

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN ASTRONOMIA

**Il problema della singolarità iniziale:
l'origine dell'universo**

Relatore:
PROF. ALBERTO FRANCESCHINI

Laureando:
CHIARA LUSENTI

Anno Accademico 2021-2022

*A Giampiero Saporito,
anima speciale
in viaggio tra stelle e galassie*

Riassunto

Le equazioni che descrivono la struttura e la geometria dell'Universo sono la metrica di Robertson-Walker e l'Equazione di Friedmann. Dalle soluzioni formali a queste equazioni si ricavano i Modelli Cosmologici, che spiegano come varia il fattore di scala $R(t)$ con il tempo cosmico, cioè il comportamento dell'espansione dell'Universo, a seconda dei valori della densità di materia contenuta nell'Universo e del parametro di curvatura geometrica.

Le soluzioni a queste equazioni includono un momento in cui il fattore di scala $R(t)$ si annulla, e i parametri dinamici e termodinamici tendono all'infinito, un punto di singolarità da cui l'Universo ha avuto origine.

Deve perciò esserci stato un tempo in cui l'Universo era infinitesimamente piccolo e infinitesimamente denso, il tempo del Big Bang. Sotto condizioni di estrema compressione come quelle verificatesi in questo momento, la forza gravitazionale e la densità della materia sarebbero state infinite. Tale punto di compressione tendenzialmente infinita viene chiamato *singolarità*.

A stabilire questo risultato in modo matematicamente rigoroso furono Hawking e Penrose, con i loro teoremi di singolarità, con cui mostrarono che l'Universo contiene punti che non sono contenuti nello spazio-tempo, in cui le leggi della fisica vengono meno. In particolare, dimostrarono l'esistenza di singolarità nel futuro, con la formazione di superfici intrappolate chiuse nella fase finale di collasso di stelle massive, e nel passato, capovolgendo tale argomento su scala cosmologica e considerando l'espansione dell'Universo.

Questo fu confermato da uno studio fatto sulla Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde, secondo il quale, andando a redshift elevati, e quindi a grandi distanze nello spazio-tempo, la densità di massa-energia di questa radiazione è sufficiente per far incurvare le geodetiche di tipo tempo e nulle dirette verso il passato, formando una superficie intrappolata chiusa nel passato.

Si dimostra perciò che il teorema della singolarità vale all'inizio della presente espansione del nostro Universo, e dunque che c'è stata una singolarità anche nel nostro passato. L'Universo deve quindi aver avuto origine da una singolarità iniziale.

Hawking e Penrose dimostrarono con i loro teoremi che la Relatività Generale è una teoria incompleta: essa predice punti di singolarità, ma predice al tempo stesso il suo fallimento nel momento in cui si tenta di analizzare ciò che avviene realmente in una singolarità. In particolare, essa ci dice solo che la singolarità esiste, ma ogni teoria fisica, compresa sé stessa, fallisce nel tentativo di spiegare l'inizio dell'Universo.

La Relatività Generale ammette perciò di essere solo una teoria parziale, cioè che i teoremi di singolarità realmente ci mostrano è che deve esserci

stato un tempo, nella fase iniziale della vita dell'Universo, in cui esso era così piccolo che non si possono più ignorare gli effetti della meccanica quantistica. Questa considerazione ha portato alla nascita della cosmologia quantistica. Per sopperire al problema della singolarità, i fisici Hawking e Hartle proposero la teoria dell'assenza di confini, secondo la quale il tempo e lo spazio sarebbero finiti ma senza un inizio improvviso nel passato. La spiegazione di questo stato all'inizio di tutto, posto cronologicamente prima dell'Era di Planck, può essere riassunta nella frase "La condizione al contorno dell'Universo è che esso non ha contorno".

Questo ha implicazioni anche per quanto riguarda il ruolo di un Creatore. Con una singolarità iniziale, le leggi della fisica non sono in grado di spiegare come l'Universo abbia avuto origine. Se però l'Universo non ha confini, non ha una condizione al contorno, non c'è bisogno di una causa esterna, un primo motore, che abbia dato origine a tutto.

Lo stato di Hartle-Hawking è solo una proposta. Potrà essere verificato nel momento in cui disporremo di una teoria unificata che combini il comportamento della gravità e della meccanica quantistica.

A quel punto saremo forse in grado di comprendere come il nostro Universo ebbe origine.

Indice

1	L'Universo ha un'origine	1
1.1	La Struttura Generale dell'Universo	2
1.1.1	La Metrica di Robertson-Walker e l'Equazione di Friedmann	2
1.1.2	Modelli cosmologici	4
1.2	La costante cosmologica Λ	8
1.2.1	Le nuove Equazioni della Dinamica Cosmica	8
1.2.2	Il Modello dinamico attuale dell'Universo	10
1.3	L'inevitabilità della singolarità iniziale	11
2	I teoremi di singolarità	13
2.1	Definizioni e lemmi	14
2.1.1	La condizione di iperbolicità globale	14
2.1.2	Geodetiche	17
2.1.3	Punti coniugati	19
2.1.4	Formalizzazione	20
2.2	Teorema della singolarità	22
2.2.1	Enunciato del teorema della singolarità	22
2.2.2	Le tre condizioni del teorema	22
2.2.3	Dimostrazione del teorema	27
3	Le singolarità nello spazio-tempo	33
3.1	Corollario del teorema della singolarità	33
3.2	Lo studio della CMB	35
3.2.1	La condizione di convergenza delle geodetiche dirette verso il passato	35
3.2.2	Origine della CMB e spettro di corpo-nero	36
3.2.3	La CMB dimostra l'esistenza della singolarità nel nostro passato	40

4	La proposta dell'assenza di confini	43
4.1	La scappatoia al problema della singolarità iniziale	44
4.2	Lo stato di Hartle-Hawking	45
4.3	C'è ancora posto per un Creatore?	50

Capitolo 1

L'Universo ha un'origine

Le equazioni fondamentali che descrivono il nostro Universo sono la metrica di Robertson-Walker e l'Equazione di Friedmann. Da queste si ricavano soluzioni formali, dei Modelli di Universo, che si differenziano tra loro a seconda del contenuto di materia gravitante e della curvatura geometrica dello spazio-tempo.

L'espansione accelerata dell'Universo ha portato a una riformulazione di queste equazioni fondamentali, in modo da includere il termine di energia oscura. Le stime attuali del parametro di densità della materia gravitante e di quello dell'energia oscura, assieme alla condizione di espansione accelerata, ci suggeriscono un Modello attuale dell'Universo in grado di fornirci l'evoluzione dell'espansione nel nostro Universo in funzione del tempo.

L'espansione, e in particolare la concavità verso il basso del fattore di scala $R(t)$, implicano che l'Universo ha un'età finita. Perciò, ci deve essere stato un istante in cui tutto ha avuto inizio. Un istante del Big Bang, in cui le leggi fisiche come le conosciamo oggi cessano di valere, in cui i parametri dinamici e termodinamici tendono all'infinito, quella che viene chiamata *singolarità iniziale*.

In questo capitolo mi occuperò di descrivere la struttura dell'Universo, la sua evoluzione dinamica, evidenziando come i Modelli di Universo che si ricavano, sia quelli semplici, e soprattutto il Modello attuale dinamico dell'Universo, prevedano un istante in cui il fattore di scala si annulla, un istante in cui tutto ha avuto inizio, il Big Bang.

1.1 La Struttura Generale dell'Universo

In questa Sezione introdurrò le equazioni fondamentali che descrivono il nostro Universo e la sua struttura geometrica, andando a definire la Metrica di Robertson-Walker e l'Equazione di Friedmann nella Sezione 1.1.1.

Nella sezione 1.1.2 analizzerò invece le soluzioni formali che si ricavano dall'Equazione di Friedmann, e che danno vita ai Modelli Cosmologici.

1.1.1 La Metrica di Robertson-Walker e l'Equazione di Friedmann

Il *Principio Cosmologico* afferma che l'Universo appare omogeneo e isotropo a tutti gli osservatori fondamentali che si trovino ad osservare al medesimo tempo cosmico.

Per isotropia si intende che in qualsiasi direzione si guardi, l'Universo appare lo stesso a tutti gli osservatori fondamentali a un dato istante di tempo cosmico.

Per omogeneità, si intende che ogni osservatore fondamentale vede la stessa pittura generale dell'Universo in qualsiasi posizione si collochi, a un dato istante di tempo cosmico. In altre parole, non esiste una posizione preferenziale nell'universo.

Il Principio Cosmologico è la base della Cosmologia. Assumendo la sua validità, si ricavano le equazioni fondamentali che descrivono l'Universo.

La prima di queste è la metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

dove $R(t)$ è il *fattore di scala universale* e stabilisce come si espande o si contrae l'Universo, cioè di quanto aumenti o diminuisca la distanza tra due oggetti in funzione del tempo cosmico.

Il termine k rappresenta il *parametro di curvatura*. Nell'Equazione (1.1) la coordinata comoving r è stata riscalata per fare in modo che k possa assumere i valori $k = +1, 0, -1$ rispettivamente per universi sferici, piatti o iperbolici. Quanto descritto è illustrato in Figura 1.1.

La derivazione della Metrica di Robertson-Walker si basa solo sul Principio Cosmologico, quindi sulle proprietà di simmetria dell'universo, e non utilizza la Relatività Generale. Perciò è un risultato valido anche se si verificasse che la corretta descrizione del nostro Universo non è fornita dalla Relatività Generale, ma da un'altra teoria.

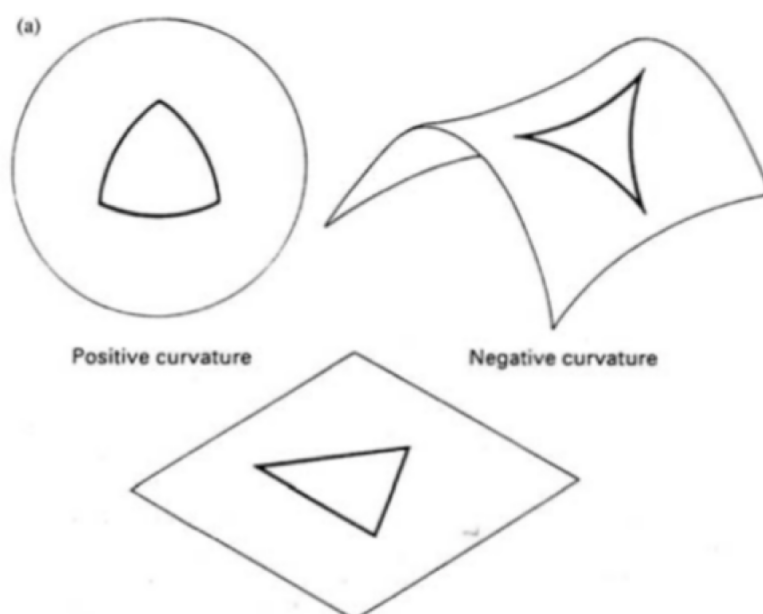


Figura 1.1: Universi sferici, piatti, iperbolici, a seconda del valore del parametro di curvatura k .

La Metrica di Robertson-Walker fornisce una rappresentazione generale della metrica universale, ma non dice come essa evolva nel tempo, ossia come evolva il fattore di scala $R(t)$, e non stabilisce se l'universo sia chiuso, piatto o aperto. Per ottenere queste informazioni si ricorre a una trattazione della dinamica dell'Universo, che ci permette di ottenere la *Prima Equazione della Dinamica*:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0R_0^3R(t)^{-2} \quad (1.2)$$

e l'*Equazione di Friedmann*, o *Seconda Equazione della Dinamica*, che ne è una soluzione generale:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)}G\rho_0R_0^3 - kc^2 \quad (1.3)$$

In queste Equazioni ρ_0 è la densità del substrato cosmico al tempo attuale. Questa evolve nel tempo come:

$$\rho(t) = \rho_0R_0^3R(t)^{-3} \quad (1.4)$$

L'Equazione (1.2) è un'equazione dinamica, che pone in relazione l'accelerazione delle particelle del sistema con le forze in gioco.

L'Equazione (1.3) è invece un'equazione di conservazione dell'energia, il membro a sinistra corrisponde all'energia cinetica, il primo termine a secondo membro è l'energia del potenziale gravitazionale, mentre l'addendo kc^2 contiene k , che è il parametro di curvatura che compare nella Metrica di Robertson-Walker.

1.1.2 Modelli cosmologici

Analizziamo ora alcune soluzioni formali delle equazioni dinamiche (1.2) e (1.3). Queste danno vita ai Modelli cosmologici, modelli di Universo, a seconda dei valori che si considerano per ρ e k .

Il Modello Di Milne

In questo modello la densità di materia è nulla, $\rho = 0$ e $k = -1$. E' un universo di particelle di massa nulla.

L'equazione di Friedmann (1.3) diviene:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)}G\rho_0R_0^3 - kc^2 = -kc^2 = c^2 \quad (1.5)$$

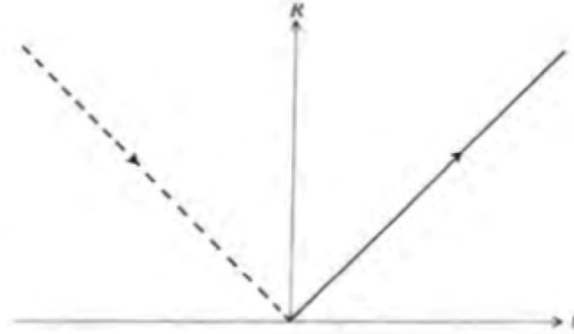


Figura 1.2: Il Modello di Milne.

che ha soluzione $R(t) = \pm ct$.

L'Universo si espande o contrae in modo lineare e uniforme, passa da una contrazione dall'infinito a un'espansione all'infinito. Questa espansione, o contrazione, non è né accelerata né decelerata: non ci sono effetti gravitazionali e perciò è un'evoluzione puramente geometrica.

Al tempo $t=0$ il fattore di scala $R(t)$ si annulla. Questo modello perciò prevede un istante di inizio dell'espansione, l'istante del Big Bang.

Il Modello di Milne è rappresentato in Figura 1.2.

Il Modello piatto di Einstein-De Sitter

Questo modello rappresenta il caso in cui $k=0$. E' uno spazio-tempo a curvatura nulla, perciò si definisce "piatto".

La soluzione dell'Equazione di Friedmann in questo caso è:

$$R(t) = \pm R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.6)$$

Analizzando la derivata $\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}$ si vede che per $t \rightarrow \infty$ la derivata tende a zero, ossia, per valori del tempo molto grandi, l'espansione si arresta e l'Universo tende alla condizione di universo statico con densità di materia nulla.

Mentre per $t \rightarrow 0$, $\dot{R}(t)$ diverge. Anche in questo modello quindi esiste un istante, al tempo $t=0$, in cui il fattore di scala $R(t)$ si annulla, mentre i parametri dinamici subiscono una divergenza. La velocità di espansione, cioè

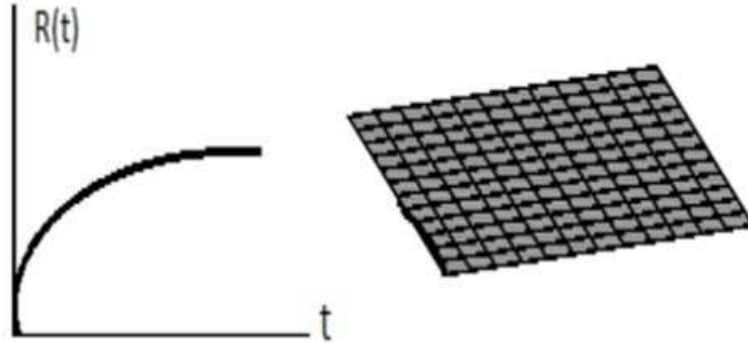


Figura 1.3: Il Modello piatto di Einstein-De Sitter. *A sinistra*, l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ con il tempo cosmico t . *A destra*, la rappresentazione grafica del modello geometrico di uno spazio piatto, corrispondente al caso $k=0$.

$\dot{R}(t)$, tende all' ∞ . Anche la densità di materia-energia, descritta dalla (1.4), per $R(t) \rightarrow 0$ subisce una divergenza.

Il modello piatto di Einstein-De Sitter è riportato in Figura 1.3.

Il Modello aperto

Questo modello corrisponde al caso dello spazio-tempo con $\rho > 0$ e $k = -1$. Dall'Equazione di Friedmann (1.3) si ricava che $\dot{R}^2(t) > 0$ per ogni valore di R , cioè la velocità di espansione è sempre positiva. E' quindi un'espansione infinita.

Quando, al crescere di t , $R(t)$ diventa molto grande, si vede che nell'Equazione di Friedmann (1.3) il termine kc^2 tende a dominare, e la soluzione diventa $\dot{R}(t) = \pm c$, quindi l'Universo tende progressivamente al caso dell'Universo di Milne. L'espansione fa sì che la densità di materia tenda a zero al crescere del tempo, la materia si dirada, la densità si abbassa. Perciò l'autogravità dell'Universo tende ad annullarsi, e l'espansione tende a una pura evoluzione geometrica.

Anche in questo caso, $R(t)$ ha derivata infinita per $t \rightarrow 0$.

Quanto descritto è illustrato in Figura 1.4.

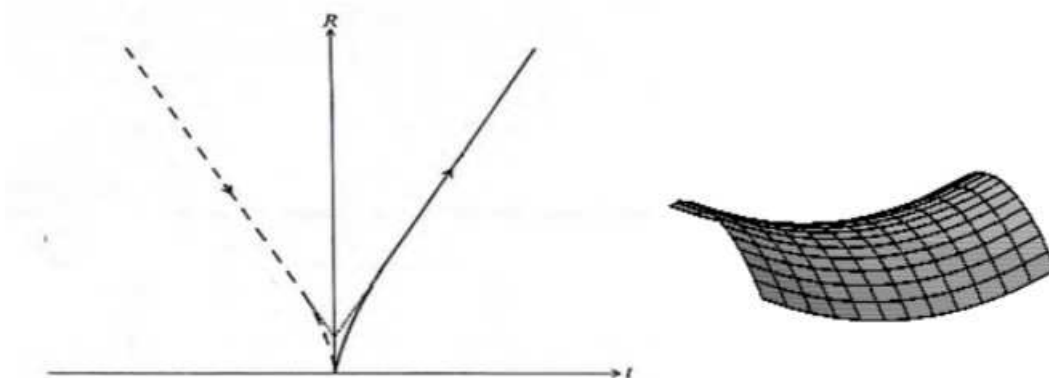


Figura 1.4: Il Modello aperto. *A sinistra*, l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ con il tempo cosmico t . *A destra*, la rappresentazione grafica del modello geometrico di uno spazio a sella, corrispondente al caso $k=-1$.

Il Modello chiuso

Questo modello corrisponde al caso di uno spazio-tempo con materia gravitante, $\rho > 0$ e $k = +1$. Dall'Equazione di Friedmann (1.3) si vede che la derivata si annulla per tempi sufficientemente avanzati, ovvero l'espansione si arresta, e sarà seguita da una contrazione e un collasso finale. Il valore per cui la derivata prima del fattore di scala si annulla, cioè $\dot{R}(t)^2 = 0$ è:

$$R(t) = R_c = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_0 R_0^3 \quad (1.7)$$

Questo valore del fattore di scala è quello che annulla la Friedmann, ed è il valore massimo che raggiunge $R(t)$. L'espansione si arresta in questo punto, e dopodiché incomincia una contrazione, poiché $\ddot{R}(t) < 0$ per ogni R , quindi si ha una curvatura verso il basso di $R(t)$, seguita da un collasso finale, chiamato anche Big Crunch.

A differenza degli altri modelli, qui la gravità vince sull'espansione, e fa collassare l'Universo. Nei modelli precedenti invece, il termine gravitazionale non era sufficiente a bilanciare il termine di espansione dato dall'energia cinetica del moto di espansione dell'universo.

Come negli altri modelli, anche in questo caso per $t \rightarrow 0$ la derivata di $R(t)$ diverge.

Il Modello chiuso è illustrato in Figura 1.5.

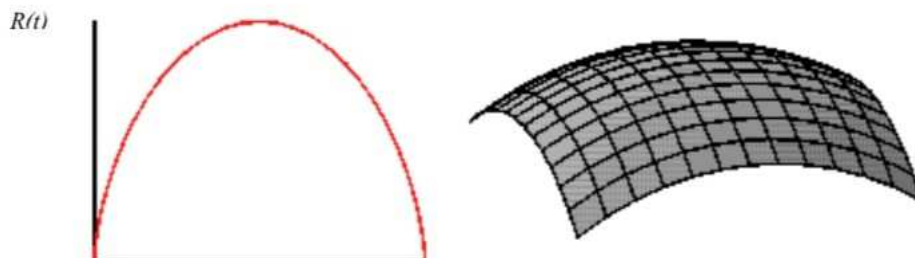


Figura 1.5: Il Modello chiuso. *A sinistra*, l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ con il tempo cosmico t . *A destra*, la rappresentazione grafica del modello geometrico di uno spazio sferico, corrispondente a $k=+1$.

1.2 La costante cosmologica Λ

In questa Sezione introdurrò la costante cosmologica Λ , dandone un'interpretazione di densità di energia del vuoto.

Questa costante fu inizialmente introdotta da Einstein, convinto della staticità dell'Universo, per evitarne il collasso dovuto all'autogravità. Fu poi abbandonata quando si scoprì che l'Universo non è statico, ma in espansione. Recentemente è stata riconsiderata per poter spiegare l'espansione accelerata del nostro Universo, la cui più importante evidenza è stata ottenuta da studi sulle Supernovae 1A, ma non è l'unica. Varie altre evidenze includono osservazioni della radiazione di fondo e dati sulla formazione delle strutture cosmiche.

Verranno ridefinite le Equazioni della Dinamica Cosmica nella Sezione 1.2.1, tenendo conto dell'influenza del parametro di densità dovuto alla materia gravitante Ω_m e di quello legato all'energia oscura Ω_Λ .

Nella Sezione 1.2.2 verrà invece descritto il Modello dinamico attuale dell'Universo, cioè il modello che meglio spiega l'evoluzione dell'espansione del nostro Universo sulla base dei valori stimati per $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$.

1.2.1 Le nuove Equazioni della Dinamica Cosmica

La condizione che l'Universo attuale sia in uno stato di espansione accelerata ha richiesto una ritrattazione della dinamica cosmica.

Il termine Λ , detto *costante cosmologica*, fu inizialmente introdotto da Einstein nelle sue Equazioni di campo per evitare il collasso dell'Universo dovuto all'autogravità, in modo da ottenere un Universo statico.

Egli era così sicuro che l'Universo fosse stazionario, da modificare la sua

teoria per adeguarla a questa ipotesi. Λ è una costante universale, ossia indipendente dalla posizione e dal tempo.

Riscrivendo così le Equazioni di campo si arriva al seguente risultato:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (1.8)$$

Da questa Equazione si nota che ponendo a zero tutte le sorgenti del campo gravitazionale, ovvero $T_{ij} = 0$, Λ rappresenta formalmente il tensore energia-impulso del vuoto. In altri termini, ci dà un'informazione sul comportamento del vuoto cosmico dal punto di vista della curvatura geometrica.

Questa costante fu abbandonata nel momento in cui l'ipotesi di staticità dell'Universo fu smentita da quella di un Universo in espansione, ma recentemente è stata riconsiderata, sulla base delle evidenze dell'espansione accelerata del nostro Universo. Essa è oggi parte integrante dello scenario interpretativo della dinamica cosmologica.

Il termine Λ è quindi interpretabile come la *densità di energia del vuoto*, ha un effetto gravitazionale e influisce sulla geometria dello spazio-tempo. E' un termine di energia repulsiva del vuoto che si contrappone alla gravità, a cui pertanto corrisponde una densità di massa equivalente che chiamiamo ρ_v .

La densità della materia gravitante ρ_m dipende dal fattore di scala $R(t)$ secondo la (1.4), la densità di massa-energia del vuoto è invece una costante, poiché Λ , la densità di energia del vuoto, è una costante cosmologica, indipendente dallo spazio e dal tempo. Perciò $\rho_v = \text{cost}$.

Introducendo il parametro di densità Ω_Λ associato all'energia del vuoto, che chiamiamo anche *energia oscura*, dove $\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_v}{3H_0^2}$ si riscrivono le Equazioni della dinamica cosmica (1.2) e (1.3) nel seguente modo, ricordando che $\rho_v = \text{cost}$:

$$\ddot{R}(t) = -\frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{2R^2(t)} + \Omega_\Lambda H_0^2 R(t) \quad (1.9)$$

$$\dot{R}^2(t) = \frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{R(t)} - kc^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2(t) \quad (1.10)$$

dove $\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H_0^2}$ è il parametro di densità della materia gravitante.

I parametri di densità evolvono con il tempo cosmico nel seguente modo:

$$\Omega_m(t) \propto \rho_m(t)H(t)^{-2} \quad (1.11)$$

$$\Omega_\Lambda(t) \propto H(t)^{-2} \quad (1.12)$$

Studiamo ora la soluzione formale che si ricava dalle Equazioni (1.9) e (1.10) e che meglio descrive l'evoluzione del nostro Universo, sulla base dei valori

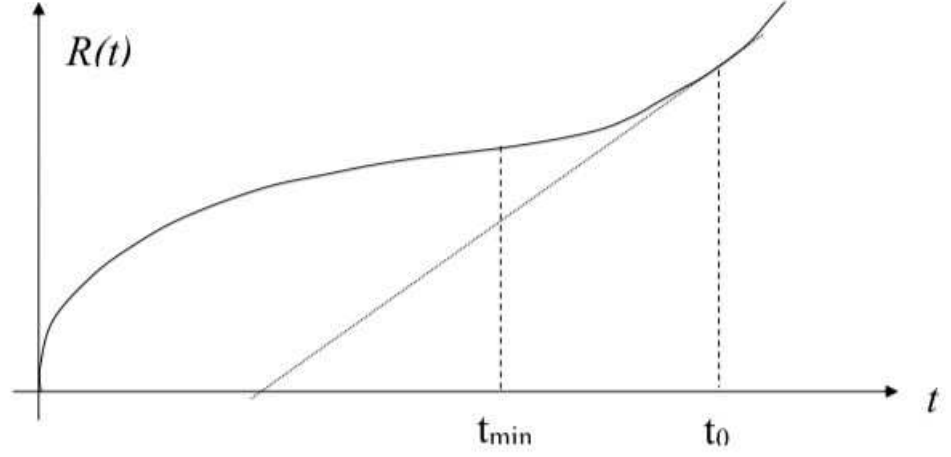


Figura 1.6: Evoluzione del fattore di scala per un modello con $\Omega_\Lambda > 0$ e $\dot{R}_{min} > 0$.

stimati per la densità di materia gravitante e la densità di energia oscura, $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$.

1.2.2 Il Modello dinamico attuale dell'Universo

In particolare, la soluzione che meglio riproduce i dati osservati è il caso in cui $\Lambda > 0$ e $\Omega_\Lambda > 0$.

In questo caso esiste un tempo cosmico t_{min} corrispondente a un minimo nel ritmo di espansione \dot{R}_{min} , in cui $\ddot{R} = 0$ nella (1.9). Ovvero, a questo istante si ha un cambio di segno di \ddot{R} , cioè si passa da un universo in espansione decelerata a uno in espansione accelerata.

Si trova che questo minimo corrisponde al redshift:

$$z_{min} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \quad (1.13)$$

Il caso che riproduce al meglio i dati osservati nel nostro Universo è quello in cui $\dot{R}_{min} > 0$, illustrato in Figura 1.6.

Per $t < t_{min}$, cioè in un intervallo che va dal Big Bang a t_{min} , l'Universo è dominato dalla materia gravitante, dall'autogravità, e si espande perciò in modo decelerato.

Il termine Ω_m domina rispetto a Ω_Λ e l'Universo segue in questa fase un

modello piatto di Einstein-De Sitter.

A t_{min} si ha un cambio di concavità di $R(t)$, cioè un cambio di segno di $\ddot{R}(t)$. In questa fase Ω_Λ prende il sopravvento rispetto a Ω_m e produce un'espansione accelerata, che diventa un'espansione esponenziale:

$$R(t) \propto \exp \left[\left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{\frac{1}{2}} t \right] \quad (1.14)$$

La sottile retta a puntini presente in Figura 1.6 indica la pendenza attuale del tasso di espansione, misurata dalla costante H_0 .

La soluzione riportata in Figura 1.6, come già detto, rappresenta molto bene l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ nel nostro Universo, in cui $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$. Questi valori implicherebbero un Universo piatto, in quanto la loro influenza sulla geometria dell'Universo è espressa dalla seguente relazione:

$$kc^2 = H_0^2 R_0^2 [\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1] \quad (1.15)$$

da cui si ottiene $k=0$.

Il redshift a cui corrisponde il minimo tasso di espansione si ricava da (1.13) ed è $z_{min} \approx 0.66 \pm 0.1$.

Durante la fase precedente questo redshift, l'Universo si è espanso con una legge simile a quella di Einstein-De Sitter, cioè un Universo piatto dominato dalla materia, durante la quale l'effetto della costante cosmologica è stato praticamente ininfluenza. Durante le prime fasi espansive, si può quindi trascurare la presenza di Ω_Λ .

Con l'espandersi dell'Universo, mentre la materia gravitante oscura e barionica si andava rarefacendo, e dunque l'autogravità dell'Universo diminuiva, la costante cosmologica, rimanendo invariata, cominciava a prendere il sopravvento. A partire dall'epoca corrispondente a z_{min} in poi, l'espansione è stata progressivamente sempre più dominata dall'energia oscura sino ad arrivare alla futura fase di espansione esponenziale, a cui ci stiamo avvicinando.

1.3 L'inevitabilità della singolarità iniziale

A questo punto, sorge quasi spontanea una considerazione: se l'Universo è sempre stato in espansione, deve aver avuto un inizio. Un momento in cui tutto il materiale è stato schiacciato in un punto di densità infinita, e le leggi della fisica per come le conosciamo hanno smesso di valere. Questo punto in cui i parametri dinamici e termodinamici divergono, si chiama *singolarità iniziale*. E' l'istante del Big Bang, in cui tutto ha avuto inizio.

I modelli trattati nelle sezioni precedenti prevedono tutti un istante in cui

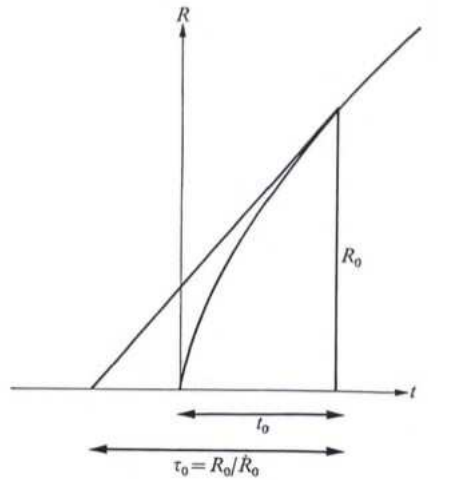


Figura 1.7: La funzione $R(t)$ è concava verso il basso.

il fattore di scala si annulla, e i parametri divergono. Prevedono quindi un istante del Big Bang.

Il fatto che l'Universo abbia un tempo finito, cioè non esista da sempre, ma abbia avuto un *inizio*, consegue dal fatto che la derivata seconda del fattore di scala è minore di zero, ovvero $\ddot{R}(t) < 0$. Cioè $R(t)$, il fattore di scala, quindi l'espansione cosmica in funzione del tempo, è concava verso il basso. Questo implica che il fattore $R(t)$ vada a intersecare l'asse dei tempi, e quindi ad annullarsi. L'Universo ha perciò un'età finita!

Ciò è illustrato in Figura 1.7.

Il contenuto di materia gravitante dell'Universo determina l'autogravità, perciò, all'aumentare di questa, si avrà una maggiore decelerazione, e di conseguenza un'età minore dell'Universo, in quanto $R(t)$ intersecherà prima l'asse dei tempi.

Includendo il termine di energia oscura, e ottenendo il modello cosmico in Figura 1.6, vediamo che l'effetto della costante cosmologica è quello di “stiracchiare” il fattore di scala lungo l'asse dei tempi, così ottenendo un'età dell'Universo di

$$t_0 = 13.77 \text{Gyrs} \quad (1.16)$$

completamente consistente con l'età degli ammassi globulari e delle stelle più antichi.

Capitolo 2

I teoremi di singolarità

Nel 1965 Penrose dimostrò che una stella soggetta al collasso gravitazionale viene intrappolata in una regione la cui superficie si contrae fino a dimensioni tendenti a zero. Tutta la materia presente nella stella viene perciò compressa in una regione di volume nullo, cosicché la densità di materia e la curvatura dello spazio-tempo diventano infinite. In altri termini, si ha una singolarità in una regione dello spazio-tempo, nota come buco nero.

Hawking si rese conto che se si fosse rovesciata la direzione del tempo nel teorema di Penrose, così che il collasso fosse diventato un'espansione, le condizioni del suo teorema sarebbero rimaste ancora valide. Quindi anche l'Universo in espansione sarebbe dovuto cominciare con una singolarità.

Nel 1970 Stephen Hawking e Roger Penrose presentarono un nuovo teorema che implicava l'esistenza di singolarità nello spazio-tempo. Dimostrarono, sotto certe condizioni, l'esistenza di geodetiche incomplete, ovvero curve di universo che non iniziano e non terminano nello spazio-tempo.

L'incompletezza di tali geodetiche venne usata come indicazione della presenza di singolarità.

Si parla di teoremi di singolarità in quanto possono essere presi diversi tipi di combinazioni delle tre condizioni imposte dal teorema. Si può indebolire una condizione se si assumono versioni più forti delle altre due.

Le tre condizioni sono le seguenti. Innanzitutto, c'è una condizione globale sulla struttura causale, la condizione di causalità debole o forte. Poi c'è una condizione di energia, debole o forte, e una condizione secondo cui in qualche regione la gravità è abbastanza forte che nulla può evaderne.

I vari teoremi sulle singolarità mostrano che, se valgono diverse combinazioni dei tre tipi di condizioni, lo spazio-tempo deve essere geodeticamente incompleto.

Verrà qui presentato il Teorema di Hawking e Penrose del 1970, in cui si assume una condizione di causalità piuttosto debole, che non debbano esserci

curve di tipo tempo chiuse. Si assume poi la condizione energetica forte, e che ci sia una superficie intrappolata nel passato o nel futuro.

Con questo teorema si dimostra in modo matematicamente rigoroso che l'Universo ha avuto origine da una singolarità iniziale. Tuttavia, il teorema non dà indicazioni sulla natura di tale singolarità. Ne prova soltanto l'esistenza. Possiamo perciò interpretare questo teorema come l'indicazione che la teoria della Relatività Generale, predicando punti in cui le leggi della fisica smettono di valere, include e descrive i propri limiti.

In questo capitolo analizzerò la struttura matematica del Teorema di Hawking e Penrose presentato nel 1970.

2.1 Definizioni e lemmi

Nella sezione 2.1.1 definirò concetti che verranno utilizzati in tutto il capitolo, soffermandomi in particolare sulla nozione di confine del futuro di un insieme S .

Verrà definita inoltre la condizione di iperbolicità globale, assumendo la validità del principio di causalità forte e la condizione di compattezza.

Nelle sezioni 2.1.2 e 2.1.3 spiegherò i concetti di geodetiche e di punti coniugati su una geodetica, andando poi a formalizzarli nella sezione 2.1.4.

Questa analisi ci porterà all'importante risultato che in uno spazio S globalmente iperbolico c'è una geodetica di lunghezza massima che unisce ogni coppia di punti p e q che possano essere uniti da una curva di tipo tempo o nulla. Questa conclusione, riportata nel Lemma 4, sarà la chiave per comprendere il teorema della singolarità di Hawking e Penrose trattato nella sezione 2.2.

Verranno inoltre definiti gli insiemi intrappolati nel futuro e intrappolati nel passato, anch'esse nozioni di grande importanza per la sezione 2.2.

2.1.1 La condizione di iperbolicità globale

Consideriamo lo *spazio-tempo* M , una varietà differenziabile quadridimensionale.

Una *curva di tipo tempo* è una curva regolare con vettori tangenti diretti verso il futuro, entro i loro coni luce, strettamente di tipo tempo.

Una *curva causale* su M è continua ma non necessariamente regolare ovunque, dove è regolare i suoi vettori tangenti sono o di tipo tempo o nulli.

Queste curve possono avere punti finali (detti *endpoints*) nel passato e nel futuro, oppure possono continuare indefinitamente nel passato (curve *ine-*

stensibili nel passato) o nel futuro (*inestensibili nel futuro*), o in entrambi (*inestensibili*).

Consideriamo ora due punti p, q appartenenti alla varietà M , $p, q \in M$.

Scriviamo $p \ll q$ se c'è una curva di tipo tempo da p a q , con p endpoint passato e q endpoint futuro.

Scriviamo $p \prec q$ se o $p=q$, o c'è una curva causale da p a q .

Se $p \prec q$ ma non $p \ll q$ allora c'è una geodetica nulla da p a q , oppure $p=q$.

Definiamo $I^+(p)$ per indicare il futuro cronologico di un punto $p \in M$, cioè l'insieme di tutti i punti dello spazio-tempo M che possono essere raggiunti a partire da p da curve di tipo tempo dirette verso il futuro. Perciò $I^+(p) = \{x : p \ll x\}$.

Definiamo $I^+[S]$ per indicare il futuro cronologico di un insieme S contenuto in M , $S \subset M$.

Definiamo inoltre $J^+(p) = \{x : p \prec x\}$.

Definiamo $E^+(S) = J^+[S] - I^+[S]$. Quindi $E^+(S)$ è il confine del cono futuro di S , in altre parole i bordi del cono, o una parte di essi.

Gli insiemi $I^-(p), I^-[S], J^-(p), J^-[S], E^-(S)$ sono definiti allo stesso modo, ma nel passato al posto che nel futuro.

Soffermiamoci ora su cosa sia questo *confine del futuro di un insieme* S , ovvero $E^+(S)$.

Il confine del futuro cronologico non può essere di tipo tempo o di tipo spazio, ma è nullo.

Se q è un punto nel confine del futuro, vuol dire che c'è un segmento geodetico di lunghezza nulla diretto verso il passato che passa per q . (Figura 2.1)

Può esserci più di un segmento geodetico nullo passante per q , che giace sul confine, solo se q è un estremo futuro dei segmenti. (Figura 2.2)

Notiamo che le geodetiche nulle generatrici possono avere un estremo passato solo su S . Infatti, dalla Figura 2.3, notiamo che possono esistere geodetiche nulle senza alcun estremo passato.

Per ogni insieme $S \in M$ definiamo il *dominio di dipendenza futuro* $D^+(S)$ come tutti i punti x tali che ogni curva di tipo tempo inestensibile nel passato che passa attraverso x incontra S .

Definiamo *orizzonte di Cauchy* $H^+(S)$ l'insieme dei punti che appartengono a $D^+(S)$ ma il cui futuro cronologico non appartiene a $D^+(S)$.

Un insieme è *acronale* se non contiene una coppia di punti p, q tali che $p \ll q$. Siamo interessati a considerare il caso in cui S è un insieme acronale chiuso;

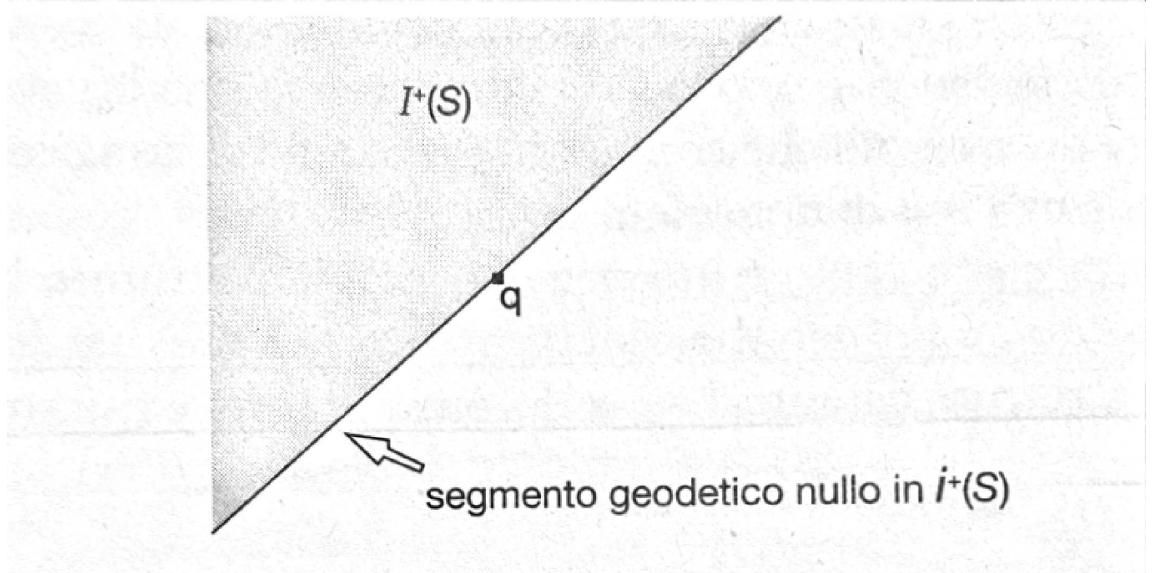


Figura 2.1: Il punto q si trova sul confine del futuro, perciò c'è un segmento geodetico nullo nel confine che passa per q .

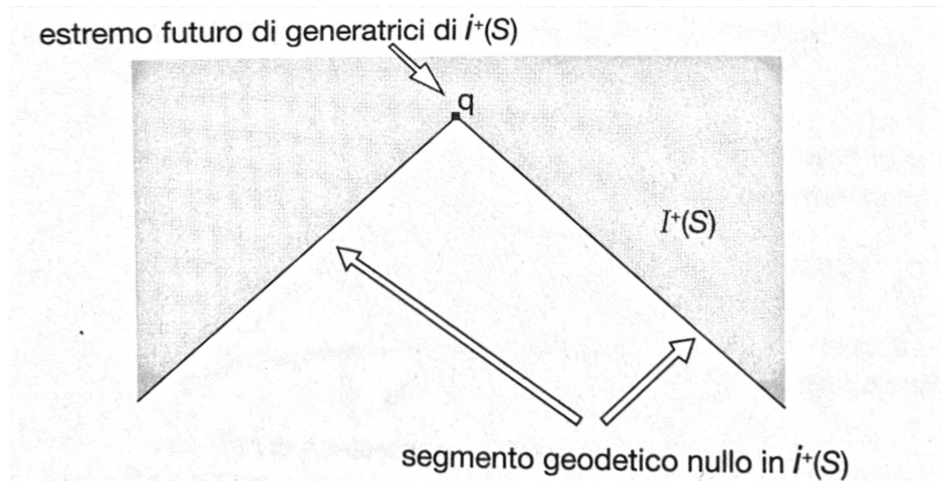
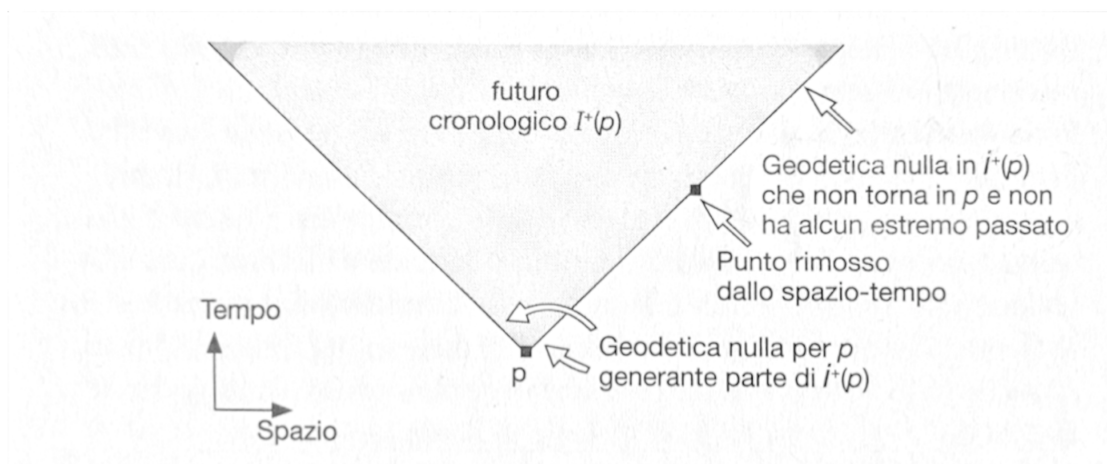


Figura 2.2: Se c'è più di un segmento geodetico nullo nel confine che passa per q , il punto q è estremo futuro.

Figura 2.3: Futuro cronologico di un punto p .

allora $D^+(S)$ è un insieme chiuso mentre $H^+(S)$ è un insieme acronale chiuso.

Definiamo il confine di un insieme acronale S chiuso come l'insieme dei punti $p \in S$ tali che, se γ è una curva di tipo tempo da r a q che contiene p , allora ogni intorno di γ contiene una curva di tipo tempo da r a q che non incontra S . Il confine di S ($\text{edge}(S)$) è infatti l'insieme dei punti nel quale intorno cade la condizione di varietà imposta per S .

Diciamo che vale la condizione di causalità forte in p se le curve di tipo tempo non possono lasciare l'intorno di p e poi ritornarvi, ovvero se M non contiene curve di tipo tempo chiuse. Perciò non si ha $p \ll p$.

Un'altra proprietà di $D^+(S)$ che dobbiamo richiedere (con S nuovamente chiuso e acronale) è che $J^-(p) \cap J^+[S]$ sia compatto. (Ovvero l'intersezione tra il cono passato di p , inclusi i bordi del cono, e il futuro di S , inclusi i bordi del cono, sia una regione a forma di rombo). (Figura 2.4)

In questo modo, abbiamo definito due condizioni importanti da imporre su S . La prima è la condizione di causalità forte, la seconda è la condizione di compattezza. Se queste due valgono, si dice che S è globalmente iperbolico. Abbiamo imposto perciò la condizione di iperbolicità globale su S .

2.1.2 Geodetiche

Una *varietà di Riemann* è una varietà differenziabile dotata di un tensore metrico che definisca sullo spazio tangente di ciascun punto della varietà un

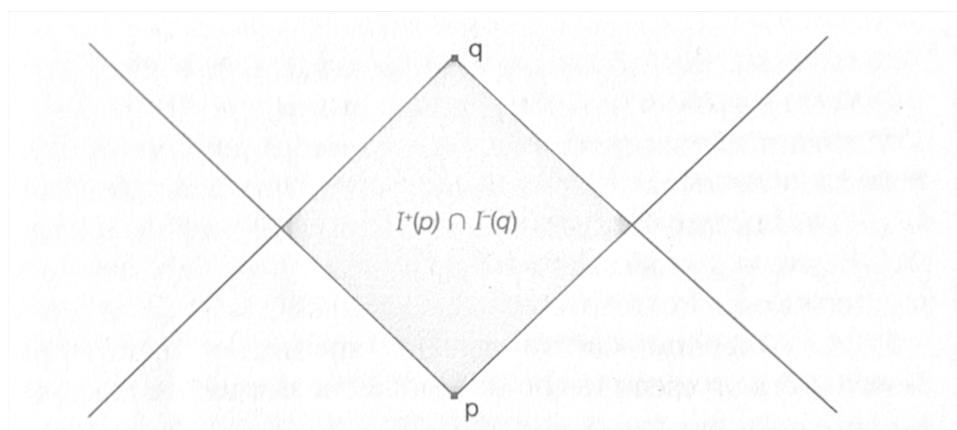


Figura 2.4: L'intersezione tra il passato di p e il futuro di q , o il futuro dell'insieme S , ha una chiusura compatta.

prodotto scalare non degenerare e definito positivo.

In una *varietà pseudo-riemanniana* invece, il prodotto scalare non deve essere necessariamente definito positivo, pertanto questa varietà generalizza la nozione di varietà riemanniana.

Una *varietà lorentziana* è una varietà pseudo-riemanniana in cui il tensore metrico ha segnatura $(n - 1, 1)$ o $(1, n - 1)$ con n dimensione della varietà. In relatività generale lo spazio-tempo è una varietà lorentziana con segnatura $(3,1)$, dove il numero 3 rappresenta le coordinate spaziali, il numero 1 quella temporale.

Nel caso di una varietà lorentziana, esistono tre tipi di geodetiche: di tipo tempo, di tipo spazio, di tipo luce.

Parliamo di lunghezza quando definiamo le geodetiche di tipo spazio e di tipo luce (nelle geodetiche di tipo luce essa è zero), mentre utilizziamo il tempo proprio τ , invece che la lunghezza, per parametrizzare le geodetiche di tipo tempo.

Su una varietà con una metrica di Riemann, la curva di lunghezza minima che connette due punti è una geodetica. Tuttavia, una curva geodetica tra due punti non è necessariamente il percorso più breve tra di essi.

Su una varietà con una metrica di Lorentz invece, la curva di tipo tempo tra due punti che estremizza il tempo proprio è una geodetica di tipo tempo.

Questo si dimostra andando a verificare che lo spazio di tutte le curve di tipo tempo o nulle da p a q è compatto, e che la lunghezza della curva è una funzione semicontinua superiormente su questo spazio. Essa deve perciò conseguire il suo massimo, e la curva di lunghezza massima sarà una geodetica, perché se così non fosse, una piccola variazione darebbe una curva più lunga.

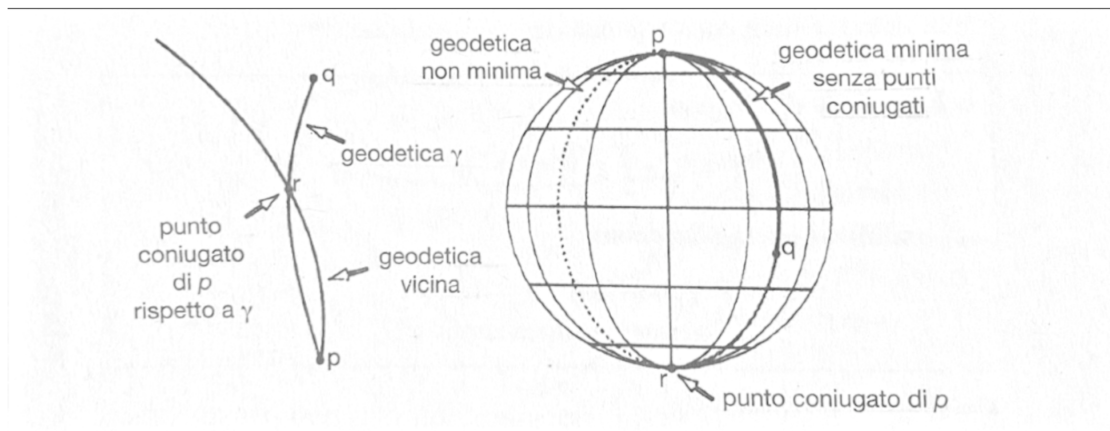


Figura 2.5: *A destra:* la geodetica non minima da p a q ha un punto coniugato r al Polo Sud. *A sinistra:* se c'è un punto coniugato r fra p e q su una geodetica, questa non è la geodetica di lunghezza minima.

Perciò, nel caso lorentziano le geodetiche di tipo tempo sono i massimi locali del funzionale della lunghezza, non i minimi.

Tuttavia, una geodetica tra due punti non deve necessariamente massimizzare il tempo proprio.

Questo concetto risulterà più chiaro apprendendo di seguito la nozione di punti coniugati.

2.1.3 Punti coniugati

Introduciamo ora la nozione di punti coniugati lungo una geodetica. Mostriamo che la loro assenza è una condizione necessaria e sufficiente per una geodetica tra due punti per essere un massimo locale di tempo proprio nel caso di Lorentz, e un minimo locale di lunghezza nel caso di Riemann.

Per fare questo, prendiamo come esempio due punti p e q posti sulla superficie della Terra, e andiamo a illustrare quanto spiegato di seguito in Figura 2.5.

Il punto p si trova al Polo Nord. Poiché la Terra ha una metrica definita positiva, piuttosto che una metrica lorentziana, esiste una geodetica di lunghezza minima, anziché una geodetica di lunghezza massima. Questa geodetica minima sarà un meridiano che va dal Polo Nord al punto q . Ci sarà un'altra geodetica da p a q , quella che corre nell'opposto emisfero, partendo dal Polo Nord, passando per il Polo Sud e arrivando in q . Questa geodetica contiene un punto coniugato di p al Polo Sud, il punto r , dove si intersecano tutte le geodetiche che provengono da p . Possiamo dedurre che questa curva, pur

essendo una geodetica, non è la curva di lunghezza minima tra p e q .

Abbiamo quindi spiegato come una geodetica tra due punti non sia necessariamente il percorso più breve tra di essi.

Analogamente, nel caso di una varietà lorentziana, consideriamo una geodetica γ .

La geodetica γ può essere variata nel senso di una maggiore lunghezza se c'è una geodetica da p infinitesimamente vicina che torna a intersecare γ in un punto r posto tra p e q . Il punto r è detto punto coniugato. Usiamo il termine lunghezza di una geodetica per denotare il suo intervallo di tempo proprio, come già accennato.

Si dimostra allora che, se γ contiene il punto coniugato r , non è la geodetica di lunghezza massima tra i due punti p e q .

2.1.4 Formalizzazione

Andiamo ora a formalizzare i concetti appena esposti.

Definiamo il concetto di *punti coniugati* su una geodetica causale (cioè di tipo tempo o nulla).

Definizione 1 (punti coniugati) *Due punti p e q su una geodetica causale γ sono detti coniugati se una geodetica limitrofa a γ incontra γ in p e q . Ovvero, la congruenza di una geodetica attraverso p nell'intorno di γ ha q come punto focale, cioè un punto dove la divergenza della congruenza diviene infinita.*

Questa definizione è simmetrica, cioè vale anche se i ruoli di p e q sono invertiti.

La proprietà dei punti coniugati che dobbiamo richiedere è la seguente:

Lemma 1 *Se una geodetica causale γ da p a q contiene una coppia di punti coniugati tra p e q , allora esiste una curva di tipo tempo da p a q la cui lunghezza eccede quella di γ .*

Come corollario di questo lemma abbiamo:

Lemma 2 *Se γ è una geodetica nulla su $I^+(S)$ o su $H^+(S)$ per qualche $S \in M$, allora γ non può contenere una coppia di punti coniugati eccetto ai suoi endpoints.*

Un'altra conseguenza è:

Lemma 3 *Se M non contiene curve di tipo tempo chiuse e se ogni geodetica nulla inestensibile in M possiede una coppia di punti coniugati, allora vale la causalità forte su M .*

Un'altra importante conseguenza della causalità forte è il seguente risultato:

Lemma 4 *Sia $p \ll q$ così che l'insieme $J^+(p) \cap J^-(q)$ sia compatto e non contenga punti in cui cada la condizione di causalità forte. Allora c'è una geodetica di tipo tempo da p a q che raggiunge la lunghezza massima per curve di tipo tempo che connettono p a q .*

Questo lemma è molto importante. Afferma che in uno spazio S globalmente iperbolico c'è una geodetica di lunghezza massima che unisce ogni coppia di punti p e q che possano essere uniti da una curva di tipo tempo o nulla.

Definizione 2 (Insieme intrappolato nel futuro o nel passato) *Un insieme intrappolato nel futuro (rispettivamente intrappolato nel passato) è un insieme acronale chiuso non vuoto S contenuto in M , per cui $E^+(S)$ (rispettivamente $E^-(S)$) è compatto. Ogni insieme S intrappolato nel futuro (o nel passato) deve essere compatto, poiché $S \subset E^+(S)$ (rispettivamente, se intrappolato nel passato $S \subset E^-(S)$).*

Ne consegue questo importante lemma:

Lemma 5 *Se S è un insieme intrappolato nel futuro per cui vale la causalità forte in ogni punto di $I^+[S]$, allora esiste una curva di tipo tempo inestensibile nel futuro $\gamma \subset \text{int}D^+(E^+(S))$. Rispettivamente, ciò vale anche se S è un insieme intrappolato nel passato.*

Ciò che si ricava dalla Definizione 2 e dal Lemma 5, è che se S è un insieme intrappolato nel futuro, o nel passato, allora è compatto, e se vale la condizione di causalità forte, possiamo dire che S è globalmente iperbolico, per quanto visto nella Sezione 2.1.1. Pertanto si può dire che una superficie intrappolata nel passato, o nel futuro, se vale la condizione di causalità forte, è una regione globalmente iperbolica. Dal Lemma 4, essa conterrà una geodetica di lunghezza massima che unisce ogni coppia di punti p e q che possano essere uniti da una curva di tipo tempo o nulla.

2.2 Teorema della singolarità

Nella sezione 2.2.1 enuncerò il teorema della singolarità di Hawking e Penrose, andando poi a spiegarlo e analizzarlo nella sezione 2.2.2., e a darne una dimostrazione nella sezione 2.2.3.

Verrà dimostrato, sotto certi assunti, e in particolare assumendo la completezza delle geodetiche, che dovrebbe esserci una regione globalmente iperbolica in cui si dovrebbero avere punti coniugati su ogni geodetica tra due punti. Questo però determina una contraddizione, poiché, per il Lemma 4 visto in precedenza, in uno spazio globalmente iperbolico c'è una geodetica di lunghezza massima che unisce una coppia di punti. Perciò, l'assunto di completezza delle geodetiche è falso. Ciò implica l'esistenza di una singolarità.

2.2.1 Enunciato del teorema della singolarità

Teorema della singolarità (Hawking e Penrose) 1 *Uno spazio-tempo M non può soddisfare tutti e tre i seguenti requisiti contemporaneamente:*

1. *M non contiene curve di tipo tempo chiuse*
2. *Ogni geodetica causale inestensibile in M contiene una coppia di punti coniugati*
3. *Esiste un insieme intrappolato nel futuro o intrappolato nel passato $S \subset M$*

2.2.2 Le tre condizioni del teorema

Esaminiamo ora queste tre condizioni.

Condizione (1)

Per quanto riguarda la (1), essa esprime la condizione di causalità. Ammettere l'esistenza di curve di tipo tempo chiuse in qualsiasi spazio-tempo porta a difficoltà interpretative importanti, poiché non sarebbe più valido il principio di causalità. Si potrebbe discutere l'esistenza di linee di universo di tipo tempo chiuse a patto che la linea di universo entri in una regione di condizioni fisiche così estreme, o sia coinvolta in accelerazioni talmente elevate che nessun osservatore fisico potrebbe “sopravvivere” durante questo

viaggio nel suo stesso passato, così che ogni memoria degli eventi verrebbe necessariamente distrutta nel corso del viaggio.

Inoltre, l'esistenza di queste curve implicherebbe condizioni globali di consistenza sulle soluzioni delle equazioni differenziali iperboliche molto severe.

Condizione (2)

Per quanto riguarda la (2), per ogni geodetica di tipo tempo o nulla c'è una geodetica vicina che la incontra in due punti distinti. Questa condizione ci si aspetta che valga in ogni spazio-tempo non-singolare fisicamente realistico. Essa è una conseguenza di tre richieste:

- Completezza delle geodetiche causali
- Condizione energetica
- Una assunzione di generalità

La richiesta di *completezza delle geodetiche causali* è semplicemente il fatto che ogni geodetica nulla o di tipo tempo può essere estesa a valori di parametri affini arbitrariamente grandi sia nel futuro che nel passato. Nel caso di geodetiche di tipo tempo usiamo il tempo proprio come parametro.

Possiamo interpretare questa condizione dicendo che i fotoni e le particelle libere di muoversi non possono apparire o scomparire ai bordi dell'Universo.

Analizziamo ora la *condizione energetica*.

Le condizioni sull'energia contribuiscono alla descrizione della materia nello spazio-tempo. Queste condizioni sono espresse da disuguaglianze che riguardano il tensore energia-impulso, l'oggetto matematico che rappresenta la distribuzione della massa e dell'energia nello spazio-tempo.

Il tensore energia-impulso viene definito nel seguente modo:

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

Il termine T_{00} rappresenta la densità di energia.

I termini T_{11}, T_{22}, T_{33} , rappresentano invece la pressione.

La *condizione energetica debole* assume che la densità di energia, rappresentata dalla componente T_{00} del tensore energia-impulso, sia positiva.

Per la *condizione energetica forte* bisogna considerare anche i termini di pressione T_{11}, T_{22}, T_{33} , del tensore energia-impulso, e porre che siano anch'essi non negativi. Per cui si potrebbe tradurre questa condizione come $E + \Sigma p_i \geq 0$, dove E è la densità di energia, data dalla componente T_{00} del tensore energia-impulso, e poi si sommano le pressioni date dalle altre tre componenti.

Il significato fisico è che, se considero geodetiche nulle, cioè geodetiche di particelle prive di massa, ci si limita a considerare la densità di energia dello spazio-tempo, e porre che sia positiva. Perciò, in questo caso, è sufficiente assumere la condizione energetica debole.

Se invece si considerano geodetiche di tipo tempo, ovvero linee di universo di particelle con massa, bisogna tenere in considerazione anche i termini di pressione della materia, e porre che la loro somma sia non negativa. Una pressione positiva difatto si traduce in una compressione della materia. Se la pressione invece fosse negativa, la materia sarebbe soggetta a un'espansione, e andrebbe a contrastare l'azione della gravità, che invece è attrattiva.

Per geodetiche di tipo tempo bisogna quindi assumere la condizione energetica forte.

Si può formalizzare quanto descritto andando ad analizzare la congruenza delle geodetiche.

La ragione per cui, secondo la (2), si ottengono punti coniugati nello spazio-tempo, è che la gravità è una forza solo attrattiva. Essa incurva lo spazio-tempo in modo tale che le geodetiche sono incurvate l'una verso l'altra, anziché l'una via dall'altra.

Questo lo si può vedere dall'Equazione di Raychaudhuri o di Newman-Penrose:

$$\frac{d\rho}{dv} = \rho^2 + \sigma^{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{n}R_{ab}l^al^b$$

dove $n=2$ per geodetiche nulle, $n=3$ per geodetiche di tipo tempo.

Qui v è un parametro affine lungo una congruenza delle geodetiche con vettore tangente l^a , che è ortogonale all'ipersuperficie. La quantità ρ è il tasso medio di convergenza delle geodetiche, mentre σ misura lo sforzo di scorrimento.

Il termine $R_{ab}l^al^b$ dà l'effetto gravitazionale diretto della materia sulla convergenza delle geodetiche.

Questo termine deve quindi essere non negativo affinché le geodetiche convergano, quindi la gravità sia attrattiva.

Per le equazioni di Einstein, questo termine sarà non negativo per qualsiasi vettore nullo l^a se la materia obbedisce alla condizione energetica debole.

Equazione di Einstein:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi T_{ab}$$

Condizione energetica debole:

$$T_{ab}v^av^b \geq 0$$

per ogni vettore tempo v^a .

In altre parole, per geodetiche nulle è necessaria la condizione energetica debole per imporre che la gravità sia attrattiva. La condizione energetica debole dice che la densità di energia T_{00} è non negativa in qualsiasi sistema di riferimento. Essa è soddisfatta dal tensore classico energia-impulso di qualsiasi componente del fluido cosmico con equazione di stato fisicamente ragionevole.

Se vale la condizione energetica debole, geodetiche nulle condotte da p infinitesimamente vicine tra loro si intersecheranno in q . Perciò q sarà il coniugato di p lungo la geodetica nulla γ che li unisce. Questa geodetica lascerà il confine del futuro di p in q .

Per le geodetiche di tipo tempo abbiamo una situazione simile, dobbiamo però richiedere una condizione energetica forte per rendere il termine $R_{ab}l^al^b$ non negativo per ogni vettore di tipo tempo l^a .

Cioè, affinché la gravità risulti attrattiva per geodetiche di tipo tempo, la condizione da richiedere è più forte.

Condizione energetica forte:

$$T_{ab}v^av^b \geq \frac{1}{2}v^av_aT$$

Se vale la condizione energetica forte e le geodetiche di tipo tempo condotte da p ricominciano a convergere, ci sarà un punto q coniugato di p .

Dobbiamo ora fare una assunzione di *generalità*, cioè assumiamo di riferirci a una situazione fisicamente realistica, e non andiamo a metterci in condizioni “speciali”, che sono fisicamente non realistiche: ad esempio, non ci poniamo nella condizione per cui in ogni punto per ogni geodetica di tipo tempo γ $R_{ab}l^al^b$ si annulla e il tensore di Weyl sia legato in un modo particolare a γ .

Se vale la condizione energetica forte e questa assunzione, ogni geodetica incontrerà una regione di focalizzazione gravitazionale. Questo implicherà che, se si può estendere abbastanza la geodetica in ogni direzione, ci siano coppie di punti coniugati.

La conclusione importante che abbiamo ricavato è la seguente:

se γ è completa, vale l’assunzione generale in qualche punto di γ e vale la condizione energetica (debole o forte), allora γ contiene una coppia di punti coniugati.

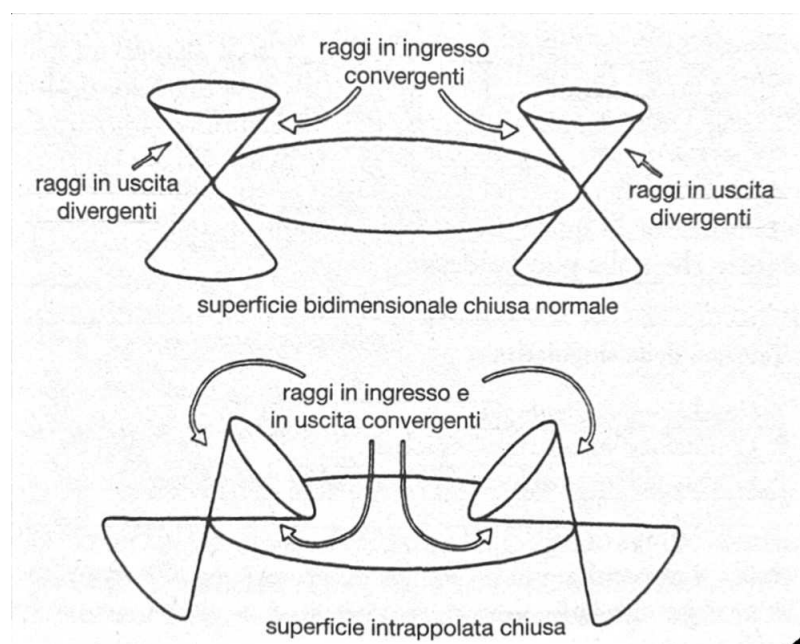


Figura 2.6: Su una superficie intrappolata chiusa, convergono i raggi nulli sia in ingresso sia in uscita.

Condizione (3)

Arriviamo ora alla (3).

Sappiamo, dalla Definizione 2, che un insieme intrappolato nel futuro è un insieme compatto.

Un esempio di un insieme intrappolato nel futuro è una superficie intrappolata, cioè una superficie spaziale bidimensionale compatta con la proprietà che entrambi i sistemi di geodetiche nulle che intersecano S ortogonalmente convergono in S , procedendo verso il futuro. In altre parole, questo vuol dire che i raggi luminosi che si originano da essa e sono ortogonali ad essa sono sempre convergenti, cioè non riescono ad uscire. Normalmente, se si ha una superficie bidimensionale chiusa normale, le geodetiche nulle in ingresso sono convergenti, mentre quelle in uscita sono divergenti. Nel collasso di una stella invece, ad esempio, il campo gravitazionale può essere così forte che i coni luce sono rovesciati verso l'interno, e perciò persino le geodetiche nulle in uscita sono convergenti. (Figura 2.6)

Ovvero, la gravità è così forte che nulla può evaderne. Ci aspettiamo allora che le superfici intrappolate si presentino nel momento in cui un corpo localizzato, come una stella, collassa gravitazionalmente all'interno del suo raggio di Schwarzschild.

In generale, è necessario avere qualche ragione per credere che le geodetiche nulle che formano il confine locale del futuro di S convergano da qualche parte nel futuro di S . In particolare, S potrebbe contenere un solo punto p , localizzato da qualche parte vicino al centro di un corpo che collassa, ma che in un momento prima del collasso abbia drasticamente modificato la geometria in p . Allora, sotto adatte circostanze, il cono futuro nullo di p può incontrare abbastanza materia collassante che localmente comincia di nuovo a convergere.

Anche in questo caso, p è intrappolato nel futuro.

Nella sua forma invertita nel tempo, questo ultimo esempio ha una certa importanza in cosmologia. Se il punto p si riferisce alla Terra all'epoca attuale, le geodetiche nulle nel passato, attraverso p , spazzano una regione che rappresenta la porzione di universo visibile ora a noi. Se materia sufficiente incontra queste geodetiche nulle, allora la divergenza delle geodetiche ($-\rho$) può cambiare segno da qualche parte nel passato di p . Questo cambio di segno accade dove un oggetto di una data dimensione che intercetta il raggio nullo sottende il suo massimo angolo solido in p . Quindi, l'esistenza di un massimo angolo solido per oggetti in ogni direzione, può essere considerata come l'interpretazione fisica di questo tipo di insieme intrappolato nel passato $\{p\}$.

Lo studio della CMB mostra che la condizione richiesta per p sembra essere soddisfatta nel nostro universo.

Approfondirò questo concetto nel capitolo 3.

Un altro esempio di un insieme intrappolato nel passato o nel futuro è ogni insieme acronale che è una ipersuperficie spaziale compatta. In questo caso, il teorema si applica a modelli di universo chiuso.

2.2.3 Dimostrazione del teorema

Dopo aver esaminato nel dettaglio le tre condizioni imposte dal teorema nella sezione 2.2.2, ne diamo ora la dimostrazione.

Il ragionamento chiave che porta alla dimostrazione di questo teorema è il seguente:

Se vale il principio di causalità (condizione (1)), si assume la completezza delle geodetiche, la condizione energetica e l'assunzione di generalità, si dovrebbe ottenere che tutte le geodetiche hanno coppie di punti coniugati (condizione (2)).

Se però consideriamo una superficie intrappolata nel futuro (condizione (3)), si dimostra che non tutte le geodetiche hanno coppie di punti coniugati, poiché in uno spazio globalmente iperbolico, come lo è appunto una super-

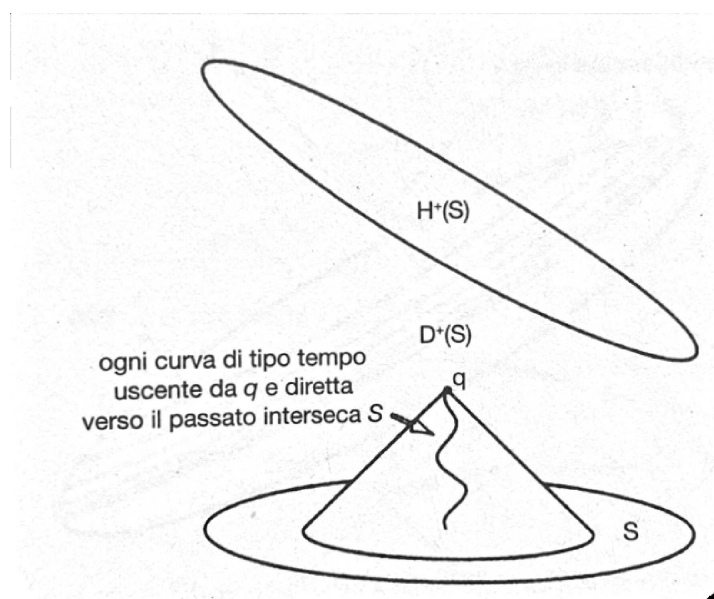


Figura 2.7: Lo sviluppo di Cauchy futuro $D^+(S)$ di un insieme S e il suo confine futuro, l'orizzonte di Cauchy $H^+(S)$.

ficie intrappolata nel futuro, esiste una geodetica di lunghezza massima che in quanto tale, per definizione, non contiene punti coniugati. Pertanto cade l'assunzione di completezza delle geodetiche. Le geodetiche sono quindi incomplete. La condizione (2) dunque non è valida. Difatto, il teorema afferma che le condizioni (1), (2), (3), non possono essere verificate contemporaneamente.

Dimostrazione

Consideriamo una superficie tridimensionale di tipo spazio chiusa S , cioè una superficie intrappolata nel futuro. Vale quindi la (3).

Definiamo lo *sviluppo di Cauchy futuro* $D^+(S)$ come la regione di punti q da cui ogni curva di tipo tempo diretta verso il passato interseca S . $D^+(S)$ è quindi la regione dello spaziotempo che può essere predetta a partire da dati su S .

Supponiamo ora che $D^+(S)$ fosse compatto. In questo caso, lo sviluppo di Cauchy avrebbe un confine futuro chiamato *orizzonte di Cauchy futuro* $H^+(S)$. (Figura 2.7)

L'orizzonte di Cauchy futuro è generato da segmenti geodetici nulli senza estremi passati (si può avere un estremo passato solo su S).

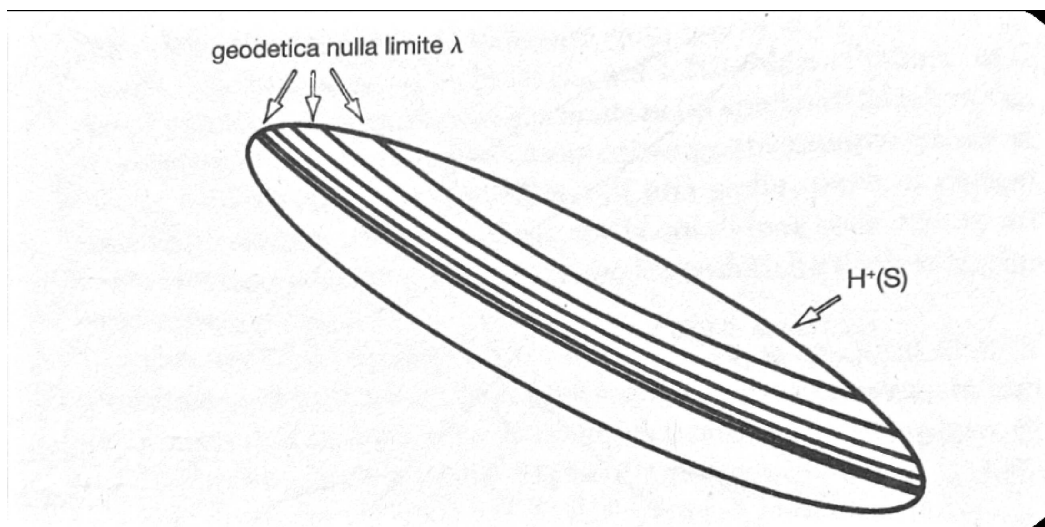


Figura 2.8: C'è una geodetica nulla limite λ nell'orizzonte di Cauchy la quale non ha estremi passati o futuri nell'orizzonte di Cauchy.

Poiché si suppone che lo sviluppo di Cauchy sia compatto, anche l'orizzonte di Cauchy sarà compatto. Ciò significa che i generatori di geodetiche nulle si avvolgeranno all'interno di un insieme compatto, approssimandosi a una geodetica nulla limite λ che non avrà né estremi passati né estremi futuri nell'orizzonte di Cauchy, come indicato in Figura 2.8.

Se λ fosse geodeticamente completa, la condizione di energia e l'assunzione generica che abbiamo fatto al punto (2) implicherebbero che λ contenesse punti coniugati p e q . Stiamo quindi ipotizzando che valga la (2).

I punti su λ al di là di p e q potrebbero essere uniti da una curva di tipo tempo, poiché stanno su un insieme compatto. Questa sarebbe però una contraddizione, poiché non è possibile che due punti dell'orizzonte di Cauchy siano separati su una curva di tipo tempo.

Perciò le possibilità sono due: o λ non è geodeticamente completa, e quindi cade l'assunzione di completezza fatta in (2), o lo sviluppo di Cauchy futuro di S non è compatto, e allora andrebbe rivista l'ipotesi (3) di S intrappolato nel futuro, poiché un insieme intrappolato nel futuro è un insieme compatto (dalla Definizione 2).

Analizziamo questo secondo caso, in cui lo sviluppo di Cauchy futuro non è compatto. Si può dimostrare che c'è una curva di tipo tempo γ diretta verso il futuro a partire da S , la quale non lascia mai lo sviluppo di Cauchy futuro di S (Lemma 5). Un'argomentazione simile mostra che γ può essere estesa al passato, a una curva che non si stacca mai dallo sviluppo di Cauchy passato $D^-(S)$. (Figura 2.9)

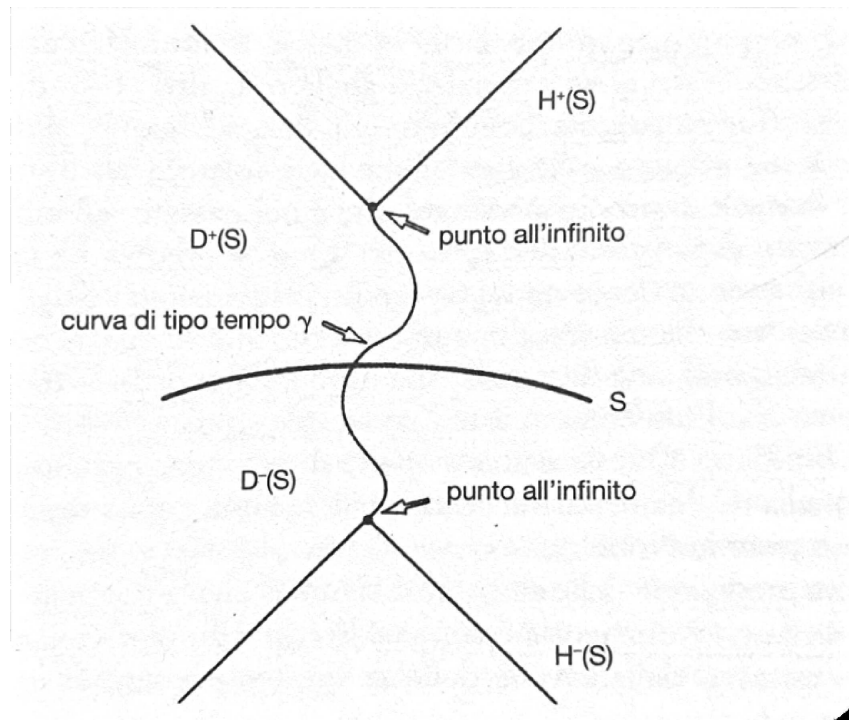


Figura 2.9: Se lo sviluppo di Cauchy futuro (passato) non è compatto, c'è una curva di tipo tempo da S diretta verso il futuro (o verso il passato) che non lascia mai lo sviluppo di Cauchy futuro (o passato).

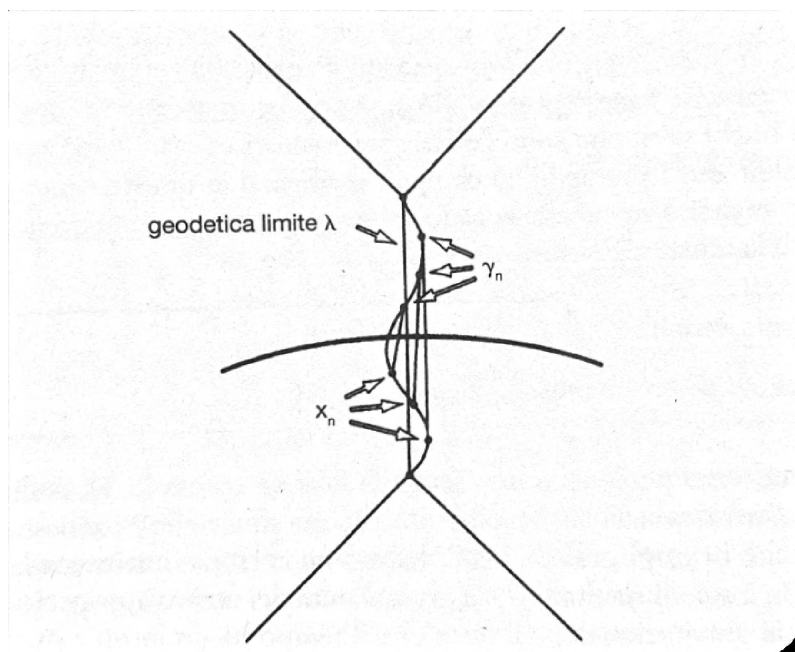


Figura 2.10: La geodetica γ dovrà essere incompleta, poiché altrimenti conterrebbe punti coniugati.

Consideriamo ora una sequenza di punti x_n su γ tendente al passato, e una sequenza simile y_n tendente al futuro. Per ogni valore di n , i punti x_n e y_n sono separati su una curva di tipo tempo e si trovano nello sviluppo di Cauchy globalmente iperbolico di S . C'è quindi una geodetica di tipo tempo di lunghezza massima λ_n da x_n a y_n , per il Lemma 4. Tutte le λ_n intersecheranno la superficie di tipo spazio compatta S , poiché per ipotesi stiamo andando dal passato al futuro. Ciò significa che ci sarà una geodetica di tipo tempo λ nello sviluppo di Cauchy la quale è un limite della geodetica di tipo tempo λ_n . (Figura 2.10)

Se λ è completa e vale la condizione di energia e l'assunzione generale, allora conterrebbe punti coniugati, cioè vale (2). Ma se λ contiene punti coniugati, anche λ_n conterrebbe punti coniugati, e questa sarebbe una contraddizione perché abbiamo supposto che le λ_n siano curve di lunghezza massima. Perciò λ non può contenere punti coniugati, e dunque cade la condizione di completezza delle geodetiche.

Si può perciò concludere che lo spazio-tempo è geodeticamente *incompleto*. In altri termini, c'è una singolarità.

Capitolo 3

Le singolarità nello spazio-tempo

Il Teorema della singolarità di Hawking e Penrose dimostra che la Relatività Generale predice l'esistenza di singolarità.

In questo capitolo andrò ad approfondire le conseguenze che questo teorema ha nel nostro Universo, implicando la presenza di singolarità nel futuro e nel passato. Quest'ultimo caso ha un interesse cosmologico, in quanto predice l'esistenza di una singolarità iniziale all'origine dell'espansione del nostro Universo.

Lo studio di S.W. Hawking e G.F.R. Ellis del 1968 sulla Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde è riportato nel seguito di questo capitolo.

I due fisici dimostrarono che la densità di massa-energia della CMB è tale da far convergere le geodetiche di tipo tempo e nulle nel nostro cono luce passato, formando così una superficie intrappolata chiusa nel passato.

In questo modo, il Teorema della singolarità si può applicare nel nostro Universo, e in particolare all'inizio della presente espansione, ovvero una singolarità iniziale da cui tutto ha avuto origine.

3.1 Corollario del teorema della singolarità

Definiamo il corollario del nostro teorema:

Corollario 1 *Uno spazio-tempo M non può soddisfare la condizione di completezza delle geodetiche causali se valgono le equazioni di Einstein e se valgono le seguenti quattro condizioni:*

- (a) *M non contiene curve di tipo tempo chiuse*
- (b) *la condizione energetica è soddisfatta in ogni punto*

(c) *l'assunzione di generalità è soddisfatta per ogni geodetica causale*

(d) *M contiene*

(i) *una superficie intrappolata, o*

(ii) *un punto p per cui la convergenza di tutte le geodetiche nulle e di tipo tempo attraverso p cambia segno da qualche parte nel passato di p , o*

(iii) *una ipersuperficie spaziale compatta*

Il fallimento della condizione di completezza delle geodetiche causali è una dichiarazione che ogni spazio-tempo che soddisfa le quattro condizioni possiede una singolarità. Cioè, esistono curve di universo che non iniziano o non terminano nello spazio-tempo.

La predizione dell'inevitabilità delle singolarità, attraverso l'esistenza inevitabile di geodetiche incomplete, ovvero geodetiche che non si possono prolungare fino a valori infiniti del parametro affine, significa che la Relatività Generale non è una teoria completa. Poiché i punti singolari devono essere isolati dalla varietà dello spazio-tempo, non vi si possono definire le Equazioni di campo e non si può predire cosa verrà fuori da una singolarità. Le geodetiche incomplete rendono la fisica imprevedibile, impedendo di capire cosa succede alle particelle che incontrano una singolarità. Perciò, è come se la teoria della Relatività Generale stessa ci stesse predicendo la sua incompletezza, affermando la sicura esistenza di singolarità, ma non potendo dirci nulla di più per quanto riguarda ciò che accade al loro interno. Non si può quindi concludere nulla per quanto riguarda la natura di queste singolarità. Il teorema prevede singolarità nel futuro e nel passato.

Nel futuro, queste si generano dalla creazione di superfici intrappolate nel collasso gravitazionale di stelle alla fine della loro vita, e di altri corpi di grande massa. Questa singolarità è una fine del tempo per particelle in moto su geodetiche incomplete.

Una singolarità "nuda", ovvero osservabile dall'esterno, non è accettabile, poiché altrimenti ogni venir meno della predicibilità che può verificarsi all'interno di essa dovrebbe incidere su ciò che accade nel mondo esterno.

Per escludere questa possibilità, Penrose formulò l'ipotesi di *censura cosmica*, secondo cui la natura aborre una singolarità nuda. Dalla singolarità infatti non possono giungere né la luce né alcun tipo di segnale, perciò essa rimane nascosta ad un osservatore esterno.

Per le singolarità nel futuro, questo vuol dire che esse si presentano in luoghi celati a osservatori esterni, come i buchi neri, e sono protette da un orizzonte

degli eventi. Questo risolve il problema per gli osservatori esterni all'orizzonte. Invece, per coloro che ipoteticamente cadessero in un buco nero, non c'è modo di evitare il problema.

Nel passato, il teorema predice una singolarità all'inizio della presente espansione dell'Universo. Ciò costituirebbe perciò un inizio del tempo.

Analizziamo più a fondo quest'ultimo caso di grande interesse cosmologico.

3.2 Lo studio della CMB

Hawking e Ellis dimostrarono, nel 1968, che le osservazioni della CMB, la Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde, indicano che c'è abbastanza densità di massa-energia nel cono luce passato con origine in p , punto in cui poniamo la nostra posizione attuale nell'Universo, da implicare che la divergenza di questo cono cambi segno da qualche parte nel passato di p .

Dimostrarono quindi che la condizione (ii) del punto (d) del corollario del Teorema della singolarità è soddisfatta nel nostro Universo.

La CMB prova quindi l'esistenza di una singolarità nel nostro passato.

Nella sezione 3.2.1 analizzerò la condizione di convergenza delle geodetiche di tipo tempo e nulle dirette verso il passato, con origine nel punto p corrispondente alla nostra attuale posizione nell'Universo.

Nella sezione 3.2.2 introdurrò la CMB e riporterò lo studio di Hawking e Ellis, con il quale riuscirono a dimostrare che la densità di massa-energia della Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde è sufficiente a produrre la convergenza delle geodetiche dirette verso il passato (condizione (ii) del punto (d) del corollario del teorema).

3.2.1 La condizione di convergenza delle geodetiche dirette verso il passato

La condizione (ii) del punto (d) del corollario è la seguente: esiste un punto p tale che tutte le geodetiche di tipo tempo e nulle attraverso p , dirette verso il passato, comincino a convergere entro una regione compatta nel passato di p . Ovvero, se queste geodetiche cominciano a convergere nel passato, ad un certo punto entreranno in una superficie intrappolata chiusa nel passato, poiché i raggi dei coni luce saranno tutti convergenti. Chiamiamo questa superficie intrappolata chiusa τ .

Per esprimere questa condizione in maggior dettaglio, chiamiamo v^a il campo vettoriale unitario tangente alle geodetiche di tipo tempo, dirette verso il passato, che partono da p . Sia w^a il vettore unitario di tipo tempo diretto verso il passato in p . Per ogni geodetica di tipo tempo diretta verso il passato

definiamo il numero f come $(w^a v_a)_p$. La condizione (ii) del punto (d) implica che esista un numero positivo b per cui le geodetiche comincino a convergere entro una distanza $s=b/f$ misurata lungo la geodetica da p .

Questa condizione è mostrata in Figura 3.1. Sono mostrate le geodetiche di tipo tempo dirette verso il passato che iniziano a convergere prima di raggiungere la superficie $s=b/f$.

Le geodetiche nulle dirette verso il passato da p iniziano anch'esse a convergere, raggiungendo la superficie τ . Vediamo che, oltre la distanza b/f , le geodetiche entrano nella superficie intrappolata chiusa τ .

Una tale superficie esiste se una regione di materia con densità ρ ha un raggio più piccolo del suo Raggio di Schwarzschild R_s . Se considero un fluido di densità ρ , una sfera di raggio r include una massa di ρr^3 . Il raggio di Schwarzschild è dato da:

$$R_s = \frac{2G\rho r^3}{c^2} \quad (3.1)$$

dove $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg}$ è la costante di gravitazione universale, c è la velocità della luce nel vuoto.

Una regione di materia con raggio entro il Raggio di Schwarzschild è tale se:

$$r < R_s \quad (3.2)$$

per cui si trova che la *condizione per cui si forma una superficie intrappolata chiusa* è la seguente:

$$r > \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \quad (3.3)$$

dove $k = \frac{2G}{c^2}$ raccoglie le costanti.

Chiamiamo perciò *lunghezza di Schwarzschild* il termine $\frac{1}{\sqrt{k\rho}}$, e ci aspettiamo che una sfera con raggio maggiore di questa lunghezza sia una superficie intrappolata chiusa.

Quello che si vuole dimostrare è che, se c'è abbastanza densità di energia da soddisfare la condizione di Schwarzschild, e quindi implicare l'esistenza di una superficie intrappolata chiusa, allora questa densità di energia sarà sufficiente per incurvare le geodetiche e soddisfare la condizione (ii) del punto (d). Ovvero, il Teorema della singolarità è soddisfatto.

3.2.2 Origine della CMB e spettro di corpo-nero

La Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde, la CMB, è un fondo di fotoni di corpo nero che oggi osserviamo nelle microonde, con un picco alla lunghezza d'onda di $\lambda = 2mm$. La temperatura di questo fondo all'epoca

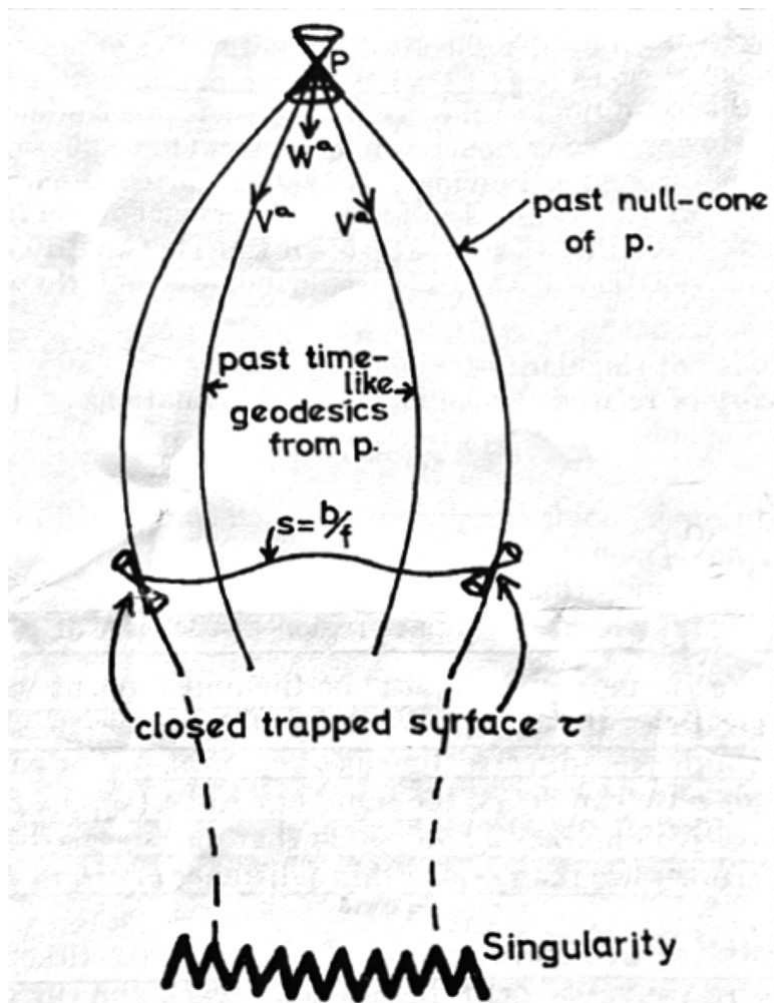


Figura 3.1: Geodetiche dirette verso il passato convergono raggiungendo la superficie intrappolata chiusa τ

attuale è $T = 2.728K$.

Questa radiazione è stata scoperta nel 1965 dai fisici Penzias e Wilson in modo casuale, e valse ai due il premio Nobel nel 1978.

L'origine della CMB è molto remota.

Andando indietro nel tempo, a redshift sempre più elevati, la densità di energia dei fotoni aumenta secondo la legge:

$$\rho_\gamma(t) = \rho_{\gamma 0} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-4} \quad (3.4)$$

Allo stesso tempo, per effetto del redshift, anche la loro energia $E = h\nu$ aumenta linearmente di un fattore $(1+z)$. Perciò, andando ad alti redshift, ogni atomo di idrogeno si trova immerso in un bagno di fotoni, sempre più denso e caldo.

Quando la temperatura dei fotoni supera il valore $T \simeq 3000K$, l'interazione con gli atomi di idrogeno inizia a produrre la ionizzazione di questi, andando a creare un mare di elettroni liberi. Si passa quindi da una fase neutra del fluido cosmico, a una fase ionizzata, più remota.

A questo punto, i fotoni iniziano ad interagire con il gran numero di elettroni liberi con una probabilità data dalla sezione d'urto di Thompson.

Questo processo si chiama *Ricombinazione* (anche se, in realtà, non c'è stata nessuna precedente combinazione di protoni ed elettroni) o *Disaccoppiamento*, termine che si riferisce alla separazione dei fotoni dalla materia.

L'universo diviene così da trasparente a completamente opaco.

La Ricombinazione si colloca a redshift di $z = 1100$. In realtà, il processo non è così immediato, la diminuzione del grado di ionizzazione avviene in un intervallo di redshift di $\Delta z = 200$.

La Ricombinazione può essere considerata come la superficie di ultimo scattering della radiazione di fondo, è la superficie oltre la quale l'Universo è completamente opaco, perciò nessuna sorgente cosmica può essere vista a un redshift superiore a questo. E' l'orizzonte oltre il quale la visione diretta dell'Universo è impossibile. Determina perciò un limite di osservabilità.

La posizione di questa superficie di ultimo scattering non è definita in assoluto, ma è relativa ad ogni osservatore fondamentale.

La perfetta forma spettrale di corpo-nero della Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde si spiega andando a considerare il numero di interazioni tra fotoni ed elettroni liberi al tempo della Ricombinazione, un numero così elevato da realizzare la condizione di Equilibrio Termodinamico tra radiazione e materia, necessaria per formare uno spettro di Planck.

La forma di questo spettro si mantiene inalterata con l'espansione.

Consideriamo per dimostrarlo l'evoluzione temporale della densità numerica dei fotoni per uno spettro di corpo nero, che al tempo generico t_1 si scrive:

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi B_\nu}{c h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3[\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1]} \quad (3.5)$$

Al tempo successivo $t_0 > t_1$ tutti i fotoni saranno depressi in energia per lo stesso fattore $\nu_0 = \nu \frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{\nu}{1+z}$, e la densità fotonica diminuisce con $(1+z)^3$. Perciò, al tempo t_0 , avremo:

$$\frac{dN_0}{d\nu_0} = \frac{dN/(1+z)^3}{d\nu/(1+z)} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{8\pi\nu_0^2(1+z)^2}{c^3[\exp(\frac{h\nu_0(1+z)}{kT}) - 1]} = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3[\exp(\frac{h\nu_0}{kT_0}) - 1]} \quad (3.6)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene considerando che

$$T_0 = T/(1+z) \quad (3.7)$$

Perciò, lo spettro si mantiene interamente di corpo nero, con solo la temperatura che cambia.

La temperatura di questo spettro evolve con:

$$T_\gamma = T_0 \frac{R_0}{R(t)} = 2.728 \times (1+z) \quad (3.8)$$

Perciò, la temperatura evolve con $R(t)^{-1}$.

La densità di energia ε_γ è data da $\varepsilon_\gamma = \rho_\gamma c^2$.

Perciò ρ_γ , che evolve secondo la (3.4), sarà:

$$\rho_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c^2} \propto R(t)^{-4} \propto T_\gamma^4 \quad (3.9)$$

Il grado di isotropia di questa radiazione è elevatissimo.

Il satellite COBE ha misurato un'anisotropia dello 0.001%, cioè qualche parte su centomila. Questo testimonia la condizione di straordinaria omogeneità e isotropia dell'Universo primordiale, poiché questo fondo di radiazione proviene direttamente dal plasma primordiale circa 380000 anni dopo il Big Bang. Poiché non vi sono motivi per ritenere che la nostra posizione nell'Universo abbia alcunché di privilegiato, come afferma il *principio cosmologico*, ci aspettiamo che la radiazione appaia estremamente isotropa anche in ogni altro punto dell'Universo.

3.2.3 La CMB dimostra l'esistenza della singolarità nel nostro passato

Il motivo per cui consideriamo la Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde per dimostrare l'esistenza di una singolarità nel nostro passato è proprio il suo elevatissimo grado di isotropia.

Non consideriamo, ad esempio, la materia osservata nelle galassie. Questo perché, se immaginiamo di considerare le linee di universo delle galassie, queste non possono essere usate per stabilire la condizione di convergenza di tutte le geodetiche di tipo tempo, poiché ci potrebbe essere una geodetica che evita tutte le galassie. Quello che ci serve è una distribuzione uniforme di densità di energia, qualcosa che permea tutto l'Universo, di modo che le geodetiche ci passino tutte "attraverso". Ecco perché consideriamo la CMB: per il suo elevatissimo grado di isotropia.

Hawking ed Ellis ricavarono che la condizione che deve essere soddisfatta perché le geodetiche convergano nel passato è la seguente:

$$\int_{t_0-b}^{t_0} \frac{4}{3} k \rho_\gamma \sin^2 \left[\frac{\pi}{2b} (t_0 - t) \right] dt > \frac{3 \pi^2}{8 b} \quad (3.10)$$

dove t_0 è il tempo attuale, $t_0 - b$ il tempo a cui la densità di energia è sufficiente per incurvare le geodetiche dirette verso il passato, $k = \frac{2G}{c^2}$ è lo stesso che rientra nella lunghezza di Schwarzschild (3.3), ρ_γ è la densità di energia della radiazione, che evolve con (3.4). Il termine b è un numero positivo per cui le geodetiche cominciano a convergere entro una distanza $s=b/f$ misurata lungo la geodetica da p .

La densità di energia della radiazione di corpo nero è proporzionale a $R(t)^{-4}$. Questo si ricava dalla relazione (3.4), che esprime come evolve la densità di massa-energia della radiazione nell'Universo.

Affinché la condizione (3.10) sia valida, bisogna prendere valori di $(t_0 - b)$ piccoli, cioè estendere l'integrale a tempi remoti, andando a grandi distanze nello spazio-tempo. Hawking e Ellis stimarono che la densità di energia sufficiente per produrre una convergenza delle geodetiche dirette verso il passato si sarebbe ottenuta con un fattore

$$\frac{R(t_0)}{R(t_e)} \simeq 100 \quad (3.11)$$

dove $\frac{R(t_0)}{R(t_e)} = (1 + z)$, perciò questa densità di massa-energia corrisponde a quella a $z \simeq 100$.

Questo vuol dire che a un redshift di $z \simeq 100$, ovvero quando la scala dell'Universo era 100 volte più ristretta rispetto a quella attuale, la densità di

energia della Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde, che evolve con una legge data dalla (3.9), era tale da incurvare le geodetiche di tipo tempo e nulle, facendole convergere.

I due fisici posero poi la condizione per cui la radiazione di corpo nero non fosse stata scatterata, cioè non abbia subito interazioni con la materia, da quest'epoca in poi. Se ciò fosse accaduto non avrebbero potuto utilizzare la CMB per il loro scopo, poiché ci sarebbero state deviazioni dall'omogeneità. E l'omogeneità, una densità di energia che permea tutto l'Universo, è necessaria affinché nessuna geodetica possa evitare tale radiazione.

La condizione che la radiazione di corpo nero non abbia subito scattering dal tempo $(t_0 - b)$ è che la profondità ottica sia minore di 1, ovvero:

$$\int_{t_0-b}^{t_0} (\sigma c \rho_{gas} / m) dt < 1 \quad (3.12)$$

Questo vuol dire che i fotoni riescono a passare indisturbati attraverso il mezzo, nel loro navigare nell'Universo, e perciò a non essere scatterati.

La sezione d'urto di Thomson è $\sigma = 6.65 \times 10^{-24} \text{cm}^2$ che descrive l'interazione tra materia e radiazione, m è la massa del protone (sto considerando atomi di idrogeno) e c è la velocità della luce.

Ricavarono che questa condizione è soddisfatta sempre, perciò la (3.10) è soddisfatta, e la condizione di convergenza delle geodetiche è soddisfatta nel nostro Universo. Perciò, c'è inevitabilmente una singolarità nel nostro passato.

Oggi, a distanza di più di 50 anni da questo studio, pubblicato nel 1968, sappiamo che l'Universo è effettivamente trasparente nella regione che va dal radio ai raggi X, cioè la probabilità di assorbimento di questi fotoni all'epoca attuale è molto bassa. Questa bassa probabilità di interazione si esprime attraverso un basso valore della sezione d'urto della materia nei confronti di questi fotoni di bassa energia che la attraversano. Una chiara dimostrazione di questa trasparenza sta nel fatto che sono state identificate sorgenti fino a redshift di $z \simeq 10$, e molti quasars oltre $z \simeq 6$, sulla base di osservazioni in bande ottiche.

Questa trasparenza è garantita anche in epoche più remote, poiché stelle e galassie hanno cominciato a formarsi in epoche relativamente recenti, attorno a circa $z \simeq 10 - 11$. Anche la maggior parte delle componenti radiative si sono originate da attività di produzione di energia in sorgenti cosmiche, in epoche relativamente recenti. Andando nel passato, in epoche sempre più remote, queste componenti tendono via via a sparire. La CMB invece, come già discusso, ha un'origine molto più remota, ed è in grado di testimoniare l'elevatissimo grado di omogeneità e isotropia dell'Universo primordiale.

Abbiamo visto quindi come le geodetiche di tipo tempo o nulle dirette verso

il passato cominciano a convergere nel momento in cui c'è abbastanza densità di massa-energia nello spazio-tempo da poterle incurvare.

La Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde, la CMB, soddisfa questa condizione. Per dimostrarlo bisogna quindi andare ad alti redshift, cioè a grandi distanze nello spazio-tempo, poiché la densità di massa-energia della radiazione di corpo nero va come $\rho_\gamma \propto R(t)^{-4}$.

Andando ad alti redshift, il fattore di scala $R(t)$ diminuisce, e la densità di massa-energia della radiazione di corpo-nero aumenta rapidamente.

Se calcoliamo il raggio proprio del cono nullo di p al tempo $(t_0 - b)$, a cui l'integrale deve essere esteso affinché la condizione sia soddisfatta, troviamo che è dell'ordine della lunghezza del raggio di Schwarzschild, e, in particolare, è 8 volte questa lunghezza. Cioè, la condizione (3.3) è soddisfatta e perciò si ha una superficie intrappolata chiusa.

Si può notare come ci sia una connessione profonda tra l'esistenza di una superficie intrappolata chiusa e la condizione di convergenza delle geodetiche. Le due sono strettamente legate: se c'è abbastanza densità di massa-energia esiste una superficie intrappolata chiusa per la condizione di Schwarzschild, e al tempo stesso le geodetiche saranno incurvate, perciò la condizione (ii) del punto (d) sarà soddisfatta.

Possiamo quindi applicare il Teorema della singolarità di Hawking e Penrose: il nostro Universo ha avuto origine da una singolarità iniziale.

Capitolo 4

La proposta dell'assenza di confini

Hawking e Penrose, con il Teorema della singolarità, dimostrarono in modo matematicamente rigoroso che il nostro Universo ha avuto origine da una singolarità iniziale.

Andando a ritroso nel tempo, si arriva ad un punto in cui tutto ha avuto inizio: è l'istante del Big Bang. In tale punto vengono meno tutte le leggi della fisica che ad oggi conosciamo.

Quello che il Teorema della singolarità ci indica è che la teoria della Relatività Generale non è più una buona descrizione dell'Universo nei punti di singolarità: predice essa stessa la sua incompletezza.

Perciò, bisogna far ricorso a un'altra teoria.

In particolare, nell'istante iniziale, l'Universo era tutto condensato in un punto. Le dimensioni erano talmente piccole che dobbiamo tenere in considerazione anche gli effetti quantistici; non basta perciò una teoria classica per poter descrivere l'Universo in quell'istante. Allo stesso tempo, il campo gravitazionale era estremamente intenso.

Dobbiamo perciò usare, per esaminare le primissime fasi dell'Universo, una teoria quantistica della gravità.

Ad oggi non abbiamo una teoria unificata che combini gravità e meccanica quantistica, sappiamo però di alcuni caratteri che essa dovrebbe avere.

Sulla base di questi caratteri, Hartle e Hawking proposero "l'assenza di confini", uno stato dell'Universo che implica che il tempo e lo spazio non abbiano confini. Cioè, non abbiano un inizio.

Questo permette di evitare il problema della singolarità, aggirandolo, poiché nella proposta dell'assenza di confini non c'è bisogno di alcuna singolarità.

Lo stato di Hartle-Hawking è però solo una proposta, non è nulla di dimostrato.

Si potrebbe pensare che questa proposta vada a contraddire il Teorema della singolarità, che è invece stato dimostrato in modo matematicamente rigoroso. In realtà, quello che Hawking sosteneva, è che il teorema sia servito a mettere in luce i limiti della Relatività Generale, e il fatto che all'inizio del nostro Universo il campo gravitazionale diventi così intenso da non poter più trascurare gli effetti quantistici.

Il passo successivo sarebbe quindi quello di riuscire a trovare una teoria unificata che combini gravità e meccanica quantistica, e che possa spiegare ciò che accade in questi istanti. Ad oggi, la migliore candidata sembra essere la Teoria delle stringhe. Tuttavia, la sua validità non è ancora stata dimostrata. Questo tema ha grande rilevanza anche da un punto di vista filosofico. Il Big Bang, il fatto che l'Universo abbia un inizio, lascia spazio all'ipotesi di un "creatore", un primo motore da cui tutto ebbe origine.

La proposta dell'assenza di confini invece esclude la necessità di un evento sovranaturale per spiegare l'origine dell'Universo.

In questo capitolo analizzerò, senza entrare nei dettagli matematici, la proposta dell'assenza di confini di Hartle e Hawking, discutendone anche ciò che essa implica dal punto di vista filosofico.

4.1 La scappatoia al problema della singolarità iniziale

Secondo la teoria del Big Bang, il tempo e lo spazio hanno avuto origine da una singolarità iniziale. Essi avrebbero perciò un inizio improvviso, la cui spiegazione sfuggirebbe alla scienza.

C'è però una "scappatoia", un modo per evitare questo problema: considerare che il tempo potesse essere limitato nel passato, e che non avesse avuto inizio improvvisamente da una singolarità.

Alla base della meccanica quantistica c'è il Principio di indeterminazione di Heisenberg.

Secondo questo principio, tutte le osservabili, cioè le quantità che possiamo misurare, sono soggette a fluttuazioni di valore. Ciò determina che il microcosmo è indeterministico, ovvero, la causalità viene meno. Non possiamo predire con certezza il risultato di un determinato evento, possiamo solo calcolare le probabilità con cui i possibili risultati si verificano.

Perciò, gli eventi quantistici non sono determinati in modo assoluto da cause precedenti, ovvero la relazione causa-effetto viene meno nella fisica quantistica.

La meccanica quantistica fornisce un modo sottile di aggirare il problema della singolarità all'origine dell'Universo. Se si trovasse il modo di consentire all'Universo di aver origine dal nulla come risultato di una fluttuazione quantistica, allora nessuna legge della fisica risulterebbe violata.

L'idea su cui si basa la cosmologia quantistica è che ci deve essere stato un tempo in cui l'Universo aveva dimensioni talmente piccole che le fluttuazioni descritte dal Principio di indeterminazione di Heisenberg devono avere avuto un profondo effetto sulla struttura e sull'evoluzione del cosmo nascente.

Gli effetti quantistici erano importanti quando la densità della materia aveva un valore di $10^{94} g/cm^3$, la densità di Planck. Questo stato della materia esisteva durante l'Era di Planck, entro 10^{-43} secondi dal Big Bang, tempo chiamato appunto tempo di Planck. L'Universo in questo tempo aveva dimensioni soltanto di $10^{-33} cm$, corrispondente al valore della lunghezza di Planck.

Sulla scala molto più piccola dei valori di Planck, tuttavia, le fluttuazioni interesserebbero anche lo stesso spazio-tempo. La distinzione tra spazio e tempo diventerebbe confusa a causa delle fluttuazioni quantistiche, e i due perderebbero la loro identità separata. Il tempo comincerebbe a “trasformarsi” in spazio, e viceversa.

4.2 Lo stato di Hartle-Hawking

Non abbiamo ancora una teoria unificata della gravità, sappiamo però alcune caratteristiche che essa dovrebbe avere. Partiamo da queste per spiegare la proposta dell'assenza di confini di Hartle e Hawking. I punti su cui si dovrebbe basare una teoria quantistica della gravità sono i seguenti.

Un primo carattere è che si dovrebbe formulare la teoria quantistica nei termini di una somma sulle storie, o integrale sui cammini, secondo la rappresentazione di Feynman.

Una particella non ha, come nella teoria classica, una singola storia, ma un insieme di possibili storie, cioè traiettorie nello spazio-tempo, e a ciascuna di queste è associata una coppia di numeri, uno dei quali rappresenta la dimensione di un'onda, e l'altro la sua fase. La probabilità che la particella passi per un qualche punto particolare si trova sommando le onde associate a ogni possibile storia che passi per quel punto.

L'unico modo formale però per eseguire queste somme è di introdurre un *tempo immaginario*.

Si devono cioè sommare le onde per storie di particelle che non si trovano nel tempo reale ma che hanno luogo nel tempo immaginario. Questo concetto è

un concetto matematico, cioè, ai fini del calcolo, si deve misurare il tempo usando numeri immaginari, piuttosto che numeri reali.

L'effetto di questo sullo spazio-tempo è che la distinzione tra tempo e spazio scompare completamente.

Uno spazio-tempo in cui gli eventi hanno valori immaginari della coordinata del tempo si dice spazio-tempo euclideo. In questo spazio-tempo non c'è alcuna differenza tra la direzione del tempo e le direzioni nello spazio. Invece, nello spazio-tempo reale, in cui gli eventi sono etichettati per mezzo di valori ordinari, reali, della coordinata del tempo, la direzione del tempo si trova in tutti i punti all'interno del cono luce, mentre le direzioni di tipo spazio si trovano all'esterno. In ogni caso, possiamo considerare il tempo immaginario come un espediente matematico utile per calcolare risposte riguardanti probabilità nello spazio-tempo reale.

Un secondo carattere che dovrebbe essere posseduto da ogni teoria unificata, è l'idea di Einstein che il campo gravitazionale sia rappresentato da uno spazio-tempo curvo.

Le particelle tentano di seguire la via più simile a una traiettoria rettilinea in uno spazio curvo, ma poiché lo spazio-tempo non è piano le loro traiettorie appaiono incurvate. Quando applichiamo la somma sulle storie di Feynman alla concezione einsteiniana della gravità, l'analogo della storia di una particella è ora uno spazio-tempo curvo completo che rappresenta la storia dell'intero universo.

Si deve supporre che questi spazi-tempi curvi siano euclidei, per evitare le difficoltà di calcolo nell'eseguire la somma sulle storie.

Per calcolare la probabilità di trovare uno spazio-tempo reale con una determinata proprietà, si sommano le onde associate a tutte le storie che hanno tale proprietà.

Nella teoria quantistica della gravità ci sono molti possibili stati quantici per l'Universo. Se sapessimo come lo spazio-tempo euclideo nella somma sulle storie si comportò nei primissimi istanti dell'Universo, conosceremmo lo stato quantico dell'Universo.

Analizziamo ora la proposta dello stato di Hartle-Hawking.

Immaginiamo di rappresentare l'universo in espansione come un cono.

Ciò è illustrato in Figura 4.1.

Il vertice del cono rappresenta la singolarità del Big Bang, cioè l'apparizione improvvisa dello spazio e del tempo. Le sezioni orizzontali del cono sono cerchi di diametro crescente che rappresentano l'espansione dello spazio.

La tesi fondamentale della cosmologia quantistica è che il Principio di indeterminazione di Heisenberg rende il vertice meno appuntito, più smussato. Nel modello di Hartle-Hawking la punta del cono è sostituita da una semisfera

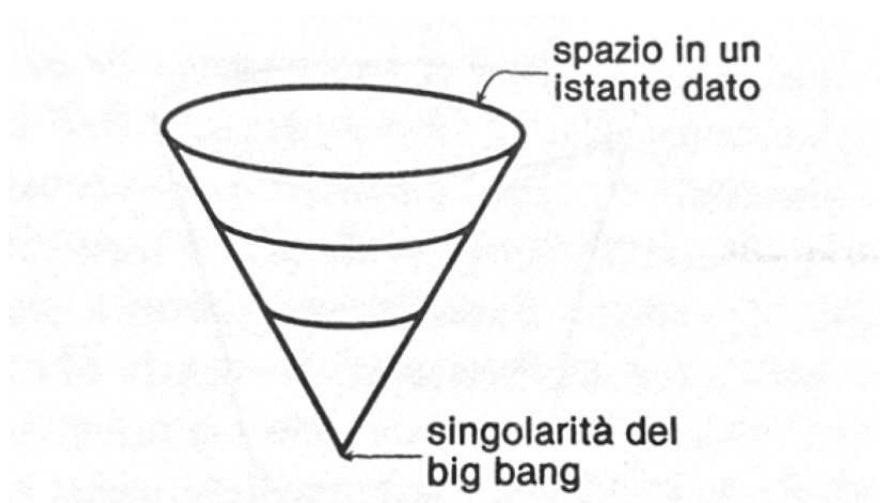


Figura 4.1: Universo in espansione con origine in una singolarità.

con raggio uguale a 10^{-33} cm , la lunghezza di Planck, che, pur essendo molto piccola, è infinitamente più grande rispetto alla singolarità, che invece è puntiforme. Ciò è schematizzato in Figura 4.2. Al di sopra di questa semisfera il cono si allarga nello stesso modo di un universo con singolarità, e rappresenta l'universo in espansione. Qui, sopra il punto di congiunzione con la semisfera, il tempo scorre verticalmente, ed è fisicamente tutto separato dallo spazio, che si estende orizzontalmente. Sotto il punto di congiunzione però la situazione è molto diversa. La dimensione temporale comincia a curvarsi sulla direzione spaziale, cioè quella orizzontale. Si ha una transizione graduale dal tempo allo spazio: il tempo sorge gradualmente dallo spazio man mano che il cono sorge gradualmente dalla semisfera. Vicino alla base della semisfera si ha una superficie bidimensionale curva, approssimativamente orizzontale. Non esiste un inizio improvviso: il tempo svanisce gradualmente verso la base del diagramma. L'evento P assomiglia a un primo istante, in realtà è solo un effetto del modo in cui è disegnato il diagramma. Non esiste un inizio ben definito. La singolarità del Big Bang è stata così abolita.

La situazione ricorda vagamente il nostro modo di rappresentare geometricamente la superficie sferica della Terra: le linee della latitudine convergono al Polo Sud e al Polo Nord, ma la superficie della Terra ai poli è la stessa che in ogni altro luogo. La superficie della Terra non finisce improvvisamente ai Poli. C'è una singolarità nel sistema delle latitudini e longitudini, ma non una singolarità fisica nella geometria.

La conclusione è che, secondo Hartle e Hawking, non c'è nessuna origine dell'Universo. Il tempo è limitato nel passato, ma come tale non ha confine.

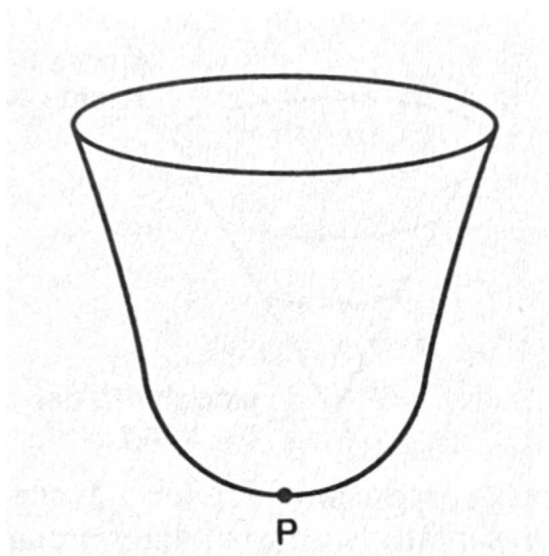


Figura 4.2: Universo secondo il Modello di Hartle-Hawking. La singolarità iniziale svanisce.

Lo spazio-tempo perciò, non nasce. Semplicemente esiste.

Nella teoria quantistica della gravità emerge allora una nuova possibilità: che lo spazio-tempo sia finito e che non abbia quindi nessuna singolarità che ne formi un confine o un bordo.

Si può dire che “La condizione al contorno dell’Universo è che esso non ha contorno (o confini)”. L’Universo sarebbe quindi completamente autonomo e auto-sufficiente.

Tempo e spazio formerebbero congiuntamente una superficie di dimensioni finite ma priva di alcun confine o margine. Sarebbero finiti ma illimitati, analogamente a quanto avviene sulla superficie di una sfera.

In Figura 4.3 è rappresentata l’evoluzione dell’Universo. Lo stato di Hartle-Hawking si colloca come periodo precedente all’era di Planck, nell’ambito del quale si verificano fluttuazioni quantistiche sulla scala dell’intero Universo. In conclusione possiamo dire che l’argomentazione di Hartle-Hawking tende ad eliminare la singolarità ma, in assenza di una teoria quantistica della gravità, non è assolutamente in grado di fare alcuna affermazione su quanto possa essere accaduto in questa fase.

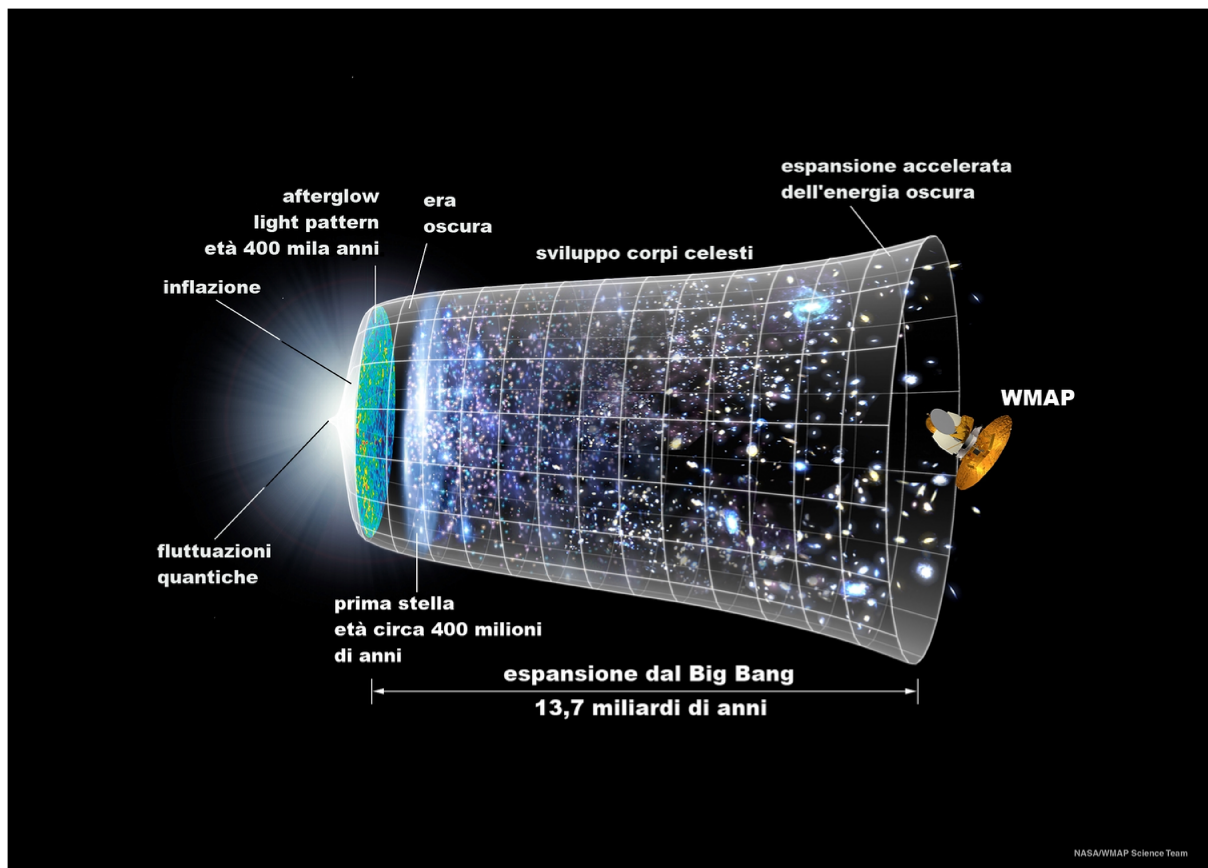


Figura 4.3: L'evoluzione dell'Universo. Lo stato di Hartle-Hawking è collocato all'inizio, dove si trovano le fluttuazioni quantistiche, al centro della zona bianca.

4.3 C'è ancora posto per un Creatore?

Potremmo spiegare l'Universo come lo vediamo oggi basandoci sullo studio di epoche cosmiche precedenti. E potremmo spiegare ciò che è accaduto in queste epoche andando a studiare epoche cosmiche ancora più remote.

Questa catena di cause ed effetti avrebbe mai una fine?

Anche se fossimo in grado di spiegare tutto ciò che si trova nell'Universo fisico, a un certo punto arriveremmo a un vicolo cieco, un punto oltre il quale la scienza non può penetrare. Questo punto è la creazione dell'Universo nel suo complesso, l'inizio della catena di cause che cerchiamo di comprendere. Questo argomento è stato spesso usato come "prova" dell'esistenza di un Creatore.

Con il Teorema della singolarità, Hawking e Penrose dimostrarono che l'Universo ha avuto inizio con una singolarità, un punto in cui le leggi della fisica vengono meno.

La Relatività Generale di Einstein, in questo punto, perde la sua validità, e di conseguenza non può essere usata per predire in che modo ha avuto origine l'Universo. Il teorema difatti non dà informazioni riguardo alla natura di tale inizio.

Quindi, la sua origine va oltre la portata della scienza.

Ma come ha fatto l'Universo ad apparire dal nulla?

Per alcuni è qui che entra in gioco Dio: il Big Bang sarebbe l'attimo della creazione. Se le leggi della fisica vengono meno nelle singolarità, c'è posto per un Creatore. La dimostrazione dell'esistenza di un origine dell'Universo, una singolarità appunto, lascia spazio per un Creatore.

Tuttavia, si può dire che il tempo ha avuto inizio con il Big Bang, nel senso che tempi anteriori non potrebbero essere definiti in alcun modo.

Perciò, secondo S. Hawking, non ha senso chiedersi cosa c'era "prima" del Big Bang, in quanto la nozione stessa di tempo non sarebbe definita.

Non possiamo individuare un tempo precedente il Big Bang per il semplice fatto che prima di esso non esisteva alcun tempo.

Il Big Bang perciò non avrebbe una causa, poiché non c'è un tempo precedente in cui tale causa possa sussistere.

Secondo Hawking, l'assenza di un tempo nel quale un ipotetico Creatore possa aver esercitato, esclude la possibilità stessa che un Creatore ci sia stato.

Prima del Big Bang il tempo non esisteva e di conseguenza non c'è un tempo in cui un ipotetico Creatore possa aver plasmato l'Universo.

Un modo per evitare questo problema, è affermare, come fece Sant'Agostino, che Dio creò l'Universo "con il tempo e non nel tempo". Cioè, si pone Dio completamente al di fuori del tempo.

Egli avrebbe perciò ancora la libertà di scegliere le condizioni al contorno, lo stato iniziale dell'Universo che, una volta creato, seguirebbe leggi ben precise.

Ma cosa accadrebbe se non ci fossero condizioni al contorno?

Ecco allora che la proposta dello stato di Hartle-Hawking ha profonde implicazioni per il ruolo di un Creatore: finché l'Universo ha avuto un inizio, noi possiamo sempre supporre che abbia avuto un Creatore. Ma se l'universo è davvero autosufficiente e tutto racchiuso in sé stesso, senza un confine o un margine, non dovrebbe avere né un principio né una fine: esso, semplicemente, sarebbe. Ci sarebbe ancora posto, in tal caso, per un Creatore?

Egli non avrebbe avuto alcuna libertà nella scelta delle condizioni al contorno, poichè, semplicemente, non ci sarebbero condizioni al contorno.

L'esistenza di un Universo senza una causa prima esterna allora non deve più essere considerata in contrasto con le leggi della fisica. Questa conclusione si basa, come visto, sull'applicazione della fisica quantistica alla cosmologia.

Un ipotetico Creatore avrebbe avuto però ancora la libertà di scegliere le leggi a cui l'Universo avrebbe dovuto obbedire. Non sarebbe stata però una grande scelta, in quanto avrebbe potuto esserci una sola teoria unificata completa capace di permettere l'evolvere di strutture così complesse come gli esseri umani, capaci di investigare le leggi dell'universo e porsi domande sulla natura di Dio.

Riporto per concludere una famosa citazione di S. Hawking:

“Se però perverremo a scoprire una teoria completa, essa dovrebbe essere col tempo comprensibile a tutti nei suoi principi generali, e non solo a pochi scienziati. Noi tutti, filosofi, scienziati, e gente comune, dovremmo allora essere in grado di partecipare alla discussione del problema del perché noi e l'Universo esistiamo. Se riusciremo a trovare la risposta a questa domanda, decreteremo il trionfo definitivo della ragione umana: giacché allora conosceremo la mente di Dio”.

Bibliografia

- [1] Paul Davies. *La Mente di Dio*, chapter 2. Mondadori Editore, second edition, 1993.
- [2] Alberto Franceschini. *Dispense di Cosmologia*, 2018. Università degli Studi di Padova.
- [3] S. Hawking. *Le mie risposte alle grandi domande*, chapter 1, 2. Rizzoli, fourth edition, 2018.
- [4] S. Hawking. *Dal Big Bang ai buchi neri. Breve storia del tempo*. BUR Rizzoli, eighteenth edition, 2021.
- [5] S. Hawking and G.F.R. Ellis. The Cosmic Black-body Radiation and the Existence of Singularities in Our Universe. *The Astrophysical Journal*, 1968.
- [6] S. Hawking and R. Penrose. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. *Royal Society*, 1970.
- [7] S. Hawking and R. Penrose. *La natura dello spazio e del tempo*, chapter 1. BUR Rizzoli, fourth edition, 2021.
- [8] Robert M. Wald. *General Relativity*, chapter 3. The University of Chicago, 1984.