Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea Magistrale in
Fisica

Tesi di laurea

Strutture cosmiche in teorie gravitazionali scalari-tensoriali prive di ghost

Laureando:
Mattia Scomparin

Relatore:
Sabino Matarrese

Correlatore:
Nicola Bartolo

Anno Accademico 2015-2016

A Valentina, mia sorella

Indice

1 Introduzione

La *Teoria della Relatività Generale* è ritenuta una dei pilastri fondamentali della fisica moderna ed è tutt'oggi considerata la teoria standard della gravità [1].

Ancora invariate dall'originale formulazione che Einstein comunicò alla *Prussian Academy of Sciences* nel novembre del 1915, le equazioni di campo della Relatività Generale hanno profondamente rivoluzionato la conoscenza del cosmo nel corso di quest'ultimo secolo: esse governano la dinamica dell'Universo, predicono l'esistenza di buchi neri descrivendone le proprietà, esprimono la propagazione di onde gravitazionali e delineano i processi di formazione di tutte le strutture cosmiche nell'Universo, dalle stelle e i pianeti fino agli ammassi e i super-ammassi di galassie.

Sebbene la teoria di Einstein abbia ricevuto sin da subito numerose conferme sperimentali da test osservativi compiuti sulla Terra e nel Sistema Solare, negli ultimi trent'anni lo studio di soluzioni cosmologiche opportunamente riproducenti dinamiche gravitazionali a grandi scale, tra cui l'odierna espansione accelerata dell'Universo, ha condotto la Teoria della Relatività Generale a richiedere tuttavia una innaturale abbondanza nell'Universo, circa del 96%, di ignoti contributi di materia ed energia oscure che ha motivato la comunità scientifica, in particolare nell'ultimo decennio, a ritenere che la Teoria della Relatività Generale possa non essere la teoria della gravità più adatta a descrivere l'Universo a grandi scale [2].

Poiché nella teoria di Einstein il campo gravitazionale è descritto dal singolo tensore metrico, alla base di una sua possibile estensione a grandi scale risiede la libertà di includere ulteriori campi fondamentali a partire da quest'ultima. In tal contesto la scelta più semplice ricade nelle ben note *teorie gravitazionali scalari-tensoriali* in cui al tensore metrico viene aggiunto un singolo campo scalare[1] la cui dinamica viene pesantemente soppressa da adeguati *meccanismi di screening* nelle scale dell'ordine del Sistema Solare, dove la Relatività Generale è la teoria sperimentata [3].

Le teorie gravitazionali scalari-tensoriali sono tra le più consolidate e studiate teorie di gravità modificata [1] sia per la loro intuitiva formulazione covariante che per la relativamente semplice struttura delle loro equazioni di campo scalari e tensoriali, ottenibili in tutta generalità dalla variazione di opportuni funzionali d'azione del tensore metrico, del campo scalare e delle loro rispettive derivate.

Un fortissimo vincolo nello spazio delle possibili teorie scalari tensoriali definibili in tal maniera è imposto dal *Teorema di Ostrogradski* [4]. Esso afferma che teorie scalari-tensoriali definite a partire da una densità di Lagrangiana *non degenere*[2] contenente derivate temporali di secondo o superior ordine nei campi sono condotte inevitabilmente alla presenza di una instabilità campistica nota come *ghost di Ostrogradski*[3].

Condizione sufficiente ad evitare l'insorgere di tale instabilità è restringere il dominio di indagine a teorie localmente Lorentz-covarianti in uno spazio tempo 4-dimensionale che, come la Relatività Generale, possiedono manifestamente equazioni di campo del secondo ordine. Il *Teorema di Horndeski* [5], proposto nel 1974 ma rivalutato in tempi più recenti nell'ambito di teorie gravitazionali, determina la più generale teoria scalare-tensoriale localmente Lorentz-covariante in uno spazio tempo 4-dimensionale la cui variazione produce equazioni di campo scalari e tensoriali del secondo ordine. Introdotto il campo scalare ϕ, la teoria di Horndeski è descrivibile da una densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_H \equiv \mathcal{L}_{2H} + \mathcal{L}_{3H} + \mathcal{L}_{4H} + \mathcal{L}_{5H}$ con

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{2H} \equiv G_2(\phi, X)\\
&\mathcal{L}_{3H} \equiv G_3(\phi, X)\nabla_\mu\nabla^\mu\phi\\
&\mathcal{L}_{4H} \equiv G_4(\phi, X)R - 2G_{4,X}(\phi, X)\big[\,(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi)^2 - \nabla^\mu\nabla^\nu\phi\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\big]\\
&\mathcal{L}_{5H} \equiv G_5(\phi, X)\,G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi + \tfrac{1}{3}G_{5,X}(\phi, X)\big[(\nabla_\mu\nabla^\mu\phi)^3 - 3\nabla_\rho\nabla^\rho\phi\,\nabla^\mu\nabla^\nu\phi\,\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi\,\nabla^\mu\nabla^\sigma\phi\,\nabla^\nu\nabla_\sigma\phi\big]
\end{aligned} \tag{1.1}$$

dove ∇ è la derivata covariante 4-dimensionale, $X \equiv \nabla_\mu\phi\,\nabla^\mu\phi$ e dove $\{G_i\}_{i=2,\ldots,5}$ sono cinque arbitrarie funzioni dipendenti dalla combinazione cinetica X e dal campo scalare ϕ. La virgola a pedice denota l'operazione di derivazione. I tensori R ed $G_{\mu\nu}$ sono rispettivamente lo *Scalare di curvatura* e il *Tensore di Einstein* 4-dimensionali. Grazie alla sua generalità, la Lagrangiana di Horndeski ingloba al suo interno una enorme varietà di teorie

---

[1] E' comunque possibile considerare in tutta generalità anche campi vettoriali o campi tensoriali di rango superiore: quel che conta è che la dinamica introdotta da tali campi aggiuntivi sia soppressa nelle scale dell'ordine del Sistema Solare.

[2] Una teoria è degenere se, dopo opportune ridefinizioni dei campi fondamentali al fine di eliminare i contributi derivativi di ordine superiore, la matrice cinetica contenente i coefficienti dei termini cinetici così ottenuti non è invertibile.

[3] Non è scopo del presente elaborato indagare e descrivere approfonditamente la natura di tale instabilità. Basti tuttavia sapere che teorie non degeneri possiedono in generale equazioni di campo con derivate di ordine superiore al secondo nei campi e dunque in generale richiederebbero più condizioni iniziali di quelle associate ad un ordinario sistema fisico. In formulazione Hamiltoniana tale fatto si traduce naturalmente in una corrispondente densità di Hamiltoniana energeticamente non limitata inferiormente poiché linearmente dipendente da un momento coniugato (il lettore interessato è rimandato all'appendice A per una semplice giustificazione di quest'ultimo fatto).

gravitazionali scalari-tensoriali [6] permettendo dunque uno studio sistematico delle loro proprietà[4]. Nonostante nella teoria (1.1) siano presenti derivate seconde del campo scalare, essa realizza ugualmente equazioni di campo del secondo ordine grazie ad una fine cancellazione dei contributi di ordine superiore indotta dalla struttura anti-simmetrica con cui esse compaiono nelle corrispondenti equazioni di campo[5]. La teoria di Horndeski si è dimostrata consistente con le predizioni della Relatività Generale su piccole scale grazie all'opportuna introduzione di meccanismi di screening alla *Vainshtein* [7][8]. Numerosi studi sia in contesto astrofisico che cosmologico [9] ne hanno indagato le fondamentali manifestazioni a grandi scale cosmologiche. Lavori preliminari focalizzati sullo studio delle nuove proprietà caratterizzanti i meccanismi di lente gravitazionale attivi in vicinanza di stelle e ammassi estesi [11] e le recentissime misure del satellite Planck [12] sul *Fondo Cosmico di Microonde* (CMB) hanno testato l'ampio spettro di indagine della Teoria di Horndeski fornendo esplicitamente dei limiti teorici e osservativi sui parametri liberi della teoria.

Sebbene molte siano state sin da subito le perplessità in merito alla possibilità di giustificare in termini fisicamente fondamentali l'interpretazione della teoria di Horndeski (1.1) come naturale teoria fisica della gravità, l'abbondanza di riscontri sperimentali ottenuti ha motivato una spinta verso la ricerca di ulteriori generalizzazioni di quest'ultima.

In tempi relativamente recenti si è capito che richiedere equazioni di campo manifestamente del secondo ordine non sia una condizione obbligatoria per evitare l'insorgere del ghost di Ostrogradski: se la teoria presenta vincoli "nascosti" anche equazioni di campo di ordine superiore contrariamente alle apparenze possono essere riformulate, ad esempio previo una ridefinizione dei campi, in termini di una struttura del secondo ordine rimuovendo il grado di libertà indesiderato. Prendendo dunque spunto da tale considerazione, la moderna teoria *beyond Horndeski* [13][14][15] introduce una aggiuntiva densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_{bH} = \mathcal{L}_{4bH} + \mathcal{L}_{5bH}$, somma dei due nuovi termini[6]

$$\begin{aligned} L_{4,bH} &= F_4(\phi, X)\, \varepsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\, \phi_\mu \phi_\alpha \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} \\ L_{5,bH} &= F_5(\phi, X)\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \phi_\mu \phi_\alpha \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} \phi_{\sigma\delta} \end{aligned} \tag{1.2}$$

dove $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}$ è il tensore completamente anti-simmetrico di Levi Civita e dove F_4 ed F_5 sono due arbitrarie funzioni in X e ϕ. In questo caso la struttura del secondo ordine delle equazioni di campo è indotta dalla presenza di un *vincolo primario* che, introdotto in ambiente Hamiltoniano, rimuove l'instabilità di Ostrogradski [16]. Studi più approfonditi hanno dimostrato che la somma $\mathcal{L}_{H+bH} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{bH}$ definente la teoria *Horndeski+beyond Horndeski* non estende la già teoria di Horndeski: l'interferenza di termini beyond Horndeski con termini di Horndeski di ordine differente[7] non permette più l'esistenza del vincolo primario necessario ad evitare l'insorgere del ghost di Ostrogradski, la somma di termini beyond Horndeski con termini di Horndeski dello stesso ordine è ri-mappabile in Horndeski tramite una opportuna *trasformazione disforme generalizzata* del tensore metrico [17][18][19]

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Gamma(\phi, X) A_\mu A_\nu \tag{1.3}$$

dove Γ è una arbitraria funzione in X ed ϕ. La situazione emergente è dunque che la teoria beyond Horndeski sia una teoria del tutto autoconsistente ma isolata: se combinata con Horndeski dello stesso ordine torna ad essere Horndeski, altrimenti propaga ghost [20]. Nel contesto della teoria beyond Horndeski studi relativamente recenti si sono focalizzati sulle nuove proprietà caratterizzanti i meccanismi di lente gravitazionale attivi in vicinanza di stelle e ammassi estesi [21], altri hanno evidenziato la "rottura" del meccanismo di screening alla Vainshtein su piccole scale all'interno di stelle e ammassi di materia [23][22], altri ancora hanno esteso le dinamiche di tale rottura indagando le possibili modificazioni indotte alle equazioni di equilibrio atte a descrivere le proprietà strutturali di stelle ed oggetti compatti [24][25].

Le teorie di Horndesky e beyond Horndeski sono solo un caso particolare della più estesa e complessa famiglia delle teorie scalari-tensoriali definite a partire da densità di Lagrangiana contenenti al più contrazioni cubiche nelle derivate seconde nel campo scalare. Risulta dunque naturale chiedersi se esse siano le uniche teorie degeneri, dunque stabili sotto il teorema di Ostrogradski, presenti in tale famiglia e, in caso di risposta negativa, quali possano essere le fondamentali implicazioni cosmologiche ed astrofisiche indotte dalle nuove teorie degeneri introdotte.

A tale scopo, la prima parte del presente elaborato si occuperà di ripercorrere dettagliatamente la deduzione sistematica delle condizioni di degenerazione a cui devono obbedire i parametri liberi di *teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore* (qHOST) [26]. Esse rappresentano la più generale famiglia di teorie scalari-tensoriali descritte da una densità di Lagrangiana dipendente al più quadraticamente dalle derivate covarianti seconde del campo scalare. Tali teorie saranno formalmente definite nella Sezione 2, dove tra l'altro sarà ricavata in tutta generalità l'espressione della matrice cinetica nell'ambito del formalismo ADM(3+1) *covariante* [28].

---

4 Si noti che $\mathcal{L}_{2H}$ non contiene derivate covarianti seconde in ϕ mentre $\mathcal{L}_{3H}$, $\mathcal{L}_{4H}$ e $\mathcal{L}_{5H}$ contengono rispettivamente termini lineari, quadratici e cubici in esse.

5 Una semplice tecnica per evidenziare operativamente l'avvenire di tale cancellazione consiste nel ridurre il teorema di Horndeski al caso unidimensionale e calcolare in tale assunzione le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo scalare.

6 Si noti che la notazione è consistente con la presenza di termini quadratici e cubici nelle densità di Lagrangiana

7 Un esempio di combinazione di termini beyond Horndeski con termini di Horndeski di ordine differente è $\mathcal{L}_{4H} + \mathcal{L}_{5bH}$ mentre dello stesso ordine è $\mathcal{L}_{4H} + \mathcal{L}_{4bH}$

Le teorie degeneri ottenute dall'imposizione di non invertibilità della corrispondente matrice cinetica prendono il nome di *teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri* (qDHOST) e risultano classificate nella Sezione 3 in opportune *classi degeneri.* Oltre ai termini quadratici $\mathcal{L}_{4,H}$ ed $\mathcal{L}_{4,bH}$, si vedrà che nelle classi degeneri sono contenute nuove teorie scalari-tensoriali prive di ghost e non deducibili da modelli già noti attraverso trasformazioni disformi generalizzate del tipo (1.3) [27].

L'obiettivo principale del presente lavoro è concentrato nella Sezione 4 dove ci si preoccuperà di ottenere per la prima volta, alla luce di quanto discusso precedentemente, le più generali equazioni di campo covarianti scalari e tensoriali associate ad una arbitraria teoria qDHOST simmetrica per la trasformazione $\phi \to \phi + cost$ del campo scalare. Tali risultati sono poi stati specializzati alla sottoclasse $\mathscr{C} = \text{Ia}^*$ per ottenere infine le equazioni di campo, sia esatte che perturbate nel limite di campo debole attorno ad uno spazio-tempo di De Sitter, per descrivere la dinamica gravitazionale scalare e tensoriale in vicinanza di una struttura cosmica statica e sfericamente simmetrica[8].

L'Appendice A fornirà al lettore interessato una intuitiva giustificazione sull'utilizzo delle condizioni di degenerazione per evitare l'insorgere dell'instabilità campistica di Ostrogradski in una teoria scalare-tensoriale di ordine superiore nelle derivate temporali dei campi fondamentali. Infine le Appendici B e C esibiranno gli svolgimenti cruciali per comprendere completamente i passaggi intermedi di calcoli non completamente sviluppati nelle sezioni principali dell'elaborato.

Sebbene formale nel suo svolgimento, il presente lavoro vuole essere fortemente sensibile alle fondamentali interconnessioni fenomenologiche che ne hanno giustificato e guidato lo sviluppo sin dalle sue origini [9][25]. La trattazione introduttiva alle teorie qHOST e delle teorie qDHOST nelle Sezioni 2 e 3 e nell'Appendice A è stata ispirata ad un recente lavoro del 2016 [26]. La Sezione 3 presenta invece un calcolo del tutto originale che riotterrà come possibile caso limite i risultati di [25].

[8] Tali risultati potranno poi essere estesi anche allo studio di oggetti di interesse astrofisico come stelle ed oggetti compatti

2 Teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore (qHOST)

Dopo una breve introduzione al formalismo preliminarmente adottato nel corso dell'elaborato, il presente capitolo si occuperà di definire *teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore* (qHOST) come le più generali teorie scalari-tensoriali della gravità contenenti combinazioni quadratiche nelle derivate covarianti seconde del campo scalare. Esse includono, oltre alla Relatività Generale, il termine quadratico $L_{4,H}$ appartenente alla teoria di Horndeski (1.1) ed il termine quadratico $L_{4,bH}$ descritto dalla teoria beyond Horndeski (1.2), casi dunque particolari di *teorie degeneri* stabili sotto il teorema di Ostrogradski contenuti nelle qHOST. Nell'ambito del formalismo ADM(3+1) covariante [28] si otterrà in tutta generalità la matrice cinetica associata ad una teoria qHOST [26] dalle cui proprietà di non invertibilità si potranno ricavare le opportune condizioni di degenerazione necessarie a capire se (1.1) e (1.2) sono le uniche teorie stabili contenute nelle qHOST.

2.1 Formalismo introduttivo

Si consideri uno spazio-tempo 4-dimensionale $\mathcal{N}$ localmente rappresentato da un sistema di coordinate $x^\mu = (x^0, x^i)$ e la cui geometria sia descritta dal tensore metrico $g_{\mu\nu}$ con segnatura $(-,+,+,+)$ definente l'elemento di linea $ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ in esso. Gli indici Greci $(\mu, \nu, ..., \alpha, \beta, ...)$ assumeranno d'ora in avanti valori da 0 a 3 mentre gli indici Latini $(i, j, ..., m, n, ...)$ assumeranno valori da 1 a 3; indici ripetuti si considereranno sommati. D'ora in avanti risulterà inoltre conveniente lavorare con opportune unità di misura tali da rendere la velocità della luce $c = 1$. A partire da $g_{\mu\nu}$ si introducano i coefficienti della *connessione di Levi-Civita* 4-dimensionale

$$ {}^{(4)}\Gamma^\mu_{\nu\rho} = {}^{(4)}\Gamma^\mu_{\rho\nu} \equiv \tfrac{1}{2} g^{\mu\sigma}(\partial_\rho g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \tag{2.1} $$

dove $g^{\mu\nu}$ è il tensore metrico inverso tale che $g_{\mu\sigma}g^{\sigma\nu} = \delta^\nu_\mu$, con δ^ν_μ la delta di Kronecker 4-dimensionale, e dove ∂_μ denota la derivata parziale rispetto alla coordinata spazio-temporale x^μ. L'apice che d'ora in avanti comparirà a sinistra ${}^{(4)}\Gamma$ segnalerà la quadridimensionalità dell'oggetto e servirà ad evitare possibili ambiguità notazionali che compariranno nel corso della trattazione. Assegnato un arbitrario tensore T di rango (m, n) in $\mathcal{N}$, si definisca in tutta generalità *derivata covariante* 4-dimensionale di T il tensore ∇T di rango $(m+1, n)$ avente componenti

$$ {}^{(4)}\nabla_\mu T^{\beta_1...\beta_n}_{\alpha_1...\alpha_m} \equiv \partial_\mu T^{\beta_1...\beta_n}_{\alpha_1...\alpha_m} + \left\{ {}^{(4)}\Gamma^{\beta_1}_{\mu\epsilon} T^{\epsilon...\beta_n}_{\alpha_1...\alpha_m} + ... + {}^{(4)}\Gamma^{\beta_n}_{\mu\epsilon} T^{\beta_1...\epsilon}_{\alpha_1...\alpha_m} \right\} - \left\{ {}^{(4)}\Gamma^\epsilon_{\mu\alpha_1} T^{\beta_1...\beta_n}_{\epsilon...\alpha_m} + ... + {}^{(4)}\Gamma^\epsilon_{\mu\alpha_m} T^{\beta_1...\beta_n}_{\alpha_1...\epsilon} \right\} \tag{2.2} $$

Si noti che assegnato uno scalare φ vale $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$ e che $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$, ovvero la metrica è preservata grazie alla natura simmetrica degli indici bassi nella connessione di Levi-Civita. Sempre a partire da quest'ultima si introducano le componenti del *tensore di curvatura di Rienmann* 4-dimensionale[9]

$$ {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu {}^{(4)}\Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu {}^{(4)}\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + {}^{(4)}\Gamma^\rho_{\mu\lambda} {}^{(4)}\Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - {}^{(4)}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} {}^{(4)}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \tag{2.3} $$

che, opportunamente contratte, permettono a loro volta di definire i coefficienti del ben noto *tensore di Ricci* 4-dimensionale e l'espressione dello *scalare di curvatura* 4-dimensionale che, come tale, risulta indipendente dal sistema di coordinate scelto:

$$ {}^{(4)}R_{\sigma\nu} = {}^{(4)}R_{\nu\sigma} \equiv {}^{(4)}R^\rho{}_{\sigma\rho\nu} \qquad {}^{(4)}R \equiv g^{\sigma\nu}\, {}^{(4)}R_{\sigma\nu} \tag{2.4} $$

Collezionati all'interno del *tensore di Einstein* 4-dimensionale

$$ {}^{(4)}G_{\mu\nu} = {}^{(4)}G_{\nu\mu} \equiv {}^{(4)}R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}\, {}^{(4)}R \tag{2.5} $$

essi soddisfano l'identità di Bianchi contratta

$$ {}^{(4)}\nabla_\mu\, {}^{(4)}G^\mu{}_\nu = 0 \tag{2.6} $$

La dinamica classica indotta da una teoria scalare-tensoriale nel campo ϕ e nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$ descritta da un funzionale d'azione S è formalmente prescritta in tutta generalità dalle ben note *Equazioni di Eulero-Lagrange* scalari e tensoriali ottenute dalla variazione totale $\delta \equiv \delta_\phi + \delta_g$ del funzionale d'azione $\delta S = 0$ rispetto ai campi fondamentali ϕ e $g_{\mu\nu}$. In particolare, per una teoria scalare-tensoriale descritta in uno spazio-tempo 4-dimensionale da un funzionale d'azione definito a partire da una densità di Lagrangiana $\mathcal{L}$ contenente al più derivate del secondo ordine di ϕ e $g_{\mu\nu}$ vale

$$ \delta_\phi \equiv \delta\phi \frac{\delta}{\delta\phi} + \delta\phi_\mu \frac{\delta}{\delta\phi_\mu} + \delta\phi_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta\phi_{\mu\nu}} \qquad \delta_g \equiv \delta g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} + \delta g^{\mu\nu} \frac{\delta\phi_\alpha}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\delta}{\delta\phi_\alpha} + \delta g^{\mu\nu} \frac{\delta\phi_{\alpha\beta}}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{\delta}{\phi_{\alpha\beta}} \tag{2.7} $$

[9] Non verranno qui riportate le proprietà di simmetria del tensore di curvatura di Rienmann. Per maggiori dettagli si consulti la fonte proposta a fine sottosezione

dove $\phi_\mu \equiv \nabla_\mu \phi$ e $\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu\nu}\phi$. L'equazione di Eulero-Lagrange per il campo scalare ha espressione[10]

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \nabla_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_\mu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_{\nu\mu}} = 0 \tag{2.8}$$

Si invita il lettore interessato a consultare [31] per una più approfondita analisi di quanto velocemente introdotto nella presente sottosezione riepilogativa.

2.2 Definizione di una teoria gravitazionale qHOST

Sia ϕ campo scalare definito nello spazio-tempo 4-dimensionale $\mathcal{N}$ e si indichino convenzionalmente con $\phi_\mu \equiv \nabla_\mu \phi$ la sua derivata covariante prima e $\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_{\mu\nu}\phi$ la sua derivata covariante seconda come specificate in (2.2). Introdotta la combinazione cinetica[11] $X \equiv \phi_\mu \phi^\mu = g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu$, si definiscono teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore, spesso indicate con l'acronimo qHOST dall'inglese "*quadratic High Order Scalar Tensor Theories*", le famiglie di teorie scalari-tensoriali per il campo scalare ϕ ed il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ la cui dinamica è descritta da un funzionale d'azione [26] S_q del tipo

$$S_q \equiv \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_q \tag{2.9}$$

dove la densità di Lagrangiana totale $\mathcal{L}_q$ ha espressione $\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\phi$ con

$$\mathcal{L}_g \equiv f(X,\phi)\, {}^{(4)}R \tag{2.10}$$

$$\mathcal{L}_\phi \equiv C^{\mu\nu,\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \tag{2.11}$$

La densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_\phi$ è la più generale combinazione quadratica nelle derivate covarianti seconde del campo scalare ϕ ed il tensore $C^{\mu\nu,\rho\sigma}$ dipende esclusivamente da $g_{\mu\nu}$, ϕ, ϕ_μ. Si noti che ${}^{(4)}R$ è lo scalare di Ricci 4-dimensionale introdotto in (2.4) e che f è una arbitraria funzione di ϕ ed X. Il simbolo g denota il determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$.

Senza perdere alcuna generalità, è utile sottolineare il fatto che i risultati della presente analisi risulteranno validi anche se nella definizione (2.9) si includono contributi aggiuntivi al più lineari in $\phi_{\mu\nu}$, ovvero del tipo

$$\mathcal{L}_+ \equiv P(\phi,X) + Q_1(\phi,X)g^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + Q_2(\phi,X)\phi^\mu\phi_{\mu\nu}\phi^\nu \tag{2.12}$$

dove P, Q_1 e Q_2 sono arbitrarie funzioni di ϕ ed X. La giustificazione di tale affermazione sarà evidente in seguito. Poiché la contrazione di tensori simmetrici con tensori anti-simmetrici genera termini nulli, il tensore $C^{\mu\nu,\rho\sigma}$ contribuisce ad $\mathcal{L}_\phi$ con le medesime simmetrie di indici presenti nella struttura di $\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma}$. Essendo $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$, è dunque lecito richiede che[12]

$$C^{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\nu\mu,\rho\sigma} = C^{\mu\nu,\sigma\rho} = C^{\rho\sigma,\mu\nu} \tag{2.13}$$

Senza perdere alcuna generalità, è possibile dimostrare che la più generale espressione di $C^{\mu\nu,\rho\sigma}$ soddisfacente le simmetrie di indici richieste da (2.13) possiede un numero finito di termini ed ha espressione

$$\begin{aligned} C^{\mu\nu,\rho\sigma} = {} & \frac{1}{2}\alpha_1\big(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\big) + \alpha_2\, g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\alpha_3\big(\phi^\mu\phi^\nu g^{\rho\sigma} + \phi^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\big) + \\ & + \frac{1}{4}\alpha_4\big(\phi^\mu\phi^\rho g^{\nu\sigma} + \phi^\nu\phi^\rho g^{\mu\sigma} + \phi^\mu\phi^\sigma g^{\nu\rho} + \phi^\nu\phi^\sigma g^{\mu\rho}\big) + \alpha_5\, \phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma \end{aligned} \tag{2.14}$$

con α_I cinque arbitrarie funzioni di ϕ ed X. Inserendo la parametrizzazione (2.14) in (2.11) e sfruttando le contrazioni con il tensore metrico per opportunamente alzare e abbassare gli indici, è possibile riscrivere (2.11) in termini di cinque densità di lagrangiana elementari $\mathcal{L}_I$

$$\mathcal{L}_\phi \equiv \sum_{I=1}^{5} \alpha_I \mathcal{L}_I \tag{2.15}$$

quadratiche nelle derivate seconde del campo scalare ed aventi rispettivamente espressioni

$$\mathcal{L}_1 = \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

$$\mathcal{L}_2 = \phi^\mu{}_\mu \phi^\nu{}_\nu$$

$$\mathcal{L}_3 = \phi^\mu\phi^\nu\phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho \tag{2.17}$$

---

[10] La deduzione di tale espressione verrà proposta nella Sezione 4.3

[11] Spesso il letteratura è possibile incontrare varianti di tal definizione del tipo $X \equiv -\phi_\mu\phi^\mu$ oppure $X \equiv -\frac{1}{2}\phi_\mu\phi^\mu$

[12] Dalla definizione (2.2) è evidente che sfruttando le proprietà di commutazione delle derivate parziali e la simmetria di indici di $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ si abbia $\phi_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\phi_\sigma = \partial_\nu\phi_\mu - \Gamma^\sigma_{\nu\mu}\phi_\sigma = \phi_{\nu\mu}$ da cui facilmente

$$\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} = \phi_{\nu\mu}\phi_{\rho\sigma} \to C^{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\nu\mu,\rho\sigma}$$
$$\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} = \phi_{\mu\nu}\phi_{\sigma\rho} \to C^{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\mu\nu,\sigma\rho}$$
$$\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} = \phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu} \to C^{\mu\nu,\rho\sigma} = C^{\rho\sigma,\mu\nu}$$

$$\mathcal{L}_4 = \phi^\mu \phi^\nu \phi_\mu{}^\rho \phi_{\nu\rho}$$
$$\mathcal{L}_5 = \phi^\mu \phi^\nu \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\nu} \phi_{\rho\sigma}$$

L'analisi proposta nelle successive sezioni sfrutterà la struttura compatta di $\mathcal{L}_\phi$ proposta in (2.11). Tuttavia la decomposizione (2.15) sarà utile per l'identificazione in qHOST di teorie note, in particolare $L_{4,H}$ di Horndeski (1.1) ed $L_{4,bH}$ beyond Horndeski (1.2), e per il calcolo esplicito delle equazioni di campo per il modello studiato nella Sezione 4. In particolare, l'equazione di campo per il campo scalare ϕ ottenibile da $\mathcal{L}_\phi$ con l'espressione (2.8) sarà formalmente[13]

$$2\,{}^{(4)}\nabla_\alpha\,{}^{(4)}\nabla_\beta \left(C^{\alpha\beta,\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} \right) - {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi_\alpha} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \right) + \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} = 0 \tag{2.20}$$

2.2.1 Casi particolari: Relatività Generale, $L_{4,H}$ di Horndeski ed $L_{4,bH}$ di beyond Horndeski

La costruzione di una teoria generalizzante la visione di un modello pregresso contempla intrinsecamente la possibilità di stabilire principi unificatori che accomunino sotto una medesima interpretazione l'espressione di modelli elementari precedentemente noti. Di fondamentale importanza risulta quindi verificare sotto quali condizioni tale teoria riduca il proprio dominio alla struttura di quest'ultimi.

Sia $\mathcal{Z} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, f)$ una collezione ordinata delle funzioni α_I ed f introdotte in (2.14) ed (2.10). Oltre alla ben nota azione di Einstein-Hilbert per la Relatività Generale [31]

$$S_{E/H} \equiv f \int d^4x \sqrt{-g}\; {}^{(4)}R \tag{2.21}$$

banalmente ottenibile imponendo $\mathcal{Z}_{E/H} \equiv (0,0,0,0,0,f)$ con f costante, la teoria (2.9) include come casi particolari la Teoria $L_{4,H}$ di Horndeski [5] e la Teoria $L_{4,bH}$ Beyond Horndeski [13][14], rispettivamente descritte dalle densità di Lagrangiana

$$L_{4,H} = G_4(\phi, X) R^{(4)} - 2G_{4,X}(\phi, X) \left[\phi_\mu{}^\mu \phi_\nu{}^\nu - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} \right] \tag{2.22}$$
$$L_{4,bH} = F_4(\phi, X)\, \varepsilon^{\mu\nu\rho}{}_\sigma\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \phi_\mu \phi_\alpha \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} \tag{2.23}$$

dove G_4 ed F_4 sono arbitrarie funzioni di ϕ ed X, dove $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ rappresenta il tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita e dove il pedice che compare in $G_{4,X}$ indica ed indicherà d'ora in avanti la derivata della funzione coinvolta rispetto ad X. Distribuendo il termine tra parentesi della (2.22) si noti che

$$\begin{aligned} L_{4,H} &= G_4\, R^{(4)} - 2G_{4,X} \left[\phi_\mu{}^\mu \phi_\nu{}^\nu - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} \right] \\ &= G_4\, R^{(4)} - 2G_{4,X} \phi_\mu{}^\mu \phi_\nu{}^\nu + 2G_{4,X} \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} \\ &= G_4\, R^{(4)} - 2G_{4,X}\, \mathcal{L}_2 + 2G_{4,X}\, \mathcal{L}_1 \end{aligned} \tag{2.24}$$

da cui, per confronto con la (2.15) e la (2.10), si ottiene

$$\mathcal{Z}_{4H} \equiv (2G_{4,X}, -2G_{4,X}, 0, 0, 0, G_4) \tag{2.25}$$

Alla stessa maniera, ricordando la definizione $X \equiv \phi_\mu \phi^\mu$ e la relazione per lo sviluppo del tensore completamente anti-simmetrico di Levi-Civita in termini di delta di Kronecker 4-dimensionali[14], l'espressione (2.23) è semplificabile in

$$\begin{aligned} L_{4,bH} &= F_4\, \varepsilon^{\mu\nu\rho}{}_\sigma\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma} \phi_\mu \phi_\alpha \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} \\ &= -F_4 \big(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta}\delta^{\rho\gamma} - \delta^{\mu\alpha}\delta^{\rho\beta}\delta^{\nu\gamma} - \delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu\beta}\delta^{\rho\gamma} + \delta^{\nu\alpha}\delta^{\rho\beta}\delta^{\mu\gamma} + \delta^{\rho\alpha}\delta^{\mu\beta}\delta^{\nu\gamma} - \delta^{\rho\alpha}\delta^{\nu\beta}\delta^{\mu\gamma} \big) \phi_\mu \phi_\alpha \phi_{\nu\beta} \phi_{\rho\gamma} \end{aligned} \tag{2.26}$$

---

[13] A partire dalle equazioni di Eulero-Lagrange (2.8)

$$0 = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\phi} - {}^{(4)}\nabla_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + {}^{(4)}\nabla_\mu\,{}^{(4)}\nabla_\nu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}} \tag{2.18}$$
$$= \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} - {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi_\alpha} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \right) + {}^{(4)}\nabla_\alpha\,{}^{(4)}\nabla_\beta \left(2C^{\mu\nu,\rho\sigma} \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu \phi_{\rho\sigma} \right)$$
$$= \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} - {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta\phi_\alpha} \phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \right) + 2\,{}^{(4)}\nabla_\alpha\,{}^{(4)}\nabla_\beta \left(C^{\alpha\beta,\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} \right) \tag{2.19}$$

[14] In uno spazio metrico n-dimensionale la contrazione di p indici in una coppia di tensori completamente anti-simmetrici di Levi Civita è esprimibile come opportuna combinazione di delta di Kronecker n-dimensionali secondo la relazione [31]

$$\varepsilon^{\mu_1 \ldots \mu_q \alpha_1 \ldots \alpha_p} \varepsilon_{\nu_1 \ldots \nu_q \alpha_1 \ldots \alpha_p} = p!\, q! (-1)^t \delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$$

dove $q = n - p$, t corrisponde al numero di autovalori negativi presenti nella metrica e dove $\delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q}$ corrisponde alla delta di Kronecker n-dimensionale generalizzata

$$\delta^{\mu_1 \ldots \mu_q}_{\nu_1 \ldots \nu_q} \equiv \delta^{[\mu_1}_{[\nu_1} \ldots \delta^{\mu_q]}_{\nu_q]}$$

La notazione $[\mu_1, ..., \mu_q]$ indica la selezione di sole combinazioni anti-simmetriche negli indici raccolti.

$$
\begin{aligned}
&= -F_4\, \phi^\alpha \phi_\alpha \phi^\beta{}_\beta \phi^\gamma{}_\gamma + F_4\, \phi^\alpha \phi_\alpha \phi^{\gamma\rho} \phi_{\rho\gamma} + F_4\, \phi^\beta \phi^\nu \phi_{\nu\beta} \phi^\gamma{}_\gamma - F_4\, \phi^\gamma \phi^\nu \phi_\nu{}^\rho \phi_{\rho\gamma} - F_4\, \phi^\beta \phi^\rho \phi^\gamma{}_\beta \phi_{\rho\gamma} + F_4\, \phi^\gamma \phi^\rho \phi^\beta{}_\beta \phi_{\rho\gamma} \\
&= -F_4\, (\phi^\alpha \phi_\alpha) \phi^\beta{}_\beta \phi^\gamma{}_\gamma + F_4\, (\phi^\alpha \phi_\alpha) \phi^{\gamma\rho} \phi_{\rho\gamma} + 2F_4\, \phi^\beta \phi^\gamma \phi_{\beta\gamma} \phi^\nu{}_\nu - 2F_4\, \phi^\gamma \phi^\nu \phi_\gamma{}^\rho \phi_{\rho\nu} \\
&= -F_4\, X \mathcal{L}_2 + F_4\, X \mathcal{L}_1 + 2\, F_4 \mathcal{L}_3 - 2\, F_4 \mathcal{L}_4
\end{aligned}
$$

da cui risulta facile riconoscere

$$
\mathcal{Z}_{4bH} \equiv (F_4\, X, -F_4\, X, 2F_4, -2F_4, 0, 0) \tag{2.27}
$$

Si noti infine che (2.9) riproduce inoltre la teoria $\mathcal{L}_{4H} + \mathcal{L}_{4bH}$ di Horndeski e beyond Horndeski selezionando

$$
\mathcal{Z}_{4H+4bH} = \mathcal{Z}_{4H} + \mathcal{Z}_{4bH} \equiv \big(2G_{4,X} + F_4\, X, -2G_{4,X} - F_4\, X, 2F_4, -2F_4, 0, G_4\big) \tag{2.28}
$$

2.2.2 Riformulazione equivalente di una teoria gravitazionale qHOST

Si introduca la ridefinizione di campo $\phi_\mu = A_\mu$. La densità di Lagrangiana (2.11) sarà allora riscrivibile

$$
\mathcal{L}_\phi = C^{\mu\nu,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\mu(\phi_\mu - A_\mu) \tag{2.29}
$$

dove λ^μ è il moltiplicatore di Lagrange vincolante il campo A_μ ad essere la derivata covariante prima del campo scalare ϕ. Le equazioni di campo della teoria (2.29) saranno dunque ottenibili dalle equazioni di Eulero-Lagrange associate rispettivamente al campo ϕ al campo A_μ e al campo λ^μ [15]:

$$
\begin{cases}
{}^{(4)}\nabla_\alpha \lambda^\alpha - \dfrac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma = 0 \\
2\, {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(C^{\alpha\epsilon,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \right) - \dfrac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta A_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\epsilon = 0 \\
\phi_\epsilon = A_\epsilon
\end{cases} \tag{2.30}
$$

Eseguendo la derivata covariante della seconda equazione del sistema (2.30), sostituendo al termine ${}^{(4)}\nabla_\epsilon \lambda^\epsilon$ il corrispondente termine presente nella prima equazione ed imponendo la terza uguaglianza si avrà:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\, {}^{(4)}\nabla_\epsilon\, {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(C^{\alpha\epsilon,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \right) - {}^{(4)}\nabla_\epsilon \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta A_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \right) + {}^{(4)}\nabla_\epsilon \lambda^\epsilon \\
&= 2\, {}^{(4)}\nabla_\epsilon\, {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(C^{\alpha\epsilon,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \right) - {}^{(4)}\nabla_\epsilon \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta A_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \right) + \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \\
&= 2\, {}^{(4)}\nabla_\epsilon\, {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(C^{\alpha\epsilon,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\rho \phi_\sigma \right) - {}^{(4)}\nabla_\epsilon \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu \phi_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho \phi_\sigma \right) + \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi}\, {}^{(4)}\nabla_\mu \phi_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho \phi_\sigma \\
&= 2\, {}^{(4)}\nabla_\alpha\, {}^{(4)}\nabla_\beta \left(C^{\alpha\beta,\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} \right) - {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(\frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi_\alpha} \phi_{\mu\nu} \phi_{\rho\sigma} \right) + \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi} \phi_{\mu\nu} \phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}
$$

che, uguale alla (2.20), dimostra l'equivalenza tra la formulazione (2.11) e la formulazione (2.29). La stessa dimostrazione può essere fatta a partire dalle equazioni dai campo tensoriali associate alla variazione dell'azione rispetto al tensore metrico. Per semplicità di calcolo si è comunque deciso di riportare solamente l'esempio delle equazioni di campo associate allo scalare ϕ poiché quanto dedotto ha validità del tutto generale.

2.3 Matrice cinetica associata ad una teoria gravitazionale qHOST

La presente sottosezione si focalizzerà sulla deduzione della matrice cinetica $\mathcal{M}_q$ associata alla teoria qHOST (2.9), ossia all'ottenimento della matrice contenente i coefficienti cinetici espressi da termini quadratici nelle derivate temporali prime della campo scalare ϕ e del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Al fine di riuscire a separare le derivate temporali da quelle spaziali, la procedura standard [26] prevede l'utilizzo del formalismo ADM(3+1) [31] sviluppato da Arnowitt, Deser e Misner nell'ambito della formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale[16] [28].

---

[15] Dalle equazioni di Eulero-Lagrange segue infatti che per ϕ:

$$
0 = {}^{(4)}\nabla_\alpha \frac{\mathcal{L}_\phi}{\delta \phi_\alpha} - \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \phi} = {}^{(4)}\nabla_\alpha \left(\lambda^\mu \delta^\alpha_\mu \right) - \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma = {}^{(4)}\nabla_\alpha \lambda^\alpha - \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta \phi}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma
$$

mentre per A_μ:

$$
\begin{aligned}
0 &= {}^{(4)}\nabla_\alpha \frac{\mathcal{L}_\phi}{\delta\big({}^{(4)}\nabla_\alpha A_\epsilon\big)} - \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta A_\epsilon} \\
&= {}^{(4)}\nabla_\alpha \Big(2C^{\mu\nu,\rho\sigma} \delta^\alpha_\mu \delta^\epsilon_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \Big) - \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta A_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\epsilon \\
&= 2\, {}^{(4)}\nabla_\alpha \Big(C^{\alpha\epsilon,\rho\sigma}\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma \Big) - \frac{\delta C^{\mu\nu,\rho\sigma}}{\delta A_\epsilon}\, {}^{(4)}\nabla_\mu A_\nu\, {}^{(4)}\nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\epsilon
\end{aligned}
$$

poi per λ^μ

$$
0 = {}^{(4)}\nabla_\alpha \frac{\mathcal{L}_\phi}{\delta\big({}^{(4)}\nabla_\alpha \lambda^\epsilon\big)} - \frac{\delta \mathcal{L}_\phi}{\delta \lambda^\epsilon} = -\delta^\epsilon_\mu (\phi_\mu - A_\mu) = -\phi_\epsilon + A_\epsilon
$$

[16] A differenza dell'ordinario formalismo ADM(3+1), i risultati proposti nel presente elaborato saranno ottenuti senza la specificazione di alcun sistema di coordinate e per l'appunto si parlerà di formalismo ADM(3+1) covariante. Si utilizzerà la notazione astratta

2.3.1 Formalismo ADM(3+1) covariante

Si supponga che lo spazio-tempo 4-dimensionale $\mathcal{N}$ sia foliato in una famiglia di ipersuperfici 3-dimensionali Σ_t di tipo spazio e si consideri il vettore unitario di tipo tempo n^a ortogonale a Σ_t in ogni suo punto e soddisfacente la normalizzazione

$$n_a n^a = -1 \tag{2.31}$$

Una tale costruzione introduce in maniera del tutto naturale un il tensore metrico per le ipersuperfici Σ_t

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \tag{2.32}$$

che assieme ad n^a definisce gli operatori di proiezione temporale e spaziale[17]

$$\tau_a^b = -n_a n^b \qquad\qquad h_a^b = \delta_a^b + n_a n^b \tag{2.33}$$

Assegnato dunque un generico vettore A_a, esso risulta univocamente decomponibile

$$A_a \equiv \hat{A}_a^* + \hat{A}_a \tag{2.34}$$

nei due corrispondenti contributi di tipo tempo, con componente $A_* \equiv n^a A_a$, e di tipo spazio

$$\hat{A}_a^* \equiv \tau_a^b A_b = -(n^b A_b) n_a \equiv -A_* n_a \qquad\qquad \hat{A}_a \equiv h_a^b A_b \tag{2.35}$$

rispetto al foliamento specificato[18]. Si introduca il vettore t^a definente la direzione del flusso temporale associato alla coordinata temporale t che stabilisce il foliamento dello spazio-tempo nelle ipersuperfici Σ_t. Esso risulta sempre decomponibile

$$t^a \equiv N n^a + N^a \tag{2.36}$$

con N denominata "*lapse function*" ed N^a chiamato "*shift vector*" ortogonale ad n^a

$$n_a N^a \equiv 0 \tag{2.37}$$

e permette di definire la derivata temporale, d'ora in avanti denotata con il punto, per ogni contributo della decomposizione (2.35) come

$$\dot{A}_* \equiv t^{a\ (4)}\nabla_a A_* \qquad\qquad \dot{\hat{A}}_a \equiv h_a^b L_t(\hat{A}_b) = h_a^b \big(t^{c\ (4)}\nabla_c \hat{A}_b + \hat{A}_c{}^{(4)}\nabla_b t^c\big) \tag{2.38}$$

con $L_t(\hat{A}_b)$ la *derivata di Lie* di $\hat{A}_b$ nella direzione di t^a. Si definiscano infine la derivata spaziale covariante 3-dimensionale associata al tensore metrico h_{ab}

$${}^{(3)}\nabla_a \hat{A}_b \equiv h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_c \hat{A}_d \tag{2.39}$$

l'accelerazione

$$a_b \equiv n^{c\ (4)}\nabla_c n_b \tag{2.40}$$

ed il tensore simmetrico[19] corrispondente alla curvatura estrinseca

$$K_{ab} \equiv h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_c n_d = \frac{1}{2N}\Big(\dot{h}_{ab} - {}^{(3)}\nabla_a N_b - {}^{(3)}\nabla_b N_a\Big) \tag{2.41}$$

---

a indici latini $a, b, ...$ per sottolineate il fatto che si sta lavorando con tensori decomposti in componenti di tipo tempo e di tipo spazio e non con componenti di tipo tempo e di tipo spazio.

[17] La natura proiettiva di τ_a^b ed h_a^b è facilmente dimostrabile in quanto per la normalizzazione (2.31)

$$(\tau^2)_a^b = \tau_a^c \tau_c^b = (-n_a n^c)(-n_c n^b) = n_a (n^c n_c) n^b = -n_a n^b = \tau_a^b$$

$$(h^2)_a^b = h_a^c h_c^b = (\delta_a^c + n_a n^c)(\delta_c^b + n_c n^b) = \delta_a^c \delta_c^b + n_a n^c \delta_c^b + \delta_a^c n_c n^b + n_a (n^c n_c) n^b = \delta_a^b + n_a n^b + n_a n^b - n_a n^b = \delta_a^b + n_a n^b = h_a^b$$

$$h_a^b \tau_b^c = -(\delta_a^b + n_a n^b) n_b n^c = -(\delta_a^b n_b n^c + n_a n^b n_b n^c) = -(n_a n^c - n_a n^c) = 0$$

$$h_a^b + \tau_a^b = \delta_a^b + n_a n^b - n_a n^b = \delta_a^b$$

[18] Infatti richiamando la proprietà di completezza degli operatori (2.33) si ha

$$A_a = \delta_a^b A_b = (h_a^b + \tau_a^b) A_b \equiv \hat{A}_a^* + \hat{A}_a$$

[19] Per dimostrare la simmetria degli indici della curvatura estrinseca si inizi ricordando che per l'annullarsi di contrazioni di tensori simmetrici con tensori anti-simmetrici vale che

$$0 = h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_{[c} n_{d]} = \tfrac{1}{2} h_a^c h_b^d \big\{ {}^{(4)}\nabla_c n_d - {}^{(4)}\nabla_d n_c \big\} = \tfrac{1}{2} \big\{ h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_c n_d - h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_d n_c \big\}$$

da cui la simmetria

$$h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_c n_d = h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_d n_c$$

che inserita in (2.41) dopo aver scambiato la posizione delle metriche spaziali e riniminati gli indici contratti fornisce il risultato

$$K_{ba} = h_b^c h_a^{d\ (4)}\nabla_c n_d = h_a^d h_b^{c\ (4)}\nabla_c n_d = h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_d n_c = h_a^c h_b^{d\ (4)}\nabla_c n_d = K_{ab}$$

dove in termini di notazione astratta ${}^{(4)}\nabla_c$ è la derivata covariante 4-dimensionale (2.2). Si noti che le contrazioni[20]

$$h_b^d n_d = 0 \qquad h_a^b h_b^c = h_a^c \tag{2.42}$$

si osservi che la proiezione spaziale $\hat{A}^a$ soddisfa[21]

$$h_c^e \hat{A}^c = \hat{A}^e \qquad \hat{A}^e n_e = 0 \tag{2.43}$$

e si consideri che un qualunque termine[22]

$$n^{c\,(4)}\nabla_a n_c = 0 \qquad \hat{A}_*^{e\,(4)}\nabla_d n_e = 0 \tag{2.44}$$

Si noti infine che per quanto riguarda la curvatura estrinseca[23]

$$n^a K_{ab} = 0 \qquad A^a K_{ab} = \hat{A}^a K_{ab} \tag{2.45}$$

mente per quanto riguarda l'accelerazione[24]

$$n_a a^a = 0 \tag{2.46}$$

In possesso di del formalismo ADM(3+1) covariante e delle principali relazioni notevoli, si è ora pronti ad affrontare il calcolo esplicito della matrice cinetica $\mathcal{M}_q$. Essendo somma di un contributo scalare e di un contributo gravitazionale, la teoria (2.9) genererà contributi ad $\mathcal{M}_q$ sia da (2.11) e che da (2.10)

2.3.2 Contributo scalare alla matrice cinetica

Si consideri in termini di notazione astratta la derivata ${}^{(4)}\nabla_a A_b$ presente nella riformulazione (2.29) della densità di Lagrangiana scalare $\mathcal{L}_\phi$. Poiché adoperando le definizioni (2.33) vale la riformulazione di due delta di Kronecker in termini dei proiettori

$$\begin{aligned} h_a^c h_b^d + h_a^c \tau_b^d + \tau_a^c h_b^d + \tau_a^c \tau_b^d &= (\delta_a^c + n_a n^c)(\delta_b^d + n_b n^d) - (\delta_a^c + n_a n^c) n_b n^d - n_a n^c(\delta_b^d + n_b n^d) + n_a n^c n_b n^d \\ &= \delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^c n_b n^d + n_a n^c \delta_b^d + n_a n^c n_b n^d - \delta_a^c n_b n^d - n_a n^c n_b n^d - n_a n^c \delta_b^d - n_a n^c n_b n^d + n_a n^c n_b n^d \\ &= \delta_a^c \delta_b^d \end{aligned} \tag{2.47}$$

è possibile riscrivere ${}^{(4)}\nabla_a A_b$ come:

$$\begin{aligned} {}^{(4)}\nabla_a A_b &= \delta_a^c \delta_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d \\ &= \left(h_a^c h_b^d + h_a^c \tau_b^d + \tau_a^c h_b^d + \tau_a^c \tau_b^d\right) {}^{(4)}\nabla_c A_d \\ &= h_a^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d + h_a^c \tau_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d + \tau_a^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d + \tau_a^c \tau_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d \\ &= h_a^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d - h_a^c n_b n^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d - n_a n^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d + n_a n^c n_b n^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d \\ &= \left[h_a^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d\right] + \left[-h_a^c n^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d\right] n_b + \left[-n^c h_b^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d\right] n_a + \left[n^c n^d \; {}^{(4)}\nabla_c A_d\right] n_a n_b \end{aligned} \tag{2.48}$$

dove nel penultimo passaggio si sono utilizzate le definizioni (2.33) e nell'ultimo passaggio si sono opportunamente raccolti i termini ottenuti che, selezionati individualmente, possono essere ulteriormente semplificati.

---

[20] Sostituendo le definizioni (2.33) e sfruttando la normalizzazione (2.31) si ha infatti

$$\begin{aligned} &h_b^d n_d = (\delta_b^d + n_b n^d) n_d = \delta_b^d n_d - n_b(n^d n_d) = n_b - n_b = 0 \\ &h_a^b h_b^c = (\delta_a^b + n_a n^b)(\delta_b^c + n_b n^c) = \delta_a^b \delta_b^c + \delta_a^b n_b n^c + n_a n^b \delta_b^c + n_a n^b n_b n^c = \delta_a^c + n_a n^c = h_a^c \end{aligned}$$

[21] Adoperando quanto ottenuto nella (2.42) unitamente ai contributo spaziale (2.35) si ha

$$\begin{aligned} &h_c^e \hat{A}^c = h_c^e(h_b^c A^b) = (h_c^e h_b^c) A^b = h_b^e A^b = \hat{A}^e \\ &\hat{A}^e n_e = (h_b^e A^b) n_e = (h_b^e n_e) A^b = 0 \end{aligned}$$

[22] Impiegando la normalizzazione (2.31), la regola di Leibniz rinominando gli indici contratti fornisce

$$0 = {}^{(4)}\nabla_a(n^c n_c) = ({}^{(4)}\nabla_a n^c) n_c + n^c({}^{(4)}\nabla_a n_c) = 2n^c({}^{(4)}\nabla_a n_c)$$

da cui. Conseguentemente, dai contributi (2.35) si ha

$$\hat{A}_*^{e\,(4)}\nabla_d n_e = A_* n^{e\,(4)}\nabla_d n_e) = 0$$

[23] Ricordando la definizione (2.41) e sfruttando (2.42) si ha

$$\begin{aligned} &n^a K_{ab} = n^a(h_a^c h_b^{d\,(4)}\nabla_c n_d) = (n^a h_a^c) h_b^{d\,(4)}\nabla_c n_d = 0 \\ &A^a K_{ab} = (\hat{A}_*^a + \hat{A}^a) K_{ab} = \hat{A}_*^a K_{ab} + \hat{A}^a K_{ab} = -A_* n^a K_{ab} + \hat{A}^a K_{ab} = \hat{A}^a K_{ab} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo caso si è la decomposizione (2.34) e le componenti (2.35) e la relazione appena dedotta $n^a K_{ab} = 0$

[24] Impiegando la normalizzazione (2.31), la regola di Leibniz rinominando gli indici contratti fornisce

$$0 = n^{c\,(4)}\nabla_c(-1) = n^{c\,(4)}\nabla_c(n^a n_a) = 2\, n_a n^{c\,(4)}\nabla_c n^a = 2\, n_a a^a$$

Sfruttando le definizioni (2.39) e (2.41) la quantità $h_a^c h_b^d\, {}^{(4)}\nabla_c A_d$ è ottenibile dal rimaneggiamento di

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}\nabla_a \hat{A}_b - A_* K_{ab} &= h_a^c h_b^d\, {}^{(4)}\nabla_c \hat{A}_d - A_* h_a^c h_b^d\, {}^{(4)}\nabla_c n_d \\
&= h_a^c h_b^d \left({}^{(4)}\nabla_c \hat{A}_d - A_*\, {}^{(4)}\nabla_c n_d \right) \\
&= h_a^c h_b^d \left\{ {}^{(4)}\nabla_c \hat{A}_d - \left[{}^{(4)}\nabla_c (A_* n_d) - n_d\, {}^{(4)}\nabla_c A_* \right] \right\} \\
&= h_a^c h_b^d \left({}^{(4)}\nabla_c \hat{A}_d + {}^{(4)}\nabla_c \hat{A}_d^* \right) + h_a^c h_b^d n_d\, {}^{(4)}\nabla_c A_* \\
&= h_a^c h_b^d\, {}^{(4)}\nabla_c A_d
\end{aligned} \tag{2.49}$$

dove nella terza riga si è adoperata la *regola di Leibniz* ${}^{(4)}\nabla_c(A_* n_d) = ({}^{(4)}\nabla_c A_*) n_d + A_*({}^{(4)}\nabla_c n_d)$, nella quarta la prima definizione di (2.35) mentre nell'ultima si è impiegata la prima relazione (2.42) unitamente alla (2.34). Analogamente, la contrazione $-h_b^d n_e\, {}^{(4)}\nabla_d A^e$ è deducibile dalla manipolazione di

$$\begin{aligned}
K_{bc}\hat{A}^c - {}^{(3)}\nabla_b A_* &= h_b^d h_c^e\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) \hat{A}_c - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) \hat{A}^e - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e)(A^e - \hat{A}_*^e) - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) A^e - h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) \hat{A}_*^e - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= h_b^d \left[{}^{(4)}\nabla_d (A^e n_e) - n_e\, {}^{(4)}\nabla_d A^e \right] - h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) \hat{A}_*^e - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= h_b^d\, {}^{(4)}\nabla_d (A^e n_e) - h_b^d n_e\, {}^{(4)}\nabla_d A^e - h_b^d\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e) \hat{A}_*^e - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= {}^{(3)}\nabla_b A_* - h_b^d n_e\, {}^{(4)}\nabla_d A^e - {}^{(3)}\nabla_b A_* \\
&= -h_b^d n_e\, {}^{(4)}\nabla_d A^e
\end{aligned} \tag{2.50}$$

dove, oltre alla definizione (2.41) nel primo passaggio e la relazione (2.43) nel secondo, si è utilizzata la decomposizione (2.34) nel terzo, la regola di Leibniz ${}^{(4)}\nabla_d(A^e n_e) = ({}^{(4)}\nabla_d A^e) n_e + A^e({}^{(4)}\nabla_d n_e)$ nel quinto e la seconda relazione (2.44) nel settimo. Infine il termine $n^c n^a\, {}^{(4)}\nabla_a A_c$ è riprodotto a partire da

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\left[\dot{A}_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_* - N\hat{A}_c a^c\right] &= \frac{1}{N}\left[t^{a\,(4)}\nabla_a A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_* - N\hat{A}_c a^c\right] \\
&= \frac{1}{N}\left[(N n^a + N^a)\,{}^{(4)}\nabla_a A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_* - N\hat{A}_c (n^b\, {}^{(4)}\nabla_b n^c)\right] \\
&= n^{a\,(4)}\nabla_a A_* - n^b({}^{(4)}\nabla_b n^c)\hat{A}_c + \frac{1}{N}\left[N^{a\,(4)}\nabla_a A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_*\right] \\
&= -(-1)\, n^{a\,(4)}\nabla_a A_* - n^b({}^{(4)}\nabla_b n^c)\hat{A}_c + \frac{1}{N}\left[N^a h_a^{c\,(3)}\nabla_c A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_*\right] \\
&= -n^c n_c n^{a\,(4)}\nabla_a A_* - n^b\left[{}^{(4)}\nabla_b (n^c \hat{A}_c) - n^{c\,(4)}\nabla_b \hat{A}_c\right] + \frac{1}{N}\left[N^a(\delta_a^c + n_a n^c)\,{}^{(3)}\nabla_c A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_*\right] \\
&= -n^c n_c n^{a\,(4)}\nabla_a A_* + n^b n^{c\,(4)}\nabla_b \hat{A}_c + \frac{1}{N}\left[N^{a\,(3)}\nabla_a A_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_*\right] \\
&= -n^c n_c n^{a\,(4)}\nabla_a A_* + n^b n^{c\,(4)}\nabla_b \hat{A}_c \\
&= n^c n^a\left[{}^{(4)}\nabla_a \hat{A}_c - n_c\, {}^{(4)}\nabla_a A_*\right] \\
&= n^c n^a\left[{}^{(4)}\nabla_a \hat{A}_c - {}^{(4)}\nabla_a (n_c A_*) + ({}^{(4)}\nabla_a n_c) A_*\right] \\
&= n^c n^a\left[{}^{(4)}\nabla_a \hat{A}_c - {}^{(4)}\nabla_a (n_c A_*)\right] \\
&= n^c n^a\left[{}^{(4)}\nabla_a \hat{A}_c + {}^{(4)}\nabla_a \hat{A}_c^*\right] \\
&= n^c n^a\, {}^{(4)}\nabla_a A_c
\end{aligned} \tag{2.51}$$

A seguito della sostituzione (2.38) della derivata temporale presente alla prima riga, nel secondo passaggio della (2.51) si è usata la definizione di accelerazione (2.40) e la decomposizione (2.36) per sostituire t^a. Nel quarto passaggio la definizione (2.39) ha permesso di eliminare la derivata 4-dimensionale nel termine tra parentesi quadre. Allo step successivo, quinta linea, l'utilizzo della normalizzazione (2.31), della regola di Leibniz per il termine centrale contenente ${}^{(4)}\nabla_b(n^c \hat{A}_c) = ({}^{(4)}\nabla_b n^c)\hat{A}_c + n^{c\,(4)}\nabla_b \hat{A}_c$ e della definizione (2.33) ha permesso di semplificare molti termini nel sesto e settimo passaggio grazie alla (2.37) ed (2.43). Infine riapplicando la regola di Leibniz ${}^{(4)}\nabla_a(n_c A_*) = ({}^{(4)}\nabla_a n_c) A_* + {}^{(4)}n_c(\nabla_a A_*)$, la (2.44) e la (2.35) rispettivamente alla nona, decima ed undicesima riga si è giunti al risultato proposto nella dodicesima linea utilizzando (2.34).

Dall'inserimento delle relazioni (2.49) (2.50) (2.51) nell'espressione (2.48) si ottiene dunque

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}\nabla_a A_b &= \left[{}^{(3)}\nabla_a \hat{A}_b - A_* K_{ab}\right] + \left[K_{bc}\hat{A}^c - {}^{(3)}\nabla_b A_*\right] n_a + \left[K_{ac}\hat{A}^c - {}^{(3)}\nabla_a A_*\right] n_b + \frac{1}{N}\left[\dot{A}_* - N^{c\,(3)}\nabla_c A_* - N\hat{A}_c a^c\right] n_a n_b \\
&= \left\{\frac{1}{N}\dot{A}_* n_a n_b - A_* K_{ab} + K_{bc}\hat{A}^c n_a + K_{ac}\hat{A}^c n_b\right\} + \left\{{}^{(3)}\nabla_a \hat{A}_b - 2n_{(a}\, {}^{(3)}\nabla_{b)} A_* - \frac{1}{N}\left[N^{c\,(3)}\nabla_c A_* + N\hat{A}_c a^c\right] n_a n_b\right\}
\end{aligned}$$

$$\equiv {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{.} + {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\times} \tag{2.52}$$

con definite

$$ {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{.} \equiv \frac{1}{N}\dot{A}_* n_a n_b - A_* K_{ab} + K_{bc}\hat{A}^c n_a + K_{ac}\hat{A}^c n_b \tag{2.53}$$

$$ {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\times} \equiv {}^{(3)}\nabla_a \hat{A}_b - 2n_{(a}\, {}^{(3)}\nabla_{b)} A_* - \frac{1}{N}\left[N^c\, {}^{(3)}\nabla_c A_* + N\hat{A}_c a^c\right] n_a n_b \tag{2.54}$$

La notazione $(a \ldots e)$ indica la selezione di sole combinazioni simmetriche negli indici raccolti. La derivata covariante 4-dimensionale ${}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{.}$ raccoglie i contributi dell'espressione (2.52) nelle derivate temporali prime[25] $\dot{A}_*$ ed $\dot{h}_{ab}$ mentre nella derivata covariante 4-dimensionale ${}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\times}$ sono collocati tutti gli altri termini. Impiegando la definizione (2.41), e sfruttando le simmetrie contenute in essa, è formalmente possibile riformulare i termini presenti in (2.53). Infatti innanzitutto

$$\begin{aligned} A_* K_{ab} &= A_* h^c_a h^d_b\, {}^{(4)}\nabla_c n_d \\ &= A_* h^c_e h^e_a h^d_f h^f_b\, {}^{(4)}\nabla_c n_d \\ &= A_* h^e_a h^f_b \big(h^c_e h^d_f\, {}^{(4)}\nabla_c n_d\big) \\ &= A_* h^e_a h^f_b K_{ef} \\ &= A_* h^e_{(a} h^f_{b)} K_{ef} \end{aligned} \tag{2.55}$$

dove nel secondo passaggio si è utilizzata la (2.42) nell'ultimo passaggio si è utilizzato il risultato[26] $h^e_a h^f_b K_{ef} = h^e_{(a} h^f_{b)} K_{ef}$. Analogamente al caso precedente si utilizzino la (2.41) ed (2.42) rispettivamente al primo e secondo passaggio si ottiene

$$\begin{aligned} K_{bc}\hat{A}^c n_a + K_{ac}\hat{A}^c n_b &= \big(h^d_b h^e_c\, {}^{(4)}\nabla_d n_e\big)\hat{A}^c n_a + \big(h^d_a h^e_c\, {}^{(4)}\nabla_d n_e\big)\hat{A}^c n_b \\ &= h^r_b h^d_r h^e_c\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e)\hat{A}^c n_a + h^r_a h^d_r h^e_c\, ({}^{(4)}\nabla_d n_e)\hat{A}^c n_b \\ &= h^r_b \big[h^d_r h^e_c\, {}^{(4)}\nabla_d n_e\big]\hat{A}^c n_a + h^r_a \big[h^d_r h^e_c\, {}^{(4)}\nabla_d n_e\big]\hat{A}^c n_b \\ &= h^r_b K_{rc}\hat{A}^c n_a + h^r_a K_{rc}\hat{A}^c n_b \\ &= \big(h^r_b \hat{A}^c n_a + h^r_a \hat{A}^c n_b\big) K_{rc} \\ &= \big(h^{(r}_b \hat{A}^{c)} n_a + h^{(r}_a \hat{A}^{c)} n_b\big) K_{rc} \\ &= 2h^{(r}_{(b} \hat{A}^{c)} n_{a)} K_{rc} \end{aligned} \tag{2.58}$$

dove alla quarta riga si è utilizzata nuovamente la (2.41) per inglobare i termini e dove nella sesta linea si è impiegata la relazione[27] $h^r_b \hat{A}^c n_a K_{rc} = h^{(r}_b \hat{A}^{c)} n_a K_{rc}$.
Dall'inserimento delle relazioni (2.59) e (2.60) nell'espressione (2.53) si giunge all'espressione

$$ {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{.} \equiv \frac{1}{N}\dot{A}_* n_a n_b - A_* K_{ab} + K_{bc}\hat{A}^c n_a + K_{ac}\hat{A}^c n_b \tag{2.61}$$

$$= \left\{\frac{1}{N} n_a n_b\right\}\dot{A}_* + \Big\{ - A_* h^c_{(a} h^d_{b)} + 2h^{(c}_{(b} \hat{A}^{d)} n_{a)}\Big\} K_{cd}$$

$$\equiv \lambda_{ab}\dot{A}_* + \Lambda^{cd}_{ab} K_{cd} \tag{2.62}$$

con definite rispettivamente

$$\lambda_{ab} \equiv \frac{1}{N} n_a n_b \qquad \Lambda^{cd}_{ab} \equiv -A_* h^c_{(a} h^d_{b)} + 2h^{(c}_{(b}\hat{A}^{d)} n_{a)} \tag{2.63}$$

---

[25] Si noti che le derivate temporali $\dot{h}_{ab}$ sono implicitamente contenute nella definizione (2.41) di curvatura estrinseca. D'ora in avanti la curvatura estrinseca K_{ab} sarà dunque rappresentativa delle derivate temporali prime del tensore metrico tridimensionale h_{ab}

[26] Essendo che per simmetria di indici (si ricordi che dalle definizioni sia h_{ab} K_{ab} sono simmetrici) e della struttura vale

$$h^e_a h^f_b K_{ef} = h^f_a h^e_b K_{fe} = h^e_b h^f_a K_{fe} \tag{2.56}$$

segue dunque che

$$h^e_a h^f_b K_{ef} = \tfrac{1}{2}\big(h^e_a h^f_b + h^e_a h^f_b\big) K_{ef} = \tfrac{1}{2}\big(h^e_a h^f_b + h^e_b h^f_a\big) K_{ef} = h^e_{(a} h^f_{b)} K_{ef} \tag{2.57}$$

[27] Essendo che per simmetria di indici (si ricordi che dalle definizioni sia h_{ab} K_{ab} sono simmetrici) e della struttura vale

$$h^r_b \hat{A}^c K_{rc} = h^c_b \hat{A}^r K_{cr} = h^c_b \hat{A}^r K_{rc} \tag{2.59}$$

segue dunque che

$$h^r_b \hat{A}^c n_a K_{rc} = \tfrac{1}{2}\big(h^r_b \hat{A}^c + h^r_b \hat{A}^c\big) n_a K_{rc} = h^{(r}_b \hat{A}^{c)} n_a K_{rc} \tag{2.60}$$

Sebbene il risultato (2.61) sia compatto e chiaramente simmetrico nella sua notazione, al fine di svolgere calcoli espliciti risulterà tuttavia più conveniente utilizzare la forma non compatta (2.53). A partire da essa si definisca infatti la densità di Lagrangiana cinetica associata ai contributi scalari (ϕ) della teoria (2.9)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin}^{(\phi)} &\equiv C^{ab,cd}\Big\{ {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{.}\, {}^{(4)}\nabla_c A_d\big|_{.} \Big\} \qquad (2.64)\\
&= C^{ab,cd}\left(\frac{1}{N}n_a n_b \dot{A}_* - A_* K_{ab} + n_a K_{bc}\hat{A}^c + n_b K_{ac}\hat{A}^c\right)\left(\frac{1}{N}n_e n_d \dot{A}_* - A_* K_{ed} + n_e K_{df}\hat{A}^f + n_d K_{ef}\hat{A}^f\right)\\
&= \left\{\frac{1}{N^2}C^{ab,cd} n_a n_b n_c n_d\right\}\dot{A}_*^2\\
&\quad + 2\left\{-\frac{1}{N}C^{ab,cd}A_* n_a n_b + \frac{1}{N}\left[C^{ab,ed}\hat{A}^c + C^{ab,ce}\hat{A}^d\right] n_a n_b n_e\right\}\dot{A}_* K_{cd}\\
&\quad + \left\{C^{ab,cd}A_*^2 - 2\Big[C^{eb,cd}\hat{A}^a + C^{ae,cd}\hat{A}^b\Big]A_* n_e + \Big[C^{eb,fd}\hat{A}^a\hat{A}^c + 2C^{eb,cf}\hat{A}^a\hat{A}^d + C^{ae,cf}\hat{A}^b\hat{A}^d\Big]n_e n_f\right\}K_{ab}K_{cd}\\
&\equiv \mathcal{A}_{(\phi)}\dot{A}_*^2 + 2\,\mathcal{B}_{(\phi)}^{cd}\dot{A}_* K_{cd} + \mathcal{K}_{(\phi)}^{ab,cd}K_{ab}K_{cd}
\end{aligned}$$

dove in notazione astratta $C^{ab,cd}$ rappresenta il tensore (2.14) e dove nel penultimo passaggio i termini all'interno delle parentesi graffe definiscono ordinatamente il *coefficiente cinetico del settore scalare* $\mathcal{A}_{(\phi)}$, il *coefficiente cinetico del settore di mixing* $\mathcal{B}_{(\phi)}^{cd}$ ed il *coefficiente cinetico del settore metrico* $\mathcal{K}_{(\phi)}^{ab,cd}$ associati al contributo scalare (ϕ)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(\phi)} &\equiv \frac{1}{N^2}C^{ab,cd}n_a n_b n_c n_d \qquad (2.65)\\
\mathcal{B}_{(\phi)}^{cd} &\equiv -\frac{1}{N}C^{ab,cd}A_* n_a n_b + \frac{1}{N}\left[C^{ab,ed}\hat{A}^c + C^{ab,ce}\hat{A}^d\right]n_a n_b n_e\\
\mathcal{K}_{(\phi)}^{ab,cd} &= C^{ab,cd}A_*^2 - 2\Big[C^{eb,cd}\hat{A}^a + C^{ae,cd}\hat{A}^b\Big]A_* n_e + \Big[C^{eb,fd}\hat{A}^a\hat{A}^c + 2C^{eb,cf}\hat{A}^a\hat{A}^d + C^{ae,cf}\hat{A}^b\hat{A}^d\Big]n_e n_f
\end{aligned}$$

Ottenere le rappresentazioni esplicite dei coefficienti cinetici (2.65) risulta assai macchinoso poiché richiede la valutazione delle numerose combinazioni con cui il tensore $C^{ab,cd}$ appare contrarsi con il vettore n_a. Il calcolo esplicito di quest'ultime è fornito in Appendice (B.1) da cui infine si ricavano le parametrizzazioni

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(\phi)} &= \frac{1}{N^2}\Big[\alpha_1 + \alpha_2 - \big(\alpha_3 + \alpha_4\big)A_*^2 + \alpha_5 A_*^4\Big] \qquad (2.66)\\
\mathcal{B}_{(\phi)}^{cd} &= \beta_{(\phi)}^1 h^{cd} + \beta_{(\phi)}^2 \hat{A}^c\hat{A}^d\\
\mathcal{K}_{(\phi)}^{ab,cd} &= \kappa_{(\phi)}^1 h^{a(c}h^{d)b} + \kappa_{(\phi)}^2 h^{ab}h^{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa_{(\phi)}^3\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) + \tfrac{1}{2}\kappa_{(\phi)}^4\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big] + \kappa_{(\phi)}^5\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d
\end{aligned}$$

con il coefficiente cinetico di mixing parametrizzato dai parametri

$$\beta_{(\phi)}^1 \equiv \frac{A_*}{2N}\big(2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2\big) \qquad \beta_{(\phi)}^2 \equiv -\frac{A_*}{2N}\big(\alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5 A_*^2\big)$$

e con il coefficiente cinetico del settore metrico parametrizzato dai parametri

$$\begin{aligned}
&\kappa_{(\phi)}^1 \equiv \alpha_1 A_*^2 && \kappa_{(\phi)}^2 \equiv \alpha_2 A_*^2 \qquad (2.67)\\
&\kappa_{(\phi)}^3 \equiv -\alpha_3 A_*^2 && \kappa_{(\phi)}^4 \equiv -2\alpha_1\\
&\kappa_{(\phi)}^5 \equiv \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4 &&
\end{aligned}$$

funzioni delle arbitrarie $\alpha_1, ..., \alpha_5$ introdotte in (2.14). Il lettore interessato alla deduzione precisa delle espressioni (2.67) è rimandato all'Appendice (B.2).

2.3.3 Contributo gravitazionale alla matrice cinetica

Nei termini della notazione astratta introdotta nell'ambito del formalismo ADM(3+1) covariante [28] , lo studio per l'individuazione dei termini con cui la Lagrangiana gravitazionale (2.10) $\mathcal{L}$ contribuisce alla matrice cinetica $\mathcal{M}_q$ della teoria S inizia con l'utilizzo della ben nota decomposizione del tensore di curvatura 4-dimensionale[28]

$$ {}^{(4)}R \equiv K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R - 2\,{}^{(4)}\nabla_a\big[a^a - Kn^a\big] \qquad (2.68)$$

dove $K \equiv K_a^a$ corrisponde alla traccia della curvatura estrinseca (2.41), ${}^{(3)}R$ è lo scalare di curvatura tridimensionale [31] e dove a^a rappresenta l'accelerazione (2.40). Inserendo la (2.68) nella definizione (2.10):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_g &= f\,{}^{(4)}R \qquad (2.69)\\
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] - 2f\,{}^{(4)}\nabla_a\big[a^a - Kn^a\big]
\end{aligned}$$

[28] Il lettore interessato alla dimostrazione completa di (2.68) è rimandato alla pagina 73 di [31]. Il risultato proposto è ottenibile ponendo $\epsilon = -1$ nella formula 17.73 di tale riferimento bibliografico

$$
\begin{aligned}
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] - 2\,{}^{(4)}\nabla_a\big[f\left(a^a - Kn^a\right)\big] + 2\big(a^a - Kn^a\big){}^{(4)}\nabla_a f \\
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] + 2\big(a^a - Kn^a\big){}^{(4)}\nabla_a f + {}^{(4)}\nabla_a w^a \\
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] + 2\big(a^a - Kn^a\big)\big(f_X\,{}^{(4)}\nabla_a X + f_\phi\,{}^{(4)}\nabla_a\phi\big) \\
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] + 4f_X\big(a^a - Kn^a\big)A^{b\,(4)}\nabla_a A_b + 2f_\phi\big(a^a - Kn^a\big)A_a \\
&= f\left[K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^{(3)}R\right] + 4f_X\big(a^a - Kn^a\big)A^b\big\{{}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\cdot} + {}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\times}\big\} + 2f_\phi\big(a^a - Kn^a\big)A_a \\
&= \Big\{f\left(K_{ab}K^{ab} - K^2\right) + 4f_X\big(a^a - Kn^a\big)A^{b\,(4)}\nabla_a A_b\big|_{\cdot}\Big\} + {}^{(3)}R + 4f_X\big(a^a - Kn^a\big)A^{b\,(4)}\nabla_a A_b\big|_{\times} + 2f_\phi\big(a^a - Kn^a\big)A_a
\end{aligned}
$$

Alla terza riga della (2.69) si è definita $w^a \equiv -2f\left(a^a - Kn^a\right)$ ed alla quarta si è calcolata la derivata ${}^{(4)}\nabla_a f = f_X\,{}^{(4)}\nabla_a X + f_\phi\,{}^{(4)}\nabla_a\phi$ con alla quinta riga la sostituzione ${}^{(4)}\nabla_a X = {}^{(4)}\nabla_a(A^bA_b) = 2A^{b\,(4)}\nabla_a A_b$ essendo ${}^{(4)}\nabla_a\phi = A_a$ per la definizione ( ). I contributi ${}^{(4)}\nabla_a w^a$ ed ${}^{(4)}\nabla_a\phi$ sono stati poi eliminati poiché $\mathcal{L}_g$ è definita a meno di divergenze totali. Infine alla sesta riga si è introdotta la decomposizione (2.52)

Dall'espressione (2.69) ottenuta, si definisca la densità di Lagrangiana cinetica associata ai contributi gravitazionali (g) della teoria (2.9) come

$$
\mathcal{L}^{(g)}_{kin} \equiv f\left(K_{ab}K^{ab} - K^2\right) + 4f_X\big(a^a - Kn^a\big)A^{b\,(4)}\nabla_a A_b\big|_{\cdot} \tag{2.70}
$$

Impiegando la definizione (2.41), e sfruttando le simmetrie contenute in essa, è formalmente possibile riformulare i termini presenti in (2.70). Infatti

$$
\begin{aligned}
K_{ab}K^{ab} &= h^c_a h^d_b\,{}^{(4)}\nabla_c n_d\; h^a_e h^b_f\,{}^{(4)}\nabla^e n^f \\
&= h^m_a h^c_m h^n_b h^d_n\,{}^{(4)}\nabla_c n_d\; h^a_q h^q_e h^b_r h^r_f\,{}^{(4)}\nabla^e n^f \\
&= h^m_a h^n_b\big(h^c_m h^d_n\,{}^{(4)}\nabla_c n_d\big)\; h^a_q h^b_r\big(h^q_e h^r_f\,{}^{(4)}\nabla^e n^f\big) \\
&= h^m_a h^n_b K_{mn}\; h^a_q h^b_r K^{qr} \\
&= h^m_a h^n_b K_{mn}\; h^{aq} h^{br} K_{qr} \\
&= (h^m_a h^{aq})(h^n_b h^{br})K_{mn}K_{qr} \\
&= h^{mq}h^{nr}K_{mn}K_{qr}
\end{aligned} \tag{2.71}
$$

dove alla seconda e alla penultima riga si è utilizzata la relazione (2.42). Inoltre dalla traccia $K \equiv K^a_a = h^{ab}K_{ab}$

$$
K^2 \equiv K^a_a K^c_c = h^{ab}K_{ab}h^{cd}K_{cd} = h^{ab}h^{cd}K_{ab}K_{cd} \tag{2.72}
$$

Dunque il primo termine tra parentesi graffe nella (2.70) diventa

$$
\begin{aligned}
f\big(K_{ab}K^{ab} - K^2\big) &= f\big(h^{eg}h^{fh}K_{ef}K_{gh} - h^{ef}h^{gh}K_{ef}K_{gh}\big) \\
&= f\big(h^{e(g}h^{h)f}K_{ef}K_{gh} - h^{ef}h^{gh}K_{ef}K_{gh}\big) \\
&= \big\{f\big(h^{e(g}h^{h)f} - h^{ef}h^{gh}\big)\big\}K_{ef}K_{gh}
\end{aligned} \tag{2.73}
$$

con alla seconda linea sfruttata l'uguaglianza[29] $h^{eg}h^{fh}K_{ef}K_{gh} = h^{e(g}h^{h)f}K_{ef}K_{hg}$. Analogamente per il secondo termine si usi la (2.61) per poi ottenere

$$
\begin{aligned}
4f_X\big(a^a{-}Kn^a\big)A^{b\,(4)}\nabla_a A_b\big|_{\cdot} &= 4f_X\big(a^a - h^{ef}K_{ef}n^a\big)A^b\left\{\frac{1}{N}\dot{A}_* n_a n_b - A_*K_{ab} + K_{bc}\hat{A}^c n_a + K_{ac}\hat{A}^c n_b\right\} \\
&= 4f_X\Big\{\frac{1}{N}\dot{A}_*A^b a^a n_a n_b - A_*A^b a^a K_{ab} + K_{bc}\hat{A}^c A^b a^a n_a + K_{ac}\hat{A}^c A^b a^a n_b + \\
&\qquad -\frac{1}{N}\dot{A}_*A^b h^{ef}K_{ef}n^a n_a n_b + A_*A^b h^{ef}K_{ef}n^a K_{ab} - K_{bc}\hat{A}^c A^b h^{ef}K_{ef}n^a n_a - K_{ac}\hat{A}^c A^b h^{ef}K_{ef}n^a n_b\Big\} \\
&= 4f_X\left\{-A_*A^b a^a K_{ab} + K_{ac}\hat{A}^c A^b a^a n_b + \frac{1}{N}\dot{A}_*A^b h^{ef}K_{ef}n_b + K_{bc}\hat{A}^c A^b h^{ef}K_{ef}\right\} \\
&= 4f_X\left\{\frac{1}{N}\dot{A}_*A^b h^{ef}K_{ef}n_b + K_{bc}\hat{A}^c A^b h^{ef}K_{ef}\right\} \\
&= 2\left\{\frac{2}{N}f_X A_* h^{ef}\right\}\dot{A}_*K_{ef} + \left\{4f_X h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h\right\}K_{ef}K_{gh} \\
&= 2\left\{\frac{2}{N}f_X A_* h^{ef}\right\}\dot{A}_*K_{ef} + \left\{2f_X\big(h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h + h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^f\big)\right\}K_{ef}K_{gh}
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

[29] Essendo che per simmetria di indici (si ricordi che dalle definizioni sia h_{ab} K_{ab} sono simmetrici) e della struttura vale

$$h^{eg}h^{hf}K_{ef}K_{gh} = h^{eh}h^{gf}K_{ef}K_{hg} = h^{eh}h^{gf}K_{ef}K_{gh}$$

segue dunque che

$$h^{eg}h^{fh}K_{ef}K_{gh} = h^{eg}h^{hf}K_{ef}K_{gh} = \tfrac{1}{2}\big(h^{eg}h^{hf} + h^{eg}h^{hf}\big)K_{ef}K_{hg} = h^{e(g}h^{h)f}K_{ef}K_{hg}$$

Si ricordi che la notazione $(a\ldots e)$ indica la selezione di sole combinazioni simmetriche negli indici raccolti dove nel terzo passaggio l'espressione è stata semplificata usando la prima relazione (2.45), la (2.46) e la normalizzazione (2.31), dove nel quarto passaggio si sono eliminati i termini in a^a in quanto[30] $K_{ac}\hat{A}^c A^b a^a n_b = A_* A^b a^a K_{ab}$. Nel quinto passaggio si è impiegata la seconda relazione (2.45) con la definizione (2.35) di A_* mentre nel sesto ed ultimo passaggio il fatto che per pura simmetria di indici $h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h K_{ef}K_{gh} = h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^f K_{ef}K_{gh}$. Si inseriscano i risultati (2.73) (2.74) così ottenuti nella densità di Lagrangiana cinetica (2.70) associata ai contributi gravitazionali (g)

$$\begin{aligned}
L^{(g)}_{kin} &\equiv f\left(K_{ab}K^{ab} - K^2\right) + 4f_X\left(a^a - Kn^a\right)A^b\,{}^{(4)}\nabla_a A_b\big|_{\cdot} \qquad (2.75)\\
&= \left\{f\left(h^{e(g}h^{h)f} - h^{ef}h^{gh}\right)\right\}K_{ef}K_{gh} + 2\left\{\frac{2}{N}f_X A_* h^{ef}\right\}\dot{A}_* K_{ef} + \left\{2f_X\left(h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h + h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^f\right)\right\}K_{ef}K_{gh}\\
&= 2\left\{\frac{2}{N}f_X A_* h^{ef}\right\}\dot{A}_* K_{ef} + \left\{f\left(h^{e(g}h^{h)f} - h^{ef}h^{gh}\right) + 2f_X\left(h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h + h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^f\right)\right\}K_{ef}K_{gh}\\
&= 2\,\mathcal{B}^{ef}_{(g)}\dot{A}_* K_{ef} + \mathcal{K}^{ef,gh}_{(g)}K_{ef}K_{gh} \qquad (2.76)
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio i termini all'interno delle parentesi graffe definiscono ordinatamente il *coefficiente cinetico del settore scalare* $\mathcal{A}_{(g)}$, il *coefficiente cinetico del settore di mixing* $\mathcal{B}^{cd}_{(g)}$ ed il *coefficiente cinetico del settore metrico* $\mathcal{K}^{ab,cd}_{(g)}$ associati al contributo gravitazionale (g)

$$\mathcal{B}^{ef}_{(g)} \equiv \frac{2}{N}f_X A_* h^{ef} \equiv \beta^1_{(g)}h^{ef} \qquad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}^{ef,gh}_{(g)} &\equiv f\left(h^{e(g}h^{h)f} - h^{ef}h^{gh}\right) + 2f_X\left(h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h + h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^f\right) \qquad (2.78)\\
&\equiv \kappa^1_{(g)}h^{e(g}h^{h)f} + \kappa^2_{(g)}h^{ef}h^{gh} + \tfrac{1}{2}\kappa^3_{(g)}\left(h^{ef}\hat{A}^g\hat{A}^h + h^{gh}\hat{A}^e\hat{A}^e\right)
\end{aligned}$$

con il coefficiente cinetico di mixing parametrizzato dai parametri

$$\beta^1_{(g)} \equiv \frac{2}{N}f_X A_* \qquad (2.79)$$

e con il coefficiente cinetico del settore metrico parametrizzato dai parametri

$$\begin{aligned}
\kappa^1_{(g)} &\equiv f\\
\kappa^2_{(g)} &\equiv -f \qquad (2.80)\\
\kappa^3_{(g)} &\equiv 4f_X
\end{aligned}$$

2.3.4 Espressione esplicita della matrice cinetica

Le espressioni (2.64) ed (2.75), rispettivamente corrispondenti alla densità di Lagrangiana cinetica associata ai contributi scalari (ϕ) e alla densità di Lagrangiana cinetica associata ai contributi gravitazionali (g) della teoria (2.9), cooperano alla definizione della densità di Lagrangiana cinetica totale

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin} &\equiv L^{(\phi)}_{kin} + L^{(g)}_{kin} \qquad (2.81)\\
&= \mathcal{A}_{(\phi)}\dot{A}_*^2 + 2\left\{\mathcal{B}^{cd}_{(\phi)} + \mathcal{B}^{cd}_{(g)}\right\}\dot{A}_* K_{cd} + \left\{\mathcal{K}^{ab,cd}_{(\phi)} + \mathcal{K}^{ab,cd}_{(g)}\right\}K_{ab}K_{cd}\\
&\equiv \mathcal{A}\dot{A}_*^2 + 2\,\mathcal{B}^{cd}\dot{A}_* K_{cd} + \mathcal{K}^{ab,cd}K_{ab}K_{cd}
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio i termini all'interno delle parentesi graffe definiscono ordinatamente il *coefficiente cinetico del settore scalare* totale

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{(\phi)} = \frac{1}{N^2}\left[\alpha_1 + \alpha_2 - \left(\alpha_3 + \alpha_4\right)A_*^2 + \alpha_5 A_*^4\right] \qquad (2.82)$$

il *coefficiente cinetico del settore di mixing* totale

$$\mathcal{B}^{cd} \equiv \mathcal{B}^{cd}_{(\phi)} + \mathcal{B}^{cd}_{(g)} = \left\{\beta^1_{(\phi)} + \beta^1_{(g)}\right\}h^{cd} + \beta^2_{(\phi)}\hat{A}^c\hat{A}^d = \beta^1 h^{cd} + \beta^2\hat{A}^c\hat{A}^d \qquad (2.83)$$

ed il *coefficiente cinetico del settore metrico* totale

$$\mathcal{K}^{ab,cd} \equiv \mathcal{K}^{ab,cd}_{(\phi)} + \mathcal{K}^{ab,cd}_{(g)} \qquad (2.84)$$

---

[30] Impiegando la definizione (2.41), le componenti (2.35) e le proprietà (2.42) si ottiene facilmente

$$\begin{aligned}
K_{ac}\hat{A}^c A^b a^a n_b &= (K_{ac}\hat{A}^c)(A^b n_b)a^a\\
&= (h^e_a h^f_c\,{}^{(4)}\nabla_e n_f\; h^c_m A^m)A_* a^a\\
&= h^e_a h^f_m\,{}^{(4)}\nabla_e n_f\; A^m A_* a^a\\
&= K_{am}A^m A_* a^a\\
&= A_* A^b a^a K_{ab}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\kappa^1_{(\phi)} + \kappa^1_{(g)}\} h^{a(c}h^{d)b} + \{\kappa^2_{(\phi)} + \kappa^2_{(g)}\} h^{ab}h^{cd} + \tfrac{1}{2}\{\kappa^3_{(\phi)} + \kappa^3_{(g)}\}\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\kappa^4_{(\phi)}\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big] + \kappa^5_{(\phi)}\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d \\
&= \kappa^1 h^{a(c}h^{d)b} + \kappa^2 h^{ab}h^{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa^3\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) + \tfrac{1}{2}\kappa^4\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big] + \kappa^5\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d
\end{aligned}
$$

rispettivamente parametrizzate dai parametri totalizzanti i contributi

$$
\begin{aligned}
\beta^1 &\equiv \beta^1_{(\phi)} + \beta^1_{(g)} = \frac{A_*}{2N}\big(2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2 + 4f_X\big) && (2.85)\\
\beta^2 &\equiv \beta^2_{(\phi)} = -\frac{A_*}{2N}\big(\alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5 A_*^2\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\kappa^1 &\equiv \kappa^1_{(\phi)} + \kappa^1_{(g)} = \alpha_1 A_*^2 + f && (2.86)\\
\kappa^2 &\equiv \kappa^2_{(\phi)} + \kappa^2_{(g)} = \alpha_2 A_*^2 - f \\
\kappa^3 &\equiv \kappa^3_{(\phi)} + \kappa^3_{(g)} = -\alpha_3 A_*^2 + 4f_X && (2.87)\\
\kappa^4 &\equiv \kappa^4_{(\phi)} = -2\alpha_1 \\
\kappa^5 &\equiv \kappa^5_{(\phi)} = \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4
\end{aligned}
$$

Sia $Sym(3)$ lo spazio 6-dimensionale delle matrici (3×3) simmetriche $S \equiv \{S_{ab}\}_{1\le(a,b)\le 3}$ in $\mathbb{R}^3$ con naturale prodotto scalare

$$
\langle U, V\rangle \equiv U_{ab}h^{bc}V_{cd}h^{da} \tag{2.88}
$$

con $U, V \in Sym(3)$. Introdotti due vettori unitari u^a ed v^a che formino in $\mathbb{R}^3$ assieme ad[31] $z^a \equiv \frac{\hat{A}^a}{||\hat{A}||}$ una base ortonormale[32], si definiscano in $\mathbb{R}^3$ le seguenti 6 matrici (3×3) $U^{\mathcal{I}}$ simmetriche e costituenti una base ortonormale $\mathfrak{B}_{Sym(3)}$ per $Sym(3)$:

$$
\begin{aligned}
U^1_{ab} &\equiv z_a z_b & U^4_{ab} &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(u_a v_b + u_b v_a\big) \\
U^2_{ab} &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(h_{ab} - z_a z_b\big) & U^5_{ab} &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(u_a z_b + u_b z_a\big) \qquad (2.89)\\
U^3_{ab} &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(u_a u_b - v_a v_b\big) & U^6_{ab} &\equiv \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(v_a z_b + v_b z_a\big)
\end{aligned}
$$

Definendo per i coefficienti (2.83) $\mathcal{B}^{cd}$ ed (2.84) $\mathcal{K}^{ab,cd}$ rispettivamente la forma bilineare

$$
\mathcal{K} : (U,V) \in Sym(3)\times Sym(3) \longrightarrow K(U,V) \equiv U^T_{ba}\,\mathcal{K}^{abcd}\,V_{cd} \in \mathbb{R} \tag{2.90}
$$

e la forma lineare

$$
\mathcal{B} : V \in Sym(3) \longrightarrow \mathcal{B}(V) \equiv \mathcal{B}^{cd}\,V_{cd} \in \mathbb{R} \tag{2.91}
$$

la matrice (6×6) associata a $\mathcal{K}$ e la matrice (6×1) associata a $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathfrak{B}_{Sym(3)}$ saranno:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{K} &\equiv \Big\{\mathscr{K}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \equiv U^{\mathcal{I}}_{ab}\,\mathcal{K}^{abcd}\,U^{\mathcal{J}}_{cd}\Big\}_{1\le(\mathcal{I},\mathcal{J})\le 6} && (2.92)\\
\mathscr{B} &\equiv \Big\{\mathscr{B}^{\mathcal{I}} \equiv \mathcal{B}^{cd}U^{\mathcal{I}}_{cd}\Big\}_{1\le\mathcal{I}\le 6}
\end{aligned}
$$

Il lettore interessato è rimandato all'Appendice (B.3) per la visione in termini matriciali delle componenti esplicite di $\mathscr{B}$ ed $\mathscr{K}$ e delle tecniche di calcolo esplicite utilizzabili per ottenere tale risultato. Se conseguentemente si decompone pure

$$
K_{ab} \equiv \mathfrak{K}_{\mathcal{I}}U^{\mathcal{I}}_{ab} \tag{2.93}
$$

e si introduce il vettore

$$
\mathcal{X} = \big(\mathcal{X}^I\big)_{0\le I\le 6} \equiv \begin{pmatrix} A_* \\ \mathfrak{K}_{\mathcal{J}} \end{pmatrix} \tag{2.94}
$$

è possibile riscrivere la (2.81) come

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{kin} &= \mathcal{A}\dot{A}_*^2 + 2\,\mathcal{B}^{cd}\dot{A}_*K_{cd} + \mathcal{K}^{ab,cd}K_{ab}K_{cd} && (2.95)\\
&= \mathcal{A}\dot{A}_*^2 + 2\,\mathcal{B}^{cd}\dot{A}_*\mathfrak{K}_{\mathcal{I}}U^{\mathcal{I}}_{cd} + \mathcal{K}^{ab,cd}\mathfrak{K}_{\mathcal{I}}\,U^{\mathcal{I}}_{ab}\mathfrak{K}_{\mathcal{J}}U^{\mathcal{J}}_{cd} \\
&= \mathcal{A}\dot{A}_*^2 + 2\,(\mathcal{B}^{cd}U^{\mathcal{I}}_{cd})\dot{A}_*\mathfrak{K}_{\mathcal{I}} + (U^{\mathcal{I}}_{ab}\,\mathcal{K}^{ab,cd}\,U^{\mathcal{J}}_{cd})\mathfrak{K}_{\mathcal{I}}\,\mathfrak{K}_{\mathcal{J}} \\
&= \mathcal{A}\dot{A}_*^2 + 2\,\mathscr{B}^{\mathcal{I}}\dot{A}_*\mathfrak{K}_{\mathcal{I}} + \mathscr{K}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}\mathfrak{K}_{\mathcal{I}}\,\mathfrak{K}_{\mathcal{J}} \\
&= \dot{\mathcal{X}}^T\mathcal{M}\dot{\mathcal{X}} && (2.96)
\end{aligned}
$$

[31] Si è simbolicamente indicata la norma di $\hat{A}$ come $||\hat{A}|| = \sqrt{\hat{A}^2} = \sqrt{\hat{A}^a\hat{A}_a} = \sqrt{h^{ab}\hat{A}_a\hat{A}_b}$

[32] Si impone dunque che $u^a u_a = v^a v_a = z^a z_a = 1$ e che $u^a v_a = u^a z_a = v_a z^a = 0$

dove nel secondo passaggio si è utilizzata la decomposizione (2.93), nel penultimo passaggio si sono utilizzate le relazioni (2.92) e dove nell'ultimo passaggio si è finalmente introdotta la matrice cinetica sella teoria (2.9)

$$\mathcal{M}_q = \left(\mathcal{M}_q^{IJ}\right)_{0\leq(I,J)\leq 6} \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathscr{B}^{\mathcal{I}} \\ \mathscr{B}^{\mathcal{J}} & \mathscr{K}^{\mathcal{I}\mathcal{J}} \end{pmatrix} \tag{2.97}$$

Si ricordi che il coefficiente dal settore scalare $\mathcal{A}$ è definito dall'espressione (2.82). Le espressioni in rappresentazione matriciale dei coefficienti $\mathscr{B}^{\mathcal{I}}$ ed $\mathscr{K}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ sono le espressioni (B.19). Quest'ultime sono esposte in funzione dei coefficienti (2.85) ed (2.86) con le arbitrarie funzioni $\alpha_1, ..., \alpha_5$ introdotte in (2.14).

3 Teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri (qDHOST)

Alla base della stabilità di una teoria scalare-tensoriale di ordine superiore rispetto al Teorema di Ostrogradski [4] risiede il concetto di degenerazione derivante dal limite di non invertibilità della corrispondente matrice cinetica [26]. Una semplice giustificazione di tale affermazione è fornita in Appendice A. Nel presente capitolo si dedurranno esplicitamente dall'espressione (2.97) le condizioni di degenerazione per una teoria qHOST del tipo (2.9). Le teorie degeneri così ottenute prendono il nome di *teorie gravitazionali scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri* (qDHOST) e saranno classificate in opportune *classi di degenerazione* contenenti come caso particolare le strutture $\mathcal{L}_{4,H}$ ed $\mathcal{L}_{4,bH}$ definite rispettivamente nelle espressioni (1.1) e (1.2). L'emergere di tale complessa nuova organizzazione di teorie degeneri è legata alla maggior generalità del concetto di degenerazione sulla richiesta di equazioni del moto del secondo ordine.

3.1 Condizioni di degenerazione

Introducendo il mapping tra coefficienti cinetici e variabili dinamiche

$$(\mathcal{A},\, \mathcal{B}^{ab},\, \mathcal{K}^{ab,cd},\, A_*,\, K_{ab}) \longleftrightarrow (a,\, b^i,\, k_{ij},\, Q,\, q^i) \tag{3.1}$$

si noti che i termini associati alla Lagrangiana cinetica (2.81) della teoria (2.9) sono del tutto analoghi[33] a quelli della Lagrangiana cinetica (A.4) della teoria[34] (A.1) proposta in Appendice A. Si osservi pure l'evidente corrispondenza delle matrici cinetiche (A.11) (2.97) . Alla luce di tali analogie[35] sarà dunque naturale estendere i risultati e le considerazioni discusse nell'Appendice A in merito alla possibilità di evitare l'insorgere di un ghost di Ostrograndski in una teoria scalare-tensoriale di ordine superiore per ottenere, in analogia alla (A.20), la relazione

$$\det(\mathcal{M}_q) = \det(\mathscr{K})\left\{\mathcal{A} - \left(\mathscr{K}^{-1}\right)_{\mathcal{I}\mathcal{J}}\mathscr{B}^{\mathcal{I}}\mathscr{B}^{\mathcal{J}}\right\} \equiv \det(\mathscr{K})\Big\{D_0(X) + D_1(X)A_*^2 + D_2(X)A_*^4\Big\}$$

dove computando le espressioni (2.82) ed (B.19) nei termini presenti tra parentesi graffe si è ottenuto

$$D_0(X) \equiv -4(\alpha_1+\alpha_2)\left[Xf(2\alpha_1 + X\alpha_4 + 4f_X) - 2f^2 - 8X^2 f_X^2\right] \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} D_1(X) \equiv\, & 4\left[X^2\alpha_1(\alpha_1+3\alpha_2) - 2f^2 - 4Xf\alpha_2\right]\alpha_4 + 4X^2 f(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_5 + 8X\alpha_1^3 \\ & - 4(f + 4Xf_X - 6X\alpha_2)\alpha_1^2 - 16(f+5Xf_X)\alpha_1\alpha_2 + 4X(3f - 4Xf_X)\alpha_1\alpha_3 \\ & - X^2 f\alpha_3^2 + 32 f_X(f+2Xf_X)\alpha_2 - 16ff_X\alpha_1 - 8f(f - Xf_X)\alpha_3 + 48ff_X^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} D_2(X) \equiv\, & 4\left[2f^2 + 4Xf\alpha_2 - X^2\alpha_1(\alpha_1+3\alpha_2)\right]\alpha_5 + 4\alpha_1^3 + 4(2\alpha_2 - X\alpha_3 - 4f_X)\alpha_1^2 \\ & + 3X^2\alpha_1\alpha_3^2 - 4Xf\alpha_3^2 + 8(f+Xf_X)\alpha_1\alpha_3 - 32f_X\alpha_1\alpha_2 + 16f_X^2\alpha_1 + 32f_X^2\alpha_2 - 16ff_X\alpha_3 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si ricordi che $X = \phi_\mu\phi^\mu$ e che $f, \alpha_1, ..., \alpha_5$ sono i parametri liberi della teoria (2.9), dipendenti da X e dal campo scalare ϕ. Supponendo $\mathscr{K}$ invertibile, la condizione di degenerazione $\det(\mathcal{M}_q) = 0$ è soddisfatta se

$$D_0(X) + D_1(X)A_*^2 + D_2(X)A_*^4 = 0 \tag{3.5}$$

ovvero se per ogni A_*

$$D_0(X) = D_1(X) = D_2(X) = 0 \tag{3.6}$$

3.2 Classi degeneri e corrispondenti parametri liberi

Si definiscano Teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri, spesso indicate con l'acronimo qDHOST dall'inglese "*quadratic Degenerate High Order Scalar Tensor theories*", le famiglie di teorie scalari-tensoriali per il campo scalare ϕ ed il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ la cui dinamica è descritta da un funzionale d'azione (2.9) ed i cui parametri liberi sono vincolati dalle relazioni (3.6) [26] la cui validità, in analogia a quanto mostrato in Appendice A, le rende prive di *ghost*.

---

[33] a meno di un fattore numerico $\frac{1}{2}$

[34] Si osservi inoltre che in entrambi casi è stata inoltre adottata una ridefinizione dei campi fondamentali $A_a = {}^{(4)}\nabla_a\phi \longleftrightarrow Q = \dot{\phi}$

[35] La validità di quanto affermato nella presente unità è rigorosamente verificato [16]. Richiedendo però tale verifica una dettagliata conoscenza di numerosi fondamenti di analisi Lagrangiana ed Hamiltoniana non oggetto della presente trattazione, l'analogia proposta è uno strumento sufficiente al fine di comprendere gli obiettivi posti dal presente elaborato

Teorie degeneri di tipo I $\left[\alpha_1 + \alpha_2 = 0\,,\; f \neq 0\right]$

Classe Ia (α_2, α_3, f) $\left[f + X\alpha_2 \neq 0\right]$

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$\alpha_4 = \frac{16X\alpha_2^3 + 4(3f + 16Xf_X)\alpha_2^2 + (16X^2 f_X - 12Xf)\alpha_3\alpha_2 - X^2 f\alpha_3^2 + 16f_X(3f + 4Xf_X)\alpha_2 + 8f(Xf_X - f)\alpha_3 + 48ff_X^2}{8(f + X\alpha_2)^2}$$

$$\alpha_5 = \frac{(4f_X + 2\alpha_2 + X\alpha_3)\left(-2\alpha_2^2 + 3X\alpha_2\alpha_3 - 4f_X\alpha_2 + 4f\alpha_3\right)}{8(f + X\alpha_2)^2}$$

Classe Ib (α_4, α_5, f) $\left[f + X\alpha_2 = 0\right]$

$$\alpha_1 = \frac{f}{X}$$

$$\alpha_2 = -\frac{f}{X}$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{X^2}\Big\{f - 2Xf_X\Big\}$$

Teorie degeneri di tipo II $\left[Xf(2\alpha_1 + X\alpha_4 + 4f_X) - 2f^2 - 8X^2 f_X^2 = 0\,,\; f \neq 0\right]$

Classe IIa $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \mathbf{f})$ $\left[f - X\alpha_1 \neq 0\right]$

$$\alpha_3 = \frac{1}{X^2 f}\Big\{-4f(f - Xf_X) - 2X(f - 2Xf_X)\alpha_1 + 4X(-2f + 3Xf_X)\Big\}$$

$$\alpha_4 = \frac{2}{X^2 f}\Big\{f^2 - 2fXf_X + 4X^2 f_X^2 - Xf\alpha_1\Big\}$$

$$\alpha_5 = \frac{2}{f^2 X^3}\Big\{4f(f^2 - 3fXf_X + 2X^2 f_X^2) + (3Xf^2 - 8X^2 ff_X + 6X^3 f_X^2)\alpha_1 + 2X(2f - 3Xf_X)^2\alpha_2\Big\}$$

Classe IIb (α_2, α_3, f) $\left[f - X\alpha_1 = 0\right]$

$$\alpha_1 = \frac{f}{X}$$

$$\alpha_4 = 4f_X\Big\{2\frac{f_X}{f} - \frac{1}{X}\Big\}$$

$$\alpha_5 = \frac{8X(4Xf_X f - f^2 - 4X^2 f_X^2)\alpha_2 + Xf(8X^2 f_X + X^3\alpha_3 - 4f)\alpha_3 + 4(Xf_X f^2 - 2X^3 f_X^3 + 2X^2 f_X^2 f - f^3)}{4X^3 f(f + X\alpha_2)}$$

Teorie degeneri di tipo III $\left[f = 0\right]$

Classe IIIa $(\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3})$ $\left[\alpha_1 + 3\alpha_2 \neq 0\right]$

$$\alpha_4 = -\frac{2}{X}\alpha_1$$

$$\alpha_5 = \frac{4\alpha_1^2 + 8\alpha_1\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_3 X + 3\alpha_3^2 X^2}{4X^2(\alpha_1 + 3\alpha_2)}$$

Classe IIIb $(\boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}, \boldsymbol{\alpha_5})$ $\left[\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0\right]$

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}X\alpha_3$$

$$\alpha_2 = -\frac{X}{2}\alpha_3$$

Classe IIIc $(\boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}, \boldsymbol{\alpha_4}, \boldsymbol{\alpha_5})$ $\left[\alpha_1 = 0\right]$

Tabella 1: Classi degeneri nelle teorie qDHOST

A partire dalla condizione $D_0(X) = 0$, la più semplice delle tre proposte in (3.6), risultano definite tre differenti *tipologie degeneri* (I,II,III) distinte per le diverse condizioni di annullamento dell'espressione. Risolvendo successivamente le equazioni $D_1(X) = 0$ e $D_2(X) = 0$ imponendo le condizioni di ciascuna *tipologie degenere* rimarranno definite delle *classi degeneri*. Annotando convenzionalmente i parametri liberi di ogni classe con le parentesi tonde in grassetto *ex.* (α_2, α_3, f) e i vincoli che le caratterizzano con le parentesi quadre *ex.* $\left[\alpha_1 + \alpha_2 = 0\,,\, f \neq 0\right]$, le tipologie e le classi di teorie degeneri così ottenibili sono riassumibili in Tabella 1. Le classi degeneri Ib, Ic, Ib non verranno ulteriormente studiate poiché presentano un settore metrico $\mathscr{K}$ degenere. Infatti, i vincoli (tra parentesi quadre) che le caratterizzano possono annullarne completamente o una riga o una colonna. In Tabella 2 sono riportate alcune sottoclassi notevoli. La sottoclasse Ia$\cap$IIIa nasce dall'intersezione della classe Ia con la classe IIIa. In tale sottoclasse è contenuta la teoria $\mathcal{L}_{4bH}$ definita in (2.23) con $\alpha_1/X = \alpha_3/2 = F_4$. Tra tutte le tipologie di teorie degeneri, si considerino ora quelle che rimangono degeneri anche quando il settore metrico è non dinamico. In questo limite le condizioni di degenerazione risultano imposte dal solo settore scalare $\mathcal{A} = 0$ che seleziona una sottoclasse di Ia chiamata Ia$*$ poiché $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$. In tale sottoclasse è contenuto $\mathcal{L}_{4H} + \mathcal{L}_{4bH}$ ponendo $f = G_4$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2G_{4,X} + XF_4$ ed $\alpha_3 = -\alpha_4 = 2F_4$.

Sottoclasse Ia$\cap$IIIa (α_1, α_3)	**Sottoclasse Ia$*$** (α_1, f)
$\alpha_2 = -\alpha_1$	$\alpha_2 = -\alpha_1$
$\alpha_4 = -\dfrac{2}{X}\alpha_1$	$\alpha_3 = 2\dfrac{\alpha_1}{X}$
$\alpha_5 = \dfrac{(2\alpha_1 - X\alpha_3)(2\alpha_1 + 3X\alpha_3)}{8X^2\alpha_1}$	$\alpha_4 = -2\dfrac{\alpha_1}{X}$
	$\alpha_5 = 0$

Tabella 2: Sottoclassi degeneri nelle teorie qDHOST

4 Strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche in teorie gravitazionali qDHOST

Dopo gli studi preliminari compiuti nelle sezioni precedenti, si intende sviluppare un modello che a partire da minime assunzioni fondamentali ci permetta di stabilire, ed in un certo senso "pianificare" per futuri sviluppi, un'indagine sistematica delle possibili implicazioni in particolar modo cosmologiche, ma anche astrofisiche, introdotte dall'utilizzo delle nuove classi di teorie *scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri* come teorie della gravità alternative alla Relatività Generale. L'obiettivo del seguente capitolo sarà investigare le proprietà delle teorie gravitazionali qDHOST deducendo esplicitamente le loro equazioni di campo scalari e tensoriali e analizzando con esse la dinamica gravitazionale in vicinanza di una struttura cosmica statica e sfericamente simmetrica. Tali risultati saranno poi utilizzati per ottenere le equazioni di campo perturbate, nel limite di campo debole, attorno ad uno spazio-tempo di De Sitter. In particolare, alla luce di questo primo studio, si è preferito privilegiare la classe degenere più semplice, la Ia*, a cui tra l'altro appartengono come caso limite i risultati ottenuti in [25]. Si intende sottolineare l'originalità e l'importanza dell'analisi che verrà svolta in quanto archetipo per una ulteriore estensione dei ben noti studi sulle nuove proprietà caratterizzanti i meccanismi di lente gravitazionale attivi in vicinanza di stelle e ammassi estesi [11][21], sulla "rottura" del meccanismo di screening alla Vainshtein su piccole scale all'interno di stelle e ammassi di materia [23][22] e sulle possibili modificazioni indotte alle equazioni di equilibrio atte a descrivere le proprietà strutturali di stelle ed oggetti compatti [24].

4.1 Modello semplificato di teorie gravitazionali qDHOST degeneri

Mantenendo contatto con la definizione (2.9), si consideri il caso teorie *scalari-tensoriali quadratiche, di ordine superiore* descritte da un funzionale d'azione $\mathcal{S}$ del tipo

$$\mathcal{S} \equiv \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \tag{4.1}$$

dove la densità di Lagrangiana totale $\mathcal{L}$ ha espressione $\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_m$ con

$$\mathcal{L}_g \equiv \eta\, R \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}_\phi \equiv \sum_{I=1}^{5} \zeta_I \mathcal{L}_I \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}_+ \equiv \left(\epsilon\, X - \kappa\Lambda\right) \tag{4.4}$$

I coefficienti η, ϵ, κ, sono delle costanti, Λ è la costante cosmologica, $R \equiv {}^{(4)}R$ è lo scalare di Ricci 4-dimensionale introdotto in (2.4) ed il simbolo g denota il determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Le $\zeta_I = \zeta_I(X)$ sono cinque arbitrarie funzioni dipendenti esclusivamente dalla combinazione cinetica $X \equiv \phi_\mu\phi^\mu$ in cui come al solito, in notazione compatta

$$\phi_\nu \equiv \nabla_\mu\phi = \partial_\mu\phi \tag{4.5}$$

$$\phi_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \partial_\mu\phi_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\phi_\sigma = \partial_\mu\partial_\nu\phi - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma\phi \tag{4.6}$$

dove $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = {}^{(4)}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ sono i coefficienti della connessione di Levi-Civita 4-dimensionale (2.1) e dove ∇ è l'operatore di derivazione covariante introdotto in (2.2). La materia contribuisce alla Lagrangiana totale tramite $\mathcal{L}_m$ mentre le lagrangiane elementari $\mathcal{L}_I$ costituiscono l'insieme delle possibili contrazioni quadratiche delle derivate covarianti seconde del campo scalare ϕ che, opportunamente manipolate dalla definizione (2.16), hanno espressione

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_1 \equiv \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} = g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu} \\
&\mathcal{L}_2 \equiv \phi^\mu{}_\mu\phi^\nu{}_\nu = g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \\
&\mathcal{L}_3 \equiv \phi^\mu\phi^\nu\phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho = g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda \\
&\mathcal{L}_4 \equiv \phi^\mu\phi^\nu\phi_\mu{}^\rho\phi_{\nu\rho} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho \\
&\mathcal{L}_5 \equiv \phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} = g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Si noti che la teoria (4.1) non dipende esplicitamente da ϕ ed è invariante per trasformazioni $\phi \to \phi' = \phi + c$ con c costante. Si osservi infine che tale teoria è un sottocaso della (2.9) in cui $f = \eta$, $\alpha_I = \zeta_I$, $P = \epsilon\, X - \kappa\Lambda$ ed $Q_1 = Q_2 = 0$: ciò ci giustificherà ad estendere quanto discusso nei precedenti paragrafi anche al presente modello.

4.2 Relazioni variazionali introduttive

Il primo passo della nostra analisi si soffermerà sulla deduzione delle equazioni del moto covarianti scalari-tensoriali ottenibili in tutta generalità dalla teoria (4.1) previo *Principio Variazionale*. Al fine di facilitarne la computazione, nella seguente sottosezione si applicherà il formalismo variazionale introdotto in (2.7) per ottenere la variazione di alcune strutture notevoli nel campo scalare ϕ e nel tensore metrico $g_{\mu\nu}$ che torneranno utili in seguito. Identificata la variazione del determinante metrico [36] $\delta_g g = g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$, il calcolo della sua radice risulta facilmente ottenibile

$$\delta_g\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\delta g}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\frac{g\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{4.8}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione[37] $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$. Dalla definizione (2.1) la variazione della connessione di Levi-Civita 4-dimensionale sarà

$$\begin{aligned}
\delta_g\Gamma^\sigma_{\mu\nu} &= \delta_g\left\{\tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu g_{\mu\epsilon}\right)\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}\delta g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu g_{\mu\epsilon}\right) + \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(-g^{\sigma\pi}g^{\epsilon\tau}\delta g_{\pi\tau})\left(-\partial_\epsilon g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu g_{\mu\epsilon}\right) + \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon}\right) \\
&= -g^{\sigma\pi}\left\{\tfrac{1}{2}g^{\tau\epsilon}\left(-\partial_\epsilon g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu g_{\mu\epsilon}\right)\right\}\delta g_{\pi\tau} + \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon} \pm 2\Gamma^\tau_{\mu\nu}\,\delta g_{\epsilon\tau}\right) \\
&= -g^{\sigma\pi}\Gamma^\tau_{\mu\nu}\,\delta g_{\pi\tau} + \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon} - 2\,\Gamma^\tau_{\mu\nu}\delta g_{\epsilon\tau}\right) + g^{\sigma\epsilon}\Gamma^\tau_{\mu\nu}\delta g_{\epsilon\tau} \\
&= \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon} - 2\Gamma^\tau_{\mu\nu}\,\delta g_{\epsilon\tau} \pm \Gamma^\tau_{\epsilon\mu}\,\delta g_{\tau\nu} \pm \Gamma^\tau_{\epsilon\nu}\,\delta g_{\mu\tau}\right) \\
&= \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left\{-\left(\partial_\epsilon \delta g_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\epsilon\mu}\delta g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\epsilon\nu}\delta g_{\mu\tau}\right) + \left(\partial_\mu \delta g_{\epsilon\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\epsilon}\delta g_{\tau\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\nu}\delta g_{\epsilon\tau}\right) + \left(\partial_\nu \delta g_{\mu\epsilon} - \Gamma^\tau_{\nu\mu}\delta g_{\tau\epsilon} - \Gamma^\tau_{\nu\epsilon}\delta g_{\mu\tau}\right)\right\} \\
&= \tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\nabla_\epsilon \delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_\nu \delta g_{\mu\epsilon}\right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Nel secondo passaggio si è usata la regola di Leibniz, nel terzo passaggio si è impiegata la relazione[38] $\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}$, nel quinto la definizione (2.1) mentre nell'ultimo si è utilizzata la definizione di derivata covariante (2.2). Poiché $\delta_g\phi_\mu = 0$, vale inoltre che rispetto alla metrica

$$\delta_g X = \delta(\phi_\mu\phi^\mu) = \delta(g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu) = \phi_\mu\phi_\nu\delta g^{\mu\nu} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\delta_g\phi_{\mu\nu} &= \delta_g\left(\partial_\mu\phi_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\phi_\sigma\right) \\
&= \partial_\mu\delta_g\phi_\nu - (\delta_g\Gamma^\sigma_{\mu\nu})\phi_\sigma - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}(\delta_g\phi_\sigma) \\
&= -\phi_\sigma\delta_g\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \\
&= -\phi_\sigma\left\{\tfrac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\left(-\nabla_\epsilon\delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\epsilon}\right)\right\} \\
&= -\tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\left(-\nabla_\epsilon\delta g_{\mu\nu} + \nabla_\mu\delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_\nu\delta g_{\mu\epsilon}\right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

dove alla quarta riga della (4.11) si è usata ancora una volta la (2.1). Definito il tensore di Ricci 4-dimensionale (2.3), la sua variazione è valutabile a partire da (4.9) e più precisamente:

$$\begin{aligned}
\delta_g R_{\mu\nu} &= \delta_g R^\rho{}_{\mu\rho\nu} \\
&= \delta_g\left(\partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\right) \\
&= \partial_\lambda\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + (\delta_g\Gamma^\alpha_{\mu\nu})\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}(\delta_g\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}) - (\delta_g\Gamma^\lambda_{\alpha\nu})\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}(\delta_g\Gamma^\alpha_{\mu\lambda}) \\
&= \left(\partial_\lambda\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\lambda\alpha}\delta_g\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}\right) - \left(\partial_\nu\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\lambda} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}\right) \\
&= \nabla_\lambda\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

da cui lo scalare di curvatura, per la definizione (2.4)

$$\begin{aligned}
\delta_g R &= \delta_g\left(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\right) \\
&= (\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta_g R_{\mu\nu} \\
&= R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\left(\nabla_\lambda\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \\
&= R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} + \left\{\nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\nu\left(g^{\mu\nu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right)\right\} \\
&= R_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda\left\{g^{\mu\nu}\delta_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta_g\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right\}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

dove nella (4.12) si è utilizzata la definizione (2.2) per riassorbire i termini presenti nel penultimo passaggio e dove nella penultima riga della (4.13) si è usata la preservazione della metrica $\nabla_\mu g_{\rho\sigma} = 0$. Dal punto di vista delle variazioni rispetto al campo scalare ϕ, saranno inoltre utili le variazioni

$$\delta_\phi\zeta_I = \frac{\delta\zeta_I}{\delta X}\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu = \zeta_{I,X}\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu \tag{4.14}$$

$$\delta_\phi X = \delta_\phi(\phi_\mu\phi^\mu) = \delta_\phi(g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu) = g^{\mu\nu}(\delta\phi_\mu\,\phi_\nu + \phi_\mu\delta\phi_\nu) = 2g^{\mu\nu}\phi_\nu\delta\phi_\mu = 2\phi^\mu\delta\phi_\mu \tag{4.15}$$

---

[36] Una dimostrazione dettagliata di tale risultato si può trovare in [31]

[37] Si ricordi $0 = \delta(\delta^\mu_\mu) = \delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\mu}) = \delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$ da cui $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$

[38] Si ricordi $0 = \delta(\delta^\mu_\nu) = \delta(g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu}) = \delta g^{\mu\sigma}g_{\sigma\nu} + g^{\mu\sigma}\delta g_{\sigma\nu}$

4.3 Equazione di campo scalare

Si ricordi che il pedice $,X$ indica ed indicherà d'ora in avanti la derivata della funzione coinvolta rispetto ad X. Considerando l'operatore δ_ϕ definito in (2.7), la variazione del funzionale d'azione (4.1) rispetto al campo scalare ϕ sarà

$$\begin{aligned}
\delta_\phi \mathcal{S} &= \delta_\phi \int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,\delta_\phi\mathcal{L} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu}\right\} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \nabla_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\delta\phi\right] - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\,\delta\phi + \nabla_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_\nu\right] - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\,\delta\phi_\nu\right\} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \nabla_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\delta\phi\right] - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\,\delta\phi + \nabla_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_\nu\right] - \nabla_\nu\left[\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\,\delta\phi\right] + \nabla_\nu\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\,\delta\phi\right\} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\nu\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\right]\delta\phi + \nabla_\mu\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_\nu - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}}\,\delta\phi\right]\right\} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\nu\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\mu\nu}}\right\}\delta\phi \\
&\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\,E_\phi[\mathcal{L}]\,\delta\phi
\end{aligned} \tag{4.16}$$

dove alla quarta e quinta uguaglianza si sono svolte le due integrazioni per parti necessarie alla commutazione dei termini variazionali $\delta\phi_\mu$ e $\delta\phi_{\mu\nu}$ in $\delta\phi$, dove la penultima riga segue dalla trasformazione dell'integrale di volume contenente la divergenza totale in un integrale di superficie poi eliminato per opportune condizioni di annullamento al contorno e dove nell'ultima uguaglianza si è definito il *tensore di Eulero-Lagrange* associato alla variazione scalare $\delta\phi$

$$E_\phi[\mathcal{L}] \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} - \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\mu\nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}} \tag{4.17}$$

Come si noterà la (4.17) presenta la medesima espressione proposta in (2.8). Imponendo la stazionarietà del funzionale d'azione $\delta_\phi\mathcal{S} = 0$ per ogni valore di $\delta\phi$, l'equazione di campo scalare sarà dunque

$$E_\phi[\mathcal{L}] = 0 \tag{4.18}$$

Sommando i contributi (4.2), la densità di Lagrangiana totale della teoria (4.1) può essere espressa come

$$\mathcal{L} \equiv \sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \eta R + \epsilon X - \kappa\Lambda + \mathcal{L}_m \tag{4.19}$$

e ci si soffermi un momento nel notare che non tutti i termini in essa contribuiranno alla dinamica definita nell'espressione (4.17), in particolare solo $\mathcal{L}_\phi = \zeta_I\mathcal{L}_I$ ed ϵX genereranno contributi non nulli. Si sostituisca dunque nel tensore di Eulero-Lagrange (4.17) la definizione (4.19) che, non dipendendo da ϕ, ci permette di semplificarne l'espressione essendo la corrispondente derivata funzionale nulla:

$$E_\phi[\mathcal{L}] = -\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\mu\nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}} = \nabla_\mu\left\{-\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right\} = \nabla_\mu J^\mu \tag{4.20}$$

dove si è introdotta la corrente scalare totale

$$\begin{aligned}
J^\mu &\equiv -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_\mu} + \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= -\frac{\delta}{\delta\phi_\mu}\left\{\sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \epsilon X\right\} + \nabla_\nu\frac{\delta}{\delta\phi_{\nu\mu}}\left\{\sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \epsilon X\right\} \\
&= -\left\{\sum_{I=1}^{5}\left(\zeta_{I,X}\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\mathcal{L}_I + \zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu}\right) + \epsilon\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\right\} + \sum_{I=1}^{5}\nabla_\nu\left(\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= -\epsilon\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu} - \sum_{I=1}^{5}\left\{\zeta_{I,X}\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\mathcal{L}_I + \zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\left(\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right)\right\} \\
&= -\epsilon\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu} - \sum_{I=1}^{5}\left\{\zeta_{I,X}\frac{\delta X}{\delta\phi_\mu}\mathcal{L}_I + \zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\zeta_{I,X}\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}} - \zeta_I\nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right\} \\
&= -2\epsilon\phi^\mu - \sum_{I=1}^{5}\left\{2\phi^\mu\zeta_{I,X}\mathcal{L}_I + \zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\zeta_{I,X}\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}} - \zeta_I\nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right\}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\epsilon\phi^\mu - \sum_{I=1}^{5}\left\{2\,\zeta_{I,X}\left(\phi^\mu\mathcal{L}_I - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) + \zeta_I\left(\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right)\right\}\\
&\equiv -2\epsilon\phi^\mu - \sum_{I=1}^{5} J_I^\mu
\end{aligned}
$$

Nella terza uguaglianza della (4.21) si è sfruttata la variazione nulla di X rispetto ad $\phi_{\mu\nu}$ Nella quinta riga, oltre alla regola di Leibniz si è impiegata l'espressione[39] $\nabla_\nu\zeta_I = 2\,\zeta_{I,X}\phi_{\nu\mu}\phi^\mu$ mentre nella sesta la relazione (4.15) per poi introdurre nell'ultimo passaggio la corrente associata alla Lagrangiana I-esima della definizione (4.7)

$$
J_I^\mu \equiv \zeta_I\left(\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) + 2\,\zeta_{I,X}\left(\phi^\mu\mathcal{L}_I - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \equiv \zeta_I\Pi_I^\mu + \zeta_{I,X}\Sigma_I^\mu \tag{4.22}
$$

decomposta in termini dei tensori

$$
\Pi_I^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}} \qquad\qquad \Sigma_I^\mu \equiv 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_I - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \tag{4.23}
$$

collezionanti rispettivamente i contributi di J_I^μ proporzionali a ζ_I ed $\zeta_{I,X}$. Si vede ora che le espressioni (4.23) sono il risultato di opportune combinazioni tra derivate ϕ_μ,$\phi_{\mu\nu}$ derivate funzionali $\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_\mu$ $\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_{\mu\nu}$ e derivate miste $\nabla_\nu\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_{\mu\nu}$, delle quali sarà necessario, prima di tutto, fornire l'espressione esplicita. Tale computazione risulta lievemente macchinosa e dispersiva al fine di raggiungere gli obiettivi delineati nella presente sottosezione. Il lettore interessato è rimandato all'Appendice C.1 per la deduzione esplicita di tali oggetti e la completa esecuzione della loro manipolazione nelle strutture (4.23), da cui infine si ottiene,

$$
\begin{aligned}
\Pi_1^\mu &= -2\phi_\nu{}^{\nu\mu}\\
\Pi_2^\mu &= -2\phi^{\mu\sigma}{}_\sigma\\
\Pi_3^\mu &= \phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\nu\phi^\rho\phi^\mu{}_{\nu\rho} - \phi^\mu\phi^\nu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\mu\phi^\nu\phi_\nu{}^\rho{}_\rho\\
\Pi_4^\mu &= \phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\nu\phi_\nu{}^\rho\phi^\mu{}_\rho - \phi^\nu\phi^\rho\phi_\nu{}^\mu{}_\rho - \phi^\mu\phi^{\nu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho{}_{\rho\nu}\\
\Pi_5^\mu &= 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma} - 2\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 4\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - 2\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\rho\sigma}\\
\\
\Sigma_1^\mu &= 2\phi^\mu\phi^{\nu\rho}\phi_{\nu\rho} - 2\phi^\nu\phi_\nu{}^\rho\phi^\mu{}_\rho\\
\Sigma_2^\mu &= 2\phi^\mu\phi^\nu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - 4\phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho\\
\Sigma_3^\mu &= -2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma}\\
\Sigma_4^\mu &= -2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma}\\
\Sigma_5^\mu &= -2\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\nu}\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Si noti l'evidente struttura di ordine superiore delle equazioni del moto emersa dalla comparsa di termini nelle derivate covarianti terze $\phi_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\nu\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi$

4.4 Equazioni di campo tensoriali

Viene a questo punto spontaneo chiedersi quale sia la struttura delle equazioni di campo tensoriali. Si consideri per l'appunto l'operatore variazionale δ_g definito in (2.7). La variazione del funzionale d'azione (4.1) rispetto ala metrica $g^{\mu\nu}$ sarà dunque

$$
\begin{aligned}
\delta_g\mathcal{S} &= \delta_g\int d^4x\sqrt{-g}\,\mathcal{L} \qquad\qquad (4.25)\\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\,\mathcal{L} + \delta_g\mathcal{L}\right\}\\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\left(\sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \eta R + \epsilon X - \kappa\Lambda + \mathcal{L}_m\right) + \delta_g\left(\sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \eta R + \epsilon X - \kappa\Lambda + \mathcal{L}_m\right)\right\}\\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\left(\sum_{I=1}^{5}\zeta_I\mathcal{L}_I + \eta R + \epsilon X - \kappa\Lambda + \mathcal{L}_m\right) + \sum_{I=1}^{5}\delta_g(\zeta_I\mathcal{L}_I) + \eta\,\delta_g R + \epsilon\,\delta_g X + \delta_g\mathcal{L}_m\right\}\\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\sum_{I=1}^{5}\left[\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\zeta_I\mathcal{L}_I + \delta_g(\zeta_I\mathcal{L}_I)\right] + \left[\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}(\eta R - \kappa\Lambda) + \eta\,\delta_g R\right] + \epsilon\left[\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}X + \delta_g X\right] + \frac{\delta_g\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\sqrt{-g}}\right\}\\
&= \sum_{I=1}^{5} Y_{(1)}^I + Y_{(2)} + Y_{(3)} + Y_{(4)}
\end{aligned}
$$

---

[39] Ricordando la definizione $X \equiv \phi^\mu\phi_\mu$ e sfruttando la simmetria degli indici contratti:

$$
\nabla_\nu\zeta_I = \zeta_{I,X}\nabla_\nu X = \zeta_{I,X}\nabla_\nu(\phi_\mu\phi^\mu) = \zeta_{I,X}(\nabla_\nu\phi_\mu\,\phi^\mu + \phi_\mu\nabla_\nu\phi^\mu) = \zeta_{I,X}(\phi_{\nu\mu}\phi^\mu + \phi_\mu\phi_\nu{}^\mu) = 2\,\zeta_{I,X}\phi_{\nu\mu}\phi^\mu
$$

dove nella seconda uguaglianza si è usata la regola di Leibniz, nella terza si è inserita l'espressione della densità di Lagrangiana totale (4.19) e dove nell'ultimo passaggio, per praticità di calcolo, si è decomposto il risultato nella somma di quattro contributi $\sum_{I=1}^{5} Y_{(1)}^I, Y_{(2)}, Y_{(3)}, Y_{(4)}$ che ora verranno studiati separatamente. Si consideri prima di tutto l'integrale $Y_{(1)}^I$, definito come

$$\begin{aligned} Y_{(1)}^I &\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\zeta_I\mathcal{L}_I + \delta_g(\zeta_I\mathcal{L}_I)\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\zeta_I\mathcal{L}_I + \delta_g(\zeta_I\mathcal{L}_I)\right] \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\zeta_I\mathcal{L}_I\right)\delta g^{\mu\nu} + Y_{(1.1)}^I \end{aligned} \tag{4.26}$$

Nella seconda riga della (4.26) si è utilizzata la variazione del determinante metrico (4.8) mentre nella terza ed ultima riga si sono opportunamente compattati i termini della finzione integranda introducendo, nuovamente per praticità di calcolo, l'integrale

$$\begin{aligned} Y_{(1.1)}^I &\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\,\delta_g\left(\zeta_I\mathcal{L}_I\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(\delta_g\zeta_I\,\mathcal{L}_I + \zeta_I\,\delta_g\mathcal{L}_I\right) \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\zeta_{I,X}\,\delta_g X\,\mathcal{L}_I + \zeta_I\left(\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\delta\phi_{\alpha\beta} + \frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\right)\right\} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\zeta_{I,X}\,\phi_\mu\phi_\nu\delta g^{\mu\nu}\mathcal{L}_I + \zeta_I\left[-\frac{1}{2}\phi^\epsilon\left(-\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\delta g_{\epsilon\beta} + \nabla_\beta\delta g_{\alpha\epsilon}\right)\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\delta\phi_{\alpha\beta} + \frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\right]\right\} \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\phi_\mu\phi_\nu\zeta_{I,X}\mathcal{L}_I + \zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}}\right\}\delta g^{\mu\nu} + Y_{(1.2)}^I \end{aligned} \tag{4.27}$$

Nel secondo passaggio dello svolgimento ottenuto dalla definizione (4.27) si è utilizzata la regola di Leibniz per decomporre $\delta_g(\zeta_I\mathcal{L}_I) = \delta_g\zeta_I\,\mathcal{L}_I + \zeta_I\,\delta_g\mathcal{L}_I$, nel terzo passaggio si è usato il fatto che $\delta_g\zeta_I = \zeta_{I,X}\,\delta_g X$ e si è impiegata la definizione (2.7) per espandere $\delta_g\mathcal{L}_I$. Al quinto passaggio, oltre al fatto che $\delta_g\phi = 0$, si sono inserite le espressioni (4.10) ed (4.11) e nell'ultima riga si è definito l'integrale

$$\begin{aligned} Y_{(1.2)}^I &\equiv -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\phi^\epsilon\left(-\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha\delta g_{\epsilon\beta} + \nabla_\beta\delta g_{\alpha\epsilon}\right)\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\phi^\epsilon(\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta})\,\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon(\nabla_\alpha\delta g_{\epsilon\beta})\,\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon(\nabla_\beta\delta g_{\alpha\epsilon})\,\zeta_I\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left(-\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\alpha\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi^\beta\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\zeta_I\,\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\nabla_\epsilon\left[\left(-\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\alpha\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi^\beta\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\zeta_I\,\delta g_{\alpha\beta}\right] - \nabla_\epsilon\left[\left(-\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\alpha\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi^\beta\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\zeta_I\right]\delta g_{\alpha\beta}\right\} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\epsilon\left\{\left(\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - \phi^\alpha\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - \phi^\beta\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\zeta_I\right\}\delta g_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\epsilon\left\{\left(\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - \phi^\alpha\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - \phi^\beta\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\zeta_I\right\}\left(-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) \\ &\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\,\nabla_\epsilon\left\{\frac{1}{2}\,\zeta_I\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\right\}\delta g^{\mu\nu} \\ &\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\zeta_I\alpha_{\mu\nu}^I + \zeta_{I,X}\beta_{\mu\nu}^I\right\}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.28}$$

L'integrale $Y_{(1.2)}^I$ è stato ulteriormente semplificato. Dopo aver distribuito i termini nella seconda uguaglianza della (4.28), nel terzo passaggio si sono rinominati gli indici contratti nel primo e secondo termine (per la precisione rispettivamente $\alpha \leftrightarrow \epsilon$ ed $\beta \leftrightarrow \epsilon$) per poter poi raccogliere $\nabla_\epsilon\delta g_{\alpha\beta}$ a fattore comune. Alla quarta uguaglianza si è effettuata una integrazione per parti pre poi eliminare il termine di superficie al quinto passaggio. Impiegando infine il fatto che $\delta g_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\delta g^{\mu\nu}$, si giunge all'espressione finale proposta nell'ultima riga e decomposta in termini dei tensori

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu}^I &\equiv \frac{1}{2}\nabla_\epsilon\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[(\nabla_\epsilon\phi^\epsilon)\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[(\nabla_\epsilon\phi_\mu)\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[(\nabla_\epsilon\phi_\nu)\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\beta_{\mu\nu}^I \equiv \frac{1}{2}\frac{\nabla_\epsilon\zeta_I}{\zeta_{I,X}}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_I}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right) \tag{4.30}$$

$$= \phi^\sigma \phi_{\epsilon\sigma} \left(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \phi^\epsilon \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu} \phi_\mu \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu} \phi_\nu \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta \phi_{\alpha\epsilon}} \right)$$

collezionanti rispettivamente i contributi di $Y^I_{(1.2)}$ proporzionali a ζ_I ed $\zeta_{I,X}$. Al secondo passaggio dello svolgimento (4.29) si è applicata la derivata ∇_ϵ al termine tra parentesi e si è introdotta la notazione compatta $\nabla_\epsilon \phi = \phi_\epsilon$ nell'ultimo passaggio. Nell'espressione (4.30) si è introdotta la relazione $\nabla_\nu \zeta_I = 2\, \zeta_{I,X} \phi_{\nu\mu} \phi^\mu$, gia giustificate nell'ambito della deduzione dell'equazione di campo scalare. Utilizzando le e espressioni associate alla variazione delle singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$ (4.7) operata rispetto al campo $\phi_{\mu\nu}$ ottenute nell'Appendice C.1, le espressioni esplicite di $\alpha^I_{\mu\nu}$ e $\beta^I_{\mu\nu}$ sono proposte in Appendice C.3. Collezionando i risultati ottenuti (4.27) (4.28) nella (4.26) si ottiene dunque

$$\begin{aligned} Y^I_{(1)} &= -\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \zeta_I \mathcal{L}_I \right) \delta g^{\mu\nu} + Y^I_{(1.1)} \qquad (4.31) \\ &= -\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \zeta_I \mathcal{L}_I \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi_\mu \phi_\nu \zeta_{I,X} \mathcal{L}_I + \zeta_I \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} + Y^I_{(1.2)} \\ &= -\int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \zeta_I \mathcal{L}_I \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\phi_\mu \phi_\nu \zeta_{I,X} \mathcal{L}_I + \zeta_I \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \left(\zeta_I \alpha^I_{\mu\nu} + \zeta_{I,X} \beta^I_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \zeta_I \mathcal{L}_I + \phi_\mu \phi_\nu \zeta_{I,X} \mathcal{L}_I + \zeta_I \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} + \zeta_I \alpha^I_{\mu\nu} + \zeta_{I,X} \beta^I_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \zeta_I \left(\alpha^I_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_I + \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \zeta_{I,X} \left(\beta^I_{\mu\nu} + \phi_\mu \phi_\nu \mathcal{L}_I \right) \right\} \delta g^{\mu\nu} \\ &\equiv \int d^4x \sqrt{-g}\, H^I_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

dove in ultima riga, una volta raggruppati opportunamente i termini risultanti, si è introdotto il tensore

$$H^I_{\mu\nu} \equiv \zeta_I \left(\alpha^I_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_I + \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \zeta_{I,X} \left(\beta^I_{\mu\nu} + \phi_\mu \phi_\nu \mathcal{L}_I \right) \equiv \zeta_I \Delta^I_{\mu\nu} + \zeta_{I,X} \Xi^I_{\mu\nu} \qquad (4.32)$$

decomposto in termini dei tensori

$$\Delta^I_{\mu\nu} \equiv \alpha^I_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{L}_I + \frac{\delta \mathcal{L}_I}{\delta g^{\mu\nu}} \qquad\qquad \Xi^I_{\mu\nu} \equiv \beta^I_{\mu\nu} + \phi_\mu \phi_\nu \mathcal{L}_I \qquad (4.33)$$

collezionanti rispettivamente i contributi di $H^I_{\mu\nu}$ proporzionali a ζ_I ed $\zeta_{I,X}$. Utilizzando l'espressioni associata alla variazione delle singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$ (4.7) operata rispetto al tensore metrico $g^{\mu\nu}$ ottenute nell'Appendice C.1 assieme alle espressioni esplicite di $\alpha^I_{\mu\nu}$ e $\beta^I_{\mu\nu}$ proposte in Appendice C.3, si dimostra che

$$\begin{aligned} \Delta^1_{\mu\nu} &= \phi_{\mu\nu} \phi^\rho{}_\rho + \phi^\rho \phi_{\rho\mu\nu} - \phi_\mu \phi^\rho{}_{\rho\nu} - \phi_\nu \phi^\rho{}_{\mu\rho} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} \\ \Delta^2_{\mu\nu} &= \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\rho{}_\rho \phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu} \phi^\rho \phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu \phi_\nu{}^\rho{}_\rho - \phi_\nu \phi_\mu{}^\rho{}_\rho \\ \Delta^3_{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2} \phi_\mu \phi_\nu \phi^\rho{}_\rho \phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\rho \phi_\alpha{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} \phi_\mu \phi_\nu \phi^\rho \phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma + \tfrac{3}{2} \phi_\nu \phi^\rho \phi_{\mu\rho} \phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu \phi^\rho \phi_\nu{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} \\ &\quad - \tfrac{1}{2} \phi_\mu \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\nu\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} \phi_\mu \phi^\rho \phi_{\nu\rho} \phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\nu \phi^\rho \phi_\mu{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} \phi_\nu \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\rho\sigma} \\ \Delta^4_{\mu\nu} &= -\phi_\mu \phi_\nu \phi^{\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu \phi_\nu \phi^\rho \phi^\sigma{}_{\sigma\rho} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\rho \phi_\alpha{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} + \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\rho} \phi_{\nu\sigma} \\ \Delta^5_{\mu\nu} &= 3 \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\alpha} \phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi_{\alpha\rho} \phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\nu\alpha} \phi_{\rho\sigma} \\ &\quad - 2 \phi_\mu \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi_\alpha{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\beta \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\alpha\beta} \phi_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi^1_{\mu\nu} &= 2 \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\nu} \phi_{\rho\sigma} - 2 \phi_\mu \phi^\rho \phi_\rho{}^\sigma \phi_{\nu\sigma} - 2 \phi_\nu \phi^\rho \phi_\mu{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} + \phi_\mu \phi_\nu \phi^{\rho\sigma} \phi_{\rho\sigma} \qquad (4.34) \\ \Xi^2_{\mu\nu} &= 2 g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\rho \phi_{\alpha\rho} \phi^\sigma{}_\sigma - 2 \phi_\mu \phi^\rho \phi_{\nu\rho} \phi^\sigma{}_\sigma - 2 \phi_\nu \phi^\rho \phi_{\mu\rho} \phi^\sigma{}_\sigma + \phi_\mu \phi_\nu \phi^\rho{}_\rho \phi^\sigma{}_\sigma \\ \Xi^3_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} \phi^\alpha \phi^\beta \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\alpha\beta} \phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\nu\alpha} \phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\mu\alpha} \phi_{\rho\sigma} \\ \Xi^4_{\mu\nu} &= -\phi_\mu \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\rho \phi_\alpha{}^\sigma \phi_{\rho\sigma} \\ \Xi^5_{\mu\nu} &= -\phi_\mu \phi_\nu \phi^\alpha \phi^\beta \phi^\rho \phi^\sigma \phi_{\alpha\beta} \phi_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

Il lettore interessato è rimandato sempre all'Appendice C.3 per una completa esposizione del calcolo per ottenere quest'ultime espressioni proposte. Si consideri ora il secondo integrale della decomposizione (4.25), dalla cui definizione è possibile applicare ulteriori semplificazioni dei termini. Infatti

$$\begin{aligned} Y_{(2)} &\equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\delta_g \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} (\eta R - \kappa \Lambda) + \eta\, \delta_g R \right] \qquad (4.35) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} (\eta R - \kappa \Lambda) + \eta \left[R_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} + \nabla_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta_g \Gamma^\nu_{\mu\nu} \right) \right] \right\} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\eta R - \kappa \Lambda) + \eta R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} + \eta \nabla_\lambda \left(g^{\mu\nu} \delta_g \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda} \delta_g \Gamma^\nu_{\mu\nu} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\eta R - \kappa\Lambda) + \eta R_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\eta\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}\kappa\Lambda g_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{\eta\, G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa\Lambda g_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

A partire dalla definizione (4.35), alla seconda riga si sono introdotte a le variazioni del determinante metrico (4.8) e dello scalare di curvatura (4.13). Nel terzultimo passaggio si è eliminato il termine di superficie mentre nell'ultimo si è identificata la struttura del *Tensore di Einstein* 4-dimensionale definito in (2.5). La manipolazione del terzo addendo della decomposizione (4.25) risulta facilmente eseguibile utilizzando le variazioni (4.8) ed (4.10)

$$
\begin{aligned}
Y_{(3)} &= \int d^4x\sqrt{-g}\,\epsilon\left[\frac{\delta_g\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}X + \delta_g X\right] \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,\epsilon\left[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}X + \phi_\mu\phi_\nu\delta g^{\mu\nu}\right] \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,\left\{\epsilon\left(\phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2}Xg_{\mu\nu}\right)\right\}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

La stessa cosa può essere detta per il quarto ed ultimo integrale

$$
\begin{aligned}
Y_{(4)} &\equiv \int d^4x\sqrt{-g}\,\frac{\delta_g\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\sqrt{-g}} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta_g\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\right)\right\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

dove si è introdotta la ben nota definizione del *Tensore Energia-Momento*.

$$
T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta_g\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{4.38}
$$

Collezionando i risultati (4.31), (4.35), (4.36) ed (4.37) nella definizione (4.25), si ottiene finalmente che la variazione del funzionale d'azione (4.1) rispetto ala metrica $g^{\mu\nu}$ sarà dunque

$$
\begin{aligned}
\delta_g\mathcal{S} &= \sum_{I=1}^{5}Y^I_{(1)} + Y_{(2)} + Y_{(3)} + Y_{(4)} \\
&= \int d^4x\sqrt{-g}\,\left\{\sum_{I=1}^{5}H^I_{\mu\nu} + \eta\, G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\kappa\Lambda g_{\mu\nu} + \epsilon\left(\phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2}Xg_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\left\{2\left[\epsilon\left(\phi_\mu\phi_\nu - \frac{1}{2}Xg_{\mu\nu}\right) + \sum_{I=1}^{5}H^I_{\mu\nu}\right] + 2\eta\, G_{\mu\nu} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\right\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\Big\{2H_{\mu\nu} + 2\eta\, G_{\mu\nu} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}\Big\}\delta g^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,E_g[\mathcal{L}]\,\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

dove alla penultima riga si è introdotto il tensore

$$
H_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon\Big(2\phi_\mu\phi_\nu - Xg_{\mu\nu}\Big) + \sum_{I=1}^{5}H^I_{\mu\nu} \tag{4.40}
$$

e dove nell'ultima uguaglianza si è definito il *tensore di Eulero-Lagrange* associato alla variazione tensoriale $\delta g^{\mu\nu}$.

$$
E_g[\mathcal{L}]_{\mu\nu} \equiv 2H_{\mu\nu} + 2\eta\, G_{\mu\nu} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \tag{4.41}
$$

Imponendo la stazionarietà del funzionale d'azione $\delta_g\mathcal{S} = 0$ per ogni valore di $\delta g^{\mu\nu}$, l'equazione di campo scalare sarà dunque

$$
E_g[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 0 \tag{4.42}
$$

ovvero

$$
2H_{\mu\nu} + 2\eta\, G_{\mu\nu} + \kappa\Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{4.43}
$$

4.5 Equazioni di campo scalari-tensoriali degeneri

Introdotto l'indice di classe[40] $\mathscr{C} \equiv \{\text{Ia, IIa, IIIa, Ia} \cap \text{IIIa, Ia}*\}$ rappresentativo delle relazioni tra coefficienti ζ_I indotte dalle condizioni di degenerazione in Tabella 1 e Tabella 2, nelle approssimazioni adottate i coefficienti ζ_I hanno espressioni come quelle esposte nell'Appendice C.4, dove tra l'altro vengono anche proposte rappresentazioni delle loro derivate. Le Equazioni di campo scalari e tensoriali degeneri associate alla classe $\mathscr{C}$ ottenute in (4.18) ed (4.42) saranno dunque

$$\begin{cases} E_\phi^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}] = 0 \\ E_g^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{4.44}$$

dove a partire dalle espressioni (4.20) ed (4.41) si sono definiti gli operatori di Eulero-Lagrange di classe $\mathscr{C}$

$$E_\phi^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}] = \nabla_\mu J^\mu_{\mathscr{C}} \qquad E_g^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 2H^{\mathscr{C}}_{\mu\nu} + 2\eta\, G_{\mu\nu} - \kappa\Lambda g_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \tag{4.45}$$

espressi in termini della corrente $J^\mu_{\mathscr{C}}$ e del tensore simmetrico $H^{\mathscr{C}}_{\mu\nu}$ di classe $\mathscr{C}$

$$J^\mu_{\mathscr{C}} = -2\epsilon\phi^\mu - \sum_{I=1}^{5} J^\mu_{I\mathscr{C}} \qquad H^{\mathscr{C}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon\Big(2\phi_\mu\phi_\nu - Xg_{\mu\nu}\Big) + \sum_{I=1}^{5} H^{I\mathscr{C}}_{\mu\nu} \tag{4.46}$$

introdotti rispettivamente dalle espressioni (4.21) ed (4.40) e dipendenti a loro volta delle correnti $J^\mu_{I\mathscr{C}}$ e dai tensori simmetrici $H^{I\mathscr{C}}_{\mu\nu}$ di classe $\mathscr{C}$ associati alle singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$

$$\begin{cases} J^\mu_{I\mathscr{C}} \ = \zeta_I^{\mathscr{C}}\Pi^\mu_I + \zeta^{\mathscr{C}}_{I,X}\Sigma^\mu_I \\ H^{I\mathscr{C}}_{\mu\nu} \ = \zeta_I^{\mathscr{C}}\Delta^I_{\mu\nu} + \zeta^{\mathscr{C}}_{I,X}\Xi^I_{\mu\nu} \end{cases} \tag{4.47}$$

introdotti rispettivamente dalle espressioni (4.22) e (4.32). Si ricordi che $G_{\mu\nu}$ è il Tensore di Einstein 4-dimensionale definito in (2.5) e che $T_{\mu\nu}$ è il Tensore Energia-Momento definito in (4.38). I tensori Π^μ_I, Σ^μ_I, $\Delta^I_{\mu\nu}$ e $Xi_{\mu\nu}$ possiedono espressioni esplicite fornite da (4.24) ed (4.34).

4.6 Strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche nella sottoclasse degenere $\mathscr{C}$ = Ia*

Per le equazioni di campo scalari-tensoriali proposte in (4.44) si considerino soluzioni cosmologiche nel vuoto, ossia in assenza dei contributi di materia aggiuntivi alla presenza di una costante cosmologica Λ, del tipo De Sitter che espresse nelle coordinate di *Friedmannn-Lemaitre-Robertson-Walker*(FLRW) $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ siano parametrizzate dall'elemento di linea

$$d\bar{s}^2 = \bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -d\tau^2 + e^{2H\tau}\big(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2^2\big) \tag{4.48}$$

e dal profilo del campo scalare

$$\phi(\tau) = v_0\tau \tag{4.49}$$

dove v_0 è una costante non nulla, dove τ rappresenta la coordinata temporale, H rappresenta il *Parametro di Hubble* costante e dove $d\Omega_2^2 = d\theta^2 + sin^2(\theta)d\varphi^2$ è l'elemento di angolo solido tridimensionale. Il profilo (4.49) è ispirato all'usuale parametrizzazione di background adottata in contesto di *Effective Field Theory* [29] per la trattazione di tematiche affini a quelle della presente sezione. A partire dalla definizione (4.48) si calcolino le componenti della connessione di Levi-Civita 4-dimensionale $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ in base alla definizione (2.1) e a partire da esse si esplicitino da un lato i coefficienti del *Tensore di Ricci* (2.3) $R_{\mu\nu}$, dello *Scalare di Curvatura* (2.4) R, del *Tensore di Einstein* (2.5) $G_{\mu\nu}$ 4-dimensionali e dall'altro le componenti, definite dall'operazione di derivazione covariante 4-dimensionale (2.2), di $\phi_\mu = \nabla_\mu\phi$, $\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ e $\phi_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\rho\phi$. Il lettore interessato ad una visione esplicita di tali risultati è rimandato alle espressioni in all'Appendice C.5. Dunque, a partire da tali oggetti le equazioni di campo scalare e tensoriali (4.44) saranno:

$$\begin{cases} \bar{J}^\tau_{\mathscr{C}} = 0 \\ \bar{E}_g^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{4.50}$$

con $\mathscr{C}$ indice di classe[41]. Le espressioni esplicite delle componenti $J^\nu_{\mathscr{C}}$, $E_g^{\mathscr{C}}[\mathcal{L}]_{\mu\nu}$ definite in (4.45) ed associate all'elemento di linea (4.48) sono fornite in Appendice C.5.1. Poiché di nostro interesse, si riportano le rappresentazioni degli operatori di Eulero-Lagrange scalari e tensoriali per la sottoclasse $\mathscr{C}$ =Ia*:

$$\begin{cases} J^\tau{}_{\text{Ia}*} = 2\big(-6H^2\zeta_{1,X}\dot{\phi}^2 + 6H^2\zeta_1 + \epsilon\big)\dot{\phi} \\ E_g{}^{\text{Ia}*}[\mathcal{L}]^\tau{}_\tau = 12H^2\zeta_{1,X}\dot{\phi}^4 - 18H^2\zeta_1\dot{\phi}^2 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda - \epsilon\dot{\phi}^2 \\ E_g{}^{\text{Ia}*}[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho = -6H^2\zeta_1\dot{\phi}^2 - 6H^2\eta + 8H\zeta_{1,X}\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 8H\zeta_1\dot{\phi}\ddot{\phi} + \kappa\Lambda + \epsilon\dot{\phi}^2 \end{cases} \tag{4.51}$$

---

[40] Le classi Ib, IIb, IIIb, IIIc non verranno trattate poiché presentano settore metrico degenere

[41] Si inizi calcolando il determinante metrico dalla definizione (4.48)

$$g = \det g_{\mu\nu} = e^{3Ht}r^2\sin^2\theta$$

con $E_g[\mathcal{L}]^{\rho}{}_{\rho} = E_g[\mathcal{L}]^{\theta}{}_{\theta} = E_g[\mathcal{L}]^{\varphi}{}_{\varphi}$. Il punto $\dot{}$ ad apice indica la derivazione rispetto alla coordinata temporale τ mentre i doppi indici greci nelle espressioni sono componenti dunque non vanno intesi sommati. Si ottengano le equazioni di campo scalare e tensoriali impiegando tali espressioni nella (4.44) e si imponga il profilo delle soluzioni scalari proposto in (4.49)i:

$$\begin{cases} -6H^2\zeta_{1,X}v_0^2 + 6H^2\zeta_1 + \epsilon = 0 \\ 12H^2\zeta_{1,X}v_0^4 - 18H^2\zeta_1 v_0^2 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda - \epsilon v_0^2 = 0 \\ -6H^2\zeta_1 v_0^2 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda + \epsilon v_0^2 = 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

In verità nel sistema sono solo due le equazioni indipendenti[42]:

$$\begin{cases} -6H^2\zeta_{1,X}v_0^2 + 6H^2\zeta_1 + \epsilon = 0 \\ 12H^2\zeta_{1,X}v_0^4 - 18H^2\zeta_1 v_0^2 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda - \epsilon v_0^2 = 0 \end{cases} \tag{4.53}$$

Poiché le coordinate di FLRW saranno poco adatte a fornire una soluzione cosmologica di background asintoticamente ben definita rispetto allo spazio-tempo statico e sfericamente simmetrico che si studierà nella prossima sezione, risulterà più conveniente lavorare nelle nuove *coordinate di Schwarzschild* (t, r, θ, φ)

$$\tau = t + \frac{1}{2H}\ln\left(1 - H^2r^2\right) \qquad \rho = \frac{r\,e^{-Hr}}{\sqrt{1 - H^2r^2}} \tag{4.54}$$

per cui il profilo (4.49) è riscrivibile

$$\phi(r,t) = v_0 t + \frac{v_0}{2H}\ln\left(1 - H^2r^2\right) \tag{4.55}$$

Si noti che ora la soluzione di background dipende ora anche dalla coordinata radiale e che trattandosi semplicemente di un cambio di coordinate la fisica sottostante al background di DeSitter è rimasta invariata.

Tornando nuovamente a parlare in termini del tutto generali, indipendentemente dunque dalla classe scelta, si introduca ora nello spazio-tempo di background così descritto una struttura cosmica statica, sfericamente simmetrica e la cui distribuzione di materia si comporti come un fluido perfetto, il cui tensore energia momento sarà dunque

$$T^{\mu}_{\nu} \equiv \mathrm{diag}\Big\{ -\varepsilon(r), P(r), P(r), P(r)\Big\} \tag{4.56}$$

dove rispettivamente $\varepsilon(r)$ e $P(r)$ denotano la densità di energia e la pressione. L'introduzione di una tale sorgente modifica lo spazio-tempo di background. Lo spazio tempo sarà ora descrivibile, sempre in termini delle coordinate di Swartszchild (t, r, θ, φ) dall'elemento di linea

$$ds^2 = -e^{\nu(r)}dt^2 + e^{\lambda(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_2^2 \tag{4.57}$$

e dal profilo scalare

$$\phi(r,t) = y_0(r)t \tag{4.58}$$

Le funzioni $\nu(r)$, $\lambda(r)$ e $y_0(r)$ dipendono esclusivamente dalla coordinata radiale r e rappresenteranno le incognite del modello proposto. A partire dalla definizione (4.57) si calcolino le componenti della connessione di Levi-Civita 4-dimensionale $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ in base alla definizione (2.1) e a partire da esse si esplicitino da un lato i coefficienti del *Tensore di Ricci* (2.3) $R_{\mu\nu}$, dello *Scalare di Curvatura* (2.4) R, del *Tensore di Einstein* (2.5) $G_{\mu\nu}$ 4-dimensionali e dall'altro le componenti, definite dall'operazione di derivazione covariante 4-dimensionale (2.2), di $\phi_\mu = \nabla_\mu\phi$, $\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$ e $\phi_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\rho\phi$. Il lettore interessato ad una visione esplicita di tali risultati è rimandato alle

---

da cui, osservando che a livello di background la corrente $J^{\nu}_{\mathscr{C}}$ definita in (4.46) presenta solo componenti e dipendenze esclusivamente temporali(si vedano a titolo d'esempio le componenti proposte in Appendice C.5.1) vale la relazione [31]

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\bar{J}^{\nu}_{\mathscr{C}} = \frac{\partial_\nu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}}\bar{J}^{\nu}_{\mathscr{C}} = \frac{\partial_t\sqrt{e^{3Ht}r^2\sin^2\theta}}{\sqrt{e^{3Ht}r^2\sin^2\theta}}\bar{J}^{t}_{\mathscr{C}} = 3H\bar{J}^{t}_{\mathscr{C}}$$

da cui per la (4.45)

$$0 = \nabla_\mu\bar{J}^{\mu}_{\mathscr{C}} = \partial_\mu\bar{J}^{\mu}_{\mathscr{C}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\nu}\bar{J}^{\nu}_{\mathscr{C}} = \dot{\bar{J}}^{t}_{\mathscr{C}} + 3H\bar{J}^{t} = \frac{1}{a^3}\left(a^3\dot{\bar{J}}^{t}_{\mathscr{C}} + 3a^2\dot{a}\bar{J}^{t}_{\mathscr{C}}\right) = \frac{1}{a^3}\left(a^3\bar{J}^{t}_{\mathscr{C}}\right)^{\cdot}$$

dove si è introdotto il *fattore di scala* $a(t) = e^{H\,t}$ tale per cui $H = \frac{\dot{a}}{a}$. Il punto $\dot{}$ ad apice indica la derivazione rispetto alla coordinata temporale τ. Le possibili soluzioni per quest'ultima equazione potranno essere del tipo $J^{t}_{\mathscr{C}} = a^{-3} = e^{-3Ht}$ oppure $J^{t}_{\mathscr{C}} = 0$. Essendo le prime destinate presti ad annullarsi, ci si concentrerà nelle soluzione proposta (4.50)

[42] Si indichino le equazioni alla prima, seconda e terza riga presenti nel sistema (4.52) rispettivamente con I, II, III: la III è ottenibile dalla I e dalla II con la relazione

$$\mathrm{II} + 2v_0^2\mathrm{I} = \left(12H^2\zeta_{1,X}v_0^4 - 18H^2\zeta_1 v_0^2 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda - \epsilon v_0^2\right) + 2v_0^2\left(-6H^2\zeta_{1,X}v_0^2 + 6H^2\zeta_1 + \epsilon\right) = \mathrm{III}$$

espressioni in all'Appendice C.6. Come nel caso del background, le equazioni di campo scalari e tensoriali (4.44) saranno[43]

$$\begin{cases} J^r_{\mathscr{C}} = 0 \\ E^{\mathscr{C}}_g[\mathcal{L}]_{\mu\nu} = 0 \end{cases} \tag{4.61}$$

Lontano dalla struttura, a partire da una distanza radiale di riferimento che chiameremo r_*, la soluzione dovrà asintoticamente tendere alla parametrizzazione (4.55). Denotato con $r_H \equiv H^{-1}$ l'orizzonte nello spazio-tempo di DeSitter, nell'ipotesi $r_* \ll r < r_H$ si avrà

$$\phi(r,t) \cong \phi_0(r,t) \equiv v_0 t + \frac{v_0}{2H} \ln\left(1 - H^2 r^2\right) \qquad \nu(r) \cong \nu_0(r) \equiv \ln\left(1 - H^2 r^2\right) \qquad \lambda(r) \cong \lambda_0(r) \equiv -\ln\left(1 - H^2 r^2\right) \tag{4.62}$$

dove si sono introdotte le espressioni di background ϕ_0, ν_0, λ_0 necessarie ad esprimere l'espansione perturbata delle soluzioni ϕ, ν, λ in vicinanza della struttura:

$$\phi(r,t) \equiv \phi_0(r,t) + \delta\phi(r) \qquad \nu(r) \equiv \nu_0(r) + \delta\nu(r) \qquad \lambda(r) \equiv \lambda_0(r) + \delta\lambda(r) \tag{4.63}$$

Lo studio proposto sino ad ora è estendibile a tutte le classi degeneri introdotte. Tuttavia per semplicità, risulta conveniente alla luce dell'analisi preliminare di questo elaborato, restringere il campo alle teorie presenti nella più semplice sottoclasse Ia∗ ed in particolare in due differenti teorie caratterizzate rispettivamente dalla scelta del parametro libero ζ_1 proporzionale ad X o fissato costante.

4.6.1 Analisi del sottocaso $\zeta_1 = f_4 X$

Si specifichino le equazioni di campo del background alla DeSitter (4.53) al caso in cui $\zeta_1 = f_4 X$ dove ora[44] $X = -v_0^2$ e dove f_4 è un arbitrario coefficiente costante:

$$\begin{cases} 12H^2 f_4 v_0^2 - \epsilon = 0 \\ 30H^2 f_4 v_0^4 - 6H^2\eta + \kappa\Lambda - \epsilon v_0^2 = 0 \end{cases} \tag{4.65}$$

Definito il parametro ausiliare

$$\sigma^2 \equiv \frac{\kappa\Lambda}{6H^2\eta} \tag{4.66}$$

opportune manipolazioni algebriche permettono di ottenere a partire dalle equazioni di campo (4.65) le relazioni

$$\begin{cases} f_4 = \dfrac{\eta}{3v_0^4}\left(1 - \sigma^2\right) \\ \epsilon = \dfrac{4H^2\eta}{v_0^2}\left(1 - \sigma^2\right) \end{cases} \tag{4.67}$$

Si passi dunque allo studio dello spazio-tempo in presenza della struttura sfericamente simmetrica e si specializzino le equazioni di campo (4.61) al caso in cui $\zeta_1 = f_4 X$ con ora[45] $X = -e^{-\nu}\dot{\phi}^2 + e^{-\lambda}\phi'^2$ dove il punto $\dot{}$ ad apice indica

[43] Si inizi calcolando il determinante metrico dalla definizione (4.57)

$$g = \det g_{\mu\nu} = e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 \tag{4.59}$$

da cui, osservando che la corrente $J^\nu_{\mathscr{C}}$ definita in (4.46) presenta solo dipendenze esclusivamente temporali e che $\det g$ dipende esclusivamente dalla coordinata radiale r (in tutta generalità per simmetria $\hat{\theta}$ può essere fissato ad un valore costante di $\frac{\pi}{2}$) vale per la(4.44)

$$0 = \nabla_\mu J^\mu_{\mathscr{C}} = \partial_\mu J^\mu_{\mathscr{C}} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} J^\nu_{\mathscr{C}} = \partial_\mu J^\mu_{\mathscr{C}} + \frac{\partial_\nu\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} J^\nu_{\mathscr{C}} = \partial_r J^r_{\mathscr{C}} + \frac{\partial_r\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} J^r_{\mathscr{C}} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\sqrt{-g}\,\partial_r J^r_{\mathscr{C}} + \partial_r\sqrt{-g}\,J^r_{\mathscr{C}}\right\} = \frac{\left(\sqrt{-g}\,J^r_{\mathscr{C}}\right)'}{\sqrt{-g}}$$

da cui

$$0 = \left(\sqrt{-g}\,J^r_{\mathscr{C}}\right)' = \left(e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 J^r_{\mathscr{C}}\right)' \tag{4.60}$$

L'apice $'$ indica la derivata spaziale lungo la coordinata radiale r. Le possibili soluzioni per quest'ultima equazione saranno necessariamente del tipo $J^r_{\mathscr{C}} = 0$

[44] Ricordando che per il background $\phi = \phi(\tau)$, segue facilmente dalla definizione

$$X = \phi_\mu\phi^\mu = \bar{g}^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu = \bar{g}^{tt}\phi_t\phi_t = -\dot{\phi}^2 = -v_0^2 \tag{4.64}$$

dove il punto $\dot{}$ ad apice indica la derivazione rispetto alla coordinata temporale τ

[45] Ricordando che per il background $\phi = \phi(\tau)$, segue facilmente dalla definizione

$$X = \phi_\mu\phi^\mu = g^{\mu\nu}\phi_\mu\phi_\nu = g^{tt}\phi_t\phi_t + g^{rr}\phi_r\phi_r = -e^{-\nu}\dot{\phi}^2 + e^{-\lambda}\phi'^2 \tag{4.68}$$

dove il punto $\dot{}$ ad apice indica la derivazione rispetto alla coordinata temporale t e dove l'apice $'$ indica la derivazione rispetto alla coordinata spaziale radiale r.

la derivazione rispetto alla coordinata temporale t e dove l'apice $'$ indica la derivazione rispetto alla coordinata spaziale radiale r. Sfruttando le quantità in Appendice C.6 ed imponendo il profilo (4.58) esse saranno[46]

$$10\nu'\dot{\phi}^2 f_4 r e^{\lambda} - 8\nu'\phi'^2 f_4 r e^{\nu} + 2\dot{\phi}^2 f_4 \lambda' r e^{\lambda} - 8\phi'^2 f_4 e^{\nu} + r^2 \epsilon e^{\nu+2\lambda} = 0 \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned} &-\frac{14 f_4}{r}\dot{\phi}^2\phi'^2\lambda' e^{-\nu-2\lambda} + \frac{10 f_4}{r^2}\dot{\phi}^2\phi'^2 e^{-\nu-2\lambda} + \frac{20\phi'}{r}\dot{\phi}^2\phi'' f_4 e^{-\nu-2\lambda} + 4\dot{\phi}^2 f_4\lambda^2 e^{-3\nu} - \frac{\dot{\phi}^2\epsilon}{2}e^{-\nu} \\ &+ \frac{10 f_4}{r}\phi'^4\lambda' e^{-3\lambda} - \frac{2 f_4}{r^2}\phi'^4 e^{-3\lambda} - \frac{16\phi''}{r}\phi'^3 f_4 e^{-3\lambda} - \frac{\phi'^2\epsilon}{2}e^{-\lambda} + \kappa\Lambda - \frac{2\lambda'}{r}\eta e^{-\lambda} + \eta\varepsilon - \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2\eta}{r^2}e^{-\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned} &\frac{14\nu'}{r}\dot{\phi}^2\phi'^2 f_4 e^{-\nu-2\lambda} - \frac{10\nu'}{r}\phi'^4 f_4 e^{-3\lambda} + \frac{2\nu'}{r}\eta e^{-\lambda} + \frac{2 f_4}{r^2}\dot{\phi}^2\phi'^2 e^{-\nu-2\lambda} + \frac{4\phi'}{r}\dot{\phi}^2\phi'' f_4 e^{-\nu-2\lambda} + \frac{\phi'^2\epsilon}{2}e^{-\nu} \\ &- \frac{10 f_4}{r^2}\phi'^4 e^{-3\lambda} + \frac{8 f_4}{r}\phi'^3\lambda e^{-\nu-2\lambda} + \frac{\phi'^2\epsilon}{2}e^{-\lambda} + \kappa\Lambda - P - \frac{2\eta}{r^2} + \frac{2\eta}{r^2}e^{-\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{4.71}$$

dove alla (4.69) vi è $\hat{J}^r_{\mathrm{Ia}*} = 0$, alla (4.70) $E_g[\mathcal{L}]^t{}_t = 0$ ed alla (4.71) $E_g[\mathcal{L}]^r{}_r = 0$. In possesso delle equazioni di campo si intende ora ottenere, al di sotto dell'orizzonte cosmologico r_H, la loro corrispondente espressione nel limite di campo debole. A partire dall'inserimento dall'espansione (4.63) nelle equazioni (4.69) (4.70) (4.71) si assuma per l'appunto che le correzioni cosmologiche, dipendenti dal parametro $Hr \ll 1$ al di sotto dell'orizzonte, siano trascurabili rispetto alle perturbazioni dello spazio-tempo $\delta\nu$ e $\delta\lambda$ dovute alla presenza dell'oggetto centrale[47]. Le semplificazioni per le perturbazioni del campo scalare risultano più difficili: le non-linearità dovute alla presenza di termini di ordine superiore potrebbero essere significative e dunque si è scelto di mantenere tutti i termini in non lineari in $\delta\phi$ che non siano soppressi da potenze $\delta\nu^n$ ed $\delta\lambda^n$ con $n > 1$. Applicando tali criteri, le equazioni di campo perturbate avranno infine espressioni, nel medesimo ordine:

$$\begin{cases} 4\,\delta\phi'^2 - v_0^2\big(5\,\delta\nu' + \delta\lambda'\big)r = 0 \\ 10 f_4 v_0^2\big(\delta\phi'^2 + 2r\delta\phi'\,\delta\phi''\big) - 2\eta\big(\delta\lambda + r\delta\lambda'\big) + \varepsilon r^2 = 0 \\ 2 f_4 v_0^2\big(\delta\phi'^2 + 2r\delta\phi'\,\delta\phi''\big) - 2\eta\big(\delta\lambda - r\delta\nu'\big) - P r^2 = 0 \end{cases} \tag{4.72}$$

dove f_4 è fissato dalla condizione di background (4.67). Si lascia a futuri lavori lo sviluppo dei risultati ottenuti e l'ottenimento delle opportune soluzioni. Si noti che ponendo $\epsilon = -k_2$, $\eta = \frac{1}{2}m_{pl}^2$ ed $\kappa = m_{pl}^2$ si riottiene il caso studiato in [25].

4.6.2 Analisi del sottocaso $\zeta_1 = g_4 = cost$

Si specifichino le equazioni di campo del background alla DeSitter (4.53) al caso in cui $\zeta_1 = g_4 = cost$ dove g_4 è un arbitrario coefficiente costante::

$$\begin{cases} 6H^2 g_4 + \epsilon = 0 \\ 18H^2 g_4 v_0^2 + 6H^2\eta - \kappa\Lambda + \epsilon v_0^2 = 0 \end{cases} \tag{4.73}$$

Definito il parametro ausiliare

$$\omega^2 \equiv \frac{\kappa\Lambda}{6H^2\eta} \tag{4.74}$$

opportune manipolazioni algebriche permettono di ottenere a partire dalle equazioni di campo (4.73) le relazioni

$$\begin{cases} g_4 = -\dfrac{\eta}{2v_0^2}\left(1-\omega^2\right) \\ \epsilon = \dfrac{3H^2\eta}{v_0^2}\left(1-\omega^2\right) \end{cases} \tag{4.75}$$

Si passi dunque allo studio dello spazio-tempo in presenza della struttura sfericamente simmetrica e si specializzino le equazioni di campo (4.61) al caso in cui $\zeta_1 = g_4$. Sfruttando le quantità in Appendice C.6 ed imponendo il profilo (4.58) esse saranno[48]

$$6\nu'\dot{\phi}^2 g_4 r e^{\lambda} - 4\nu'\phi'^2 g_4 r e^{\nu} + 2\dot{\phi}^2\lambda' g_4 r e^{\lambda} - \dot{\phi}^2 r^2\epsilon e^{2\lambda} - 4\phi'^2 g_4 e^{\nu} + \phi'^2 r^2 \epsilon e^{\nu+\lambda} = 0 \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned} &\nu'^2\dot{\phi}^6 g_4 r^2 e^{\nu+2\lambda} - \nu'^2\dot{\phi}^4\phi'^2 g_4 r^2 e^{2\nu+\lambda} - \nu'\dot{\phi}^6 g_4 r^2 e^{\nu+2\lambda} + \nu'\dot{\phi}^4\phi'^2 g_4 r^2 e^{2\nu+\lambda} \\ &- \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^6\epsilon r^2 e^{\nu+3\lambda} + 10\dot{\phi}^4\phi'^2\lambda' g_4 r e^{2\nu+\lambda} - 6\dot{\phi}^4\phi'^2 g_4 e^{2\nu+\lambda} + \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^4\epsilon\phi'^2 r^2 e^{2\nu+2\lambda} - 12\dot{\phi}^4\phi'\phi'' g_4 r e^{2\nu+\lambda} \\ &+ \dot{\phi}^4\kappa r^2\Lambda e^{2\nu+3\lambda} - 2\dot{\phi}^4\lambda' r\eta e^{2\nu+2\lambda} - 8\dot{\phi}^4 g_4 r^2\lambda^2 e^{3\lambda} + \dot{\phi}^4 r^2\eta\varepsilon e^{2\nu+3\lambda} + 2\dot{\phi}^4\eta e^{2\nu+2\lambda} - 2\dot{\phi}^4\eta e^{2\nu+3\lambda} \end{aligned}$$

[46] Data la lunghezza del calcolo esplicito, vengono qui riportati solo i risultati
[47] In tal approssimazione si trascurerà anche il contributo della costante cosmologica
[48] Data la lunghezza del calcolo esplicito, vengono qui riportati solo i risultati

$$
\begin{aligned}
&- 16\dot\phi^2\phi'^4\lambda' g_4 r e^{3\nu} + 8\dot\phi^2\phi'^4 g_4 e^{3\nu} + \tfrac{1}{2}\dot\phi^2\epsilon\phi'^4 r^2 e^{3\nu+\lambda} + 20\dot\phi^2\phi'^3\phi'' g_4 r e^{3\nu} - 2\dot\phi^2\phi'^2\kappa r^2\Lambda e^{3\nu+2\lambda}\\
&+ 4\dot\phi^2\phi'^2\lambda' r\eta e^{3\nu+\lambda} + 4\dot\phi^2\phi'^2 g_4 r^2\lambda^2 e^{\nu+2\lambda} - 2\dot\phi^2\phi'^2 r^2\eta\varepsilon e^{3\nu+2\lambda} - 4\dot\phi^2\phi'^2\eta e^{3\nu+\lambda}\\
&+ 4\dot\phi^2\phi'^2\eta e^{3\nu+2\lambda} + 6\phi'^6\lambda' g_4 r e^{4\nu-\lambda} - 2\phi'^6 g_4 e^{4\nu-\lambda} - \tfrac{1}{2}\phi'^6\epsilon r^2 e^{4\nu}\\
&- 8\phi'^5\phi'' g_4 r e^{4\nu-\lambda} + \phi'^4\kappa r^2\Lambda e^{4\nu+\lambda} - 2\phi'^4\lambda' r\eta e^{4\nu}\\
&+ \phi'^4 r^2\eta\varepsilon e^{4\nu+\lambda} + 2\phi'^4\eta e^{4\nu} - 2\phi'^4\eta e^{4\nu+\lambda} = 0
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \nu'^2\dot\phi^4\phi'^2 g_4 r^2 e^{\lambda} + \nu'^2\dot\phi^2\phi'^4 g_4 r^2 e^{\nu} + \nu'\dot\phi^4\phi'^2 g_4 r^2 e^{\lambda} - 10\nu'\dot\phi^4\phi'^2 g_4 r e^{\lambda}\\
&+ 2\nu'\dot\phi^4 r\eta e^{2\lambda} - \nu'\dot\phi^2\phi'^4 g_4 r^2 e^{\nu} + 16\nu'\dot\phi^2\phi'^4 g_4 r e^{\nu} - 4\nu'\dot\phi^2\phi'^2 r\eta e^{\nu+\lambda} - 6\nu'\phi'^6 g_4 r e^{2\nu-\lambda} + 2\nu'\phi'^4 r\eta e^{2\nu}\\
&+ \tfrac{1}{2}\dot\phi^6\epsilon r^2 e^{-\nu+3\lambda} - 2\dot\phi^4\phi'^2 g_4 e^{\lambda} - \tfrac{1}{2}\dot\phi^4\epsilon\phi'^2 r^2 e^{2\lambda} - 4\dot\phi^4\phi'\phi'' g_4 r e^{\lambda} + \dot\phi^4\kappa r^2\Lambda e^{3\lambda} - \dot\phi^4 r^2 P e^{3\lambda} - 2\dot\phi^4\eta e^{3\lambda}\\
&+ 2\dot\phi^4\eta e^{2\lambda} + 8\dot\phi^2\phi'^4 g_4 e^{\nu} - \tfrac{1}{2}\dot\phi^2\epsilon\phi'^4 r^2 e^{\nu+\lambda} + 4\dot\phi^2\phi'^3\phi'' g_4 r e^{\nu} - 8\dot\phi^2\phi'^3 g_4 r\lambda e^{\lambda} - 2\dot\phi^2\phi'^2\kappa r^2\Lambda e^{\nu+2\lambda}\\
&+ 4\dot\phi^2\phi'^2 g_4 r^2\lambda^2 e^{-\nu+2\lambda} + 2\dot\phi^2\phi'^2 r^2 P e^{\nu+2\lambda} - 4\dot\phi^2\phi'^2\eta e^{\nu+\lambda} + 4\dot\phi^2\phi'^2\eta e^{\nu+2\lambda} - 6\phi'^6 g_4 e^{2\nu-\lambda}\\
&+ \tfrac{1}{2}\phi'^6\epsilon r^2 e^{2\nu} + 8\phi'^5 g_4 r\lambda e^{\nu} + \phi'^4\kappa r^2\Lambda e^{2\nu+\lambda} - \phi'^4 r^2 P e^{2\nu+\lambda} + 2\phi'^4\eta e^{2\nu} - 2\phi'^4\eta e^{2\nu+\lambda} = 0
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

dove alla (4.76) vi è $\hat{J}^r_{\mathrm{Ia}*} = 0$, alla (4.77) $E_g[\mathcal{L}]^t{}_t = 0$ ed alla (4.78) $E_g[\mathcal{L}]^r{}_r = 0$. In possesso delle equazioni di campo si intende ora ottenere, al di sotto dell'orizzonte cosmologico r_H, la loro corrispondente espressione nel limite di campo debole. A partire dall'inserimento dall'espansione (4.63) nelle equazioni (4.76) (4.77) (4.78) si assuma per l'appunto che le correzioni cosmologiche, dipendenti dal parametro $Hr \ll 1$ al di sotto dell'orizzonte, siano trascurabili rispetto alle perturbazioni dello spazio-tempo $\delta\nu$ e $\delta\lambda$ dovute alla presenza dell'oggetto centrale[49]. Le semplificazioni per le perturbazioni del campo scalare risultano più difficili: le non-linearità dovute alla presenza di termini di ordine superiore potrebbero essere significative e dunque si è scelto di mantenere tutti i termini in non lineari in $\delta\phi$ che non siano soppressi da potenze $\delta\nu^n$ ed $\delta\lambda^n$ con $n > 1$. Applicando tali criteri, le equazioni di campo perturbate avranno infine espressioni, nel medesimo ordine:

$$
\begin{cases}
2\,\delta\phi'^2 - v_0^2\big(3\,\delta\nu' + \delta\lambda'\big)r = 0\\
-6g_4\big(\delta\phi'^2 + 2r\delta\phi'\,\delta\phi''\big) - 2\eta\big(\delta\lambda + r\delta\lambda'\big) + \varepsilon r^2 = 0\\
-2g_4\big(\delta\phi'^2 + 2r\delta\phi'\,\delta\phi''\big) - 2\eta\big(\delta\lambda - r\delta\nu'\big) - Pr^2 = 0
\end{cases}
\tag{4.79}
$$

dove g_4 è fissato dalla condizione di background (4.75). Si lascia a futuri lavori lo sviluppo dei risultati ottenuti e l'ottenimento delle opportune soluzioni. Si noti che rispetto alla precedente sezione le equazioni di campo perturbate ora ottenute possiedono la medesima struttura[50]: l'effetto di una diversa scelta del parametro libero ζ_1 della classe Ia* si è tramutata in un diverso valore dei coefficienti numerici nelle equazioni del moto.

[49] In tal approssimazione si trascurerà anche il contributo della costante cosmologica

[50] Si noti che non è presente il parametro moltiplicativo v_0^2 poiché ω^2 a differenza di f_4 è definito con al denominatore v_0^2 e non v_0^4

5 Conclusioni

Il punto centrale del presente lavoro è lo studio di strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche nell'ambito di *teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri* (qDHOST) introdotte da recenti lavori di Langlios [26][27]. Sono stati svolti esplicitamente i calcoli di questi lavori deducendone una dettagliata ed approfondita analisi delle tecniche e dei metodi. Si sono ricavate le *classi degeneri* in cui tali teorie sono organizzate per evitare l'insorgere di particolari instabilità campistiche note come *ghost di Ostrogradski* [26].

Questa analisi preliminare ha permesso di sviluppare un modello di teoria gravitazionale scalare-tensoriale quadratica di ordine superiore degenere invariante rispetto alla trasformazione $\phi' = \phi + cost$ (4.1). Se ne sono ottenute esplicitamente le equazioni di campo covarianti e le si sono utilizzate per descrivere la dinamica gravitazionale nelle vicinanze di una distribuzione statica e sfericamente simmetrica di materia (4.76)-(4.78), (4.69)-(4.71) immersa in uno spazio-tempo 4-dimensionale di background di De Sitter (4.67)(4.75).

Tale calcolo è stato svolto nella classe degenere più semplice che tuttavia ha esibito tutta la sua complessità strutturale anche nel limite in cui il suo unico parametro libero è stato posto costante. Sempre in tale classe si è visto come due differenti scelte dell'unico parametro libero lascino invariata la struttura delle equazioni di campo modificando solamente il valore dei coefficienti numerici presenti (4.72)(4.79). Queste espressioni costituiscono il risultato principale del presente elaborato.

Le nuove equazioni ottenute (4.45) permettono di indagare concretamente come la condizione di degenerazione operi per garantire l'assenza di ghost e stabiliscono una esplicita interconnessione tra teoria ed osservabili, evidenziando eventualmente l'insorgere di nuove evidenze fenomenologiche sull'Universo a grandi scale.

Si intende sottolineare l'originalità e l'importanza dell'analisi svolta in quanto archetipo per una ulteriore estensione degli studi sulle nuove proprietà caratterizzanti i meccanismi di lente gravitazionale attivi in vicinanza di stelle e ammassi estesi [11][21], sulla "rottura" del meccanismo di screening alla Vainshtein su piccole scale all'interno di stelle e ammassi di materia [23][22] e sulle possibili modificazioni indotte alle equazioni di equilibrio atte a descrivere le proprietà strutturali di stelle ed oggetti compatti [24].

Vi è la chiara predisposizione del presente lavoro ad estendere l'analisi svolta alle altre classi degeneri che, a meno di particolari sottoclassi, allo stato odierno della ricerca sembrano contenere teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri del tutto nuove e prive di ghost [27]. Il modello studiato può essere naturalmente esteso anche al caso in cui i parametri liberi della teoria dipendono esplicitamente anche dal campo scalare ϕ.

L'abbondante quantità di termini che compaiono nelle espressioni proposte sia in calcoli simbolici che per componenti ha rappresentato il principale vincolo al raggiungimento dei risultati proposti. Nel presente modello le equazioni di campo considerano d'altro canto termini a tre indici che come $\phi_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\rho \phi$ rendono la computazione difficilmente gestibile, soprattutto se il campo scalare ϕ dipende da più di una coordinata.

Si osservi infine che alle equazioni di campo ottenute non è stata fornita alcuna soluzione il cui ottenimento, come si è detto, è lasciato a lavori futuri[51].

La deduzione delle più generali equazioni di campo e delle corrispondenti soluzioni nel contesto fisico studiato costituirà un possibile campo di indagine per studi futuri.

Sempre in tale direzione il lavoro [25] consiglia come ottenere a partire dalle equazioni di campo perturbate in $\delta\nu$, $\delta\lambda$ e $\delta\phi$ nel limite di campo debole (4.72)(4.79) l'espressione esplicita dei potenziali metrici Ψ e Φ comunemente rappresentati nell'ambito della teoria delle perturbazioni cosmologiche nella gauge Newtoniana[52].

Altri lavori potrebbero essere compiuti per indagare le connessioni tra parametri liberi e coefficienti ottenibili a partire da un contesto Effective Field Theory [29] in teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri.

Infine, per completezza, si citano i recenti lavori di Langlois [30] su teorie scalari-tensoriali cubiche di ordine superiore degeneri (cDHOST) [30] in cui al posto di considerare come nel nostro caso Lagrangiane al più quadratiche nelle derivate covarianti seconde del campo scalare si considerano Lagrangiane cubiche per i medesimi termini. Il lavoro qui svolto è dunque estendibile anche a tutto il nuovo orizzonte di teorie cDHOST.

Il percorso affrontato nel presente elaborato vuole essere un esempio di come sia possibile affrontare un?indagine sistematica delle possibili implicazioni cosmologiche ed astrofisiche introdotte dall?utilizzo delle nuove classi di teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore degeneri come teorie della gravità alternative alla Relatività Generale.

---

[51] Si noti che la seconda equazione dei sistemi (4.72)(4.79) è già direttamente integrabile. Poi nell'ipotesi di limite non relativistico il termine di pressione P sarà trascurabile rispetto al termine di energia ε che, integrato, genererà un termine associato alla massa della struttura cosmica considerata.

[52] Una breve nota in tal caso deve essere fatta alla luce dell'analisi svolta dall'articolo in riferimento. Rimane aperta infatti la questione sulle possibili tecniche con cui connettere le equazioni di background con le equazioni perturbate senza conoscerne esplicitamente le soluzioni. Il lettore interessato è rimandato all'Appendice A del suddetto articolo per una breve introduzione alla questione.

A Sull'impiego delle condizioni di degenerazione per eliminare il ghost di Ostrogradski

La presente Appendice si occuperà di fornire una intuitiva giustificazione sull'utilizzo delle condizioni di degenerazione per evitare l'insorgere dell'instabilità campistica nota come *ghost di Ostrogradski* in una teoria scalare-tensoriale di ordine superiore nelle derivate temporali dei campi fondamentali. A tal fine si introdurrà un modello semplificato che tuttavia permetterà di riprodurre efficacemente le proprietà di degenerazione della teoria (2.9) studiata. Percorrendo tale direzione, la sottosezione (A.1) si occuperà di definire tale modello da un punto di vista Lagrangiano ed Hamiltoniano ricavando le equazioni del moto sia per i campi fondamentali che per una loro opportuna ridefinizione. A tal punto le condizioni di degenerazione ottenute in (A.2) saranno impiegate per una analisi Lagrangiana (A.3) in una circostanza non degenere (A.3.1) e degenere (A.3.2) del numero di gradi di libertà presenti nel modello. I medesimi risultati saranno ottenuti anche in (A.4), sia nel caso non degenere (A.4.1) che nel caso degenere (A.4.2), previo una analisi Hamiltoniana[53].

A.1 Formulazione Lagrangiana and Hamiltoniana di un modello esplicativo

Denominata t la coordinata temporale, si consideri una particella puntiforme $\phi = \phi(t)$ accoppiata ad n gradi di libertà $q = (q^i)_{1 \leq i \leq n}$ con $q^i = q^i(t)$ e la cui dinamica sia descritta da una Lagrangiana del tipo

$$L = \frac{1}{2}a\ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2}k_0\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\ddot{\phi}\dot{q}^i + c_i\dot{\phi}\dot{q}^i - V \tag{A.1}$$

dove a, k_0, $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ e $k = (k_{ij})_{1 \leq i \leq n}$ sono costanti, dove $V = V(\phi, q)$ è il potenziale e dove il ponto denota come al solito la derivazione rispetto alla coordinata twmporale. Evidentemente di ordine superiore, le equazioni del moto per ϕ e le q^i deducibili dalla prescrizione di Eulero-Lagrange saranno dunque[54]

$$\begin{cases} a\ddddot{\phi} + b_i\dddot{q}^i - k_0\ddot{\phi} - c_i\ddot{q}^i - V_\phi = 0 \\ b_k\dddot{\phi} + k_{ki}\ddot{q}^i + c_k\ddot{\phi} + V_k = 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

dove si sono definiti $V_k \equiv \frac{\partial V}{\partial q^k}$ ed $V_\phi \equiv \frac{\partial V}{\partial \phi}$. Al fine di calcolare il numero di gradi di libertà presenti in tale teoria, risulta conveniente introdurre la ridefinizione $Q \equiv \dot{\phi}$ per sostituire in (A.1) le derivate temporali seconde in ϕ con derivate prime in Q. Tale scelta emergerà nella nuova formulazione di (A.1) tramite la comparsa di un ulteriore termine che vincolo Q ad essere la derivata temporale prima di ϕ

$$L = \frac{1}{2}a\dot{Q}^2 + \frac{1}{2}k_0Q^2 + \frac{1}{2}k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\dot{Q}\dot{q}^i + c_iQ\dot{q}^i - V - \lambda(Q - \dot{\phi}) \tag{A.3}$$

dove λ è il *moltiplicatore di Lagrange* associato al vincolo sopracitato. Si collezionino termini rilevanti a determinare la struttura cinetica della teoria (A.3) nella *Lagrangiana cinetica*

$$L_{kin} = \frac{1}{2}\Big(a\dot{Q}^2 + k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2b_i\dot{Q}\dot{q}^i\Big) \tag{A.4}$$

Le corrispondenti equazioni del moto della (A.3) saranno dunque

$$\begin{cases} a\ddot{Q} + b_i\ddot{q}^i - k_0Q - c_i\dot{q}^i + \lambda = 0 \\ b_k\ddot{Q} + k_{ki}\ddot{q}^i + c_k\dot{Q} + V_k = 0 \\ \dot{\lambda} + V_\phi = 0 \\ \dot{\phi} - Q = 0 \end{cases} \tag{A.5}$$

---

[53] Non è scopo del presente elaborato indagare approfonditamente i dettagli ed i principi di analisi Lagrangiana ed Hamiltoniana di un sistema. Si è tuttavia ritenuto opportuno introdurre alcuni semplici concetti in tale ambito al fine di condurre il lettore ad una intuitiva visione delle giustificazioni e degli effetti sull'impiego delle condizioni di degenerazione al fine di evitare l'insorgere del ghost di Ostrogradski.

[54] Dalle equazioni di Eulero-Lagrange per Lagrangiane contenenti al più derivate temporali seconde nei campi fondamentali è infatti facile ottenere rispettivamente per ϕ e q^i

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{\phi}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d^2}{dt^2}\Big(a\ddot{\phi} + b_i\dot{q}^i\Big) - \frac{d}{dt}\Big(k_0\dot{\phi} + c_i\dot{q}^i\Big) - \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\Big(k_{ki}\dot{q}^i + b_k\ddot{\phi} + c_k\dot{\phi}\Big) + \frac{\partial V}{\partial q^k} \end{aligned}$$

dalle quali[55] è facilmente visibile la presenza al più di derivate temporali seconde delle variabili. Per verificare che la Lagrangiana (A.3) sia equivalente alla (A.1) si osservi la coincidenza delle corrispondenti equazioni del moto[56]. Nella formulazione (A.3) si definiscano i momenti coniugati

$$\pi_Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} = a\dot{Q} + b_i \dot{q}^i \qquad \pi_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = k_{ij}\dot{q}^j + b_i \dot{Q} + c_i Q \qquad \pi_\phi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \lambda \qquad \pi_\lambda = 0 \tag{A.6}$$

soddisfacenti le *parentesi di Poisson* non nulle

$$\{\pi_Q, Q\} = 1 \qquad \{\pi_i, q^j\} = \delta_i^j \qquad \{\pi_\phi, \phi\} = 1 \tag{A.7}$$

e necessari a definire formalmente l' Hamiltoniana, *Trasformazione di Legendre* della Lagrangiana (A.3)

$$\begin{aligned} H &\equiv \left\{\pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i + \pi_\phi \dot{\phi} - L\right\}_{\dot{Q}(*)\,\dot{q}(*)\,\dot{\phi}(*)} \\ &= \left\{\pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i + \pi_\phi \dot{\phi} - \frac{1}{2} a \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} k_0 Q^2 - \frac{1}{2} k_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - b_i \dot{Q}\dot{q}^i + c_i Q \dot{q}^i + V + \lambda(Q - \dot{\phi})\right\}_{\dot{Q}(*)\,\dot{q}(*)\,\dot{\phi}(*)} \\ &= \left\{\pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i - \frac{1}{2} a \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} k_0 Q^2 - \frac{1}{2} k_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - b_i \dot{Q}\dot{q}^i + c_i Q \dot{q}^i + V + \pi_\phi Q\right\}_{\dot{Q}(*)\,\dot{q}(*)} \end{aligned} \tag{A.8}$$

dove si è sfruttata l'espressione (A.6) $\pi_\phi = \lambda$ per eliminare alcuni termini e dove si sono formalmente indicate le dipendenze $(*) = (Q, \pi_Q, q, \pi_q, \phi, \pi_\phi, \lambda)$. Si vedrà in seguito che tuttavia non sarà sempre possibile esprimere $\dot{Q}(*)$, $\dot{q}(*)$ e dunque sarà necessario individuare una definizione alternativa alla (A.8) per il conteggio dei gradi di libertà del modello.

Si definisca in uno spazio $(n+1)$-dimensionale $\mathcal{I}$ la variabile vettoriale

$$x = \left(x^I\right)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} Q \\ q^j \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

assieme alle quantità[57]

$$f = \left(f_I\right)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} c_l \dot{x}^l + k_0 x^0 - \lambda \\ -c_j \dot{x}^0 - V_j \end{pmatrix} \qquad p = \left(p_I\right)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ c_j x^0 \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

Introdotta in $\mathcal{I}$ la *Matrice cinetica* M associata alla teoria (A.3) come la matrice simmetrica $(n+1) \times (n+1)$ contenente i coefficienti dei termini quadratici nelle derivate temporali prime presenti nella nuova Lagrangiana (A.3)

$$M = \left(M_{IJ}\right)_{0 \le (I,J) \le n} \equiv \begin{pmatrix} a & b_i \\ b_j & k_{ij} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

è possibile definire da (A.6) il vettore momento coniugato

$$\pi = \left(\pi_I\right)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} \pi_Q \\ \pi_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\dot{x}^0 + b_i \dot{x}^i \\ b_j \dot{x}^0 + k_{jl}\dot{x}^l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_j x^0 \end{pmatrix} = M\dot{x} + p \tag{A.12}$$

e riscrivere la nuova Lagrangiana (A.3) come

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left\{a\dot{Q}^2 + 2b_i \dot{Q}\dot{q}^i + k_{ij}\dot{q}^i \dot{q}^j\right\} + c_i Q \dot{q}^i + \frac{1}{2} k_0 Q^2 - V - \lambda(Q - \dot{\phi}) \\ &= \frac{1}{2}\dot{x}^T M\, \dot{x} + p^T \dot{x} + \frac{1}{2} k_0 (x^0)^2 - V - \lambda(x^0 - \dot{\phi}) \end{aligned} \tag{A.13}$$

---

[55] Dalle equazioni di Eulero-Lagrange per Lagrangiane contenenti al più derivate temporali prime nei campi fondamentali è infatti facile ottenere rispettivamente per Q e q^i, ϕ e λ

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{d}{dt}\left(a\dot{Q} + b_i \dot{q}^i\right) - \left(k_0 Q + c_i \dot{q}^i - \lambda\right) \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt}\left(k_{ki}\dot{q}^i + b_k \dot{Q} + c_k Q\right) + \frac{\partial V}{\partial q^k} \\ 0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q - \dot{\phi} \end{aligned}$$

[56] A partire dalle espressioni (A.5) si derivi la prima rispetto al tempo e si introducano nell'espressione ottenuta la terza e la quarta. Sempre da (A.5) si prenda la seconda e si sostituisca la seconda

$$\begin{cases} 0 = \left(a\ddot{Q} + b_i \ddot{q}^i - k_0 Q - c_i \dot{q}^i + \lambda\right)^{\cdot} = a\dddot{Q} + b_i \dddot{q}^i - k_0 \dot{Q} - c_i \ddot{q}^i + \dot{\lambda} = a \ddddot{\phi} + b_i \dddot{q}^i - k_0 \ddot{\phi} - c_i \ddot{q}^i - V_\phi \\ 0 = b_k \ddot{Q} + k_{ki}\ddot{q}^i + c_k \dot{Q} + V_k = b_k \dddot{\phi} + k_{ki}\ddot{q}^i + c_k \ddot{\phi} + V_k \end{cases}$$

Le espressioni ottenute sono del tutto equivalenti a quelle ottenute in (A.2)

[57] Si noti che componenti di oggetti definiti in tale spazio sono state indicizzate da lettere Latine maiuscole

e le corrispondenti equazioni del moto (A.5)

$$\begin{cases} M\ddot{x} = f \\ \dot{\lambda} + V_\phi = 0 \\ \dot{\phi} - x^0 = 0 \end{cases} \tag{A.14}$$

L'apice ^{T} delle precedenti espressioni corrisponde all'operazione di trasposizione. Infine, impiegando le espressioni (A.11) e (A.12) in (A.8) si ha[58]

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i - \frac{1}{2}\left[a\dot{Q}^2 + 2b_i\dot{Q}\dot{q}^i + k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j \right] - c_i Q\dot{q}^i - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + V + \pi_\phi Q \right\}_{\dot{Q}(*)\,\dot{q}(*)} \\ &= \left\{ \pi^T \dot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^T M\,\dot{x} - p^T\dot{x} - \frac{1}{2}k_0(x^0)^2 + V + \pi_\phi x^0 \right\}_{\dot{x}(*)} \\ &= \left\{ (\pi - p)^T \dot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^T M\,\dot{x} - \frac{1}{2}k_0(x^0)^2 + V + \pi_\phi x^0 \right\}_{\dot{x}(*)} \end{aligned} \tag{A.15}$$

Come detto, l'espressione (A.11) della matrice cinetica avrà un ruolo fondamentale nella determinazione delle condizioni di degenerazione del modello (A.1).

A.2 Condizioni di degenerazione

Una Lagrangiana (A.13) è detta *degenere* se la corrispondente matrice cinetica (A.11) è degenere, ossia $\det(M) = 0$. In termini matriciali, sviluppando il determinante di M rispetto alla prima riga $(a\,|\,b_1\,b_2\,b_3\,...\,b_n)$ è possibile scrivere

$$\det(M) \equiv \det \left(\begin{array}{c|ccccc} a & b_1 & b_2 & b_3 & ... & b_n \\ \hline b_1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & ... & k_{1n} \\ b2 & k_{21} & k_{22} & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & k_{n1} & ... & ... & ... & k_{nn} \end{array} \right) \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned} &= a\det\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & ... \\ k_{21} & k_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{n1} & k_{n2} & ... & k_{nn} \end{pmatrix} - b_1\det\left(\begin{array}{c|ccc} b_1 & k_{12} & k_{13} & ... \\ b_2 & k_{22} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & k_{n2} & ... & k_{nn} \end{array}\right) + b_2\det\left(\begin{array}{c|ccc} b_1 & k_{11} & k_{13} & ... \\ b_2 & k_{21} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & k_{n1} & ... & k_{nn} \end{array}\right) + ... \\ &= a\det(k) - b_1\det(\hat{M}_{01}) + b_2\det(\hat{M}_{02}) + ... \\ &= a\det(k) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_i\det(\hat{M}_{0i}) \end{aligned}$$

dove $\hat{M}_{0i} = (\hat{m}_{0i})_{1\le i\le n}$ è la matrice di ordine n che si ottiene da M elidendo la riga 0-esima, usata come detto per sviluppare i determinante di M, e la colonna i-esima con $1 \le i \le n$. Ogni addendo presente in sommatoria è ulteriormente semplificabile. Si consideri a titolo d'esempio il termine con $i = 1$. Sviluppando il determinante di $\det(\hat{M}_{01})$ rispetto alla prima colonna $(\,b_1\,b_2\,b_3\,...\,b_n)^T$ è possibile scrivere

$$b_1\det(M^c_{01}) = b_1\det\left(\begin{array}{c|cccccc} b_1 & k_{12} & k_{13} & k_{14} & ... & k_{1n} \\ b_2 & k_{22} & k_{23} & k_{24} & ... & ... \\ b_3 & k_{32} & k_{33} & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ b_n & k_{n2} & ... & ... & ... & k_{nn} \end{array}\right) \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} &= b_1\left\{ b_1\det\begin{pmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & ... \\ k_{32} & k_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{n2} & ... & ... & k_{nn} \end{pmatrix} - b_2\det\begin{pmatrix} k_{12} & k_{13} & k_{14} & ... \\ k_{32} & k_{33} & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ k_{n2} & ... & ... & k_{nn} \end{pmatrix} + \;... \right\} \\ &= b_1\left\{ b_1\det(\hat{K}_{11}) - b_2\det(\hat{K}_{21}) + b_3\det(\hat{K}_{31}) + ... \right\} \\ &= b_1\left\{ (-1)^{1+1}b_1K^c_{11} - (-1)^{1+2}b_2K^c_{12} + (-1)^{1+3}b_3K^c_{13} + ... \right\} \\ &= -\det(k)(-1)^1\,b_1\left\{ b_1(k^{-1})^{11} + b_2(k^{-1})^{12} + b_3(k^{-1})^{13} + ... \right\} \\ &= -\det(k)(-1)^1\sum_{j=1}^{n} b_1b_j\,(k^{-1})^{1j} \end{aligned} \tag{A.18}$$

dove nel terzo passaggio $\hat{K}_{j1} = (\hat{k}_{j1})_{1\le i\le n}$ è la matrice di ordine $n-1$ che si ottiene da k elidendo la riga j-esima con $1 \le j \le n-1$ e la colonna 1-esima, usata come detto per sviluppare i determinante di $\hat{M}_{01}$. Al quarto

[58] Si osservi che alla luce delle nuove quantità vettoriali introdotte le dipendenze $\dot{Q}(*)$, $\dot{q}(*)$ risultano inglobate in $\dot{x}(*)$ con $(*) = (x, \pi)$

passaggio K^c_{j1} è la matrice dei complementi algebrici direttamente ottenibile da $\hat{K}_{j1}$ e che sua volta è connessa alla matrice inversa $(k^{-1})^{1j}$ proposta alla quinta riga[59]. Tornando al caso generale e supponendo che k sia invertibile è dunque possibile scrivere

$$b_i \det(M^c_{0i}) = -\det(k)(-1)^i \sum_{j=1}^{n} b_i b_j \, k^{-1}_{ij} \tag{A.19}$$

Inserendo dunque l'espressione (A.19) in (A.16) si ottiene finalmente

$$\det(M) = a\det(k) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i b_i \det(\hat{M}_{0i}) = a\det(k) - \det(k)\sum_{ij=1}^{n}(-1)^{2i} b_i b_j \,(k^{-1})^{ij} = \det(k)\left\{a - b_i b_j\,(k^{-1})^{ij}\right\} \tag{A.20}$$

Poiché si è supposto k invertibile la condizione di degenerazione $\det(M) = 0$ è soddisfatta se

$$a - b_i b_j\,(k^{-1})^{ij} = 0 \tag{A.21}$$

A.3 Cenni di analisi Lagrangiana

Nella presente unità verranno analizzati in contesto Lagrangiano i gradi di libertà presenti nella teoria (A.1) sia nella condizione di non degenerazione della teoria sia nel caso degenere, quando è soddisfatta la (A.21)

A.3.1 Teoria non degenere

Nel caso in cui la matrice cinetica non sia degenere, la prima equazioni del moto (A.14) permette di riscrivere $\ddot{x}$ in termini di derivate di ordine inferiore ottenendo, ricordando le dipendenze nelle definizioni (A.10), il sistema[60]

$$\begin{cases} \ddot{x} = M^{-1} f\big(x^0, \dot{x}^0, \dot{x}^i, \lambda, V(\phi, x^i)\big) \equiv g(x^0, \dot{x}^0, \dot{x}^i, \phi, \lambda) \\ \dot{\lambda} = -V_\phi(\phi, x^i) \\ \dot{\phi} = x^0 \end{cases} \tag{A.22}$$

che per essere risolto richiede $(n+1) \oplus (n+1) \oplus (1) \oplus (1) = 2(n+2)$ condizioni in iniziali, rispettivamente per $(x, \dot{x}, \phi, \lambda)$, e dunque corrispondenti ad (n+2) gradi di libertà tra i quali, come è evidente dall'eccesso di un grado di libertà, è presente il ghost di Ostrogradski.

A.3.2 Teoria degenere

Ci si focalizzi nel caso in cui[61] $b_i \neq 0$. Introdotta la famiglia di vettori unitari

$$e_{(m)} = \left(e^I_{(m)}\right)_{0\le I\le n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^j_m \end{pmatrix} \tag{A.24}$$

sia v generatore del *kernel* 1-dimensionale della matrice cinetica M ottenuta in (A.11). Esso avrà come possibile espressione[62]

$$v = \left(v^I\right)_{0\le I\le n} = \begin{pmatrix} -1 \\ v^j \end{pmatrix} \qquad v^j \equiv (k^{-1})^{jl} b_l \tag{A.26}$$

---

[59] Data una matrice $A = (a_{rs})_{1\le(r,s)\le m}$ di ordine m, la matrice dei complementi algebrici di A è la matrice $A^c = (a^c_{rs})_{1\le(r,s)\le m}$ ove $a^c_{rs} \equiv (-1)^{r+s}\det(\hat{A}_{sr})$ con $\hat{A}_{rs} = (\hat{a}_{rs})_{1\le(r,s)\le m}$ la matrice di ordine $m-1$ che si ottiene da A cancellando la riga r-esima e la colonna s-esima. Inoltre se la matrice A è invertibile allora $A^c = \det(A)\,A^{-1}$.

[60] Si osservi che da al punto di vista delle dipendenze non c'è alcuna distinzione tra il potenziale V e le sue derivate.

[61] La soluzione ad (A.21) con $a = b = 0$ è banale in quanto la lagrangiana (A.3) del sistema si riduce all'espressione

$$L = \frac{1}{2} k_0 Q^2 + c_i \dot{q}^i Q - V - \lambda(Q - \dot{\phi}) \tag{A.23}$$

non contenente derivate di ordine superiore e dunque ghost di Ostrogradski

[62] Dalla definizione di *kernel* si imponga

$$0 = Mv = \begin{pmatrix} a & b_i \\ b_j & k_{ij} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^0 \\ v^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av^0 + b_i v^i \\ b_j v^0 + k_{ij} v^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_i b_j\,(k^{-1})^{ij} v^0 + b_i v^i \\ b_j v^0 + k_{ij} v^i \end{pmatrix} \tag{A.25}$$

Dalla prima riga si ricava $v^i = -(k^{-1})^{ij} b_j v^0$ che inserita nella seconda restituisce la relazione $b_j - k_{ij}(k^{-1})^{il} b_l = b_j - \delta^l_j b_l = 0$ da cui l'espressione proposta una volta fissato $v^0 = -1$

dove $v^j \equiv (k^{-1})^{jl} b_l$. Proiettando sia lungo v che lungo il vettore $e_{(m)}$ la prima equazione del sistema[63] (A.14), è possibile riscrivere quest'ultimo come

$$\begin{cases} c_l\big(\dot{x}^l + v^l \dot{x}^0\big) + k_0 x^0 + v^j V_j = \lambda \\ k_{mi}\big(\ddot{x}^i + v^i \ddot{x}^0\big) + c_m \dot{x}^0 + V_m = 0 \\ \dot{\lambda} + V_\phi = 0 \\ \dot{\phi} - x^0 = 0 \end{cases} \tag{A.27}$$

Imponendo il vincolo $x^0 = \dot{\phi}$ ed effettuando il cambio di variabile

$$z^i \equiv x^i + v^i \dot{\phi} \tag{A.28}$$

da cui $\dot{z}^i = \dot{x}^i + v^i \ddot{\phi}$, si ottiene da (A.27)

$$\begin{cases} c_l \dot{z}^l + k_0 \dot{\phi} + v^j V_j = \lambda \\ k_{mi} \ddot{z}^i + c_m \ddot{\phi} + V_m = 0 \\ \dot{\lambda} + V_\phi = 0 \end{cases} \tag{A.29}$$

Da (A.29) si derivi la prima equazione[64] e si imponga il vincolo $\dot{\lambda} = -V_\phi$ sulle equazioni così ottenute, ricavando

$$\begin{cases} (k_0 - v^i V_{ij} v^j)\ddot{\phi} + c_i \ddot{z}^i = -v^i V_{ij} \dot{z}^j - v^i V_{\phi i} \dot{\phi} - V_\phi \\ c_m \ddot{\phi} + k_{mi} \ddot{z}^i = -V_m \end{cases} \tag{A.30}$$

Si definisca nello spazio $(n+1)$-dimensionale $\mathcal{I}$ le variabili vettoriali

$$y = \big(y^I\big)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ z^j \end{pmatrix} \qquad h = \big(h_I\big)_{0 \le I \le n} \equiv \begin{pmatrix} -v^i V_{ij} \dot{x}^j - v^i V_{\phi i} \dot{\phi} - V_\phi \\ V_j \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

Introdotta in $\mathcal{I}$ la nuova *Matrice cinematica* K

$$K = \big(K_{IJ}\big)_{0 \le (I,J) \le n} \equiv \begin{pmatrix} k_0 - v^i V_{ij} v^j & c_i \\ c_j & k_{ij} \end{pmatrix} \tag{A.32}$$

il sistema (A.30) è infine riscrivibile come

$$K \ddot{y} = h \tag{A.33}$$

Si osservi che (A.33) è un sistema di equazioni del secondo ordine per la variabile y. Supponendo che la matrice cinematica K sia non degenere, quest'ultimo permette di esprimere $\ddot{y}$ in termini di derivate di ordine inferiore ottenendo, ricordando le dipendenze nelle definizioni (A.31)

$$\ddot{y} = K^{-1} h \left\{ \dot{z}^i, V(\phi, x^i), \phi \right\} = K^{-1} h \left\{ \dot{z}^i, V\left[\phi, x^i(z^i, \dot{\phi})\right], \phi \right\} \equiv j(\phi, z^i, \dot{\phi}, \dot{z}^i) = j(y, \dot{y}) \tag{A.34}$$

che per essere risolto richiede $(n+1) \oplus (n+1) = 2(n+1)$ condizioni in iniziali, rispettivamente per $(y, \dot{y})$, e dunque corrispondenti ad (n+1) gradi di libertà tra i quali, come è evidente, è ora assente il ghost di Ostrogradski. Con procedura del tutto analoga a quanto svolto per la matrice cinetica M si ha che

$$\det(K) = \det(k)\Big[k_0 - v^i V_{ij} v^j - c_i (k^{-1})^{ij} c_j\Big] \equiv \det(k)\,\Delta \tag{A.35}$$

Si noti che se pure la matrice cinematica K è degenere, ossia essendo supposto k invertibile

$$\Delta \equiv k_0 - v^i V_{ij} v^j - c_i (k^{-1})^{ij} c_j = 0 \tag{A.36}$$

è possibile operare una ulteriore riduzione dei gradi di libertà della teoria.

A.4 Cenni di analisi Hamiltoniana

L'ambiente Hamiltoniano è certamente l'ambiente più adatto al conteggio dei gradi di libertà di un sistema fisico e in tal contesto si verificherà la validità dei risultati precedentemente ottenuti in ambito Lagrangiano.

---

[63] Ricordando che v appartiene al *kernel* della matrice cinetica, le proiezioni di $M\ddot{x} - f$ lungo v e $e_{(m)}$ sono rispettivamente

$$0 = v \cdot \big(M\ddot{x} - f\big) = -v \cdot f = -\begin{pmatrix} -1 \\ v^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_l \dot{x}^l + k_0 x^0 - \lambda \\ -c_j \dot{x}^0 - V_j \end{pmatrix} = c_l\big(\dot{x}^l + v^l \dot{x}^0\big) + k_0 x^0 + v^j V_j - \lambda$$

$$0 = e_{(m)} \cdot \big(M\ddot{x} - f\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta^j_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a\ddot{x}^0 + b_l \ddot{x}^l - c_l \dot{x}^l - k_0 x^0 + \lambda \\ b_j \ddot{x}^0 + k_{ji} \ddot{x}^i + c_j \dot{x}^0 + V_j \end{pmatrix} = b_m \ddot{x}^0 + k_{mi} \ddot{x}^i + c_m \dot{x}^0 + V_m = k_{mi}\big(\ddot{x}^i + v^i \ddot{x}^0\big) + c_m \dot{x}^0 + V_m$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato $b_m \ddot{x}^0 = b_r \delta^r_m \ddot{x}^0 = b_r (k^{-1})^{ri} k_{mi} \ddot{x}^0 = v^i k_{mi} \ddot{x}^0$

[64] Vale $\dot{\lambda} = c_l \ddot{z}^l + k_0 \ddot{\phi} + v^j \dot{V}_j = c_l \ddot{z}^l + k_0 \ddot{\phi} + v^j \big(V_{jl} \dot{x}^l + V_{j\phi} \dot{\phi}\big)_{x = z - v\dot{\phi}} = (k_0 - v^i V_{ij} v^j)\ddot{\phi} + c_i \ddot{z}^i + v^i V_{ij} \dot{x}^j + v^i V_{\phi i} \dot{\phi} + V_\phi$

A.4.1 Teoria non degenere

Quando il determinante della matrice cinetica (A.11) è non nullo, è possibile invertire la relazione (A.12) per esprimere le velocità in funzione dei momenti canonici

$$\dot{x} = M^{-1}(\pi - p) \tag{A.37}$$

Dopo aver ottenuto anche la corrispondente relazione trasposta da cui raccogliendo

$$\dot{x}^T = (\pi - p)^T (M^{-1})^T = (\pi - p)^T M^{-1} \tag{A.38}$$

si inseriscano la (A.37) e la (A.38) nell'Hamiltoniana (A.15)

$$\begin{aligned} H &= \left\{ (\pi - p)^T \dot{x} - \frac{1}{2}\dot{x}^T M\, \dot{x} - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + V + \pi_\phi Q \right\}_{\dot{x}(*)} \\ &= (\pi - p)^T M^{-1}(\pi - p) - \frac{1}{2}(\pi - p)^T M^{-1} M\, M^{-1}(\pi - p) - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + V + \pi_\phi Q \\ &= \frac{1}{2}(\pi - p)^T M^{-1}(\pi - p) - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + V + \pi_\phi Q \end{aligned} \tag{A.39}$$

L'Hamiltoniana ottenuta è[65] $H = H(Q, \pi_Q, q^i, \pi_i, \phi, \pi_\phi)$ dipendente dalle $(n) \oplus (1) \oplus (1)$ coppie di variabili canoniche, rispettivamente (q^i, π_i), (Q, π_Q), (ϕ, π_ϕ), dunque corrispondenti ad (n+2) gradi di libertà tra i quali, come è evidente dall'eccesso di un grado di libertà, è presente il ghost di Ostrogradski che si manifesta in (A.39) tramite la patologica dipendenza lineare dal momento coniugato π_ϕ che rende lo spettro del sistema energeticamente illimitato inferiormente.

A.4.2 Teoria degenere

Come al solito ci si concentri sul caso non banale $b_i \neq 0$. Si noti che anche in questo caso non è possibile invertire la (A.12) per utilizzare l'espressione formale (A.15) Dal verificarsi della condizione di degenerazione (A.21) si ha

$$\begin{aligned} 0 &= a\dot{Q} - b_i (k^{-1})^{ij} (b_j \dot{Q}) \\ &= (\pi_Q - b_i \dot{q}^i) - b_i (k^{-1})^{ij} (\pi_j - k_{lj}\dot{q}^l - c_j Q) \\ &= \pi_Q - b_i \dot{q}^i - b_i (k^{-1})^{ij}(\pi_j - c_j Q) + b_i \delta_{il} \dot{q}^l \\ &= \pi_Q - v^i(\pi_i - c_i Q) \end{aligned} \tag{A.40}$$

dove al secondo passaggio $a\dot{Q} = \pi_Q - b_i\dot{q}^i$ ed $b_j\dot{Q} = \pi_j - k_{lj}\dot{q}^l - c_j Q$ dalla manipolazione di (A.6) e dove nell'ultimo passaggio si è introdotta la definizione $v^j \equiv (k^{-1})^{jl} b_l$ fornita da (A.26), da cui il *vincolo primario*

$$\Omega \equiv \pi_Q - v^i(\pi_i - c_i Q) = 0 \tag{A.41}$$

a partire dal quale è possibile definire l'Hamiltoniana vincolata (in H_c la c sta per *costraint*)

$$\begin{aligned} H_c &\equiv \pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i + \pi_\phi \dot{\phi} - L - \mu\Omega \\ &= \pi_Q \dot{Q} + \pi_i \dot{q}^i - \frac{1}{2}a\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}k_0 Q^2 - \frac{1}{2}k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j - b_i \dot{Q}\dot{q}^i + c_i Q \dot{q}^i + \pi_\phi Q + V - \mu\Omega \\ &= \frac{1}{2}\Big\{ \big(2\pi_Q - a\dot{Q} - 2b_i\dot{q}^i\big)\dot{Q} + \big(2\pi_i - k_{ij}\dot{q}^j - 2c_i Q\big)\dot{q}^i \Big\} - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + \pi_\phi Q + V - \mu\Omega \\ &\equiv \frac{1}{2}H_0 - \frac{1}{2}k_0 Q^2 + \pi_\phi Q + V - \mu\Omega \end{aligned} \tag{A.42}$$

dove μ è il moltiplicatore di Lagrange associato all'imposizione del vincolo primario e dove al secondo passaggio si è inserita (A.3). Dalla definizione (A.41) e dal fatto che[66]

$$H_0 \equiv \big(2\pi_Q - a\dot{Q} - 2b_i\dot{q}^i\big)\dot{Q} + \big(2\pi_i - k_{ij}\dot{q}^j - 2c_i Q\big)\dot{q}^i = \pi_i (k^{-1})^{ij}\pi_j + c_i (k^{-1})^{ij} c_j Q^2 - 2c_i (k^{-1})^{ij}\pi_j Q \tag{A.43}$$

---

[65] Si ricordi che $V = V(q^i, \phi)$

[66] A partire dalla sua definizione, uso $a\dot{Q} - \pi_0 0 - b_i\dot{q}^i$ ed $\pi_j - k_{lj}\dot{q}^l - c_j Q = b_j\dot{Q}$ ottenute dalla manipolazione di (A.6) per riscrivere i termini tra parentesi tonde, da cui:

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \big(2\pi_Q - a\dot{Q} - 2b_i\dot{q}^i\big)\dot{Q} + \big(2\pi_i - k_{ij}\dot{q}^j - 2c_i Q\big)\dot{q}^i \\ &= \big(\pi_Q - b_i\dot{q}^i\big)\dot{Q} + \big(\pi_i + b_i\dot{Q} - c_i Q\big)\dot{q}^i \\ &= \pi_Q\dot{Q} + \big(\pi_i - c_i Q\big)\dot{q}^i \\ &= b_i (k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_j Q\big)\dot{Q} + \big(\pi_i - c_i Q\big)(k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_j Q\big) - b_i (k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_j Q\big)\dot{Q} \\ &= \big(\pi_i - c_i Q\big)(k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_j Q\big) \\ &= \pi_i (k^{-1})^{ij}\pi_j + c_i (k^{-1})^{ij} c_j Q^2 - 2c_i (k^{-1})^{ij}\pi_j Q \end{aligned}$$

dove nel terzo passaggio si sono opportunamente raccolti i termini, dove nel quarto passaggio si è utilizzata la relazione

$$\begin{aligned} \pi_Q\dot{Q} &= \big(a\dot{Q} + b_i\dot{q}^i\big)\dot{Q} \\ &= \big[b_i b_j (k^{-1})^{ij}\dot{Q} + b_i (k^{-1})^{ij} k_{jl}\dot{q}^l\big]\dot{Q} \end{aligned}$$

posso riscrivere l'espressione (A.42) come

$$H_c = \frac{1}{2}\pi_i(k^{-1})^{ij}\pi_j - \frac{1}{2}\Big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\Big\}Q^2 + \Big\{\pi_\phi - c_i(k^{-1})^{ij}\pi_j - \mu v^i c_i\Big\}Q - \mu\pi_Q + \mu v^i\pi_i + V$$

Si noti che poiché $\Omega = 0$ segue l'invarianza di Ω sotto evoluzione temporale

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\Omega} \\ &= \big\{\Omega, H_c\big\} \\ &= \left(\frac{\partial\Omega}{\partial Q}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_Q} - \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_Q}\frac{\partial H_c}{\partial Q}\right) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial q^i}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_i} - \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_i}\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\phi}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_\phi} - \frac{\partial\Omega}{\partial\pi_\phi}\frac{\partial H_c}{\partial\phi}\right) \\ &= \big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\big\}Q - \pi_\phi + c_i(k^{-1})^{ij}\pi_j + v^iV_i \end{aligned} \tag{A.44}$$

da cui la definizione del *vincolo secondario*

$$\Psi \equiv \big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\big\}Q - \pi_\phi + c_i(k^{-1})^{ij}\pi_j + v^iV_i = 0 \tag{A.45}$$

che a sua volta, previo medesimo meccanismo

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\Psi} \\ &= \big\{\Psi, H_c\big\} \\ &= \left(\frac{\partial\Psi}{\partial Q}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_Q} - \frac{\partial\Psi}{\partial\pi_Q}\frac{\partial H_c}{\partial Q}\right) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial q^i}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_i} - \frac{\partial\Psi}{\partial\pi_i}\frac{\partial H_c}{\partial q^i}\right) + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial\phi}\frac{\partial H_c}{\partial\pi_\phi} - \frac{\partial\Psi}{\partial\pi_\phi}\frac{\partial H_c}{\partial\phi}\right) \\ &= \mu\left\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j - v^iV_{ij}v^j\right\} \end{aligned} \tag{A.46}$$

definisce il *vincolo terziario*

$$\mu\,\Delta = 0 \tag{A.47}$$

dove Δ ha la medesima espressione di (A.36). Nel caso in cui $\Delta \neq 0$ (in ambito Lagrangiano si è visto che tale richiesta corrisponde ad una matrice cinematica (A.32) non degenere), il vincolo (A.47) impone $\mu = 0$ e non sarà più possibile definire altri vincoli a partire da esso sancendo la fine dell'analisi e la possibilità di definire l'Hamiltoniana fisica $H_{phys} \equiv H_c\big|_{(\Psi,\mu)=0}$ a partire da (A.44)

$$\begin{aligned} H_{phys} &\equiv \left[\frac{1}{2}\pi_i(k^{-1})^{ij}\pi_j - \frac{1}{2}\Big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\Big\}Q^2 + \Big\{\pi_\phi - c_i(k^{-1})^{ij}\pi_j - \mu v^i c_i\Big\}Q - \mu\pi_Q + \mu v^i\pi_i + V\right]_{(\Psi,\mu)=0} \\ &= \left[\frac{1}{2}\pi_i(k^{-1})^{ij}\pi_j - \frac{1}{2}\Big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\Big\}Q^2 + \Big\{\pi_\phi - c_i(k^{-1})^{ij}\pi_j\Big\}Q + V\right]_{\Psi=0} \\ &= \frac{1}{2}\pi_i(k^{-1})^{ij}\pi_j + \frac{1}{2}\Big\{k_0 - c_i(k^{-1})^{ij}c_j\Big\}Q^2 + v^iV_i + V \end{aligned} \tag{A.48}$$

L'Hamiltoniana fisica ottenuta è[67] $H_{phys} = H_{phys}(Q, \phi, q^i, \pi_i)$ dipendente dalle $(n) \oplus (1)$ coppie di variabili canoiche, rispettivamente (q^i, π_i), (Q, ϕ), dunque corrispondenti ad (n+1) gradi di libertà tra i quali, come è evidente, è ora assenta il ghost di Ostrogradski. In H_{phys} è inoltre scomparsa la patologica dipendenza lineare dal momento coniugato π_ϕ che rende lo spettro del sistema energeticamente illimitato inferiormente.

$$\begin{aligned} &= b_i(k^{-1})^{ij}\big(b_j\dot{Q} + k_{jl}\dot{q}^l\big)\dot{Q} \\ &= b_i(k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_jQ\big)\dot{Q} \end{aligned}$$

assieme all'espressione

$$\begin{aligned} (\pi_i - c_iQ)\dot{q}^i &= (\pi_i - c_iQ)\big\{(k^{-1})^{ij}\big[(\pi_j - c_jQ) - b_j\dot{Q}\big]\big\} \\ &= (\pi_i - c_iQ)(k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_jQ\big) - b_i(k^{-1})^{ij}\big(\pi_j - c_jQ\big)\dot{Q} \end{aligned}$$

Nella relazione per $\pi_Q\dot{Q}$ si è impiegata l'espressione (A.21) assieme ad $\delta^i_l = (k^{-1})^{ij}k_{jl}$ nel secondo passaggio mentre nella relazione per $\big(\pi_i - c_iQ\big)\dot{q}^i$ si invertita la relazione $\pi_j - k_{lj}\dot{q}^l - c_jQ = b_j\dot{Q}$, ottenuta dalla manipolazione di (A.6), in funzione di $\dot{q}^i$

[67] Si ricordi che $V = V(q^i, \phi)$

B Delucidazioni su alcuni risultati intermedi impiegati per il calcolo della matrice cinetica $\mathcal{M}_q$

La presente Appendice si occuperà della deduzione esplicita di alcuni dei risultati intermedi utilizzati nella Sezione "Teorie scalari-tensoriali quadratiche di ordine superiore" per ottenere l'espressione della matrice cinetica associata alla teoria (2.9). Nei termini della notazione astratta introdotta nell'ambito del formalismo ADM(3+1) covariante, la sottosezione (B.1) si occuperà di valutare le rappresentazioni di alcune significative contrazioni del tensore $C^{ab,cd}$ che introdotte nella (2.65) permetteranno alla sottosezione (B.2) di esporre la metodologia di calcolo utilizzata per ottenere il risultato (2.66). Infine la sottosezione (B.3) fornirà espressione esplicita delle componenti presenti nella matrice cinetica $\mathcal{M}_q$

B.1 Fondamentali contrazioni tra $C^{ab,cd}$ ed n_a

Nei termini della notazione astratta introdotta nell'ambito del formalismo ADM(3+1) covariante si consideri il tensore $C^{ab,cd}$ definito in (2.14) ed il vettore unitario n_a normalizzato secondo (2.31). Le fondamentali contrazioni da 4 a 0 indici tra $C^{ab,cd}$ ed n_a consistenti con le simmetrie di indici (2.13) e significative per il calcolo dei coefficienti cinetici (2.65) associati al contributo scalare della teoria (2.9) alla matrice cinetica $\mathcal{M}_q$ hanno espressioni

$$\begin{aligned} C^{abcd}n_an_bn_cn_d = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^cn^bn^dn_an_bn_cn_d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^dn^bn^cn_an_bn_cn_d + \alpha_2 n^an^bn^cn^dn_an_bn_cn_d - \\ & \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn^cn^dn_an_bn_cn_d - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^dn^an^bn_an_bn_cn_d - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^cn^bn^dn_an_bn_cn_d - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^cn^an^dn_an_bn_cn_d - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn^bn^cn_an_bn_cn_d - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn^an^cn_an_bn_cn_d + \alpha_5 A^aA^bA^cA^dn_an_bn_cn_d \\ = {} & \alpha_1 + \alpha_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^dn_cn_d - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^cn_an_c - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^cn_bn_c - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn_an_d - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn_bn_d + \alpha_5 A^aA^bA^cA^dn_an_bn_cn_d \\ = {} & \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 A_*A_* - \alpha_4 A_*A_* + \alpha_5 A_*A_*A_*A_* \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned} C^{abed}n_an_bn_e = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^en^bn^dn_an_bn_e + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^dn^bn^en_an_bn_e + \alpha_2 n^an^bn^en^dn_an_bn_e - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn^en^dn_an_bn_e - \\ & \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^dn^an^bn_an_bn_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^en^bn^dn_an_bn_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^en^an^dn_an_bn_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn^bn^en_an_bn_e - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn^an^en_an_bn_e + \alpha_5 A^aA^bA^eA^dn_an_bn_e \\ = {} & -\alpha_1\, n^d - \alpha_2 n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn^dn_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^dn_e + \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^en^dn_an_e + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^en^dn_bn_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn_a - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn_b + \alpha_5 A^aA^bA^eA^dn_an_bn_e \\ = {} & -\alpha_1\, n^d - \alpha_2 n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A_*n^d - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A^d + \tfrac{1}{2}\alpha_4 A_*A_*n^d - \tfrac{1}{2}\alpha_4 A_*A^d + \alpha_5 A_*A_*A_*A^d \end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} C^{abcd}n_an_b = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^cn^bn^dn_an_b + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^an^dn^bn^cn_an_b - \alpha_2 n^an^bh^{cd}n_an_b + \alpha_2 n^an^bn^cn^dn_an_b + \\ & \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bh^{cd}n_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn^cn^dn_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^dn^an^bn_an_b - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^cn^bn^dn_an_b - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^cn^an^dn_an_b - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn^bn^cn_an_b - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn^an^cn_an_b + \alpha_5 A^aA^bA^cA^dn_an_b \\ = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^cn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^dn^c - \alpha_2 h^{cd} + \alpha_2 n^cn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bh^{cd}n_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^aA^bn^cn^dn_an_b - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^d + \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^cn^dn_a + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^cn^dn_b + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^aA^dn^cn_a + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn^cn_b + \alpha_5 A^aA^bA^cA^dn_an_b \\ = {} & \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^cn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^dn^c - \alpha_2 h^{cd} + \alpha_2 n^cn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A_*h^{cd} - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A_*n^cn^d - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^d + \tfrac{1}{2}\alpha_4 A_*A^cn^d + \\ & \tfrac{1}{2}\alpha_4 A_*A^dn^c + \alpha_5 A_*A_*A^cA^d \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned} C^{ebfd}n_en_f = {} & -\tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^fh^{bd}n_en_f + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^fn^bn^dn_en_f + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^dn^bn^fn_en_f + \alpha_2 n^en^bn^fn^dn_en_f - \\ & \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^bn^fn^dn_en_f - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^fA^dn^en^bn_en_f + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^fh^{bd}n_en_f - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^fn^bn^dn_en_f - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^fn^en^dn_en_f - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^dn^bn^fn_en_f - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^dn^en^fn_en_f + \alpha_5 A^eA^bA^fA^dn_en_f \\ = {} & -\tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{bd} + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^bn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^dn^b + \alpha_2 n^bn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^bn^dn_e + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^fA^dn^bn_f + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^fh^{bd}n_en_f - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^fn^bn^dn_en_f + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^fn^dn_f + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^dn^bn_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^d + \alpha_5 A^eA^bA^fA^dn_en_f \\ = {} & -\tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{bd} + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^bn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^dn^b + \alpha_2 n^bn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A^bn^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*A^dn^b + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_*A_*h^{bd} - \\ & \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_*A_*n^bn^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA_*n^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_*A^dn^b - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^bA^d + \alpha_5 A_*A^bA_*A^d \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} C^{ebcd}n_e = {} & -\tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^ch^{bd}n_e + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^cn^bn^dn_e - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^dh^{bc}n_e + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^en^dn^bn^cn_e - \alpha_2 n^en^bh^{cd}n_e + \\ & \alpha_2 n^en^bn^cn^dn_e + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^bh^{cd}n_e - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^eA^bn^cn^dn_e - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^cA^dn^en^bn_e + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^eA^ch^{bd}n_e - \end{aligned} \tag{B.5}$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^c n^b n^d n_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^c n^e n^d n_e + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^d h^{bc} n_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^d n^b n^c n_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^d n^e n^c n_e + \alpha_5 A^e A^b A^c A^d n_e\\
&= \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^c h^{bd} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^c n^b n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^d h^{bc} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^d n^b n^c + \alpha_2 n^b h^{cd} - \alpha_2 n^b n^c n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^e A^b h^{cd} n_e - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^e A^b n^c n^d n_e +\\
&\tfrac{1}{2}\alpha_3 A^c A^d n^b + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^c h^{bd} n_e - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^c n^b n^d n_e + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^c n^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^d h^{bc} n_e -\\
&\tfrac{1}{4}\alpha_4 A^e A^d n^b n^c n_e + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^d n^c + \alpha_5 A^e A^b A^c A^d n_e\\
&= \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^c h^{bd} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^c n^b n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^d h^{bc} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^d n^b n^c + \alpha_2 n^b h^{cd} - \alpha_2 n^b n^c n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_* A^b h^{cd} -\\
&\tfrac{1}{2}\alpha_3 A_* A^b n^c n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^c A^d n^b + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_* A^c h^{bd} - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_* A^c n^b n^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^c n^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_* A^d h^{bc} -\\
&\tfrac{1}{4}\alpha_4 A_* A^d n^b n^c + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^d n^c + \alpha_5 A_* A^b A^c A^d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^{abcd} &= \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ac} h^{bd} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ac} n^b n^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^a n^c h^{bd} + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^a n^c n^b n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ad} h^{bc} - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ad} n^b n^c - \tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^a n^d h^{bc} +\\
&\tfrac{1}{2}\alpha_1\, n^a n^d n^b n^c + \alpha_2 h^{ab} h^{cd} - \alpha_2 h^{ab} n^c n^d - \alpha_2 n^a n^b h^{cd} + \alpha_2 n^a n^b n^c n^d + \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^a A^b h^{cd} - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^a A^b n^c n^d +\\
&\tfrac{1}{2}\alpha_3 A^c A^d h^{ab} - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A^c A^d n^a n^b + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^a A^c h^{bd} - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^a A^c n^b n^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^c h^{ad} - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^c n^a n^d +\\
&\tfrac{1}{4}\alpha_4 A^a A^d h^{bc} - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^a A^d n^b n^c + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^d h^{ac} - \tfrac{1}{4}\alpha_4 A^b A^d n^a n^c + \alpha_5 A^a A^b A^c A^d
\end{aligned} \tag{B.6}
$$

Dopo aver sostituito $C^{ab,cd}$ con la parametrizzazione (2.14) in cui ${}^{(4)}\nabla_a \phi = A_a$, la prima riga delle suddette espressioni è stata ottenuta eliminando la metrica g_{ab} presente nella parametrizzazione (2.14) tramite la relazione (2.32) $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$. Nel secondo passaggio di ogni svolgimento si è imposta la relazione (2.42) $h^{ab} n_a = 0$ e la normalizzazione (2.31) $n^a n_a = -1$ mentre nel terzo passaggio si è sfruttata la definizione della componente di tipo tempo (2.35) $A^b n_b = A_*$ con successivo riordino dei termini ottenuti.

B.2 Rappresentazione dei coefficienti cinetici $\mathcal{A}_{(\phi)}, \mathcal{B}^{cd}_{(\phi)}, \mathcal{K}^{ab,cd}_{(\phi)}$

Si considerino le contrazioni (B.1)-(B.6) ottenute in nella sottosezione (B.1) e le si inseriscano nella densità di Lagrangiana cinetica associata ai contributi scalari (2.64) al fine di individuare le definizioni dei coefficienti cinetici associati al contributo scalare (2.65). In particolare il settore scalare con tal sostituzione

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{(\phi)} \dot{A}_*^2 &= \Big\{ \tfrac{1}{N^2} C^{ab,cd} n_a n_b n_c n_d \Big\} \dot{A}_*^2\\
&= \Big\{ \alpha_1 \tfrac{1}{N^2} + \alpha_2 \tfrac{1}{N^2} - \alpha_3 \tfrac{1}{N^2} A_*^2 - \alpha_4 \tfrac{1}{N^2} A_*^2 + \alpha_5 \tfrac{1}{N^2} A_*^4 \Big\} A_*^2\\
&= \Big\{ \tfrac{1}{N^2} \Big[\alpha_1 + \alpha_2 - \big(\alpha_3 + \alpha_4\big) A_*^2 + \alpha_5 A_*^4 \Big] \Big\} A_*^2
\end{aligned} \tag{B.7}
$$

espone l'espressione per *coefficiente cinetico del settore scalare*

$$
\mathcal{A}_{(\phi)} = \tfrac{1}{N^2} \big[\alpha_1 + \alpha_2 - \big(\alpha_3 + \alpha_4\big) A_*^2 + \alpha_5 A_*^4 \big] \tag{B.8}
$$

Valutando analogamente il settore di mixing, con un opportuno riordinamento e riassorbimento dei termini ottenuti

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{cd}_{(\phi)} \dot{A}_* K_{cd} &= \Big\{ -\tfrac{1}{N} C^{ab,cd} A_* n_a n_b + \tfrac{1}{N} \Big[C^{ab,ed} \hat{A}^c + C^{ab,ce} \hat{A}^d \Big] n_a n_b n_e \Big\} \dot{A}_* K_{cd}\\
&= \Big\{ \tfrac{1}{N} A_* \alpha_2 h^{cd} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} A_*^3 \alpha_3 h^{cd} + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} A_* \alpha_3 \hat{A}^c \hat{A}^d - \tfrac{1}{N} A_*^3 \alpha_5 \hat{A}^c \hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} \alpha_3 A_* \hat{A}^d \hat{A}^c -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} \alpha_4 A_* \hat{A}^d \hat{A}^c + \tfrac{1}{N} \alpha_5 A_*^3 \hat{A}^d \hat{A}^c - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} \alpha_3 \hat{A}^c A_* \hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N} \alpha_4 A_* \hat{A}^c \hat{A}^d + \tfrac{1}{N} \alpha_5 A_*^3 \hat{A}^c \hat{A}^d \Big\} \dot{A}_* K_{cd}\\
&= \Big\{ \alpha_2 \tfrac{1}{N} h^{cd} A_* - \tfrac{1}{2}\alpha_3 \tfrac{1}{N} h^{cd} A_*^3 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 \tfrac{1}{N} A_* \hat{A}^c \hat{A}^d + \alpha_5 \tfrac{1}{N} A_*^3 \hat{A}^c \hat{A}^d - \alpha_4 \tfrac{1}{N} A_* \hat{A}^c \hat{A}^d \Big\} \dot{A}_* K_{cd}
\end{aligned} \tag{B.9}
$$

è non è difficile riconoscere l'espressione per il *coefficiente cinetico del settore mixing*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}^{cd}_{(\phi)} &= \alpha_2 \tfrac{1}{N} h^{cd} A_* - \tfrac{1}{2}\alpha_3 \tfrac{1}{N} h^{cd} A_*^3 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 \tfrac{1}{N} A_* \hat{A}^c \hat{A}^d + \alpha_5 \tfrac{1}{N} A_*^3 \hat{A}^c \hat{A}^d - \alpha_4 \tfrac{1}{N} A_* \hat{A}^c \hat{A}^d\\
&= \big[\tfrac{A_*}{2N} \big(2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2\big) \big] h^{cd} + \big[-\tfrac{A_*}{2N} \big(\alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 A_*^2\big) \big] \hat{A}^c \hat{A}^d\\
&\equiv \beta^1_{(\phi)} h^{cd} + \beta^2_{(\phi)} \hat{A}^c \hat{A}^d
\end{aligned} \tag{B.10}
$$

parametrizzato dalle funzioni definite nelle parentesi quadre

$$
\begin{aligned}
\beta^1_{(\phi)} &\equiv \tfrac{A_*}{2N} \big(2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2\big)\\
\beta^2_{(\phi)} &\equiv -\tfrac{A_*}{2N} \big(\alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5 A_*^2\big)
\end{aligned} \tag{B.11}
$$

Essendo maggiore il numero di oggetti coinvolti nelle contrazioni, la computazione delle espressioni (B.1)-(B.6) nel settore metrico della (2.64) risulta notevolmente più lunga e difficile dei casi precedenti. Tuttavia si è ottenuto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}^{ab,cd}_{(\phi)} K_{ab} K_{cd} &= \Big\{ C^{ab,cd} A_*^2 - 2\Big[C^{eb,cd} \hat{A}^a + C^{ae,cd} \hat{A}^b \Big] A_* n_e + \Big[C^{eb,fd} \hat{A}^a \hat{A}^c + 2C^{eb,cf} \hat{A}^a \hat{A}^d + C^{ae,cf} \hat{A}^b \hat{A}^d \Big] n_e n_f \Big\} K_{ab} K_{cd}\\
&= \Big\{ \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ac} h^{bd} A_*^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1\, h^{ad} h^{bc} A_*^2 + \alpha_2 h^{ab} h^{cd} A_*^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3 \hat{A}^a \hat{A}^b h^{cd} A_*^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_3 \hat{A}^c \hat{A}^d h^{ab} A_*^2 +\\
&\quad \tfrac{1}{4}\alpha_4 \hat{A}^a \hat{A}^c h^{bd} A_*^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_4 \hat{A}^b \hat{A}^c h^{ad} A_*^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_4 \hat{A}^a \hat{A}^d h^{bc} A_*^2 + \tfrac{1}{4}\alpha_4 \hat{A}^b \hat{A}^d h^{ac} A_*^2 + \alpha_5 \hat{A}^a \hat{A}^b \hat{A}^c \hat{A}^d A_*^2 -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3\hat{A}^b h^{cd}\hat{A}^a A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_4 A\hat{A}^c h^{bd}\hat{A}^a A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_4\hat{A}^d h^{bc}\hat{A}^a A_*^2 - 2\alpha_5\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d\hat{A}^a A_*^2 - \alpha_3\hat{A}^a h^{cd}\hat{A}^b A_*^2 - \\
&\tfrac{1}{2}\alpha_4\hat{A}^c h^{ad}\hat{A}^b A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_4\hat{A}^d h^{ac}\hat{A}^b A_*^2 - 2\alpha_5\hat{A}^a\hat{A}^c\hat{A}^d\hat{A}^b A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{bd}\hat{A}^a\hat{A}^c + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_*^2 h^{bd}\hat{A}^a\hat{A}^c - \\
&\tfrac{1}{4}\alpha_4\hat{A}^b\hat{A}^d\hat{A}^a\hat{A}^c + \alpha_5 A_*\hat{A}^b A_*\hat{A}^d\hat{A}^a\hat{A}^c - \alpha_1 h^{bc}\hat{A}^a\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_4\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^a\hat{A}^d + \tfrac{1}{2}\alpha_4 A_*^2 h^{bc}\hat{A}^a\hat{A}^d + \\
&2\alpha_5\hat{A}^b\hat{A}^c A_*^2\hat{A}^a\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ac}\hat{A}^b\hat{A}^d - \tfrac{1}{4}\alpha_4\hat{A}^a\hat{A}^c\hat{A}^b\hat{A}^d + \tfrac{1}{4}\alpha_4 A_*^2 h^{ac}\hat{A}^b\hat{A}^d + \alpha_5\hat{A}^a\hat{A}^c A_*^2\hat{A}^b\hat{A}^d\Big\} K_{ab}K_{cd} \\
=\Big\{ &\tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ac}h^{bd}A_*^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ad}h^{bc}A_*^2 + \alpha_2 h^{ab}h^{cd}A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 h^{ab}A_*^2\hat{A}^c\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_3 h^{cd}A_*^2\hat{A}^a\hat{A}^b + \\
&\alpha_5 A_*^2\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{bd}\hat{A}^a\hat{A}^c - \alpha_4\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d - \alpha_1 h^{bc}\hat{A}^a\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ac}\hat{A}^b\hat{A}^d\Big\} K_{ab}K_{cd}
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

dove nel secondo passaggio, oltre alla sostituzione delle relazioni (B.1)-(B.6) si è fatto uso della (2.45) per cui $A^a n_a = A_*$ ed $\hat{A}^a K_{ab} = A^a K_{ab}$. Nel terzo ed ultimo passaggio si sono sfruttate le simmetrie indotte dalla contrazione con il prodotto $K_{ab}K_{cd}$ per riordinare e riassorbire numerosi i numerosi termini che, raccolti nelle parentesi graffe, espongono l'espressione del *coefficiente cinetico del settore metrico*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}^{ab,cd}_{(\phi)} &= \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ac}h^{bd}A_*^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ad}h^{bc}A_*^2 + \alpha_2 h^{ab}h^{cd}A_*^2 - \tfrac{1}{2}\alpha_3 h^{ab}A_*^2\hat{A}^c\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_3 h^{cd}A_*^2\hat{A}^a\hat{A}^b + \\
&\quad \alpha_5 A_*^2\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{bd}\hat{A}^a\hat{A}^c - \alpha_4\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d - \alpha_1 h^{bc}\hat{A}^a\hat{A}^d - \tfrac{1}{2}\alpha_1 h^{ac}\hat{A}^b\hat{A}^d \\
&= \tfrac{1}{2}\alpha_1 A_*\big(h^{ac}h^{db} + h^{ad}h^{cb}\big) + \alpha_2 A_*^2 h^{ab}h^{cd} - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*^2\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) - \\
&\quad \tfrac{1}{2}\alpha_1\big[\big(h^{bd}\hat{A}^c\hat{A}^a + h^{bc}\hat{A}^d\hat{A}^a\big) + \big(h^{ca}\hat{A}^b\hat{A}^d + h^{cb}\hat{A}^a\hat{A}^d\big)\big] + \big(\alpha_5 A_*^2 - \alpha_4\big)\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d \\
&= \alpha_1 A_*^2 h^{a(c}h^{d)b} + \alpha_2 A_*^2 h^{ab}h^{cd} - \tfrac{1}{2}\alpha_3 A_*^2\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) - \\
&\quad \alpha_1\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big] + \big(\alpha_5 A_*^2 - \alpha_4\big)\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d \\
&\equiv \kappa^1_{(\phi)}h^{a(c}h^{d)b} + \kappa^2_{(\phi)}h^{ab}h^{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa^3_{(\phi)}\big(h^{cd}\hat{A}^a\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big) + \tfrac{1}{2}\kappa^4_{(\phi)}\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big] + \kappa^5_{(\phi)}\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d
\end{aligned}
\tag{B.13}
$$

che, dopo opportune manipolazioni sugli indici in base alle possibili simmetrie con cui compaiono le strutture in $\hat{A}^a$ ed h^{ab}, risulta parametrizzato dalle quantità

$$
\begin{aligned}
&\kappa^1_{(\phi)} \equiv \alpha_1 A_*^2 && \kappa^2_{(\phi)} \equiv \alpha_2 A_*^2 \\
&\kappa^3_{(\phi)} \equiv -\alpha_3 A_*^2 && \kappa^4_{(\phi)} \equiv -2\alpha_1 \\
&\kappa^5_{(\phi)} \equiv \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

funzioni delle arbitrarie $\alpha_1, ..., \alpha_5$ introdotte in (2.14).

B.3 Rappresentazione della matrice cinetica

La presente unità si occuperà dell'illustrare la metodologia di calcolo adottata per ottenere la rappresentazione matriciale di $\mathscr{B}$ ed $\mathscr{K}$ proposte nelle definizioni (2.92). Non verranno svolti i calcoli per tutti i coefficienti: considereremo esemplificativamente la procedura per calcolare la componente $\mathscr{K}^{3,3}$ e tutte saranno ottenibili in maniera analoga. Dunque ricordando le definizioni (2.89) ed inserendo l'espressione (2.84) nella (2.92) si ha

$$
\mathscr{K}^{3,3} = U^3_{ab}\,\mathcal{K}^{ab,cd}\,U^3_{cd} \tag{B.15}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \kappa^1 U^3_{ab}\,h^{a(c}h^{d)b}\,U^3_{cd} + \kappa^2 U^3_{ab}\,h^{ab}h^{cd}\,U^3_{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa^3 U^3_{ab}\,\big(h^{cd}U^3_{ab}\hat{A}^b + h^{ab}\hat{A}^c\hat{A}^d\big)\,U^3_{cd} \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\kappa^4 U^3_{ab}\,\big[h^{b(c}\hat{A}^{d)}\hat{A}^a + h^{c(a}\hat{A}^{b)}\hat{A}^d\big]\,U^3_{cd} + \kappa^5 U^3_{ab}\,\hat{A}^a\hat{A}^b\hat{A}^c\hat{A}^d\,U^3_{cd} \\
&= \kappa^1 U^3_{ab}\,h^{a(c}h^{d)b}\,U^3_{cd} + \kappa^2 U^3_{ab}\,h^{ab}h^{cd}\,U^3_{cd} \\
&= \tfrac{1}{2}\kappa^1 U^3_{ab}h^{ac}h^{db}U^3_{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa^1 U^3_{ab}h^{ad}h^{cb}U^3_{cd} + \kappa^2 U^3_{ab}\,h^{ab}h^{cd}\,U^3_{cd} \\
&= \tfrac{1}{2}\kappa^1 (U^3)^{cd}U^3_{cd} + \tfrac{1}{2}\kappa^1 (U^3)^{dc}(U^3)_{cd} + \kappa^2 (U^3)_a{}^a (U^3)_b{}^b \\
&= \kappa^1 (U^3)^{cd}U^3_{cd} + \kappa^2 (U^3)_a{}^a (U^3)_b{}^b \\
&= \kappa^1
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

dove nel terzo passaggio si è usata la relazione[68] $U^3_{ab}\hat{A} = 0$ e dove nel penultimo passaggio si sono utilizzate $(U^3)^{cd}U^3_{cd} = 1$ ed $(U^3)_a{}^a = 0$. Analogamente, sebbene i calcoli risultino tuttavia più semplici, inserendo l'espressione (2.83) nella (2.92) si ha si ottiene infine

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}^1 &= \mathcal{B}^{ab}U^1_{ab} = \big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2\hat{A}^2 z^a z^b\big)z_a z_b = \beta^1 + \hat{A}^2\beta^2 \\
\mathscr{B}^2 &= \mathcal{B}^{ab}U^2_{ab} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2\hat{A}^2 z^a z^b\big)\big(h_{ab} - z_a z_b\big) = \sqrt{2}\beta^1 \\
\mathscr{B}^3 &= \mathcal{B}^{ab}U^3_{ab} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2\hat{A}^2 z^a z^b\big)\big(u_a u_b - v_a v_b\big) = 0
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

---

[68] Dalle definizioni (2.89) e sfruttando l'ortonormalità tra $u^a, v^a, z^a \equiv \frac{\hat{A}^a}{||\hat{A}||}$ si ha:

$$
U^3_{ab}\hat{A} = ||A||U^3_{ab}z^a = \tfrac{1}{\sqrt{2}}||A||\big(u_a u_b - v_a v_b\big)z^a = 0 \tag{B.17}
$$

$$\mathscr{B}^4 = \mathcal{B}^{ab}U^4_{ab} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2 \hat{A}^2 z^a z^b\big)\big(u_a v_b + u_b v_a\big) = 0$$
$$\mathscr{B}^5 = \mathcal{B}^{ab}U^5_{ab} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2 \hat{A}^2 z^a z^b\big)\big(u_a z_b + u_b z_a\big) = 0$$
$$\mathscr{B}^6 = \mathcal{B}^{ab}U^6_{ab} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\beta^1 h^{ab} + \beta^2 \hat{A}^2 z^a z^b\big)\big(v_a z_b + v_b z_a\big) = 0$$

con $\hat{A}^a\hat{A}^b = ||\hat{A}||z^a||\hat{A}||z^b = \hat{A}^2 z^a z^b$ ed $h^a_a = 3$. In particolare, organizzando le componenti ottenute in termini matriciali, esse hanno espressione esplicita

$$\mathscr{K} = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix} \qquad \mathscr{B} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

dove si sono definiti i parametri

$$\begin{cases} a \equiv \kappa^1 + \kappa^2 + \hat{A}^2(\kappa^3 + \kappa^4) + (\hat{A}^2)^2\kappa^5 \\ b = \kappa^1 + 2\kappa^2 \\ c = \sqrt{2}(\kappa^2 + \frac{1}{2}\hat{A}^2\kappa^3) \\ d = \kappa^1 \\ e = \kappa^1 + \frac{1}{2}\hat{A}^2\kappa^4 \end{cases} \tag{B.20}$$

$$\begin{cases} m = \beta^1 + \hat{A}^2\beta^2 \\ n = \sqrt{2}\beta^1 \end{cases}$$

Segue dunque che la rappresentazione della matrice cinetica sarà

$$\mathcal{M}_q = \left(\begin{array}{c|cccccc} \mathcal{A} & m & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline m & a & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & c & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{array}\right) \tag{B.21}$$

C Delucidazioni su alcuni risultati intermedi impiegati per il calcolo delle equazioni di campo

Al fine di ricavare esplicitamente le equazioni di campo scalari e tensoriali deducibili da (4.1), l'unità C.1 si occuperà di ottenere le espressioni delle variazioni associate alle singole densità di Lagrangiana (4.7), in particolare $\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_\mu$, $\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_{\mu\nu}$ ed $\delta\mathcal{L}_I/\delta g^{\mu\nu}$. Sempre nella medesima unità si otterranno anche le espressioni delle derivate covarianti $\nabla_\nu(\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_\nu)$ ed $\nabla_\mu(\delta\mathcal{L}_I/\delta\phi_{\nu\rho})$. Tali risultati verranno poi computati nella sottosezione C.2 per ottenere le espressioni esplicite dei tensori Π^μ_I e Σ^μ_I definiti in (4.23) e nell'unità C.3 per ottenere, a partire dalle definizioni (4.29) ed (4.30) di $\alpha^I_{\mu\nu}$ e $\beta^I_{\mu\nu}$, le espressioni esplicite dei tensori $\Delta^I_{\mu\nu}$ e $\Xi^I_{\mu\nu}$ definiti in (4.33). Infine la sottosezione C.4 esporrà il valore dei parametri liberi di classe $\zeta^{\mathscr{C}}_I$ ed $\zeta^{\mathscr{C}}_{I,X}$.

C.1 Variazione delle Lagrangiane $\mathcal{L}_I$ e corrispondenti derivate covarianti

Si intende ottenere le espressioni associate alla variazione delle singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$ (4.7) operata rispetto al campo $\phi_\mu = \nabla_\mu\phi$. Osservando che

$$\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu = 0 \qquad \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu = 0 \tag{C.1}$$

le rimanenti variazioni avranno espressione

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu &= g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}(\delta\phi_\pi)\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda + g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}(\delta\phi_\lambda)\\ &= \big(g^{\nu\rho}g^{\sigma\mu}g^{\alpha\beta}\phi_\beta\phi_{\nu\rho}\phi_{\sigma\alpha} + g^{\nu\rho}g^{\sigma\alpha}g^{\beta\mu}\phi_\alpha\phi_{\nu\rho}\phi_{\sigma\beta}\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(\phi_\beta\phi^\rho{}_\rho\phi^{\mu\beta} + \phi_\alpha\phi^\rho{}_\rho\phi^{\alpha\mu}\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(2\,\phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho\big)\delta\phi_\mu\end{aligned} \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu &= g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}(\delta\phi_\sigma)\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho + g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}(\delta\phi_\rho)\\ &= \big(g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_{\nu\rho}\phi_{\sigma\beta} + g^{\nu\rho}g^{\sigma\alpha}g^{\mu\beta}\phi_\rho\phi_{\nu\sigma}\phi_{\alpha\beta}\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(\phi^\beta\phi^{\mu\sigma}\phi_{\sigma\beta} + \phi_\rho\phi^{\rho\alpha}\phi_\alpha{}^\mu\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(2\phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho}\big)\delta\phi_\mu\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_\mu}\delta\phi_\mu &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}(\delta\phi_\alpha)\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}(\delta\phi_\beta)\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu +\\ &\quad g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta(\delta\phi_\mu)\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}(\delta\phi_\nu)\\ &= \big(g^{\nu\rho}g^{\sigma\mu}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\rho\phi_\beta\phi_\lambda\phi_{\sigma\nu}\phi_{\alpha\gamma} + g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\sigma\phi_\beta\phi_\lambda\phi_{\rho\nu}\phi_{\alpha\gamma} +\\ &\quad g^{\nu\rho}g^{\sigma\alpha}g^{\beta\mu}g^{\gamma\lambda}\phi_\alpha\phi_\rho\phi_\lambda\phi_{\sigma\nu}\phi_{\beta\gamma} + g^{\nu\rho}g^{\sigma\alpha}g^{\beta\gamma}g^{\lambda\mu}\phi_\alpha\phi_\rho\phi_\gamma\phi_{\sigma\nu}\phi_{\beta\lambda}\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(\phi_\rho\phi_\beta\phi_\lambda\phi^{\mu\rho}\phi^{\beta\lambda} + \phi_\sigma\phi_\beta\phi_\lambda\phi^{\sigma\mu}\phi^{\beta\lambda} + \phi_\alpha\phi_\rho\phi_\lambda\phi^{\alpha\rho}\phi^{\mu\lambda} + \phi_\alpha\phi_\rho\phi_\gamma\phi^{\alpha\rho}\phi^{\gamma\mu}\big)\delta\phi_\mu\\ &= \big(4\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma}\big)\delta\phi_\mu\end{aligned} \tag{C.4}$$

dove in tutti gli svolgimenti nel penultimo passaggio si è eliminata la presenza del tensore metrico sfruttando le contrazioni con esso delle derivate in ϕ per alzarne o abbassarne e gli indici che, una volta opportunamente rinominati, hanno permesso di ottenere i risultati in ultima linea. Si consideri ora la derivata covariante (2.2) delle espressioni appena ottenute. Valendo chiaramente

$$\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_\nu} = 0 \qquad \nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_\nu} = 0 \tag{C.5}$$

utilizzando la regola di Leibniz sulle variazioni non nulle si ottiene infine

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_\nu} &= \nabla_\mu\left(2\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\phi^\rho{}_\rho\right)\\ &= 2(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi^\nu{}_\sigma\phi^\rho{}_\rho + 2\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi^\nu{}_\sigma)\phi^\rho{}_\rho + 2\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma(\nabla_\mu\phi^\rho{}_\rho)\\ &= 2\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\phi^\rho{}_\rho + 2\phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\sigma\phi^\rho{}_\rho + 2\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\phi_\mu{}^\rho{}_\rho\\ &= 2\phi_\mu{}^\rho\phi^\nu{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + 2\phi^\rho\phi^\sigma{}_\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\rho + 2\phi^\rho\phi^\nu{}_\rho\phi_\mu{}^\sigma{}_\sigma\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_\nu} &= \nabla_\mu\left(2\phi^\sigma\phi^{\nu\rho}\phi_{\sigma\rho}\right)\\ &= 2(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi^{\nu\rho}\phi_{\sigma\rho} + 2\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi^{\nu\rho})\phi_{\sigma\rho} + 2\phi^\sigma\phi^{\nu\rho}(\nabla_\mu\phi_{\sigma\rho})\\ &= 2\phi_\mu{}^\sigma\phi^{\nu\rho}\phi_{\sigma\rho} + 2\phi^\sigma\phi_\mu{}^{\nu\rho}\phi_{\sigma\rho} + 2\phi^\sigma\phi^{\nu\rho}\phi_{\mu\sigma\rho}\\ &= 2\phi_\mu{}^\rho\phi^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\sigma + 2\phi^\rho\phi^{\nu\sigma}\phi_{\mu\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_\nu} &= \nabla_\mu\left(4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma}\right) \\ &= 4(\nabla_\mu\phi^\alpha)\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha(\nabla_\mu\phi^\rho)\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + \\ &\quad 4\phi^\alpha\phi^\rho(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi^\nu{}_\alpha)\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha(\nabla_\mu\phi_{\rho\sigma}) \\ &= 4\phi_\mu{}^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi_\mu{}^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\mu\rho\sigma} \\ &= 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\phi_{\alpha\rho} + 8\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho}\phi_\mu{}^\nu{}_\sigma + 4\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\alpha\phi_{\mu\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.8}$$

In tutti gli svolgimenti proposti, alla penultima uguaglianza si è ridefinita la derivata covariante nell'usuale notazione compatta a pedice mentre all'ultima uguaglianza si sono rinominati gli indici contratti per riassorbire contributi simili. In maniera del tutto analoga, ci si concentri ora sulle espressioni associate alla variazione delle singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$ (4.7) operata rispetto al campo $\phi_{\mu\nu} = \nabla_\mu\nabla_\nu\phi$:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu} &= g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}(\delta\phi_{\rho\sigma})\phi_{\mu\nu} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma}(\delta\phi_{\mu\nu}) \\ &= \left(g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\phi_{\rho\sigma} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= 2\phi^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}(\delta\phi_{\mu\nu})\phi_{\rho\sigma} + g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}(\delta\phi_{\rho\sigma}) \\ &= \left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(2g^{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho\right)\delta\phi_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{C.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}(\delta\phi_{\mu\nu})\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda + g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}\phi_\pi(\delta\phi_{\rho\sigma})\phi_\lambda \\ &= \left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_{\rho\alpha} + g^{\rho\sigma}g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\phi_\beta\phi_\alpha\phi_{\rho\sigma}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(g^{\mu\nu}\phi_\beta\phi_\sigma\phi^{\sigma\beta} + \phi^\nu\phi^\mu\phi^\sigma{}_\sigma\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(g^{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho{}_\rho\right)\delta\phi_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu} &= g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}\phi_\sigma(\delta\phi_{\mu\nu})\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho + g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}(\delta\phi_{\pi\lambda})\phi_\rho \\ &= \left(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\rho\phi_{\sigma\beta} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_{\rho\alpha}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(\phi^\beta\phi^\mu\phi^\nu{}_\beta + \phi^\nu\phi_\sigma\phi^{\sigma\mu}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(\phi^\mu\phi^\rho\phi^\nu{}_\rho + \phi^\nu\phi^\rho\phi^\mu{}_\rho\right)\delta\phi_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\mu\nu}}\delta\phi_{\mu\nu} &= g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha(\delta\phi_{\pi\lambda})\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu(\delta\phi_{\rho\sigma})\phi_\nu \\ &= \left(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\sigma\phi_\rho\phi_\beta\phi_\lambda\phi_{\alpha\gamma} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\mu\gamma}g^{\nu\lambda}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_\gamma\phi_\lambda\phi_{\alpha\rho}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(\phi^\mu\phi^\nu\phi_\beta\phi_\lambda\phi^{\beta\lambda} + \phi_\beta\phi_\sigma\phi^\mu\phi^\nu\phi^{\beta\sigma}\right)\delta\phi_{\mu\nu} \\ &= \left(2\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma}\right)\delta\phi_{\mu\nu}\end{aligned} \tag{C.13}$$

dove, come al solito, nel penultimo passaggio si è eliminato il tensore metrico e nell'ultimo passaggio si sono rinominati gli indici. Conseguentemente, considerando la derivata covariante di tali espressioni:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\nu\rho}} &= \nabla_\mu(2\phi^{\nu\rho}) \\ &= 2\nabla_\mu\phi^{\nu\rho} \\ &= 2\phi_\mu{}^{\nu\rho}\end{aligned} \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\nu\rho}} &= \nabla_\mu(2g^{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma) \\ &= 2g^{\nu\rho}(\nabla_\mu\phi^\sigma{}_\sigma) \\ &= 2g^{\nu\rho}\phi_\mu{}^\sigma{}_\sigma\end{aligned} \tag{C.15}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\nu\rho}} &= \nabla_\mu\left(g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + \phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha{}_\alpha\right) \\ &= g^{\nu\rho}(\nabla_\mu\phi^\alpha)\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\rho}\phi^\alpha(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi_{\alpha\sigma}) + \\ &\quad (\nabla_\mu\phi^\nu)\phi^\rho\phi^\alpha{}_\alpha + \phi^\nu(\nabla_\mu\phi^\rho)\phi^\alpha{}_\alpha + \phi^\nu\phi^\rho(\nabla_\mu\phi^\alpha{}_\alpha) \\ &= g^{\nu\rho}\phi_\mu{}^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha\sigma} + \phi_\mu{}^\nu\phi^\rho\phi^\alpha{}_\alpha + \phi^\nu\phi_\mu{}^\rho\phi^\alpha{}_\alpha + \phi^\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\alpha{}_\alpha \\ &= 2g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\rho}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha\sigma} + \phi^\rho\phi_\mu{}^\nu\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\nu\phi_\mu{}^\rho\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma{}_\sigma\end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\nu\rho}} &= \nabla_\mu\left(\phi^\nu\phi^\sigma\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\right) \\ &= (\nabla_\mu\phi^\nu)\phi^\sigma\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi^\rho{}_\sigma) + (\nabla_\mu\phi^\rho)\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi^\nu{}_\sigma)\end{aligned} \tag{C.17}$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi_\mu{}^\nu\phi^\sigma\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu\phi_\mu{}^\sigma\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\sigma\phi_\mu{}^\rho{}_\sigma + \phi_\mu{}^\rho\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho\phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\sigma \\
&= \phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu\phi_\mu{}^\sigma\phi^\rho{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\sigma\phi_\mu{}^\rho{}_\sigma + \phi^\sigma\phi_\mu{}^\rho\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\rho\phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu{}_\sigma
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\nu\rho}} &= \nabla_\mu\left(2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma}\right) \\
&= 2(\nabla_\mu\phi^\nu)\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu(\nabla_\mu\phi^\rho)\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + \\
&\quad 2\phi^\nu\phi^\rho(\nabla_\mu\phi^\alpha)\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha(\nabla_\mu\phi^\sigma)\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma(\nabla_\mu\phi_{\alpha\sigma}) \\
&= 2\phi_\mu{}^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi_\mu{}^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha\sigma} \\
&= 2\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\mu{}^\nu\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\mu{}^\rho\phi_{\alpha\sigma} + 4\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha\sigma}
\end{aligned}
\tag{C.18}
$$

Volendo ultimare il presente studio variazionale, si osservi infine che olre che da ϕ_μ e $\phi_{\mu\nu}$, le singole densità di Lagrangiana $\mathcal{L}_I$ definite in (4.7) dipendono esplicitamente anche dal tensore metrico $g^{\mu\nu}$ e si dovrà dunque tener di conto pure le variazioni di quest'ultime rispetto ad esso:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} &= (\delta g^{\mu\rho})g^{\nu\sigma}\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu} + g^{\mu\rho}(\delta g^{\nu\sigma})\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu} \\
&= \left(g^{\rho\sigma}\phi_{\mu\rho}\phi_{\nu\sigma} + g^{\rho\sigma}\phi_{\rho\mu}\phi_{\sigma\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\nu\sigma} + \phi^\sigma{}_\mu\phi_{\sigma\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(2\phi_\mu{}^\rho\phi_{\nu\rho}\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{C.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} &= (\delta g^{\mu\nu})g^{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} + g^{\mu\nu}(\delta g^{\rho\sigma})\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} \\
&= \left(g^{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} + g^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi_{\mu\nu}\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\sigma{}_\sigma\phi_{\mu\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(2\phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} &= (\delta g^{\mu\nu})g^{\rho\pi}g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda + g^{\mu\nu}(\delta g^{\rho\pi})g^{\sigma\lambda}\phi_{\mu\nu}\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda + g^{\mu\nu}g^{\rho\pi}(\delta g^{\sigma\lambda})\phi_{\mu\nu}\phi_\pi\phi_{\rho\sigma}\phi_\lambda \\
&= \left(g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\alpha} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\beta\phi_\nu\phi_{\rho\sigma}\phi_{\mu\alpha} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\nu\phi_\beta\phi_{\rho\sigma}\phi_{\alpha\mu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi_\beta\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi^{\sigma\beta} + \phi_\beta\phi_\nu\phi^\sigma{}_\sigma\phi_\mu{}^\beta + \phi_\nu\phi_\beta\phi^\sigma{}_\sigma\phi^\beta{}_\mu\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} + 2\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{C.20}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} &= (\delta g^{\mu\sigma})g^{\nu\pi}g^{\rho\lambda}\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho + g^{\mu\sigma}(\delta g^{\nu\pi})g^{\rho\lambda}\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho + g^{\mu\sigma}g^{\nu\pi}(\delta g^{\rho\lambda})\phi_\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\pi\lambda}\phi_\rho \\
&= \left(g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\nu\phi_{\mu\rho}\phi_{\sigma\beta} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\sigma\phi_{\rho\mu}\phi_{\nu\beta} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}\phi_\mu\phi_\sigma\phi_{\rho\alpha}\phi_{\beta\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi^\beta\phi_\nu\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\sigma\beta} + \phi^\beta\phi_\sigma\phi^\sigma{}_\mu\phi_{\nu\beta} + \phi_\mu\phi_\sigma\phi^{\sigma\beta}\phi_{\beta\nu}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho}\phi_{\nu\sigma} + \phi_\mu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma}\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{C.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} &= (\delta g^{\rho\mu})g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + g^{\rho\mu}(\delta g^{\sigma\nu})g^{\pi\alpha}g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + \\
&\quad g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}(\delta g^{\pi\alpha})g^{\lambda\beta}\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu + g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}g^{\pi\alpha}(\delta g^{\lambda\beta})\phi_\alpha\phi_{\pi\lambda}\phi_\beta\phi_\mu\phi_{\rho\sigma}\phi_\nu \\
&= \left(g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_\nu\phi_\lambda\phi_{\alpha\rho}\phi_{\mu\gamma} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\beta\phi_\sigma\phi_\lambda\phi_\nu\phi_{\alpha\rho}\phi_{\gamma\mu} + \right. \\
&\quad \left. g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\nu\phi_\sigma\phi_\beta\phi_\lambda\phi_{\mu\rho}\phi_{\alpha\gamma} + g^{\rho\sigma}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\lambda}\phi_\sigma\phi_\nu\phi_\beta\phi_\lambda\phi_{\rho\mu}\phi_{\alpha\gamma}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(\phi_\beta\phi_\sigma\phi_\nu\phi_\lambda\phi^{\beta\sigma}\phi_\mu{}^\lambda + \phi_\beta\phi_\sigma\phi_\lambda\phi_\nu\phi^{\beta\sigma}\phi^\lambda{}_\mu + \phi_\nu\phi_\sigma\phi_\beta\phi_\lambda\phi_\mu{}^\sigma\phi^{\beta\lambda} + \phi_\sigma\phi_\nu\phi_\beta\phi_\lambda\phi^\sigma{}_\mu\phi^{\beta\lambda}\right)\delta g^{\mu\nu} \\
&= \left(4\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma}\right)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{C.22}
$$

C.2 Calcolo delle espressioni per Π_I^μ ed Σ_I^μ

Al fine di ottenere le espressioni esplicite dei tensori Π_I^μ e Σ_I^μ definiti in (4.23) per esprimere l'equazione di campo scalare, si utilizzino le espressioni ricavate nella precedente sottosezione, avendo cura di adattare opportunamente gli indici che opportunamente riordinati permetteranno una ulteriore semplificazione dalle espressioni ottenute dalle suddette sostituzioni. In particolare per Π_I^μ si avrà

$$
\begin{aligned}
\Pi_1^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= -2\phi_\nu{}^{\nu\mu}
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

$$
\begin{aligned}
\Pi_2^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= -2g^{\nu\mu}\phi_\nu{}^\sigma{}_\sigma
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

$$= -2\phi^{\mu\sigma}{}_{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_3^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= 2\phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - \left(2g^{\nu\mu}\phi^\alpha\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\nu\mu}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha\sigma} + \phi^\mu\phi_\nu{}^\nu\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\nu\phi_\nu{}^\mu\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\mu\phi_\nu{}^\sigma{}_\sigma\right) \\
&= 2\phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\alpha\phi^{\mu\sigma}\phi_{\alpha\sigma} - \phi^\alpha\phi^\sigma\phi^\mu{}_{\alpha\sigma} - \phi^\mu\phi_\nu{}^\nu\phi^\sigma{}_\sigma - \phi^\nu\phi_\nu{}^\mu\phi^\sigma{}_\sigma - \phi^\nu\phi^\mu\phi_\nu{}^\sigma{}_\sigma \\
&= \phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\nu\phi^\rho\phi^\mu{}_{\nu\rho} - \phi^\mu\phi^\nu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\mu\phi^\nu\phi_\nu{}^\rho{}_\rho
\end{aligned} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_4^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu \frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= 2\phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho} - \left(\phi^\sigma\phi_\nu{}^\nu\phi^\mu{}_\sigma + \phi^\nu\phi_\nu{}^\sigma\phi^\mu{}_\sigma + \phi^\nu\phi^\sigma\phi_\nu{}^\mu{}_\sigma + \phi^\sigma\phi_\nu{}^\mu\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\mu\phi_\nu{}^\sigma\phi^\nu{}_\sigma + \phi^\mu\phi^\sigma\phi_\nu{}^\nu{}_\sigma\right) \\
&= \phi^\nu\phi^{\mu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\nu\phi_\nu{}^\rho\phi^\mu{}_\rho - \phi^\nu\phi^\rho\phi_\nu{}^\mu{}_\rho - \phi^\mu\phi^{\nu\rho}\phi_{\nu\rho} - \phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho{}_{\rho\nu}
\end{aligned} \tag{C.26}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_5^\mu &= \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_\mu} - \nabla_\nu \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\nu\mu}} \\
&= 4\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma} - \left(2\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\nu{}^\nu\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\nu{}^\mu\phi_{\alpha\sigma} + 4\phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha\sigma}\right) \\
&= 2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma} - 2\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 4\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - 2\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{C.27}$$

mentre per Σ_I^μ si otterrà

$$\begin{aligned}
\Sigma_1^\mu &= 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_1 - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= 2\left(\phi^\mu\phi^{\rho\nu}\phi_{\rho\nu} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^{\nu\mu}\right) \\
&= 2\phi^\mu\phi^{\nu\rho}\phi_{\nu\rho} - 2\phi^\nu\phi_\nu{}^\rho\phi^\mu{}_\rho
\end{aligned} \tag{C.28}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_2^\mu &= 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_2 - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= 2\left(\phi^\mu\phi^\rho{}_\rho\phi^\nu{}_\nu - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho g^{\nu\mu}\phi^\sigma{}_\sigma\right) \\
&= 2\phi^\mu\phi^\rho{}_\rho\phi^\nu{}_\nu - 4\phi^\mu{}_\rho\phi^\rho\phi^\sigma{}_\sigma \\
&= 2\phi^\mu\phi^\nu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho - 4\phi^\nu\phi^\mu{}_\nu\phi^\rho{}_\rho
\end{aligned} \tag{C.29}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_3^\mu &= 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_3 - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= 2\left\{\phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu\phi_{\sigma\nu}\phi^\rho{}_\rho - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\left(g^{\nu\mu}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + \phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha{}_\alpha\right)\right\} \\
&= 2\phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu\phi_{\sigma\nu}\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\mu{}_\rho\phi^\rho\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha{}_\alpha \\
&= -2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{C.30}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_4^\mu &= 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_4 - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= 2\left\{\phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu\phi_\sigma{}^\rho\phi_{\nu\rho} - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\left(\phi^\nu\phi^\sigma\phi^\mu{}_\sigma + \phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma\right)\right\} \\
&= 2\phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu\phi_\sigma{}^\rho\phi_{\nu\rho} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^\nu\phi^\sigma\phi^\mu{}_\sigma - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^\mu\phi^\sigma\phi^\nu{}_\sigma \\
&= -2\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi^\mu{}_\nu\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{C.31}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_5^\mu &= 2\left(\phi^\mu\mathcal{L}_5 - \phi_{\nu\rho}\phi^\rho\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\nu\mu}}\right) \\
&= 2\left(\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\nu}\phi_{\rho\sigma} - 2\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma}\right) \\
&= 2\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\nu}\phi_{\rho\sigma} - 4\phi_{\nu\rho}\phi^\rho\phi^\nu\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\alpha\sigma} \\
&= -2\phi^\mu\phi^\alpha\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\nu}\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned} \tag{C.32}$$

si noti che le espressioni proposte sono del tutto identiche a quelle sottoposte in (4.24)

C.3 Calcolo delle espressioni per $\Delta^I_{\mu\nu}$ e $\Xi^I_{\mu\nu}$

La presente sottosezione si occuperà, con metodologia analoga a quanto esposto in quella precedente, della deduzione dei tensori $\Delta^I_{\mu\nu}$ e $\Xi^I_{\mu\nu}$ presenti nelle espressioni associate alle equazioni di campo tensoriali. Tale deduzione risulta tuttavia estremamente più macchinosa del caso precedente. Infatti, prima di passare al calcolo diretto di tali oggetti, occorre ricavare per ognuno di essi l'espressione dei corrispondenti parametri $\alpha^I_{\mu\nu}$ e $\beta^I_{\mu\nu}$ definiti in

(4.29) ed (4.30).Per quanto riguarda gli $\alpha^I_{\mu\nu}$ si ha che inserendo nella definizione i le variazioni dell'Appendice C.1:

$$\begin{aligned}
\alpha^1_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \qquad (C.33)\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\big(2\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^{\alpha\beta} + 2\phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^{\alpha\beta}\big) - \tfrac{1}{2}g_{\beta\nu}\big(2\phi_{\epsilon\mu}\phi^{\epsilon\beta} + 2\phi_\mu\phi_\epsilon{}^{\epsilon\beta}\big) - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}\big(2\phi_{\epsilon\nu}\phi^{\alpha\epsilon} + 2\phi_\nu\phi_\epsilon{}^{\alpha\epsilon}\big)\\
&= \phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\mu\nu} + \phi^\epsilon\phi_{\epsilon\mu\nu} - \phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon{}_\nu - \phi_\mu\phi_\epsilon{}^\epsilon{}_\nu - \phi_{\epsilon\nu}\phi_\mu{}^\epsilon - \phi_\nu\phi_{\epsilon\mu}{}^\epsilon\\
&= \phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho + \phi^\rho\phi_{\rho\mu\nu} - 2\phi_\mu{}^\rho\phi_{\nu\rho} - \phi_\mu\phi^\rho{}_{\rho\nu} - \phi_\nu\phi^\rho{}_{\mu\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^2_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \qquad (C.34)\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\big(2\phi_\epsilon{}^\epsilon g^{\alpha\beta}\phi^\rho{}_\rho + 2\phi^\epsilon g^{\alpha\beta}\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big) - \tfrac{1}{2}g_{\beta\nu}\big(2\phi_{\epsilon\mu}g^{\epsilon\beta}\phi^\rho{}_\rho + 2\phi_\mu g^{\epsilon\beta}\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big) - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}\big(2\phi_{\epsilon\nu}g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho{}_\rho + 2\phi_\nu g^{\alpha\epsilon}\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big)\\
&= \phi_\epsilon{}^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho + \phi^\epsilon g_{\mu\nu}\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma - \phi_{\nu\mu}\phi^\rho{}_\rho - \phi_\mu\phi_\nu{}^\sigma{}_\sigma - \phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho - \phi_\nu\phi_\mu{}^\sigma{}_\sigma\\
&= g_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma - 2\phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho - \phi_\mu\phi_\nu{}^\rho{}_\rho - \phi_\nu\phi_\mu{}^\rho{}_\rho
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^3_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \qquad (C.35)\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\big\{\phi_\epsilon{}^\epsilon\big(g^{\alpha\beta}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho{}_\rho\big) + \phi^\epsilon\big(2g^{\alpha\beta}\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + g^{\alpha\beta}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma} + \phi^\beta\phi_\epsilon{}^\alpha\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\beta\phi^\sigma{}_\sigma +\\
&\quad \phi^\alpha\phi^\beta\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big)\big\} - \tfrac{1}{2}g_{\beta\nu}\big\{\phi_{\epsilon\mu}\big(g^{\epsilon\beta}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\rho{}_\rho\big) + \phi_\mu\big(2g^{\epsilon\beta}\phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + g^{\epsilon\beta}\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\epsilon\alpha\sigma} + \phi^\beta\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\sigma{}_\sigma +\\
&\quad \phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\beta\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\epsilon\phi^\beta\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big)\big\} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}\big\{\phi_{\epsilon\nu}\big(g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho{}_\rho\big) + \phi_\nu\big(2g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma} +\\
&\quad \phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\alpha\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\sigma{}_\sigma + \phi^\alpha\phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\big)\big\}\\
&= \tfrac{1}{2}\phi_\epsilon{}^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho + \phi^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi_{\epsilon\mu}\phi^\sigma{}_\sigma + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_{\epsilon\nu}\phi^\sigma{}_\sigma +\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_{\nu\mu}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi_\mu\phi^\alpha\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\sigma{}_\sigma -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_{\epsilon\nu}\phi^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\nu\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\nu}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho{}_\rho - \phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho\sigma} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\epsilon\phi_{\epsilon\mu}\phi^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi_\mu\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma{}_\sigma\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma - \phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^4_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \qquad (C.36)\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\big\{\phi_\epsilon{}^\epsilon\big(\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\beta{}_\rho + \phi^\beta\phi^\rho\phi^\alpha{}_\rho\big) + \phi^\epsilon\big(\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha\phi^\beta{}_\sigma + \phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\beta{}_\sigma + \phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta{}_\sigma + \phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta\phi^\alpha{}_\sigma + \phi^\beta\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\alpha{}_\sigma +\\
&\quad \phi^\beta\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha{}_\sigma\big)\big\} - \tfrac{1}{2}g_{\beta\nu}\big\{\phi_{\epsilon\mu}\big(\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\beta{}_\rho + \phi^\beta\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho\big) + \phi_\mu\big(\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\beta{}_\sigma + \phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\beta{}_\sigma + \phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta{}_\sigma + \phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta\phi^\epsilon{}_\sigma +\\
&\quad \phi^\beta\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\epsilon{}_\sigma + \phi^\beta\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon{}_\sigma\big)\big\} - \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}\big\{\phi_{\epsilon\nu}\big(\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho + \phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\alpha{}_\rho\big) + \phi_\nu\big(\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha\phi^\epsilon{}_\sigma + \phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\epsilon{}_\sigma + \phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon{}_\sigma +\\
&\quad \phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\alpha{}_\sigma + \phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\alpha{}_\sigma + \phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha{}_\sigma\big)\big\}\\
&= \tfrac{1}{2}\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho} + \tfrac{1}{2}\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu}\phi_{\nu\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\nu\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu}\phi_{\mu\sigma} + \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\mu\sigma} +\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_{\nu\rho} - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\mu}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\nu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\nu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu}\phi^\epsilon{}_\sigma -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\epsilon{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\nu}\phi_\mu\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho - \tfrac{1}{2}\phi_{\epsilon\nu}\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_{\mu\rho} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi_\mu\phi_\epsilon{}^\sigma\phi^\epsilon{}_\sigma -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi_\mu\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\mu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\epsilon\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\mu\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\epsilon\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu\sigma}\\
&= -\phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma{}_{\sigma\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^5_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\left[\phi_\epsilon{}^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\alpha\beta}} + \phi^\epsilon\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\alpha\beta}}\right] - g_{\beta\nu}\left[\phi_{\epsilon\mu}\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} + \phi_\mu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\epsilon\beta}}\right] - g_{\alpha\mu}\left[\phi_{\epsilon\nu}\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}} + \phi_\nu\nabla_\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right]\right\} \qquad (C.37)\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\big\{2\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\epsilon\big(2\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma}\big)\big\} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}g_{\beta\nu}\big\{2\phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi_\mu\big(2\phi^\beta\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\epsilon\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\beta\phi_{\alpha\sigma} + 4\phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} + 2\phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\epsilon\alpha\sigma}\big)\big\} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}g_{\alpha\mu}\big\{2\phi_{\epsilon\nu}\phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi_\nu\big(2\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\alpha\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\rho\sigma} + 4\phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma}\big)\big\}\\
&= \phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu}\phi_{\rho\sigma} + \phi^\epsilon\phi_\mu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu}\phi_{\rho\sigma} + 2\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma} -\\
&\quad \phi_{\epsilon\mu}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\alpha\sigma} - \phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\epsilon\nu}\phi_{\alpha\sigma} - 2\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\alpha\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\alpha\sigma} - \phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\sigma\phi_{\epsilon\alpha\sigma} -\\
&\quad \phi_{\epsilon\nu}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\mu}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi_\mu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_\epsilon{}^\epsilon\phi_{\rho\sigma} - 2\phi_\nu\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_\epsilon{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\epsilon\rho\sigma}\\
&= -\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - 2\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho\sigma}
\end{aligned}$$

dove in tutti gli svolgimenti nel penultimo passaggio si è eliminata la presenza del tensore metrico sfruttando le contrazioni con esso delle derivate in ϕ per alzarne o abbassarne e gli indici che, una volta opportunamente rinominati, hanno permesso di ottenere i risultati in ultima linea. Si consideri ora in modo del tutto analogo il calcolo dei $\beta^I_{\mu\nu}$:

$$\beta^1_{\mu\nu} = \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right) \qquad (C.38)$$

$$\begin{aligned}
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(2g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\phi^{\alpha\beta} - 2g_{\beta\nu}\phi_\mu\phi^{\epsilon\beta} - 2g_{\alpha\mu}\phi_\nu\phi^{\alpha\epsilon}\right)\\
&= 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon\phi_{\mu\nu} - 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\mu\phi^\epsilon{}_\nu - 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\nu\phi_\mu{}^\epsilon\\
&= 2\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} - 2\phi_\mu\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma\phi_{\nu\sigma} - 2\phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^2_{\mu\nu} &= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(2g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon g^{\alpha\beta}\phi^\rho{}_\rho - 2g_{\beta\nu}\phi_\mu g^{\epsilon\beta}\phi^\rho{}_\rho - 2g_{\alpha\mu}\phi_\nu g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho{}_\rho\right)\\
&= 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\sigma\phi_{\nu\sigma}\phi_\mu\phi^\rho{}_\rho - 2\phi^\sigma\phi_{\mu\sigma}\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho\\
&= 2g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 2\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 2\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma
\end{aligned}\tag{C.39}$$

$$\begin{aligned}
\beta^3_{\mu\nu} &= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\big\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\left(g^{\alpha\beta}\phi^\rho\phi^\gamma\phi_{\rho\gamma} + \phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho{}_\rho\right) -\\
&\quad g_{\beta\nu}\phi_\mu\left(g^{\epsilon\beta}\phi^\rho\phi^\alpha\phi_{\rho\alpha} + \phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\rho{}_\rho\right) - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\left(g^{\alpha\epsilon}\phi^\rho\phi^\beta\phi_{\rho\beta} + \phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho{}_\rho\right)\big\}\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\gamma\phi_{\rho\gamma} + \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\sigma\phi_{\nu\sigma}\phi_\mu\phi^\rho\phi^\alpha\phi_{\rho\alpha} -\\
&\quad \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho - \phi^\sigma\phi_{\mu\sigma}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\beta\phi_{\rho\beta} - \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\nu\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho{}_\rho\\
&= g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}\tag{C.40}$$

$$\begin{aligned}
\beta^4_{\mu\nu} &= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\big\{g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\left(\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\beta{}_\rho + \phi^\beta\phi^\rho\phi^\alpha{}_\rho\right) - g_{\beta\nu}\phi_\mu\left(\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\beta{}_\rho + \phi^\beta\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho\right) - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\left(\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho + \phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\alpha{}_\rho\right)\big\}\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho} + \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho} - \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_{\nu\rho} -\\
&\quad \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho - \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\nu\phi_\mu\phi^\rho\phi^\epsilon{}_\rho - \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\nu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\\
&= -2\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}\tag{C.41}$$

$$\begin{aligned}
\beta^5_{\mu\nu} &= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\alpha\beta}} - g_{\beta\nu}\phi_\mu\frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta\phi_{\epsilon\beta}} - g_{\alpha\mu}\phi_\nu\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\phi_{\alpha\epsilon}}\right)\\
&= \phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\left(2g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\phi^\epsilon\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\gamma\phi_{\rho\gamma} - 2g_{\beta\nu}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\beta\phi^\rho\phi^\alpha\phi_{\rho\alpha} - 2g_{\alpha\mu}\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\beta\phi_{\rho\beta}\right)\\
&= 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi^\epsilon\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\gamma\phi_{\rho\gamma} - 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\mu\phi^\epsilon\phi_\nu\phi^\rho\phi^\alpha\phi_{\rho\alpha} - 2\phi^\sigma\phi_{\epsilon\sigma}\phi_\nu\phi_\mu\phi^\epsilon\phi^\rho\phi^\beta\phi_{\rho\beta}\\
&= -2\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}\tag{C.42}$$

dove, come al solito, nel penultimo passaggio si ‘e eliminato il tensore metrico e nell’ultimo passaggio si sono riordinati gli indici per semplificare le espressioni. Impiegando le espressioni ottenute nelle definizioni (4.33), si ottengono i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
\Delta^1_{\mu\nu} &\equiv \alpha^1_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_1 + \frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta g^{\mu\nu}}\\
&= \phi_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho + \phi^\rho\phi_{\rho\mu\nu} - \phi_\mu\phi^\rho{}_{\rho\nu} - \phi_\nu\phi^\rho{}_{\mu\rho} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma}
\end{aligned}\tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2_{\mu\nu} &\equiv \alpha^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_2 + \frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta g^{\mu\nu}}\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu}\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi_\nu{}^\rho{}_\rho - \phi_\nu\phi_\mu{}^\rho{}_\rho
\end{aligned}\tag{C.44}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^3_{\mu\nu} &\equiv \alpha^3_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_3 + \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta g^{\mu\nu}}\\
&= \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma +\\
&\quad \tfrac{3}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\sigma\phi^\alpha\phi_{\sigma\alpha}\phi^\rho{}_\rho\\
&= -\tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma + g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma{}_\sigma + \tfrac{3}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\rho\phi_\nu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} -\\
&\quad \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho\sigma}
\end{aligned}\tag{C.45}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^4_{\mu\nu} &\equiv \alpha^4_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_4 + \frac{\delta\mathcal{L}_4}{\delta g^{\mu\nu}}\\
&= -\phi_\mu\phi_\nu\phi^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho\phi^\sigma{}_{\sigma\rho} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\rho}\phi_{\nu\sigma}
\end{aligned}\tag{C.46}$$

$$\begin{aligned}\Delta^5_{\mu\nu} &\equiv \alpha^5_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L}_5 + \frac{\delta\mathcal{L}_5}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= 3\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha}\phi_{\rho\sigma} \\ &\quad - 2\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\rho\sigma} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.47}$$

$$\begin{aligned}\Xi^1_{\mu\nu} &\equiv \beta^1_{\mu\nu} + \phi_\mu\phi_\nu\mathcal{L}_1 \\ &= 2\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\nu}\phi_{\rho\sigma} - 2\phi_\mu\phi^\rho\phi_\rho{}^\sigma\phi_{\nu\sigma} - 2\phi_\nu\phi^\rho\phi_\mu{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi_\mu\phi_\nu\phi^{\rho\sigma}\phi_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.48}$$

$$\begin{aligned}\Xi^2_{\mu\nu} &\equiv \beta^2_{\mu\nu} + \phi_\mu\phi_\nu\mathcal{L}_2 \\ &= 2g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 2\phi_\mu\phi^\rho\phi_{\nu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - 2\phi_\nu\phi^\rho\phi_{\mu\rho}\phi^\sigma{}_\sigma + \phi_\mu\phi_\nu\phi^\rho{}_\rho\phi^\sigma{}_\sigma\end{aligned} \tag{C.49}$$

$$\begin{aligned}\Xi^3_{\mu\nu} &\equiv \beta^3_{\mu\nu} + \phi_\mu\phi_\nu\mathcal{L}_3 \\ &= g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_{\alpha\rho}\phi^\sigma{}_\sigma - \phi_\mu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma} + \phi_\mu\phi_\nu\phi^\sigma\phi^\alpha\phi_{\sigma\alpha}\phi^\rho{}_\rho \\ &= g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\mu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\nu\alpha}\phi_{\rho\sigma} - \phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\mu\alpha}\phi_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.50}$$

$$\begin{aligned}\Xi^4_{\mu\nu} &\equiv \beta^4_{\mu\nu} + \phi_\mu\phi_\nu\mathcal{L}_4 \\ &= -2\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma} + \phi_\mu\phi_\nu\phi^\sigma\phi^\alpha\phi_\sigma{}^\rho\phi_{\alpha\rho} \\ &= -\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\rho\phi_\alpha{}^\sigma\phi_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned}\Xi^5_{\mu\nu} &\equiv \beta^5_{\mu\nu} + \phi_\mu\phi_\nu\mathcal{L}_5 \\ &= -\phi_\mu\phi_\nu\phi^\alpha\phi^\beta\phi^\rho\phi^\sigma\phi_{\alpha\beta}\phi_{\rho\sigma}\end{aligned} \tag{C.52}$$

Si noti la compattezza dei risultati ottenuti, identici a quelli sottoposti in (4.34)

C.4 Espressioni per i parametri di classe $\zeta_I^{\mathscr{C}}$ e derivate $\zeta_{I,X}^{\mathscr{C}}$

Sfruttando il mapping $f=\eta$, $\alpha_I=\zeta_I$, $P=\epsilon X-\kappa\Lambda$ ed $Q_1=Q_2=0$ tra teoria (2.9) e modello (4.1), i coefficienti proposti in Tabella 1 e Tabella 2 saranno semplificabili. Proposti con le corrispondenti derivate rispetto ad X, necessarie per il calcolo delle equazioni di campo scalari-tensoriali, essi saranno:

(Classe $\mathscr{C}$=Ia)

$$\begin{aligned}\zeta_1(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= -\zeta_2 \\ \zeta_4(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= \frac{16X\zeta_2^3+12\eta\zeta_2^2-12X\eta\zeta_2\zeta_3-X^2\eta\zeta_3^2-8\eta^2\zeta_3}{8\left(\eta+X\zeta_2\right)^2} \\ \zeta_5(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= \frac{\left(2\zeta_2+X\zeta_3\right)\left(-2\zeta_2^2+3X\zeta_2\zeta_3+4\eta\zeta_3\right)}{8\left(\eta+X\zeta_2\right)^2}\end{aligned} \tag{C.53}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{1,X}(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= -\zeta_{2,X} \\ \zeta_{4,X}(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= \frac{1}{4\left(X\zeta_2+\eta\right)^3}\Big\{\left(X\zeta_2+\eta\right)\left(-X^2\eta\zeta_3\zeta_{3,X}-6X\eta\zeta_2\zeta_{3,X}-X\eta\zeta_3^2-6X\eta\zeta_3\zeta_{2,X}+24X\zeta_2^2\zeta_{2,X}-4\eta^2\zeta_{3,X}\right. \\ &\qquad \left.-6\eta\zeta_2\zeta_3+12\eta\zeta_2\zeta_{2,X}+8\zeta_2^3\right)+\left(X\zeta_{2,X}+\zeta_2\right)\left(X^2\eta\zeta_3^2+12X\eta\zeta_2\zeta_3-16X\zeta_2^3+8\eta^2\zeta_3-12\eta\zeta_2^2\right)\Big\} \\ \zeta_{5,X}(\zeta_2,\zeta_3,\eta) &= \frac{1}{8\left(X\zeta_2+\eta\right)^3}\Big\{\left(X\zeta_2+\eta\right)\Big[\left(X\zeta_3+2\zeta_2\right)\left(3X\zeta_2\zeta_{3,X}+3X\zeta_3\zeta_{2,X}+4\eta\zeta_{3,X}+3\zeta_2\zeta_3-4\zeta_2\zeta_{2,X}\right) \\ &\qquad +\left(X\zeta_{3,X}+\zeta_3+2\zeta_{2,X}\right)\left(3X\zeta_2\zeta_3+4\eta\zeta_3-2\zeta_2^2\right)\Big]-2\left(X\zeta_3+2\zeta_2\right)\left(X\zeta_{2,X}+\zeta_2\right)\left(3X\zeta_2\zeta_3+4\eta\zeta_3-2\zeta_2^2\right)\Big\}\end{aligned} \tag{C.54}$$

(Classe $\mathscr{C}$=IIa)

$$\begin{aligned}\zeta_3(\zeta_1,\zeta_2,\eta) &= \frac{-4\eta^2-2X\eta\zeta_1-8\eta X}{X^2\eta} \\ \zeta_4(\zeta_1,\zeta_2,\eta) &= \frac{2\eta^2-2X\eta\zeta_1}{X^2\eta} \\ \zeta_5(\zeta_1,\zeta_2,\eta) &= \frac{8\eta^3+6X\eta^2\zeta_1+8X\eta\zeta_2}{\eta^2X^3}\end{aligned} \tag{C.55}$$

$$\zeta_{3,X}(\zeta_1,\zeta_2,\eta) = \frac{1}{X^3}\Big\{-2X^2\zeta_{1,X}+2X\zeta_1+8X+8\eta\Big\}$$

$$\zeta_{4,X}(\zeta_1,\zeta_2,\eta) = \frac{1}{X^3}\Big\{-2X^2\zeta_{1,X} + 2X\zeta_1 - 4\eta\Big\}$$
$$\zeta_{5,X}(\zeta_1,\zeta_2,\eta) = \frac{1}{X^4\eta}\Big\{6X^2\eta\zeta_{1,X} + 8X^2\zeta_{2,X} - 12X\eta\zeta_1 - 16X\zeta_2 - 24\eta^2\Big\}$$

(Classe $\mathscr{C}$=IIIa)

$$\begin{aligned}
&\zeta_4(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = -\frac{2\zeta_1}{X} \\
&\zeta_5(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \frac{4\zeta_1^2 + 8\zeta_1\zeta_2 - 4\zeta_1\zeta_3 X + 3\zeta_3^2X^2}{4X^2(\zeta_1+3\zeta_2)} \\
&\eta = 0
\end{aligned} \tag{C.56}$$

$$\begin{aligned}
&\zeta_{4,X}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \frac{1}{X^2}(-2X\zeta_{1,X} + 2\zeta_1) \\
&\zeta_{5,X}(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3) = \frac{1}{4X^3(\zeta_1+3\zeta_2)^2}\Big\{(2X(\zeta_1+3\zeta_2)\big(3X^2\zeta_3\zeta_{3,X} - 2X\zeta_1\zeta_{3,X} + 3X\zeta_3^2 - 2X\zeta_3\zeta_{1,X} - 2\zeta_1\zeta_3 + 4\zeta_1\zeta_{1,X} \\
&\qquad +4\zeta_1\zeta_{2,X} + 4\zeta_2\zeta_{1,X}) - X(\zeta_{1,X} + 3\zeta_{2,X})\big(3X^2\zeta_3^2 - 4X\zeta_1\zeta_3 + 4\zeta_1^2 + 8\zeta_1\zeta_2\big) \\
&\qquad + 2(\zeta_1+3\zeta_2)\big(-3X^2\zeta_3^2 + 4X\zeta_1\zeta_3 - 4\zeta_1^2 - 8\zeta_1\zeta_2\big)\Big\}
\end{aligned} \tag{C.57}$$

(Sottoclasse $\mathscr{C}$=Ia$\cap$IIIa)

$$\begin{aligned}
&\zeta_2(\zeta_1,\zeta_3) = -\zeta_1 \\
&\zeta_4(\zeta_1,\zeta_3) = -\frac{2\zeta_1}{X} \\
&\zeta_5(\zeta_1,\zeta_3) = \frac{(2\zeta_1 - X\zeta_3)(2\zeta_1 + 3X\zeta_3)}{8X^2\zeta_1} \\
&\eta = 0
\end{aligned} \tag{C.58}$$

$$\begin{aligned}
&\zeta_{2,X}(\zeta_1,\zeta_3) = -\zeta_{1,X} \\
&\zeta_{4,X}(\zeta_1,\zeta_3) = \frac{1}{X^2}(-2X\zeta_{1,X} + 2\zeta_1) \\
&\zeta_{5,X}(\zeta_1,\zeta_3) = -\frac{3\zeta_{3,X}}{4\zeta_1}\zeta_3 + \frac{3\zeta_3^2}{8\zeta_1^2}\zeta_{1,X} + \frac{1}{2X}\zeta_{3,X} - \frac{\zeta_3}{2X^2} + \frac{1}{2X^2}\zeta_{1,X} - \frac{1}{X^3}\zeta_1
\end{aligned} \tag{C.59}$$

(Sottoclasse $\mathscr{C}$=Ia$*$)

$$\begin{aligned}
&\zeta_2(\zeta_1,\eta) = -\zeta_1 \\
&\zeta_3(\zeta_1,\eta) = \frac{2\zeta_1}{X} \\
&\zeta_4(\zeta_1,\eta) = -\frac{2\zeta_1}{X}
\end{aligned} \tag{C.60}$$

$$\begin{aligned}
&\zeta_{2,X}(\zeta_1,\eta) = -\zeta_{1,X} \\
&\zeta_{3,X}(\zeta_1,\eta) = \frac{1}{X^2}(2X\zeta_{1,X} - 2\zeta_1) \\
&\zeta_{4,X}(\zeta_1,\eta) = \frac{1}{X^2}(-2X\zeta_{1,X} + 2\zeta_1)
\end{aligned} \tag{C.61}$$

C.5 Spazio-tempo di De Sitter

In riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 4.6 in merito allo studio di Strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche nella sottoclasse degenere $\mathscr{C}$ = Ia*, si riportano nel caso di spazio-tempo di background di De Sitter le espressioni esplicite non nulle di

(Connessione di Levi Civita)

$$\begin{aligned}
&\Gamma^\phi_{\phi t} = H && \Gamma^\phi_{\phi r} = \tfrac{1}{r} && \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot(\theta) \\
&\Gamma^\theta_{\theta t} = H && \Gamma^\theta_{\theta r} = \tfrac{1}{r} && \Gamma^r_{rt} = H \\
&\Gamma^t_{\phi\phi} = Hr^2e^{2Ht}\sin^2(\theta) && \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\sin^2(\theta) && \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\tfrac{1}{2}\sin(2\theta) \\
&\Gamma^t_{\theta\theta} = Hr^2e^{2Ht} && \Gamma^r_{\theta\theta} = -r && \Gamma^t_{rr} = He^{2Ht}
\end{aligned} \tag{C.62}$$

(Tensore di Ricci)

$$R_{rr} = 3H^2e^{2Ht} \qquad R_{\theta\theta} = 3H^2r^2e^{2Ht} \tag{C.63}$$

$$R_{\phi\phi} = 3H^2 r^2 e^{2Ht} \sin^2(\theta) \qquad R_{tt} = -3H^2$$

(Scalare di curvatura)

$$R = 12H^2 \tag{C.64}$$

(Tensore di Einstein)

$$\begin{aligned} G_{rr} &= -3H^2 e^{2Ht} & G_{\theta\theta} &= -3H^2 r^2 e^{2Ht} \\ G_{\phi\phi} &= -3H^2 r^2 e^{2Ht} \sin^2(\theta) & G_{tt} &= 3H^2 \end{aligned} \tag{C.65}$$

(Derivate covarianti prime del campo scalare)

$$\phi_0 = \dot{\phi} \tag{C.66}$$

(Derivate covarianti seconde del campo scalare)

$$\begin{aligned} \phi_{tt} &= \ddot{\phi} & \phi_{\phi\phi} &= -Hr^2 e^{2Ht} \sin^2(\theta)\dot{\phi} \\ \phi_{\theta\theta} &= -Hr^2 e^{2Ht}\dot{\phi} & \phi_{rr} &= -He^{2Ht}\dot{\phi} \end{aligned} \tag{C.67}$$

(Derivate covarianti terze del campo scalare)

$$\begin{aligned} \phi_{trr} &= -He^{2Ht}\ddot{\phi} & \phi_{t\theta\theta} &= -Hr^2 e^{2Ht}\ddot{\phi} \\ \phi_{t\phi\phi} &= -Hr^2 e^{2Ht}\sin^2(\theta)\ddot{\phi} & \phi_{ttt} &= \dddot{\phi} \\ \phi_{\phi t\phi} &= Hr^2\left(H\dot{\phi} - \ddot{\phi}\right)e^{2Ht}\sin^2(\theta) & \phi_{\theta t\theta} &= Hr^2\left(H\dot{\phi} - \ddot{\phi}\right)e^{2Ht} \\ \phi_{rtr} &= H\left(H\dot{\phi} - \ddot{\phi}\right)e^{2Ht} \end{aligned} \tag{C.68}$$

Solo ed esclusivamente in questa sottosezione si è usata la convenzione $t = \tau$

C.5.1 Equazioni di background per tutte le classi degeneri

In riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 4.6 in merito allo studio di Strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche nella sottoclasse degenere $\mathscr{C} = \text{Ia*}$, si riportano nel caso di spazio-tempo di background di De Sitter le componenti esplicite non nulle della corrente scalare e del Tensore di Eulero-Lagrange associato alle equazioni di campo tensoriali. Si ricordi che $E_g[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho = E_g[\mathcal{L}]^\theta{}_\theta = E_g[\mathcal{L}]^\varphi{}_\varphi$

(Classe Ia*)

$$J^\tau = 2\big(-6H^2L\dot{\phi}^2 + 6H^2 l + u\big)\dot{\phi} \tag{C.69}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\tau{}_\tau = 12H^2L\dot{\phi}^4 - 18H^2 l\dot{\phi}^2 - 6H^2 v + hs - u\dot{\phi}^2 = 0 \tag{C.70}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho = -6H^2 l\dot{\phi}^2 - 6H^2 v + 8HL\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 8Hl\dot{\phi}\ddot{\phi} + hs + u\dot{\phi}^2 = 0 \tag{C.71}$$

(Classe Ia)

$$\begin{aligned} J^\tau = \frac{\dot{\phi}}{4\big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)^3}\Big\{&\big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)^3\big(48H^2\zeta_{2,X}\dot{\phi}^2 + 24H^2\zeta_2 - 36H^2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 24H\zeta_3\dot{\phi}\ddot{\phi} + 8\zeta_{3,X}\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 - 8\zeta_3\dot{\phi}\dddot{\phi} - 8\zeta_3\ddot{\phi}^2 + 8\epsilon\big) \\ &- \big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)\big(3H\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 3H\big(16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 - 12\zeta_2^2\eta - 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 + \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 + 8\zeta_3\eta^2\big)\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ &+ \big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^3\dddot{\phi} + 2\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 + \big(-16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 + 12\zeta_2^2\eta \\ &+ 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 - \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 - 8\zeta_3\eta^2\big)\ddot{\phi}^2 - \big(16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 - 12\zeta_2^2\eta - 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 + \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 + 8\zeta_3\eta^2\big)\dot{\phi}\dddot{\phi}\big) + \big(2\big(\zeta_{2,X}\dot{\phi}^2 - \zeta_2\big) \\ &\big(16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 - 12\zeta_2^2\eta - 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 + 8\zeta_3\eta^2 + \eta\zeta_3^2\dot{\phi}^4\big) + 2\big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)\big(-24\zeta_{2,X}\zeta_2^2\dot{\phi}^2 + 12\zeta_{2,X}\zeta_2\eta + 6\zeta_{2,X}\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 \\ &+ 6\zeta_{3,X}\zeta_2\eta\dot{\phi}^2 - \zeta_{3,X}\zeta_3\eta\dot{\phi}^4 - 4\zeta_{3,X}\eta^2 + 8\zeta_2^3 - 6\zeta_2\zeta_3\eta + \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^2\big) + \big(-2\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(\zeta_{2,X}\dot{\phi}^2 - \zeta_2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 \\ &- 4\zeta_3\eta\big) + \big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)\big(\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(4\zeta_{2,X}\zeta_2 + 3\zeta_{2,X}\zeta_3\dot{\phi}^2 + 3\zeta_{3,X}\zeta_2\dot{\phi}^2 - 4\zeta_{3,X}\eta - 3\zeta_2\zeta_3\big) + \big(2\zeta_{2,X} - \zeta_{3,X}\dot{\phi}^2 + \zeta_3\big) \\ &\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\big)\big)\dot{\phi}^2\big)\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2\Big\} \end{aligned} \tag{C.72}$$

$$\begin{aligned} E_g[\mathcal{L}]^\tau{}_\tau = \frac{1}{8\big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)^3}\Big\{&8\big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)^3\big(-12H^2\zeta_{2,X}\dot{\phi}^4 + 9H^2\zeta_3\dot{\phi}^4 - 6H^2\eta + 6H\zeta_2\dot{\phi}\ddot{\phi} + 3H\zeta_3\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 2\zeta_{3,X}\dot{\phi}^4\ddot{\phi}^2 + \kappa\Lambda \\ &+ 2\zeta_3\dot{\phi}^3\dddot{\phi} + \zeta_3\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 - \epsilon\dot{\phi}^2\big) + \big(\zeta_2\dot{\phi}^2 - \eta\big)\big(6H\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 6H\big(16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 - 12\zeta_2^2\eta \\ &- 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 + \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 + 8\zeta_3\eta^2\big)\dot{\phi}\ddot{\phi} + 2\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 - 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^3\dddot{\phi} + 3\big(2\zeta_2 - \zeta_3\dot{\phi}^2\big)\big(2\zeta_2^2 + 3\zeta_2\zeta_3\dot{\phi}^2 \\ &- 4\zeta_3\eta\big)\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 + \big(-16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 + 12\zeta_2^2\eta + 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 - \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 - 8\zeta_3\eta^2\big)\ddot{\phi}^2 - 2\big(16\zeta_2^3\dot{\phi}^2 - 12\zeta_2^2\eta - 12\zeta_2\zeta_3\eta\dot{\phi}^2 + \zeta_3^2\eta\dot{\phi}^4 \end{aligned}$$

$$+8\zeta_3\eta^2\big)\dot\phi\dddot\phi\big)\dot\phi^2+2\big(-2\big(\zeta_{2,X}\dot\phi^2-\zeta_2\big)\big(16\zeta_2^3\dot\phi^2-12\zeta_2^2\eta-12\zeta_2\zeta_3\eta\dot\phi^2+8\zeta_3\eta^2+\eta\zeta_3^2\dot\phi^4\big)-2\big(\zeta_2\dot\phi^2-\eta\big)$$
$$\big(-24\zeta_{2,X}\zeta_2^2\dot\phi^2+12\zeta_{2,X}\zeta_2\eta+6\zeta_{2,X}\zeta_3\eta\dot\phi^2+6\zeta_{3,X}\zeta_2\eta\dot\phi^2-\zeta_{3,X}\zeta_3\eta\dot\phi^4-4\zeta_{3,X}\eta^2+8\zeta_2^3-6\zeta_2\zeta_3\eta+\zeta_3^2\eta\dot\phi^2\big)$$
$$+\big(2\big(2\zeta_2-\zeta_3\dot\phi^2\big)\big(\zeta_{2,X}\dot\phi^2-\zeta_2\big)\big(2\zeta_2^2+3\zeta_2\zeta_3\dot\phi^2-4\zeta_3\eta\big)-\big(\zeta_2\dot\phi^2-\eta\big)\big(\big(2\zeta_2-\zeta_3\dot\phi^2\big)\big(4\zeta_{2,X}\zeta_2+3\zeta_{2,X}\zeta_3\dot\phi^2$$
$$+3\zeta_{3,X}\zeta_2\dot\phi^2-4\zeta_{3,X}\eta-3\zeta_2\zeta_3\big)+\big(2\zeta_{2,X}-\zeta_{3,X}\dot\phi^2+\zeta_3\big)\big(2\zeta_2^2+3\zeta_2\zeta_3\dot\phi^2-4\zeta_3\eta\big)\big)\big)\dot\phi^2\big)\dot\phi^4\ddot\phi^2\Big\} \tag{C.73}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho=\frac{1}{8\big(\zeta_2\dot\phi^2-\eta\big)^2}\big(\big(2\zeta_2-\zeta_3\dot\phi^2\big)\big(2\zeta_2^2+3\zeta_2\zeta_3\dot\phi^2-4\zeta_3\eta\big)\dot\phi^4\ddot\phi^2+8\big(\zeta_2\dot\phi^2-\eta\big)^2\big(-3H^2\zeta_2\dot\phi^2-6H^2\eta+4H\zeta_{2,X}\dot\phi^3\ddot\phi$$
$$-4H\zeta_2\dot\phi\ddot\phi-4\zeta_{2,X}\big(3H\dot\phi+\ddot\phi\big)\dot\phi^2\ddot\phi+2\zeta_{3,X}\dot\phi^4\ddot\phi^2+\kappa\Lambda+2\zeta_2\big(3H\ddot\phi+\dddot\phi\big)\dot\phi+\zeta_2\big(9H^2\dot\phi^2+6H\dot\phi\ddot\phi+\ddot\phi^2\big)+\zeta_2\ddot\phi^2$$
$$-\zeta_3\dot\phi^3\dddot\phi-2\zeta_3\dot\phi^2\ddot\phi^2+\epsilon\dot\phi^2\big)+\big(-16\zeta_2^3\dot\phi^2+12\zeta_2^2\eta+12\zeta_2\zeta_3\eta\dot\phi^2-\zeta_3^2\eta\dot\phi^4-8\zeta_3\eta^2\big)\dot\phi^2\ddot\phi^2\big) \tag{C.74}$$

(Classe IIa)

$$J^\tau=6H^2\zeta_{1,X}\dot\phi^3+18H^2\zeta_{2,X}\dot\phi^3-24H^2\zeta_1\dot\phi+\frac{36H^2\eta}{\dot\phi}-72H^2\dot\phi+18H\zeta_1\ddot\phi+6H\zeta_2\ddot\phi+\frac{48H}{\eta}\zeta_2\ddot\phi-\frac{36H\eta\ddot\phi}{\dot\phi^2}-48H\ddot\phi$$
$$-6\zeta_{1,X}\dot\phi\ddot\phi^2-2\zeta_{2,X}\dot\phi\ddot\phi^2-\frac{16\zeta_{2,X}}{\eta}\dot\phi\ddot\phi^2+6\zeta_1\dddot\phi+2\zeta_2\dddot\phi+\frac{16\zeta_2}{\eta}\dddot\phi+2\epsilon\dot\phi-\frac{12\eta\dddot\phi}{\dot\phi^2}+\frac{12\eta\ddot\phi^2}{\dot\phi^3}-16\dddot\phi \tag{C.75}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\tau{}_\tau=-6H^2\zeta_{1,X}\dot\phi^4-18H^2\zeta_{2,X}\dot\phi^4+27H^2\zeta_1\dot\phi^2+9H^2\zeta_2\dot\phi^2-42H^2\eta+72H^2\dot\phi^2-24H\zeta_1\dot\phi\ddot\phi-\frac{48H}{\eta}\zeta_2\dot\phi\ddot\phi$$
$$+\frac{48H\eta\ddot\phi}{\dot\phi}+24H\dot\phi\ddot\phi+6\zeta_{1,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2+2\zeta_{2,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2+\frac{16\zeta_{2,X}}{\eta}\dot\phi^2\ddot\phi^2+\kappa\Lambda-6\zeta_1\dot\phi\dddot\phi+3\zeta_1\ddot\phi^2-2\zeta_2\dot\phi\dddot\phi+\zeta_2\ddot\phi^2$$
$$-\frac{16\zeta_2}{\eta}\dot\phi\dddot\phi+\frac{8\zeta_2}{\eta}\ddot\phi^2-\epsilon\dot\phi^2+\frac{12\eta\dddot\phi}{\dot\phi}-\frac{18\eta\ddot\phi^2}{\dot\phi^2}+16\dot\phi\dddot\phi-8\ddot\phi^2 \tag{C.76}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho=3H^2\zeta_1\dot\phi^2+9H^2\zeta_2\dot\phi^2-6H^2\eta-4H\zeta_{1,X}\dot\phi^3\ddot\phi-12H\zeta_{2,X}\dot\phi^3\ddot\phi+4H\zeta_1\dot\phi\ddot\phi+12H\zeta_2\dot\phi\ddot\phi+4\zeta_{1,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2-4\zeta_{2,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2$$
$$+\kappa\Lambda-2\zeta_1\dot\phi\dddot\phi-5\zeta_1\ddot\phi^2+2\zeta_2\dot\phi\dddot\phi+\zeta_2\ddot\phi^2-\frac{8\zeta_2}{\eta}\ddot\phi^2+\epsilon\dot\phi^2+\frac{4\eta\dddot\phi}{\dot\phi}+\frac{2\eta\ddot\phi^2}{\dot\phi^2}-8\dot\phi\dddot\phi \tag{C.77}$$

(Classe IIIa)

$$J^\tau=\frac{1}{2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)^2\dot\phi}\big(3H\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\dot\phi\ddot\phi+8\zeta_{1,X}\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)^2\dot\phi^2\ddot\phi^2-2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)^2$$
$$\big(-6H^2\zeta_{1,X}\dot\phi^3-18H^2\zeta_{2,X}\dot\phi^3+6H^2\zeta_1\dot\phi+9H^2\zeta_3\dot\phi^3+6H\zeta_1\ddot\phi-6H\zeta_2\ddot\phi+6H\zeta_3\dot\phi^2\ddot\phi+2\zeta_{1,X}\dot\phi\ddot\phi^2+2\zeta_{2,X}\dot\phi\ddot\phi^2$$
$$-2\zeta_{3,X}\dot\phi^3\ddot\phi^2+2\zeta_1\dddot\phi-2\zeta_2\dddot\phi+2\zeta_3\dot\phi^2\dddot\phi+2\zeta_3\dot\phi\ddot\phi^2-2\epsilon\dot\phi\big)\dot\phi+\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\dot\phi\dddot\phi$$
$$+2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\ddot\phi^2+\big(\big(\zeta_{1,X}+3\zeta_{2,X}\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\dot\phi^2$$
$$-2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)-2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_{1,X}\zeta_1+4\zeta_{1,X}\zeta_2+2\zeta_{1,X}n\dot\phi^2+4\zeta_{2,X}\zeta_1$$
$$+2\zeta_{3,X}\zeta_1\dot\phi^2+3\zeta_{3,X}\zeta_3\dot\phi^4-2\zeta_1\zeta_3-3\zeta_3^2\dot\phi^2\big)\dot\phi^2\big)\ddot\phi^2\big) \tag{C.78}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\tau{}_\tau=\frac{1}{4\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)^2}\big(-6H\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\dot\phi\ddot\phi+4\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)^2\big(-6H^2\zeta_{1,X}\dot\phi^4$$
$$-18H^2\zeta_{2,X}\dot\phi^4+9H^2\zeta_1\dot\phi^2+9H^2\zeta_2\dot\phi^2+9H^2\zeta_3\dot\phi^4+6H\zeta_1\dot\phi\ddot\phi+3H\zeta_3\dot\phi^3\ddot\phi+2\zeta_{1,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2+2\zeta_{2,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2$$
$$-2\zeta_{3,X}\dot\phi^4\ddot\phi^2+\kappa\Lambda+2\zeta_1\dot\phi\dddot\phi+3\zeta_1\ddot\phi^2-2\zeta_2\dot\phi\dddot\phi+\zeta_2\ddot\phi^2+2\zeta_3\dot\phi^3\dddot\phi+\zeta_3\dot\phi^2\ddot\phi^2-\epsilon\dot\phi^2-4\big(\zeta_{1,X}\dot\phi^2+l\big)\ddot\phi^2\big)$$
$$-\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(2\dot\phi\dddot\phi+3\ddot\phi^2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)+2\big(-\big(\zeta_{1,X}+3\zeta_{2,X}\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2$$
$$+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\dot\phi^2+2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)+2\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(4\zeta_{1,X}\zeta_1+4\zeta_{1,X}\zeta_2+2\zeta_{1,X}n\dot\phi^2$$
$$+4\zeta_{2,X}\zeta_1+2\zeta_{3,X}\zeta_1\dot\phi^2+3\zeta_{3,X}\zeta_3\dot\phi^4-2\zeta_1\zeta_3-3\zeta_3^2\dot\phi^2\big)\dot\phi^2\big)\ddot\phi^2\big) \tag{C.79}$$

$$E_g[\mathcal{L}]^\rho{}_\rho=\frac{1}{\zeta_1+3\zeta_2}\big(\big(\zeta_1+3\zeta_2\big)\big(3H^2\zeta_1\dot\phi^2-4H\zeta_{1,X}\dot\phi^3\ddot\phi+4H\zeta_1\dot\phi\ddot\phi-4\zeta_{2,X}\big(3H\dot\phi+\ddot\phi\big)\dot\phi^2\ddot\phi+2\zeta_{3,X}\dot\phi^4\ddot\phi^2+\kappa\Lambda+\zeta_1\ddot\phi^2$$
$$+2\zeta_2\big(3H\ddot\phi+\dddot\phi\big)\dot\phi+\zeta_2\big(9H^2\dot\phi^2+6H\dot\phi\ddot\phi+\ddot\phi^2\big)-\zeta_3\dot\phi^3\dddot\phi-2\zeta_3\dot\phi^2\ddot\phi^2+\epsilon\dot\phi^2\big)$$
$$-\frac{1}{4}\big(4\zeta_1^2+8\zeta_1\zeta_2+4\zeta_1\zeta_3\dot\phi^2+3\zeta_3^2\dot\phi^4\big)\ddot\phi^2\big) \tag{C.80}$$

(Classe Ia∩IIIa)

$$J^\tau=\frac{1}{4\zeta_1^2}\big(-3\zeta_{1,X}\zeta_3^2\dot\phi^5\ddot\phi^2+4\zeta_1^2\big(-12H^2\zeta_{1,X}\dot\phi^3-6H^2\zeta_1\dot\phi-9H^2\zeta_3\dot\phi^3-9H\zeta_1\ddot\phi-9H\zeta_3\dot\phi^2\ddot\phi+3\zeta_{1,X}\dot\phi\ddot\phi^2+3\zeta_{3,X}\dot\phi^3\ddot\phi^2$$
$$-3\zeta_1\dddot\phi-3\zeta_3\dot\phi^2\dddot\phi-3\zeta_3\dot\phi\ddot\phi^2+2\epsilon\dot\phi\big)+3\zeta_1\zeta_3\big(-3H\zeta_3\dot\phi\ddot\phi+2\zeta_{3,X}\dot\phi^2\ddot\phi^2-\zeta_3\dot\phi\dddot\phi-2\zeta_3\ddot\phi^2\big)\dot\phi^3\big) \tag{C.81}$$

$$
\begin{aligned}
E_g[\mathcal{L}]^{\tau}{}_{\tau} = \frac{1}{8\zeta_1^2}\big(&6\zeta_{1,X}\zeta_3^2\dot{\phi}^6\ddot{\phi}^2 + 4\zeta_1^2\big(24H^2\zeta_{1,X}\dot{\phi}^4 + 18H^2\zeta_3\dot{\phi}^4 + 6H\zeta_1\dot{\phi}\ddot{\phi} + 12H\zeta_3\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 6\zeta_{1,X}\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 - 6\zeta_{3,X}\dot{\phi}^4\ddot{\phi}^2 + 2\kappa\Lambda \\
&+ 6\zeta_1\dot{\phi}\dddot{\phi} - 3\zeta_1\ddot{\phi}^2 + 6\zeta_3\dot{\phi}^3\dddot{\phi} + 3\zeta_3\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 - 2\epsilon\dot{\phi}^2\big) + 3\zeta_1\zeta_3\big(6H\zeta_3\dot{\phi}\ddot{\phi} - 4\zeta_{3,X}\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 + 2\zeta_3\dot{\phi}\dddot{\phi} + 3\zeta_3\ddot{\phi}^2\big)\dot{\phi}^4\big)
\end{aligned} \tag{C.82}
$$

$$
\begin{aligned}
E_g[\mathcal{L}]^{\rho}{}_{\rho} = &-6H^2\zeta_1\dot{\phi}^2 + 8H\zeta_{1,X}\dot{\phi}^3\ddot{\phi} - 8H\zeta_1\dot{\phi}\ddot{\phi} + 4\zeta_{1,X}\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 + 2\zeta_{3,X}\dot{\phi}^4\ddot{\phi}^2 + \kappa\Lambda - 2\zeta_1\dot{\phi}\dddot{\phi} - \frac{\zeta_1}{2}\ddot{\phi}^2 \\
&- \zeta_3\dot{\phi}^3\dddot{\phi} - \frac{3\zeta_3}{2}\dot{\phi}^2\ddot{\phi}^2 + \epsilon\dot{\phi}^2 + \frac{3\zeta_3^2}{8\zeta_1}\dot{\phi}^4\ddot{\phi}^2
\end{aligned} \tag{C.83}
$$

C.6 Spazio-tempo statico e sfericamente simmetrico

In riferimento alla notazione introdotta nella Sezione 4.6 in merito allo studio di Strutture cosmiche statiche e sfericamente simmetriche nella sottoclasse degenere $\mathscr{C} = \text{Ia}^*$, si riportano nel caso di spazio-tempo sfericamente simmetrico le espressioni esplicite non nulle di

(Connessione di Levi Civita

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{\phi}_{\phi r} = \frac{1}{r} \qquad && \Gamma^{\theta}_{\theta r} = \frac{1}{r} \qquad && \Gamma^{r}_{rr} = \frac{1}{2}\lambda' \\
&\Gamma^{t}_{tr} = \frac{1}{2}\nu' && \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \cot(\theta) && \Gamma^{r}_{\phi\phi} = -re^{-\lambda}\sin^2(\theta) \\
&\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\frac{1}{2}\sin(2\theta) && \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -re^{-\lambda} && \Gamma^{r}_{tt} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'
\end{aligned} \tag{C.84}
$$

(Tensore di Ricci)

$$
\begin{aligned}
&R_{tt} = \Big\{r\Big(\frac{1}{4}\nu'^2 - \frac{1}{4}\nu'\lambda' + \frac{1}{2}\nu''\Big) + \nu'\Big\}\frac{e^{\nu-\lambda}}{r} \qquad && R_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\Big\{-r\nu' + r\lambda' + 2e^{\lambda} - 2\Big\}e^{-\lambda} \\
&R_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\Big(-r\nu' + r\lambda' + 2e^{\lambda} - 2\Big)e^{-\lambda}\sin^2(\theta) && R_{rr} = \frac{1}{r}\Big\{r\Big(-\frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu''\Big) + \lambda'\Big\}
\end{aligned}
$$

(Scalare di curvatura)

$$
R = \Big\{-\frac{1}{2}r^2\nu'^2 + \frac{1}{2}r^2\nu'\lambda' - r^2\nu'' - 2r\nu' + 2r\lambda' + 2e^{\lambda} - 2\Big\}\frac{e^{-\lambda}}{r^2} \tag{C.85}
$$

(Tensore di Einstein)

$$
\begin{aligned}
&G_{tt} = \frac{1}{4r}\Big\{2Rre^{\nu} + \big(r\left(\nu'^2 - \nu'\lambda' + 2\nu''\right) + 4\nu'\big)e^{\nu-\lambda}\Big\} \qquad && G_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\Big\{-Rr^2e^{\lambda} - r\nu' + r\lambda' + 2e^{\lambda} - 2\Big\}e^{-\lambda} \\
&G_{\phi\phi} = \frac{1}{2}\Big\{-Rr^2e^{\lambda} - r\nu' + r\lambda' + 2e^{\lambda} - 2\Big\}e^{-\lambda}\sin^2(\theta) && G_{rr} = -\frac{1}{2}R\,e^{\lambda} - \frac{1}{4}\nu'^2 + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{2}\nu'' + \frac{\lambda'}{r}
\end{aligned}
$$

(Derivate covarianti prime del campo scalare)

$$
\phi_t = \dot{\phi} \qquad \phi_r = \phi'
$$

(Derivate covarianti seconde del campo scalare)

$$
\begin{aligned}
&\phi_{\theta\theta} = re^{-\lambda}\phi' \qquad && \phi_{rr} = -\frac{1}{2}\phi'\lambda' + \phi'' \qquad && \phi_{tt} = -\frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu'\phi' + \ddot{\phi} \\
&\phi_{tr} = -\frac{1}{2}\nu'\dot{\phi} + \dot{\phi}' && \phi_{\phi\phi} = re^{-\lambda}\sin^2(\theta)\phi' &&
\end{aligned} \tag{C.86}
$$

(Derivate covarianti terze del campo scalare)

$$
\begin{aligned}
\phi_{t\theta\theta} &= re^{-\lambda}\dot{\phi}' \\
\phi_{r\theta\theta} &= -\Big\{r\big(\phi'\lambda' - \phi''\big) + \phi'\Big\}e^{-\lambda} \\
\phi_{t\phi\phi} &= re^{-\lambda}\sin^2(\theta)\dot{\phi}' \\
\phi_{r\phi\phi} &= -\Big\{r\big(\phi'\lambda' - \phi''\big) + \phi'\Big\}e^{-\lambda}\sin^2(\theta) \\
\phi_{ttr} &= \frac{1}{4}(\phi'\lambda' - 2\phi'')e^{\nu-\lambda}\nu' + \frac{1}{4}e^{\nu-\lambda}\nu'^2\phi' - \nu'\ddot{\phi} + (\dot{\phi}')^{\cdot} \\
\phi_{rrt} &= \frac{1}{4}\Big(\nu'\dot{\phi} - 2\dot{\phi}'\Big)\lambda' + \frac{1}{4}\nu'^2\dot{\phi} - \nu'\dot{\phi}' - \frac{1}{2}\dot{\phi}\nu'' + (\dot{\phi}')' \\
\phi_{ttt} &= \frac{1}{2}\Big\{e^{\nu}\nu'^2\dot{\phi} - 3e^{\nu}\nu'\dot{\phi}' + 2e^{\lambda}\dddot{\phi}\Big\}e^{-\lambda} \\
\phi_{rtt} &= \frac{1}{2}\Big\{e^{\nu}\nu'\phi'\lambda' - e^{\nu}\nu'\phi'' - e^{\nu}\phi'\nu'' - 2e^{\lambda}\nu'\ddot{\phi} + 2e^{\lambda}(\dot{\phi}')^{\cdot}\Big\}e^{-\lambda} \\
\phi_{trr} &= \frac{1}{2}\Big(\nu'\dot{\phi} - 2\dot{\phi}'\Big)\nu' - \frac{1}{2}\lambda'\dot{\phi}' + (\dot{\phi}')'
\end{aligned} \tag{C.87}
$$

$$\phi_{rrr} = \frac{1}{2}\phi'\lambda'^2 - \frac{1}{2}\phi'\lambda'' - \frac{3}{2}\lambda'\phi'' + \phi'''$$
$$\phi_{\phi r\phi} = -\left\{r\left(\frac{1}{2}\phi'\lambda' - \phi''\right) + \phi'\right\}e^{-\lambda}\sin^2(\theta)$$
$$\phi_{\theta r\theta} = -\left\{r\left(\frac{1}{2}\phi'\lambda' - \phi''\right) + \phi'\right\}e^{-\lambda}$$
$$\phi_{\phi t\phi} = -\frac{1}{2}r\left(\nu'\dot{\phi} - 2\dot{\phi}'\right)e^{-\lambda}\sin^2(\theta)$$
$$\phi_{\theta t\theta} = -\frac{1}{2}r\left(\nu'\dot{\phi} - 2\dot{\phi}'\right)e^{-\lambda}$$

Riferimenti bibliografici

[1] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, Constantinos Skordis, Phys.Rept. **513** 1-189 (2012), [ArXiv:1106.2476].

[2] Kazuya Koyama, Rept.Prog.Phys. **79** no. 4 046902 (2016) [ArXiv:1504.04623].

[3] Philippe Brax, Class.Quant.Grav. **30**, 214005 (2013).

[4] M. Ostrogradsky, Mem. Ac. St. Petersbourg, VI 4 385 (1850).

[5] G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10** 363 (1974).

[6] M. Zumalacarregui, T. S. Koivisto, and D. F. Mota, Phys.Rev. **D87** 083010 (2013), [ArXiv:1210.8016].

[7] Kazuya Koyama, Gustavo Niz, Gianmassimo Tasinato, Phys.Rev. **D88** 021502 (2013), [ArXiv:1305.0279].

[8] Rampei Kimura, Tsutomu Kobayashi, Kazuhiro Yamamoto, Phys.Rev. **D85** 024023 (2012), [arXiv:1111.6749].

[9] Eugeny Babichev, Christos Charmousis, Antoine Lehébel, Class.Quant.Grav. **33** no.15 154002 (2016), [arXiv:1604.06402]

[10] Emilio Bellini, Antonio J. Cuesta, Raul Jimenez, Licia Verde, JCAP **1602** no.02, 053 (2016), [arXiv:1509.07816].

[11] Tatsuya Narikawa , Tsutomu Kobayashi, Daisuke Yamauchi, Ryo Saito, Phys.Rev. **D87** 124006 (2013), [arXiv:1302.2311].

[12] Valentina Salvatelli, Federico Piazza, Christian Marinoni, JCAP **1609** no. 09 027 (2016), [arXiv:1602.08283]

[13] Jérôme Gleyzes , David Langlois, Federico Piazza, Filippo Vernizzi, Phys.Rev.Lett. **114** no. 21 211101 (2015), [arXiv:1404.6495].

[14] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, Filippo Vernizzi, JCAP **1502** 018 (2015), [arXiv:1408.1952].

[15] Marco Crisostomi, Kazuya Koyama, Gianmassimo Tasinato, JCAP **1604** no.04 044 (2016), [arXiv:1602.03119].

[16] Chunshan Lin, Shinji Mukohyama, Ryo Namba, Rio Saitou, JCAP **1410** no.10 071 (2014), [arXiv:1408.0670].

[17] Dario Bettoni, Stefano Liberati, Phys.Rev. *D88* 084020 (2013), [arXiv:1306.6724].

[18] Miguel Zumalacárregui, Juan García-Bellido, Phys.Rev. **D89** 064046 (2014) [arXiv:1308.4685].

[19] Guillem Domènech , Atsushi Naruko , Misao Sasaki, JCAP **1510** no.10 067 (2015), [arXiv:1505.00174].

[20] Marco Crisostomi, Matthew Hull, Kazuya Koyama, Gianmassimo Tasinato, JCAP **1603** no.03 038 (2016) [arXiv:1601.04658].

[21] Jeremy Sakstein, Harry Wilcox, David Bacon, Kazuya Koyama, Robert C. Nichol, JCAP **1607** no.07, 019 (2016), [arXiv:1603.06368].

[22] Kazuya Koyama, Jeremy Sakstein, Phys.Rev. **D91** 124066 (2015) [arXiv:1502.06872].

[23] Tsutomu Kobayashi, Yuki Watanabe, Daisuke Yamauchi, Phys.Rev. **D91** no.6, 064013, (2015), [arXiv:1411.4130].

[24] Ryo Saito, Daisuke Yamauchi, Shuntaro Mizuno, Jérôme Gleyzes, David Langlois, JCAP **1506** 008 (2015), [arXiv:1503.01448].

[25] Eugeny Babichev, Kazuya Koyama , David Langlois, Ryo Saito, Jeremy Sakstein, Class.Quant.Grav. **33** no.23 235014 (2016), [arXiv:1606.06627].

[26] David Langlois , Karim Noui, JCAP **1602** no.02 034 (2016), [arXiv:1510.06930].

[27] Jibril Ben Achour , David Langlois, Karim Noui, Phys.Rev. **D93** no.12 124005 (2016), [arXiv:1602.08398].

[28] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).

[29] Federico Piazza, Filippo Vernizzi, Class.Quant.Grav. **30** 214007 (2013), [arXiv:1307.4350].

[30] Jibril Ben Achour, Marco Crisostomi, Kazuya Koyama, David Langlois, Karim Noui, Gianmassimo Tasinato, [arXiv:1608.08135].

[31] M. Blau, *Lecture notes on general relativity*, Albert Einstein Center for Fundamental Physics, (2011).

RINGRAZIAMENTI

A conclusione di questo percorso di studio desidero ringraziare la mia famiglia ed Angela Pizzol per il conforto e l'amore con cui mi hanno supportato in questi anni di crescita. Dedico un ringraziamento particolare ad Enrico de Lazzari con cui condivido amicizia e passione per la scienza.