www.dii.unipd.it

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Relazione per la prova finale
Metodi per lo studio delle equazioni di Eulero

Tutor universitario: Prof. Francesco Picano

Laureando*: Tomba Leonardo*

Matricola: 2067893

Padova, 16/09/2025

LE EQUAZIONI DI EULERO

www.dii.unipd.it

Le equazioni di Eulero sono leggi di conservazione che descrivono il comportamento dei fluidi compressibili sotto opportune ipotesi. Queste ipotesi prevedono di non considerare:

- Le forze di volume
- Le forze viscose
- I gradienti termici

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + P)_y + (\rho vw)_z = 0 \\ (\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + P)_z = 0 \\ E_t + [u(E+P)]_x + [v(E+P)]_y + [w(E+P)]_z = 0 \\ E = \rho(\frac{1}{2}\vec{V}^2 + e) \end{cases}$$

Volendo possiamo formularle anche con una notazione compatta, valida anche per grandezze tensoriali:

$$\begin{cases} \rho_t + div(\rho\vec{V}) = 0 \\ E = E_t + div[(E+P)\vec{V}] = 0 \\ (\rho\vec{V})_t + div(\rho\vec{V}\times\vec{V} + PI) = 0 \end{cases}$$

Dove definiamo il prodotto tensoriale come:

$$\vec{V}\times\vec{V} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ uv & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix}$$

LE EQUAZIONI DI EULERO

www.dii.unipd.it

Un'altra forma che useremo più volte nella trattazione è la forma vettoriale. Definiamo quindi un vettore incognita e tre vettori di flusso:

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)$$
$$\vec{F} = (\rho u, \rho u^2 + P, \rho uv, \rho uw, u(E+P))$$
$$\vec{G} = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + P, \rho vw, v(E+P))$$
$$\vec{H} = (\rho w, \rho uw, \rho vw, \rho w^2 + P, w(E+P))$$

L'equazione sarà matematicamente omogenea ed esprimibile come:

$$\vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x + \vec{G}(\vec{U})_y + \vec{H}(\vec{U})_z = 0$$

Queste equazioni sono estremamente valide tuttavia presentano dei limiti evidenti a causa delle semplificazioni fisiche. Inoltre sono per ora presenti più incognite che equazioni. Dovremo quindi esprimere l'energia interna specifica in funzione di altre variabili definite in precedenza.
Per fare questo ricorrerò a considerazioni termodinamiche.

LE EQUAZIONI DI STATO DEI GAS IDEALI

www.dii.unipd.it

Le EOS sono leggi che legano le grandezze termodinamiche, al fine di ottenere una descrizione completa di un certo fenomeno. Le più classiche prendono in considerazione i modelli P-v-T.
Tuttavia possiamo usare anche altre grandezze tra cui l'entropia (s) e l'entalpia (h), che si definiscono rispettivamente come:

$$Tds = de + Pdv \qquad h = e + Pv$$

Ricordiamo inoltre la prima legge della Termodinamica:

$$dQ = de + Pdv$$

Da queste equazioni possiamo ricavare i calori specifici a pressione e volume costante. Questi non sono altro che una misura della cosiddetta inerzia termica:

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \quad , \quad c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v$$

Un modello particolarmente usato è quello dei gas ideali, che ha la seguente EOS: $Pv = RT$

Il modello dei gas ideali presenta dei risultati particolarmente vantaggiosi:

$$c_p - c_v = R$$

$$e = c_v T$$

FORMA INTEGRALE

www.dii.unipd.it

Dal punto di vista matematico la forma differenziale delle equazioni di Eulero richiede ovviamente opportune ipotesi di 'regolarità' delle variabili e delle soluzioni.
Se però vogliamo descrivere i fenomeni in maniera più precisa compariranno inevitabilmente sistemi con soluzioni problematiche. Dobbiamo quindi ricorrere in questi casi ad una notazione integrale che richiede ipotesi meno stringenti.
Le tre equazioni fondamentali sono:

- **Conservazione della massa**

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{V})\right] dV = 0$$

- **Conservazione del momento**

$$\frac{d}{dt}\iiint_V (\rho \vec{V})\, dV = -\iint_A [\vec{V}(\vec{n}\cdot\rho\vec{V}) + P\vec{n} - \vec{n}\cdot\Pi]\, dA + \iiint_V \rho g\, dV$$

- **Conservazione dell'energia**

$$\frac{d}{dt}\iiint_V E dV = -\iint_A (\vec{n}\cdot E\vec{V} + P\vec{V} + \vec{Q}) dA + \iiint_V \rho(\vec{V}\cdot g) dV$$

SOTTOMODELLI

www.dii.unipd.it

Vediamo tre sistemi semplificati, ottenuti a partire dalle equazioni di Eulero, che presentano tutti un modello planare unidimensionale.

- **Equazioni isoentropiche.** L'entropia rimane costante in ogni punto.
  Si ottengono le equazioni:
  $$P = P(\rho) = C\rho^{\gamma}$$
  $$\vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x = 0 \quad \vec{U} = (\rho, \rho u)\ ,\ \vec{F} = (\rho u, \rho u^2 + P)$$
- **Equazioni isoterme.** La temperatura rimane costante in ogni punto.
  Si ottengono le equazioni:
  $$P = a^2\rho$$
  $$\vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x = 0 \quad \vec{U} = (\rho, \rho u)\ ,\ \vec{F} = (\rho u, \rho u^2 + \rho a^2)$$
- **Modello lineare della Gasdinamica.** Si considera il gas rarefatto e pressochè immobile, con velocità e densità che subiscono solo piccole perturbazioni. Da queste condizioni troviamo che:
  $$P = P(\rho_0) + \rho' \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho_0) \qquad a^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho_0) = costante$$

Sostituendo nelle equazioni isoentropiche troviamo:
$$\begin{cases} \rho'_t + \rho_0 u'_x = 0 \\ u'_t + \frac{a^2}{\rho_0}\rho'_x = 0 \end{cases}$$

Che in forma vettoriale diventa il sistema lineare:
$$\vec{W}_t + A\vec{W}_x = 0 \quad \vec{W} = (\rho, u)\ ,\ A = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}$$

www.dii.unipd.it

I sistemi iperbolici in derivate parziali sono problemi della forma:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x,t,u_1,\ldots,u_m)\frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i(x,t,u_1,\ldots,u_m) = 0$$

$$\vec{U}_t + A\vec{U}_x + B = 0 \ , \quad \vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x = 0$$

nei quali gli autovalori corrispondenti sono reali, anche se non necessariamente distinti. I modelli di equazioni che vogliamo risolvere ricadono in questa categoria. Un esempio è il modello linearizzato della Gasdinamica, che possiamo iniziare a studiare risolvendo l'equazione caratteristica.

$$|A - \lambda I| = det \begin{pmatrix} 0-\lambda & \rho_o \\ a^2/\rho_0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

Che ha due soluzioni reali e distinte:
a e –a.

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho_o \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ak_1 \\ -ak_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \rho_o \\ a^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ak_1 \\ ak_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{K}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -a/\rho_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{K}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ a/\rho_0 \end{pmatrix}$$

CURVE CARATTERISTICHE

www.dii.unipd.it

Generalmente saremo interessati ad esprimere una legge di conservazione nella forma:

$$u_t + a(x,y,z,t)u_x + b(x,y,z,t)u_y + c(x,y,z,t)u_z = 0$$

Quindi il PDE comprendente le condizioni al contorno più facile da risolvere sarà del tipo:

$$\begin{cases} u_t + a u_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Possiamo disegnare ora le curve caratteristiche, ovvero i luoghi geometrici nei quali il PDE si trasforma in un ODE. Nel nostro caso avremo che:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Se il problema è lineare le curve caratteristiche sono rette. Inoltre sapendo che lungo tutta la retta la soluzione sarà costante vale che:

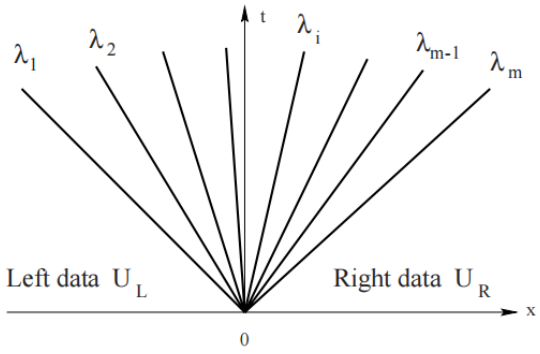
$$x(t) = at + x_0 \qquad u(x,t) = u_0(x_0) = u_0(x - at)$$

IL PROBLEMA DI RIEMANN

www.dii.unipd.it

Definiamo il problema di Riemann per un PDE come: $\vec{U}_t + A\vec{U}_x = 0 \quad , \quad \vec{U}(x,0) = \vec{U}^0(x) = \begin{cases} \vec{U}_L & x < 0 \\ \vec{U}_R & x > 0 \end{cases}$

Dove i vettori delle condizioni al contorno sono costanti. Al sistema saranno associati un certo numero di autovalori che supponiamo reali e distinti. Ad ognuno corrisponde una curva caratteristica nel piano e un'opportuna soluzione.



Se definiamo le condizioni iniziali come combinazione lineare degli autovettori anche la soluzione sarà esprimibile nella stessa forma. Quindi in generale avremo:

$$\vec{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x - \lambda_i t)\vec{K}_i$$

Da cui: $u(x,t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L \text{ se } x - at < 0 \\ u_R \text{ se } x - at > 0 \end{cases}$

$$\vec{U}(x,t) = \sum_{i=1+l}^{m} \alpha_i \vec{K}_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{K}_i \qquad \lambda_l < \frac{x}{t} < \lambda_{l+1}$$

Nel caso di un sistema 2x2: $\vec{U}(x,t) = \beta_1 \vec{K}_1 + \alpha_2 \vec{K}_2$

RISOLUZIONE EQUAZIONI DI EULERO

www.dii.unipd.it

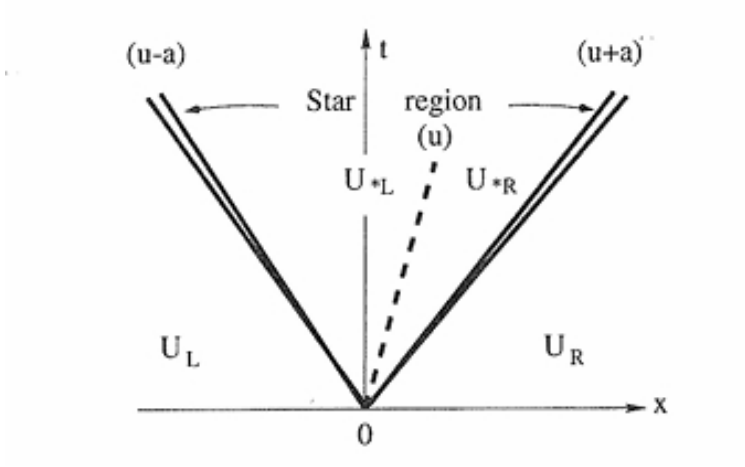
Applichiamo ora le nozioni presentate alle equazioni di Eulero nella forma:

$$\vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x = 0 \ , \ \vec{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix} \ , \ \vec{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ u(E+P) \end{pmatrix}$$

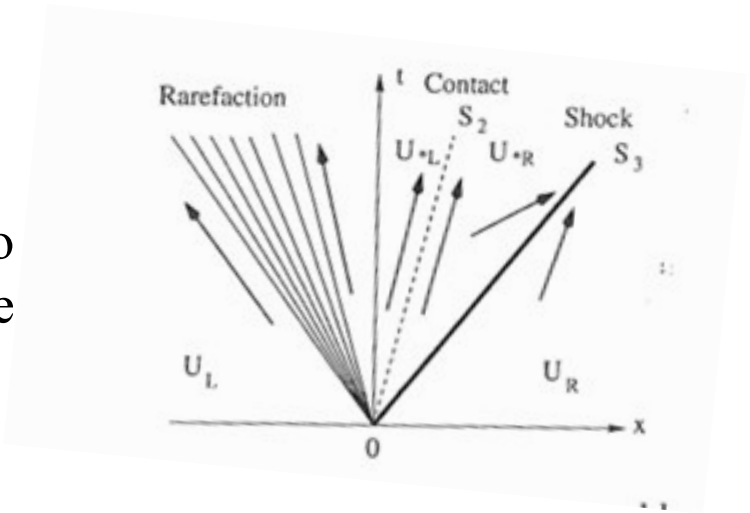
Il problema di Riemann corrispondente sarà:

$$\begin{cases} \vec{U}_t + \vec{F}(\vec{U})_x = 0 \\ \vec{U}(x,0) = \vec{U}^0(x) = \begin{cases} \vec{U}_L & se \ \ x < 0 \\ \vec{U}_R & se \ \ x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Graficamente le curve caratteristiche appariranno come:



Dividendo il piano in quattro zone e con tre possibili tipologie di soluzioni.



TIPOLOGIE DI SOLUZIONI

www.dii.unipd.it

La forma delle onde della soluzione può essere di tre tipologie, che non sono individuabili a priori osservando il sistema:

- **Onde di contatto.** Sono caratterizzate da una pressione e una velocità costanti.

- **Onde rarefatte.** Pressione e velocità non sono costanti ma presentano le seguenti caratteristiche:

$$I_L(u,a) = \begin{cases} u + \dfrac{2a}{\gamma - 1} = costante \\ s = costante \end{cases} \qquad \text{se} \qquad \lambda = u - a$$

$$I_R(u,a) = \begin{cases} u - \dfrac{2a}{\gamma - 1} = costante \\ s = costante \end{cases} \qquad \text{se} \qquad \lambda = u + a$$

- **Onde shock.** Pressione e velocità non sono costanti, ma sono funzioni dei numeri di Mach:

$$\frac{\rho_*}{\rho_R} = f(M_R, M_S) \quad , \quad \frac{P_*}{P_R} = g(M_R, M_S)$$

$$M_R = \frac{u_R}{a_R} \quad , \quad M_S = \frac{S_3}{a_R}$$