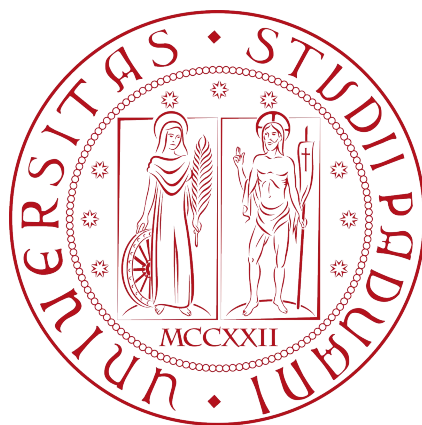




UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Una famiglia di moti oscillanti nel problema dei
tre corpi**

**Relatore
Prof. Massimiliano Guzzo**

**Laureando
Bianca Giraldi**

Anno Accademico 2025/2026

Indice

1	Proprietà preliminari del problema PCR3C	3
1.1	Equazioni del moto	3
1.2	Soluzioni asintotiche e loro varietà stabile e instabile	7
1.2.1	Nozioni per i campi vettoriali	7
1.2.2	Nozioni per mappe	9
1.2.3	Punti omoclini	10
1.3	Problema di Keplero	11
2	Studio delle soluzioni oscillanti	15
2.1	Introduzione	15
2.2	Orbite e sezione di Poincaré	17
2.3	Variabili di McGehee	18
2.3.1	Problema imperturbato	19
2.3.2	Problema perturbato	20
2.3.3	Caratteristica sezione di Poincaré	22
2.4	Intersezione trasversale delle varietà	22
2.5	Esistenza soluzioni oscillanti	24
2.5.1	Mappa a ferro di cavallo	24
2.5.2	Dinamica simbolica	26
2.5.3	Definizione di sequenze simboliche	28
2.5.4	Applicazione della mappa ferro di cavallo	29

Introduzione

Questa tesi è dedicata alla presentazione dei meccanismi dinamici che dimostrano un particolare tipo di soluzioni nel problema dei tre corpi piano, circolare e ristretto (problema PCR3C), ovvero le soluzioni oscillanti. Queste ultime sono orbite del terzo corpo che si allontanano arbitrariamente da ogni regione limitata e tornano infinite volte in una certa regione limitata. Tali soluzioni sono state oggetto di un'ampia letteratura scientifica e continuano a rappresentare, ancora oggi, un tema di ricerca attivo nell'ambito della meccanica celeste e dei sistemi dinamici (si vedano, ad esempio [1–4, 9–11, 16, 19]). La loro importanza deriva anche dal fatto che sono uno dei pochi casi di soluzioni caotiche del problema dei tre corpi descritte in maniera rigorosa.

È ben noto che il problema dei tre corpi gravitazionale non è integrabile, a differenza del problema a due corpi. Esso è stato studiato in letteratura sotto varie ipotesi, più o meno restrittive, ed esibisce sia moti cosiddetti regolari, che moti di tipo caotico, ovvero dipendenti con grande sensibilità dalle condizioni iniziali. Oltre ai grandi passi avanti che gli studi su di esso (dove i primi risultati vengono da Newton e Poincaré [17], [18]) hanno portato nella Meccanica Celeste, e alla fondazione e sviluppo della teoria dei sistemi dinamici, gli ambiti di applicazione di queste conoscenze sono molteplici. Un esempio ne è l'astronomia, dove il problema PCR3C viene estensivamente utilizzato per lo studio dei moti dei corpi celesti del sistema solare, o, più recentemente, per il volo spaziale, con lo scopo di trovare orbite più favorevoli, ovvero con minimo consumo energetico, per le missioni spaziali.

La tesi è suddivisa in due capitoli. Nel primo capitolo vengono introdotti concetti base di Meccanica Celeste propedeutici allo studio delle soluzioni oscillanti. È diviso in tre sezioni: nella prima vengono introdotte le equazioni del problema PCR3C, le sue quantità conservate, e, per i diversi valori assunti da quest'ultime, le regioni del piano dove il moto è confinato. Nella seconda sezione si formalizzano i concetti di teoria dei sistemi dinamici, quali la varietà stabile e instabile, in campi vettoriali e mappe, e si descrivono alcune proprietà peculiari della dinamica collegate all'esistenza di loro intersezioni trasverse (punti omoclini, orbite omocline - più in generale fenomeni omoclini). Nella terza sezione si

fornisce una breve descrizione del problema di Keplero, definito in un sistema di riferimento sinodico, che rappresenta il limite del problema PCR3C per valori del parametro di massa che tendono a zero. Il secondo capitolo fornisce una descrizione degli elementi che conducono alla dimostrazione vera e propria dell'esistenza delle soluzioni oscillanti, ripercorrendo il metodo seguito da [10]. È diviso in cinque sezioni: nella prima vi è una breve introduzione al problema. Nella seconda sezione si definiscono le variabili in gioco, si chiarisce la topologia dell'insieme cui appartengono, e si mostra che il problema si riconduce allo studio di una opportuna sezione di Poincaré. Nella terza si introducono le variabili di McGehee [11], che portano l'infinito nell'origine, e che costituiscono l'elemento tecnico fondamentale per poter applicare la teoria dei sistemi dinamici, nella parte relativa alle proprietà asintotiche di punti di equilibrio e le loro varietà stabili e instabili. Nella quarta sezione si descrive l'intersezione trasversale delle varietà stabile e instabile, che in [10] viene dimostrata invocando il metodo di Poincaré-Melnikov. L'esistenza di punti omoclini ha permesso di utilizzare risultati generali sui cosiddetti metodi omoclini per descrivere la dinamica nell'intorno delle varietà stabile e instabile, in particolare la dinamica simbolica definita dal cosiddetto "ferro di cavallo di Smale". Nella quinta sezione, seguendo [10], si espone brevemente cos'è la mappa a ferro di cavallo di Smale per poi generalizzarla e usarla per costruire una dinamica simbolica attorno al punto di intersezione delle varietà: questo ha permesso di dimostrare l'esistenza delle soluzioni oscillanti.

Capitolo 1

Proprietà preliminari del problema PCR3C

1.1 Equazioni del moto

In questa prima sezione si introducono le equazioni del particolare problema studiato in questa tesi, ovvero il *problema dei tre corpi planare circolare ristretto*. Quelle riportate sono nozioni base descritte in vari manuali di meccanica celeste, come ad esempio [8, 15, 21].

Con “problema dei tre corpi” si intende lo studio dei moti di tre corpi massivi che interagiscono tramite la forza di gravità, denotiamo le loro posizioni P_1, P_2, P_3 e le rispettive masse m_1, m_2, m_3 . Il problema viene detto “ridotto” se consideriamo la massa del terzo corpo m_3 come nulla, cosicché P_3 non influenza il moto dei due corpi massivi P_1 e P_2 , i due primari. P_1 e P_2 saranno pertanto soggetti ad un moto corrispondente ad una soluzione del problema dei due corpi, mentre P_3 si muoverà soggetto all’attrazione gravitazionale di P_1 e P_2 . Il moto di P_3 (che da ora sarà rinominato P) è il soggetto del nostro studio.

Il problema è detto “planare” e “circolare” se P_1 e P_2 compiono orbite circolari attorno al comune centro di massa e P si muove nel loro stesso piano. D’ora in poi si considera solo il problema piano circolare ristretto, per il quale è usuale scegliere unità di misura di tempi, lunghezze e masse tali che:

- i) $m_1 + m_2 = 1$; dunque $m_1 = 1 - m$ e $m_2 = m$ per qualche $m \in (0, 1/2]$,
- ii) $\|P_1 - P_2\| = 1$,
- iii) tempo di rivoluzione mutua di P_1 e P_2 attorno al loro centro di massa pari a 2π ,

con conseguenza che la costante di gravità sarà unitaria.

La descrizione dei moti del problema PCR3C utilizza due sistemi di riferimento, quello sidereo (X, Y) , ovvero il sistema inerziale centrato nel baricentro di P_1 e P_2 , e quello sinodico (x, y) , ovvero il sistema rotante rispetto a quello sidereo in modo che P_1 e P_2 appartengano al suo asse x per ogni tempo. Il sistema sidereo è definito in modo che per $t = 0$, P_1 e P_2 si trovino sull'asse X , pertanto, per ogni tempo, le loro posizioni sono $R_1 = -m(\cos t, \sin t)$ e $R_2 = (1 - m)(\cos t, \sin t)$, mentre la lagrangiana del sistema è:

$$L(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}, t) = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{1 - m}{d_1} + \frac{m}{d_2} \quad (1.1)$$

dove $d_1 = \|(X, Y) - R_1\|$ e $d_2 = \|(X, Y) - R_2\|$ sono le distanze del terzo corpo dai due primari. La lagrangiana nel sistema rotante (tenendo conto che il sistema sinodico ruota con vettore velocità angolare $w = (0, 0, 1)$) è invece:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} + \dot{y}x - \dot{x}y + \frac{1 - m}{r_1} + \frac{m}{r_2}. \quad (1.2)$$

Le equazioni di Lagrange nel sistema sinodico sono rappresentate introducendo l'energia potenziale $V(x, y)$, ovvero:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.3)$$

con

$$V(x, y) = -\frac{(x^2 + y^2)}{2} - \frac{1 - m}{r_1} - \frac{m}{r_2} \quad (1.4)$$

e, poiché P_1 e P_2 hanno coordinate sinodiche $-m(1, 0)$ e $(1 - m)(1, 0)$, le distanze da essi di P assumono la forma:

$$r_1 = \sqrt{(x + m)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x - 1 + m)^2 + y^2}. \quad (1.5)$$

Esaminiamo ora due proprietà elementari del sistema lagrangiano appena definito, che risultano fondamentali per lo studio dei moti.

Poiché la lagrangiana (1.2) è autonoma si ha la conservazione del cosiddetto *integrale di Jacobi*:

$$J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) \quad (1.6)$$

Capitolo 1

ovvero, secondo la tradizione della Meccanica Celeste, della *costante di Jacobi* C :

$$C = -2J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2V(x, y) = 2M_Z - 2E, \quad (1.7)$$

ove M_Z rappresenta il momento angolare e E l'energia, entrambe nel sistema sidereo. Dalla conservazione di C si deducono delle informazioni preliminari sul moto. Dalla ovvia disuguaglianza:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{1-m}{r_1} + 2\frac{m}{r_2} - C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \geq 0 \quad (1.8)$$

segue che per ogni valore della costante di Jacobi $c \in \mathbb{R}$ i moti possono avvenire solo nella regione del piano x, y definita dalle soluzioni della disequazione:

$$x^2 + y^2 + 2\frac{1-m}{r_1} + 2\frac{m}{r_2} - c \geq 0, \quad (1.9)$$

che si può riscrivere anche nella forma:

$$V(x, y) \leq -c/2 := J. \quad (1.10)$$

Questa regione nel piano viene detta “regione ammissibile” (o *regione di Hill*), il cui bordo corrisponde ai punti in cui i moti hanno velocità nulla. Il complementare di questa regione è detto “regione proibita”, poiché nessun moto con costante di Jacobi c può entrarvi.

Dallo studio della funzione $V(x, y)$, che lontano dall'origine è approssimata da un paraboloide rovesciato, si osserva la presenza di due singolarità in $(-m, 0)$ e in $(1-m, 0)$. A seconda del valore di c , si possono avere due casi possibili: la regione ammissibile è tutto il piano (x, y) se $\max V(x, y) \leq -\frac{1}{2}c$; alternativamente, la regione ammissibile è costituita da una oppure due o tre regioni sconnesse separate dalla regione proibita. Nel primo caso vi è un'unica regione ammissibile con regione proibita diversa dal vuoto, negli altri casi vi sono i moti di tipo satellite attorno a P_1 e P_2 connessi tra loro, e i moti esterni sconnessi, oppure anche i moti di tipo satellite attorno a P_1 e P_2 sono sconnessi tra loro, oltre che con la regione esterna.

L'energia potenziale $V(x, y)$ ha, per ogni $m > 0$, cinque punti critici, oggi chiamati equilibri lagrangiani del problema dei tre corpi. Essi sono i tre punti collineari $L_1 = (x_1, 0)$, $L_2 = (x_2, 0)$, $L_3 = (x_3, 0)$ con $x_3 < -m < x_1 < 1-m < x_2$, che corrispondono a punti di sella, e L_4, L_5 , situati nei vertici di due triangoli equilateri la cui base è il segmento che congiunge i due primari, per convenzione L_4 nel semipiano $y > 0$ e L_5 in $y < 0$, entrambi punti di massimo locale (si veda figura 1.1). A seconda del valore della costante

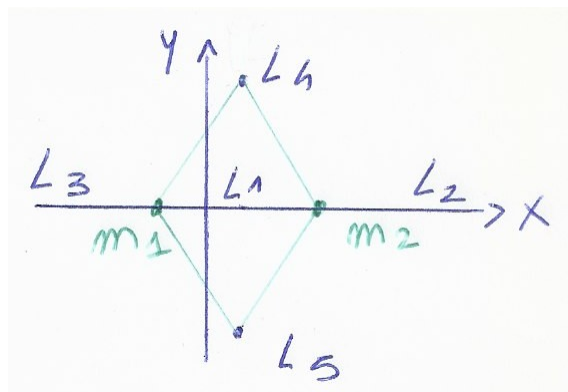
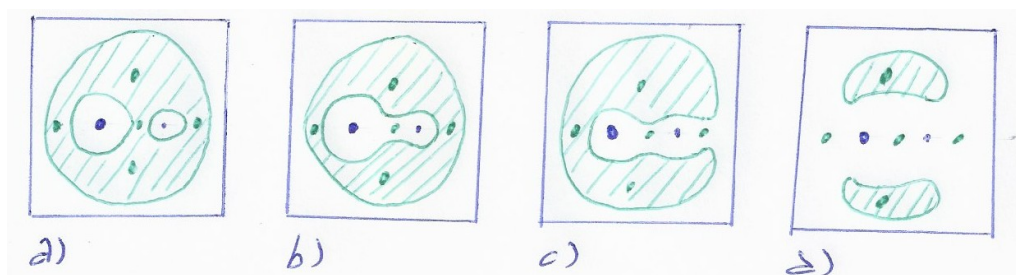


Figura 1.1: Collocazione dei cinque punti di equilibrio lagrangiani.

di Jacobi c la regione ammissibile e quella proibita variano, con possibilità di aprire dei passaggi tra la regione esterna e quella del sistema binario per valori sufficientemente alti di $-(1/2)c$. Al crescere di questo valore, infatti, si osserva che la regione proibita tende a rimpicciolirsi attorno ai due punti di equilibrio L_4 ed L_5 .

In particolare (osservando anche la figura 1.2), mentre per $-(1/2)c < V(L_1)$ i moti attorno a P_1 e P_2 di tipo satellite, e quelli attorno al sistema binario, sono separati dalla regione proibita (caso a), aumentando il valore $-(1/2)c$ si osserva che per $V(L_1) < -(1/2)c < V(L_2)$ si apre un canale di comunicazione tra i moti di tipo satellite attorno a P_1 e P_2 (caso b). Aumentando nuovamente a un valore $V(L_2) < -(1/2)c < V(L_3)$ si apre un canale anche con l'esterno del sistema binario (caso c). Continuando ad aumentarne, il canale di comunicazione si allarga maggiormente (caso d).


 Figura 1.2: Regioni permesse e proibite al variare di c . La parte verde rappresenta la regione proibita, i punti verdi rappresentano i punti di equilibrio lagrangiani mentre i punti blu le posizioni dei due primari.

Nello studio delle soluzioni oscillanti la costante di Jacobi viene presa grande, e dunque ci troviamo nel caso iniziale tra quelli sopracitati. Trattandosi di moti che si allontanano infinitamente dai due primari, il corpo si troverà nella zona esterna al sistema binario, con impossibilità di diventare un moto di tipo satellite attorno a P_1 o P_2 , e con impossibilità di collisioni. Ci riferiremo a questa regione esterna come *regione R*.

1.2 Soluzioni asintotiche e loro varietà stabile e instabile

Per dimostrare l'esistenza di soluzioni oscillanti serviranno nozioni sulle soluzioni asintotiche a punti di equilibrio, che appartengono alle cosiddette varietà stabile e instabile. In questa sezione si analizza la natura delle soluzioni vicino ai punti di equilibrio di equazioni non lineari per i campi vettoriali e poi, generalizzando quanto trovato, per le mappe. Le seguenti informazioni sono ricavabili in vari manuali di sistemi dinamici, come ad esempio [6, 7, 22].

1.2.1 Nozioni per i campi vettoriali

Consideriamo equazioni differenziali del primo ordine:

$$\dot{x} = X(x) \quad (1.11)$$

ove $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, con D insieme aperto detto *spazio delle fasi*. Siano inoltre soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy sull'esistenza e unicità delle soluzioni nella forma globale: per ogni $x_0 \in D$ esiste un'unica soluzione $x(t) \in D$, definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e tale che $x(0) = x_0$. È pertanto possibile definire il flusso, ovvero la mappa:

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} \times D &\rightarrow D \\ (t, x) &\mapsto \phi(t, x) \end{aligned} \quad (1.12)$$

che associa il valore al tempo t della soluzione con dato iniziale x_0 , per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $x \in D$. La curva $x(t)$ tracciata dalla soluzione in D viene chiamata *orbita*.

Consideriamo l'aspetto più importante per la discussione delle soluzioni oscillanti, ovvero le proprietà dei punti di equilibrio c dell'equazione differenziale (1.11).

Per studiare le proprietà asintotiche dei punti di equilibrio si parte dalla linearizzazione dell'equazione differenziale su c , ovvero si sviluppa il campo X in serie di Taylor e si ottiene:

$$\frac{d}{dt}(x - c) = A(x - c) \quad \text{con} \quad A_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(c). \quad (1.13)$$

Ricordiamo che un punto di equilibrio viene classificato come iperbolico (ipotesi standard per la teoria delle varietà stabile e instabile) se tutti gli autovalori λ di A soddisfano $\text{Re } \lambda \neq 0$.

Le nozioni più immediate sulle proprietà asintotiche del punto di equilibrio sono ottenute dalla soluzione dell'equazione linearizzata:

$$\dot{x} = Ax \quad (1.14)$$

(con abuso di notazione indichiamo x al posto di $x - c$ in (1.13)). Ipotizziamo che A abbia autovalori tutti distinti, individuiamo dei sottospazi lineari invarianti detti spazio stabile, instabile e centrale, definiti come segue.

Per ogni autovalore reale λ , con $u_\lambda \in \mathbb{R}^n$ corrispondente autovettore, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$x_0 \in \langle u_\lambda \rangle \Rightarrow \phi(t, x_0) \in \langle u_\lambda \rangle. \quad (1.15)$$

Per ogni autovalore complesso $\lambda = \alpha \pm i\beta$, con autovettore $v_\lambda \pm iw_\lambda$, $v_\lambda, w_\lambda \in \mathbb{R}^n$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta:

$$x_0 \in \langle v_\lambda, w_\lambda \rangle \Rightarrow \phi(t, x_0) \in \langle v_\lambda, w_\lambda \rangle. \quad (1.16)$$

Definiamo ora una partizione di questi vettori in tre insiemi:

- i) $u_\lambda \in J^s$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda < 0$; $v_\lambda, w_\lambda \in J^s$ se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\text{Re } \lambda < 0$;
- ii) $u_\lambda \in J^c$ se $\lambda = 0$; $v_\lambda, w_\lambda \in J^c$ se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\text{Re } \lambda = 0$;
- iii) $u_\lambda \in J^u$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$; $v_\lambda, w_\lambda \in J^u$ se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\text{Re } \lambda > 0$.

Si definiscono quindi lo spazio stabile $E^s \subseteq \mathbb{R}^n$ come lo spazio generato da tutti i vettori di J^s , lo spazio centrale E^c come lo spazio generato da tutti i vettori di J^c , e lo spazio instabile E^u generato dai vettori di J^u . Risulta $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ ed i tre spazi sono invarianti, ovvero se $x(0) \in E^s, E^u, E^c$, anche $x(t) \in E^s, E^u, E^c$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. In particolare, se c è un punto iperbolico, $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$.

Si esporta questa descrizione asintotica delle soluzioni dell'equazione linearizzata, con le dovute modifiche, al caso non lineare per mezzo di fondamentali teoremi della teoria dei sistemi dinamici, ovvero il *Teorema della varietà stabile* e il *Teorema della varietà centrale* (per quanto riguarda la varietà instabile, essa corrisponde a quella stabile per il flusso inverso). L'idea è che gli spazi invarianti E^s, E^u e E^c sopra definiti siano sostituiti da opportune varietà differenziali, dette varietà stabile W^s , instabile W^u e centrale W^c , che localmente al punto di equilibrio hanno proprietà analoghe a E^s, E^u e E^c , mentre globalmente possono presentare proprietà ben più complesse, compatibili con l'esistenza di dinamiche caotiche.

Innanzitutto non è restrittivo assumere che il punto di equilibrio iperbolico sia $c = (0, \dots, 0)$, e che l'equazione differenziale abbia la forma:

$$\dot{x} = Ax + f(x) \quad (1.17)$$

ove $f(x)$ è almeno quadratica in x (di conseguenza, A è proprio la matrice jacobiana del campo vettoriale in $c = (0, \dots, 0)$). Il *Teorema della varietà stabile locale* garantisce che

esistono un intorno U di c e degli insiemi:

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(c) &= \left\{ x \in U : \phi(t, x) \in U \ \forall t \geq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = c \right\}, \\ W_{loc}^u(c) &= \left\{ x \in U : \phi(t, x) \in U \ \forall t \leq 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = c \right\}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

detti varietà stabile e instabile locale di c (quest'ultima definita ragionando con il flusso inverso rispetto alla prima) tali che $W_{loc}^s(0)$ e $W_{loc}^u(0)$ siano varietà differenziabili, di dimensione rispettivamente pari a quella di E^s ed E^u , tangenti in c ai corrispondenti sottospazi E^s, E^u , e rappresentabili come grafico cartesiano di una funzione differenziabile il cui differenziale si annulla in 0 (dunque almeno quadratica). Le varietà locali definite in (1.18) vengono poi utilizzate per definire, attraverso il flusso, le varietà globali:

$$\begin{aligned} W^s &= \bigcup_{t \leq 0} \phi(t, W_{loc}^s) = \left\{ x \in D : \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = c \right\}, \\ W^u &= \bigcup_{t \geq 0} \phi(t, W_{loc}^u) = \left\{ x \in D : \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t, x) = c \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Sono le varietà globali che, sotto opportune ipotesi, assumono una struttura così complessa da essere utilizzate come riferimento per la definizione di dinamiche di tipo caotico.

1.2.2 Nozioni per mappe

Per la discussione delle proprietà asintotiche di punti di equilibrio ed orbite periodiche è usuale nella teoria dei sistemi dinamici generalizzare questi risultati anche a iterazioni di mappe. Considerando un diffeomorfismo $\psi : D \rightarrow D$, chiamato *mappa*, è possibile associarvi una dinamica definendo per ogni $x \in D$ la sua orbita discreta data dalla sua iterazione:

$$\begin{aligned} \psi^t &= \psi \circ \dots \circ \psi(x) & t \text{ volte se } t \in \mathbb{Z} \text{ e } t \geq 0, \\ \psi^t &= \psi^{-1} \circ \dots \circ \psi^{-1}(x) & |t| \text{ volte se } t \in \mathbb{Z} \text{ e } t < 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

La nozione di punto di equilibrio di un'equazione differenziale viene trasportata per le mappe nella nozione di punto fisso, ovvero punti $c \in D$ tali che $\psi(c) = c$, e le soluzioni asintotiche a un punto fisso si studiano mediante la mappa linearizzata su di esso, ovvero la mappa:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{dove} \quad B_{ij} = \left. \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right|_{(c)} \\ x &\mapsto Bx \end{aligned} \quad (1.21)$$

il punto fisso c viene detto iperbolico se tutti gli autovalori μ della matrice B soddisfano $|\mu| \neq 1$.

Supponiamo ora che la mappa ψ con spazio delle fasi D abbia un punto iperbolico c di sella, cioè, in dimensione 2, la matrice B abbia autovalori reali μ_1, μ_2 con $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$. Gli autovettori u_1, u_2 che vi sono associati definiscono degli spazi lineari invarianti per la mappa linearizzata. Essi vengono identificati come spazio stabile E^s e spazio instabile E^u . Si possono definire varietà stabile e instabile globale come:

$$\begin{aligned} W^s &= \left\{ x \in D/c : \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi^t(x) = c \right\}, \\ W^u &= \left\{ x \in D/c : \lim_{t \rightarrow -\infty} \psi^{-t}(x) = c \right\}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Il *Teorema della varietà stabile per le mappe* assicura che esse sono varietà differenziali invarianti di dimensione uno, tangenti in c agli spazi stabile e instabile.

Un particolare caso di mappe è dato dalle *sezioni di Poincaré* del flusso di un'equazione differenziale del primo ordine. Esse consentono di sostituire lo studio del flusso dell'equazione differenziale con quello dell'iterazione di una mappa su una superficie Σ ad esso trasversale. Infatti sia $\Sigma \subseteq D$ una superficie di dimensione $n - 1$ tale che per ogni $x \in \Sigma$ esista un tempo di ritorno $t(x) > 0$ tale che $\phi(t(x), x) \in \Sigma$ (si richiede anche che ciò avvenga “sempre dalla stessa parte della superficie”). Allora è ben definita la funzione:

$$\begin{aligned} \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \psi(x) = \phi(t(x), x) \end{aligned}$$

che è detta, per l'appunto, sezione di Poincaré. L'iterazione di questa mappa definisce una dinamica discreta sulla superficie Σ .

1.2.3 Punti omoclini

La struttura delle varietà stabile e instabile, fondamentale per descrivere le proprietà dei moti asintotici ad un equilibrio o ad un punto fisso, è fortemente caratterizzata dalla presenza o meno dei cosiddetti *punti omoclini* e delle orbite ad essi associati.

Si definisce punto omoclino un punto x_0 tale che $x_0 \in W^s \cap W^u$ con intersezione trasversa delle varietà. Dato un punto di equilibrio, od un punto fisso, iperbolico, per essi sono definite le varietà stabile e instabile, tuttavia, non è garantita l'esistenza di punti omoclini per esse. L'esistenza di un punto omoclino è un'ipotesi importante che garantisce una struttura molto peculiare delle varietà W^s e W^u , che spesso è associata all'esistenza di caos (detto caos omoclino).

L'orbita che contiene un punto omoclino è detta *orbita omoclina* e si può dimostrare che

Capitolo 1

ogni suo punto è un punto omoclino. Da questo segue che la varietà stabile e instabile continuano ad intersecarsi trasversalmente formando dei *lobi* i quali tendono ad addensarsi verso il punto di equilibrio e a diventare paralleli a E^u per la varietà instabile e E^s per quella stabile (si veda la figura 1.3 per una tipica rappresentazione grafica).

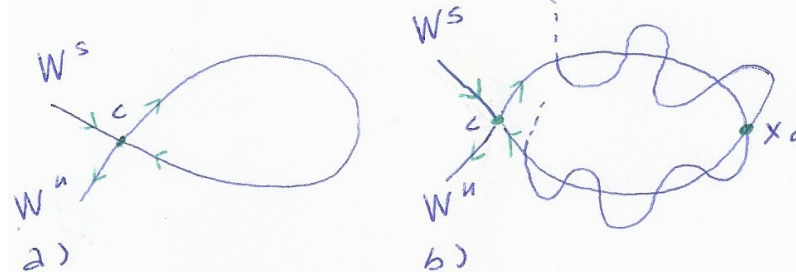


Figura 1.3: Nella figura a) $W^s = W^u$ e non vi sono punti omoclini. Nella figura b) le varietà sono diverse e si presentano punti omoclini con la presenza di lobi.

Nel ricercare le soluzioni oscillanti analizzeremo proprio un intorno di un punto omoclino.

1.3 Problema di Keplero

Il parametro $m \in (0, 1/2]$ che definisce il problema PCR3C per la maggior parte degli esempi di interesse fisico assume valori molto piccoli rispetto a $1/2$, cosicché il problema può essere trattato come perturbazione del problema di Keplero. Questa condizione si presenta, per esempio, nel sistema solare, ove P_1 e P_2 possono essere identificati con il Sole ed un pianeta, o con un pianeta e un suo satellite.

Il caso $m = 0$, ovvero $m_1 = 1$ e $m_2 = 0$, cui ci riferiremo come imperturbato, nel sistema sinodico è rappresentato dalla lagrangiana:

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} + \frac{x^2 + y^2}{2} + \dot{y}x - \dot{x}y + \frac{1}{r} \quad (1.23)$$

ove $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, con equazioni di Lagrange:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= -\frac{\partial V_0}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= -\frac{\partial V_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.24)$$

con:

$$V_0(x, y) = -\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1}{r} \quad (1.25)$$

e con conseguente riscrittura della costante di Jacobi:

$$C = -2J(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2V_0(x, y) = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + x^2 + y^2 + \frac{2}{r}. \quad (1.26)$$

Ricordiamo che la descrizione classica dei moti del problema di Keplero nel sistema di riferimento inerziale fornisce l'equazione ridotta per la variabile r :

$$\ddot{r} = \frac{l_3^2}{r^3} - U'(r) \quad \text{con} \quad U(r) = -\frac{1}{r} \quad (1.27)$$

dove l_3 rappresenta il valore della componente M_Z perpendicolare al piano del momento angolare, conservato poiché la forza è centrale.

Nel sistema sidereo, in particolare, l'integrale di Jacobi assume la forma:

$$\begin{aligned} J &= E - l_3 = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{r} - (X\dot{Y} - Y\dot{X}), \\ E &= \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{1}{r}, \\ l_3 &= X\dot{Y} - Y\dot{X}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Il ritratto in fase nel piano $r, \dot{r}$, dedotto dal potenziale efficace:

$$U_{eff} = \frac{l_3^2}{2r^2} + U(r) = \frac{l_3^2}{2r^2} - \frac{1}{r}, \quad (1.29)$$

è rappresentato in figura 1.4. In questo caso si osserva la presenza di una separatrice, che rappresenta le orbite paraboliche e separa le orbite a energia inferiore, ellittiche, da quelle con energia superiore, iperboliche. Il punto all'infinito della separatrice verrà ridefinito come punto di equilibrio mediante le cosiddette variabili di McGehee. Per $m = 0$ non vi sono punti omoclini.

Chiaramente in questo caso non esistono soluzioni oscillanti.

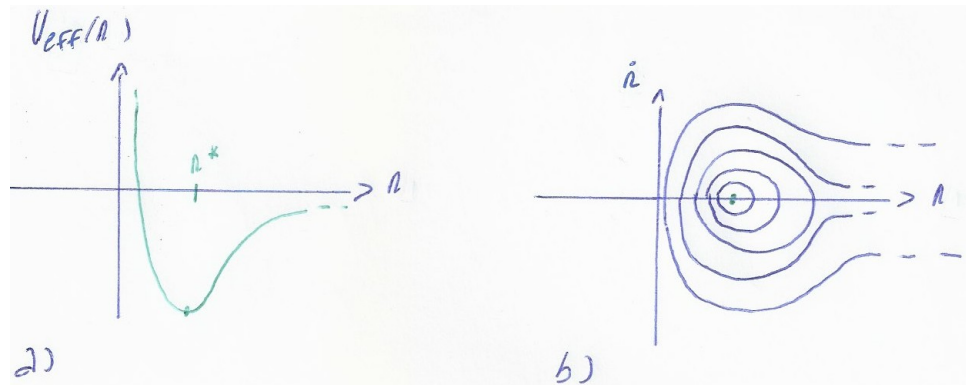


Figura 1.4: Grafico dell'energia potenziale efficace nel problema di Keplero nella figura a) e ritratto in fase in b). La separatrice è la prima curva nel ritratto in fase a non essere chiusa, arriverà allo zero per $r = \infty$.

Capitolo 2

Studio delle soluzioni oscillanti

2.1 Introduzione

Come noto sin dagli studi di carattere fondamentale di Poincaré [18] il problema dei tre corpi non è integrabile, e pertanto non è possibile avere una rappresentazione esplicita del suo flusso. Anche il calcolo di soluzioni particolari non è semplice, nemmeno nelle versioni semplificate dei vari problemi ristretti.

Dal momento che una rappresentazione esplicita di tutte le soluzioni non è disponibile (come ad esempio lo è per il problema di Keplero), studi pionieristici hanno cominciato col classificare le diverse proprietà che le varie soluzioni possono esibire. Per il problema PCR3C sono stati definiti i diversi comportamenti qualitativi che la traiettoria di P può avere per il tempo che tende a infinito, sia nel futuro che nel passato, da Chazy, nel 1922 [1]. Chazy diede la seguente classificazione delle soluzioni, ripresa da [9]. Si considera il problema generale dei tre corpi, e si denota con r_k il vettore relativo $P_j - P_i$ per $i \neq k$, $j \neq k$ e $i < j$. Allora, le soluzioni si dicono:

- Iperboliche (H): $|r_i| \rightarrow \infty$, $|\dot{r}_i| \rightarrow c_i > 0$ per $t \rightarrow \infty$.
- Iperboliche-paraboliche (HP_k): $|r_i| \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, 3$, $|\dot{r}_k| \rightarrow 0$, $|\dot{r}_i| \rightarrow c_i > 0$, $i \neq k$, $t \rightarrow \infty$.
- Iperboliche-ellittiche (HE_k): $|r_i| \rightarrow \infty$, $|\dot{r}_i| \rightarrow c_i > 0$, $i \neq k$, per $t \rightarrow \infty$, $\sup_{t \geq t_0} |r_k| < \infty$.
- Paraboliche-ellittiche (PE_k): $|r_i| \rightarrow \infty$, $|\dot{r}_i| \rightarrow 0$, $i \neq k$, per $t \rightarrow \infty$, $\sup_{t \geq t_0} |r_k| < \infty$.
- Paraboliche (P): $|r_i| \rightarrow \infty$, $|\dot{r}_i| \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.
- Confinare (B): $\sup_{t \geq t_0} |r_i| < \infty$.
- Oscillanti (OS): $\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_i |r_i| = \infty$ e $\liminf_{t \rightarrow \infty} \sup_i |r_i| < \infty$.

(chiaramente la classificazione varrebbe anche guardando $t \rightarrow -\infty$). Questa è stata la prima volta che si sono identificati i moti oscillanti (come riportano ad esempio [2] e [3]).

La definizione rigorosa di suddette soluzioni oscillanti per il problema ristretto è invece la seguente: sia r la distanza di P dall'origine, allora:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} r(t) < +\infty \quad (2.1)$$

La loro esistenza fu dimostrata per la prima volta, e solo in un caso molto specifico del problema ristretto, da Sitnikov nel 1960 [19] in quello che è chiamato oggi *Problema di Sitnikov*. In esso si pone $m = 1/2$, e le due masse principali compiono orbite ellittiche dove P è confinato a muoversi perpendicolarmente al piano definito dalle due masse, passando per il loro centro di massa.

Un'ulteriore prova del Problema di Sitnikov fu poi data da Moser [14], che considerò le varietà stabili e instabili dell'infinito osservando che esse si intersecano in maniera trasversale per $m > 0$, e facendo dinamica simbolica in un intorno di questo punto, ovvero creando una mappa due dimensionale in un intorno delle varietà, costruendone in particolare una a ferro di cavallo (la *smale horseshoe*).

Simò e Libre, nell'articolo [10] che seguiremo approfonditamente, trattano il problema PCR3C seguendo l'approccio di Moser. Infine per modelli più estesi, $m \in (0, 1/2]$ non necessariamente piccolo, la dimostrazione dell'esistenza di tali soluzioni è stata ottenuta più di recente in [2–4, 9].

Tornando su J. Libre e C. Simò, essi dimostrano l'esistenza delle soluzioni oscillanti sotto l'assunzione che m sia piccolo.

Si comincia definendo una opportuna sezione di Poincaré su una sezione del flusso, quest'ultima determinata dai dati iniziali compatibili con un certo valore di C . Si passa poi alle celebri variabili di McGehee, per le quali l'origine $(0, 0)$ rappresenta un punto di equilibrio parabolico. Per questo punto si definiscono comunque le varietà stabili e instabili e si applica il metodo di Melnikov-Poincaré, il quale offre una condizione sufficiente per provare che le due varietà non coincidono e si intersecano trasversalmente.

Infine, nell'intorno del punto omoclino trovato, è stata definita una dinamica simbolica, generalizzazione della mappa a ferro di cavallo di Smale, per dimostrare l'esistenza delle soluzioni oscillanti.

Seguiamo quindi i passaggi principali fatti da Simò e Libre [10] per dimostrare l'esistenza di questi moti. In particolare in questa tesi l'enfasi verrà data ai meccanismi dinamici, non ai dettagli tecnici delle dimostrazioni.

2.2 Orbite e sezione di Poincaré

Seguendo [10], in questa sezione si considerano le orbite che attraversano l'asse $X < 0$ del sistema sidereo. Definiamo una sezione del loro flusso che corrisponderà ad un toro solido senza confini e infine definiremo su esso una sezione di Poincaré f , che sarà poi usata nell'ultima sezione del capitolo come mappa per sviluppare una dinamica simbolica nell'intorno di un punto omoclino.

Poniamo le coordinate di P_1 e P_2 nel sistema rotante in $(m, 0)$ e $(m-1, 0)$: si noti che l'asse X è invertito rispetto alle definizioni date nel primo capitolo, per essere coerenti con la notazione dell'articolo [10].

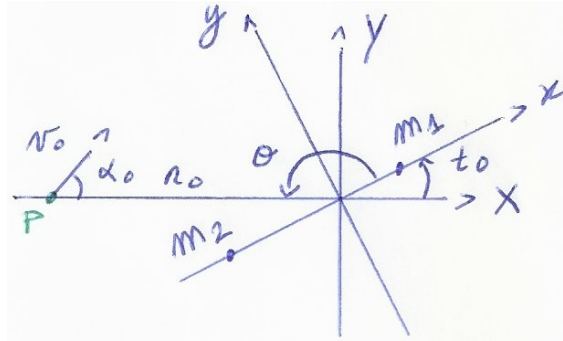


Figura 2.1: Sistema di coordinate sidereo (X, Y) e sinodico (x, y) (figura realizzata ispirandosi alla figura 1 di [10]).

Per ogni valore di C fissato consideriamo un'orbita che attraversa l'asse X negativo al tempo t . Siano (x_0, y_0) le coordinate del punto su $X < 0$, e sia $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ la sua velocità. In [10] si dimostra che le orbite di P nella regione R che tagliano $X < 0$ sono determinate (non univocamente) dai punti di un toro solido senza bordo. Ricordiamo che la regione R è la componente connessa illimitata della regione ammissibile.

Si considerino le seguenti relazioni soddisfatte da coordinate e velocità di P , espresse nel riferimento sinodico, al momento in cui P transita sull'asse $X < 0$ del sistema sidereo al tempo t_0 (si guardi figura 2.1):

$$\begin{aligned} x_0 &= -r_0 \cos t_0 \\ y_0 &= r_0 \sin t_0 \\ v_0^2 &= \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = -2V(x_0, y_0) - C \\ \dot{x}_0 &= v_0 \cos(\alpha_0 - t_0) \\ \dot{y}_0 &= v_0 \sin(\alpha_0 - t_0) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ove $r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 = X_0^2$ e α_0 è l'angolo formato da $(\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ nel sistema sinodico e l'asse X del sistema sidereo. Per convenzione si considera $\alpha_0 = 0$ se $v_0 = 0$.

I valori di posizione e velocità iniziali possono essere scritti in funzione di $(v_0, t_0, \alpha_0, r_0)$, che quindi possono essere presi come dati iniziali. Fissando un valore c della costante di Jacobi è possibile eliminare un parametro grazie alla relazione:

$$v_0^2 = -2V(-r_0 \cos t_0, r_0 \sin t_0) - c, \quad (2.3)$$

dunque per determinare un'orbita di questo tipo è sufficiente conoscere (v_0, α_0, t_0) . Questo significa che le coordinate (v_0, α_0, t_0) individuano un sottoinsieme di:

$$S_c = \{(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \mid C(x, y, \dot{x}, \dot{y}) := c\} \quad (2.4)$$

tale che, detta ψ_t la mappa:

$$\{(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) \rightarrow (x, y, \dot{x}, \dot{y})\}, \quad (2.5)$$

si ottiene che $\psi_{t_0}^{-1}(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ è caratterizzata da $X(t_0) < 0$ e $Y(t_0) = 0$. L'insieme dei possibili valori di (v_0, α_0, t_0) compatibile con c fissato forma un toro solido senza bordo, che denoteremo T .

Si definisce ora la sezione di Poincaré $f : T \rightarrow T$ per $m > 0$ nel modo seguente. Sia (v_0, α_0, t_0) un punto di T che definisce un'orbita di P come discusso sopra, e sia $t_1 > t_0$, se esiste, il seguente zero di $Y(t)$ con $X(t) < 0$. Si definisce quindi:

$$f(v_0, \alpha_0, t_0) = (v_1, \alpha_1, t_1). \quad (2.6)$$

Il set di punti di T che definiscono orbite che tagliano nuovamente l'asse $X < 0$ è denominato E_0 e corrisponde all'effettivo dominio di definizione di f . E_0 è un insieme aperto e denotiamo le orbite associate ai suoi punti come ellittiche per tempi crescenti.

Utilizzando la sezione di Poincaré per tempi decrescenti si definisce il set $E_1 = D(f^{-1})$, ovvero $E_1 = f(E_0)$. Diciamo che i suoi punti corrispondono a orbite ellittiche per tempi decrescenti.

2.3 Variabili di McGehee

Essendo interessati allo studio di orbite che raggiungono l'infinito, si utilizza un celebre cambio di variabili che sposti l'infinito del piano di fase della variabile radiale in un punto di equilibrio posto nell'origine. Si tratta delle cosiddette variabili di McGehee.

Capitolo 2

Inizialmente si osserva cosa accade per $m = 0$ e poi lo si generalizza per $m > 0$: il punto di equilibrio, infatti, persiste, e McGehee dimostra che per esso sono definite la varietà stabile e instabile. Infine si studia come esse dividono l'insieme T in orbite iperboliche e orbite ellittiche.

2.3.1 Problema imperturbato

Prima di introdurre le nuove variabili osserviamo che per $m = 0$ ad un punto $(v_0, \alpha_0, t_0) \in T$ corrisponde un'orbita di energia h :

$$h = \frac{v_0^2 + r_0^2}{2} - v_0 r_0 \sin \alpha_0 - \frac{1}{r_0}, \quad (2.7)$$

ottenuta trasformando l'energia di P dal sistema sidereo a quello sinodico.

Per definire le nuove variabili si introducono inizialmente coordinate polari per il piano (x, y) :

$$x + iy = re^{i\theta} \quad \dot{x} + i\dot{y} = \dot{r}e^{i\theta} + i(M_Z/r - r)e^{i\theta} \quad (2.8)$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene notando che il sistema sinodico ruota con velocità angolare unitaria, dunque $M_Z = r^2(\dot{\theta} + 1)$.

Si prosegue con il cambio di coordinate dovuto a McGehee [11]:

$$r = 2/q^2, \quad \dot{r} = p \quad \text{con} \quad 0 < q < \infty \quad (2.9)$$

per cui, complessivamente, abbiamo definito:

$$(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \rightarrow (r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) \rightarrow (r, \theta, p, \dot{\theta}) \rightarrow (q, \theta, p, \dot{\theta}). \quad (2.10)$$

Il sistema di equazioni nelle nuove variabili è:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\frac{pq^3}{4}, \\ \dot{\theta} &= -1 + \frac{M_Z q^4}{4}, \\ \dot{p} &= -\frac{q^4}{4} + \frac{M_Z^2 q^6}{8} \end{aligned} \quad (2.11)$$

e chiaramente il punto $(q, p) = (0, 0)$ è un'orbita 2π -periodica in θ per il sistema (θ ruota mentre q, p restano in 0).

Le curve $h = \text{cost}$ vengono riscritte attraverso la relazione:

$$p^2 = q^2 - \left(\frac{C}{4} + \frac{h}{2}\right)^2 q^4 + 2h \quad (2.12)$$

e sono rappresentate in figura 2.2. La curva $h = 0$ è la separatrice: divide il piano (q, p) in una regione interna (composta da orbite ellittiche con $h < 0$, curve chiuse che non toccano $q = 0$) e in una regione esterna (composta da orbite iperboliche con $h > 0$). La curva $h = 0$ è l'unione delle varietà stabile e instabile dell'infinito e per $m = 0$ esse coincidono esattamente. Si tratta di un caso analogo a sistemi integrabili, non vi è caos e il moto è completamente prevedibile.

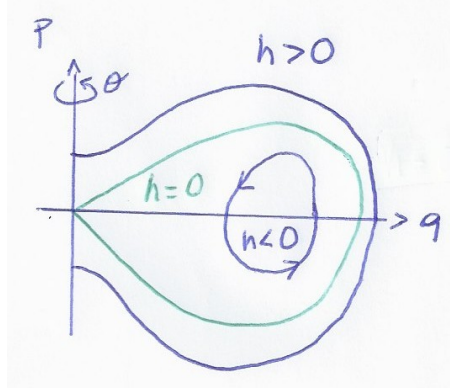


Figura 2.2: Curve di livello $h = \text{cost}$ nel piano (q, p) per C fissato (figura realizzata ispirandosi alla figura 5b di [10]).

2.3.2 Problema perturbato

In [10] si studia la modifica di questi risultati per $m > 0$. Applicando i cambi di variabile (2.8) e (2.9) si ottiene un sistema di equazioni differenziali per q, θ, p, w , con $w = M_Z$ momento angolare, non più conservato, e che viene utilizzato al posto di $\dot{\theta}$.

Il punto di equilibrio $(q, p) = (0, 0)$ (ovvero l'orbita 2π -periodica in θ) persiste ed è parabolico, ovvero il campo vettoriale che definisce le equazioni del moto in $(0, 0)$ non ha alcuna parte lineare. Dal momento che la teoria standard non garantisce per i punti parabolici l'esistenza di varietà stabile e instabile (se fosse iperbolico, si potrebbero applicare i teoremi della sezione 1.2). McGehee procede a dimostrarne l'esistenza per ogni valore di $m \in (0, 1/2]$ e per ogni valore di C . Questo viene realizzato definendo innanzitutto una sezione di Poincaré per l'orbita periodica, che denotiamo con $P(q, p)$. Per ogni aperto U dell'origine in $\mathbb{R}^2$ si definisce il set $A^+(P, U) = \{a \in U \mid P^k(a) \in U \text{ per ogni } k > 0, P^k(a) \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow +\infty\}$. Questo set rappresenta esattamente le orbite paraboliche in U per tempi crescenti. Analogamente, con $P^{-1}(q, p)$ si definisce $A^-(P, U)$, set delle orbite paraboliche

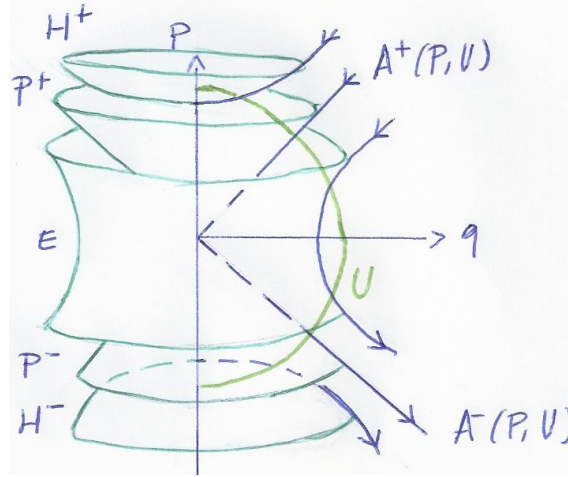


Figura 2.3: Cambio di coordinate che porta l'infinito nell'origine. U rappresenta un intorno di $(q, p) = (0, 0)$. H^+ e P^+ rappresentano le orbite iperboliche e paraboliche nel futuro, analogamente H^- e P^- nel passato, mentre E rappresenta le orbite ellittiche (figura realizzata ispirandosi alla figura 6 di [10]).

in U per tempi decrescenti. McGehee dimostra che esiste un intorno U tale che $A^+(P, U)$ sia una curva analitica (si veda figura 2.3), che corrisponde alla varietà stabile.

Sia $q = F(p, \theta)$ tale formulazione analitica del set geometrico $A^+(P, U)$ (ovvero rappresenta la varietà stabile locale), allora per simmetria $q = F(-p, -\theta)$ rappresenta la varietà instabile locale. Infatti le equazioni per (q, p, θ, w, t) sono invarianti rispetto la simmetria che le manda in $(q, -p, -\theta, w, -t)$ e dunque ciò accade nel sistema di equazioni differenziali per $(q, p, \theta) \rightarrow (q, -p, -\theta)$.

Siano P_0 e P_1 le intersezioni con T della varietà stabile e instabile rispettivamente. In [10] si dimostra che per $m \in (0, 1/2]$ e C grande, il toro T è localmente diviso dal cilindro P_0 in orbite iperboliche e orbite ellittiche per $t \rightarrow +\infty$. Simmetricamente accade con il cilindro P_1 . Si tratta di una generalizzazione di quanto accade per $m = 0$, dove i due cilindri coincidono nella separatrice.

Per un certo valore di C , sia $\{(q, \theta, p, t) | q = F(p, \theta)\}$ la parametrizzazione della varietà stabile locale, con θ e t variabili angolari. L'intersezione di questo set con $q = q_0 \neq 0$ abbastanza piccolo è un toro $\mathbb{T}$, poiché vengono fissate le due variabili radiali e restano non vincolati i due angoli. Inoltre questa intersezione è trasversale, cioè non tangente, o si avrebbe $\dot{q} = 0$ per qualche punto in $\mathbb{T}$ ma ciò significherebbe avere un'orbita non parabolica.

Il toro $\mathbb{T}$ è in corrispondenza biunivoca con le orbite paraboliche (per $t \rightarrow +\infty$): ogni suo punto individua una tale orbita nell'istante in cui questa si trova a distanza $r_0 = 2/q_0^2$ dai corpi primari, cioè quando la sua coordinata radiale vale esattamente q_0 (con q_0 piccolo,

quindi r_0 grande - vicino, nel senso delle coordinate di McGehee, al punto all'infinito).

Trasportando $\mathbb{T}$ sotto il flusso, ovvero lasciando variare anche la coordinata radiale q finora fissata a q_0 , si ottiene un anello toroidale tridimensionale (con topologia data dal prodotto di $\mathbb{T}$ con un intervallo). I suoi punti che soddisfano $\theta + t_0 = \pi$ giacciono sul semiasse X negativo, e appartengono quindi anche al toro solido T definito nella sezione 2.2. Poiché tale condizione fissa una combinazione delle due variabili angolari, l'intersezione fra anello toroidale e T è bidimensionale: un cilindro, parametrizzato da un angolo e una lunghezza.

2.3.3 Caratteristica sezione di Poincaré

Descriviamo una caratteristica della sezione di Poincaré f , che utilizzeremo nell'ultima sezione. Se prendiamo una successione di orbite ellittiche che si avvicinano sempre di più (in energia) a diventare orbite paraboliche, il tempo di ritorno sulla sezione diventa sempre più lungo. Poiché questo tempo di ritorno, preso modulo 2π , determina la nuova posizione angolare t_1 dell'orbita nella mappa f , il punto immagine gira ripetutamente attorno al toro mentre l'orbita di partenza si avvicina al confine parabolico, producendo visivamente una spirale che si avvolge attorno al cilindro P_1 senza mai toccarlo. Questa caratteristica resta valida anche per $m > 0$.

2.4 Intersezione trasversale delle varietà

Lo scopo di questa sezione è introdurre alcuni elementi del metodo di Poincaré-Melnikov, un metodo perturbativo utilizzato per dimostrare l'intersezione trasversale di varietà stabile e instabile. In particolare qui ci si focalizzerà nel caso di campi vettoriali due dimensionali e periodici in t . Questo metodo fu introdotto da Poincaré [17] e in seguito sviluppato da Melnikov [12], per poi diventare strumento di uso comune. È possibile trovarne spiegazione in vari libri di testo, ad esempio [22].

Considerando un sistema hamiltoniano con una perturbazione ε piccola (anche non hamiltoniana in generale):

$$\dot{q} = JDH(q) + \varepsilon g(q, t, \varepsilon) \quad (2.13)$$

con $q = (x, y)$, $DH = (\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y})$, $g = (g_1, g_2)$ periodica in $T = 2\pi/\omega$ e J matrice simplettica standard. Per $\varepsilon = 0$ il sistema è imperturbato e vengono fatte le seguenti ipotesi su di esso:

- i) il sistema imperturbato ha un punto di equilibrio iperbolico p_0 , cui è associata un'orbita $q_0(t)$ asintotica nel futuro e nel passato a p_0 . In modo improprio chiameremo quest'orbita omoclina, benché essa non contenga alcun punto omoclino;

- ii) sia $\Gamma_{p_0} = \{q \in \mathbb{R}^2 | q = q_0(t), t \in \mathbb{R}\} \cup \{p_0\} = W^s(p_0) \cap W^u(p_0) \cup \{p_0\}$. Allora il suo interno contiene una famiglia continua di orbite periodiche $q^\alpha(t)$ di periodo T^α , $\alpha \in (-1, 0)$, tali che $\lim_{\alpha \rightarrow 0} q^\alpha(t) = q_0(t)$ e $\lim_{\alpha \rightarrow 0} T^\alpha(t) = \infty$ (figura 2.4).

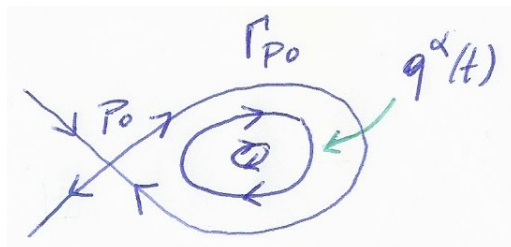


Figura 2.4: Ipotesi sul problema imperturbato. Nel piano (x, y) , il punto iperbolico p_0 e la varietà Γ_{p_0} imperturbata associata, con le orbite periodiche al suo interno.

Nello spazio tridimensionale (considerando il tempo ϕ come terza coordinata), il punto p_0 diventa un'orbita periodica γ_0 .

Quando poi si considerano $\varepsilon > 0$ abbastanza piccoli si può dimostrare che l'orbita $\gamma(t)$ viene continuata ad un'orbita periodica $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$. $W_{loc}^s(\gamma_\varepsilon(t))$ e $W_{loc}^u(\gamma_\varepsilon(t))$ sono ε -vicine alle corrispondenti varietà locali imperturbate. È possibile costruire le varietà stabile e instabile globali di $\gamma_\varepsilon(t)$ tramite il flusso (si veda figura 2.5).

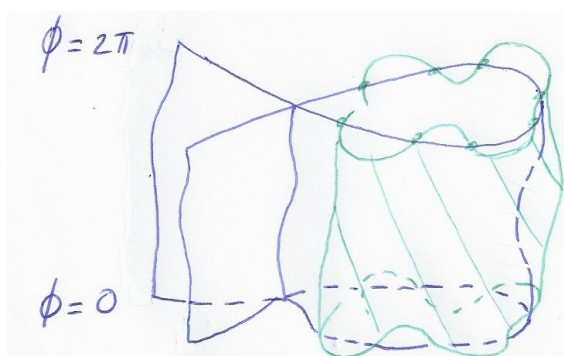


Figura 2.5: Punto omoclino e varietà associata all'accensione di ε (curva verde), Il sistema è indipendente dal tempo dunque non cambia con ϕ , le linee verdi rappresentano delle possibili traiettorie.

Il metodo di Poincaré-Melnikov fornisce condizioni sufficienti a dimostrare che, se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo, allora esistono punti omoclini, ovvero punti di intersezione trasversale della varietà stabile ed instabile dell'orbita periodica.

Nell'articolo [10], il metodo viene applicato al caso specifico, benché l'orbita periodica sia parabolica.

Per $m = 0$ e C sufficientemente grande, il cilindro P_0 interseca nell'insieme T il cilindro $\alpha_0 = \pi/2$ in un cerchio. Allora, poiché per C abbastanza grande il problema si comporta similmente al caso imperturbato, per $m > 0$ il cilindro delle orbite paraboliche per $t \rightarrow +\infty$ interseca il cilindro $\alpha_0 = \pi/2$ in una curva diffeomorfa a un cerchio. In un intorno di questo cerchio è possibile parametrizzare P_0 e P_1 tramite le coordinate t_0 e α_0 .

I cerchi $\gamma_0 = P_0 \cap \{\alpha_0 = \pi/2\}$ e $\gamma_1 = P_1 \cap \{\alpha_0 = \pi/2\}$ si intersecano per $t_0 = 0, \pi$ e in [10] si dimostra che per $m > 0$, piccolo abbastanza, questa intersezione è trasversale.

2.5 Esistenza soluzioni oscillanti

Per studiare la dinamica caotica del sistema vicino ad un punto omoclino, e osservare che in un intorno di esso vi sono orbite che possono avere tutte le evoluzioni finali, comprese le orbite oscillanti, in letteratura si utilizza l'insieme invariante dato dalla cosiddetta mappa a ferro di cavallo di Smale (*Smale horseshoe*, [20]), di cui si può trovare una spiegazione in [22].

2.5.1 Mappa a ferro di cavallo

Si consideri una mappa bidimensionale f che va da un quadrato di un'unità di lunghezza a $\mathbb{R}^2$, cioè:

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \quad (2.14)$$

tale che contragga la direzione x , espanda la direzione y , e poi la ripieghi (figura 2.6).

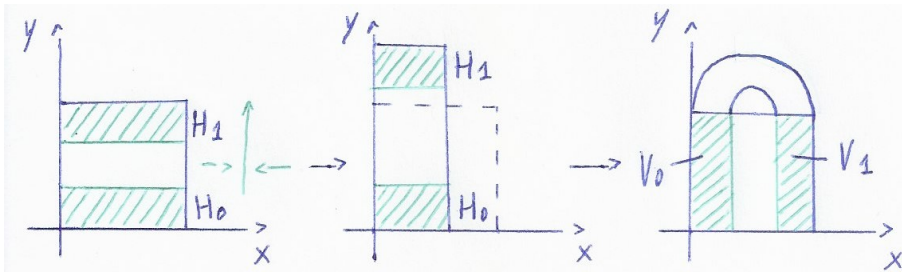


Figura 2.6: Applicazione della mappa f al quadrato U . Le strisce orizzontali vengono mandate nelle strisce verticali. Il passaggio intermedio è quello di contrazione e allungamento.

Allora essa agisce sulle *strisce orizzontali* H_0 ed H_1 trasformandole nelle *strisce verticali* V_0 e V_1 , dunque $f(H_0) = V_1$ e $f(H_1) = V_0$, mentre la parte di U tra le strisce è mappata fuori dal quadrato, ovvero $U \cap f(U) = V_0 \cup V_1$.

Capitolo 2

Poiché f non è suriettiva, la mappa inversa f^{-1} non ha dominio globale nel quadrato U bensì può essere applicata solo all'immagine di f , cioè $f^{-1}(U \cap f(U)) = H_0 \cup H_1$, trasformando le strisce verticali in strisce orizzontali come mostrato in figura 2.7.

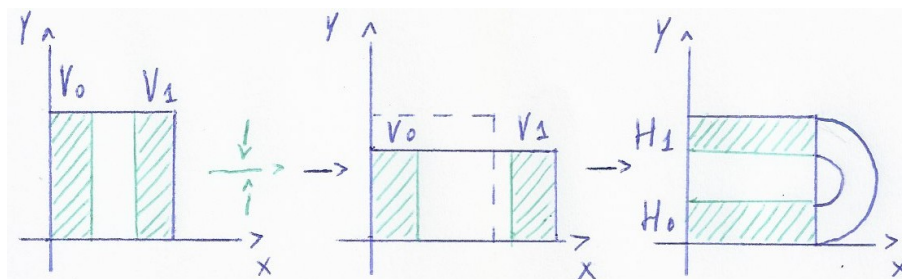


Figura 2.7: Applicazione della mappa f^{-1} . Le strisce verticali vengono mandate nelle strisce orizzontali.

Denotiamo con Λ il set invariante della mappa, ovvero l'insieme di punti che rimangono in U sotto tutte le possibili iterazioni di f :

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U) = \{p \mid f^i(p) \in U, i \in \mathbb{Z}\}. \quad (2.15)$$

Si può costruire geometricamente in modo induttivo, considerando le iterazioni positive e negative separatamente, e in seguito intersecandole. Innanzitutto è utile definire la notazione data da $S = \{0, 1\}$ set di indici, con $s_i \in S, i \in \mathbb{Z}$.

Costruiamo $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U)$. Il primo step, corrispondente a $U \cap f(U)$, è composto, come già visto, da due strisce verticali V_0 e V_1 , che denotiamo:

$$U \cap f(U) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} \quad (2.16)$$

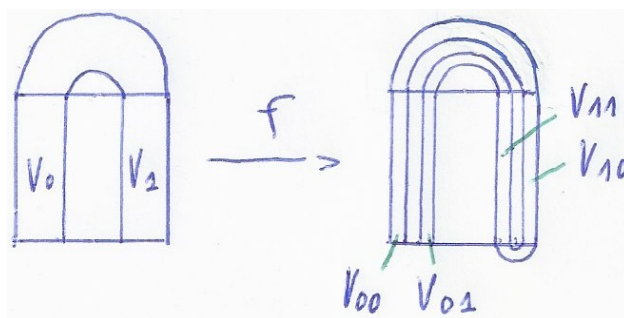


Figura 2.8: Applicazione di f una seconda volta.

Il secondo step, corrispondente a $U \cap f(U) \cap f^2(U) = U \cap f(U \cap f(U))$, è composto da quattro strisce verticali, due in V_0 e due in V_1 (si veda figura 2.8), che denotiamo:

$$U \cap f(U) \cap f^2(U) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2}} V_{s_{-1}s_{-2}} \quad (2.17)$$

Usando lo stesso ragionamento, intuitivamente il terzo step sarà composto da otto strisce verticali e, andando a generalizzare, allo step k –esimo otterremo 2^k strisce verticali, denotate da una stringa di 0 ed 1 di lunghezza k :

$$U \cap f(U) \cap \dots \cap f^k(U) = \bigcup_{\substack{s_{-i} \in S \\ i=1,2,\dots,k}} V_{s_{-1}\dots s_{-k}} \quad (2.18)$$

Infine, per $k \rightarrow \infty$, si ottiene un numero infinito di strisce verticali di larghezza nulla (segmenti), ciascuna indicizzata da una stringa infinita di 0 ed 1.

Per costruire ora $\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(U)$, è possibile seguire lo stesso ragionamento appena fatto. Il primo step, $U \cap f^{-1}(U)$, corrisponde alle due strisce orizzontali H_0 e H_1 , il secondo step corrisponde a quattro strisce orizzontali, e così via, allo step k –esimo si avranno 2^k strisce orizzontali e per $k \rightarrow \infty$ si ottengono un'infinità di segmenti orizzontali, ciascuno indicizzato da una stringa unica, infinita, di 0 ed 1.

Per costruire il set completo dunque:

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) = \left[\bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D) \right] \cap \left[\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) \right]. \quad (2.19)$$

Esso è un insieme di Cantor ed è composto da un'infinità di punti p che si trovano alle intersezioni tra strisce orizzontali e verticali, e ciascuno può essere indicizzato unicamente da una sequenza biinfinita creata dalla concatenazione delle sequenze associate alle rispettive strisce orizzontali e verticali la cui intersezione definisce p . Cioè:

$$p = V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} \cap H_{s_0\dots s_k\dots} \quad (2.20)$$

2.5.2 Dinamica simbolica

Con *dinamica simbolica* si intende la caratterizzazione della struttura delle orbite di un sistema dinamico tramite infinite sequenze di simboli. Il set dei possibili stati viene diviso in un numero finito di parti, indicizzate da un *simbolo*, e discretizzando il tempo si osserva a ogni momento in quale parte del set si trova il sistema. L'inizio della dinamica simbolica

Capitolo 2

si ha con Hadamard [5], che la applica allo studio di geodetiche su superfici a curvatura negativa, e la sua applicazione viene portata avanti in seguito da Morse e Hedlund [13], diventando infine una tecnica largamente utilizzata in vari ambiti.

Per ora abbiamo una mappa $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma$, dove Σ rappresenta le sequenze di 0 ed 1 biinfinita, alla quale si aggiunge un punto decimale per dividere le iterazioni passate da quelle future. Questo significa che la sequenza associata a $f^k(p)$, $p \in \Lambda$, si ottiene semplicemente traslando il punto decimale di k posizioni (in avanti per $k > 0$, indietro per $k < 0$).

È possibile definire una distanza allo spazio Σ , dalla quale seguirà una metrica, da cui si conclude che due stringhe sono considerate “vicine” se hanno un lungo blocco centrale di simboli uguale.

Si definisce anche una mappa $\sigma(s) : \Sigma \rightarrow \Sigma$, mappa di traslazione (*shift map*) $\sigma(s)_i = s_{i+1}$ ovvero tale che, sia:

$$s = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} . s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \in \Sigma \quad (2.21)$$

Allora:

$$\sigma(s) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 . s_1 \cdots s_n \cdots\} \quad (2.22)$$

Chiaramente questa mappa ha due punti fissi, quello dove l'intera sequenza è 1 e quello dove l'intera sequenza è 0, e inoltre le orbite associate a sequenze che si ripetono periodicamente sono periodiche sotto iterazione di σ . Si può dimostrare (si veda [22]) il seguente *teorema*:

La mappa di traslazione σ agente su Σ spazio di sequenze biinfinite di 0 ed 1 ha:

- i) un'infinità numerabile di orbite periodiche con periodo arbitrariamente lungo;
- ii) un'infinità non numerabile di orbite non periodiche;
- iii) un'orbita densa.

A questo punto l'idea è passare dalla dinamica di σ su Σ a quella di f su Λ . Allora vale, poiché $\sigma \circ \psi(p) = \psi \circ f(p)$, ed essendo possibile dimostrare che la mappa $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma$ è un omeomorfismo, la seguente relazione per ogni $p \in \Lambda$:

$$\psi^{-1} \circ \sigma \circ \psi(p) = f(p) \quad (2.23)$$

Da cui l'orbita di $p \in \Lambda$ sotto f corrisponde direttamente alla orbita di $\psi(p) \in \Sigma$ sotto σ , e segue quindi che il teorema precedente si generalizza alle orbite di f nella mappa a ferro di cavallo di Smale.

In particolare il sistema è detto *caotico* poiché ha una grande sensibilità alle condizioni iniziali (cioè punti inizialmente vicini dopo un certo numero di iterazione si distanziano).

2.5.3 Definizione di sequenze simboliche

Si consideri una semiretta L fissata uscente dall'origine (nel sistema di riferimento side-reo). Data un'orbita O che a un certo istante t_0 interseca questa semiretta, si definisce $\phi(t)$ come l'angolo che P forma rispetto a L al tempo t . La successione degli zeri di $\phi(t)$ identifica tutti gli istanti successivi a t_0 in cui l'orbita torna a intersecare L . Precisamente, fra ogni coppia di zeri, l'angolo $\phi(t)$ aumenta di 2π . Sia $\{t_n\}$ il set di zeri di $\phi(t)$, si distinguono quattro casi:

- a) esiste t_n per ogni intero;
- b) esiste un intero negativo k per cui t_n è definito se e solo se $n > k$. Convenzionalmente si pone $t_k = -\infty$;
- c) esiste un intero positivo l tale che t_n è definito se e solo se $n < l$. Convenzionalmente si pone $t_l = +\infty$;
- d) t_n esiste solo per $k < n < l$ con $k < 0$ e $l > 0$. Allora $t_k = -\infty$ e $t_l = +\infty$.

Questi quattro casi corrispondono rispettivamente a orbite confinate, orbite che vengono catturate dal sistema e poi restano confinate, orbite che fuggono e infine orbite di cattura e fuga.

Definiamo una sequenza di numeri a_n come segue: dati due passaggi consecutivi di P attraverso il raggio L , avvenuti agli istanti t_{n-1} e t_n , contiamo quante rivoluzioni intere hanno compiuto i due primari P_1 e P_2 nel tempo trascorso fra questi due passaggi. Poiché il periodo di rivoluzione dei primari è pari a 2π , questo numero è dato da:

$$a_n = \left\lfloor \frac{t_n - t_{n-1}}{2\pi} \right\rfloor \quad (2.24)$$

Nell'articolo [10] si dimostra il seguente risultato: se $m \in (0, 1/2]$ è sufficientemente piccola e la costante di Jacobi C è sufficientemente grande, allora esiste $a(C, m)$ tale per cui, per ogni sequenza di numeri interi a_n (purché appartenga a uno dei quattro tipi a)-d) descritti sopra e i cui termini siano tutti maggiori di $a(C, m)$), esiste un'orbita O , nella regione R , il cui comportamento effettivo riproduce esattamente quella sequenza: cioè tale che, contando quante rivoluzioni compiono P_1 e P_2 tra un passaggio e il successivo di P attraverso il raggio L , si ottengano proprio i numeri a_n scelti in partenza.

Tale risultato, in particolare, dimostra l'esistenza delle orbite oscillanti, riducibili al caso a). La dimostrazione viene effettuata con argomenti di dinamica simbolica applicata alla mappa ferro di cavallo definita da un punto di intersezione omoclina delle varietà stabile

e instabile studiate in precedenza. Cenni di questa costruzione sono riportati in sezione 2.5.4

2.5.4 Applicazione della mappa ferro di cavallo

Costruiamo il quadrato della sezione 2.5.1 (che qui sarà una superficie con curvatura) in cui applicare la dinamica simbolica. Definiamo innanzitutto un tubo come un set omeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | r \leq x^2 + y^2 \leq s\}$, con $0 < r < s$, e un tubo tagliato come un tubo tale che $r' \leq z \leq s'$, con $0 < r' < s'$. Allora sia P'_0 un set di punti del toro T tale che:

- i) P'_0 sia un tubo;
- ii) il confine di P'_0 omeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = s^2\}$ sia P_0 ;
- iii) $P'_0 - P_0$ sia contenuto in E_0 .

Per $a > 0$ abbastanza piccolo si definisce $P'_0(a)$ come punti in P'_0 tali che $|\pi/2 - \alpha_0| \leq a$, esso è un tubo tagliato. Si guardi l'immagine 2.9, la figura a) rappresenta il caso $m = 0$, il cilindro centrale è contenuto in P_0 e lo spicchio verde rappresenta un certo intervallo temporale. Nell'immagine b) si vede cosa accade applicando la mappa f , in particolare lo spicchio verde spiraleggia. Per m piccolo il problema è arbitrariamente vicino a quello imperturbato, dunque sappiamo cosa accade a un intervallo temporale arbitrario sotto f .

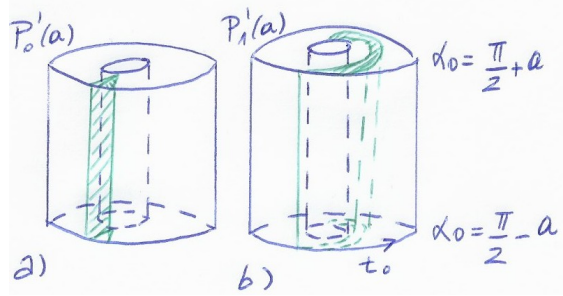


Figura 2.9: Rappresentazione in a) di $P'_0(a)$ per $m = 0$ con risalto su un certo spicchio temporale, e in b) di ciò che accade applicando f (figura realizzata ispirandosi alla figura 8 di [10]).

Ora osserviamo invece un intervallo temporale preciso, per $0 < b < \pi$ si definisce $P''_0(b)$ come un sottoinsieme di P'_0 tale che $|t_0| \leq b_0$ (analogamente si definiscono P'_1 e $P''_1(b)$). Ricordando che le due curve diffeomorfe a cerchi che si ottengono dall'intersezione di P_0 e P_1 con $\alpha_0 = \pi/2$, hanno il punto p a $t_0 = 0$ in comune, allora per $m > 0$ piccolo abbastanza si prendono b abbastanza piccolo e P'_0 tali che il set Q dato dalla chiusura della componente connessa di $P''_0(b) \cap P''_1(b)$, che contiene p , intersechi la superficie $W = \{(v_0, \alpha_0, t_0) \in T | \alpha_0 = \pi/2, |t_0| \leq b\}$ in un set Q_W omeomorfo a un quadrato.

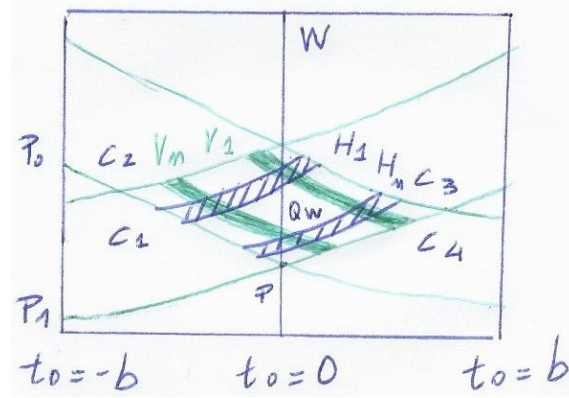


Figura 2.10: Rappresentazione del quadrato Q_W e delle strisce verticali (verdi piene) e orizzontali (blu tratteggiate) (figura realizzata ispirandosi alla figura 9 di [10]).

Q_W è confinato dalle curve C_1, C_2, C_3, C_4 e si ottiene che $f(Q) \cap Q_W$ (si veda la sezione 2.3.3) è dato dalle *strisce orizzontali* $H_1, H_2, \dots$. Le *strisce verticali* V_n in W rappresentano le H_n sotto la simmetria nell'insieme T $(v_0, \alpha_0, t_0) \rightarrow (v_0, \pi - \alpha_0, -t_0)$ e sono tali che $f(V_n) = H_n$. In particolare le curve al confine C_1 e C_4 sono chiamate V_∞ e H_∞ . Abbiamo dunque un ferro di cavallo con infinite strisce verticali e orizzontali e dunque un'infinità di simboli (tutti i numeri interi positivi $\{a_n\}$). In particolare le orbite non saranno più indicizzate necessariamente da sequenze biinfinite ma abbiamo le quattro possibilità sopra riportate, dunque potrebbero anche essere infinite in una sola direzione o finite in entrambe.

Si cerca di dimostrare il seguente *lemma*:

- i) per ogni sequenza di tipo a) esiste almeno un punto $p \in Q$ tale che $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$ per ogni intero m ;
- ii) per ogni sequenza di tipo b) esiste almeno un punto $p \in Q$ tale che $f^{-m}(p) \in V_{a_m}$ per ogni intero $m \geq k$;
- iii) proprietà corrispondenti valgono per sequenze di tipo c) e d).

Prova; Si osserva innanzitutto che se V è una striscia verticale in Q contenuta in V_m , allora $V'_n = V_n \cap f^{-1}(V)$ è una striscia verticale in Q per ogni n naturale, e similmente per quanto riguarda le strisce orizzontali.

Le sequenze di tipo a) sono biinfinite e rappresentano dunque una generalizzazione a questo particolare caso di quanto già visto nella sezione precedente. Se ci troviamo in una striscia verticale V_{a_0} e vogliamo trovare i punti che sono connessi a a_1 rivoluzioni di P_1 e P_2 , allora dobbiamo cercare $V_{a_0} \cap f^{-1}(V_{a_1})$, che rappresenta una striscia più piccola contenuta in V_{a_0} . Analogamente, se vogliamo trovare i punti che nel passato sono connessi

Capitolo 2

ad a_{-1} , ci serve $V_{a_{-1}}$, la cui immagine sotto f restituisce $H_{a_{-1}}$. L'intersezione della striscia verticale precedente con questa restituisce un quadratino. L'idea è quella di iterare questo processo infinite volte nel passato e nel futuro fino a ottenere il set chiuso:

$$C_{a_{-n}\dots a_0\dots a_m} = V_{a_0 a_{-1}\dots a_{-n}} \bigcap H_{a_1 a_2\dots a_m} \quad (2.25)$$

che è contenuto nel compatto Q . Ogni intersezione finita di questi set è non vuota come garantisce il *Principio di Cantor*, e dunque lo sarà anche l'intersezione di una loro infinità.

Per quanto riguarda le sequenze di tipo b) la sequenza viene troncata per un qualche $k < 0$, il che fisicamente significa che sta diventando parabolica. Basta dunque osservare che per quanto riguarda gli interi negativi, che termineranno al bordo $V_{-\infty}$, qualunque intersezione finita del tipo precedente è non nulla e dunque tale sarà l'intersezione totale tra passato e futuro.

Simili ragionamenti si possono chiaramente fare per gli altri due tipi di sequenze.

Questo prova dunque l'esistenza delle orbite oscillanti, che ricadono nella categoria a) e intersecano il raggio L un'infinità di volte, con tempi di ritorno che è possibile scegliere arbitrariamente alti data la natura di $\{a_n\}$ che ha come limite superiore $+\infty$.

Bibliografia

- [1] J. Chazy. Sur l'allure du mouvement dans le probleme des trois corps quand le temps croit indefiniment. *Annales Scientifiques. Ecole Norm. Sup.*, 39:29–130, 1922.
- [2] M. Guardia, P. Martin, J. Paradela, and T. Seara. Hyperbolic dynamics and oscillatory motions in the 3 body problem. *arXiv preprint arXiv:2207.14351*, 2022.
- [3] M. Guardia, P. Martin, and T. Seara. Oscillatory motions for the restricted planar circular three body problem. *Inventiones Mathematicae*, 203:417–492, 2016.
- [4] M. Guardia, T. Seara, P. Martin, and L. Sabbagh. Oscillatory orbits in the restricted elliptic planar three body problem. *American Institute of Mathematical Sciences*, 37:229–256, 2017.
- [5] J. Hadamard. Sur l'iteration et les solutions asymptotiques des equations differentielles. *Bull. Soc. Math. France*, 29, 1898.
- [6] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub. Invariant manifolds. *Lecture Notes in Mathematics*, 583, 1977.
- [7] A. Katov and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. *Cambridge University Press*, 1995.
- [8] W. Koon, M. Lo, J. Marsden, and S. Ross. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design. *Springer*, 2007.
- [9] J. Lamas, M. Guardia, and T. Seara. Oscillatory motions, parabolic orbits and collision orbits in the planar circular restricted three-body problem. *Comm. Math. Phys*, 406:106, 2025.
- [10] J. Llibre and C. Simó. Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem. *Mathematische annalen*, 248:153–184, 1980.

- [11] R. McGehee. A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to celestial mechanics. *Journal of Differential Equations*, 14:70–88, 1973.
- [12] V. K. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12:3–52, 1963.
- [13] M. Morse and G. Hedlund. Symbolic dynamics. *American Journal of Mathematics*, 60:815–866, 1938.
- [14] J. Moser. Stable and random motions in dynamical systems. *Princeton University Press*, 1973.
- [15] C. Murray and S. Dermott. Solar system dynamics. *Cambridge University Press*, 1999.
- [16] J. Paradela and S. Terracini. Oscillatory motions in the restricted 3-body problem: A functional analytic approach. *arXiv preprint arXiv:2212.05684*, 2022.
- [17] H Poincaré. Sur le probleme des trois corps et les equations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 13:1–270, 1890.
- [18] H Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Gauthier-Villars, Paris*, 1-3:70–88, 1892-1899.
- [19] K. Sitnikov. The existence of oscillatory motions in the three-body problems. *Soviet Physics Dokl.*, 5:647–650, 1960.
- [20] S. Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. in *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, *Princeton University Press*, pages 63–80, 1965.
- [21] V. Szebehely. Theory of orbits. *Academic Press*, 1967.
- [22] S. Wiggins. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. *Springer*.