarda tali scopi e che tutti i gruppi sociali condividano gli stessi obiettivi pedagogici. Dobbiamo dunque prendere in considerazione il contesto sociale come fattore che influenza gli scopi dell'educazione in generale e tale contesto va considerato anche in quanto fornitore dei mezzi utili che permettono di raggiungere gli scopi prefissati. Non è possibile infatti separare i mezzi e i fini dell'educazione.

> "The major point brought out by the notion of means as constitutive of ends is, however, that value questions are not themselves just questions of ends... Means may be constitutive of ends in such [teaching] activities, in that certain values are embedded in the activity, its content, and procedures: these may be attitudes which are part of what is learnt (and what is being taught) as well as part of the method of teaching."[3] (Sockett, 1975)

Gli scopi esprimono le filosofie dell'educazione di individui o di gruppi sociali e, dal momento che l'educazione è un complesso processo sociale, i mezzi che vengono utilizzati per raggiungere tali scopi devono essere presi in considerazione. Infatti i valori incorporati negli scopi educativi dovrebbero determinare, o almeno vincolare, i mezzi necessari per raggiungerli.

Per quanto riguarda gli scopi dell'educazione matematica, essi costituiscono le intenzioni che stanno alla base dell'insegnamento di tale disciplina e devono essere coerenti con gli scopi generali dell'educazione. Come sottolineato anche per gli scopi generali, gli scopi riguardanti l'insegnamento della matematica necessitano di essere relazionati ad un contesto educativo e sociale e, in particolare, ad un determinato gruppo di persone. Infatti, come sottolinea Morris (1981), "ogni sottogruppo della società ha una responsabilità di partecipazione nell'identificare gli obiettivi... [inclusi] gli insegnanti, i genitori, gli studenti, i matematici, i datori di lavoro, le organizzazioni di dipendenti, gli educatori e le autorità politiche"[4]. Ognuno di questi gruppi di persone potrebbe avere intenzioni differenti e di conseguenza obiettivi anche contrastanti rispetto agli altri individui. Tuttavia, dal momento in cui ci rendiamo conto che risulta necessario relazionare gli scopi dell'educazione matematica a determinati gruppi sociali coinvolti, possiamo riprendere in

[3] "Il punto principale sollevato dalla nozione dei mezzi come costitutivi degli obiettivi è, tuttavia, il fatto che le questioni riguardanti i valori non sono soltanto questioni riguardanti i fini. I mezzi possono essere costitutivi dei fini in tale attività [di insegnamento], in quanto alcuni valori sono incorporati in essa, nei suoi contenuti e nelle sue procedure: possono essere atteggiamenti che fanno parte di ciò che viene appreso (e di ciò che viene insegnato), nonché parte del metodo di insegnamento in generale." Traduzione da Hugh Sockett, *Curriculum Planning: Taking a Means to an End*, 1975.

[4] Traduzione da Robert Morris, *Studies in Mathematics Education*, Volume 2, 1981.

considerazione le cinque ideologie proposte da Ernest (2004) e relazionarle a cinque gruppi storici di interesse sociale, permettendoci così di specificare i loro scopi educativi, sia in generale, che per quanto riguarda la matematica.

Per selezionare i cinque gruppi storici di interesse da associare alle ideologie proposte, Ernest è partito dall'analisi di Williams (1965), il quale ha proposto una distinzione in tre gruppi sociali: gli *industrial trainer*, gli *old humanist* e i *public educator*, le cui ideologie hanno influenzato l'educazione sia nel passato che nel presente. Williams sottolinea la potente influenza che questi gruppi hanno avuto sulla fondazione dell'educazione inglese durante il diciannovesimo secolo ed enfatizza il loro continuo impatto sull'educazione, nonostante, con il tempo, ognuno di questi gruppi sia cambiato in qualche aspetto.

Gli *industrial trainer* rappresentano le classi mercantili e i direttori d'azienda e valorizzano l'aspetto utilitaristico dell'educazione. Gli scopi degli *industrial trainer* sono pertanto utilitaristici e orientati verso la formazione di appropriate forze di lavoro.

Gli *old humanist* rappresentano le classi sociali istruite e colte, come l'aristocrazia e la piccola nobiltà. Valorizzano gli studi classici umanistici e hanno come scopo educativo la trasmissione dell'eredità culturale, costituita da conoscenze pure presentate in vario modo, ma sempre attraverso forme tradizionali.

I *public educator* rappresentano una tradizione riformista radicale, concentrata sulla democrazia e sull'equità sociale. Il loro scopo è "educazione per tutti", al fine di autorizzare le classi lavorative a partecipare alle istituzioni democratiche della società e di condividere più pienamente la prosperità della società industriale moderna.

Sebbene l'analisi di Williams (1965) sia una delle descrizioni più efficaci dei gruppi di interesse che influenzano l'educazione britannica, può comunque essere sottoposta ad alcune critiche. Nella realtà, come Williams stesso ammette, gli scopi educativi tendono ad essere mescolati tra di loro, piuttosto che ad essere puri ed isolati, come descritto in precedenza. Si tratta certamente di una semplificazione necessaria per descrivere una situazione molto più complessa. Oltre a questo, esistono altri gruppi di interesse per la società moderna che non sono stati presi in considerazione. Alcune modifiche interessanti rispetto all'analisi di Williams sono suggerite da Meighan (1997):

"Educational ideologies fall into four categories: conservative, revisionist, romantic and democratic. The first, obviously, is concerned to maintain something like the status quo though conservative positions range from crude dogmatism (which characterizes many of the essays in the Black Paper) to carefully formulated versions of elite culture (T. S. Eliot, F. R. Leavis and G. H. Bantock). The revisionist arguments are couched in economic language or in a pseudo-sociological concern with the 'wastage' created by the educational system. Its emphasis is on improving the system's efficiency in terms of the job requirements of the market. Not surprisingly, successive governments — Labour and Tory — have found this the most attractive stance to adopt, and most of the official reports have incorporated its logic. The romantic attitude (which might also be called the psychological) owes much to a concern with individual development and derives from the work of Froebel, Montessori, Freud, Pestalozzi and Piaget. It was central to the establishment of the private 'progressive' schools and has had considerable influence on some forms of curriculum revision and on the primary schools. Its official monument is the Plowden Report. Finally, the democratic socialist tradition, stemming from socialist and liberal thinkers of the nineteenth century, seeks equal opportunity for all (recognizing the difficulties presented by class and patterns of socialization), and the progressive elimination of the élitist values inherent in established education. In its most recent articulate form (Williams, 1961), the democratic socialist approach called for a 'public education designed to express the values of an educated democracy and a common culture'."[5] (Meighan, 1997)

[5] "Le ideologie educative si dividono in quattro categorie: conservatrice, revisionista, romantica e democratica. La prima, ovviamente, è interessata a mantenere qualcosa di simile allo *status quo* anche se le posizioni conservatrici vanno dal dogmatismo rozzo (che caratterizza molti dei saggi del *Black Paper*) alle versioni più accuratamente formulate della cultura d'élite (T.S. Eliot, F. R. Leavis e G. H. Bantock). Gli argomenti revisionisti sono espressi in un linguaggio economico o secondo la preoccupazione pseudo-sociologica nei confronti dello "spreco" creato dal sistema educativo. L'accento è posto sul miglioramento dell'efficienza del sistema in termini di requisiti di lavoro del mercato. Non sorprende che i successivi governi - *Labour* e *Tory* - abbiano trovato questa la posizione più conveniente da adottare, e che la maggior parte delle relazioni ufficiali abbiano incorporato la sua logica. L'atteggiamento romantico (che potrebbe anche essere chiamato atteggiamento psicologico) deve molto alla preoccupazione per lo sviluppo individuale e deriva dal lavoro di Froebel, Montessori, Freud, Pestalozzi e Piaget. È stato centrale per l'istituzione delle scuole private 'progressiste' e ha avuto una notevole influenza su alcune forme di revisione dei curricola e sulle scuole primarie. Il suo monumento ufficiale è il rapporto di Plowden.

In questo modo, oltre alle categorie proposte da Williams, possiamo considerare anche quella dei *progressive educator*, che rappresentano l'atteggiamento romantico o psicologico proposto da Meighan. Questa analisi, tuttavia, si discosta leggermente da quella di Williams, in quanto gli *industrial trainer* sono divisi in un gruppo revisionista e uno conservativo, che comprende anche gli *old humanist*. Ciò che ci viene suggerito da Ernest (2004), in ultima analisi, è una distinzione in due gruppi per quanto riguarda i discendenti degli *industrial trainer* vittoriani, dal momento che, sebbene continuino a valorizzare una formazione utilitaristica al lavoro, non condividono più la stessa visione di ciò che questo significa. Alcuni di loro infatti valorizzano ancora una formazione di basso livello assieme a una visione morale riformista, come quella degli *industrial trainer* originali. Altri, invece, favoriscono forme più ampie di educazione e competenza, abbandonando lo zelo morale riformista. Il primo gruppo politicamente è identificato con la Nuova Destra e ha tra i suoi obiettivi l'istruzione all'obbedienza; il secondo rappresenta gli interessi delle aziende, del commercio e dei datori di lavoro del settore pubblico. Tra i suoi obiettivi, quindi, troviamo lo sviluppo di una più vasta gamma di conoscenze, abilità e qualità personali. Identificheremo questo gruppo come quello dei *technological pragmatist*.

In conclusione, possiamo associare ad ognuna delle cinque ideologie proposte uno dei cinque gruppi sociali sopra identificati.

Gruppi sociali	Ideologie
Industrial trainer	Dualismo assolutista
Technological pragmatist	Molteplicità assolutista
Old humanist	Relativismo assolutista (separato)
Progressive educator	Relativismo assolutista (connesso)
Public educator	Relativismo fallibilista

Infine, la tradizione socialista democratica, scaturita dai pensatori socialisti e liberali del diciannovesimo secolo, cerca pari opportunità per tutti (riconoscendo le difficoltà presentate dalla classe e dai modelli di socializzazione) e la progressiva eliminazione dei valori elitari insiti nell'istruzione tradizionale. Nella sua forma più recente e articolata (Williams, 1961), l'approccio socialista democratico richiedeva 'un'educazione pubblica concepita per esprimere i valori di una democrazia istruita e di una cultura condivisa'." Traduzione da Roland Meighan, *A Sociology of Educating*, 1997.

3.3 Un modello di ideologia educativa per la matematica

Nelle sezioni precedenti, ripercorrendo il lavoro di Ernest (2004), abbiamo identificato una serie di ideologie riguardanti l'educazione matematica e dei contesti generali etici ed intellettuali e li abbiamo relazionati ad alcuni gruppi sociali di particolare interesse e ai loro scopi per quanto riguarda l'insegnamento della matematica. Questi scopi, come abbiamo già sottolineato, non possono essere considerati separatamente rispetto ai mezzi che permettono il loro raggiungimento. Sorge quindi una domanda: quali elementi in un'ideologia dell'educazione matematica sono necessari per specificare i mezzi necessari per raggiungere gli scopi proposti? Per rispondere a questa questione, in analogia a quanto proposto da Ernest (2004), presentiamo un modello strutturale delle ideologie dell'educazione matematica.

Meighan (1997) descrive le ideologie come insiemi di convinzioni che operano a diversi livelli e in vari contesti, con innumerevoli strati di significati. Il modello qui proposto riflette questo grado di complessità. A livello più profondo troviamo le credenze fondamentali epistemologiche ed etiche. Sopra di esse possiamo posizionare un secondo insieme di convinzioni che riguarda gli scopi dell'educazione matematica e i mezzi adottati per raggiungerli. Il modello, dunque, prevede due livelli distinti: il primo comprende gli elementi più profondi dell'ideologia, mentre il secondo è costituito da elementi derivati che riguardano l'educazione.

Elementi primari:	Epistemologia
	Filosofia della matematica
	Insieme di valori morali
	Teoria della società
	Teoria del bambino
	Scopi educativi
Elementi secondari:	Scopi dell'educazione matematica
	Teoria dell'apprendimento della matematica
	Teoria dell'insegnamento della matematica
	Teoria delle risorse per l'educazione matematica
	Teoria della valutazione dell'apprendimento
	Teoria dell'abilità
	Teoria della diversità sociale in matematica

Potremmo quindi analizzare ciascuna delle cinque ideologie proposte secondo questo modello, specificando per ciascuna di esse la propria visione riguardante gli elementi primari e secondari sopra proposti. In seguito, secondo l'analisi di Ernest (2004), forniremo uno schema che presenta una breve panoramica della situazione generale, che sarà sicuramente superficiale, ma che permette di orientarsi all'interno del modello proposto e di organizzare le idee. Per quanto riguarda il gruppo dei *public educator*, esso sarà preso come spunto nel prossimo capitolo per analizzare una possibile ideologia legata al costruttivismo dinamico di Sambin. Apporteremo alcune modifiche rispetto alla presentazione di Ernest, che saranno segnalate ove opportuno.

La classificazione proposta soffre di varie limitazioni, che necessitano di essere chiarite. Innanzitutto è stata fatta una grande semplificazione per poter arrivare a questa classificazione. Senza dubbio esistono altri gruppi di interesse oltre a quelli elencati e i gruppi presentati non devono essere considerati stabili nel tempo, né per quanto riguarda la definizione di gruppo sociale, né per quanto riguarda gli scopi e le ideologie. Inoltre, all'interno di un singolo gruppo non ci sarà una sola posizione ideologia fissata, ma piuttosto una famiglia di ideologie che si intersecano tra di loro. I membri dei vari gruppi potrebbero sostenere componenti di diverse ideologie, le posizioni ideologiche stesse sono state sicuramente semplificate e la scelta degli elementi considerati deriva da una scelta in qualche modo arbitraria.

Tuttavia la complessità che stiamo affrontando implica inevitabilmente una buona dose di semplificazione. Questo modello proposto da Ernest costituisce semplicemente un tentativo e per questo rimane sempre soggetto a revisioni. Del resto si tratta proprio del tema centrale della filosofia della matematica proposta: anche la conoscenza più certa altro non è che un tentativo fallibile.

3.4 Alcuni esempi di ideologie matematiche

Mostriamo ora uno schema riassuntivo delle prime quattro ideologie, esclusa quella dei *public educator*, che analizzeremo dettagliatamente nel prossimo capitolo.

Industrial trainer	
Ideologia politica:	Destra radicale, "Nuova Destra"
Visione della matematica	Insieme di verità e di regole
Valori morali	Autoritari, valori vittoriani, fatica e lavoro
Teoria della società	Gerarchia rigida, mercato
Teoria del bambino	Bambino come "angelo caduto dal cielo" e "recipiente vuoto"
Teoria dell'abilità	Fissa ed ereditaria, realizzata tramite sforzo
Scopi dell'educazione matematica	"Ritorno alle origini": addestramento sociale all'obbedienza
Teoria dell'apprendimento	Duro lavoro, fatica, memoria meccanica
Teoria dell'insegnamento	Trasmissione autoritaria, esercitazione
Teoria delle risorse	Contro i calcolatori
Teoria della valutazione	Test sulle conoscenze di base
Teoria della diversità sociale	Istruzione differenziata per classi, monoculturalisti, cripto-razzisti

Technological pragmatist	
Ideologia politica:	Meritocratici, conservatori
Visione della matematica	Corpo incontestato di conoscenza utile
Valori morali	Utilitaristi, pragmatici, "creazione di ricchezza", sviluppo tecnologico
Teoria della società	Gerarchia meritocratica
Teoria del bambino	Bambino come "recipiente vuoto", futuro lavoratore o manager
Teoria dell'abilità	Abilità ereditata
Scopi dell'educazione matematica	Matematica adattata ai vari livelli, certificazioni, centrata sull'industria
Teoria dell'apprendimento	Acquisizione di competenze, esperienza pratica
Teoria dell'insegnamento	Istruttore di abilità, motivatore attraverso la rilevanza del lavoro
Teoria delle risorse	Utilizzo dei computer
Teoria della valutazione	Test, certificazioni, profilazione delle abilità
Teoria della diversità sociale	Diversi curricola a seconda delle future occupazioni

Old humanist	
Ideologia politica:	Conservatori, liberali
Visione della matematica	Corpo di conoscenza pura e strutturata
Valori morali	Giustizia "cieca", oggettività, struttura basata su regole, visione classica paternalistica
Teoria della società	Elitaria, stratificazione classista
Teoria del bambino	Costruzione del personaggio, la cultura domina
Teoria dell'abilità	Forma mentis ereditata
Scopi dell'educazione matematica	Trasmissione della conoscenza matematica
Teoria dell'apprendimento	Comprensione e applicazione
Teoria dell'insegnamento	Spiegare, motivare, trasmettere la struttura
Teoria delle risorse	Aiuti visivi per motivare
Teoria della valutazione	Esami esterni basati sulla gerarchia
Teoria della diversità sociale	Diversi curricola a seconda delle abilità

Progressive educator	
Ideologia politica:	Liberali
Visione della matematica	Visione processuale matematica personalizzata
Valori morali	Centrati sulla persona empatia, valori umani maternalismo, visione romantica
Teoria della società	debole gerarchia, stato sociale
Teoria del bambino	Visione progressista bambino come "fiore in crescita"
Teoria dell'abilità	Varie, ma devono essere coltivate
Scopi dell'educazione matematica	Creatività, realizzazione sociale attraverso la matematica
Teoria dell'apprendimento	Attività, gioco, esplorazione
Teoria dell'insegnamento	Facilitare l'esplorazione personali, prevenire il fallimento
Teoria delle risorse	Ambiente ricco da esplorare
Teoria della valutazione	Valutazioni interne evitare il fallimento
Teoria della diversità sociale	Matematica umanizzata e neutrale per tutti

Public educator	
Ideologia politica:	Socialisti, democratici
Visione della matematica	Costruttivismo sociale
Valori morali	Giustizia sociale, libertà uguaglianza, fraternità, consapevolezza e impegno sociale
Teoria della società	Gerarchia non equa da riformare
Teoria del bambino	Visione sociale: "argilla da modellare"
Teoria dell'abilità	Prodotto culturale, non fisse
Scopi dell'educazione matematica	Consapevolezza critica e cittadinanza democratica
Teoria dell'apprendimento	Domandare, decidere, negoziare
Teoria dell'insegnamento	Discussione, conflitto, domande su contenuti e pedagogia
Teoria delle risorse	Socialmente rilevanti
Teoria della valutazione	Utilizzo di questioni sociali
Teoria della diversità sociale	Accettata come ricchezza culturale

Capitolo 4

L'ideologia del costruttivismo dinamico

In questo capitolo, analizzeremo l'ideologia del costruttivismo dinamico, prendendo in considerazione tutti gli elementi primari e secondari citati nel capitolo precedente. L'analisi si basa su quella proposta da Ernest (2004) per quanto riguarda il gruppo dei *public educator*, ma saranno apportate alcune modifiche perché, come già sottolineato, la filosofia della matematica sottostante sarà quella del costruttivismo dinamico di Sambin[1].

Cominciamo innanzitutto ad analizzare gli elementi primari relativi a questa ideologia.

4.1 Gli elementi primari

4.1.1 La filosofia della matematica

La filosofia della matematica di questa ideologia, a differenza di quella dei *public educator*, è quella del costruttivismo dinamico. Come abbiamo visto, questo significa che la conoscenza matematica è una costruzione che deriva

[1]Ernest, nel suo libro, considera come filosofia della matematica la sua teoria del costruttivismo sociale, una visione che deriva dal quasi-empirismo di Lakatos e dal convenzionalismo di Wittgenstein. Si tratta di una visione molto simile a quella di Sambin, nonostante siano presenti alcune differenze. La principale, come richiama anche il nome di questa teoria, è l'attenzione di Ernest nei confronti dei rapporti sociali interpersonali che caratterizzano il processo di creazione della conoscenza in generale. Per Ernest, infatti, una conoscenza soggettiva diventa conoscenza oggettiva nel momento in cui viene socialmente accettata, mentre, come abbiamo già detto, per Sambin l'oggettività di un concetto è la stabilizzazione del processo dinamico che porta alla creazione di tale concetto.

dall'attività umana e per questo falsificabile e correggibile. Nel momento in cui è stata presentata la filosofia del costruttivismo dinamico, abbiamo sottolineato che, il fatto che la conoscenza matematica non sia il risultato di una necessità ma piuttosto di una scelta, porta inevitabilmente a considerare come fondamentale il ruolo di responsabilità di tutti i soggetti coinvolti, sia nella creazione di nuove conoscenze, sia nella "trasmissione" di quelle già esistenti.

La visione fallibilista, infatti, prevede la partecipazione attiva di ogni individuo nel processo di creazione della conoscenza, sia soggettiva che interpersonale e, di conseguenza, la matematica non può essere considerata come una disciplina a sé stante e priva di responsabilità dal punto di vista morale. Queste osservazioni ci permettono di comprendere meglio le scelte riguardanti le descrizioni dei prossimi elementi.

4.1.2 L'epistemologia

In modo consistente con la filosofia della matematica, l'epistemologia generale di questa posizione è fallibilista e orientata al cambiamento concettuale. Per quanto infatti sia quasi irresistibile la tendenza a considerare i tentativi della conoscenza umana come parte di una sequenza convergente che tende ad un certo limite in un altro regno, abbiamo visto che è necessario abbandonare tali miti per poter comprendere a pieno il ruolo della conoscenza in generale, le cui caratteristiche principali sono ben descritte dal pensiero di Von Glasersfeld:

> "Constructivism is a theory of knowledge with roots in philosophy, psychology and cybernetics. It asserts two main principles whose application has far-reaching consequences for the study of cognitive development and learning as well as for the practice of teaching, psychotherapy, and interpersonal management in general. The two principles are: (1) knowledge is not passively received but actively built up by the cognizing subject; (2) the function of cognition is adaptive and serves the organization of the experiential world, not the discovery of ontological reality."[2] (Von Glasersfeld, 1989)

[2] "Il costruttivismo è una teoria della conoscenza che pone le sue radici nella filosofia, nella psicologia e nella cibernetica. Afferma due principi fondamentali la cui applicazione ha delle conseguenze di ampia portata sullo studio dello sviluppo cognitivo e dell'apprendimento, ma anche sulla pratica dell'insegnamento, della psicoterapia e della gestione interpersonale in generale. I due principi sono: (1) la conoscenza non viene ricevuta passivamente ma costruita attivamente dal soggetto conoscente; (2) la funzione della cognizione

Si riconosce quindi che tutta la conoscenza, essendo una costruzione umana derivante da scelte libere, è interconnessa e porta inevitabilmente con sé una serie di valori morali. Sia la genesi che la giustificazione della conoscenza dipendono dall'attività umana e necessitano di un accordo interpersonale.

Per quanto riguarda la consapevolezza sociale e politica di questa ideologia, si tratta di una prospettiva epistemologica critica, che vede la conoscenza, l'etica e le questioni sociali, politiche ed economiche come fortemente correlate tra loro. In particolare, la conoscenza è vista come fondamentale per poter agire consapevolmente e acquisire potere, e non come separata dalla realtà.

4.1.3 L'insieme di valori morali

Per quanto riguarda l'insieme di valori morali di questa posizione, possiamo prendere in considerazione quelli della giustizia sociale. Si tratta di una sintesi di valori separati e connessi. Dalla prospettiva separata derivano i valori di giustizia e dei diritti fondamentali dell'uomo e il riconoscimento dell'importanza delle strutture sociali, economiche e politiche. Dalla prospettiva connessa derivano il rispetto per i diritti di ogni individuo e un interesse nel far sì che tutti possano vivere all'interno della società in modo attivo e quindi responsabile.

A sostegno di questi interessi ci sono i principi dell'egalitarismo e il desiderio nei confronti della giustizia sociale, che si basano su tre valori fondamentali: uguaglianza, libertà e fraternità. Da questi valori possiamo derivarne altri due: la partecipazione democratica (uguaglianza più libertà) e l'umanitarismo (uguaglianza più fraternità) (Lawton, 1988).

Questi valori possono essere vagamente identificati con quelli della sinistra politica. Si ritrovano già negli ideali della rivoluzione francese e di quella americana. La Dichiarazione di Indipendenza americana, infatti, inizia con l'asserzione dell'uguaglianza e della libertà come diritti umani universali. La triade è stata completata dai rivoluzionari francesi, il cui manifesto era "*liberté, egalité, fraternité*", aggiungendo quindi la fraternità ai principi di libertà e uguaglianza.

è adattiva e serve all'organizzazione del mondo empirico, non alla scoperta di una realtà ontologica." Traduzione da Ernst Von Glasersfeld, *Constructivism in Education*, 1989.

4.1.4 La teoria del bambino

La teoria del bambino associata alla posizione dei *public educator* sostiene che tutti gli individui nascono uguali, con gli stessi diritti e, in generale, con gli stessi doni e le stesse potenzialità. Secondo Ernest (2004), gli individui si sviluppano all'interno di una matrice sociale e sono profondamente influenzati dalla cultura circostante e dalle strutture sociali. Infatti, egli sostiene che la conoscenza sia creata attivamente a partire dagli stimoli provenienti dal mondo esterno, sia attraverso le impressioni sensoriali, che attraverso azioni dirette compiute dal soggetto. Sebbene quindi il punto di partenza degli individui possa essere considerato potenzialmente lo stesso, diverse vie di sviluppo soggettivo portano a risultati estremamente differenti. I bambini sono visti come "argilla da modellare" attraverso il potente impatto delle forze sociali e culturali.

Le teorie psicologiche che descrivono questa posizione sono quelle di Vygotsky (1986) e Leont'ev (1978), i quali sostengono che lo sviluppo psicologico, il linguaggio e l'attività sociale sono tutti essenzialmente interconnessi: la conoscenza e i significati dei bambini sono dunque costruzioni interne che derivano dall'esperienza del mondo esterno e dalle interazioni sociali.

Tuttavia, a differenza di Ernest, essendo la visione del costruttivismo dinamico profondamente legata alla teoria evoluzionistica, non possiamo negare la realtà biologica, la quale ci costringe a constatare che ogni individuo nasce con un patrimonio genetico differente. Per quanto riguarda la teoria del bambino, dunque, ci sono alcune differenze tra la visione dei *public educator* e quella del costruttivismo dinamico.

4.1.5 La teoria della società

La teoria della società legata a questa posizione è una teoria dinamica, in quanto considera lo sviluppo e il cambiamento sociale come necessari per riuscire a raggiungere la giustizia sociale per tutti gli individui. Infatti, nonostante all'interno della società siano ben chiare delle differenze per quanto riguarda il potere, la cultura, lo status e le distribuzione della ricchezza, tali disuguaglianze possono essere attenuate attraverso l'educazione dei cittadini. Le masse sono viste come un "gigante dormiente" che può essere svegliato attraverso l'istruzione e la formazione.

Inoltre, poiché la costruzione della conoscenza deriva non tanto da un processo necessario ma da una serie di scelte arbitrarie, ogni individuo deve sentirsi responsabile e partecipe all'interno della società. Tutti i soggetti, infatti, sono co-responsabili per quanto riguarda la creazione di una società equa e del benessere comune.

4.1.6 Gli scopi educativi

Per quanto riguarda gli scopi educativi, presentiamo la visione di Ernest proposta per i *public educator*. L'obiettivo di questa posizione è il compimento del potenziale dell'individuo all'interno del contesto della società. Quindi lo scopo principale è il conferimento di potere e la liberazione dell'individuo attraverso l'educazione, al fine di poter assumere un ruolo attivo nella creazione del proprio destino e di partecipare alla crescita e al cambiamento sociale. Possiamo distinguere tre scopi mutuamente intrecciati:

1. il pieno sviluppo di ogni individuo attraverso l'educazione, fornendogli gli strumenti di pensiero necessari per potergli permettere di prendere il controllo della propria vita e di partecipare pienamente e criticamente all'interno di una società democratica;

2. la diffusione dell'educazione a tutti i cittadini attraverso la società, mantenendo vivi i principi egualitari della giustizia sociale;

3. l'utilizzo dell'educazione come mezzo per il cambiamento sociale, che possa portare ad una società più giusta in termini di distribuzione di ricchezza, potere e opportunità.

Nel complesso, questa ideologia è orientata verso la partecipazione sociale, dal momento che l'epistemologia sottostante si basa sulla costruzione attiva di conoscenza e che la posizione etica ad essa relativa è orientata al raggiungimento della giustizia sociale.

Per quanto riguarda invece l'estensione del costruttivismo dinamico alle conseguenze sociali, essa costituisce una questione ancora aperta. Per quanto infatti gli scopi sopra proposti possano adattarsi anche alla visione del costruttivismo dinamico, potrebbero esserci alcuni aspetti interessanti che non sono stati presi in considerazione da Ernest.

Dal momento però che in entrambi i casi si tratta di una visione relativistica, essa accetta il fatto che in ognuno dei campi sopra citati possano esistere delle valide prospettive alternative, senza che questo metta in crisi quanto appena esposto.

4.2 La visione del relativismo fallibilista dei *public educator*

Prima di analizzare gli elementi secondari relativi a questa ideologia, ci soffermiamo brevemente sulla visione del relativismo fallibilita proposto dai *public educator*, analizzando la visione di alcuni esponenti di questo gruppo sociale, in particolare per quanto riguarda l'educazione matematica.

L'ideologia del relativismo fallibilista, infatti, come abbiamo già sottolineato, è propria del gruppo sociale dei *public educator* proposto da Ernest (2004), i quali rappresentano una tradizione riformista radicale, orientata verso la democrazia e la giustizia sociale. Il loro motto è "educazione per tutti", al fine di conferire potere a tutti i cittadini, in modo tale che essi possano partecipare attivamente all'interno della società e che possano condividere la prosperità della moderna società industriale. Per quanto riguarda l'educazione, questi obiettivi si traducono nello sviluppo delle facoltà di pensiero critico e indipendente, autorizzando gli studenti a mettere in discussione la conoscenza ricevuta, qualsiasi sia il livello di autorità della fonte, e ad accettare soltanto ciò che può essere razionalmente giustificato. Una conseguenza fondamentale di questo scopo è il fatto che la conoscenza ricevuta non può essere accettata come assoluta.

Uno dei principali sostenitori della posizione dei *public educator* all'inizio del XX secolo è stato John Dewey, il quale ha sposato tre insiemi di credenze legate a questo punto di vista. La prima, seguendo il pragmatismo, è quella secondo cui tutta la conoscenza è incerta e fallibile, il che lo rese un pioniere rispetto alla convinzione del suo tempo, secondo la quale la certezza e l'infallibilità della conoscenza erano viste come un'ortodossia. In secondo luogo, Dewey credeva nell'educazione come mezzo per raggiungere la vera democrazia e, in particolare, riteneva fondamentale il "pensiero riflessivo e critico, che costituisce l'esame attivo, attento e persistente di qualsiasi credenza, o presunta forma di conoscenza, in grado di mettere alla luce i motivi che le sostengono e le conclusioni verso cui esse tendono"[3] (Stenhouse, 1975). Infine, Dewey sostiene che il divario tra gli interessi e le esperienze del bambino e le diverse materie del curriculum scolastico debba essere colmato. L'esperienza e la cultura del bambino dovrebbero fornire le basi per l'apprendimento

[3]Traduzione da Lawrence Stenhouse, *An Introduction to Curriculum Research and Development*, 1975.

scolastico, che è in grado di portarlo fuori dal suo ambiente familiare, per far sì che possa viaggiare attraverso i lunghi secoli della storia del mondo e fino ai confini del sistema solare (Golby, Greenwald e West, 1977). Dewey sostiene che l'educazione debba cominciare a partire dagli interessi e dalla cultura dei bambini, e che debba successivamente svilupparsi verso il mondo esterno, attraverso le discipline presenti nei curricola scolastici.

Alcune affermazioni che sostengono l'ideologia dei *public educator* sono arrivate anche dai paesi che erano stati colonie dell'Inghilterra. Un esempio è costituito dal programma tanzaniano di "*Education for Self-Reliance*" portato avanti da Julius Nyerere, con i seguenti obiettivi:

> "to prepare people for their responsibilities as free workers and citizens in a free and democratic society, albeit a largely rural society. They have to be able to think for themselves, to make judgements on all the issues affecting them; they have to be able to interpret the decisions made through the democratic institutions of our society. [...] The education provided must therefore encourage the development in each citizen of [...] an enquiring mind, an ability to learn from what others do."[4] (Nyerere, citato in Lister, 1974)

Anche Paulo Freire è stato un importante sostenitore dell'ideologia dei *public educator*. Egli sosteneva che tutta la conoscenza è provvisoria e che non può essere separata dalla conoscenza soggettiva degli individui.

> "[W]orld and consciousness are not statically opposed to each other, they are related to each other dialectically. [...] the truth of one is to be gained through the other; truth is not given, it conquers itself and remakes itself. It is at once discovery and invention."[5] (Freire, citato in Lister, 1974)

[4] "preparare le persone alle loro responsabilità come lavoratori e cittadini liberi in una società libera e democratica, anche se in gran parte rurale. Essi devono essere in grado di pensare per se stessi, di esprimere giudizi su tutte le questioni che li riguardano; essi devono essere in grado di interpretare le decisioni prese attraverso le istituzioni democratiche della nostra società. [...] L'educazione fornita deve quindi incoraggiare in ogni cittadino lo sviluppo [...] del pensiero critico e dell'abilità di imparare da ciò che gli altri fanno." Traduzione da Ian Lister, *Deschooling*, 1974.

[5] "Il mondo e la conoscenza non sono staticamente opporti uno all'altro, essi sono dialetticamente correlati tra di loro. [...] la verità di uno deve essere raggiunta attraverso l'altro; la verità non è data, si conquista e si ricrea. È nello stesso momento scoperta e invenzione." Traduzione da Ian Lister, *Deschooling*, 1974.

Secondo Freire lo scopo dell'educazione è quello di raggiungere la consapevolezza critica, ossia un approccio critico nei confronti della realtà che porti alla scoperta della realtà stessa e alla scoperta dei miti che ci ingannano. Questa consapevolezza critica è raggiunta attraverso il "*problem posing*" come metodo educativo, secondo il quale gli studenti scelgono attivamente le questioni e gli oggetti del loro studio e sono co-inquirenti con l'insegnante e liberi di mettere in discussione sia il curriculum che la pedagogia della scuola (Freire, 2000). Questa visione si oppone all'educazione in cui gli studenti sono passivi e visti come recipienti da colmare di conoscenza.

In Inghilterra, Williams (1965) propose un curriculum basato sulla prospettiva dei *public educator*, per dare agli studenti la padronanza delle lingue dell'inglese e della matematica; per introdurre gli studenti alla cultura della società attorno a loro ed esercitarsi nella lettura critica dei giornali, delle riviste e dei manifesti di propaganda; per prepararli a partecipare alle istituzioni democratiche della società; per impegnarsi nei metodi di indagine delle scienze e comprendere la storia e gli effetti sociali delle scienze. In sintesi, "un'educazione pubblica progettata per esprimere e creare i valori di una democrazia colta e di una cultura comune"[6] (Williams, 1965).

Sebbene molti di tali progetti non andarono mai oltre la fase di pianificazione, l'"*Humanities Curriculum Project*" è stato implementato con successo, tenendo a mente alcuni degli scopi dei *public educator*.

> "The pedagogical [...] aim of the project is to develop an understanding of social situations and human acts and of the controversial value issues that they raise."[7] (Stenhouse, 1975)

Questo progetto utilizzava la controversia e i conflitti controllati (sotto forma di argomentazioni) come parte della sua metodologia per risvegliare la consapevolezza critica degli studenti. L'insegnante aveva il ruolo di supervisore neutrale, al fine di evitare l'influenza degli studenti a favore di alcune posizioni rispetto ad altre.

[6] Traduzione da Raymond Williams, *The Long Revolution*, 1965.

[7] "Lo scopo pedagogico del progetto è quello di sviluppare una comprensione delle situazioni sociali e delle attività umane e delle questioni controverse ma essenziali che esse sollevano." Traduzione da Lawrence Stenhouse, *An Introduction to Curriculum Research and Development*, 1975.

Anche questo progetto, però, nonostante sia stato implementato, ha avuto vita breve. In conclusione, quindi, i *public educator* non sono riusciti a cambiare i contenuti e lo stile metodologico scolastico, in modo tale che riflettesse i loro obiettivi educativi.

Per quanto riguarda l'influenza della visione dei *public educator* nell'educazione matematica, essa è relativamente recente, a causa del fatto che una filosofia della matematica fallibilista, e in particolare quella del costruttivismo, è emersa molto tardi. Uno dei primi a introdurre una visione fallibilista della matematica fu Lakatos nel 1963 e fu soltanto dopo la pubblicazione di alcuni suoi articoli che tale visione acquisì un po' di legittimità.

Una prima affermazione esplicita di una visione fallibilista della matematica nell'educazione, sebbene piuttosto soggettivista, è dovuta all'Associazione degli Insegnanti di Matematica.

> "Mathematics is made by men and has all the fallibility and uncertainty that this implies. It does not exist outside the human mind, and it takes its qualities from the minds of men who created it. Because mathematics is made by men and exists only in their minds, it must be made or re-made in the mind of each person who learns it. In this sense mathematics can only be learnt by being created."[8] (Wheeler, 1967)

Più recentemente, i *public educator* sono giunti a riconoscere che la matematica è una costruzione sociale profondamente legata alla cultura.

> "Mathematics [...] is therefore conceived of as a cultural *product*, which has developed as a result of various activities [...] Counting [...] Locating [...] Measuring [...] Designing [...] Playing [...] Explaining [...] Mathematics as cultural knowledge, derives from humans engaging in these six universal activities in a sustained and conscious manner."[9] (Bishop, 1991)

[8] "La matematica è creata dagli uomini e possiede tutta la fallibilità e l'incertezza che questo comporta. Non esiste al di fuori delle menti umane e possiede le qualità delle menti degli uomini che la creano. Dal momento che la matematica è creata dagli uomini ed esiste soltanto nelle loro menti, deve essere creata o ri-creata nella mente di ogni persona che la apprende. In questo sendo la matematica può essere appresa soltanto attraverso la sua creazione." Traduzione da D.H. Wheeler, Notes *on Mathematics in Primary School*, 1967.

[9] "La matematica [...] è quindi concepita come un *prodotto* culturale, che si è sviluppato come risultato di varie attività [...] Contare [...] Localizzare [...] Misurare [...] Progettare [...] Giocare [...] Spiegare [...] La matematica come conoscenza culturale deriva dall'impe-

Questo legame culturale può essere applicato anche alla matematica formale e accademica e alle sue applicazioni, dal momento che la conoscenza matematica stessa è esplicitamente riconosciuta come costruzione sociale.

Oltre alla visione riguardante la natura della matematica dei *public educator* è interessante anche la loro visione riguardante la natura dell'educazione matematica e il suo rapporto con la società. Innanzi tutto, per quanto riguarda gli scopi dell'educazione matematica.

> "It is of democratic importance, to the individual as well as to society at large, that any citizen is provided with instruments for understanding the role of mathematics [in society]. Anyone not in possession of such instruments becomes a 'victim' of societal processes in which mathematics is a component. So, the purpose of mathematics education should be to enable students to realize, understand, judge, utilize and sometimes also perform the application of mathematics in society, in particular to situations which are of significance to their private, social and professional lives."[10] (Niss, 1983)

Al fine di fornire a chi apprende un maggiore controllo sulla propria vita, l'insegnamento della matematica dovrebbe incoraggiare l'autonomia dello studente e la scelta delle proprie aree di studio. Per far sì che questa proposta possa essere efficace, è necessario che lo studio della matematica sia utilizzato per sviluppare la capacità di pensiero critico, che inevitabilmente porta però ad un confronto con gli altri individui, che può in alcuni casi risultare conflittuale. Proprio attraverso le situazioni di conflitto verbale, però, lo studente acquisisce maggiore coscienza riguardo le proprie conoscenze e abilità e può metterle a servizio della società per far sì che avvenga un cambiamento verso

gno sostenuto e consapevole dell'essere umano in queste sei attività." Traduzione da Alan Bishop, *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*, 1991.

[10]"È di importanza democratica, per l'individuo e per la società in generale, che a ogni cittadino siano forniti strumenti per comprendere il ruolo della matematica [nella società]. Chiunque non sia in possesso di tali strumenti diventa una "vittima" dei processi sociali in cui la matematica è una componente. Per questo motivo, lo scopo dell'educazione matematica dovrebbe essere quello di consentire agli studenti di realizzare, capire, giudicare, utilizzare e talvolta anche mettere in atto l'applicazione della matematica all'interno della società, in particolare per quanto riguarda situazioni che sono significative per la loro vita privata, sociale e professionale." Traduzione da Mogens Niss, *Considerations and Experiences Concerning Integrated Courses in Mathematics and Other Subjects*, 1983.

la giustizia. Proprio il raggiungimento di una situazione di giustizia sociale è l'obiettivo ultimo dei curricola matematici dei *public educator*.

4.3 Gli elementi secondari

Analizziamo ora gli elementi secondari relativi alla prospettiva del costruttivismo dinamico, riprendendo le riflessioni proposte da Ernest (2004).

4.3.1 Gli scopi dell'educazione matematica

Per quanto riguarda gli scopi dell'educazione matematica, ritengo coerente con la visione del costruttivismo dinamico prendere in considerazione quelli proposti da Ernest per quanto riguarda i *public educator* e analizzati nella sezione precedente. Essendo per tale visione di fondamentale importanza la responsabilità individuale, anche all'interno della società, l'educazione matematica dovrebbe favorire lo sviluppo della partecipazione a una società democratica, attraverso l'utilizzo del pensiero critico caratteristico della matematica. Per far sì che questo accada è necessario che gli studenti siano incoraggiati a porre e risolvere problemi matematici legati a particolari contesti sociali. A livello più profondo, è necessario che chi apprende diventi partecipe dell'attività matematica e si senta responsabile nel raggiungimento della giustizia sociale.

4.3.2 La teoria della conoscenza matematica scolastica

La conoscenza matematica scolastica deve riflettere la natura della matematica come costrutto sociale: un tentativo che cresce attraverso la creazione umana e il processo decisionale, e collegato agli altri regni della conoscenza (cultura e vita sociale). La matematica scolastica non deve essere vista come una conoscenza imposta dall'esterno dalla quale gli studenti si sentono alienati. Deve piuttosto essere incorporata nella cultura studentesca e nella realtà della loro situazione, coinvolgendoli e consentendo loro di appropriarsene in modo consapevole. In questo modo, la conoscenza della matematica dovrebbe fornire agli studenti strumenti di pensiero che permettano loro di analizzare la realtà circostante.

4.3.3 La teoria dell'apprendimento della matematica

La teoria dell'apprendimento della matematica secondo questa prospettiva è incentrata sulla costruzione sociale dei significati e deriva dalla teoria delle origini sociali del pensiero di Vygotsky (1986) e dalla teoria dell'attività di Leont'ev (1978) e altri. Secondo questa teoria, la conoscenza e il significato nei bambini sono costruzioni interiorizzate, che derivano dalle interazioni sociali, dall'attività personale e dai confronti con la realtà esterna.

Questa teoria vede i bambini come bisognosi di impegnarsi attivamente nella matematica, proponendo oltre alla risoluzione problemi, un inquadramento delle questioni matematiche all'interno di contesti sociali più ampi. Le concezioni e le ipotesi dello studente (e dell'insegnante) devono essere articolate, confrontate con altre prospettive e messe in discussione, per consentire lo sviluppo del pensiero critico. Ciò porta inevitabilmente a conflitti, che sono però necessari per l'adeguamento e la crescita di nuove concezioni.

4.3.4 Teoria dell'abilità matematica

L'abilità matematica, secondo la prospettiva dei *public educator*, è vista in gran parte come risultato di una costruzione sociale. L'impatto del contesto sociale ha infatti un ruolo molto importante nello sviluppo delle persone e, in particolare, nella manifestazione di determinate abilità. Gli individui, secondo Ernest, sono considerati molto simili nelle caratteristiche e nelle abilità al momento della nascita, ma dopo anni di attività e socializzazione in ambienti diversi, essi sviluppano capacità e attitudini profondamente differenti. Secondo questa visione, le abilità sono quindi sviluppate dagli studenti attraverso le loro esperienze, ma a partire da una base essenzialmente comune.

Per quanto riguarda la prospettiva del costruttivismo dinamico, come è già stato sottolineato nel paragrafo relativo alla teoria del bambino, risulta di fondamentale importanza considerare anche la genetica come fattore che influisce sulle abilità matematiche degli individui. Essa ha infatti la stessa rilevanza delle esperienze individuali, familiari, sociali e scolastiche sopra citate.

4.3.5 La teoria dell'insegnamento della matematica

La teoria dell'insegnamento include diversi aspetti:

i. discussioni aperte, sia studente-studente che insegnante-studente, dal momento che l'apprendimento si basa sulla costruzione sociale dei concetti;

ii. lavori di gruppo cooperativi, per sviluppare la fiducia, l'impegno e la padronanza della materia;

iii. progetti autonomi di investigazione e *problem posing*, per sviluppare la creatività e il coinvolgimento dello studente anche a livello personale;

iv. la messa in discussione da parte degli studenti sul contenuto dei corsi, sulla pedagogia e sulle modalità di valutazione utilizzate, al fine di sviluppare il pensiero critico;

v. materiali, progetti e argomenti socialmente rilevanti, per potenziare la consapevolezza e l'impegno sociale.

Inoltre, l'insegnamento deve essere democratico e aperto nella misura in cui le asimmetrie all'interno della classe lo permettano, riconoscendo sempre esplicitamente la presenza di tali differenze. L'insegnante deve svolgere il ruolo di presidente neutrale o di avvocato del diavolo nelle discussioni, ma dovrebbe anche rivelare con onestà le sue opinioni riguardanti questioni controverse, senza nascondere la propria posizione per timore di influenzare gli studenti. L'insegnante ha inoltre la responsabilità principale di preparare gli studenti alle valutazioni esterne, come parte del reale contesto che circonda la situazione scolastica. Soprattutto, si riconosce che il conflitto gioca un ruolo essenziale e non può essere appianato attraverso l'imposizione di una autorità.

4.3.6 La teoria delle risorse per l'educazione matematica

Questa posizione si basa sulla convinzione che l'apprendimento dovrebbe essere attivo, vario e socialmente impegnato. Di conseguenza, la teoria delle risorse può essere riassunta in tre componenti principali:

1. fornire un'ampia varietà di risorse pratiche per facilitare diversi approcci didattici, che permettano allo studente di partecipare attivamente;

2. l'utilizzo di materiali come giornali e statistiche ufficiali per far sì che gli studenti imparino ad applicare quanto da loro appreso a situazioni socialmente rilevanti;

3. facilitare l'auto-verifica da parte dello studente e agevolarlo nella ricerca di risorse utili per l'apprendimento.

4.3.7 La teoria della valutazione dell'apprendimento della matematica

La teoria della valutazione dovrebbe occuparsi di trovare misure per valutare le competenze e i risultati positivi ottenuti in matematica da parte degli studenti, senza stereotipizzare le abilità degli alunni o presupponendo l'esistenza di un modello gerarchico nella risoluzione dei problemi matematici. È pertanto possibile utilizzare varie forme di valutazione, inclusa la creazione di profili che analizzino la situazione individuale dello studente da più punti di vista o la registrazione dei risultati ottenuti all'interno di progetti estesi o di esami.

I compiti assegnati e i risultati delle valutazioni dovrebbero però essere aperti alla discussione e al controllo da parte degli alunni, ove opportuno, per far sì che gli studenti sviluppino una capacità di auto-controllo, utile per una valutazione consapevole delle proprie capacità e abilità. In alcuni casi può essere utile che gli studenti abbiano la possibilità di scegliere i temi su cui sviluppare i propri progetti.

Tuttavia questa prospettiva è consapevole dell'importanza sociale delle certificazioni in matematica, quindi deve fornire una preparazione approfondita per tali esami e per le valutazioni esterne. Si tratta di una parte essenziale della responsabilità dell'insegnante nei confronti degli studenti, che può essere vista come una conseguenza della logica sociale presente in matematica.

4.3.8 La teoria della diversità sociale all'interno dell'educazione matematica

La teoria della diversità sociale riflette i valori sottostanti e l'epistemologia. Per questo il curriculum di matematica dovrebbe riflettere le diverse situazioni storiche, culturali e geografiche, il suo ruolo in contesti non accademici e la sua incorporazione in tutti gli aspetti dell'organizzazione sociale e politica della vita moderna. Dovrebbe inoltre favorire la partecipazione delle donne, delle minoranze etniche e di altri gruppi sociali. Sono necessarie azioni positive che includano l'anti-sessismo e l'antirazzismo per migliorare l'educazione matematica e la prospettiva sociale di tutti, non solo per contrastare i problemi di gruppi meno avvantaggiati.

Il curriculum deve essere sottoposto a un continuo controllo per rimuovere gli ostacoli (come la lingua, gli stereotipi o una pedagogia restrittiva) che limitano il pieno coinvolgimento, la partecipazione e lo sviluppo di tutti i soggetti. Nel complesso, la diversità sociale è riconosciuta, accolta e celebrata come centrale anche all'interno della conoscenza matematica.

4.4 Una valutazione critica nei confronti della posizione dei *public educator*

4.4.1 Punti di forza

Uno dei punti di forza principali di questa ideologia è il fatto che esplicita tra i suoi scopi la realizzazione personale dello studente sia come essere umano autonomo che come membro di una società. Questa posizione, inoltre, valorizza il pensiero critico, la conoscenza matematica e la cultura in generale come mezzi per la costruzione di una società equa e democratica.

In secondo luogo, questa prospettiva si basa su una filosofia della matematica costruttivista fallibilista, che rappresenta il filo conduttore del pensiero contemporaneo. Di conseguenza, il curriculum matematico dei *public educator* riflette la natura della matematica come istituzione sociale, con tutte le potenti implicazioni educative di questa prospettiva. I ruoli delle diverse razze, dei vari paesi e delle donne nella creazione della conoscenza matematica sono pienamente riconosciuti, portando al rifiuto del mito di proprietà maschile europea bianca della matematica. Inoltre, la storia e il contesto umano della matematica diventano di importanza fondamentale, fornendo un'immagine meno estraniante e mistificante della matematica, e dando origine a una nuova concezione più umana e accogliente. Il riconoscimento della fallibilità della matematica nega la centralità del concetto di correttezza o di errore nei confronti dell'operato dello studente, il che costituisce un potente contributo nel superamento degli atteggiamenti negativi, come la matofobia.

Nel complesso, questa prospettiva presenta buoni punti di forza sia in termini delle sue basi etiche ed epistemologiche, che della loro traduzione negli scopi educativi.

4.4.2 Punti di debolezza

La prospettiva e gli scopi dei *public educator* soffrono di alcune debolezze, per la maggior parte per quanto riguarda l'implementazione di curricola che rispecchino il punto di vista di tale prospettiva, ma anche per la presenza di alcune contraddizioni all'interno dell'ideologia stessa.

Innanzi tutto bisogna considerate il problema della controversialità della prospettiva del *public educator* e delle sue implicazioni per quanto riguarda l'educazione. La matematica infatti può essere considerata come un corpo di conoscenza neutrale e che quindi deve essere insegnata senza essere influenzata dal dibattito sociale, oppure dal momento che la matematica sta alla base sia della tecnologia in tutte le sue forme, che delle politiche che ne determinano gli utilizzi, il suo insegnamento dovrebbe essere deliberatamente messo in relazione a tali questioni (Howson e Wilson, 1986). Come conseguenza di questa seconda posizione, però, c'è il fatto che è difficile che gli insegnanti sentano come parte del proprio lavoro il fatto di analizzare questioni sociali dibattute. Inoltre è probabile che le risposte dei governi a un tale tipo di insegnamento siano negative: quale sistema politico, infatti, sosterrebbe davvero un curriculum educativo che invita i suoi cittadini a mettere in discussione in modo critico le sue statistiche, le sue pubblicazioni e le assunzioni e i modelli matematici che stanno alla base dei processi decisionali politici?

Gli scopi dell'educazione dei *public educator* e i loro valori sottostanti rappresentano una "politicizzazione" dell'educazione matematica e questo aspetto risulta essere incoerente per chi sostiene una visione assolutista della conoscenza, dal momento che per tali posizioni la visione della matematica risulta essere non problematica, neutrale e priva di valori. Le prospettive assolutiste, dunque, sono costrette a negare la possibilità che valori sociali e politici possano entrare a far parte dell'insegnamento della matematica solo per ragioni epistemologiche ed educative.

Queste considerazioni non possono essere ignorate dai sostenitori dell'ideologia del costruttivismo dinamico, in quanto bisogna tenere conto del fatto che l'implementazione di un curriculum didattico basato su tali posizioni incontrerà sicuramente numerose opposizioni.

La seconda questione problematica di questa posizione riguarda la controversia e il conflitto all'interno della classe. L'introduzione di questioni sociali e politiche e l'incoraggiamento nei confronti degli studenti a mettere in discussione gli argomenti delle varie discipline, la pedagogia e i metodi di valutazione portano inevitabilmente ad un clima di conflitto all'interno della classe. Oltre ai problemi sopra citati, questa metodologia di insegnamento potrebbe differire in maniera significativa rispetto a quelle sperimentate dagli studenti in precedenza e questo potrebbe essere causa di disturbo. La controversia, il conflitto e le argomentazioni razionali non solo sono assenti nella maggior parte della pratica educativa, ma sono anche estranei a molti degli ambienti culturali degli studenti. Questo ci porta a porci una domanda: quanto è eticamente giustificato questo approccio conflittuale, date le possibili conseguenze che potrebbero essere vissute dagli studenti?

Gli insegnanti hanno la responsabilità professionale di agire in *loco parentis*, di fornire un'educazione personale, sociale e morale come tutor e consulenti, anche tramite l'esempio personale. Ad esempio, un numero significativo di bambini provenienti da contesti emotivamente instabili potrebbe ricavare un senso di sicurezza dalla stabilità delle loro relazioni con gli insegnanti. Per questi bambini potrebbe essere che un programma di studi di matematica basato sulla visione dei *public educator* minacci la loro sicurezza, portando quindi a risultati distruttivi piuttosto che costruttivi. Naturalmente qualsiasi possibile risposta a queste questioni dipende dalle specificità del contesto e dell'implementazione. Tuttavia, potrebbe essere che un curriculum matematico di questo tipo non venga proposto se non agli ultimi anni di scuola, in modo tale da tutelare i più giovani dai possibili effetti negativi causati dalle controversie e dai conflitti. D'altra parte, però, il conflitto tra i giovani studenti rispetto alle risposte dei problemi matematici è una strategia di apprendimento molto efficace.

In terzo luogo, l'ammissione di questioni sociali, culturali e politiche nei curricula di matematica apre la porta alle influenze e alle palesi manipolazioni da parte di gruppi commerciali e politici. Dal punto di vista della propria ideologia, i *public educator* mirano all'educazione matematica intesa come democratica, autorizzante e imparziale. Tuttavia, altre posizioni ideologiche potrebbero ritenere che altri insiemi di valori debbano essere promossi e, data l'opportunità offerta dall'incorporazione di questioni sociali e politiche nel curriculum di matematica, tali gruppi potrebbero cambiare gli obiettivi per raggiungere i propri fini.

Infine, bisogna tener conto di una serie di contraddizioni sia interne sia esterne che potrebbero derivare dall'implementazione di un curriculum didattico che rispecchi questa prospettiva. Oltre a quelle già esposte, rimane aperta la dicotomia tra la conquista della consapevolezza di sé e del pieno controllo sulle proprie scelte e il successo durante le prove d'esame. Si deve riconoscere che questa è una fonte di conflitto, in quanto favorire uno dei due aspetti metterebbe in secondo piano l'altro, mentre l'insegnante ha il dovere di affrontare entrambi questi obiettivi, seppur in contrasto l'uno con l'altro.

Esiste inoltre un conflitto tra la posizione che vede come prioritaria la matematica all'interno del mondo esperienziale dello studente e la necessità di insegnare la matematica teorica al fine di fornire i potenti strumenti di pensiero della matematica astratta. Questo si riflette nel conflitto tra applicazioni socialmente utili e rilevanti e la teoria matematica accademica. Il problema principale, in questo caso, è riuscire passare da situazioni matematiche socialmente rilevanti al loro contenuto teorico, senza perdere di significato e facendo sì che il passaggio da un regno all'altro non risulti essere disconnesso. Si tratta tuttavia di un obiettivo molto difficile da raggiungere.

All'interno di questa prospettiva, è difficile trovare un modo per evitare tali conflitti: l'unica risposta possibile a questa situazione, secondo Ernest (2004), è il fatto che tali conflitti siano riconosciuti e affrontati all'interno di qualsiasi programma educativo basato su questa visione.

Capitolo 5

Conclusione e prospettive

Dopo aver analizzato il modello delle ideologie sottostanti all'educazione matematica ed esserci soffermati su quelle relative ai *public educator* e al costruttivismo dinamico, proponiamo alcune riflessioni riguardanti tale modello, per sottolinearne vantaggi e criticità.

La prima critica che possiamo individuare in questo modello riguarda l'arbitrarietà nella selezione dei gruppi sociali, nella scelta degli elementi primari e secondari da analizzare e della loro identificazione in ciascuna delle cinque ideologie. Abbiamo infatti visto che il solo fatto di considerare come filosofia della matematica il costruttivismo dinamico ha portato all'introduzione di una prospettiva differente rispetto alle cinque considerate. Tuttavia, Ernest (2004) è stato in grado di dare fondamento alle sue scelte, sottolineando sempre i punti in cui erano presenti questioni ancora aperte.

Il modello è speculativo e interdisciplinare, dal momento che unisce elementi di filosofia, psicologia, sociologia e storia, sia per quanto riguarda l'educazione generale, che nello specifico di quella matematica. Ma, come sottolinea Ernest, mentre le parti che costituiscono i ragionamenti proposti sono ben fondate all'interno di queste discipline teoriche, la loro sintesi complessiva è congetturale. Di conseguenza, non è richiesta alcuna finalità all'elenco di componenti costitutive del modello, che sono collegate tra loro attraverso un'analisi plausibile, ma pur sempre arbitraria e non di certo logica.

In secondo luogo, questo modello dipende necessariamente da molte ipotesi semplificative. Si presume infatti che le varie ideologie e i relativi gruppi di interesse mantengano la propria identità nel corso del tempo, nonostante i numerosi cambiamenti che avvengono su larga scala relativi al concetto di conoscenza, alla società e all'istruzione. All'interno di ciascun gruppo, inoltre, possono formarsi diversi sottogruppi che si uniscono per analogie di pensiero, si dissolvono o si separano, creando quindi una situazione generale di cambiamento.

Per motivi di sintesi, si presuppone anche che i cinque gruppi selezionati rappresentino la situazione generale sia all'interno che all'esterno dell'educazione matematica e non sono prese in considerazione le possibili divergenze all'interno di ciascun gruppo. Per le stesse ragioni, si presuppone infine che le cinque posizioni descritte siano discrete e che gli individui possano essere assegnati in modo univoco a una di questa classi. Ma realisticamente è molto probabile che esistano soggetti o gruppi di persone che decidano di adottare gli obiettivi di due o più posizioni differenti.

Ognuna di queste supposizioni rappresenta un'ipotesi di lavoro semplificativa. D'altra parte, però, senza tali presupposti non sarebbe possibile presentare alcun tipo di modello globale.

Un'ultima criticità riguarda il fatto che il modello presentato da Ernest (2004) propone un'analisi prettamente teorica di alcune ideologie relative all'educazione matematica e non considera le differenze presenti tra i livelli di pianificazione, implementazione e apprendimento. Ernest fa notare che le recenti ricerche, sia teoriche che empiriche, hanno sottolineato le lacune esistenti tra questi livelli ed è pertanto necessario analizzarli tutti e tre per avere una visione globale del processo. Il modello attuale tratta solo il livello superiore, ossia gli obiettivi e l'ideologia su cui si fonda un possibile curriculum pianificato per l'educazione matematica.

Rimane quindi aperta la seguente domanda: quali forze o fattori intervengono tra gli scopi proposti, le intenzioni delle singole ideologie e la loro implementazione nei curricula di matematica? E ancora: quali risultati relativi al miglioramento dell'apprendimento saranno effettivamente raggiunti grazie all'implementazione di tali curricola? Si tratta sicuramente di questioni che possono costituire interessanti argomenti di ricerca, soprattutto per quanto riguarda la prospettiva analizzata del costruttivismo dinamico.

D'altra parte è bene sottolineare anche i punti di forza caratteristici di tale modello, primo tra tutti il fatto che sono state combinate in modo organico un buon numero di nozioni teoriche, che riguardano la filosofia della matematica, le teorie dello sviluppo intellettuale ed etico e la teoria sociologico-storica.

L'educazione matematica, infatti, è sempre stata criticata da molti autori per il fatto di essere priva di solide fondamenta teoriche (si veda per esempio Bauersfeld, 1979). L'analisi proposta da Ernest, invece, combinando assieme varie idee provenienti da diverse fonti, ha il pregio proporre un modello teoreticamente ben fondato.

Inoltre, distinguendo cinque ideologie e gruppi di interesse, il modello di Ernest (2004) è in grado di prendere in considerazione buona parte della complessità che caratterizza la storia della didattica matematica. Si tratta di un avanzamento rispetto ad alcuni modelli precedenti e, grazie alla sua più raffinata caratterizzazione, è in grado di accogliere meglio la complessità delle ideologie e degli interessi alla base di diverse proposte di curricola matematici.

Inoltre, questo modello riconosce che i possibili conflitti riguardanti gli scopi e gli interessi educativi possano costituire la base di partenza per diversi sviluppi, e rappresenta quindi un miglioramento nei confronti degli autori che assumono l'esistenza di un consenso generale.

In conclusione, il modello di Ernest (2004) fornisce uno strumento critico per identificare i diversi obiettivi e le ideologie implicite all'interno dei progetti riguardanti i programmi scolastici di insegnamento della matematica e le varie riforme in tale ambito. Poiché però si basa su cinque gruppi di interesse che trascendono l'insegnamento della matematica, può essere applicato anche al di fuori di essa, per analizzare e migliorare altre aree dei curricula scolastici.

Bibliografia

[1] Heinrich BAUERSFELD (1979), *Hidden Dimensions in the So-called Reality of a Mathematics Classroom*, Centre for Science Education, Kings College, London University.

[2] Alan BISHOP (1991), *Mathematical Enculturation. A Cultural Perspective on Mathematics Education*, Springer.

[3] Carl Benjamin BOYER (2016), *Storia della matematica*, Oscar Mondadori.

[4] Paul ERNEST (1998) *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, State University of New York Press.

[5] Paul ERNEST (2003) *Mathematics, Education and Philosophy: an International Perspective*, Taylor & Francis e-Library.

[6] Paul ERNEST (2004), *The Philosophy of Mathematics Education*, Taylor & Francis e-Library.

[7] Paul ERNEST (2005), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematical Education*, Taylor & Francis e-Library.

[8] Paulo FREIRE (2000), *Pedagogy of the Oppressed*, The Continuum International Publishing Group.

[9] Hans FREUDENTHAL (2002), *Revisiting Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.

[10] Carol GILLIGAN (2003), *In a Different Voice. Psychological Theory and Women's Development*, Harvard University Press.

[11] Michael GOLBY, Jane GREENWALD e Ruth WEST (1975), *Curriculum Design*, Croom Helm in collaborazione con Open University Press.

[12] Reuben HERSH (1979), *Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*, in Advances of Mathematics, Volume 31.

[13] Paul Heywood HIRST (2010), *Knowledge and the Curriculum*, Taylor & Francis e-Library.

[14] Geoffrey HOWSON (1973), *Developments in Mathematics Education*, Cambridge University Press.

[15] Geoffrey HOWSON e Bryan WILSON (1986), *School Mathematics in the 1990s*, Cambridge University Press.

[16] Barbara JAWORSKI (2003), *Investigating Mathematics Teaching: a constuctivist enquiry*, Taylor & Francis e-Library.

[17] Imre LAKATOS (1978), *Mathematics, Science and Epistemology*, Philosophical Papers, Volume 2, Cambridge University Press.

[18] Imre LAKATOS (2015), *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press.

[19] Denise LAWTON (1988), *Ideologies of Education*, in Lawton and Chitty (1988).

[20] Denise LAWTON and Clyde CHITTY (1988), *The National Curriculum*, University of London Institute of Education.

[21] Aleksej Nikolaevic LEONT'EV (1978), *Activity, Consciousness and Personality*, Prentice-Hall.

[22] Ian LISTER (1974), *Deschooling*, Cambridge University Press.

[23] Roland MEIGHAN (1997), *A Sociology of Educating*, Cassell & Co.

[24] Robert MORRIS (1981), *Studies in Mathematics Education*, Volume 2, UNESCO.

[25] Antonio NEGRO (2007), *On the possibility of a Dynamic Concept*, Tesi di Laurea Quadriennale in Filosofia, Università del Salento.

[26] Mogens NISS (1983), *Considerations and Experiences Concerning Integrated Courses in Mathematics and Other Subjects*, in Zweng (1983).

[27] Henri POINCARÉ (2003), *Science and Method*, Thomas Nelson and Sons.

[28] Graham PRIEST (1973), *A beside reader's guide to the conventionalist philosophy of mathematics*, con J. Bell et. al. Proc. Bertrand Russell Memorial Logic Conference, Denmark 1971, Leeds 1973.

[29] Giovanni SAMBIN (1987), *Alla ricerca della certezza perduta (forma-contenuto nei fondamenti della matematica*, in: Forma Rappresentazione Struttura, Atti del Convegno di Studio, Padova 3-6 dicembre 1986, ed. O. Longo, Laboratorio Servizio Tecnologia, Napoli 1989, pp. 17-35.

[30] Giovanni SAMBIN (1991), *Per una dinamica nei fondamenti*, in: Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza, Viareggio, 8-13 gennaio 1990, vol. II, ed. G. Corsi - G. Sambin, CLUEB, Bologna 1991, pp. 163-210.

[31] Giovanni SAMBIN (1998), *Matematica, logica e verità, verso un risanamento*, in: M. Emmer ed., Matematica e Cultura, Springer Italia 1998, pp. 35-41.

[32] Giovanni SAMBIN (2002), *Steps towards a dynamic constructivism*, in P. Gärdenfors, J. Wolenski, K. Kijania-Placek (Eds.), *In the scope of Logic, Methodology and Philosophy of Science*, vol. I, Kluwer Academic Publishers; versione in italiano messami a disposizione dall'autore.

[33] Giovanni SAMBIN (2005), *Per una dinamica nei fondamenti*, Raccolta degli 'scritti senza formule', 1987-2000; versione messami a disposizione dall'autore.

[34] Anna SIERPINSKA (2005), *Understanding in Mathematics*, Taylor & Francis e-Library.

[35] Hugh SOCKETT (1975), *Curriculum Planning: Taking a Means to an End*, Peters.

[36] Edward Russel STABLER (1953), *An Introduction to Mathematical Thought*, Addison-Wesley.

[37] Lawrence STENHOUSE (1975), *An Introduction to Curriculum Research and Development*, Heinemann.

[38] Hilda TABA (1962), *Curriculum Development: Theory and Practice*, Harcourt Brace and World.

[39] René THOM (1973), *Modern Mathematics: does it exist?*, in Howson (1973).

[40] Alba Gonzalez THOMPSON (1984), *The Relationship Between Teachers Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice*, Educational Studies in Mathematics, Volume 15.

[41] Ernst VON GLASERSFELD (1983), *Learning as a Constructive Activity*, in J.C. Bergeron & N. Herscovics (ed.) Proceedings of the 5th Annual, Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education, Volume 1.

[42] Ernst VON GLASERSFELD (1989), *Constructivism in Education*, in Husen and Postlethwaite.

[43] Ernst VON GLASERSFELD (1995), *Radical Constructivism: a way of knowing and learning*, The Falmer Press.

[44] Lev VYGOTSKY (1986), *Thought and Language*, The Massachusetts Institute of Technology.

[45] D.H. WHEELER (1967), Notes *on Mathematics in Primary School*, Cambridge University Press.

[46] Raymond WILLIAMS (1965), *The Long Revolution*, Penguin Books.

[47] Marilyn ZWENG, Thomas GREEN, Jeremy KILPATRICK, Henry POLLAK e Marilyn SUIDAM (1983), *Proceedings ofthe Fourth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser.