

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE ED AMBIENTALE

Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Civile



TESI DI LAUREA

Analisi limite di telai in acciaio

Relatore: Chiar.mo PROF. CARLO PELLEGRINO

Correlatore: ING. PAOLO ZAMPIERI

Laureando: DANIEL DAL FORNO

ANNO ACCADEMICO 2021-2022

INDICE

INTRODUZIONE	pg.1
---------------------------	-------------

CAPITOLO 1

Cenni teorici sulla teoria dell'analisi limite

1.1	Ipotesi.....	pg.2
1.2	Comportamento elasto-plastico.....	pg.2
1.3	Teoremi.....	pg.4
1.3.1	Teorema dei lavori virtuali.....	pg.4
1.3.2	Teoremi dell'analisi limite.....	pg.6
1.3.2.1	<i>Teorema statico</i>	pg.7
1.3.2.2	<i>Teorema cinematico</i>	pg.8
1.3.2.3	<i>Teorema soluzione completa</i>	pg.10

CAPITOLO 2

Esempi applicativi

2.1	Telaio soggetto ad una forza concentrata orizzontale.....	pg.13
2.2	Telaio soggetto ad una forza concentrata orizzontale ed una verticale.....	pg.19
2.3	Asta soggetta ad una doppia forza concentrata verticale.....	pg.26
2.4	Asta soggetta a carico distribuito.....	pg.31

BIBLIOGRAFIA.....	pg.37
--------------------------	--------------

Introduzione

L'analisi limite dei telai in acciaio è una tecnica per la valutazione della resistenza ultima della struttura che ha origine dalla teoria della plasticità. Essa permette di tenere in considerazione caratteristiche intrinseche del materiale e della struttura che garantiscono una resistenza alle sollecitazioni non soltanto in fase elastica, ma anche in quella plastica.

La proprietà fondamentale considerata per quel che riguarda il materiale è il suo comportamento elasto-plastico. Questa caratteristica, se combinata con una struttura iperstatica, garantisce la possibilità che si vengano a formare cerniere plastiche, ovvero punti della struttura in cui viene raggiunta la resistenza ultima locale, senza che si vengano a creare meccanismi di collasso della stessa.

Il metodo dell'analisi limite si propone quindi di andare a valutare il carico ultimo del corpo attraverso la determinazione del cosiddetto moltiplicatore di collasso. Quando viene raggiunto tale carico, avremo che nella struttura si formeranno un numero di cerniere plastiche tale per cui la configurazione strutturale risulterà essere labile.

Per valutare tale coefficiente si procederà attraverso la valutazione di un moltiplicatore cinematico e di un moltiplicatore statico, i quali se di uguale valore rappresenteranno il carico di collasso esatto.

I due procedimenti si basano su aspetti diversi.

Il metodo cinematico si propone di determinare il moltiplicatore andando ad individuare tutte le varie configurazioni labili del telaio e ricavare i diversi valori del coefficiente (a seconda del tipo di movimento) sfruttando il teorema dei lavori virtuali. Per applicare il TLV si andrà ad uguagliare il lavoro esterno dovuto ai piccoli spostamenti della struttura nei punti di applicazione delle forze esterne con il lavoro interno dovuto ai momenti plastici ed alle rotazioni nei punti di formazione delle cerniere plastiche.

Il metodo statico invece si propone di determinare il moltiplicatore andando a verificare le condizioni di plasticità nelle varie sezioni di interesse, ovvero ponendo il momento agente nel punto considerato minore o uguale al modulo del momento resistente della sezione in analisi. Nell'applicazione delle condizioni di ammissibilità plastica si utilizza il valore assoluto per tenere in considerazione la duttilità del materiale.

Capitolo 1

1.1 Ipotesi

Le ipotesi fondamentali che devono essere verificate per poter utilizzare questo metodo sono:

- ◆ Piccoli spostamenti
- ◆ Duttilità illimitata
- ◆ Plasticità perfetta
- ◆ Leggi di flusso di tipo associato

L'ipotesi di duttilità illimitata esprime l'approssimazione per la quale il materiale sia in grado di subire deformazioni indefinite per $|\sigma| = \sigma_0$ purché questo avvenga nel verso della plasticizzazione.

La legge di flusso di tipo associato, detta anche “legge di normalità”, dice che il flusso plastico deve avere direzione uscente rispetto alla superficie di snervamento. Tale ipotesi viene a mancare in materiali come i terreni, nei quali le deformazioni sono correlate a fenomeni di dilatanza.

1.2 Comportamento elasto-plastico

Le informazioni fondamentali per l'analisi del comportamento dei metalli vengono ottenute a partire da prove di trazione e prove di compressione.

Da esse, si può determinare che il comportamento della maggior parte dei metalli è quello rappresentato in figura 1.

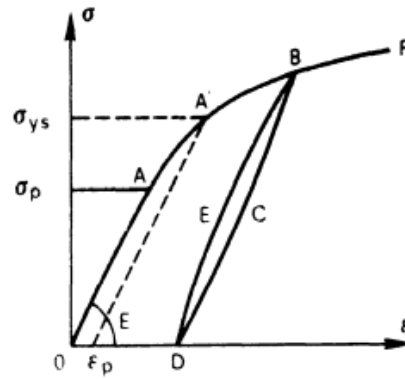


Fig. 1

Da tale grafico si può notare un comportamento riconducibile alla linearità soltanto per un tratto compreso tra i punti O ed A, al termine del quale il materiale raggiunge una fase in cui il suo comportamento risulta essere sia elastico che plastico. Questo ci dice che se il materiale viene sottoposto ad una certa deformazione, soltanto parte di essa verrà recuperata se il carico che l'ha generata viene rimosso.

Essendo che il grafico non presenta una distinzione netta tra la fase elastica e quella plastica, per andare ad individuare il punto di snervamento del materiale è necessario utilizzare un procedimento arbitrario. Infatti, tale punto viene individuato andando ad intersecare il grafico con una retta parallela al tratto elastico che parte da un valore di deformazione pari allo 0,2%.

Per l'utilizzo di questo tipo di grafici è comodo ricondursi a grafici approssimati da una funzione bilineare, la quale quindi va a distinguere il comportamento del materiale mediante due coefficienti di elasticità diversi. Le rappresentazioni approssimate più utilizzate sono:

- comportamento elasto-plastico perfetto;
- comportamento elasto-plastico incrudente;
- comportamento elasto-plastico con softening.

Come si può vedere dalla figura 2, un materiale elasto perfettamente plastico, una volta che ha raggiunto il punto di snervamento, sarà caratterizzato da una fase in cui subisce un aumento di deformazione anche se sottoposto ad una tensione costante.

Il comportamento incrudente invece, prevede che per avere deformazioni nella fase plastica sia comunque necessario incrementare il valore di tensione, ma, avendo un valore del coefficiente di elasticità più basso, avremo che le deformazioni dovute ad un aumento unitario di tensione sono molto più elevate rispetto alla fase elastica del materiale. Nel caso del softening il materiale nella fase plastica subirà deformazioni anche per valori di tensione inferiori rispetto a quello di snervamento.

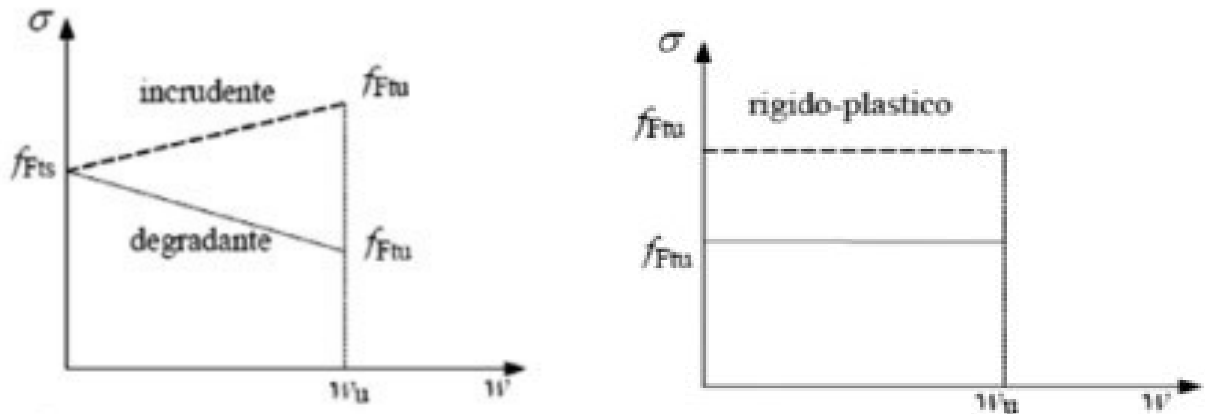


Fig. 2

1.3 Teoremi

1.3.1: Teorema dei Lavori Virtuali

Questo teorema, applicato nel caso di mezzi continui caratterizzati da equazioni costitutive qualunque, comporta l'uguaglianza del lavoro esterno dovuto al prodotto tra le forze applicate e i relativi spostamenti virtuali col lavoro interno derivante da tensioni e deformazioni sviluppate dal corpo C.

Su tale corpo si considerino applicate sia forze di volume F che forze di superficie f , come indicato in figura 3.

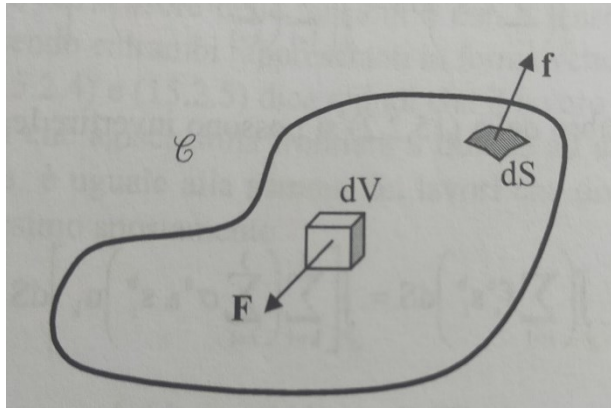


Fig. 3

Per definire la formulazione del teorema è necessario inoltre individuare due sistemi.

Un sistema “a” detto “staticamente ammissibile”, il quale rappresenta un sistema di forze e tensioni in equilibrio tra loro.

Un sistema “b” detto “cinematicamente ammissibile”, il quale rappresenta un sistema di spostamenti e deformazioni congruenti tra loro.

Se essi vengono definiti, allora vale che:

$$\int_V F^{(a)} * s^{(b)} dV + \int_V f^{(a)} * s^{(b)} dV = \int_V \sigma^{(a)} * \varepsilon^{(b)} dV$$

$$\text{dove: } \begin{cases} L_{Vi} = \int_V \sigma^{(a)} * \varepsilon^{(b)} dV \\ L_{Ve} = \int_V F^{(a)} * s^{(b)} dV + \int_V f^{(a)} * s^{(b)} dV \end{cases}$$

Di notevole importanza è il fatto che i due sistemi sopra definiti sono arbitrari, ovvero il campo di spostamenti e deformazioni congruente “b” non deve necessariamente essere derivante dal campo di forze e tensioni “a”. Questo implica che il risultato appena descritto possa essere verificato per sistemi indipendenti tra loro che rispettano le condizioni necessarie.

Questo appena definito è un teorema fondamentale per lo studio della meccanica dei solidi. Infatti, esso risulta essere una condizione necessaria e sufficiente per garantire l’equilibrio del corpo studiato. Tale conclusione ci dice che tutte le equazioni che descrivono il comportamento di un elemento di

riferimento, come per esempio le travi o le lastre, possono essere ottenute a partire da esso.

1.3.2: Teoremi fondamentali dell'analisi limite

Prima di andare a definire i vari teoremi che caratterizzano lo studio in oggetto, si ritiene opportuno fare un'introduzione più articolata di cosa si intende con analisi limite.

Essa rappresenta una parte della teoria della plasticità.

Per descrivere tale teoria supponiamo di avere un corpo od una struttura soggetta ad un sistema di carichi che vengono incrementati in maniera quasi statica e proporzionale. Con “quasi statica” si intende che il processo di carico è sufficientemente lento in modo tale da poter non considerare tutti gli effetti dinamici. Col termine “proporzionale” intendiamo che il rapporto di intensità di due carichi qualsiasi rimanga costante durante il processo di carico. Un carico che rispetta queste due caratteristiche prende il nome di “carico proporzionale”. Considerando le forze di volume “ F ” e di superficie “ f ” della meccanica del continuo abbiamo che un carico proporzionale è ottenuto quando queste forze diventano μF e μf con μ che aumenta lentamente.

Supponiamo di considerare una struttura ingegneristica. Fino a certi valori di μ avremo che la struttura lavora in campo elastico, ma raggiunto un certo valore $\mu_a > 1$ alcune parti della struttura raggiungeranno il limite di snervamento. Questo comportamento prende il nome di “flusso plastico contenuto” perché le deformazioni della struttura sono ancora controllate dalle parti della stessa che sono ancora in campo elastico.

Raggiunto un moltiplicatore μ_1 definito valore limite, abbiamo che il carico $\mu_1 F$ non varia di molto, ma questo comunque provoca deformazioni di ampiezza diverse volte maggiore della massima deformazione elastica. Questo comportamento è dovuto dallo svilupparsi di un flusso plastico nella struttura tale per cui il rimanente materiale in fase plastica non contribuisce più in maniera efficace al sostentamento del carico. Questo è stato chiamato flusso plastico non contenuto.

Lo scopo della teoria della plasticità è lo studio dettagliato del campo delle tensioni e delle deformazioni in strutture in uno stato di flusso plastico contenuto. La branca di questa teoria che sviluppa metodi per la valutazione del collasso plastico delle strutture è definita “analisi limite”.

Per la trattazione di questo metodo sono state considerate alcune semplificazioni:

- la struttura è realizzata da materiale elasto-plastico perfetto, o rigido perfettamente plastico, con un plateau di snervamento indefinito;
- la struttura rispetta le equazioni di equilibrio scritte per la sua configurazione indeformata;
- non si verificano fenomeni come rotture fragili o instabilità.

Il collasso verrà definito come la condizione per la quale le deformazioni possono aumentare senza limiti mentre il carico è mantenuto costante.

1.3.2.1: Teorema del limite inferiore o teorema statico

” Se è possibile determinare un campo di tensioni σ_{ij} che soddisfi le equazioni di equilibrio e che non violi le condizioni della funzione di snervamento, allora il corrispondente moltiplicatore μ_- non può eccedere il moltiplicatore limite μ_{lim} ”

$$\mu_- \leq \mu_{lim}$$

Dimostrazione:

Il carico limite è composto sia da forze superficiali $\mu_{lim}f_i$ che da forze di volume $\mu_{lim}F_i$. Siano σ_{ij} , v_i e ε_{ij} le tensioni, velocità e deformazioni al tempo del collasso. Imponiamo che sia il campo di tensioni generico $\bar{\sigma}_{ij}$ che l'effettivo campo di tensioni al collasso σ_{ij} siano in equilibrio. Per entrambe le applicazioni considereremo come campo di deformazioni virtuali quello al momento del collasso in quanto cinematicamente ammissibile.

Allora per il teorema dei lavori virtuali dovremo avere:

$$\mu_- \left[\int_V F_i \delta v_i dV + \int_S f_i \delta v_i dS \right] = \int_V \bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P dV$$

e

$$\mu_{lim} \left[\int_V F_i \delta v_i dV + \int_S f_i \delta v_i dS \right] = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P dV$$

Facendo la differenza delle due equazioni otteniamo

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P dV - \int_V \bar{\sigma}_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P dV = (\mu_{lim} - \mu_-) \left[\int_V F_i \delta v_i dV + \int_S f_i \delta v_i dS \right]$$

Sapendo che $\bar{\sigma}_{ij}$ è un campo di tensioni ammissibile, sfruttando il teorema della massima dissipazione, deduciamo che il termine a sinistra dell'uguale è non negativo. Avendo poi che il lavoro delle forze esterne è positivo, da questo abbiamo che necessariamente il valore del moltiplicatore statico deve essere inferiore al valore del moltiplicatore limite. CVD

Questo teorema è molto importante in quanto prova che, per strutture elastiche perfettamente plastiche soggette a pesi propri, solo le equazioni di equilibrio risultano essere vitali, mentre quelle di congruenza possono essere violate.

1.3.2.2: Teorema del limite superiore o teorema cinematico

“Un qualsiasi moltiplicatore μ_+ corrispondente ad un meccanismo di flusso cinematicamente ammissibile è non inferiore al moltiplicatore di collasso”

$$\mu_+ \geq \mu_{lim}$$

Dimostrazione:

Siano v_{i+} e ε_{ij+} le velocità e deformazioni del meccanismo di flusso cinematicamente ammissibile. Il corrispondente moltiplicatore μ_+ è fornito dall'equazione a)

$$a) \quad \mu_+ \left[\int_V F_i \delta v_{i+} dV + \int_S f_i \delta v_{i+} dS \right] = \int_V \sigma_{ij+} \delta \varepsilon_{ij+} dV$$

Siano σ_{ij} le tensioni al collasso della struttura, in equilibrio con le forze esterne $\mu_{lim} F_i$ e $\mu_{lim} f_i$. Dal teorema dei lavori virtuali possiamo ottenere che

$$b) \quad \mu_{lim} \left[\int_V F_i v_{i+} dV + \int_S f_i v_{i+} dS \right] = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij+} dV$$

Essendo σ_{ij} un campo di tensioni ammissibili, dal principio della dissipazione della massima energia, abbiamo

$$\int_V \sigma_{ij+} \varepsilon_{ij+} dV \geq \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij+} dV$$

Considerando quest'ultimo risultato e facendo la sottrazione tra l'equazione a) e b) otteniamo che

$$|\mu_+ - \mu_{lim}| \left[\int_V F_i v_{i+} dV + \int_S f_i v_{i+} dS \right] = \int_V \sigma_{ij+} \varepsilon_{ij+} dV - \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij+} dV \geq 0$$

Avendo che il lavoro è positivo, allora necessariamente dobbiamo avere che $\mu_+ \geq \mu_{lim}$.

Tale teorema può essere espresso anche nella seguente forma: “La struttura non perviene al collasso sotto un sistema di carichi in corrispondenza del quale esista un insieme di azioni interne in equilibrio con i carichi ed all'interno del dominio di ammissibilità”

1.3.2.3: Teorema combinato-soluzione completa

“Quando è possibile associare dalla legge del potenziale flusso plastico un campo di tensioni staticamente ammissibile ed un meccanismo cinematicamente ammissibile, il moltiplicatore μ appartenente simultaneamente ad entrambi i campi è esattamente il moltiplicatore di collasso μ_{lm} ”

Questo teorema deriva dal fatto che se riusciamo ad ottenere un moltiplicatore a partire da una configurazione cinematicamente ammissibile ed uno a partire da una configurazione di equilibrio e i due coincidono, essendo che $\mu_+ \geq \mu_{lim}$ e $\mu_- \leq \mu_{lim}$, allora necessariamente il valore del moltiplicatore deve coincidere con quello limite.

I tre teoremi sopra citati sono stati sviluppati per corpi costituiti da materiali il cui comportamento risulta essere rigido perfettamente plastico o per materiali elastici perfettamente plastici. Per entrambe le idealizzazioni della legge costitutive, tali teoremi risultano essere equivalenti.

Essi, infatti, risultano essere basati esclusivamente sui concetti di campi di tensioni staticamente ammissibili e campi di deformazioni plastiche cinematicamente ammissibili.

La principale differenza tra le due schematizzazioni sta nel fatto che se si considera l'elasto-plasticità si ha che lo stato limite corrisponde ad un incipiente flusso plastico incontenuto. Per un punto qualsiasi della struttura, il grafico forza spostamento è inizialmente caratterizzato da una linea retta che rappresenta un range elastico per il materiale. Alla fine di questo tratto, troviamo una curva che rappresenta un comportamento elasto-plastico del materiale nella quale possiamo individuare un

flusso plastico contenuto. Passata la curva arriviamo nel tratto in cui la plasticizzazione si è diffusa a sufficienza nella struttura e quindi il flusso plastico può aumentare in maniera incontrollata. In questa fase abbiamo quindi un aumento di deformazioni senza limiti a forza costante.

Nel caso di materiale rigido perfettamente plastico, le parti rigide del corpo prevengono la formazione di qualsiasi deformazione fino al punto che non viene a generarsi un flusso plastico incontrollato per il carico limite caratterizzato dal moltiplicatore λ_1 .

Entrambe queste idealizzazioni, visibili in figura, sono accettabili fintanto che le deformazioni elasto-plastiche nei momenti precedenti al collasso sono piccole a sufficienza, in modo tale da non cambiare troppo le condizioni iniziali della geometria del corpo. Se questa condizione non viene rispettata entrambi gli schemi sono ugualmente mal condizionati ed è necessario quindi ricorrere a metodi non lineari al passo.

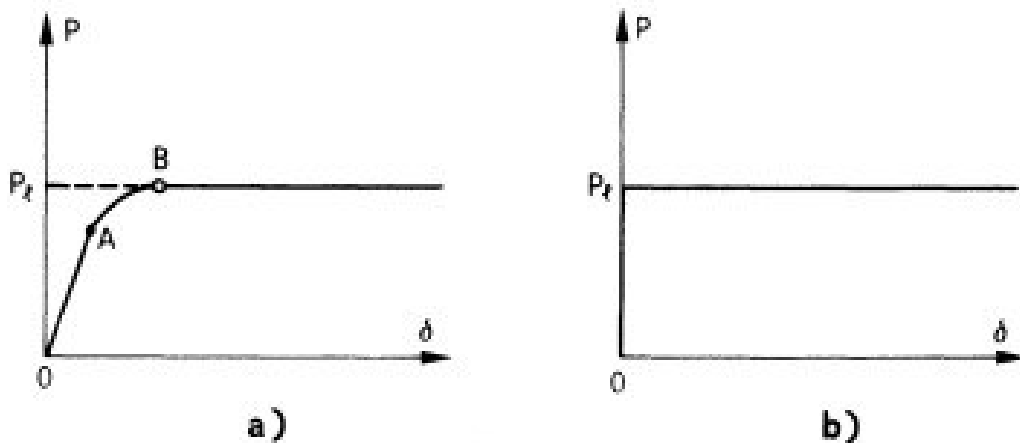


Fig. 4

Nel confronto tra la pratica e la teoria il comportamento di una struttura allo stato limite può differenziarsi a causa di due motivazioni principali:

- a. a seguito delle deformazioni elasto-plastiche la struttura reale nei momenti immediatamente precedenti al collasso presenta delle deviazioni dalla sua configurazione ideale, alle quali possono essere aggiunte le imperfezioni di forma dovute al processo produttivo delle parti che compongono la struttura;

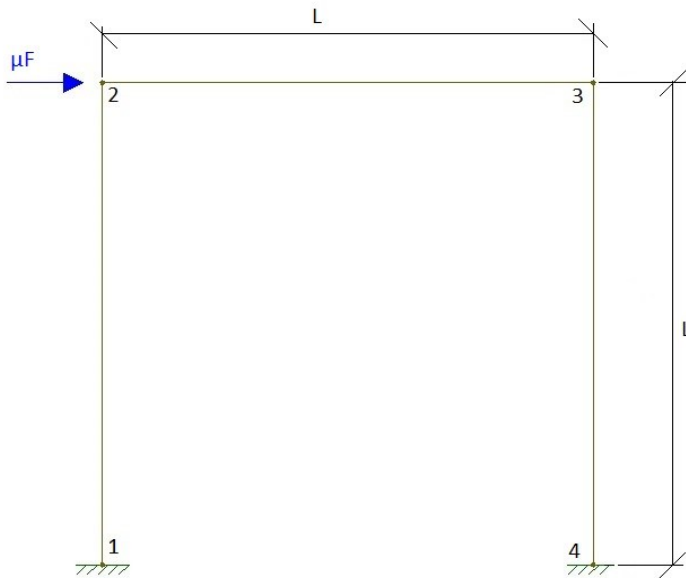
- b. quando si verificano grandi deformazioni plastiche, il materiale esibisce un lavoro di hardening che la teoria della plasticità non considera.

Quando si studiano strutture in campo elastico solitamente è sufficiente eseguire uno studio considerando soltanto gli effetti del primo ordine in quanto le non linearità sono di entità trascurabile.

Se invece si passa allo studio del comportamento di strutture che lavorano in campo plastico, la relativa importanza degli effetti del secondo ordine è molto più elevata poiché tali effetti sono circa proporzionali al quadrato della relativa deformazione. Se si considera che la deformazione al collasso è tra le 2 e le 3 volte più grande di quella in esercizio, gli effetti del secondo ordine risulteranno essere tra le 4 e le 9 volte più grandi delle condizioni di servizio. Il maggior problema nella pratica è verificare se il carico limite teorico è effettivamente raggiunto e, se questo avviene, apprezzare il comportamento della struttura una volta raggiunto tale carico. Per rispondere a questa domanda è necessario esaminare se gli spostamenti presenti al momento del collasso tenderanno ad aumentare o diminuire il limite teorico della struttura.

Capitolo 2

2.1 "Telaio incastrato con forza orizzontale concentrata"

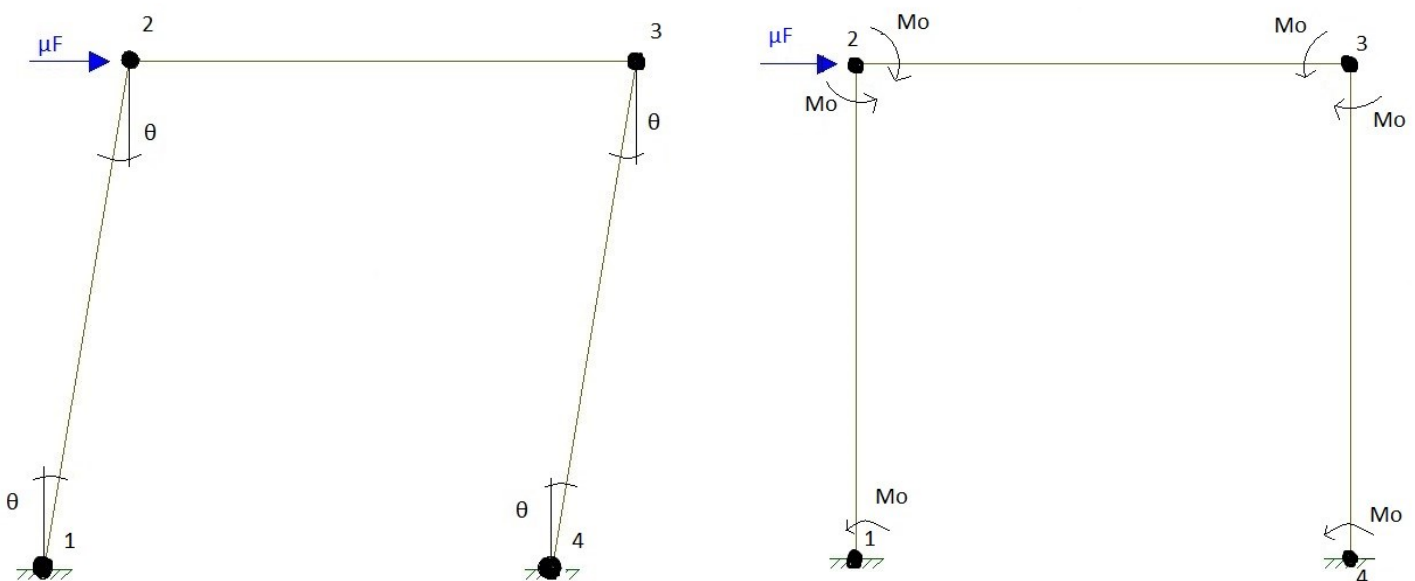


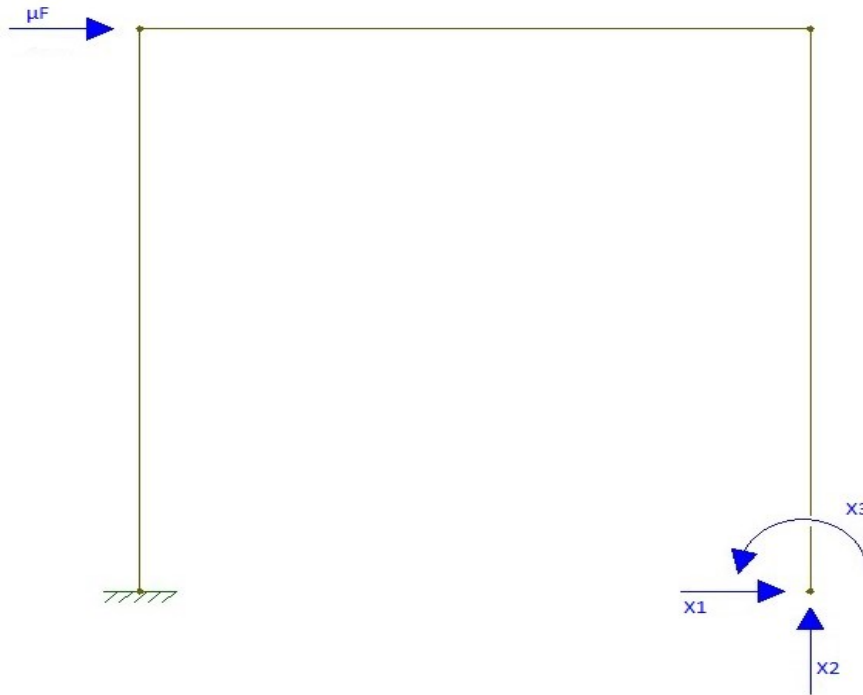
Dati:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 20 \text{ kN} \\ L = 6 \text{ m} \\ \text{IPE 140} \Rightarrow W_p = 77320 \text{ mm}^3 \\ \text{Acciaio S 235} \Rightarrow f_{yd} = 235 \text{ Mpa} \\ M_0 = W_p * f_{yd} = 18,17 \text{ kN} * \text{m} \end{array} \right.$$

Metodo cinematico

Labilità: identifico i possibili meccanismi di collasso.





Valutazione del lavoro interno e del lavoro esterno per l'applicazione del TLV e il calcolo del moltiplicatore cinematico.

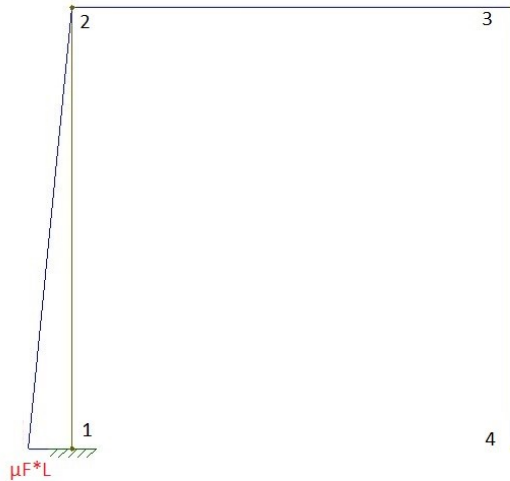
$$\begin{cases} L_i = 4 * M_0 * \theta \\ L_e = \mu_C * F * L * \theta \end{cases} \Rightarrow L_i = L_e \Rightarrow \mu_C = 4 \frac{M_0}{F * L} = 4 \frac{18,17 \text{ kN} * \text{m}}{20 \text{ kN} * 6\text{m}} = 0,606$$

Metodo statico

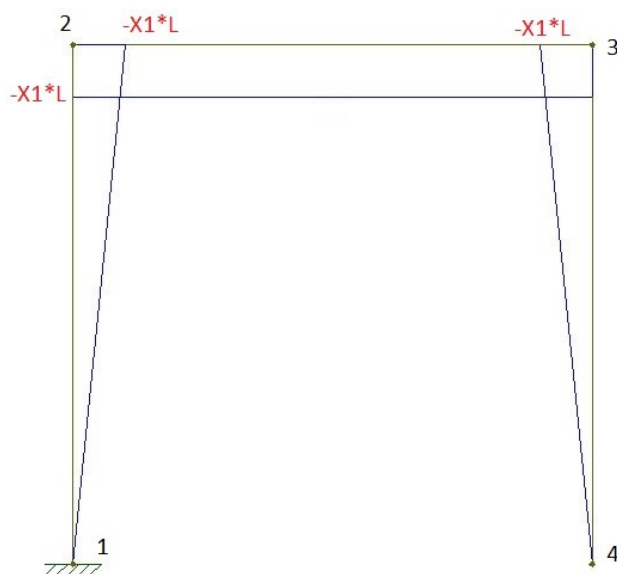
⇒ Individuazione delle incognite iperstatiche e relativi diagrammi

Diagrammi:

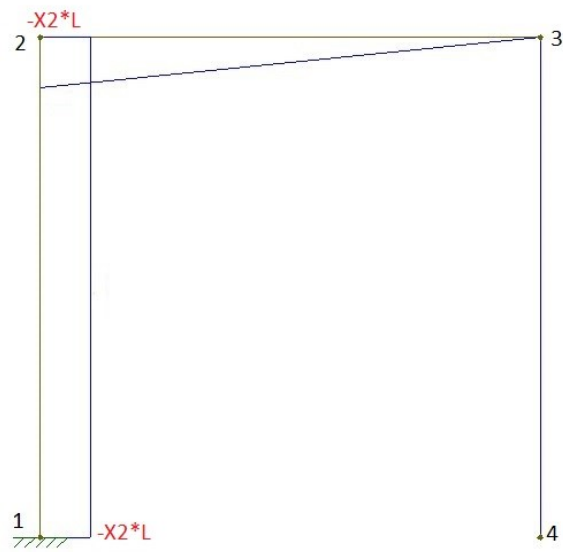
⇒ Caso F



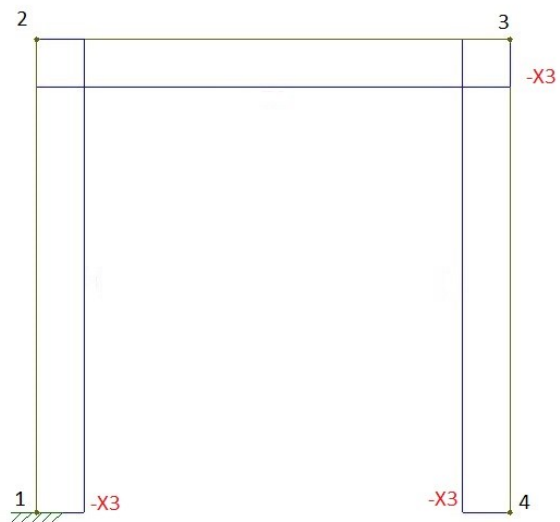
⇒ Caso X_1



⇒ Caso X_2



⇒ Caso X_3



⇒ Imposizione delle condizioni di plasticità

SEZIONI	EQUILIBRIO	AMMISSIBILITA'
1	$M_1 = (\mu_s * F - X_2) * L - X_3$	$ (\mu_s * F - X_2) * L - X_3 \leq M_0$
2	$M_2 = -(X_1 + X_2) * L + X_3$	$ (X_1 + X_2) * L + X_3 \leq M_0$
3	$M_3 = -X_1 * L - X_3$	$ X_1 * L + X_3 \leq M_0$
4	$M_4 = -X_3$	$ X_3 \leq M_0$

⇒ Risoluzione:

➤ $X_3 = M_0$

➤ $|X_1 * L + X_3| \leq M_0 \Rightarrow |X_1 * L + M_0| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} X_1 * L + M_0 \leq M_0 \\ X_1 * L + M_0 \geq -M_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_1 = -2 * \frac{M_0}{L} \end{cases} \Rightarrow X_1 = -2 * \frac{M_0}{L}$

➤ $|(X_1 + X_2) * L + X_3| \leq M_0 \Rightarrow \left| \left(-2 * \frac{M_0}{L} + X_2 \right) * L + M_0 \right| \leq M_0$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(-2 * \frac{M_0}{L} + X_2 \right) * L + M_0 \leq M_0 \\ \left(-2 * \frac{M_0}{L} + X_2 \right) * L + M_0 \geq -M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 * L \leq 2 * M_0 \\ X_2 * L \geq 0 \end{cases} \Rightarrow X_2 = 2 * \frac{M_0}{L}$

➤ $|(\mu_s * F - X_2) * L - X_3| \leq M_0 \Rightarrow \left| \left(\mu_s * F - 2 * \frac{M_0}{L} \right) * L - M_0 \right| \leq M_0$

$\Rightarrow \begin{cases} \left(\mu_s * F - 2 * \frac{M_0}{L} \right) * L - M_0 \leq M_0 \\ \left(\mu_s * F - 2 * \frac{M_0}{L} \right) * L - M_0 \geq -M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_s * F * L - 3 * M_0 \leq M_0 \\ \mu_s * F * L - 3 * M_0 \geq -M_0 \end{cases}$

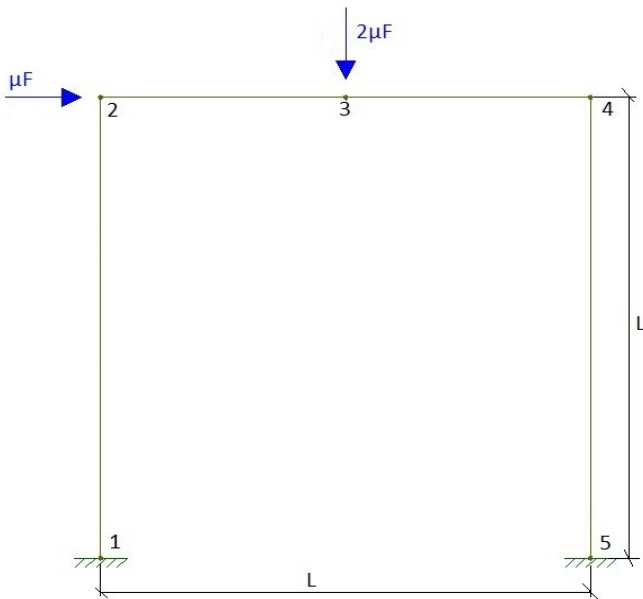
$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{s1} = 4 * \frac{M_0}{F * L} = 0,606 \\ \mu_{s2} = -2 * \frac{M_0}{F * L} = -0,3028 \end{cases}$

Per il teorema statico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_S = \max\{\mu_{s1}, \mu_{s2}\} = \mu_{s1} = 0,606$$

I valori di μ_S e di μ_C coincidono; questa condizione permette di identificare univocamente il moltiplicatore di collasso che risulterà essere $\mu=0,606$.

2.2.: “Telaio incastrato con una forza concentrata orizzontale ed una verticale”



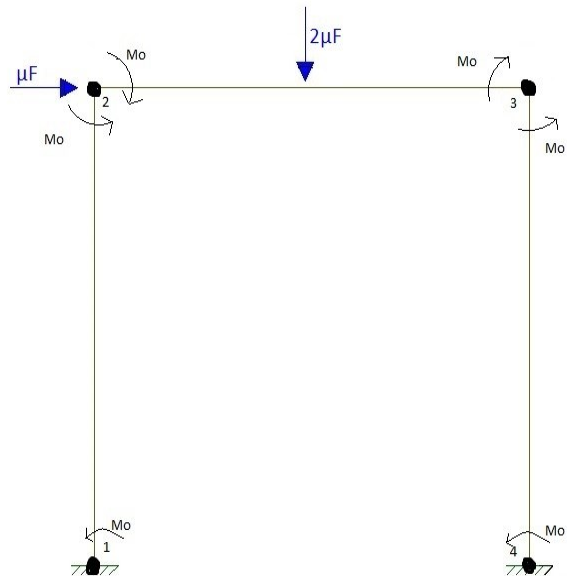
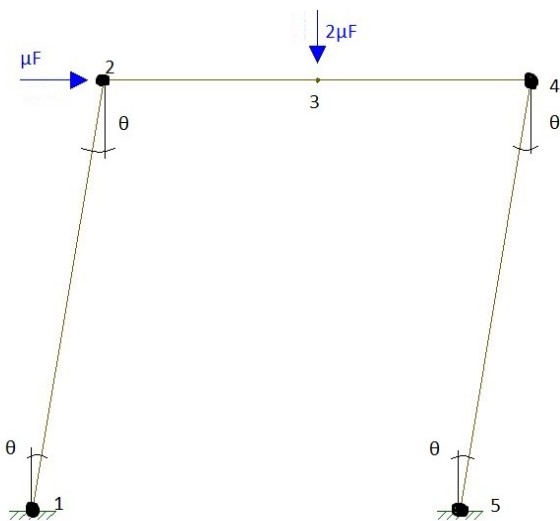
Dati:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 20 \text{ kN} \\ L = 6 \text{ m} \\ \text{IPE 140} \Rightarrow W_p = 77320 \text{ mm}^3 \\ \text{Acciaio S 235} \Rightarrow f_{yd} = 235 \text{ Mpa} \\ M_0 = W_p * f_{yd} = 18,17 \text{ kN} * \text{m} \end{array} \right.$$

Metodo cinematico

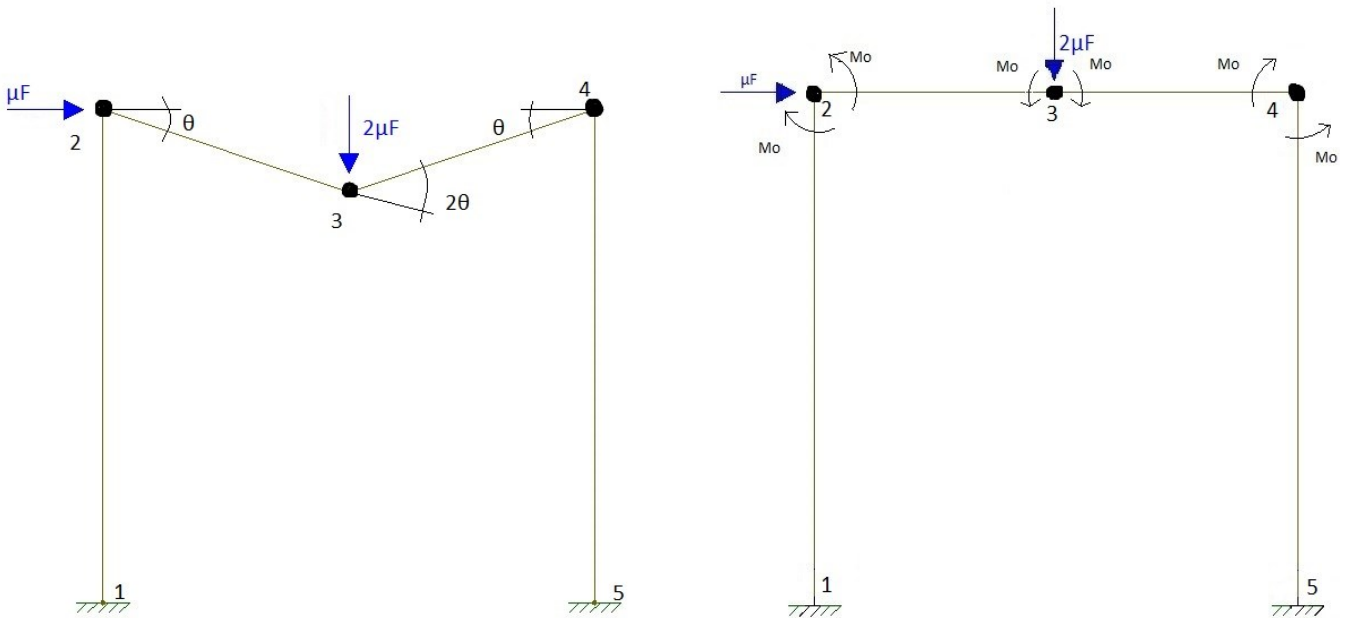
⇒ Labilità: identifico i possibili meccanismi di collasso.

1)



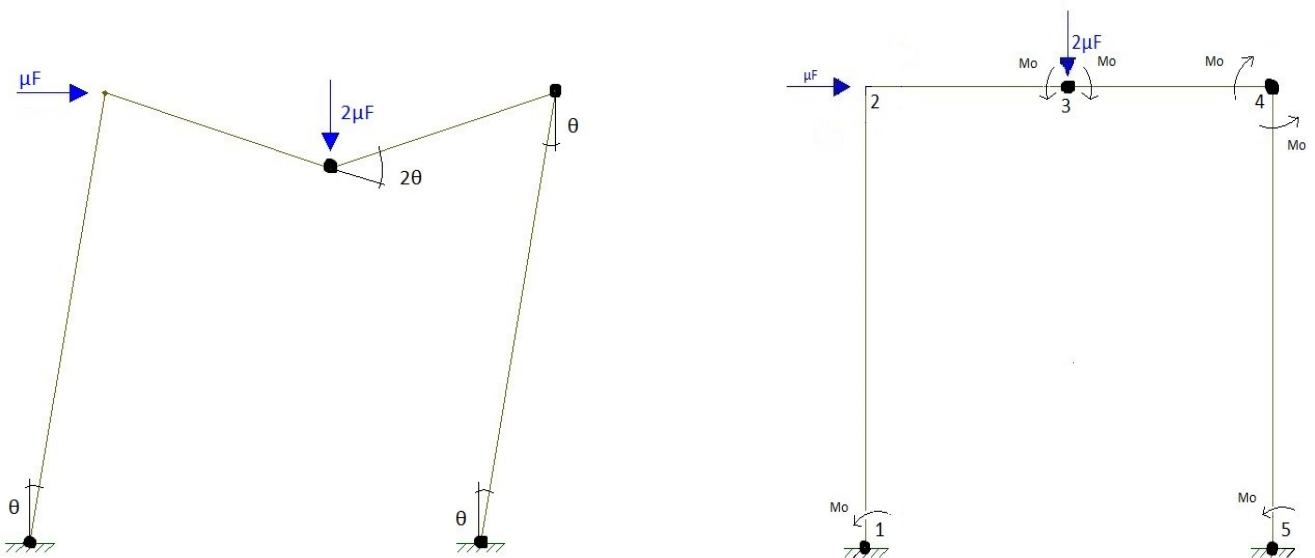
$$\begin{cases} L_i = 4 * M_0 * \theta \\ L_e = \mu * F * L * \theta \end{cases} \Rightarrow \mu_{C1} = 4 \frac{M_0}{F * L} = 4 \frac{18,17 \text{ kN} * \text{m}}{20 \text{ kN} * 6 \text{ m}} = 0,606$$

2)



$$\begin{cases} L_i = 4 * M_0 * \theta \\ L_e = 2 * \mu * F * \frac{L}{2} * \theta \end{cases} \Rightarrow \mu_{C2} = 4 \frac{M_0}{F * L} = 4 \frac{18,17 \text{ kN} * \text{m}}{20 \text{ kN} * 6 \text{ m}} = 0,606$$

3)



$$\begin{cases} L_i = 6 * M_0 * \theta \\ L_e = \mu * F * L * \theta + 2 * \mu * F * \frac{L}{2} * \theta = 2 * \mu * F * L * \theta \end{cases}$$

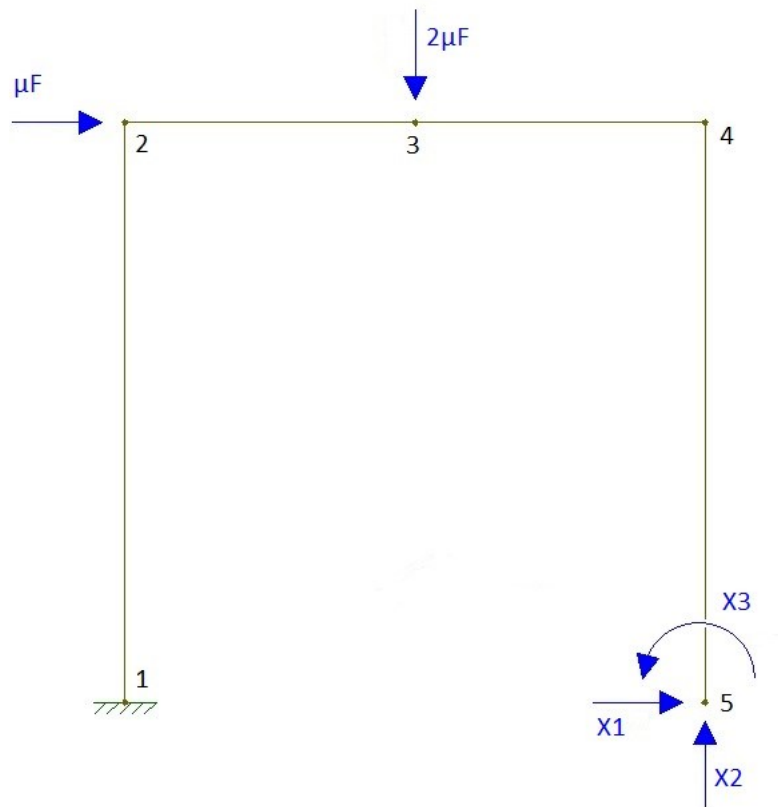
$$\Rightarrow \mu_{C3} = 3 \frac{M_0}{F * L} = 3 * \frac{18,17 \text{ kN*m}}{20 \text{ kN} * 6 \text{ m}} = 0,454$$

Per il teorema cinematico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_C = \min\{\mu_{C1}; \mu_{C2}; \mu_{C3}\} = \mu_{C3} = 0,454$$

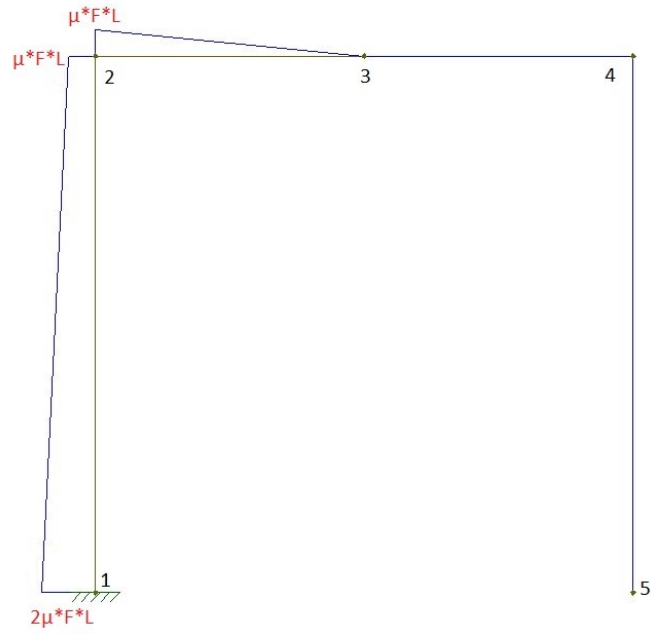
Metodo statico

⇒ Individuazione delle incognite iperstatiche e relativi diagrammi

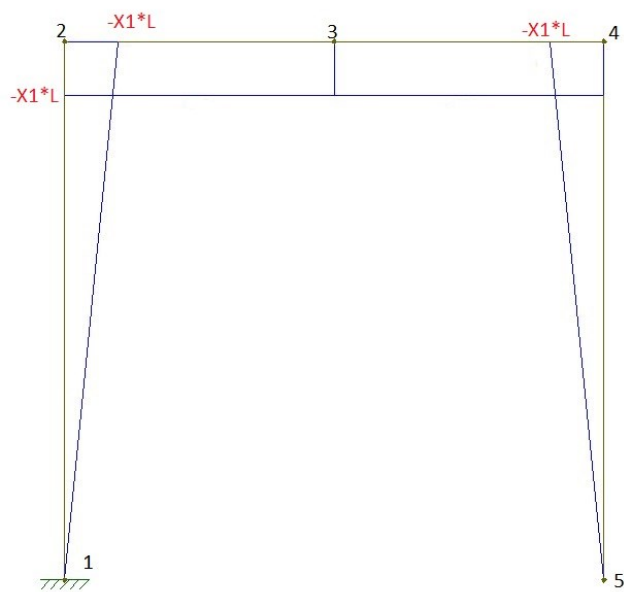


Diagrammi:

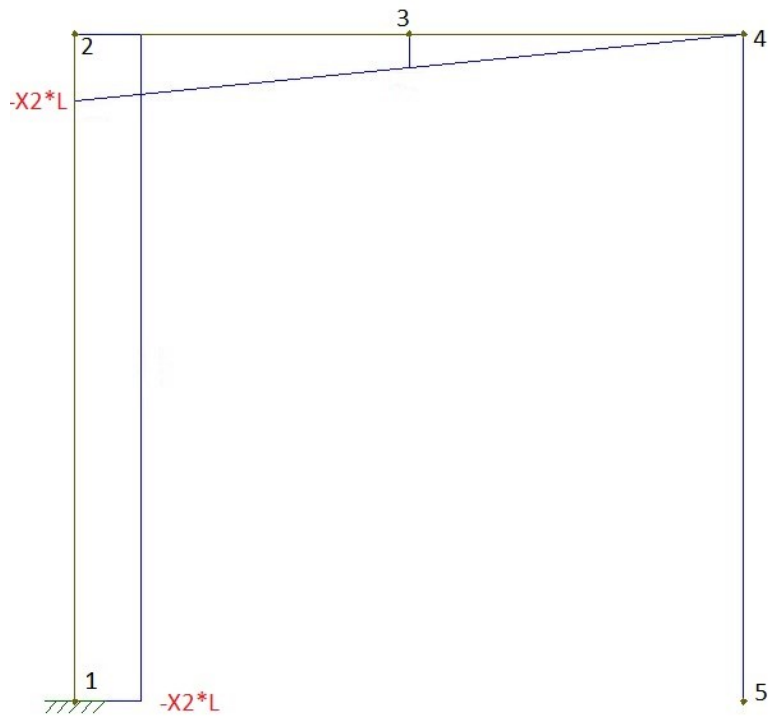
⇒ Caso F



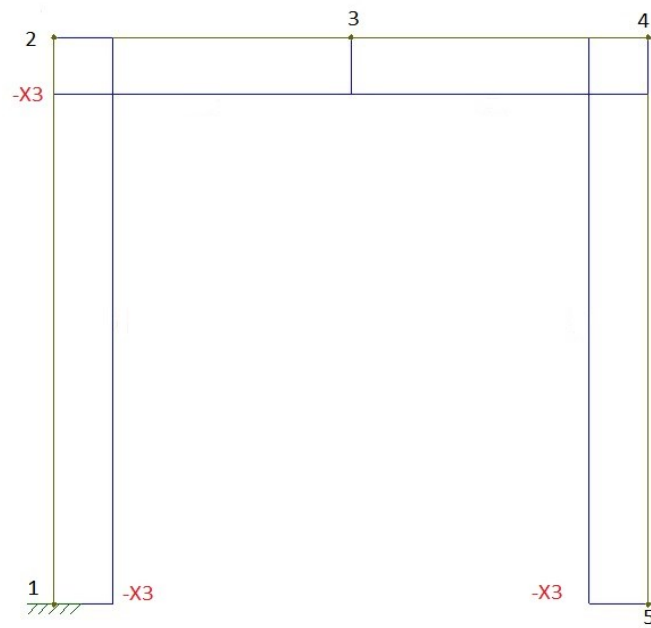
⇒ Caso X_1



⇒ Caso X_2



⇒ Caso X_3



⇒ Imposizione delle condizioni di plasticità

SEZIONI	EQUILIBRIO	AMMISSIBILITA'
1	$M_1 = 2\mu * F * L - X_2 * L - X_3$	$ 2\mu * F * L - X_2 * L - X_3 \leq M_0$
2	$M_2 = -L * \left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right) - X_3$	$\left -L * \left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right) - X_3\right \leq M_0$
3	$M_3 = -X_1 * L - X_3$	$ X_1 * L + X_3 \leq M_0$
4	$M_4 = -X_3$	$ X_3 \leq M_0$

Valutazione del moltiplicatore statico nella configurazione di collasso con moltiplicatore cinematico con valore più basso, ovvero la configurazione 3).

⇒ Risoluzione:

➤ $X_3 = M_0$

➤ $|X_1 * L + X_3| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} -X_1 * L - X_3 \geq -M_0 \\ -X_1 * L - X_3 \leq M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -X_1 * L - M_0 \geq -M_0 \\ -X_1 * L - M_0 \leq M_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_1 = -2 * \frac{M_0}{L} \end{cases} \Rightarrow X_1 = -2 * \frac{M_0}{L}$

➤ $\left|-L * \left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right) - X_3\right| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} -L * \left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right) - X_3 \leq M_0 \\ -L * \left(X_1 + \frac{X_2}{2}\right) - X_3 \geq -M_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -L * \left(-2 * \frac{M_0}{L} + \frac{X_2}{2}\right) - M_0 \leq M_0 \\ -L * \left(-2 * \frac{M_0}{L} + \frac{X_2}{2}\right) - M_0 \geq -M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = 4 * \frac{M_0}{L} \\ X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X_2 = 4 * \frac{M_0}{L}$

$$\triangleright |2\mu * F * L - X_2 * L - X_3| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} 2\mu * F * L - X_2 * L - X_3 \leq M_0 \\ 2\mu * F * L - X_2 * L - X_3 \geq -M_0 \end{cases}$$

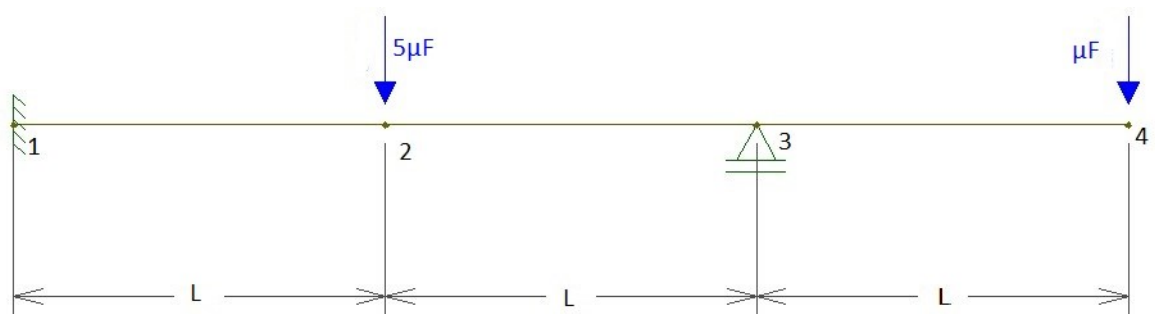
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\mu * F * L - 4 \frac{M_0}{L} * L - M_0 \leq M_0 \\ 2\mu * F * L - 4 \frac{M_0}{L} * L - M_0 \geq -M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{S1} = 3 \frac{M_0}{F * L} = 3 \frac{18,17 \text{ kN} * \text{m}}{20 \text{ kN} * 6 \text{ m}} = 0,454 \\ \mu_{S2} = 2 \frac{M_0}{F * L} = 2 \frac{18,17 \text{ kN} * \text{m}}{20 \text{ kN} * 6 \text{ m}} = 0,346 \end{cases}$$

Per il teorema statico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_S = \max\{\mu_{S1}; \mu_{S2}\} = \mu_{S1} = 0,454$$

I valori di μ_S e di μ_C coincidono; questa condizione permette di identificare univocamente il moltiplicatore di collasso che risulterà essere $\mu=0,454$.

2.3. “Asta soggetta ad una doppia forza concentrata verticale”



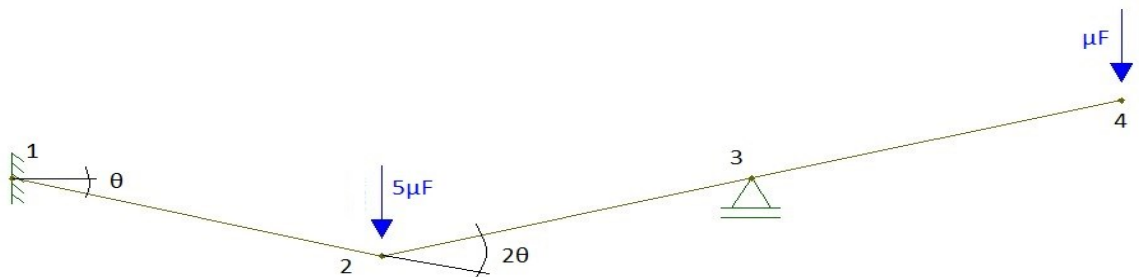
Dati:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = 16 \text{ kN} \\ L = 4 \text{ m} \\ \text{IPE 120} \Rightarrow W_p = 52960 \text{ mm}^3 \\ \text{Acciaio S 235} \Rightarrow f_{yd} = 235 \text{ Mpa} \\ M_0 = W_p * f_{yd} = 12,45 \text{ kN} * \text{m} \end{array} \right.$$

Metodo cinematico

Labilità: identifico i possibili meccanismi di collasso.

1)

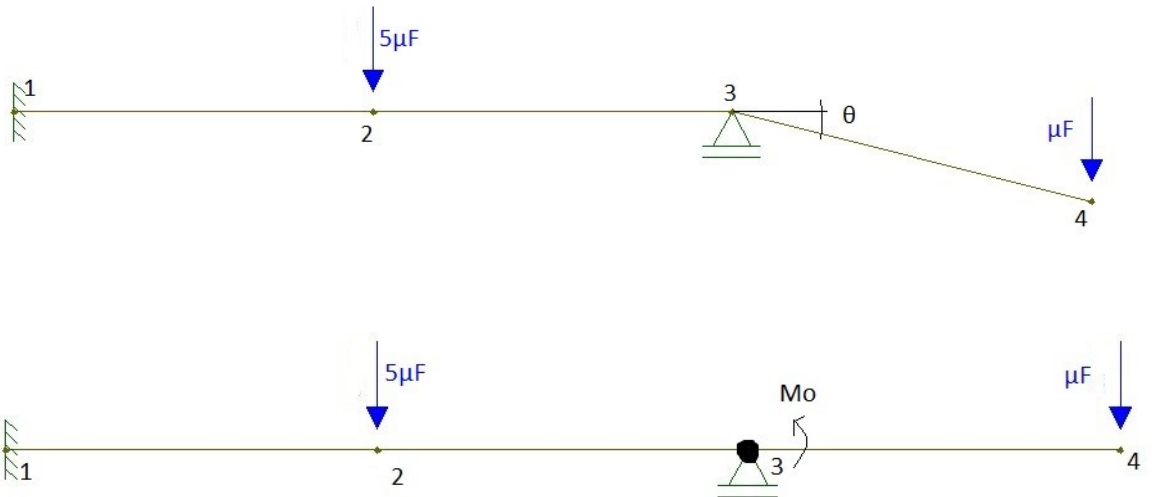




$$\begin{cases} L_i = 3M_0 * \theta \\ L_e = 5\mu * F * L * \theta - \mu * F * L * \theta = 4 * \mu * F * L * \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_{C1} = \frac{3}{4} * \frac{M_0}{F * L} = \frac{3}{4} * \frac{12,45 \text{ kN*m}}{16 \text{ kN} * 4 \text{ m}} = 0,146$$

2)



$$\begin{cases} L_i = M_0 * \theta \\ L_e = \mu * F * L * \theta \end{cases} \Rightarrow \mu_{C2} = \frac{M_0}{F * L} = \frac{12,45 \text{ kN*m}}{16 \text{ kN} * 4 \text{ m}} = 0,195$$

Per il teorema cinematico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_c = \min\{\mu_{c1}; \mu_{c2}\} = \mu_{c1} = 0,146$$

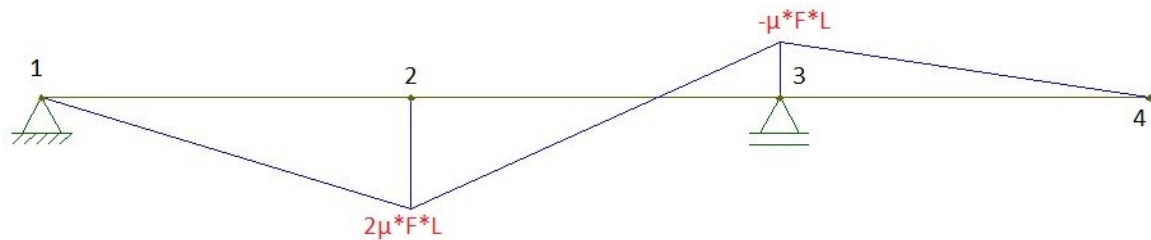
Metodo statico

⇒ Individuazione delle incognite iperstatiche e relativi diagrammi

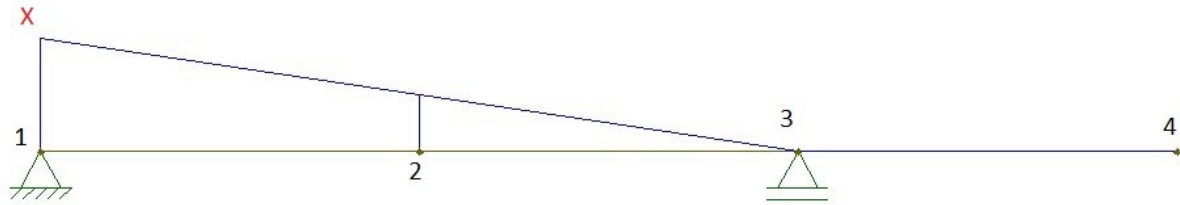


Diagrammi:

⇒ Caso F



⇒ Caso X



⇒ Imposizione delle condizioni di plasticità

SEZIONI	EQUILIBRIO	AMMISSIBILITA'
1	$M_1 = X$	$ X \leq M_0$
2	$M_2 = \frac{X}{2} - 2\mu * F * L$	$\left \frac{X}{2} - 2\mu * F * L \right \leq M_0$

⇒ Risoluzione:

➤ $X = M_0$

➤ $\left| \frac{X}{2} - 2\mu * F * L \right| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{X}{2} - 2\mu * F * L \leq M_0 \\ \frac{X}{2} - 2\mu * F * L \geq -M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{M_0}{2} - 2\mu * F * L \leq M_0 \\ \frac{M_0}{2} - 2\mu * F * L \geq -M_0 \end{cases}$

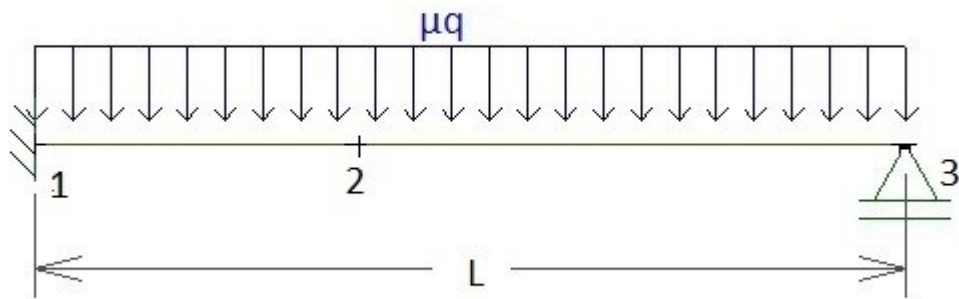
$\Rightarrow \begin{cases} -2\mu * F * L \leq \frac{M_0}{2} \\ -2\mu * F * L \geq \frac{-3}{2} * M_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{S1} = -\frac{1}{4} * \frac{M_0}{F * L} = -0,049 \\ \mu_{S2} = \frac{3}{4} * \frac{M_0}{F * L} = 0,146 \end{cases}$

Per il teorema statico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_S = \max\{\mu_{S1}; \mu_{S2}\} = \mu_{S1} = 0,146$$

I valori di μ_S e di μ_C coincidono; questa condizione permette di identificare univocamente il moltiplicatore di collasso che risulterà essere $\mu=0,146$.

2.4. “Asta soggetta ad un carico distribuito”



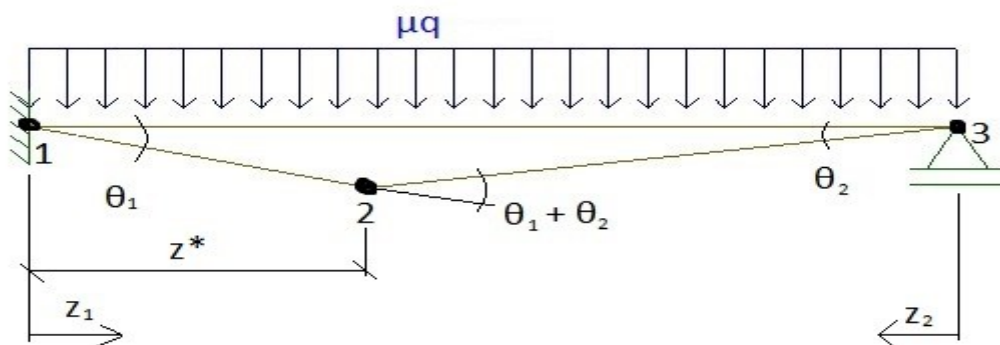
Dati:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 2 \text{ kN/m} \\ L = 6 \text{ m} \\ \text{IPE 120} \Rightarrow W_p = 52960 \text{ mm}^3 \\ \text{Acciaio S 235} \Rightarrow f_{yd} = 235 \text{ Mpa} \\ M_0 = W_p * f_{yd} = 12,45 \text{ kN} * \text{m} \end{array} \right.$$

Metodo cinematico

Labilità: identifico i possibili meccanismi di collasso

1)



In questo caso non si conosce a priori la posizione della cerniera plastica in campata. È quindi necessario imporre delle condizioni di congruenza e sfruttarle per andare a valutare la lunghezza z^* .

Condizioni di congruenza:

$$z^* * \theta_1 = (L - z^*) * \theta_2 \quad \Rightarrow \quad \theta_2 = \frac{z^*}{L - z^*} * \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 * \left(1 + \frac{z^*}{L - z^*}\right) = \frac{L}{L - z^*} * \theta_1$$

Valutazione di L_e ed L_i :

Andando a ricavare le espressioni del lavoro virtuale interno e del lavoro virtuale esterno sostituendo l'angolo θ_2 con l'equivalente espressione in funzione di θ_1 e andandole poi ad uguagliare otteniamo:

$$\begin{aligned} L_e &= \int_0^{z^*} \mu q * \theta_1 * z_1 dz_1 + \int_0^{L-z^*} \mu q * \theta_2 * z_2 dz_2 = \\ &= \mu q * \left\{ \left(\theta_1 * \frac{z_1^2}{2} \Big|_0^{z^*} \right) + \left(\theta_2 * \frac{z_2^2}{2} \Big|_0^{L-z^*} \right) \right\} = \\ &= \mu * q * \theta_1 * \frac{z^{*2}}{2} + \mu * q * \theta_2 * \frac{(L - z^*)^2}{2} = \\ &= \mu * q * \theta_1 * \left\{ \frac{z^{*2}}{2} + \frac{z^*}{L - z^*} * \frac{(L - z^*)^2}{2} \right\} = \frac{1}{2} * \mu * q * \theta_1 * z^* * L \end{aligned}$$

$$L_i = M_0 * (\theta_1 + \theta_1 + \theta_2) = M_0 * \theta_1 * \left(1 + 1 + \frac{z^*}{L - z^*}\right) = M_0 * \theta_1 * \frac{2L - z^*}{L - z^*}$$

$$L_i = L_e \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2 * M_0}{q} * \frac{2L - z^*}{(L - z^*) * L * z^*}$$

Per andare a determinare il valore del moltiplicatore cinematico minimo devo valutare la dimensione z^* che soddisfa la richiesta. Per fare ciò si dovrà porre $\frac{\partial \mu}{\partial z^*} = 0$.

$$\frac{\partial \mu}{\partial z^*} = \frac{-(L - z^*) * L * z^* - (2L - z^*) * (L^2 - 2L * z^*)}{(L - z^*)^2 * L^2 * z^{*2}} * 2 \frac{M_0}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial z^*} = 0 \Leftrightarrow -(L - z^*) * L * z^* - (2L - z^*) * (L^2 - 2L * z^*) = 0$$

$$\Rightarrow L * z^{*2} - 4L^2 * z^* + 2L^3 = 0$$

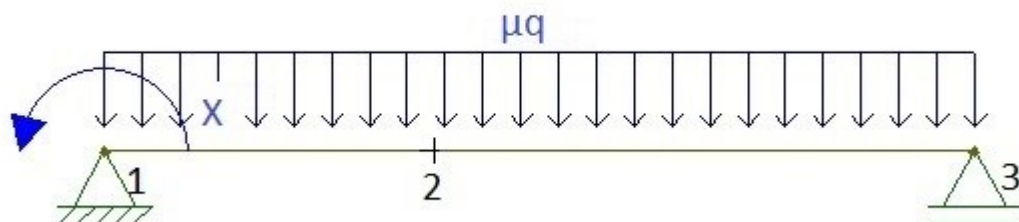
$$\Rightarrow z^* = L(2 - \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \mu_c = 2 \frac{M_0}{q} * \frac{2L - L * (2 - \sqrt{2})}{(L - L(2 - \sqrt{2})) * L * L * (2 - \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} * M_0}{q * L^2 * (-4 + 3\sqrt{2})} = 2,016$$

Il valore del moltiplicatore cinematico minimo risulta essere $\mu_c = 2,016$

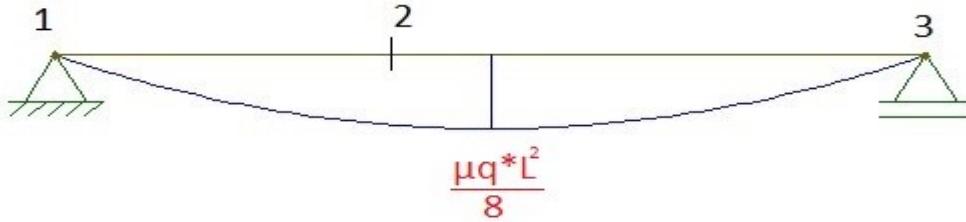
Metodo statico

⇒ Individuazione delle incognite iperstatiche e relativi diagrammi



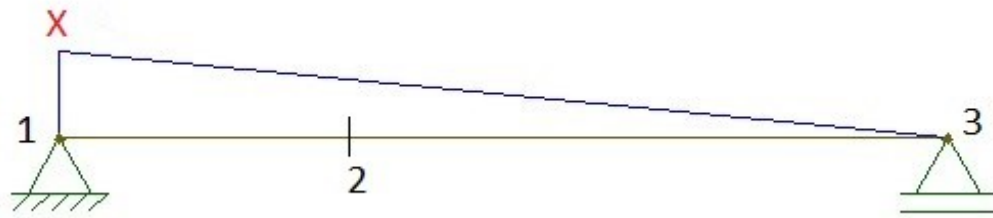
Diagrammi:

⇒ Caso q



$$M(z) = \mu q * \frac{L}{2} * z - \mu q * \frac{z^2}{2}$$

⇒ Caso X



$$M(z) = X \left(1 - \frac{z}{L}\right)$$

⇒ Imposizione delle condizioni di plasticità

SEZIONI

EQUILIBRIO

AMMISSIBILITA'

1	$M_1 = X$	$ X \leq M_0$
2	$M_2 = X \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*)$	$\left X \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \right \leq M_0$

⇒ Risoluzione:

➤ $X = M_0$

➤ $\left| X \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \right| \leq M_0 \Rightarrow \begin{cases} X \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \leq M_0 \\ X \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \geq -M_0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_0 \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \leq M_0 \\ M_0 \left(1 - \frac{z^*}{L}\right) - \frac{\mu q * z^*}{2} * (L - z^*) \geq -M_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{S1} = -\frac{2 * M_0}{L * q * (L - z^*)} = -\frac{2 * M_0}{q * L * L * (1 - 2 + \sqrt{2})} = -0,417 \\ \mu_{S2} = \frac{2 * M_0}{q * z^* * \left(2 - \frac{z^*}{L}\right) * (L - z^*)} = \frac{2 * \sqrt{2} * M_0}{q * L^2 * (-4 + 3\sqrt{2})} = 2,016 \end{cases}$$

Per il teorema statico dell'analisi limite abbiamo che:

$$\mu_S = \max\{\mu_{S1}; \mu_{S2}\} = \mu_{S2} = 2,016$$

I valori di μ_S e di μ_C coincidono; questa condizione permette di identificare univocamente il moltiplicatore di collasso che risulterà essere $\mu=2,016$.

Bibliografia

1. Leone Corradi dell'Acqua, *Meccanica delle strutture: la valutazione della capacità portante*, McGraw Hill Libri Italia, 1° edizione, 1994.
2. Ch. Massonnet, W. Olszak, A. Phillips, *Plasticity in structural engineering fundamentals and applications*, Springer-Verlag Wien, New York, 1979.