



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA  
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

TESI DI LAUREA TRIENNALE  
IN  
INGEGNERIA MECCANICA E MECCATRONICA  
CURRICULUM MECCANICO

*Relatore: Prof. Marino Quaresimin  
Correlatore: Ing. Paolo Andrea Carraro*

*Laureando: Cristian Bettanin*

*Anno Accademico 2012-2013*



# Indice

1. Introduzione .....	5
2. Ricapitolazione formulazione analitica del problema.....	7
2.1 Equazione di Navier .....	7
2.2 Equazione di Jourawskj.....	8
2.3 Equazione di Bredt: trave a parete sottile soggetta a torsione. ....	9
2.4 Determinazione caratteristiche geometriche della sezione .....	10
2.5 Determinazione del momento geometrico del secondo ordine per sezioni composte .....	11
3. Modellazione trave in Ansys.....	13
3.1 Configurazioni di carico e vincoli.....	13
3.2 Procedimento seguito in Ansys.....	16
3.3 Illustrazione path della sezione da studiare .....	17
4. Presentazione e analisi dei risultati: flessione.....	21
4.1 Path 1 .....	21
4.2 Path 2.....	46
4.3 Path 3.....	63
5. Presentazione e analisi dei risultati: torsione .....	81
5.1 Path 1 .....	81
5.2 Path 2.....	103
6. Illustrazione deformata trave per flessione e torsione .....	113
Bibliografia.....	117

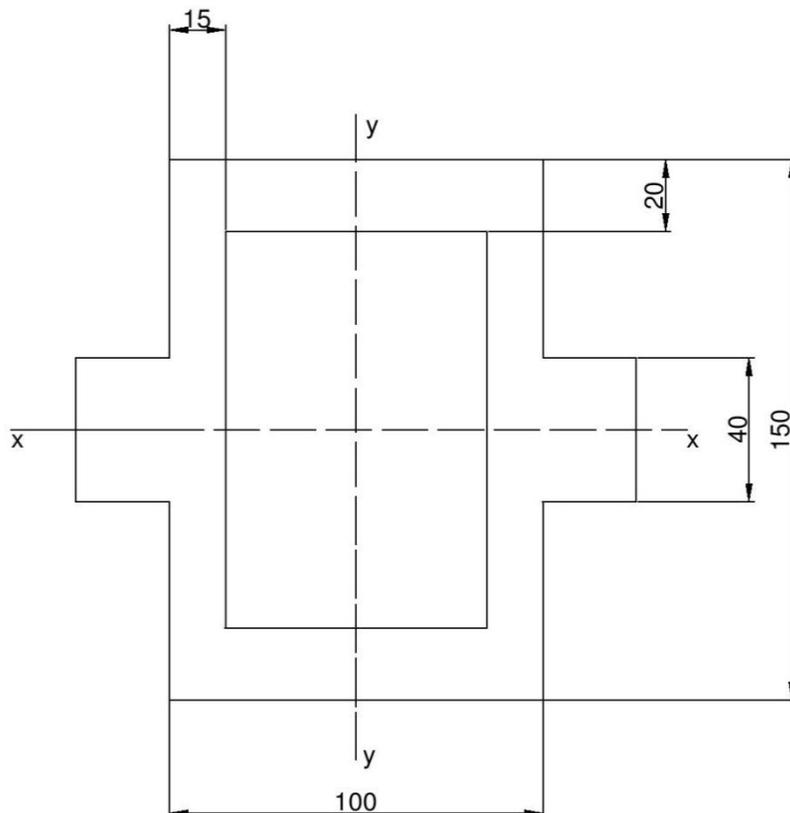
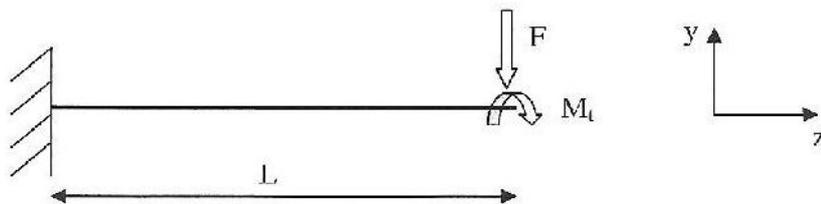


# CAPITOLO 1

## INTRODUZIONE

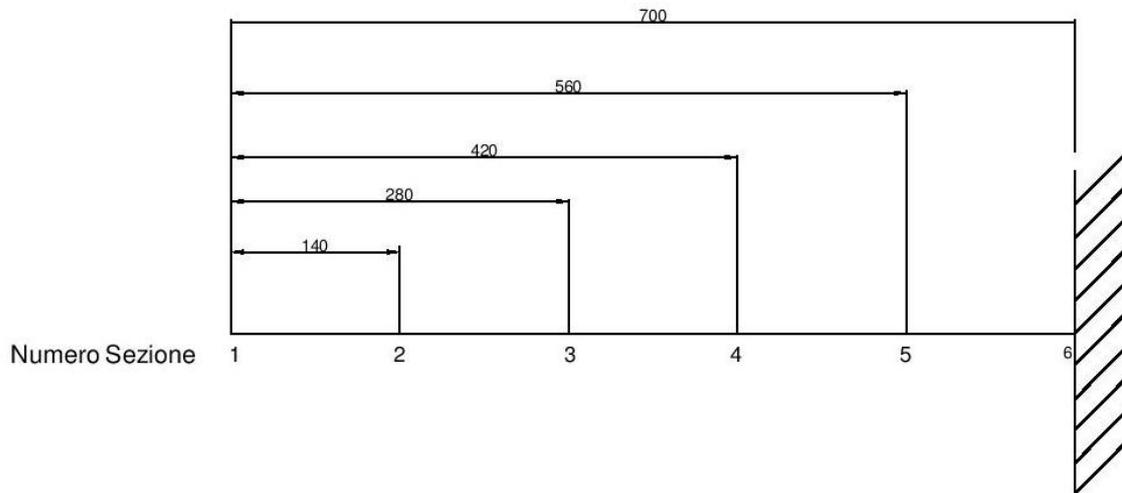
Scopo di questa tesi è lo studio di una trave con sezione a Omega a sbalzo, ovvero vincolata ad un'estremità tramite un incastro, in due differenti configurazioni di carico: flessione mediante l'applicazione di una forza concentrata, e successivamente torsione, mediante l'applicazione di un momento torcente.

I risultati ottenuti dall'analisi tridimensionale agli elementi finiti (FEM) saranno successivamente confrontati per via analitica mediante le equazioni di Navier e Jourawsky, specialmente nelle sezioni ove le ipotesi previste nel problema di Saint-Venant non possono essere considerate valide.



Lunghezza trave: 700 mm

La trattazione prevede lo studio della trave in sei differenti sezioni equispaziate l'una dall'altra, come rappresentato in figura:



Inizialmente verrà applicata una forza  $F$  concentrata alla estremità della trave opposta rispetto al punto in cui è presente l'incastro, di valore:

$$F = 100000 \text{ N}$$

Successivamente sarà tolto il carico  $F$  e sostituito con un momento torcente  $M_t$  di modulo:

$$M_t = 1000000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

La sezione 1 corrisponde alla applicazione dei rispettivi carichi, mentre la sezione 6, come illustrato in figura, corrisponde all'incastro che vincola i 3 gradi di libertà della trave in tal punto. Ciascuna sezione è equi distanziata dalla successiva di 140 mm.

## CAPITOLO 2

### Ricapitolazione formulazione analitica del problema.

#### 2.1. Equazione di Navier.

L'equazione di Navier è espressa dalla seguente formulazione:

$$\sigma = \frac{M}{J_{xx}} * y$$

M= momento flettente puro applicato

J<sub>xx</sub>= momento d'inerzia del secondo ordine rispetto all'asse baricentrico x-x

y= distanza del punto considerato dall'asse baricentrico x-x

L'applicazione di tale formulazione analitica si basa su alcune ipotesi fondamentali:

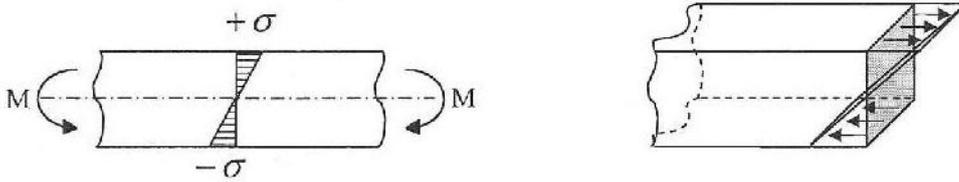
1. la forza che induce il momento flettente deve essere applicata al baricentro;
2. la geometria della sezione della trave deve essere simmetrica rispetto l'asse y;
3. le sezioni piane rimangono piane anche dopo l'applicazione dello sforzo.
4. le sezioni si possono deformare solamente "ruotando" rispetto ad un particolare asse che chiamiamo "asse neutro", e si può ricavare che esso passa per il baricentro della sezione.

Navier afferma che in una trave soggetta a momento flettente puro, si manifestano delle tensioni sigma normali rispetto alla sezione: ad esempio, nel nostro caso considerato il momento applicato ha asse Z e tali tensioni avranno quindi direzione secondo tale asse.

Da tale equazione si ricavano le seguenti considerazioni riguardo le tensioni sigma:

- esse sono nulle sull'asse baricentrico: infatti, y=0 sull'asse per cui la tensione sigma per l'equazione di Navier saranno nulle anch'esse;
- esse sono massime in modulo sulle superfici della trave più distanti dall'asse baricentrico;

- cambiano segno al di sopra o di sotto all'asse baricentrico.



Come si enuncia dalla raffigurazione, secondo l'ipotesi fatta, ossia che il momento flettente tenda le fibre superiori, le tensioni sigma saranno positive sopra l'asse neutro, e viceversa.

## 2.2. Equazione di Jourawskj.

L'equazione di Jourawskj è espressa dalla seguente formulazione:

$$\tau_{zy} = \frac{T * S_{xx}}{J_{xx} * b}$$

T=forza di taglio applicata

$S_{xx}$ = momento d'inerzia statico del primo ordine

b= spessore trave nel punto considerato

$J_{xx}$ = momento d'inerzia del secondo ordine

Le ipotesi fondamentali sotto cui si basa tale formulazione sono:

1. la sezione sia simmetrica rispetto all'asse y
2. la sezione non deve variare di larghezza
3. la sezione sia rettangolare con rapporto  $h/b$  elevato.

Considero una condizione nella quale non abbia solo momento flettente puro applicato alla trave, ma una sollecitazione composta: in tal caso l'esistenza del taglio è sempre associata a una variazione del momento flettente lungo la trave. Prendendo in esame, infatti, un elemento infinitesimo della trave, ed eseguendo un equilibrio delle forze lungo la direzione Z, si nota che se fossero presenti solamente le componenti di tensione sigma dovute alla flessione l'elemento stesso non sarebbe in equilibrio rispetto alla traslazione.

E' necessario quindi, per garantire l'equilibrio, che siano presenti delle tensioni  $\tau_{zy}$  parallele alla faccia dell'elemento stesso.

Per il principio di reciprocità delle tensioni tangenziali, deve poi essere presente una componente di tensione tangenziale sul piano XY perpendicolare rispetto all'asse della trave: tali tensioni saranno calcolate mediante l'equazione di Jourawskj allo stesso modo con cui saranno calcolate le tensioni tangenziali parallele all'asse y.

Si deve però tener presente che per il calcolo della  $\tau_{zy}$  il momento statico del primo ordine  $S_{xx}$  sarà calcolato considerando l'area compresa tra il punto considerato e l'asse baricentrico x-x, mentre per il calcolo delle  $\tau_{zx}$  verrà considerata l'area fra l'asse baricentrico y-y e il punto considerato.

### **2.3. Equazione di Bredt: trave a parete sottile soggetta a torsione.**

L'equazione di Bredt è espressa dalla formulazione:

$$\tau_t = \frac{M_t}{2A t}$$

$M_t$  = momento torcente [N\*mm]

t= spessore trave nel punto considerato

A= area interna della linea media

Mediante Bredt ottengo il valor medio delle tensioni tangenziali dovute all'azione torcente applicata, tenendo conto che la trave considerata è caratterizzata da parete sottile, e quindi da una sezione cava con spessore molto ridotto rispetto alle dimensioni trasversali della trave e variabile. Avendo una sezione a Omega, possiamo quindi ritenere gli spessori  $t_1$ (di valore 15 mm) e  $t_2$ (di valore 20 mm) trascurabili rispetto alle dimensioni trasversali(  $B= 150$  mm). Dall'equazione si deduce come le tensioni tangenziali siano massime, ove lo spessore t sia minimo. Si noteranno successivamente quanto le ipotesi fatte siano coerenti confrontando i risultati teorici con quelli ottenuti nella analisi tridimensionale agli elementi finiti (FEM).

Si può in ogni caso notare dalla teoria, che in assenza di variazioni di spessore, il valor medio delle tensioni tangenziali dovuti a torsione resterà costante, con un andamento quindi "spezzettato" nel valore delle tensioni teoriche in funzione della variazione dello spessore in sezione.

## 2.4. Determinazione caratteristiche geometriche della sezione.

### Coordinate Baricentro

La sezione studiata nella trattazione è composta di figure geometriche elementari (rettangoli), quindi la coordinata del baricentro, rispetto a un generico punto O, può essere determinata con l'utilizzo del teorema di *Varignon*, come:

$$Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n S_{zz}^i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad X_G = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yy}^i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad S_{zz}^i = A_i y_{G-O}^i \quad S_{yy}^i = A_i z_{G-O}^i$$

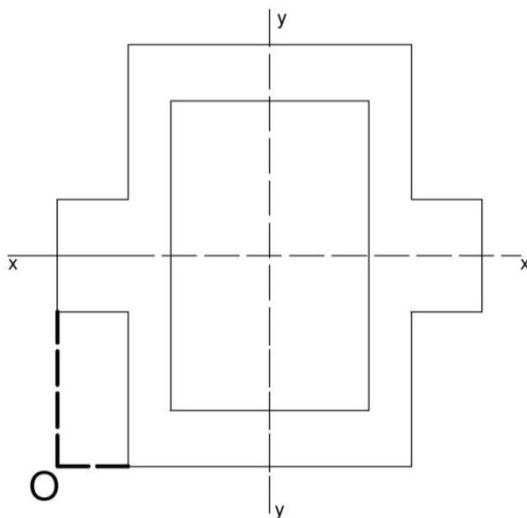
Per la determinazione della posizione del baricentro, è conseguenza del corollario del teorema di Varignon che se una sezione presenta due assi di simmetria geometrica allora il baricentro cade nell'intersezione dei due assi. Trattandosi il nostro caso di una sezione a Omega, il baricentro si troverà nell'intersezione degli assi.

Provando in ogni caso il calcolo manuale secondo le formule illustrate, si ottiene il seguente risultato:

$$X_g = 75 \text{ mm}$$

$$Y_g = 75 \text{ mm}$$

Ciò considerando le coordinate espresse rispetto al generico punto O (0;0) come indicato in figura:



## **2.5. Determinazione del momento geometrico del secondo ordine per sezioni composte.**

Essendo la sezione in esame composta, il momento geometrico del secondo ordine può essere espresso come somma dei momenti geometrici dei rettangoli che costituiscono la sezione stessa.

Per tener conto del momento del momento geometrico del secondo ordine dei rettangoli il cui baricentro geometrico non coincide con quello dell'intera sezione, utilizzo il teorema di Steiner, che afferma:

$$J_{z'z'} = J_{zz} + Ay_{z'z}^2$$

Traducendo il significato del teorema, per la sezione il momento geometrico del secondo ordine rispetto a un generico asse  $Z$  è uguale al momento valutato rispetto all'asse baricentrico  $Z$  della sezione sommato all'area della sezione moltiplicata per la distanza al quadrato tra i due assi.

Possiamo quindi ricavare il valore assunto dal momento geometrico del secondo ordine della nostra sezione specifica:

$$J_{zz} = 27625700 \text{ mm}^4$$

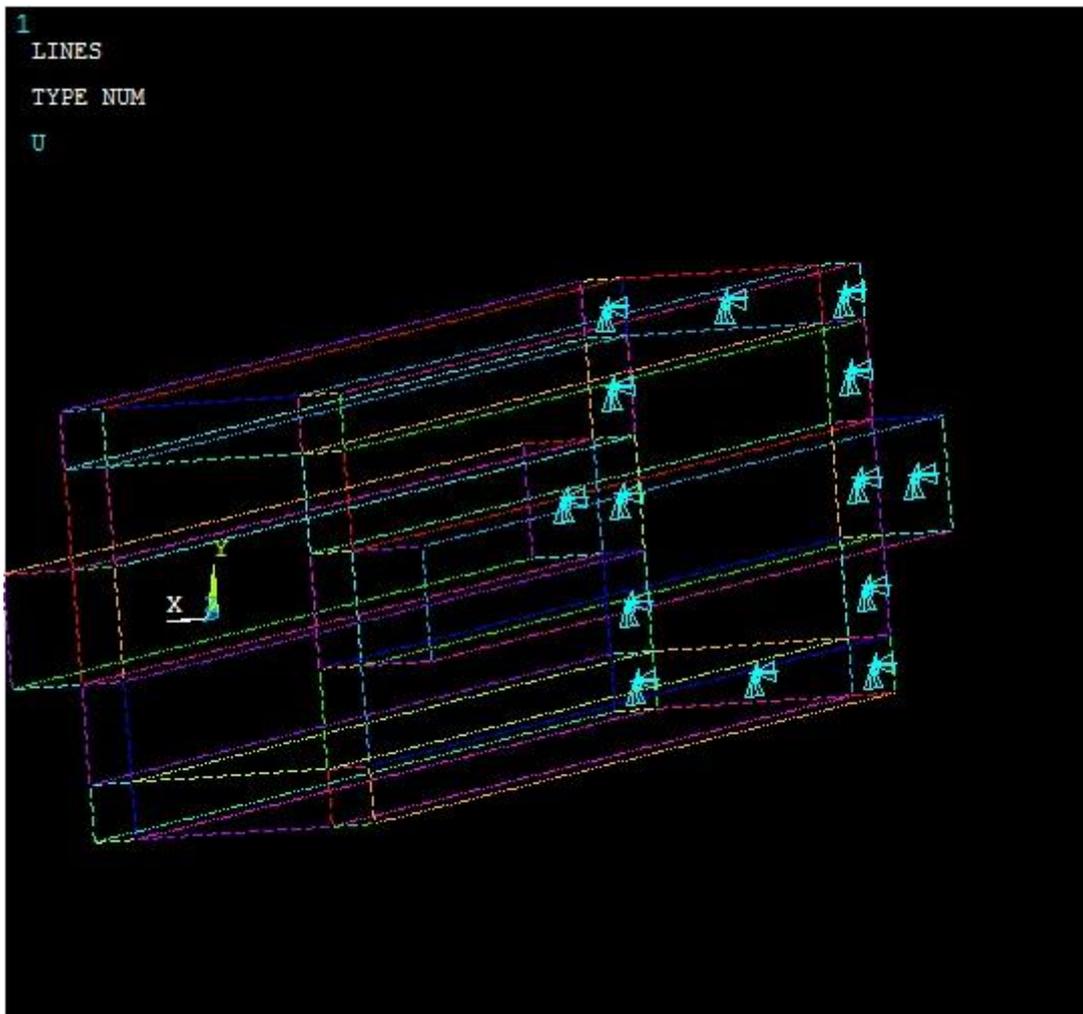


## CAPITOLO 3

### Modellazione trave in Ansys.

#### 3.1. Configurazioni di carico e vincoli

La trave considerata è vincolata a un'estremità da un vincolo esterno: si tratta di un incastro che vincola i tre gradi di libertà della struttura (INCASTRO A TERRA)  
Dato che per eseguire la mesh di tipo mapped, occorre suddividere la sezione considerata in più aree, Ansys applica il vincolo per ogni area, come si vede chiaramente in figura:



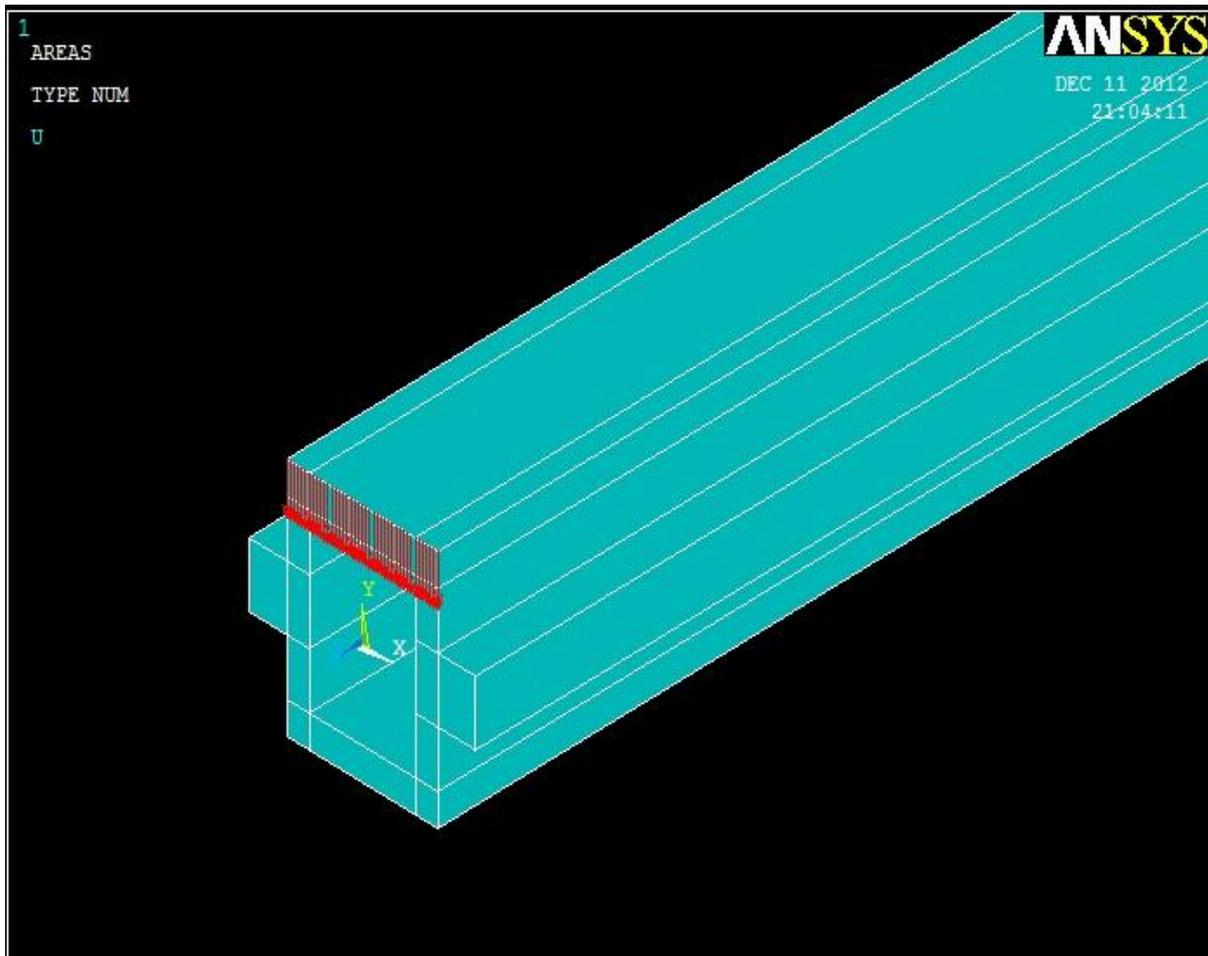
All'estremità opposta della trave è applicata una forza F: con l'obiettivo di rendere la simulazione il più possibilmente vicina alla realtà, la si distribuisce su tutti i nodi dell'estremità superiore della trave, in modo tale da ottenere il carico in tante parti quanti sono i nodi, e ciascuno di questi ha modulo pari al valore della forza F suddivisa per il numero dei nodi stessi, e di direzione quella della forza F.

In tale modo otteniamo un carico non più concentrato su un singolo nodo, ma distribuito sui nodi dell'estremità superiore, ottenendo una simulazione più verosimile e che maggiormente si avvicina alla realtà.

$$F = -100000 \text{ N}$$

$$f_i = F/N = -2439,04 \text{ N}$$

con  $N = \text{numero dei nodi} = 41$



La torsione, invece, è ottenuta applicando due sistemi di forze, dirette lungo X, ciascuno di direzione opposta rispetto all'altro. Ancora una volta per rendere la simulazione la più realistica possibile, ciascun sistema di forze è stato ottenuto suddividendo F sui N nodi, rispettivamente del bordo superiore e inferiore, in modo tale che sia valida la relazione:

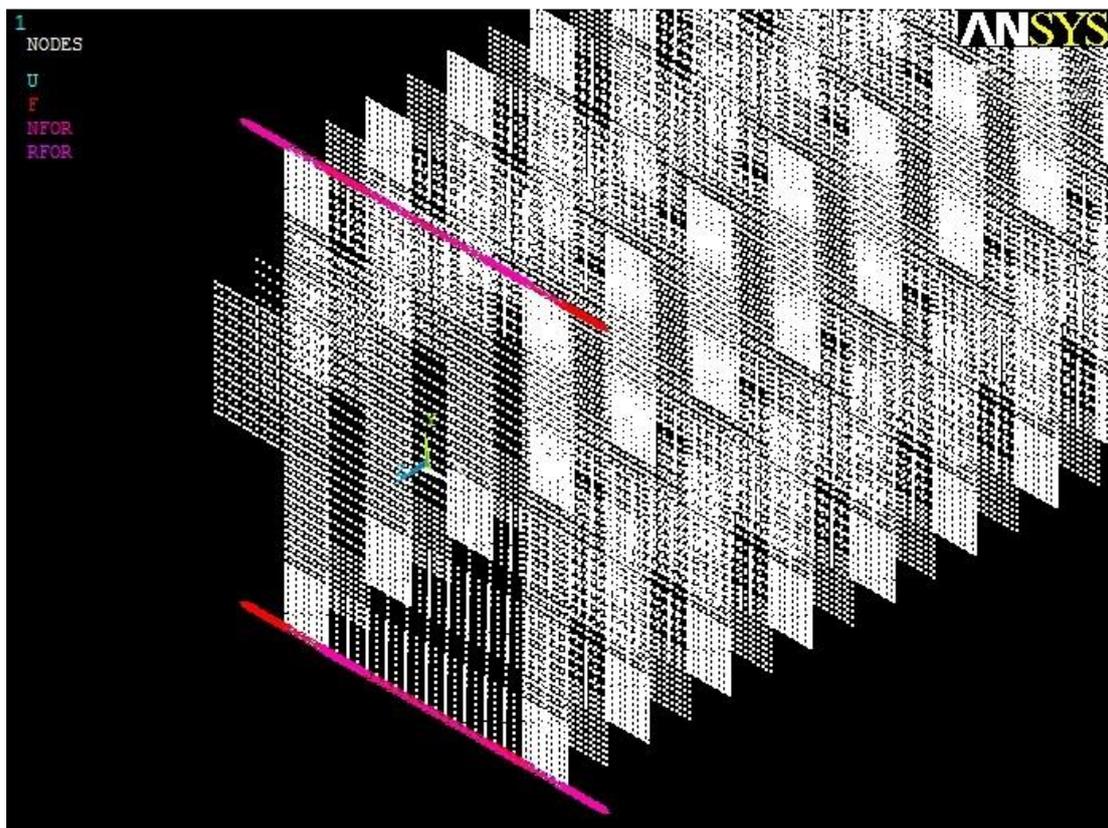
$$M_t = f_i \cdot N \cdot B$$

$$B = 150 \text{ mm}$$

$f_i$  = forza  $i$ -esima, di modulo pari a  $F/N$

$$N = 41$$

$M_t = 1000000 \text{ N} \cdot \text{mm}$ , momento torcente applicato.



*Rappresentazione tridimensionale dei nodi in cui è stata suddivisa la trave.*

### 3.2. Procedimento seguito in Ansys:

- Creazione mediante sottrazione di aree della sezione a Omega da studiare.
- Suddivisione dell'area in rettangoli, in modo da ottenere una migliore ripartizione dell'area totale della sezione.
- Meshing dell'area, di tipo mapped: suddivisione di ciascun rettangolo in elementi quadrati bidimensionali, di lato 5 mm, come indicato in figura sopra. Tale scelta è giustificata da un ottenimento sufficientemente preciso dei risultati ottenuti, e concorde con gli strumenti di calcolo a nostra disposizione. Per analisi più precise occorre dotarsi di mesh più fitte, ma ciò corrisponde a un notevole aumento nella complessità di calcolo, e quindi nei requisiti computazionali. Infine, l'elemento utilizzato nella mesh per gli elementi piani è l'*8 node 82*, che è un elemento brick a 8 nodi, uno per vertice;
- Estrusione dell'area, utilizzando l'elemento *20 node 186* che presenta nodi anche a metà di ogni lato, oltre che sui vertici. La sezione è stata estrusa nei 700 mm di lunghezza della trave, e suddivisa in quattordici blocchi.
- Applicazione del vincolo incastro a terra ad una estremità della trave.
- Applicazione del carico ripartito sui rispettivi nodi.
- Soluzione del modello creato, mediante la voce *Solution/Solve/Current LS*.

A questo punto si procede ad esportare i dati riferiti a un determinato path e alla specifica sezione, prima in formato .txt e successivamente mediante Excel questi verranno convertiti in grafici, grazie ai quali verrà eseguito un confronto tra i valori ottenuti con Ansys e quelli teorici, che discendono dall'applicazione di Navier e Jourawskj (per flessione) e Bredt (per torsione).

### 3.3. Illustrazione path della sezione.

Una volta calcolata la soluzione è possibile esportare le immagini dei contour plot: essi forniscono una indicazione riguardo una definita componente tensionale riferita a quella specifica sezione. Si può in tale modo compiere un'iniziale valutazione sulla distribuzione tensionale, benché piuttosto approssimata, questo perché la sezione viene suddivisa in zone colorate all'interno delle quali le tensioni assumono valori in un intervallo più o meno ampio.

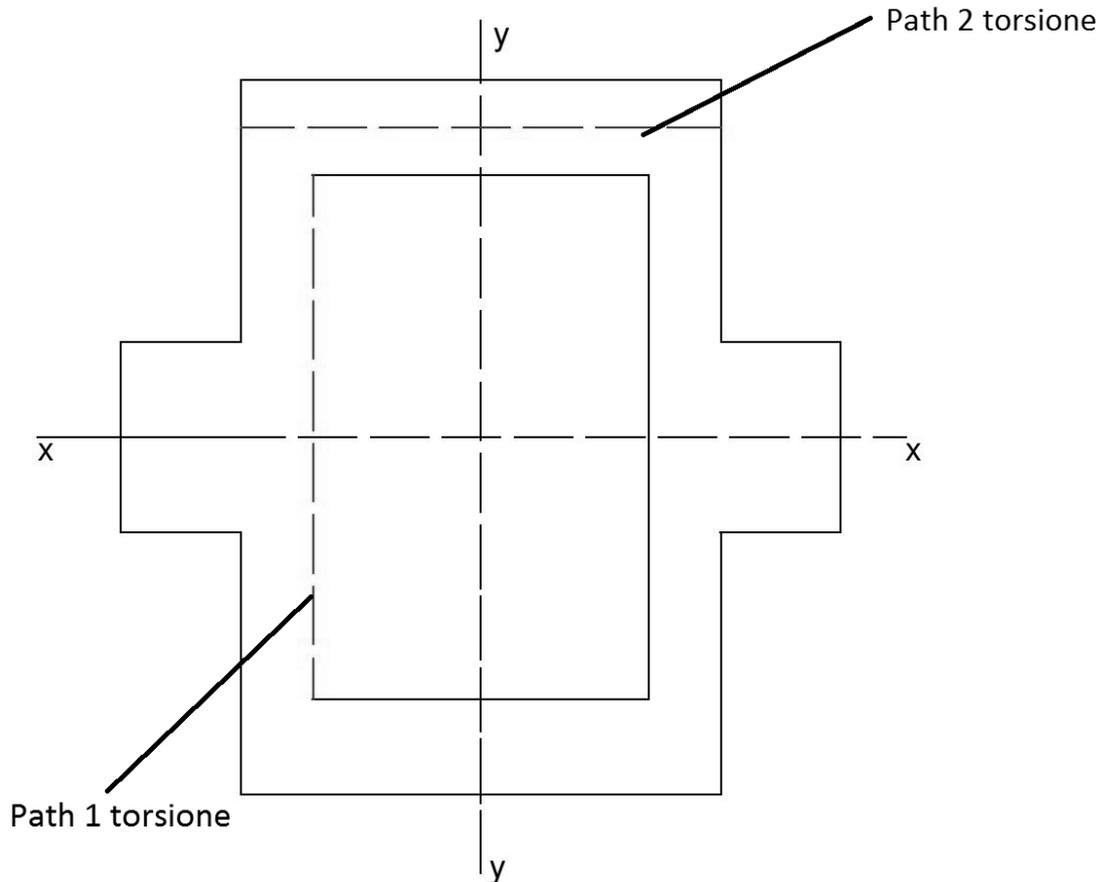


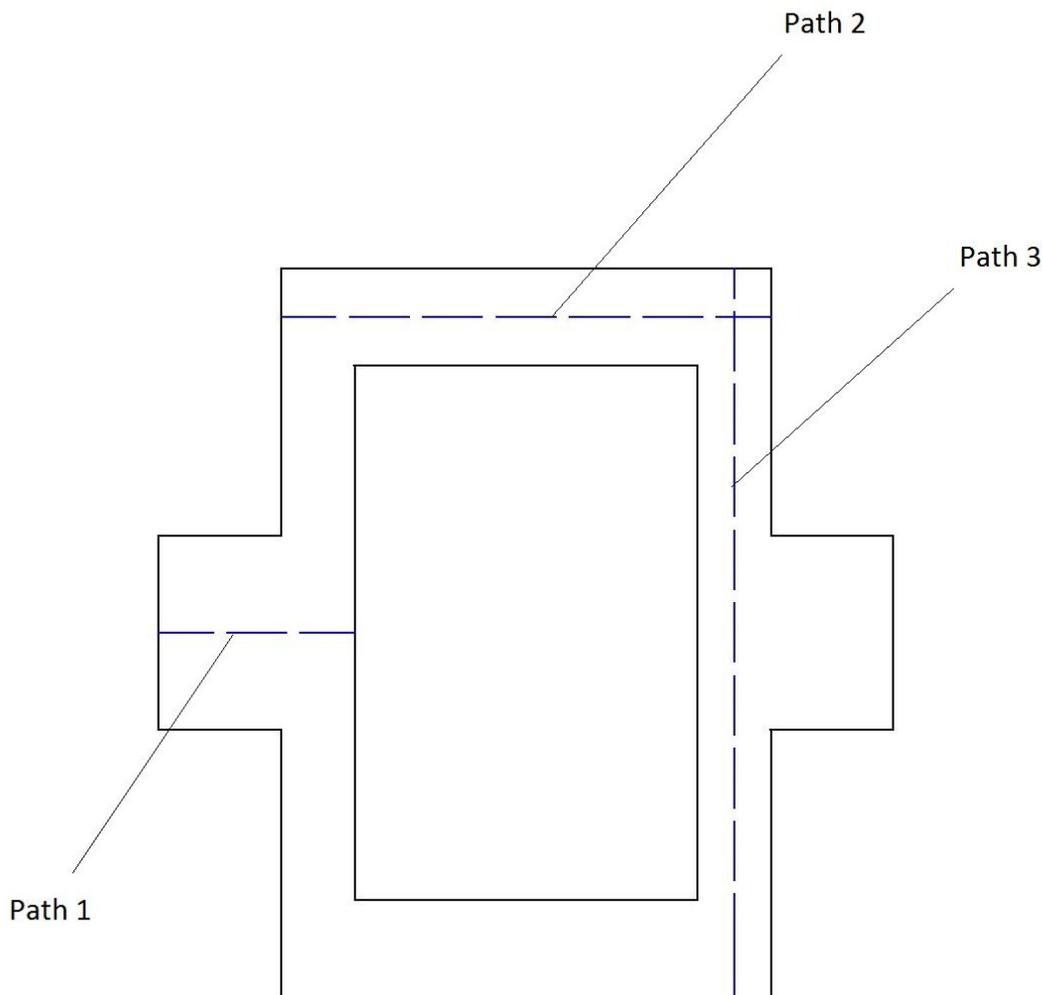
*Esempio di immagine di un contour plot, riferito alla Sezione 3: essa ci da una indicazione di massima su uno preciso stato tensionale riferito alla specifica sezione considerata.*

Per ottenere un'analisi puntuale dei dati, da poter confrontare quindi con i risultati teorici, si deve dapprima procedere alla creazione di un path, definito come un percorso a nostra scelta (nel nostro caso una linea verticale o orizzontale) nel quale viene eseguita l'acquisizione delle sollecitazioni significative dei nodi presenti nel path preso in considerazione.

Una volta esportati i dati relativi a un dato path, si procede alla creazione di un grafico mediante Excel, nel quale in X verrà plottata la posizione del nodo del path considerato, e in Y la relativa componente tensionale.

In tal modo i risultati saranno facilmente confrontabili con i grafici ottenuti per via analitica. Di seguito sono riportati i cinque path che sono stati analizzati: in blu quelli per la flessione e in rosso quello per la torsione.





Come si può notare il path verticale riguardante la torsione, è riferito al lato interno della cavità della sezione a Omega, le cui coordinate variano da  $y_1 = -55$  mm a  $y_2 = 55$  mm.

Nel caso concernente la flessione, i path in esame sono 3: il primo è orizzontale, con coordinate lungo x che variano dal valore  $x_1 = -75$  mm a  $x_2 = -35$  mm, il secondo anch'esso orizzontale, con coordinate di estremi  $x_1 = -50$  mm e  $x_2 = +50$  mm, il terzo verticale, passante per la metà del lato esterno, e con estremi di coordinate  $y_1 = +75$  mm e  $y_2 = -75$  mm. Gli assi di riferimento utilizzati per definirne le coordinate sono quelli baricentrici X e Y.

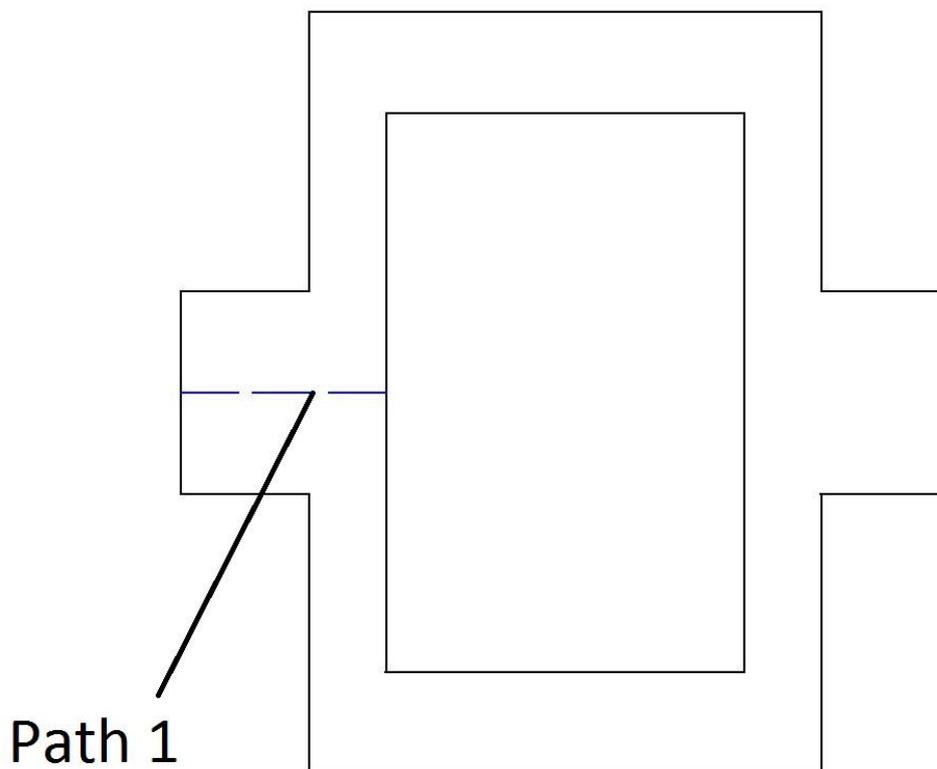


## CAPITOLO 4

### *Presentazione e analisi dei risultati: flessione.*

#### **4.1. Path 1.**

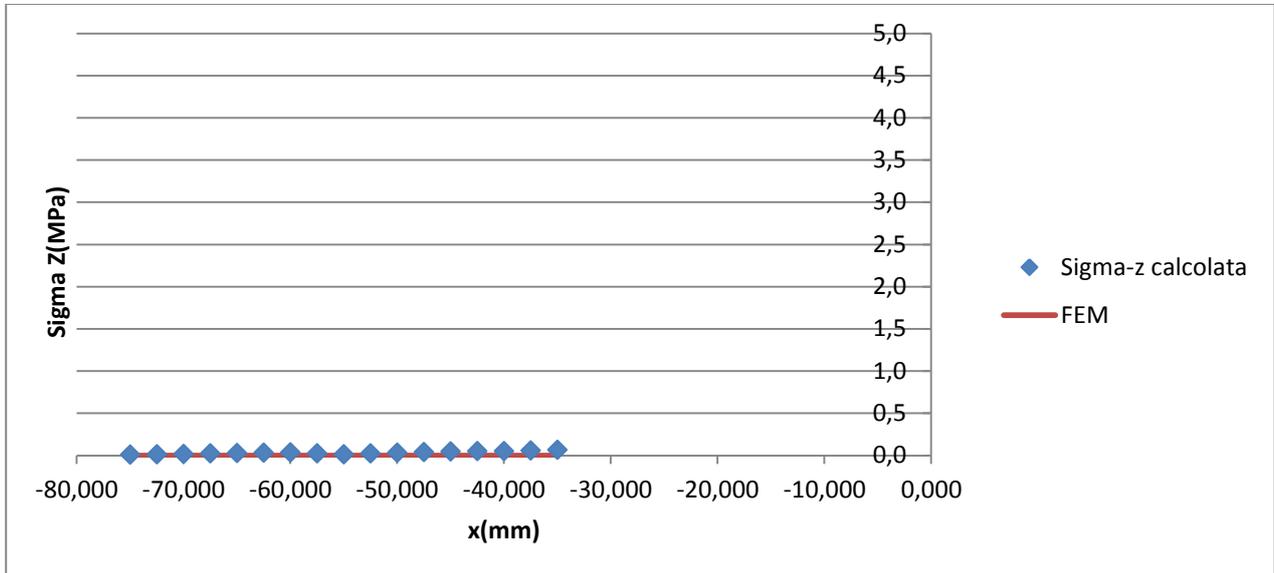
Procedo al confronto dei risultati ottenuti lungo i path 1 per le sei sezioni della trave. Per ciascuna sezione riporto i grafici, plottanti lungo Y il valore delle tensioni (normali o tangenziali) espressi in MPa, mentre lungo X la coordinata esprimente la distanza di ciascun punto del path rispetto all'asse baricentrico verticale della sezione.



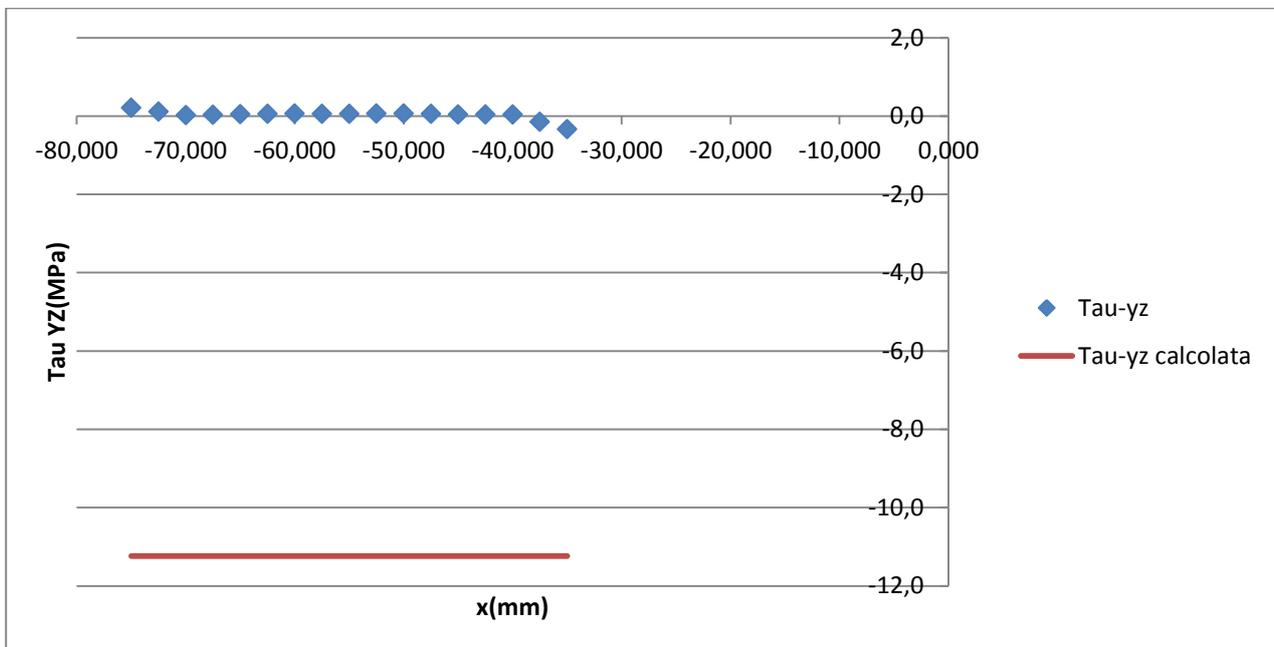
# Grafici di confronto tra risultati FEM e formulazione analitica.

## SEZIONE 1.

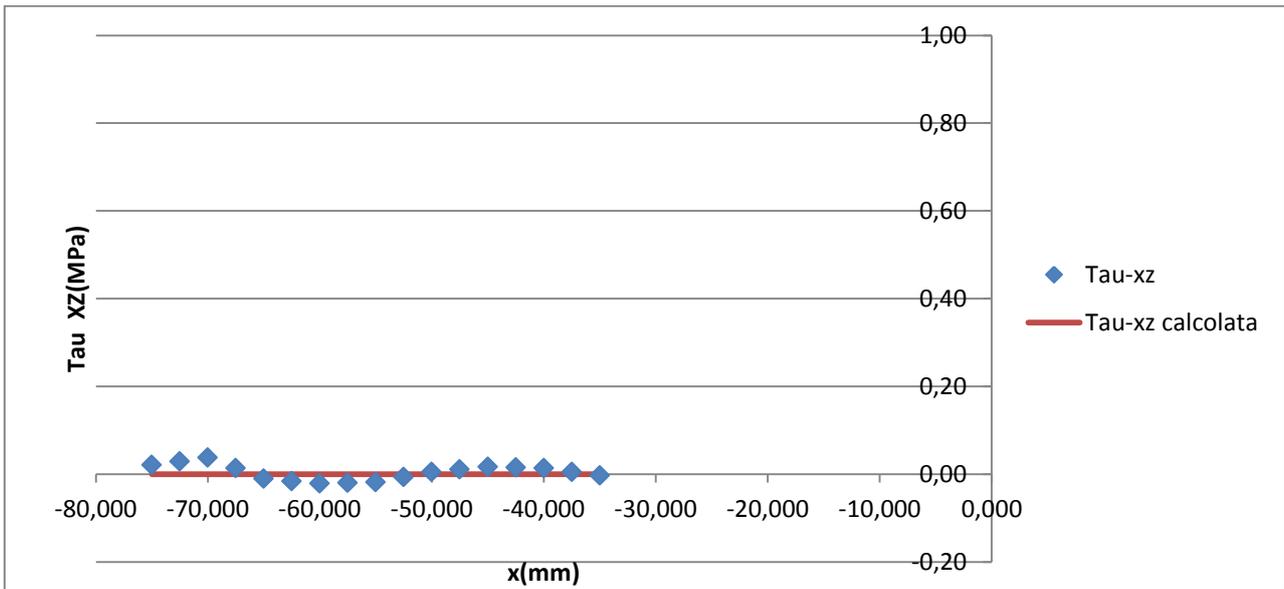
Sigma Z:



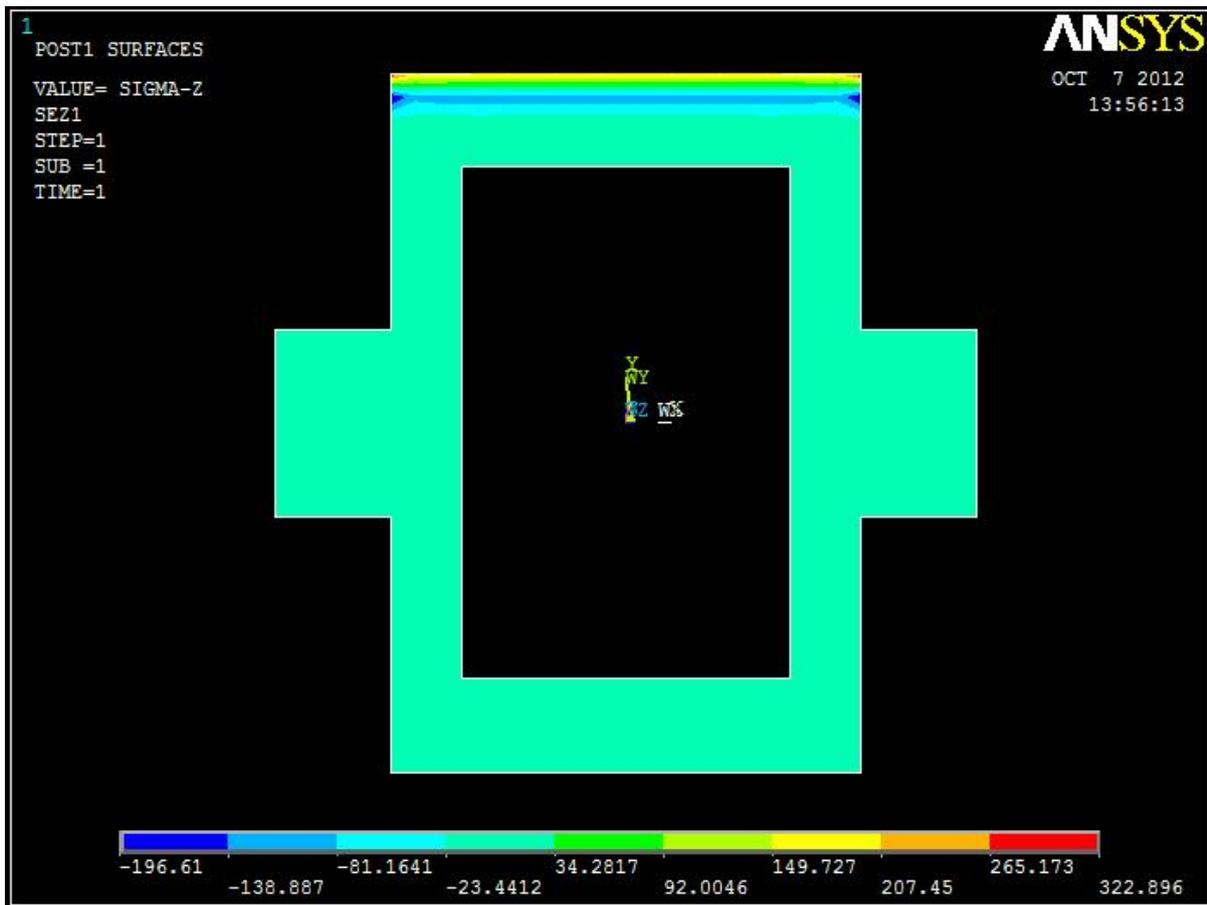
Tau YZ:



### Tau XZ:



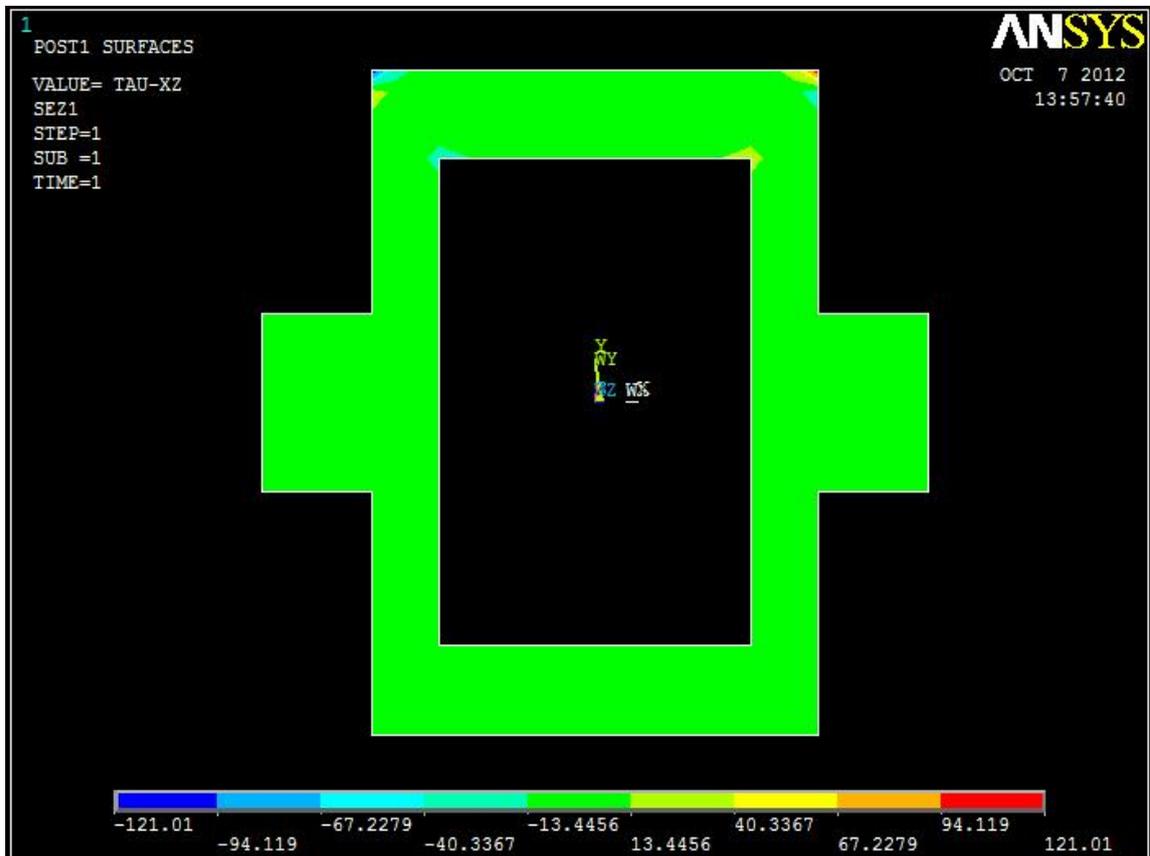
### Contour Plot Sigma Z



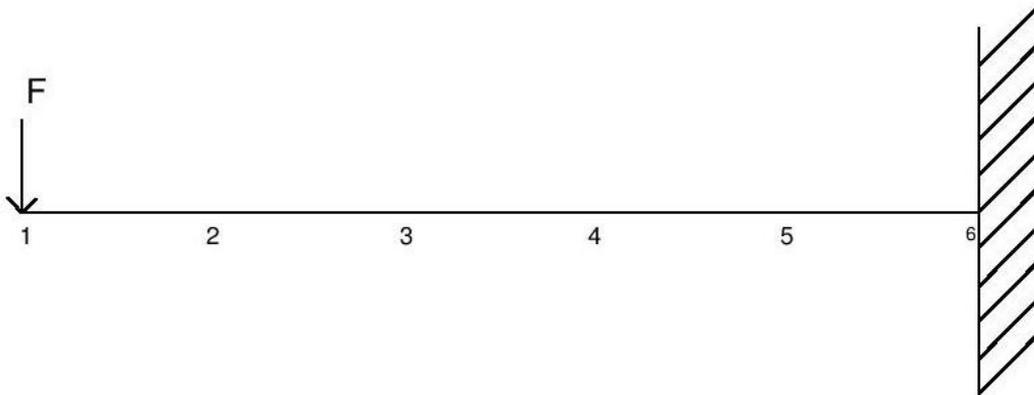
### Contour Plot Tau YZ:



### Contour Plot Tau XZ:



La sezione 1 è la faccia situata in corrispondenza della applicazione della forza F, come indicato in figura:



Le ipotesi sulle quali si basa sia Navier sia Jourawskj, prevedono di trovarsi ad una opportuna distanza dal punto di applicazione della forza F, questo perché in corrispondenza, o in vicinanza del punto di applicazione del carico si crea un andamento anomalo delle tensioni, dovuto agli effetti di bordo, che non viene tenuto conto dalle suddette equazioni. Ci si aspetta quindi di trovare un discostamento delle tensioni ottenute al FEM rispetto a quelle teoriche derivanti dalle formulazioni analitiche.

### Sigma Z

Dato che ci troviamo in corrispondenza della sezione 1, e il braccio b della forza F è nullo, il momento risultante sarà anch'esso nullo, e di conseguenza dalla equazione di Navier si ricava subito che :

$$\sigma_z = 0 \text{ MPa.}$$

Nonostante ci si possa aspettare una certa discordanza nei risultati fra dati teorici e FEM, per la considerazione precedente, si nota invece come i risultati al FEM siano su tutti i punti del path molto di sotto i 0,5 MPa. Ciò significa che per questa sezione i risultati teorici sono ben rispecchiati dall' analisi al FEM, e quindi possiamo dedurre che non risentiamo ancora dei possibili effetti bordo dovuti alla vicinanza del carico.

### Tau YZ

Per Jourawskj vale:

$$\tau_{zy} = \frac{T * S_{xx}}{J_{xx} * b}$$

Non avendo variazioni di spessore della sezione nel path 1, l'andamento delle tensioni tangenziali sarà lineare costante. Sostituendo i valori si ottiene:

$$\tau_{zy} = -11,233 \text{ MPa}$$

con  $b = 80$  mm, spessore della sezione lungo l'asse baricentrico X.

I valori della tensione tangenziale al FEM sono, per tutti i nodi del path 1, vicini a 0 MPa. Si nota quindi nel confronto tra i risultati ottenuti un netto discostamento tra FEM e Jourawskj, giustificabile dal fatto che ci troviamo in corrispondenza della sezione in cui è applicato il carico, e quindi le ipotesi fatte per Jourawskj non sono valide.

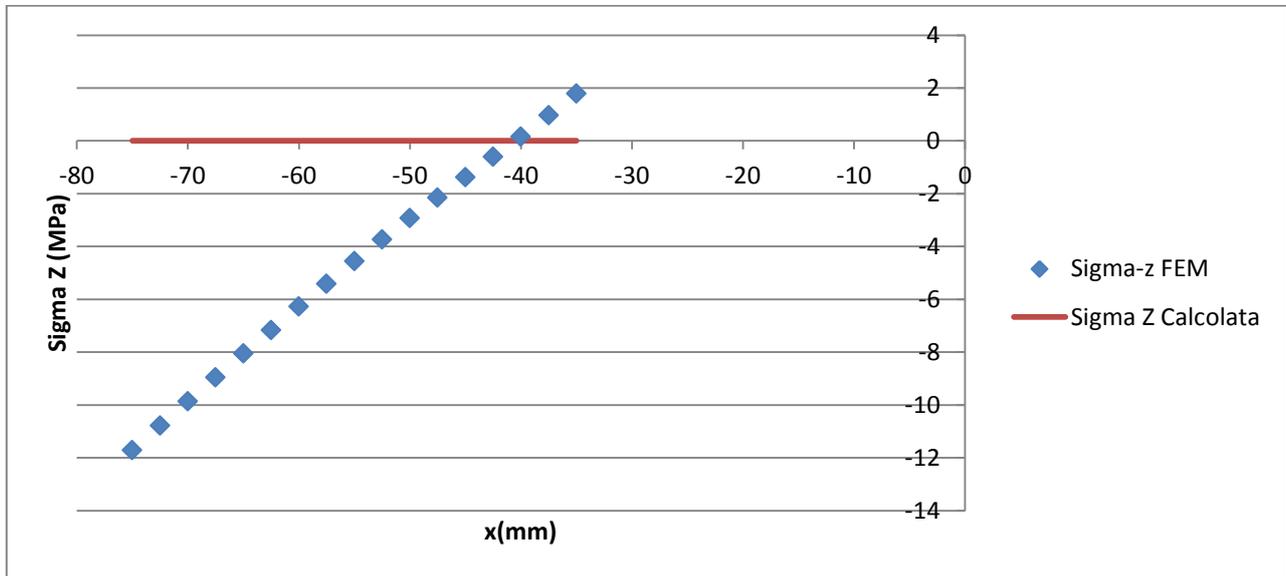
### Tau XZ

Per il calcolo analitico delle tensioni tangenziali sul piano XZ si può utilizzare sempre Jourawskj, ma si può arrivare immediatamente a una conclusione tenendo conto che non essendoci componenti di carico lungo la direzione X, l'andamento teorico lungo il path 1 delle tensioni tangenziali è quindi nullo.

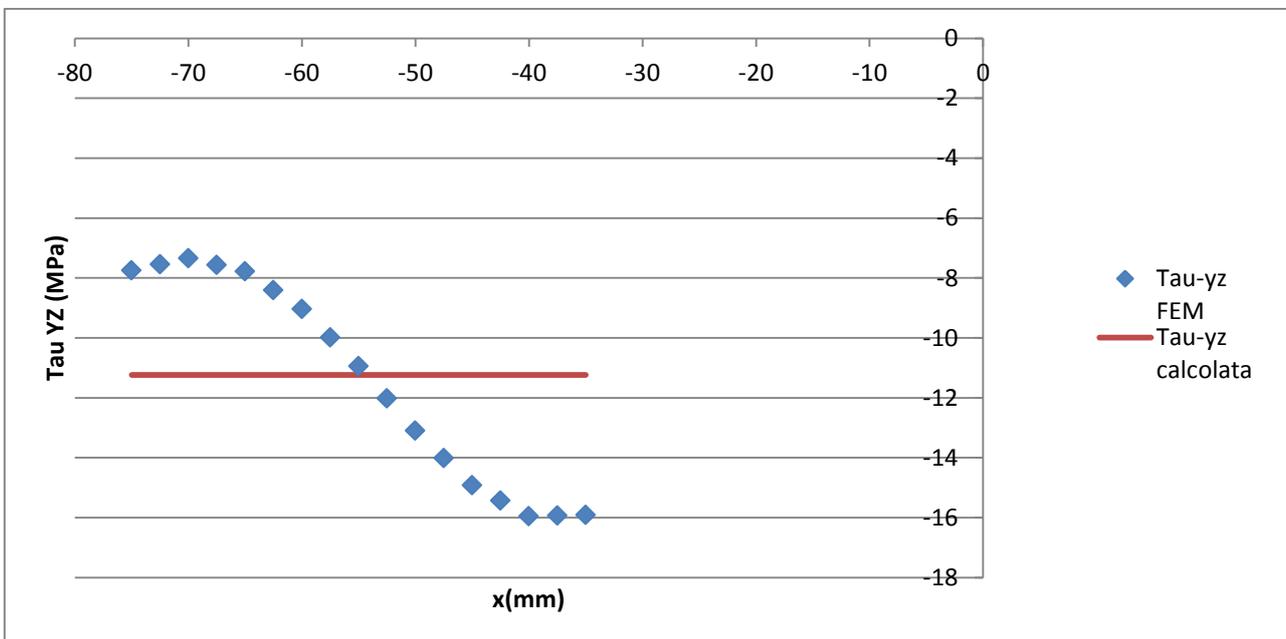
Dall'analisi dei risultati al FEM si ottiene la conferma di quanto detto: le tensioni tangenziali sono prossime a 0 MPa, con ottima approssimazione, su tutti i nodi del path.

## SEZIONE 2

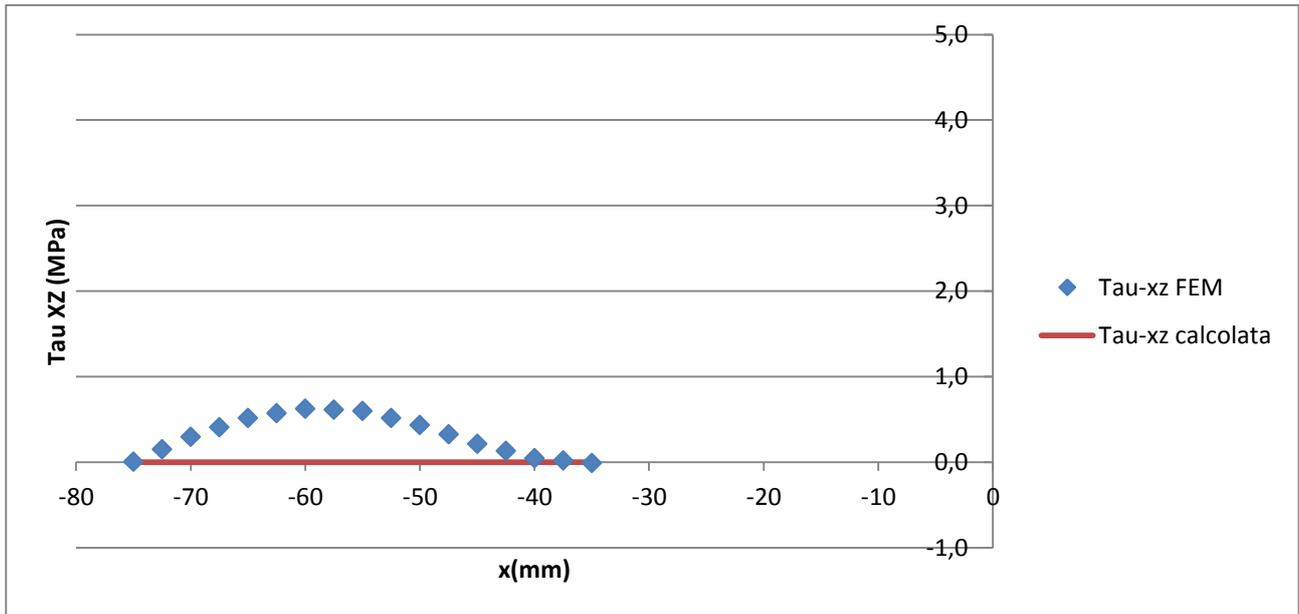
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



### Contour Plot Tau YZ:



### Contour Plot Tau XZ:



### Sigma Z:

Il valore teorico assunto dalle Sigma Z, applicando Navier, è nullo su ogni punto del path 1 : stiamo infatti considerando un insieme di punti che si trovano sull'asse baricentrico X della sezione, e di conseguenza la relativa distanza da tale asse è nulla, su tutto il path. Da ciò discende il valore nullo assunto dalle tensioni normali, e ciò vale non solo per la sezione considerata, ma anche per tutte le sezioni successive.

L'analisi al FEM suggerisce invece un andamento apparentemente lineare che varia da -12 MPa a 2 Mpa circa: notiamo quindi una notevole discordanza nelle due serie di dati, discordanza che non si notava invece per la sezione 1.

Si nota quindi in questa sezione l'influenza esercitata dalla vicinanza al punto di applicazione del carico, la quale rende inattendibile la concordanza tra risultati al FEM e quelli teorici. Navier quindi in questo caso cade in difetto, e non sarebbe quindi in tal punto della trave applicabile, se si vorrebbe ottenere una giustificabile correttezza nei risultati. A conseguenza di ciò, possiamo concludere quindi che le linee di tensione non siano parallele all'asse Z e distribuite uniformemente, per il motivo elencato precedentemente.

### Tau YZ:

L'andamento delle tensioni tangenziali teoriche, sul path 1, secondo Jourawskj prevede, come definito in precedenza, un valore pari a:

$$\tau_{zy} = -11,233 \text{ Mpa}$$

L'analisi al FEM invece fornisce un andamento che varia tra gli estremi -7 Mpa e -16 Mpa. Tale andamento, come si vedrà per i grafici riguardanti le sezioni successive, si ripeterà allo stesso modo, a indicazione del fatto che le tau previste dal FEM non coincidono in alcuna delle 6 sezioni con quelle teoriche: si può notare come il valore assunto secondo Jourawskj appaia intermedio agli estremi previsti dall'analisi tridimensionale agli elementi finiti. Si può interpretare tale discordanza nei risultati come dovuta all'effetto causato dalla presenza delle due ali opposte, nella sezione ad Omega, che evidentemente determinano un differente andamento delle tensioni tangenziali, che non si avrebbe se non avessimo la presenza delle suddette ali.

### Tau XZ:

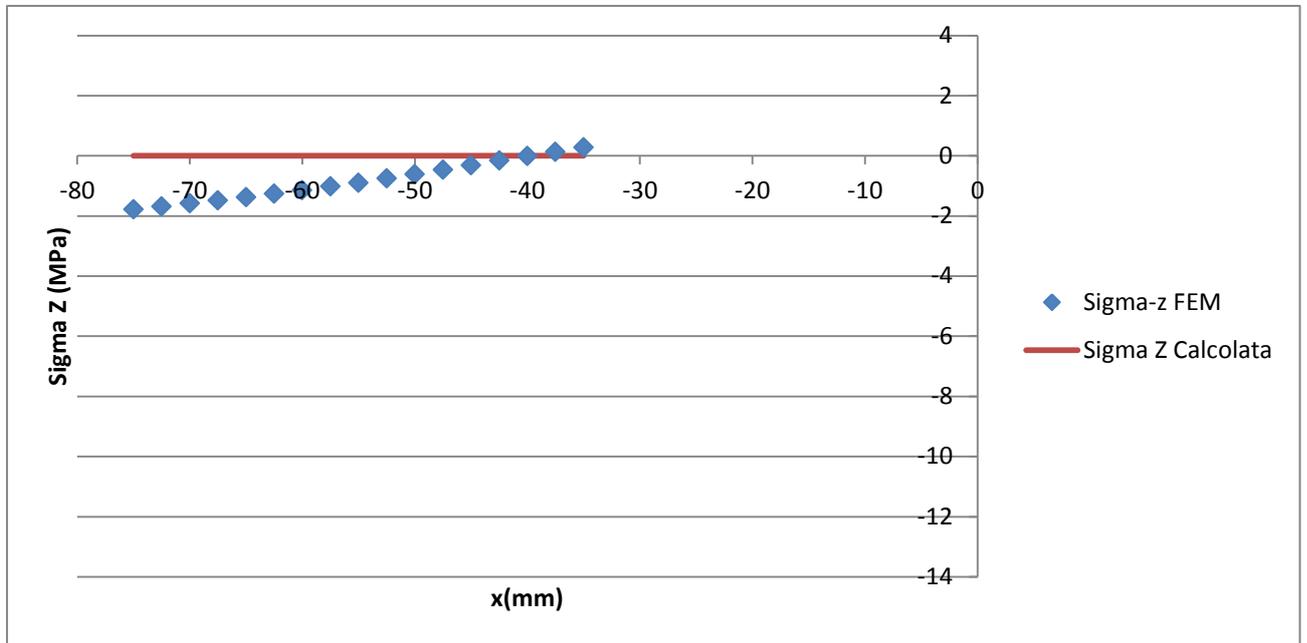
I valori predetti dall'analisi al FEM sono, su tutti i punti del path, inferiori a 1 Mpa, mentre quelli teorici previsti da Jourawskj sono nulli su tutto il path 1, per il motivo definito in precedenza. Tale accuratezza nei risultati è ottimamente prevista anche nelle sezioni successive, compresa quella corrispondente all'incastro a terra.

Di conseguenza, almeno nella direzione X delle tensioni tangenziali, non risentiamo degli effetti di bordo dovuti alla vicinanza della sezione considerata rispetto al punto di applicazione del carico o all'incastro.

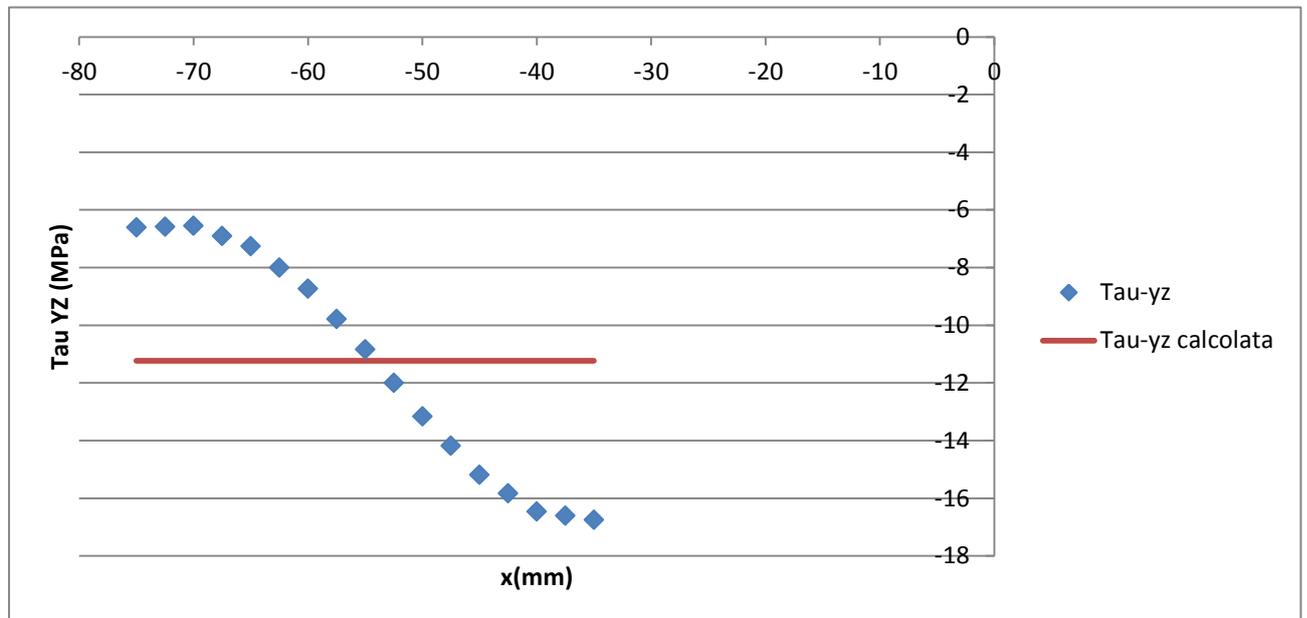
Procedo ora nel plottare i vari grafici e le immagini del Contour Plot relativi al Path 1, per le restanti 4 sezioni della trave, ed eseguire un confronto finale.

### SEZIONE 3

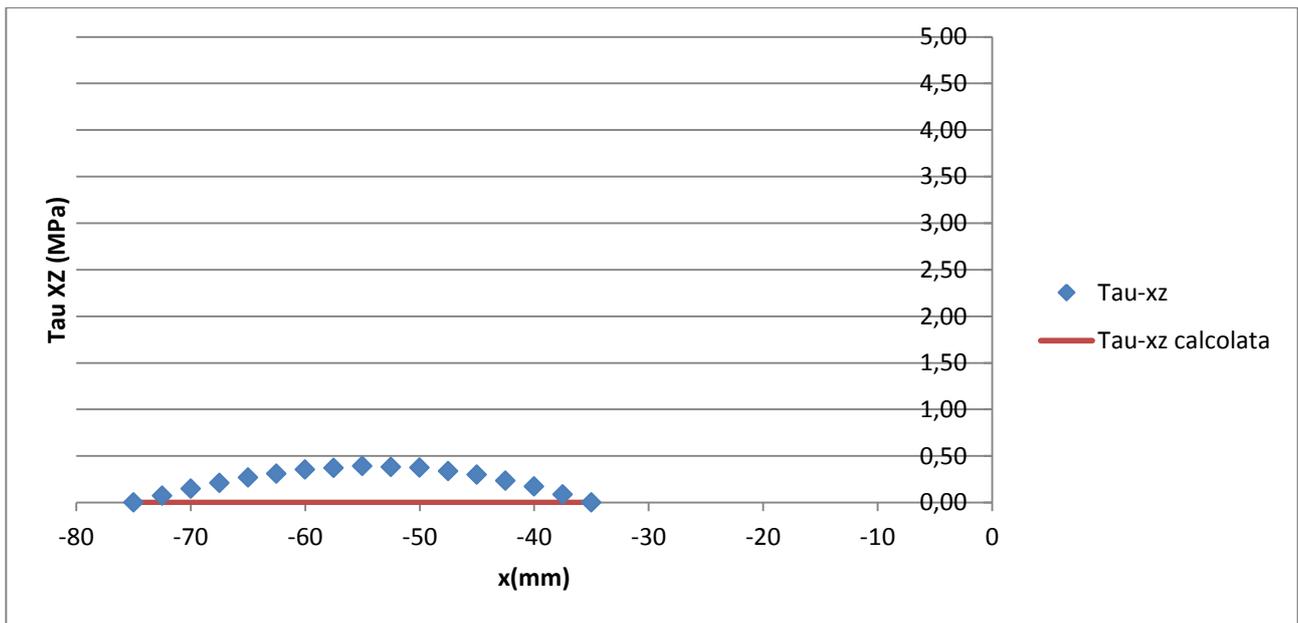
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



### Contour Tau YZ:

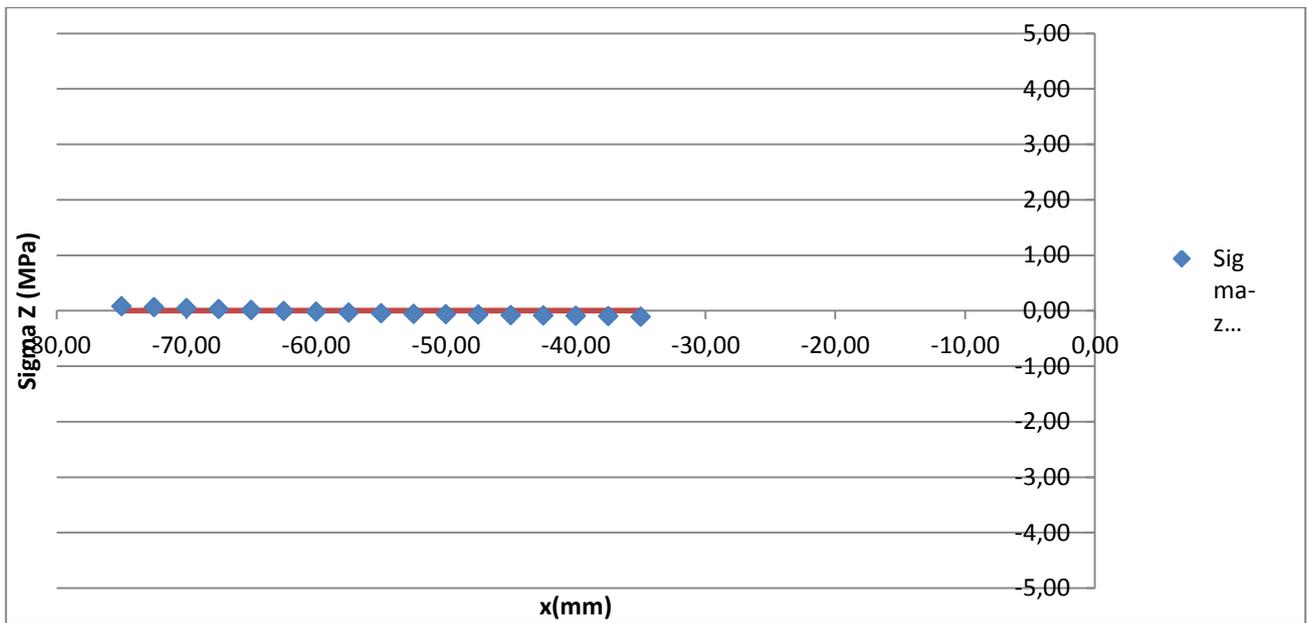


### Contour Plot Tau XZ:

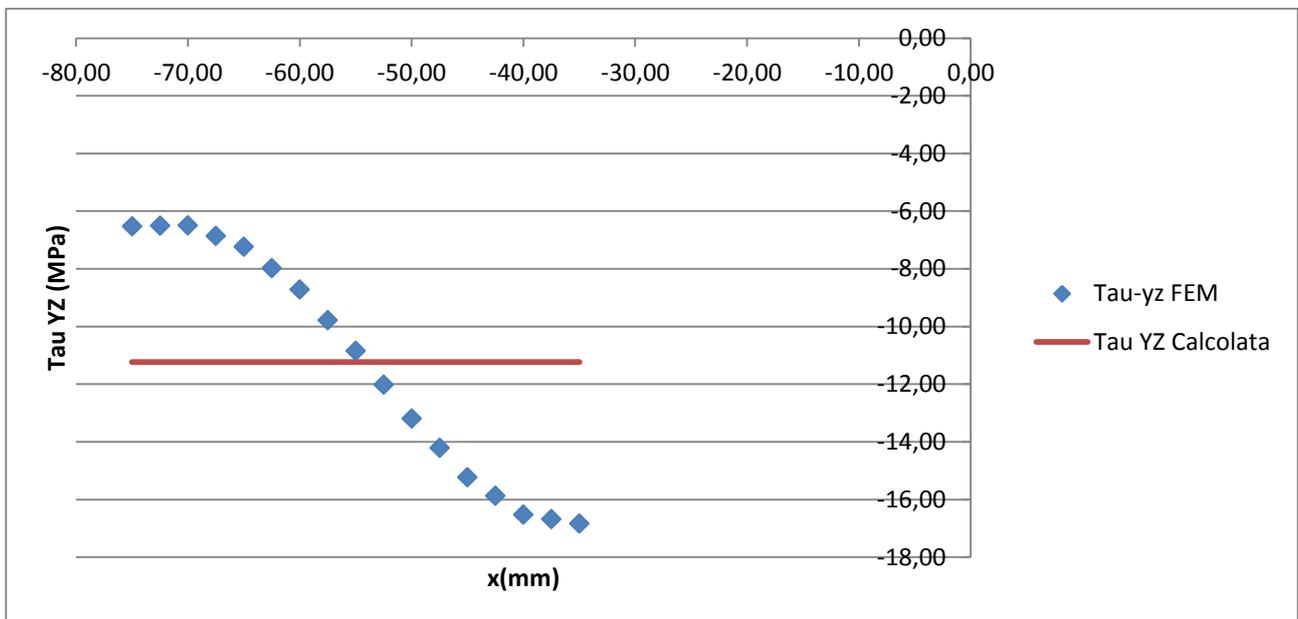


## SEZIONE 4

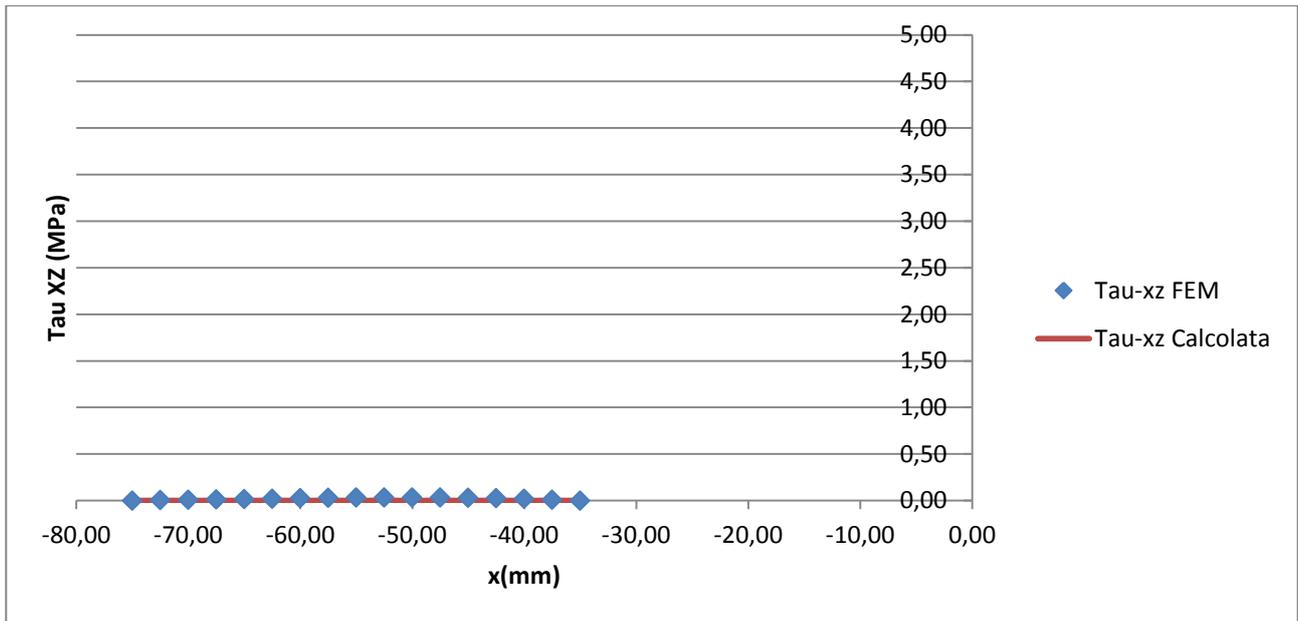
Sigma Z:



Tau YZ:



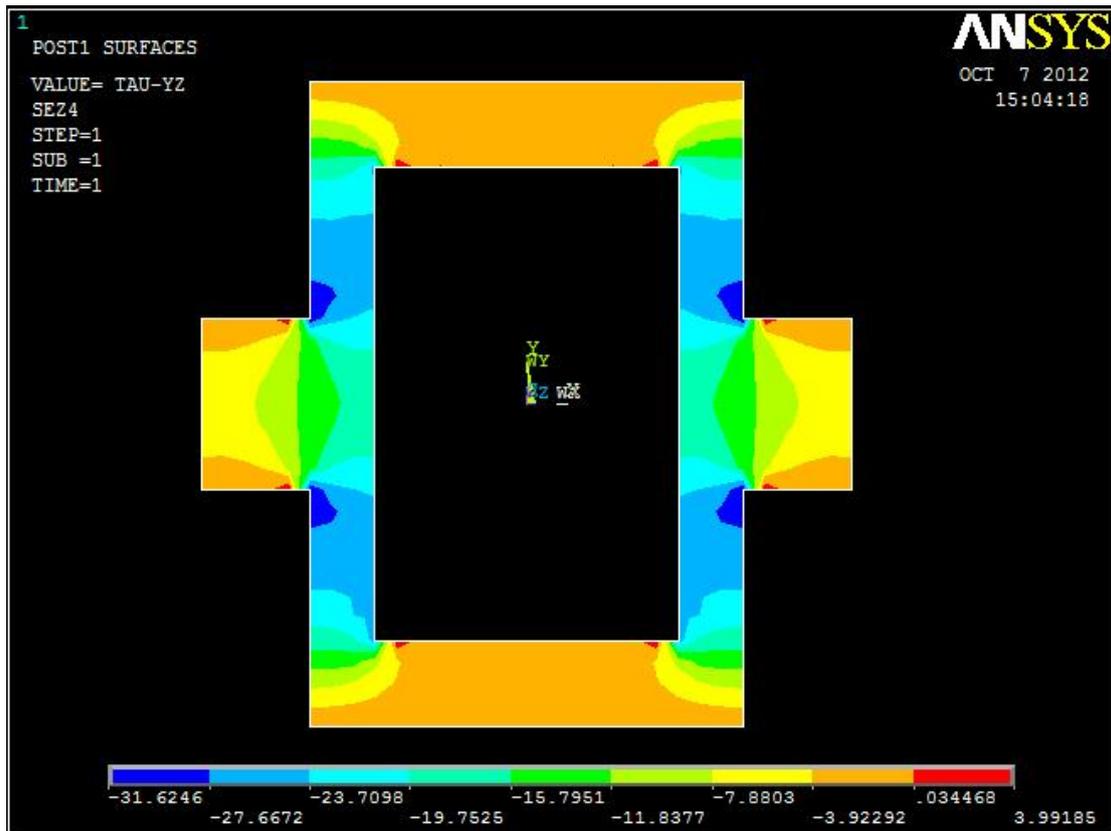
### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

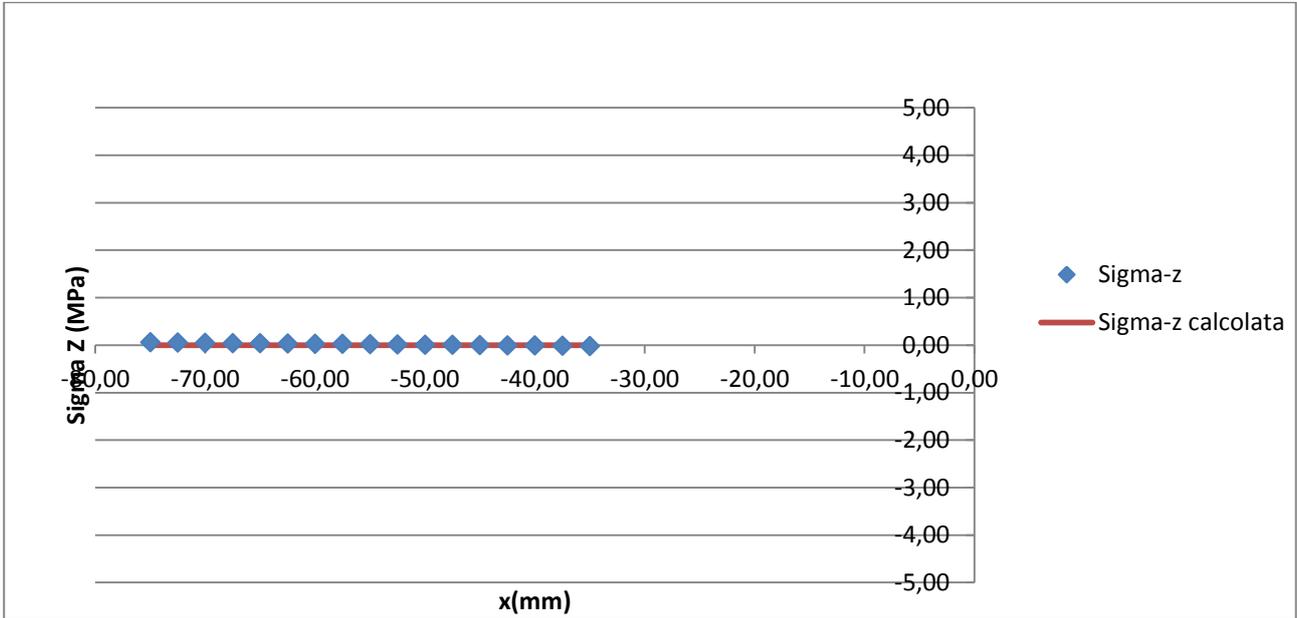


Contour Plot Tau XZ:

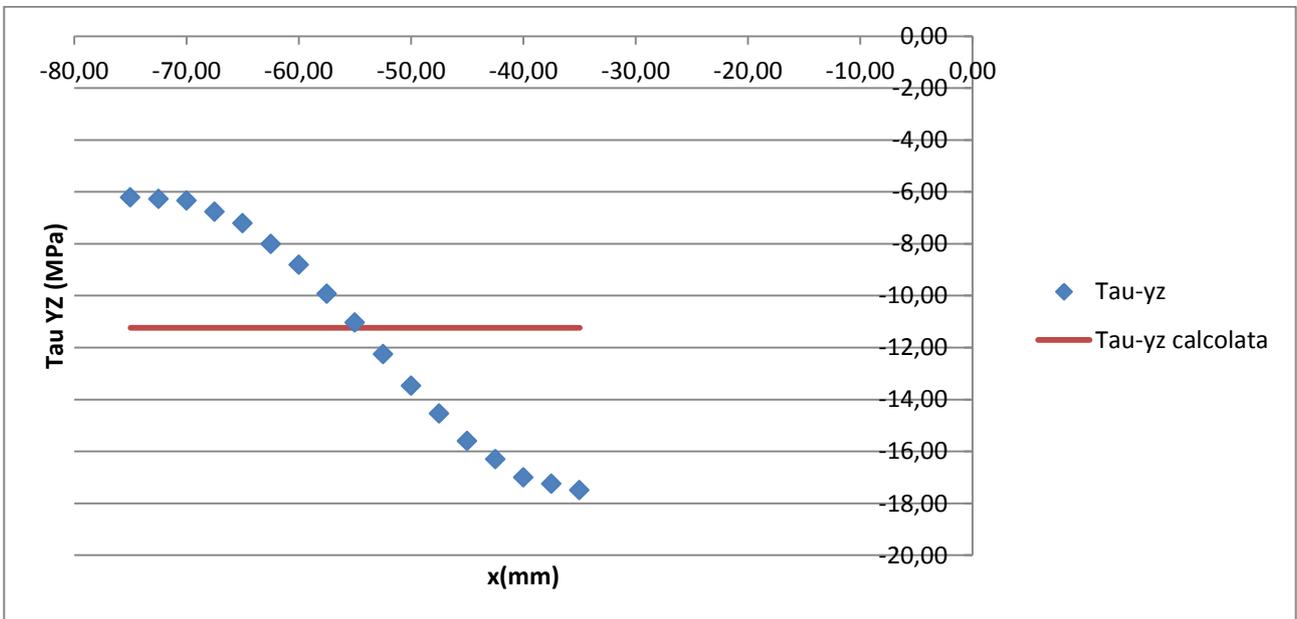


SEZIONE 5:

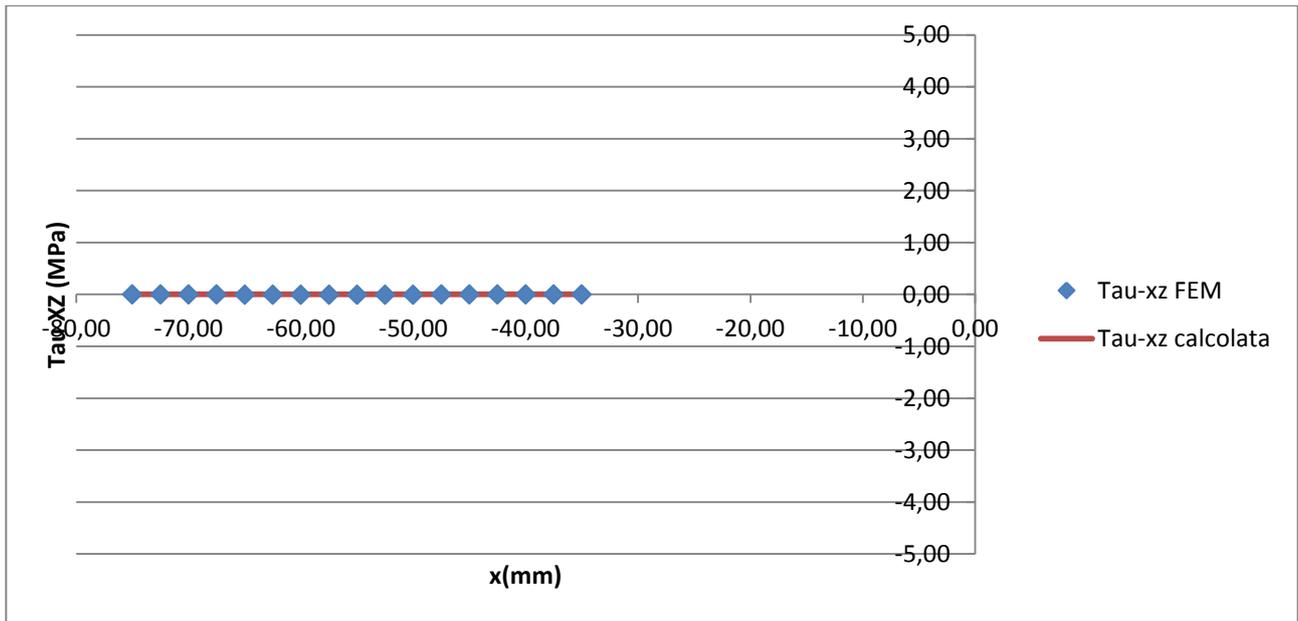
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

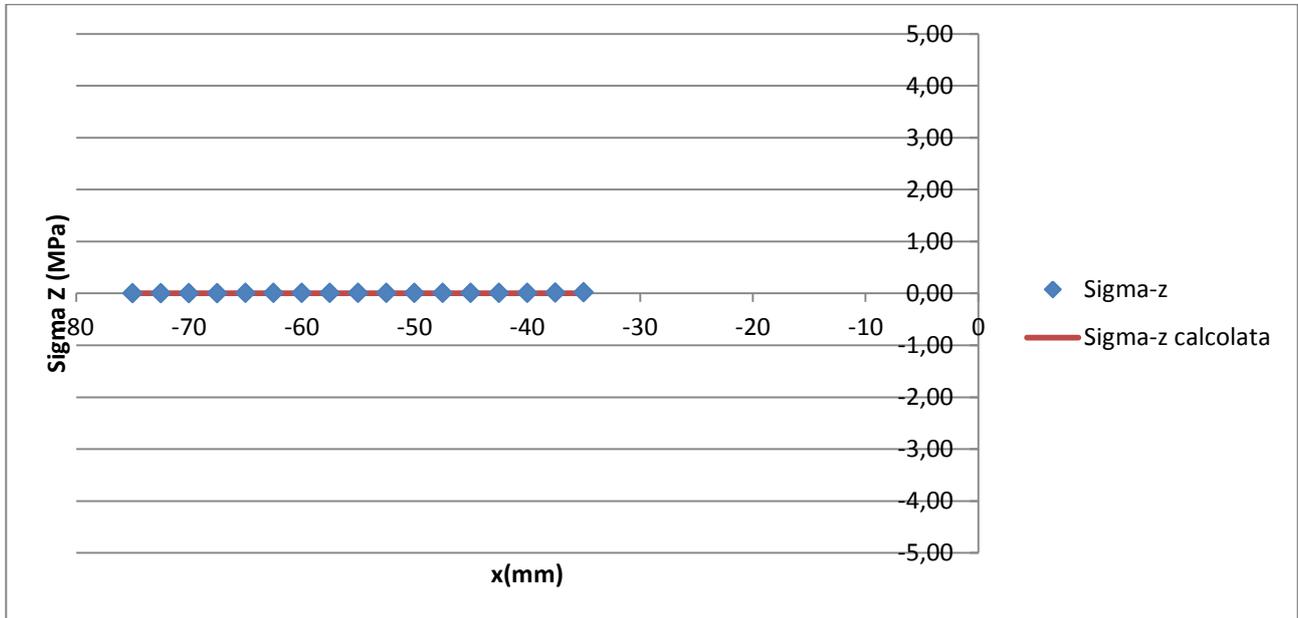


Contour Plot Tau XZ:

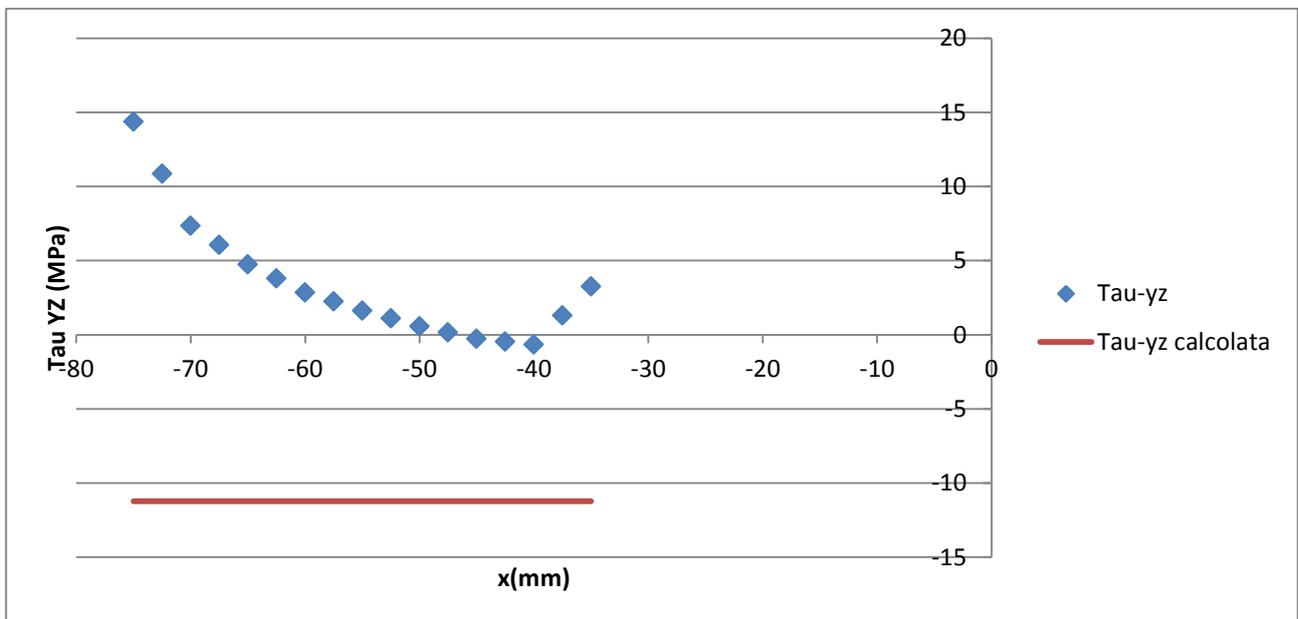


## SEZIONE 6:

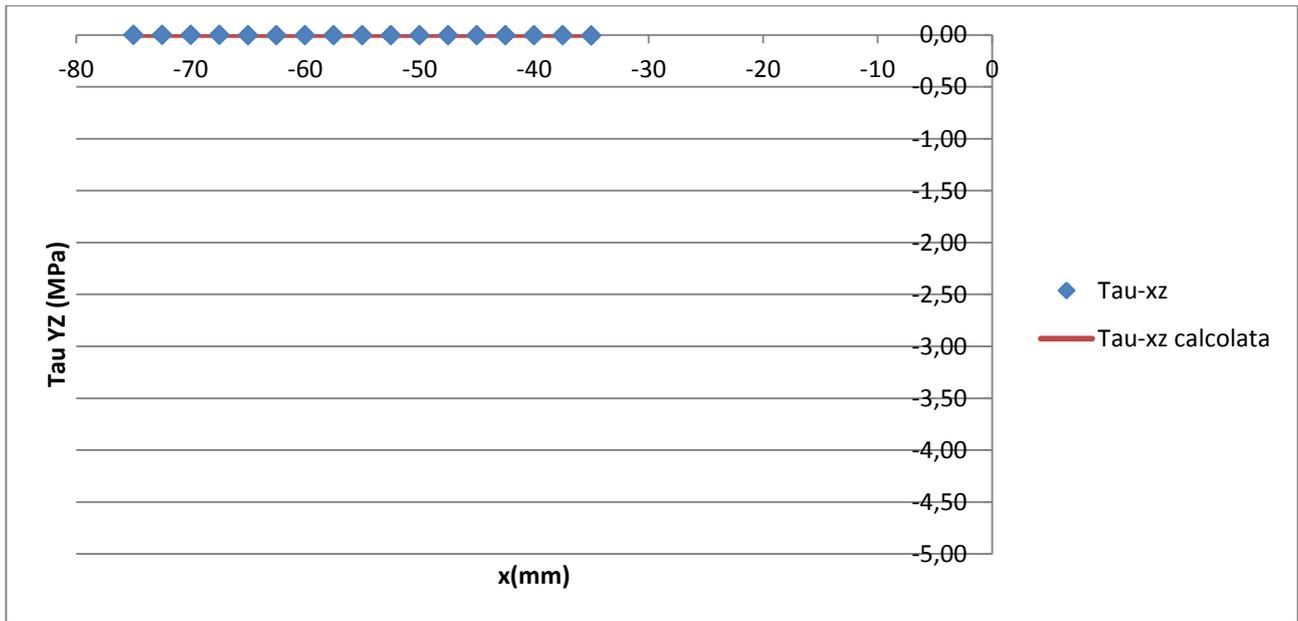
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:



Contour Plot Tau XZ:



### Sigma Z:

Nella *sezione 3* le tensioni normali teoriche, dovrebbero risultare nulle. I dati restituiti dal FEM, rilevano una discordanza nei risultati, riscontrata anche nella sezione 2: in questo caso i valori ottenuti variano da un minimo di -1,75 Mpa circa, a un massimo di 0,25 Mpa circa. Si può tuttavia aggiungere questa osservazione: il grafico risulta molto più appiattito rispetto a prima: di conseguenza, i dati previsti dal FEM tendono ad avvicinarsi ai risultati previsti dalla teoria. Possiamo quindi affermare che nella sezione 3 le linee di tensione si distribuiscano più uniformemente rispetto a prima e valgano quindi meno gli effetti di bordo causati dalla vicinanza al punto di applicazione della forza.

Nella *sezione 4, 5 e 6*, si può facilmente notare come le Sigma Z siano ottimamente in accordo nel confronto tra valori teorici e FEM: inconsuetamente, ciò vale anche per la sezione 6, ossia ove è presente l'incastro a terra, e quindi ove la teoria di Navier poteva cadere in difetto.

In conclusione, si può notare molto chiaramente dai contour plot che l'andamento lineare assunto dalle sigma Z interessa tutta la sezione, e varia spostandosi lungo la coordinata y, cambiando di segno passando al di sotto dell'asse baricentrico X-X.

### Tau YZ:

Come detto in precedenza, non si notano sostanziali variazioni nei risultati ottenuti al FEM, lungo le sezioni della trave, se non nella sezione 6, che però corrisponde all'incastro a terra. Dall'analisi del Contour Plot della sezione si può notare la profonda differenza nell'andamento delle tensioni tangenziali rispetto alle precedenti, a conferma del fatto che il vincolo *incastro a terra* esercita un'importante influenza negli effetti dati dall'andamento delle tensioni stesse, e quindi nella loro distribuzione. In ultima analisi possiamo affermare che il valore predetto da Jourawskj lungo in path 1 non coincide con il reale andamento delle tensioni tangenziali, e rappresenta piuttosto un valore medio rispetto ai risultati forniti dal FEM. Di conseguenza, si assiste ad una sovrastima dei risultati teorici fino alla coordinata  $x = -55$  mm e sottostima fino alla fine del path considerato.

### Tau XZ:

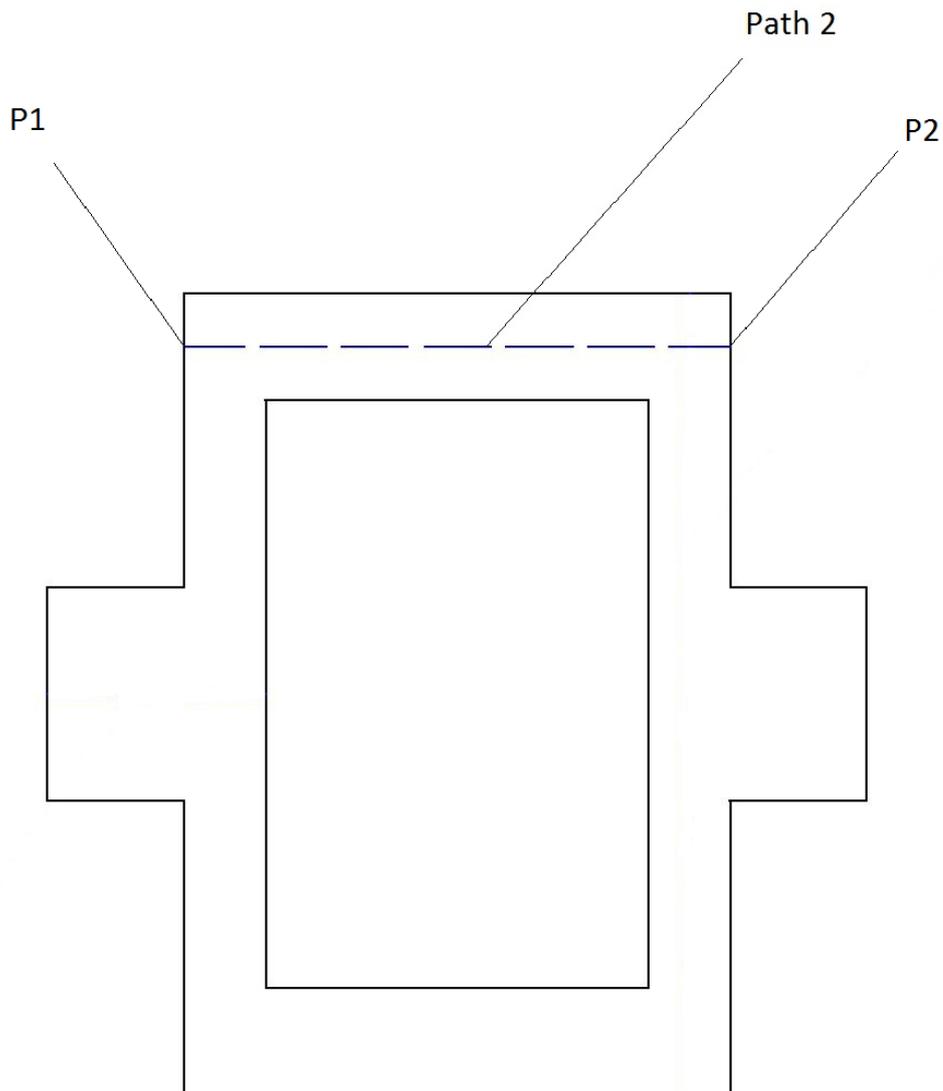
Fino alla *sezione 3* si assiste ad una leggera sottostima dei risultati teorici, nei nodi centrali del path, rispetto ai risultati forniti al FEM, che comunque non supera i 0,5 Mpa e quindi può essere considerata trascurabile ai fini della nostra trattazione.

Per le *sezioni 4,5,6* i valori previsti dal FEM sono molto prossimi a zero, compreso in corrispondenza della sezione 6, ove è applicato l'incastro a terra.

Non vi sono quindi altre particolari indicazioni da aggiungere per la Tau XZ.

## 4.2. Path 2.

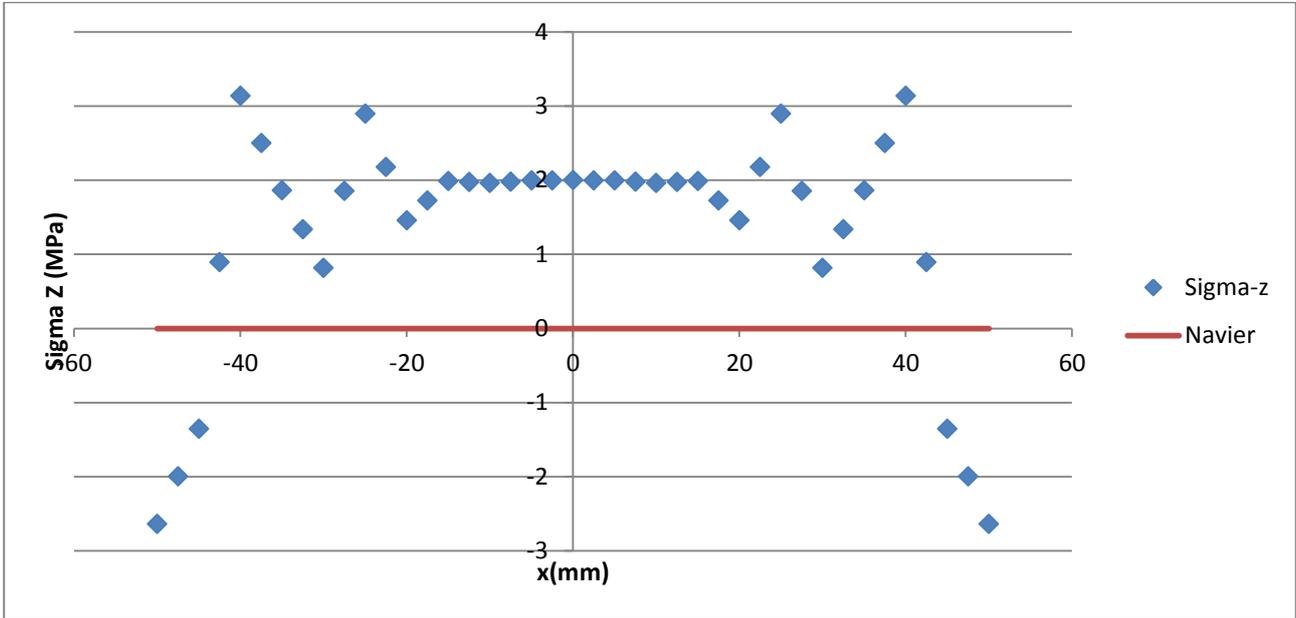
Il Path 2 è un segmento orizzontale con estremi di coordinate P1(-50, +65) e P2(+50,+65), come indicato in figura:



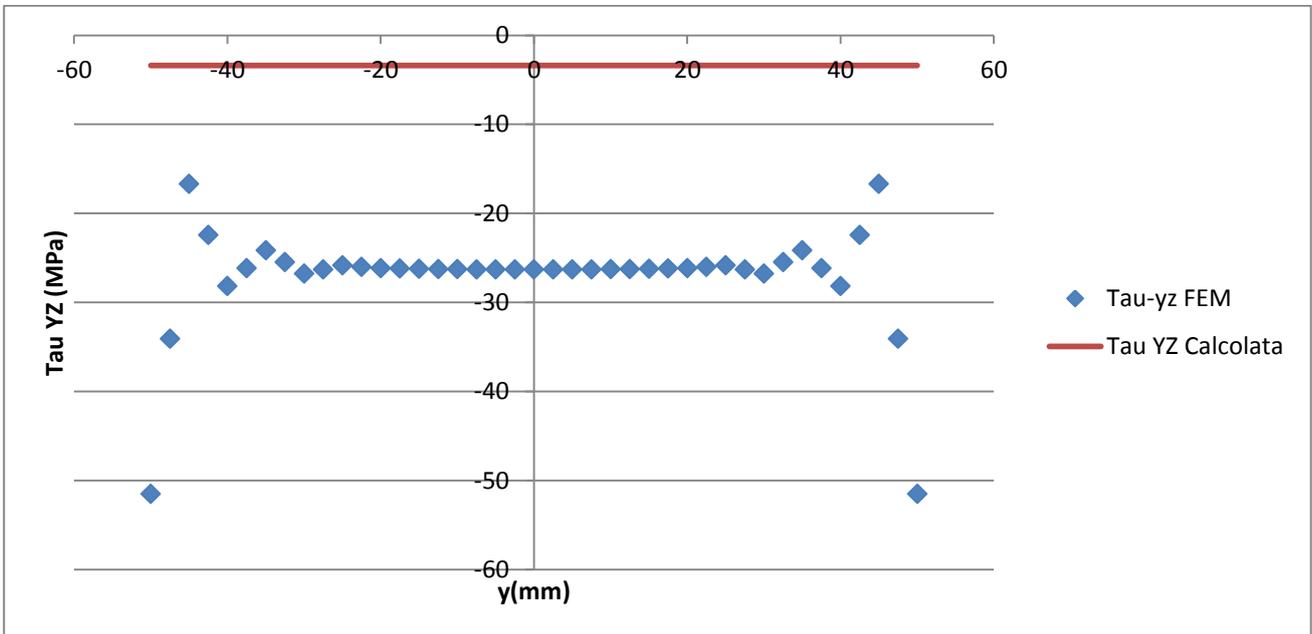
Procedo quindi ora ad analizzare i risultati al FEM per il path 2.

SEZIONE 1.

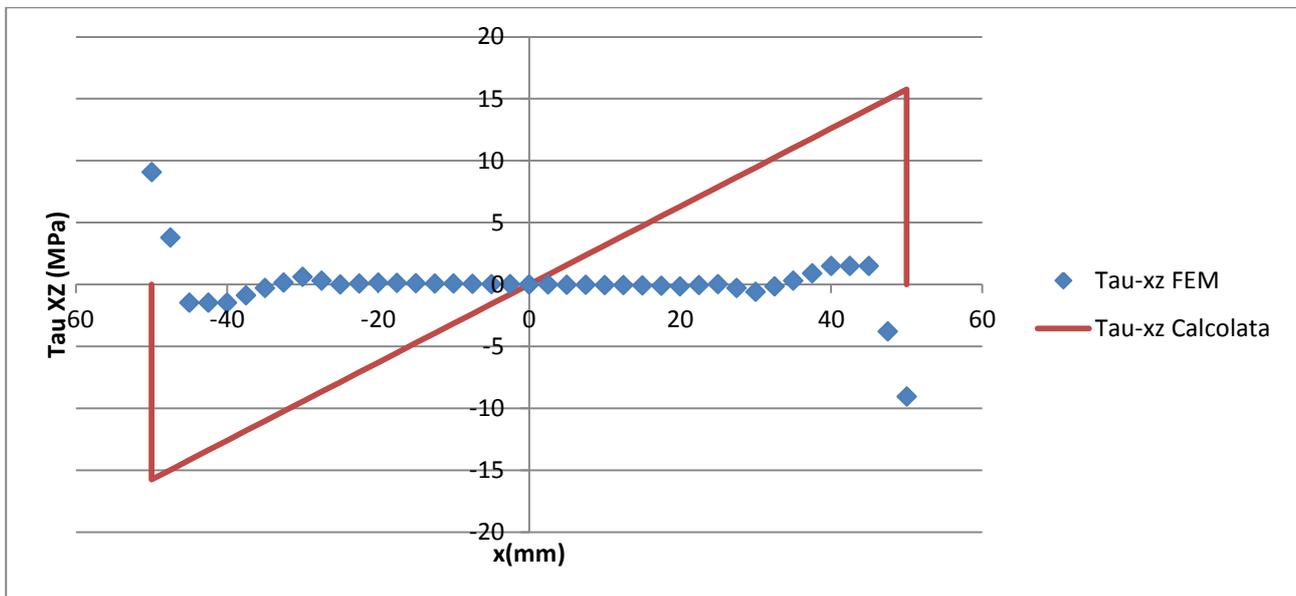
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Trovandoci nella sezione 1, e quindi quella corrispondente all'applicazione del carico, il braccio  $b$  della forza  $F$  è nullo: di conseguenza il momento esercitato da  $F$  è nullo e quindi le tensioni normali teoriche sono nulle in tale sezione, su tutto il path 2. La vicinanza al punto di applicazione del carico porta a un andamento anomalo nella distribuzione delle tensioni: cade una delle ipotesi fondamentali di Navier, ossia la necessaria lontananza dal carico onde non avere effetti di bordo che portano ad un andamento anomalo delle linee di tensione.

I valori al FEM sono piuttosto dispersi e variano da un minimo di -3 MPa a un massimo di +3 MPa.

### Tau YZ:

Lungo il path 2, applicando Jourawskj, si ottiene un valore costante su tutti i nodi pari a -3,393 MPa. Si assiste invece, dai risultati al FEM, a una sovrastima di circa 22 MPa nei valori delle tensioni tangenziali, in corrispondenza dei nodi centrali del path, mentre alle estremità questi aumentano fino a superare i 50 MPa. Dall'analisi del Contour Plot si può notare come i valori delle tensioni tangenziali siano molto accentuati in corrispondenza degli spigoli dell'estremità superiore della sezione, e possiamo quindi imputare questa sovrastima nei risultati sia al fatto che ci troviamo in corrispondenza della sezione nella quale è applicato il carico, sia al fatto che in corrispondenza degli spigoli le tensioni aumentano notevolmente.

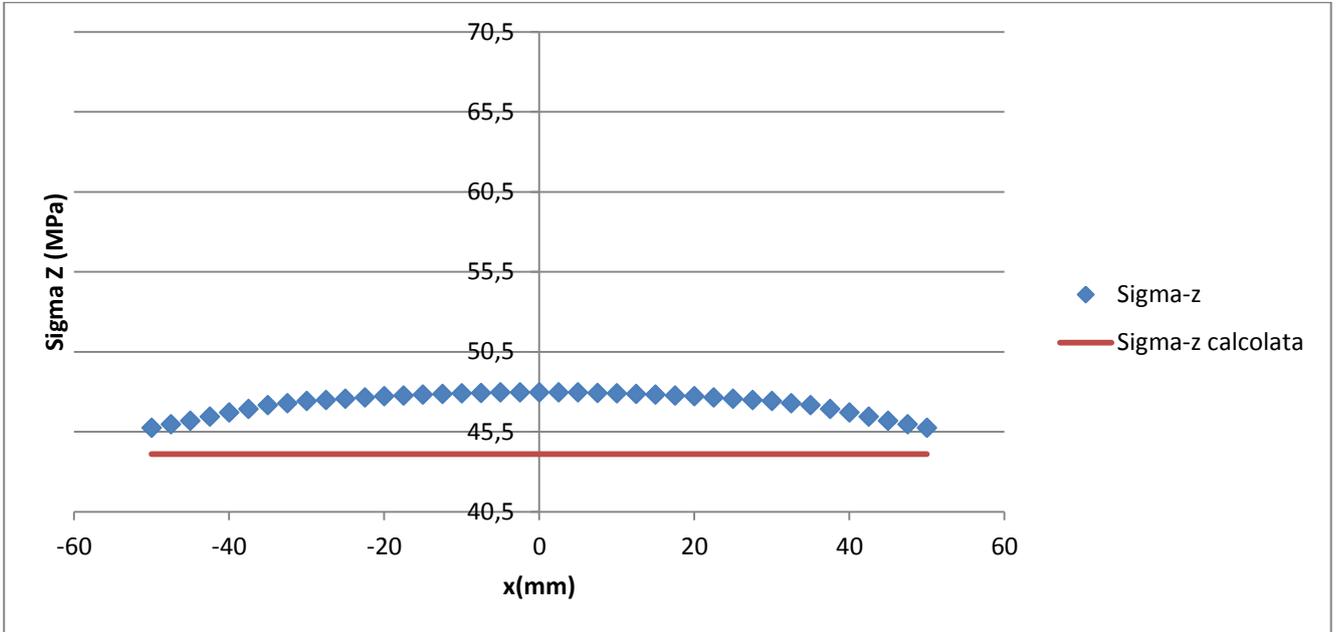
### Tau XZ:

Nel calcolo delle Tau XZ teoriche, essendoci una relazione lineare tra il momento d'inerzia del primo ordine e la coordinata  $x$ , lineare sarà pure l'andamento delle tensioni stesse, per l'equazione di Jourawskj. L'analisi al FEM invece suggerisce un insieme di valori molto prossimi a zero, ad eccezione di alcuni nodi del path estremi, ove le tensioni raggiungono il picco di 10 MPa circa, da entrambi i lati. Si assiste quindi ad una netta divergenza nelle due serie di valori: possiamo imputare tale effetto alla vicinanza della sezione al punto di applicazione del carico.

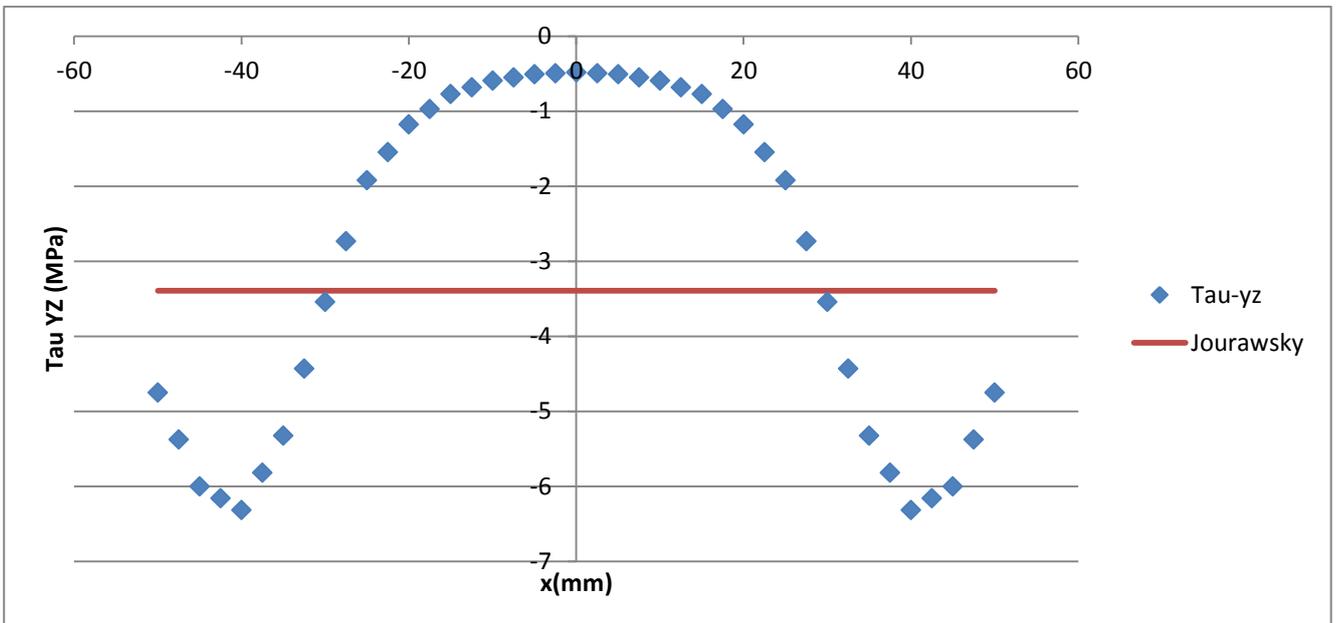
Jourawskj non prevede quindi in modo corretto l'andamento delle tensioni, e dunque non è applicabile.

## SEZIONE 2.

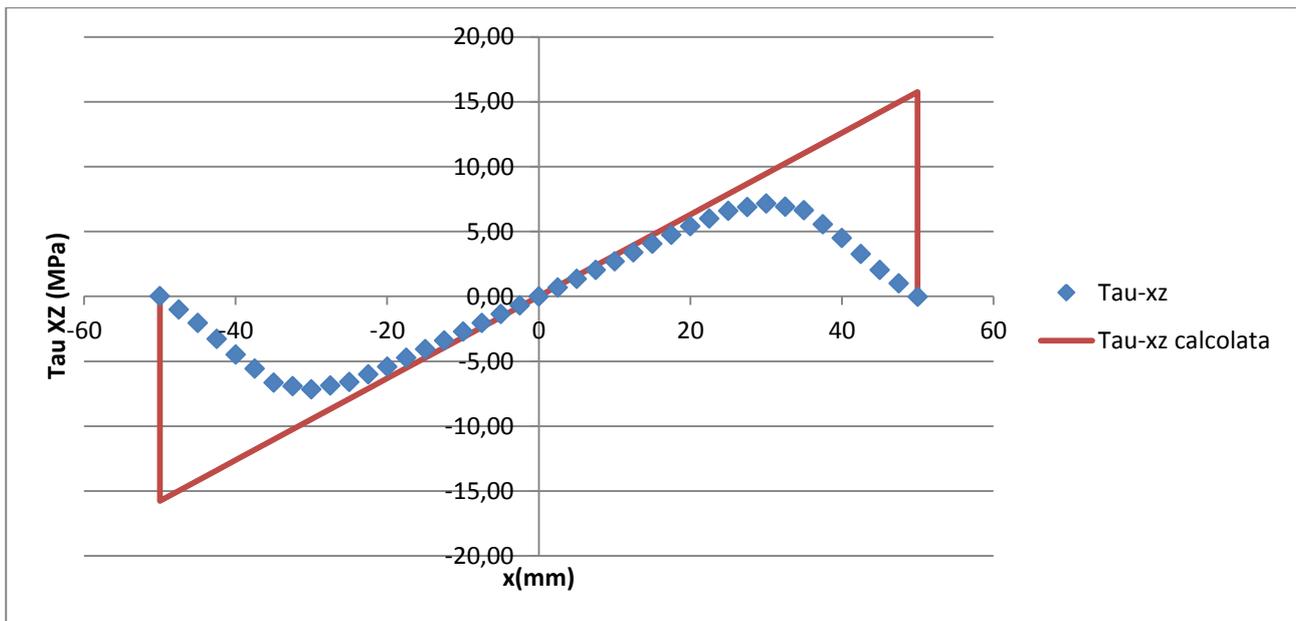
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

I valori previsti dal FEM sono molto vicini al valore teorico ottenuto applicando Navier. In particolare, si può notare come questi tendano a “avvicinarsi” al valore teorico a mano a mano ci si sposta verso gli estremi del path 2. In ogni caso l’errore nella previsione dei risultati non supera il MPa, e quindi già dalla Sezione 2 si ottiene una buona previsione dei risultati, in accordo con i risultati teorici.

### Tau YZ:

Analogamente a quanto accadeva per il path 1, si sussiste ancora ad un andamento delle tensioni tangenziali previste dal FEM che non rispecchia il valore calcolato con Jourawskj. Quest’ultimo appare come valor medio del reale andamento delle tensioni tangenziali, ottenendo una sovrastima dei valori teorici fin a 3 MPa circa nei punti centrali della sezione, nei quali il valore tende ad essere nullo, e a una sottostima nei punti estremi del path, fino a 4 MPa circa.

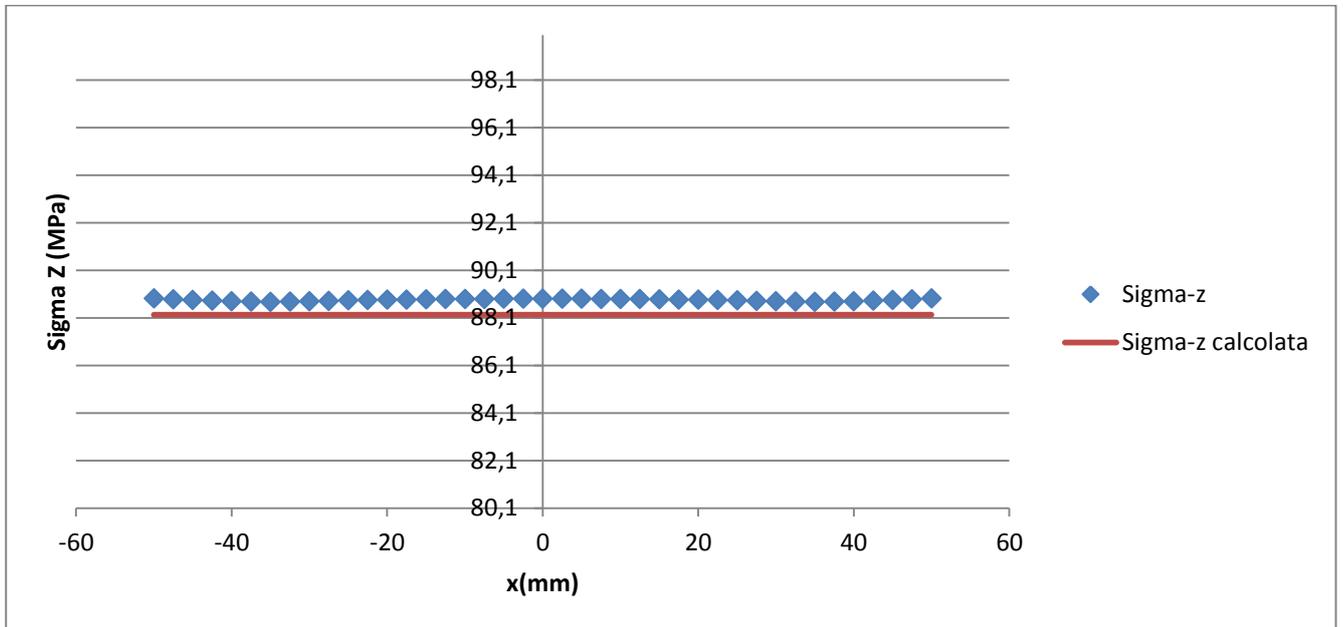
### Tau XZ:

A parte i lati del path possiamo affermare che l'andamento a farfalla delle tensioni suddette è confermato dal FEM, in modo piuttosto preciso già dalla sezione 2. Su tutte le sezioni i valori nella parte centrale rientrano nel margine di errore di 0,5 MPa. Per quanto riguarda i lati opposti del path 2, sappiamo bene che non è possibile un andamento discontinuo come quello presentato dall'analisi analitica: le tensioni non possono passare da un valore nullo sui bordi, e quindi sui punti estremi del path, al massimo valore e poi diminuire di intensità gradualmente, come invece prevederebbe il FEM.

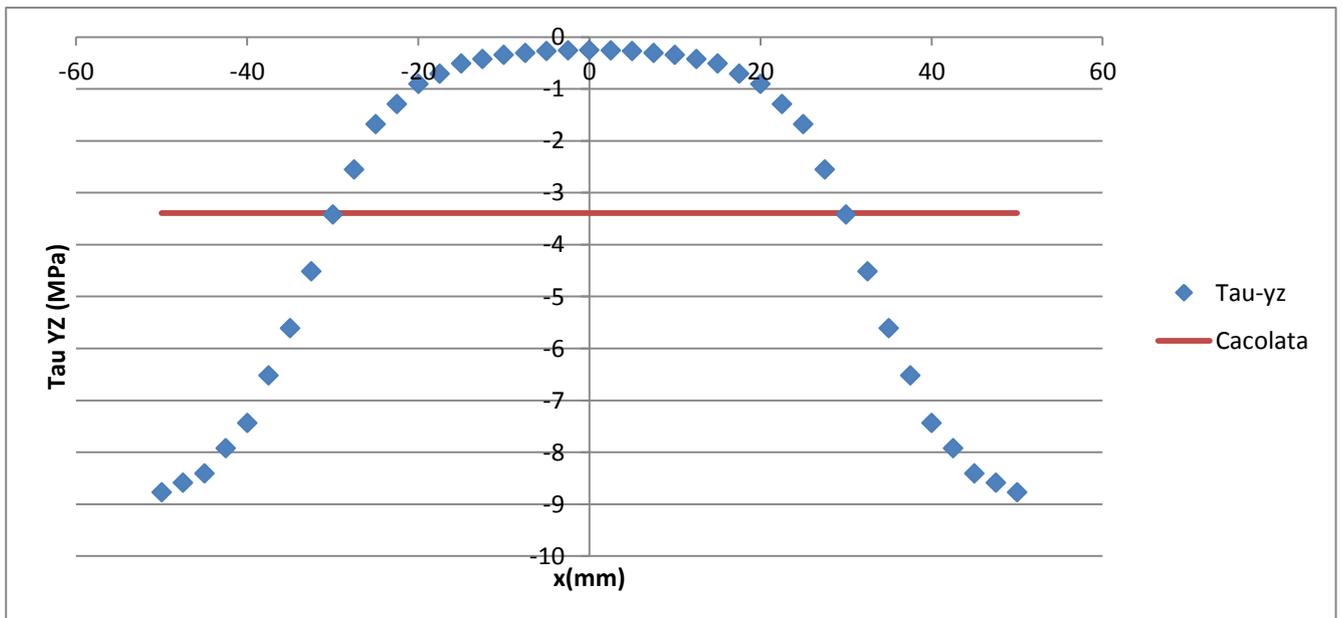
Dal contour plot è difficile rilevare un andamento a farfalla delle tensioni, ma si può comunque apprezzare che nella zona centrale esse siano meno intense che ai lati, sempre guardando la zona del path 2, e lo stesso si avrebbe con un'analisi su un path orizzontale, ma sulle ali inferiori.

### SEZIONE 3.

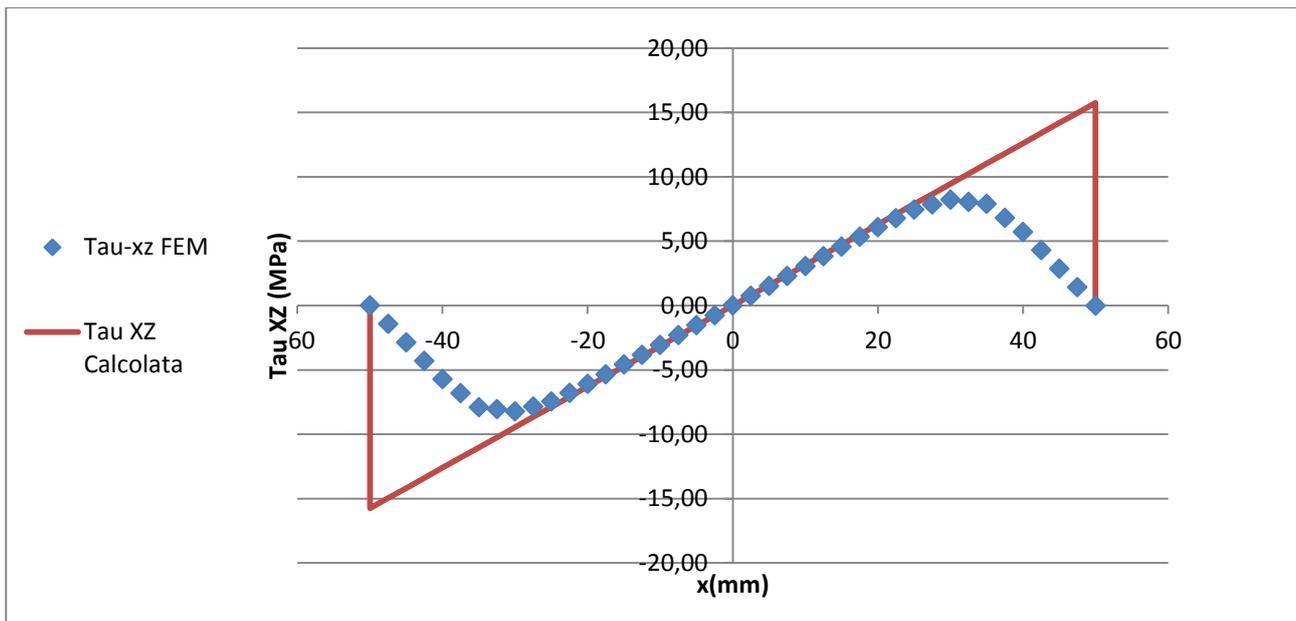
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

I risultati al FEM coincidono all'interno del margine di errore di 1 MPa con quelli teorici previsti da Navier. Come si può notare facilmente, dal confronto con la sezione 2 è ovvio che l'andamento previsto dall'analisi tridimensionale agli elementi finiti tende a seguire la tendenza di una retta orizzontale: le tensioni tendono quindi essere della stessa intensità su tutto il path 2, come previsto da Navier.

### Tau YZ:

L'andamento delle tensioni tangenziali tende assumere un andamento costante vicino al valore nullo nella parte centrale del path, ma con una sovrastima rispetto al valore teorico previsto da Jourawskj di circa 3 MPa. L'andamento ai bordi è differente: si nota un aumento delle tensioni fino al bordo esterno. Come già detto in precedenza, si ha quindi una sottostima dei risultati in corrispondenza dei punti esterni del path (quelli corrispondenti ai due tratti verticali della sezione ad Omega), e ad una sovrastima invece nei punti centrali del path stesso.

La netta discordanza nelle due serie di risultati può essere attribuita alla presenza degli spigoli interni, che influisce sulla distribuzione delle linee di tensione, e di conseguenza sull'andamento delle tensioni tangenziali.

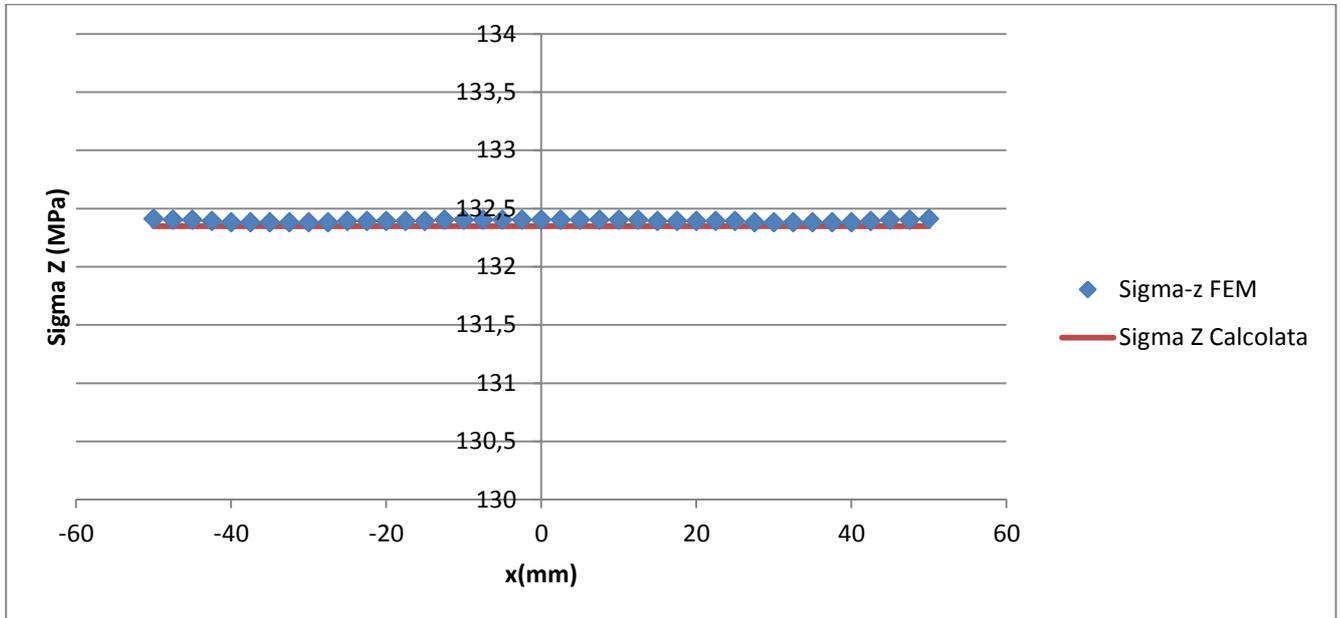
### Tau XZ:

Si nota una ottima corrispondenza tra dati teorici e i valori forniti dal FEM nell'andamento centrale a farfalla, ancora più evidente rispetto alla sezione 2, con un margine di approssimazione che non supera i 0,4 MPa.

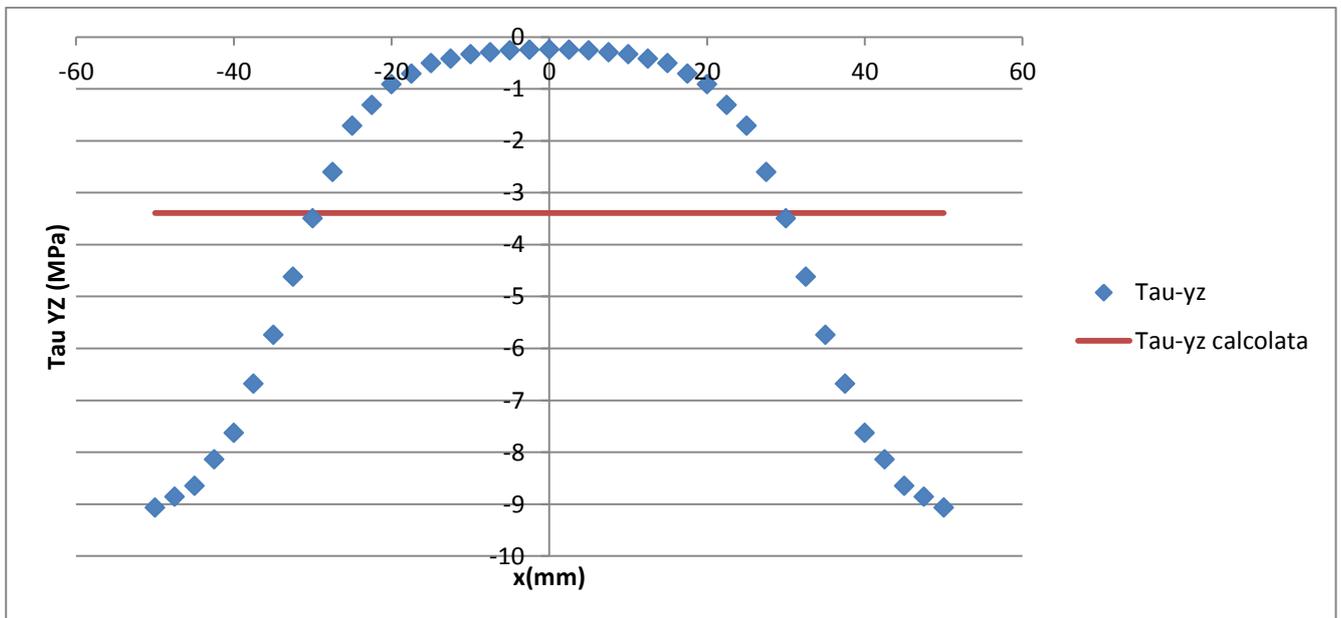
Vale ancora il discorso fatto sulla incongruenza tra l'andamento discontinuo riscontrato nel modello teorico e quello graduale previsto dal FEM, per i motivi già citati in precedenza. Tale incongruenza vale anche per le sezioni successive.

## SEZIONE 4.

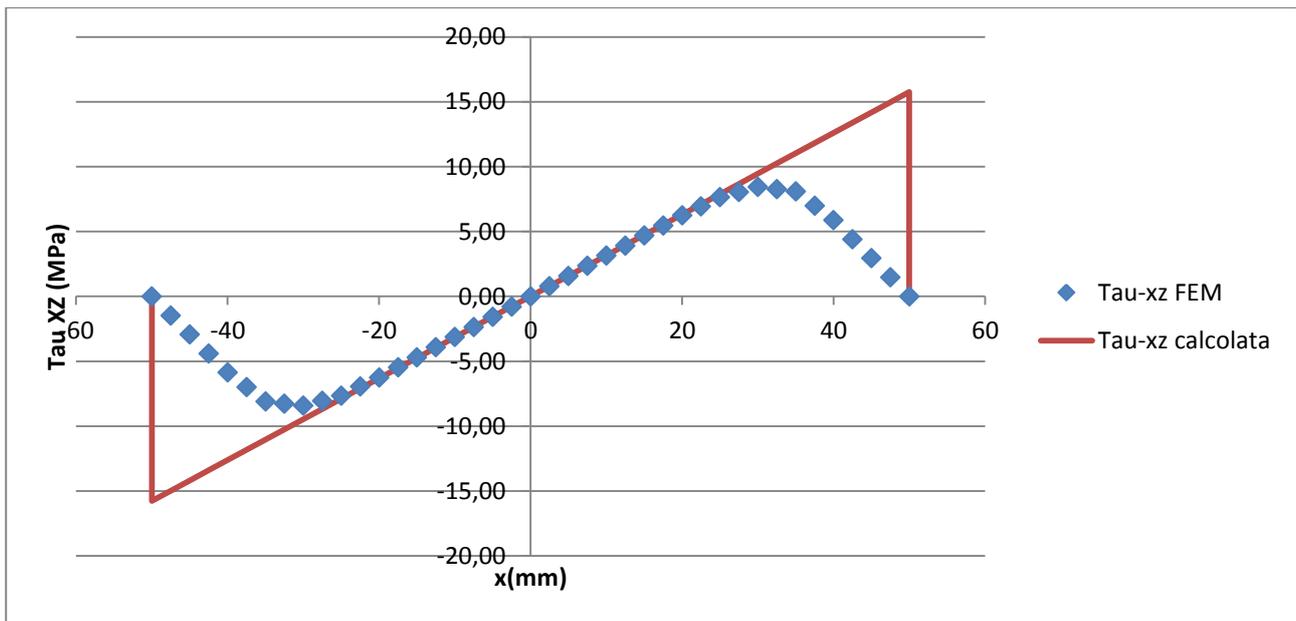
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Ottima concordanza tra risultati teorici e FEM, con discordanze nei risultati non superiori ai 0,2 MPa. In tale sezione possiamo affermare che valgono tutte le ipotesi fondamentali che rendono valido Navier .

### Tau YZ:

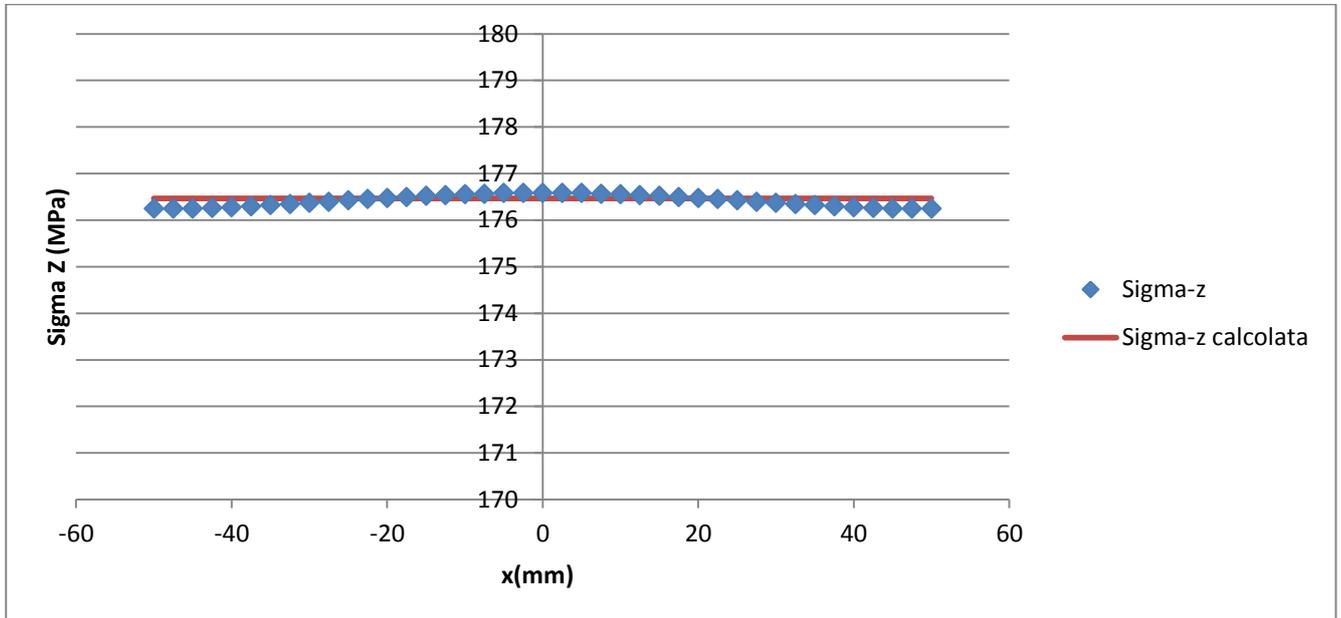
Valgono le stesse considerazioni fatte per la Sezione 3: i due grafici si equivalgono.

### Tau XZ:

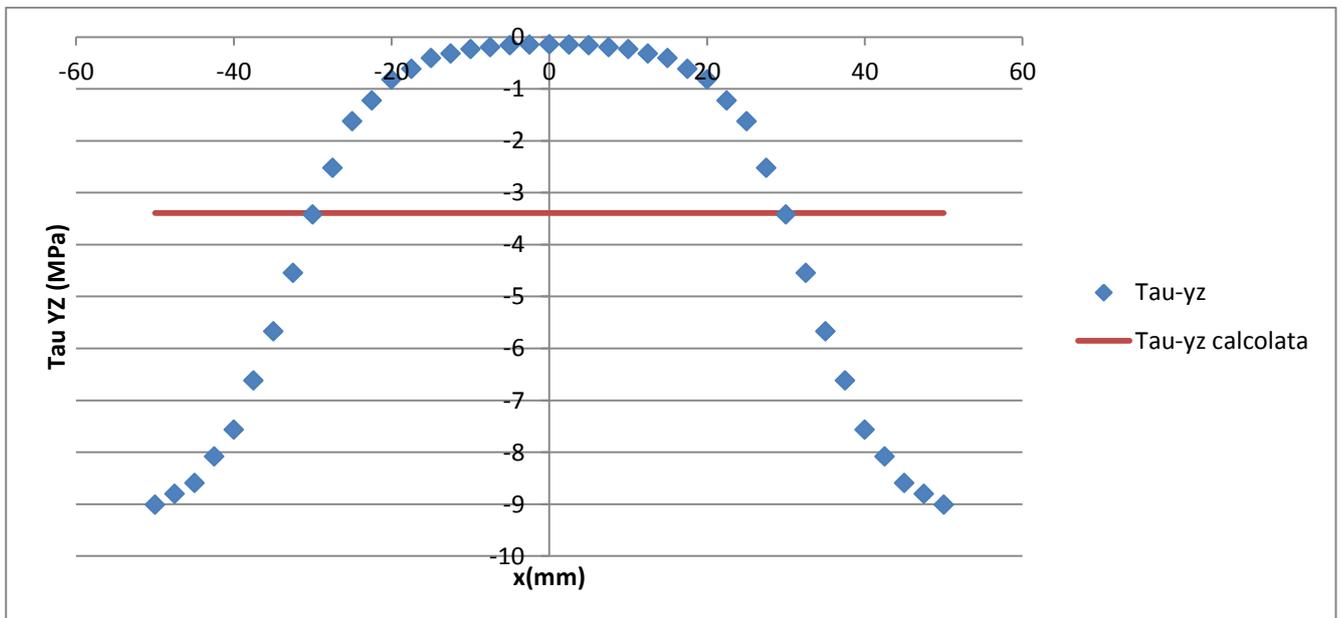
L'andamento a farfalla riferito ai punti centrali del path è ottimamente previsto dal FEM, in accordo con Jourawskj. Valgono le stesse considerazioni fatte per la sezione 3.

## SEZIONE 5.

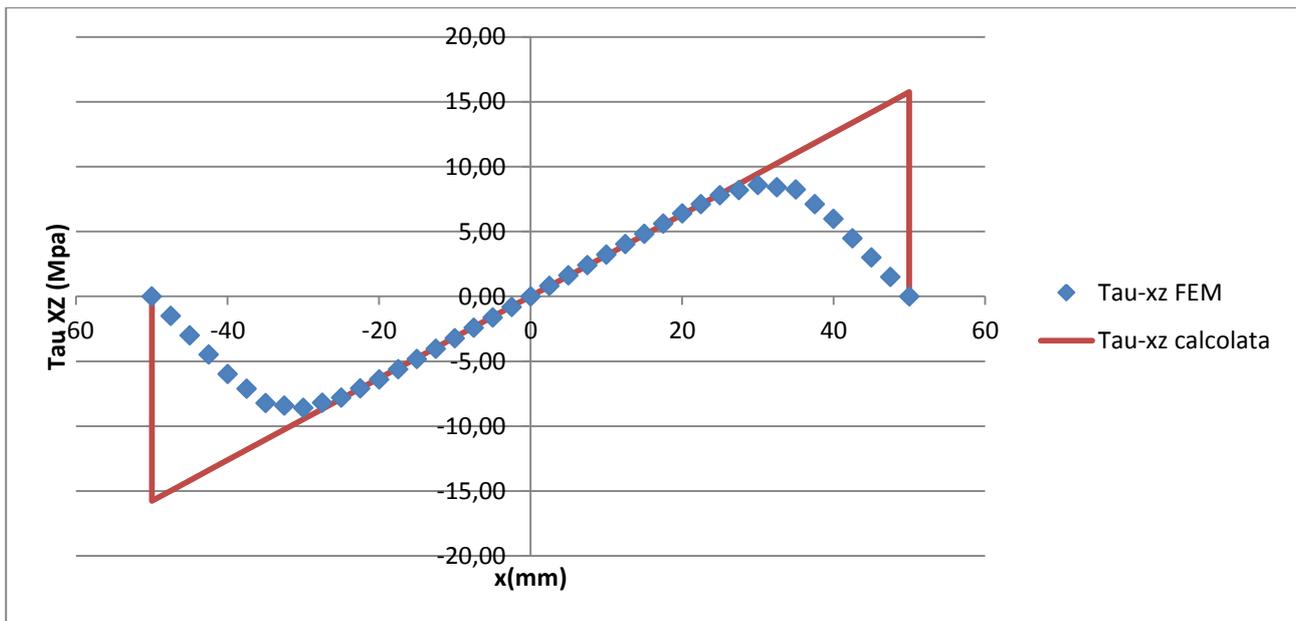
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Si può notare ancora un'ottima corrispondenza tra Navier e i risultati previsti al FEM: tuttavia l'andamento quasi perfettamente orizzontale che interessava le sezioni 3 e 4 viene meno rispettato, e ciò può essere interpretato come conseguenza dovuta ai primi effetti causati alla presenza dell'incastro, che vedono la equazione di Navier cadere in difetto.

### Tau YZ:

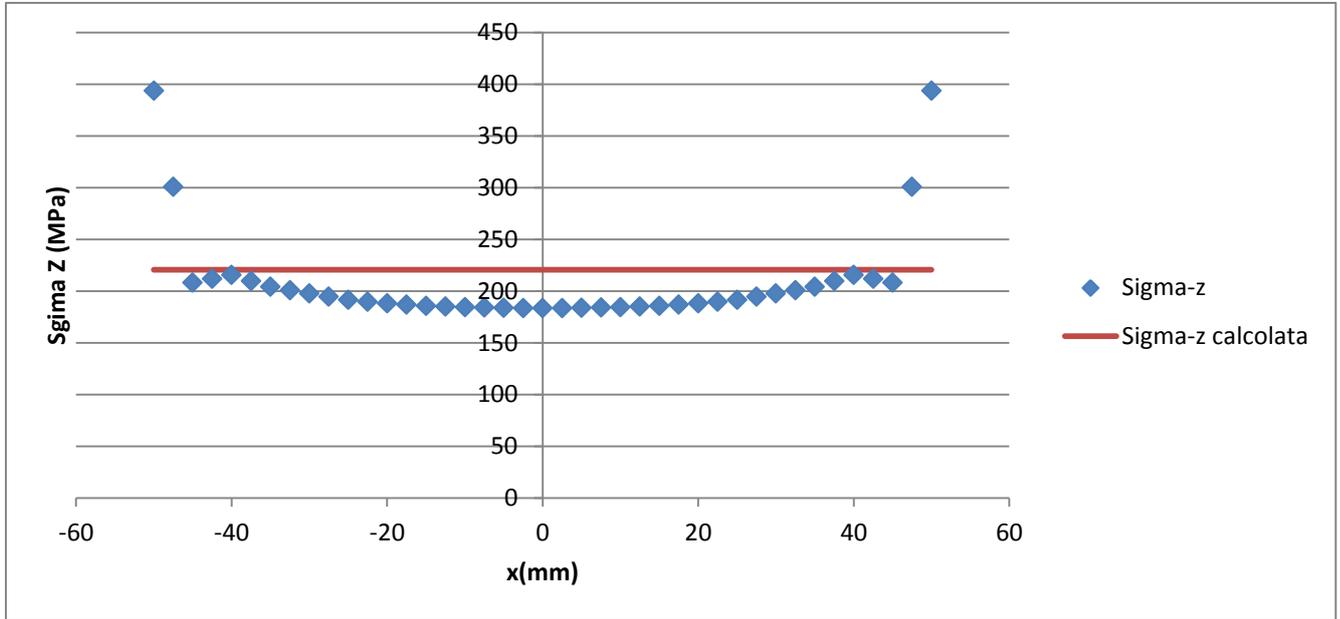
L'andamento delle tensioni è equivalente alla sezione 3 e 4, per cui valgono le stesse considerazioni fatte in precedenza.

### Tau XZ:

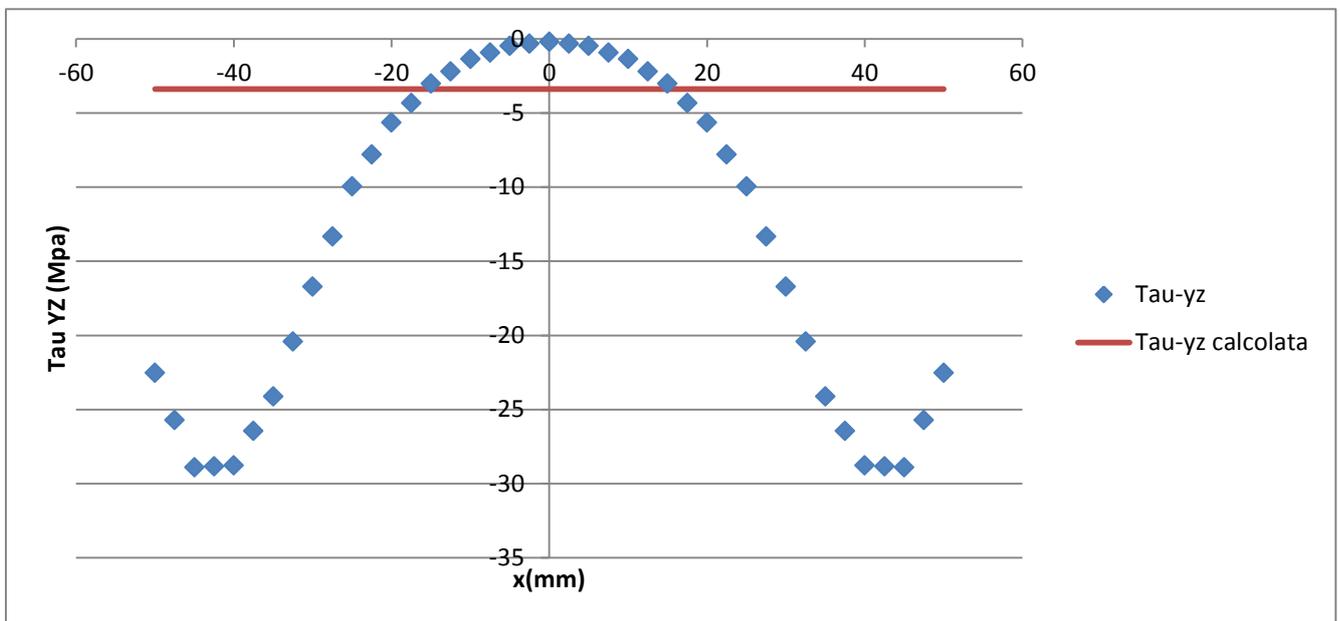
L'andamento a farfalla riferito ai punti centrali del path è ottimamente previsto dal FEM, in accordo con Jourawskj. Valgono le stesse considerazioni fatte per la sezione 3.

SEZIONE 6:

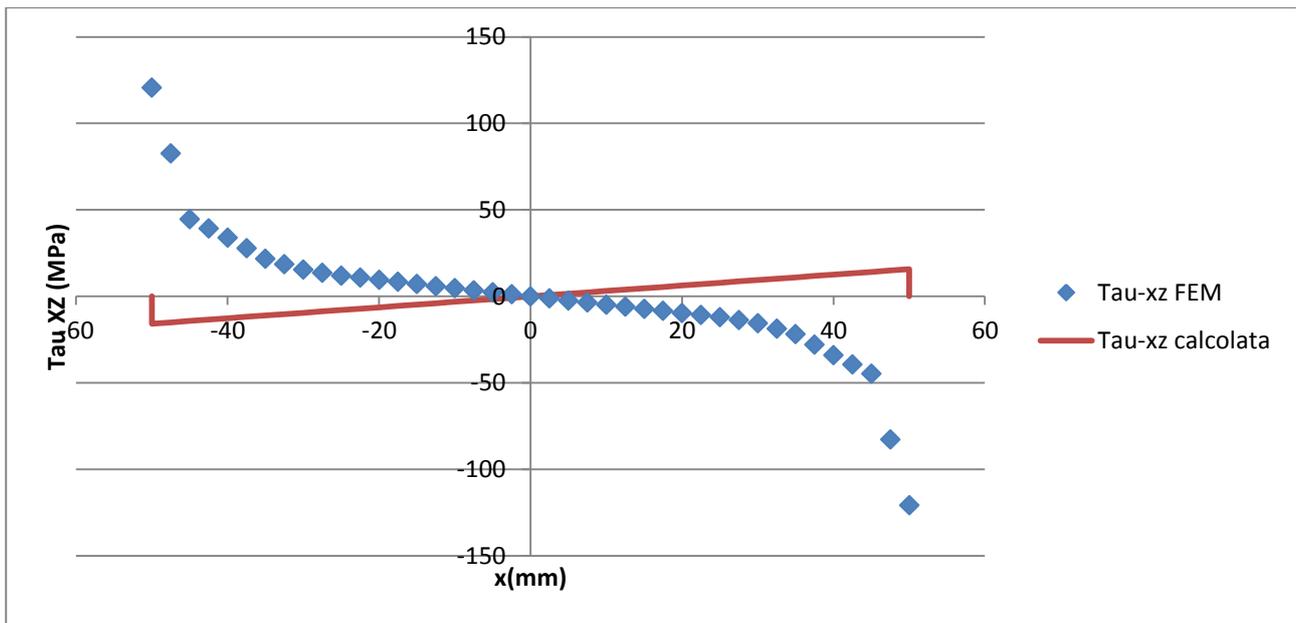
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Si assiste a una sovrastima dei dati teorici di circa 25 MPa, nella parte centrale del path. Ai lati invece si hanno valori raggiunti dal FEM molto elevati, con picchi di 400 MPa circa. Questi sono imputabili alla presenza dell'incastro a terra: dall'analisi del Contour Plot si nota come i valori più alti delle tensioni normali si raggiungano in corrispondenza degli spigoli esterni del bordo superiore della sezione ad Omega. Le linee di tensione saranno quindi più concentrate in tali zone: in conclusione, per questa sezione, l'andamento al FEM non rispecchia fedelmente quello teorico.

### Tau YZ:

L'andamento è molto distante dalla previsione costante dei risultati prevista da Jourawskj: si può notare come in corrispondenza di tale sezione i risultati al FEM siano molto più maggiori in modulo, agli estremi del path, rispetto alle sezioni precedenti, con di valori che variano da -30 MPa a 0 MPa.

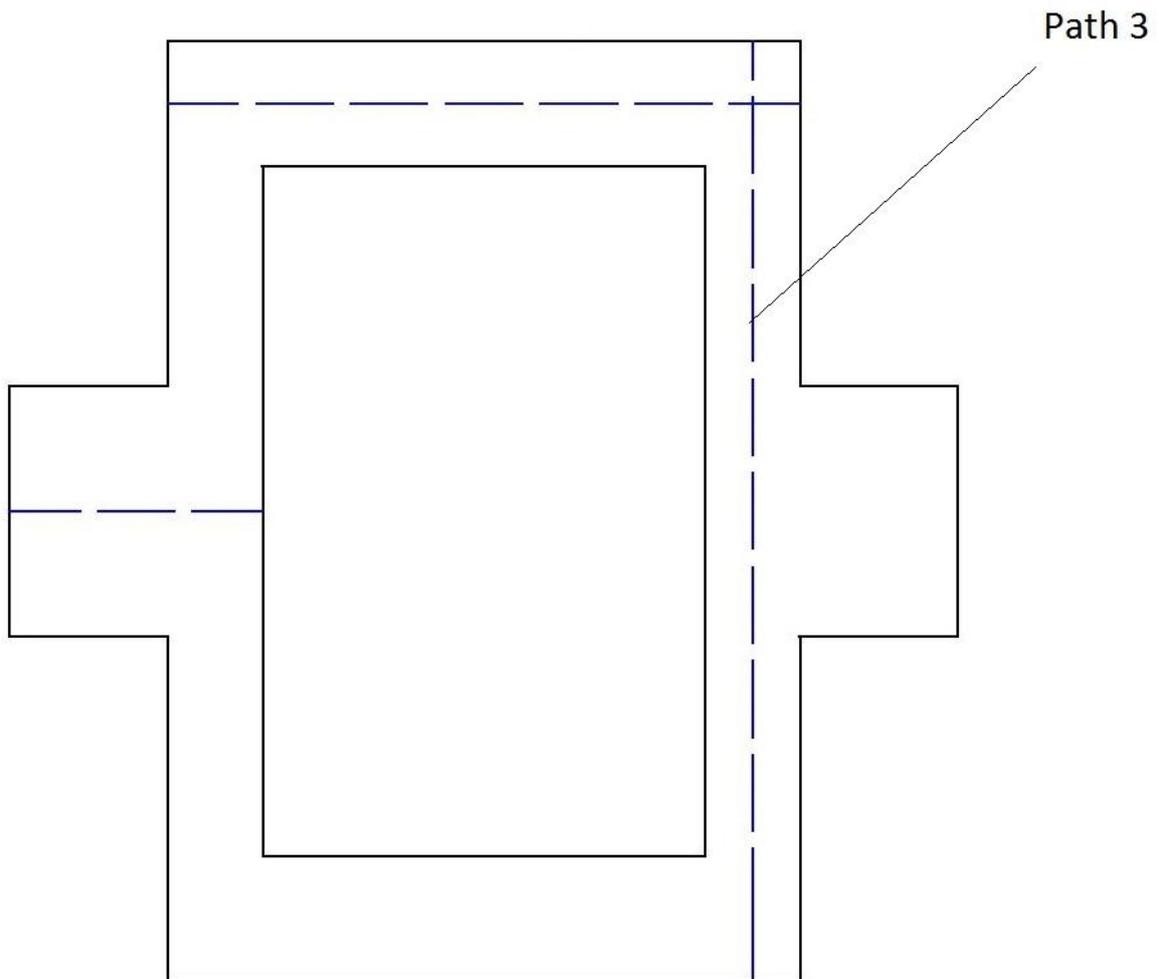
Questa diversità ottenuta rispetto alle sezioni precedenti, la possiamo attribuire alla vicinanza della sezione all'incastro a terra.

### Tau XZ:

Evidente discordanza tra valori teorici e FEM: mentre per le sezioni precedenti si assisteva a un andamento a farfalla crescente nella parte centrale del path, in questo caso l'andamento è decrescente, quindi opposto a prima, e si notano dei picchi nei valori delle tensioni tangenziali in corrispondenza dei punti estremi del path, valori che raggiungono fino a 125 MPa circa.

In conclusione, la vicinanza della sezione all'incastro, rende inattendibile la equazione di Jourawskj e Navier.

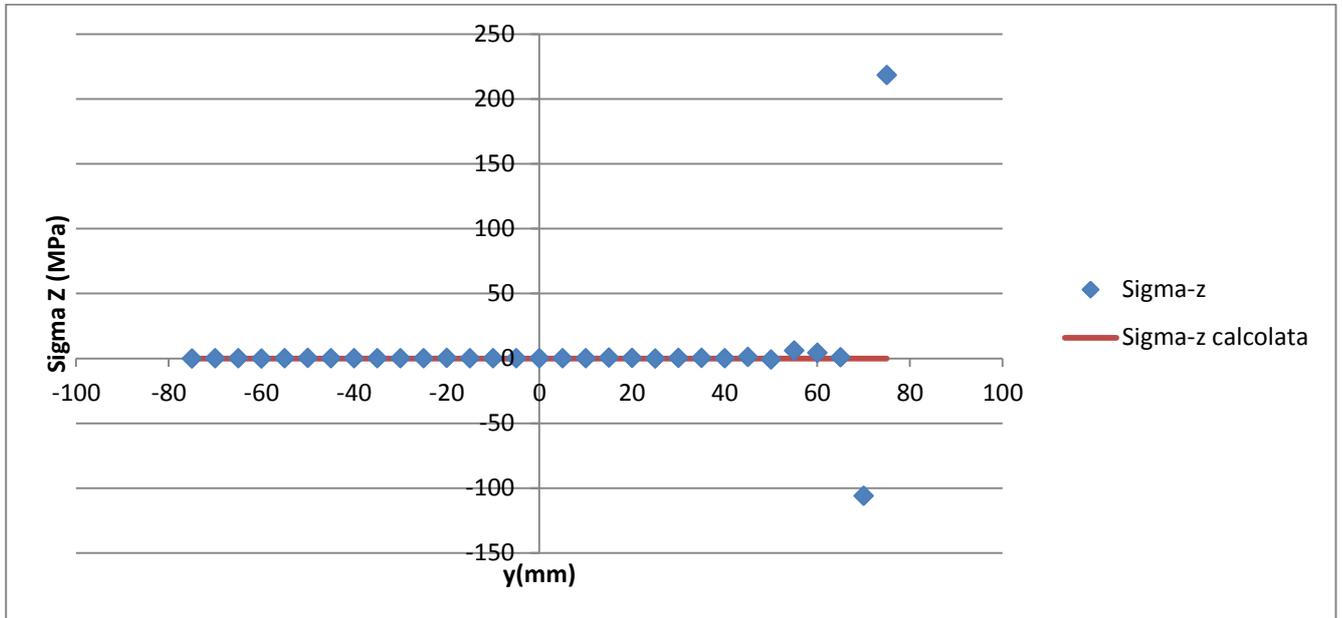
### 4.3. Path 3.



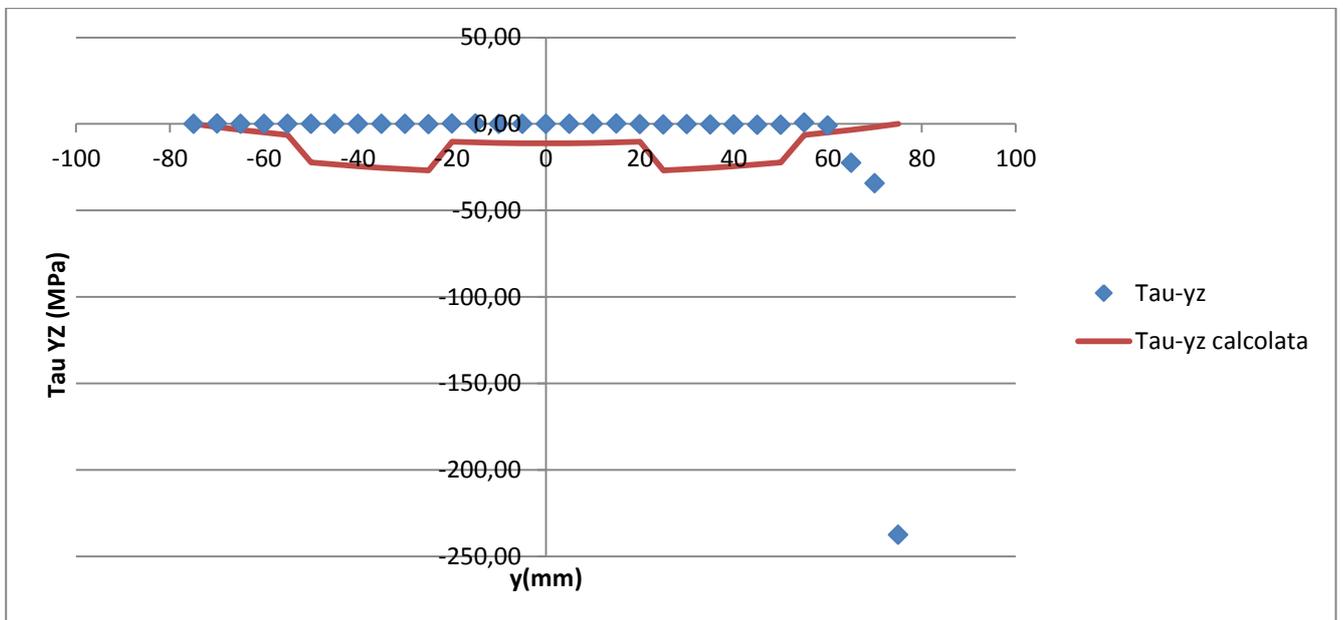
Il Path 3 è un segmento verticale che congiunge i nodi dagli estremi  $P1(42,5; +75)$  e  $P2(42,5; -75)$ .

# SEZIONE 1.

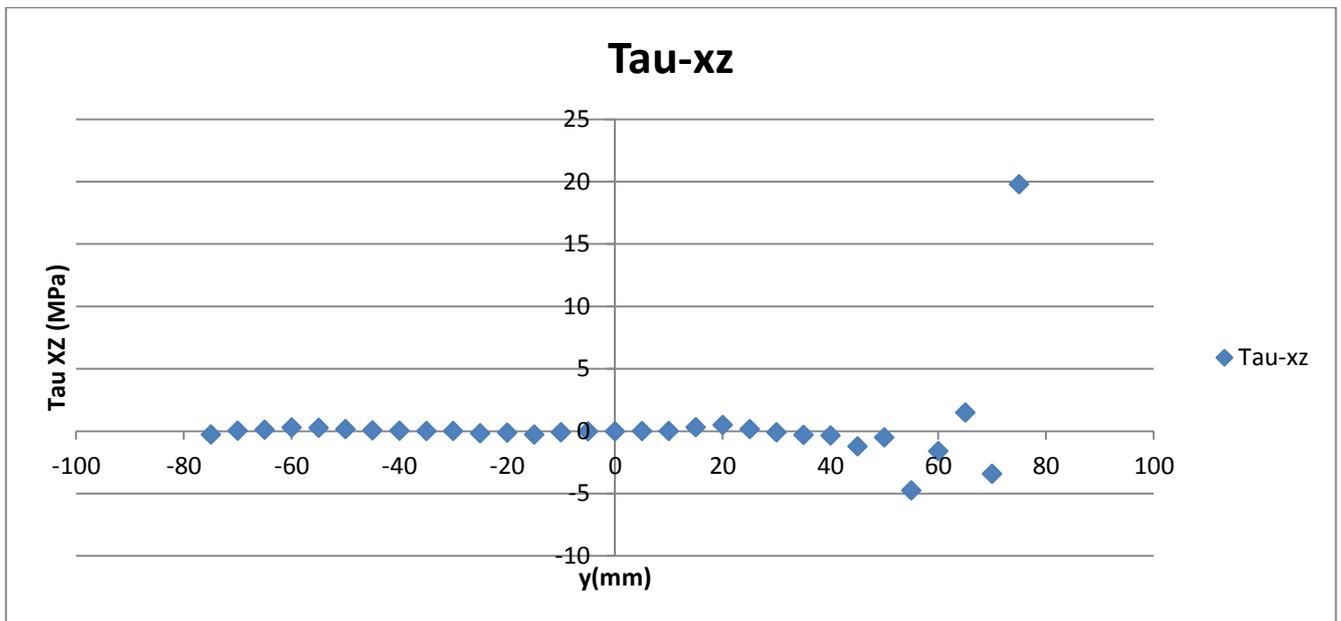
## Sigma Z:



## Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

L'andamento teorico delle tensioni normali prevede valori nulli su tutto il Path 3 per la Sezione 1. Ci troviamo infatti in corrispondenza del punto di applicazione del carico F, e la forza avendo braccio nullo, esercita momento nullo su tutta la sezione. Di conseguenza, per Navier le tensioni normali saranno nulle su tutto il path. I valori previsti dal FEM confermano quanto detto, ad eccezione del tratto che va dai 50 mm ai 75 mm, ove, però si risente dell'effetto dovuto all'applicazione della forza F, che comporta un fenomeno di compressione dello strato superficiale. Si notano, infatti, anche dall'analisi del Contour Plot, delle zone di compressione e di trazione, riferite agli strati superficiali della sezione.

### Tau YZ:

Jourawskj prevede un andamento discontinuo in corrispondenza del passaggio di spessore della sezione considerata, lungo il path. Come si vede dal grafico, l'analisi al FEM indica una serie di valori tutti vicini a zero, ad eccezione dei punti del path compresi tra  $y= +60$  e  $y=+75$ , dove si hanno dei valori molto elevati delle tensioni tangenziali stesse, dovute (come per le tensioni normali) alla presenza della forza F.

In sostanza si osserva una totale discordanza tra i valori ottenuti al FEM e Jourawskj, in quanto ci troviamo nella Sezione 1, e quindi cade l'ipotesi fondamentale relativa alla lontananza dal punto di applicazione del carico.

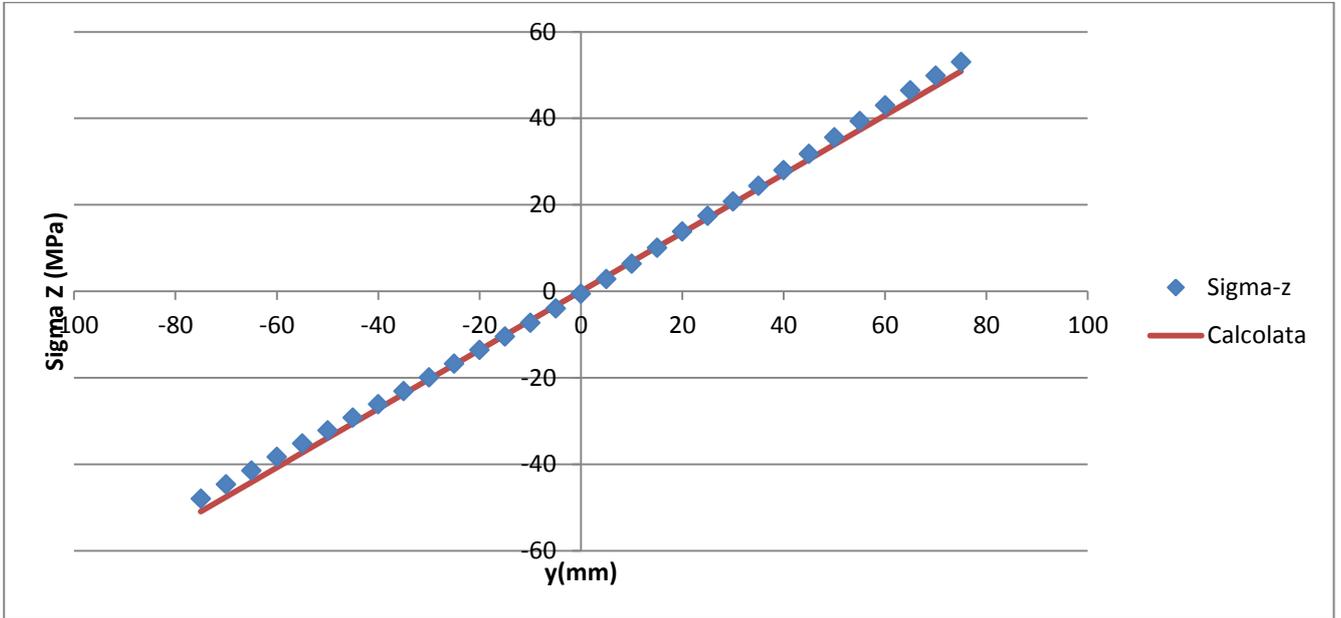
### Tau XZ:

Le tensioni tangenziali previste al FEM tendono essere nulle su tutto il path verticale, ad eccezione dei punti vicini al punto di applicazione della forza F: possiamo ritenere questi valori di picco causati appunto dalla presenza del carico in tale sezione.

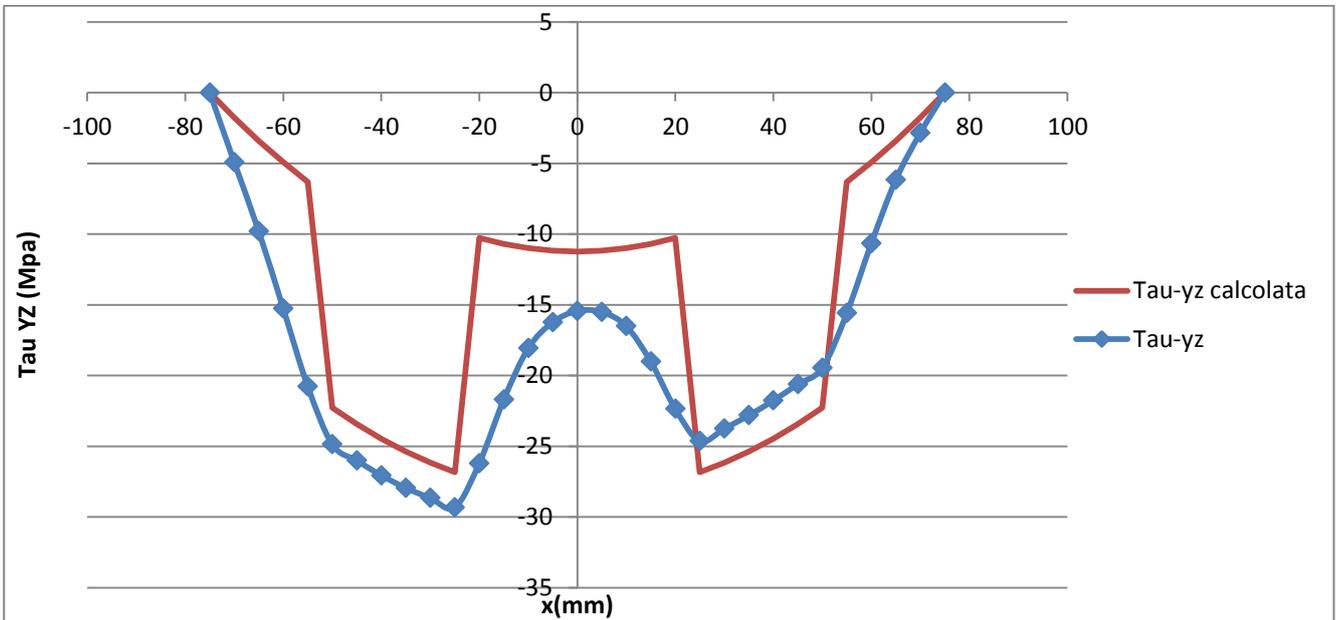
Si può ritenere che la teoria preveda piuttosto bene i risultati del FEM: infatti, per la teoria, le tensioni tangenziali dovrebbero risultare nulle su tutto il path.

## SEZIONE 2.

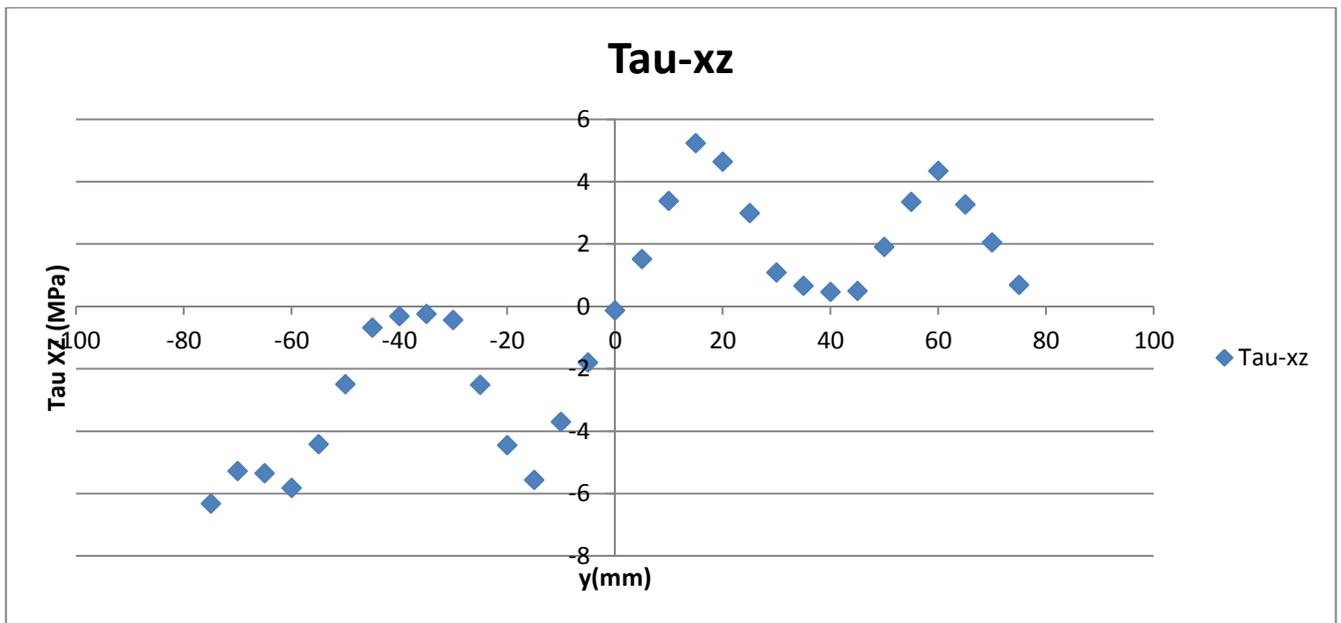
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

L'andamento previsto dalla teoria, come descritto da Navier, è lineare crescente lungo tutto il path 3, questo perché le tensioni normali dipendono dalla ascissa  $y$ , che è la distanza del nodo considerato dall'asse baricentrico  $X$ . Ciò è confermato anche al FEM, con una certa approssimazione, data dal fatto che ci troviamo a una sezione comunque abbastanza vicina al punto di applicazione del carico. In ogni caso, il discostamento della formulazione analitica dal FEM non supera i 2 MPa.

### Tau YZ:

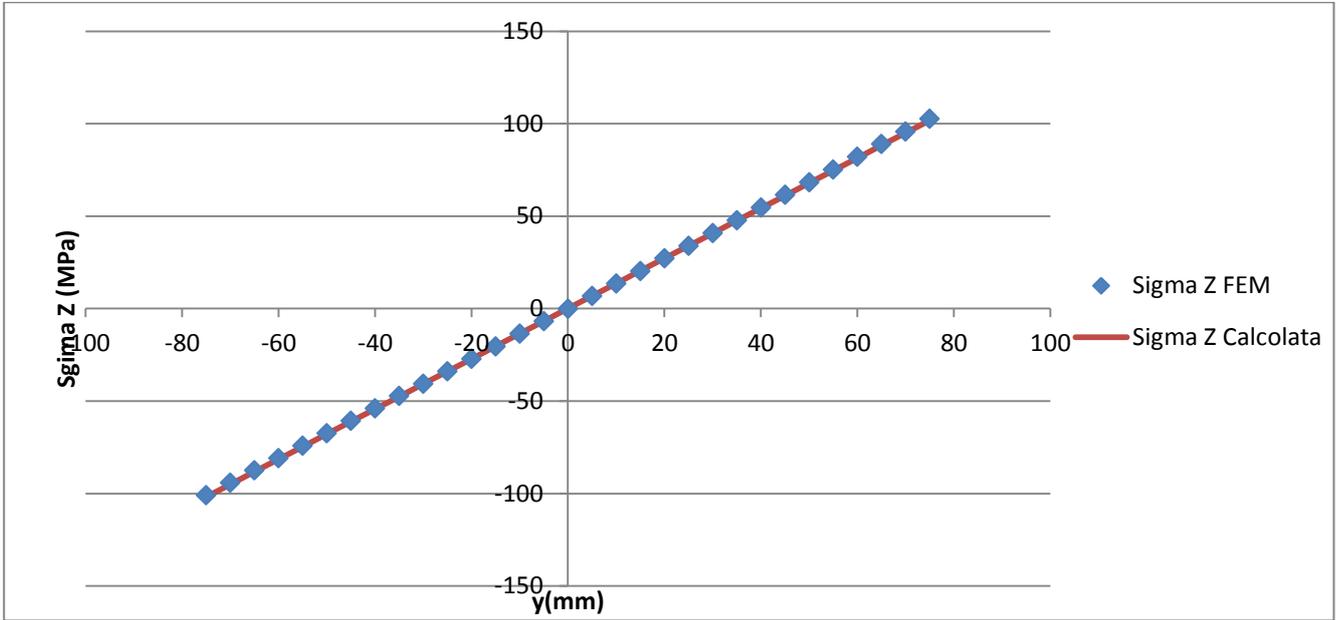
Si nota al FEM una incongruenza molto evidente rispetto ai risultati teorici, e ciò è essenzialmente dovuto al fatto che ci troviamo in una sezione ancora vicina rispetto al punto di applicazione del carico, e quindi risentiamo degli effetti di bordo. Si nota in particolare un andamento asimmetrico, che in certi tratti sovrastima il valore teorico e in altri lo sottostima. Si può già notare come la discontinuità nelle tensioni, che avremo applicando Jourawskj, nel passaggio da un spessore ad uno di entità diversa, lungo la sezione, non è ovviamente prevista dal FEM, il quale invece fornisce un andamento più raccordato delle tensioni. Tale osservazione è resa ancora più valida nelle sezioni successive, e ne verrà spiegata anche la relativa causa.

### Tau XZ:

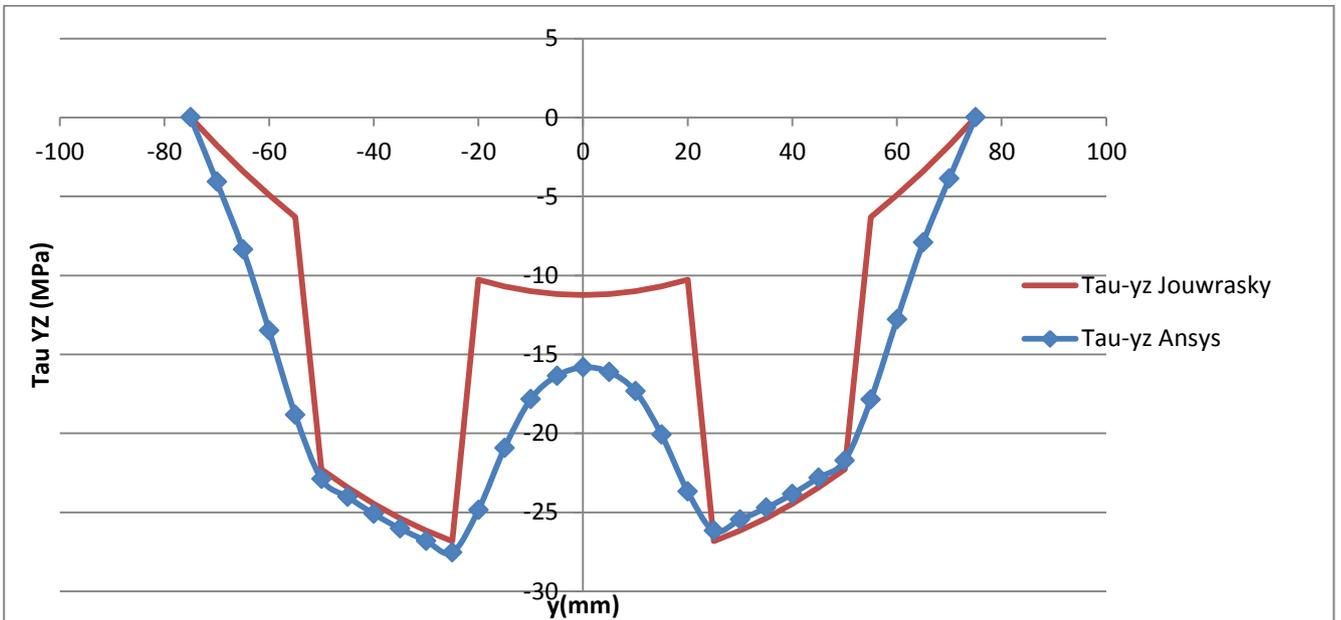
L'andamento sarà meglio spiegato nella sezione successiva, dove si vedrà con maggior chiarezza il significato delle conclusioni ricavate, dato che i risultati teorici sono pienamente in disaccordo con il FEM.

### SEZIONE 3.

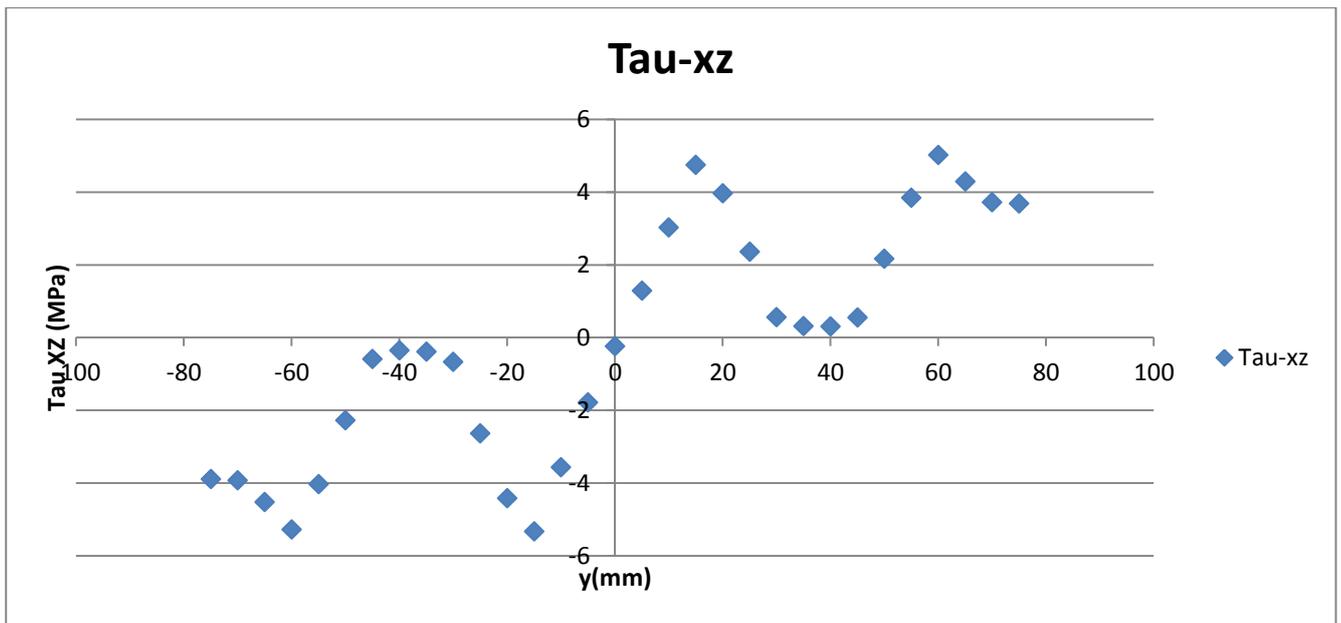
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Si può notare una ottima corrispondenza tra i risultati teorici e FEM: ci troviamo infatti a una opportuna distanza dal punto di applicazione del carico, di conseguenza le linee di tensione sono ben distribuite e risultano parallele rispetto all'asse Z. Tutte le ipotesi che rendono valido Navier sono quindi rispettate e la corrispondenza dei dati rientra in 0,2 MPa di errore.

### Tau YZ:

Si nota una maggiore corrispondenza nei risultati tra FEM e la formulazione analitica di Jourawskj. Tuttavia, come detto prima, le discontinuità presenti nelle tensioni tangenziali, dovute a una variazione di spessore lungo la sezione, non trovano riscontro dal FEM, per una giustificazione di tipo fisico.

Infatti, una delle ipotesi fondamentali che prevede la teoria di Jourawskj è che non vi siano variazioni di spessore, altrimenti si assiste appunto a una discontinuità nel valore delle tensioni tangenziali, che nel reale andamento effettivamente non esiste.

In conclusione, si può notare come i risultati tendano a coincidere solo nella zona compresa tra  $y=+20$  mm e  $y=+45$  mm, e analogamente tra  $y=-20$  mm e  $y=-45$ : tale zona coincide con il tratto verticale compreso tra le ali e il tratto orizzontale superiore e inferiore della sezione, e quindi distante dagli spigoli della sezione.

### Tau XZ:

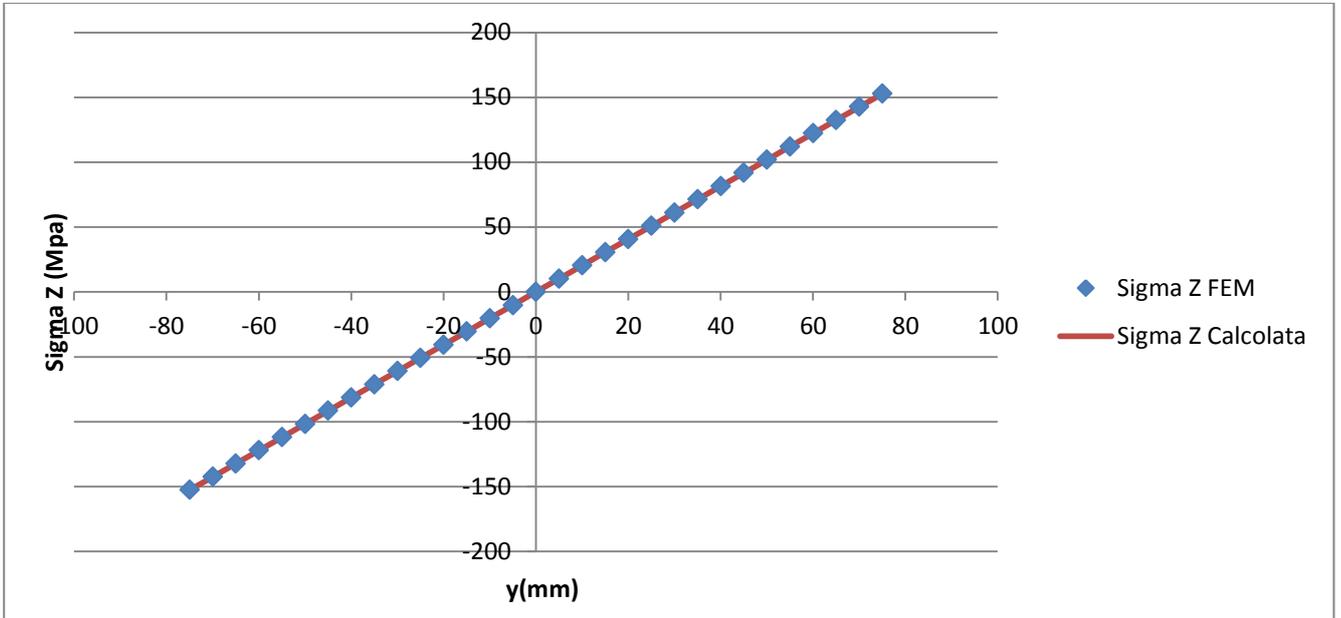
Si può notare un andamento delle tensioni che tende a 0, lungo i due tratti verticali opposti, di ordinata compresa tra  $y=+30$  e  $y=+45$ , e  $y=-30$  e  $y=-45$ , mentre a partire dall'asse baricentrico X, lungo le due ali esterne, si assiste ad un andamento a farfalla, tendenzialmente lineare tra la coordinata y e le tensioni tangenziali. Questo comportamento lo possiamo spiegare come effetto dovuto alla presenza degli spigoli interni, presenti in corrispondenza delle due ali esterne della sezione. Troviamo dimostrazione di tale fatto analizzando il Contour Plot: in corrispondenza della sezione 3, i valori più alti delle tensioni tangenziali XZ si hanno proprio in corrispondenza di tali spigoli, e inducono uno stato tensionale che la teoria non può prevedere, se non appunto lungo i tratti ove le linee di tensione non risentano dell'influenza della presenza di questi spigoli.

A partire dalla ordinata  $y=+45$  le tensioni tangenziali tornano ad aumentare, ancora secondo un andamento lineare: ciò è dovuto al progressivo avvicinamento allo spigolo interno della sezione, che influisce, come detto prima, sul normale andamento delle linee di tensione.

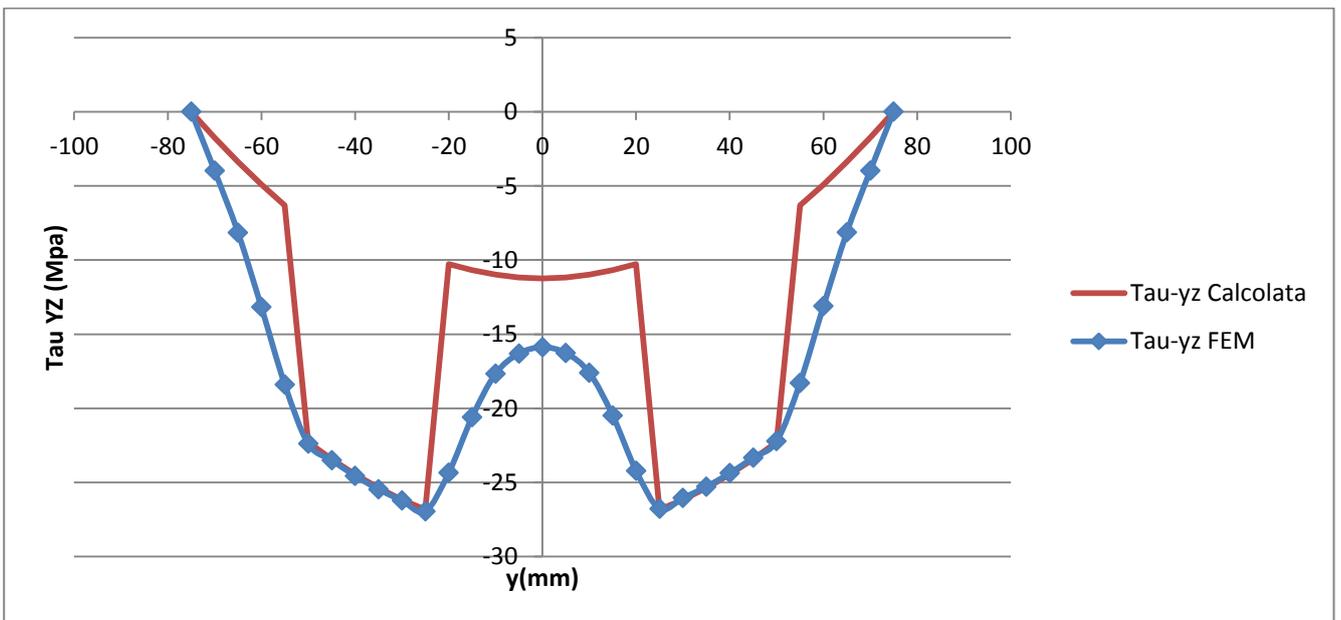
Le stesse considerazioni valgono per le ordinate negative, ossia al di sotto dell'asse baricentrico X. L'andamento delle tensioni teoriche non è stato rappresentato per il semplice motivo che questo si discosta molto lontanamente dal FEM, e quindi non ha senso indicare il grafico teorico.

## SEZIONE 4.

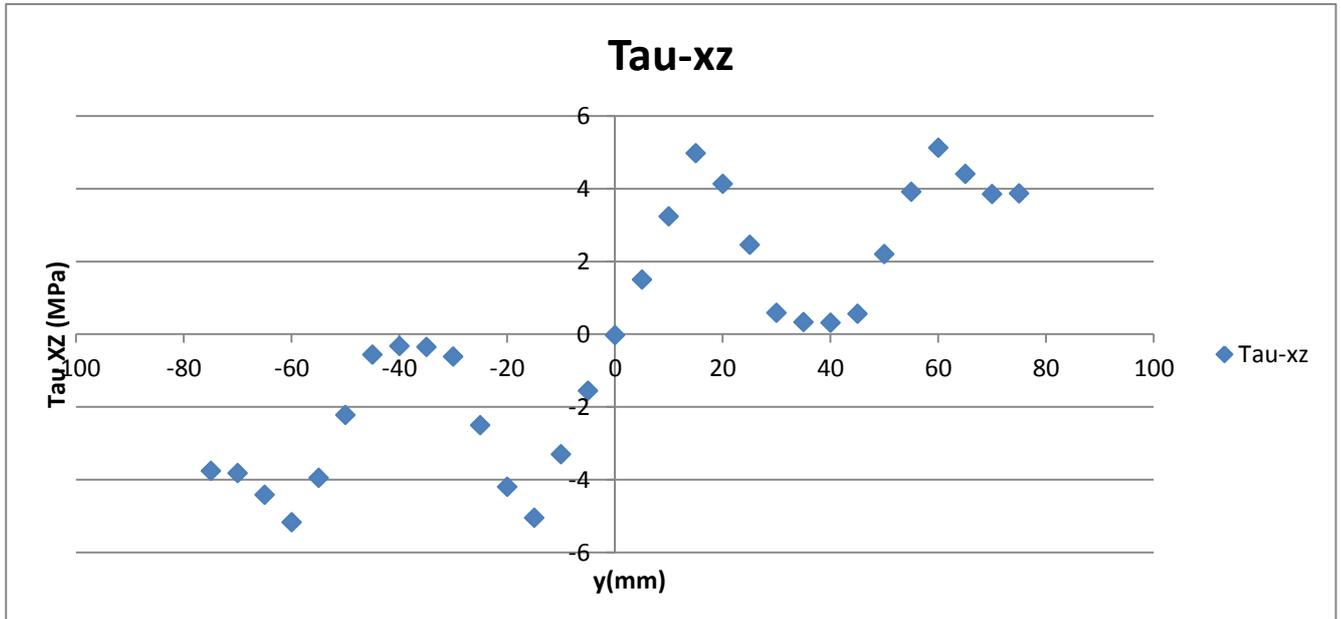
Sigma Z:



Tau YZ:



Tau XZ:



Sigma Z:

Si può notare una ottima corrispondenza tra i risultati teorici e FEM: ci troviamo infatti ad una opportuna distanza dal punto di applicazione del carico, di conseguenza le linee di tensione sono ben distribuite e risultano parallele rispetto all'asse Z. Tutte le ipotesi che rendono valido Navier sono quindi rispettate e la corrispondenza dei dati rientra in 0,15 MPa di errore, e quindi con una accuratezza ancora migliore rispetto alla sezione precedente.

### Tau YZ:

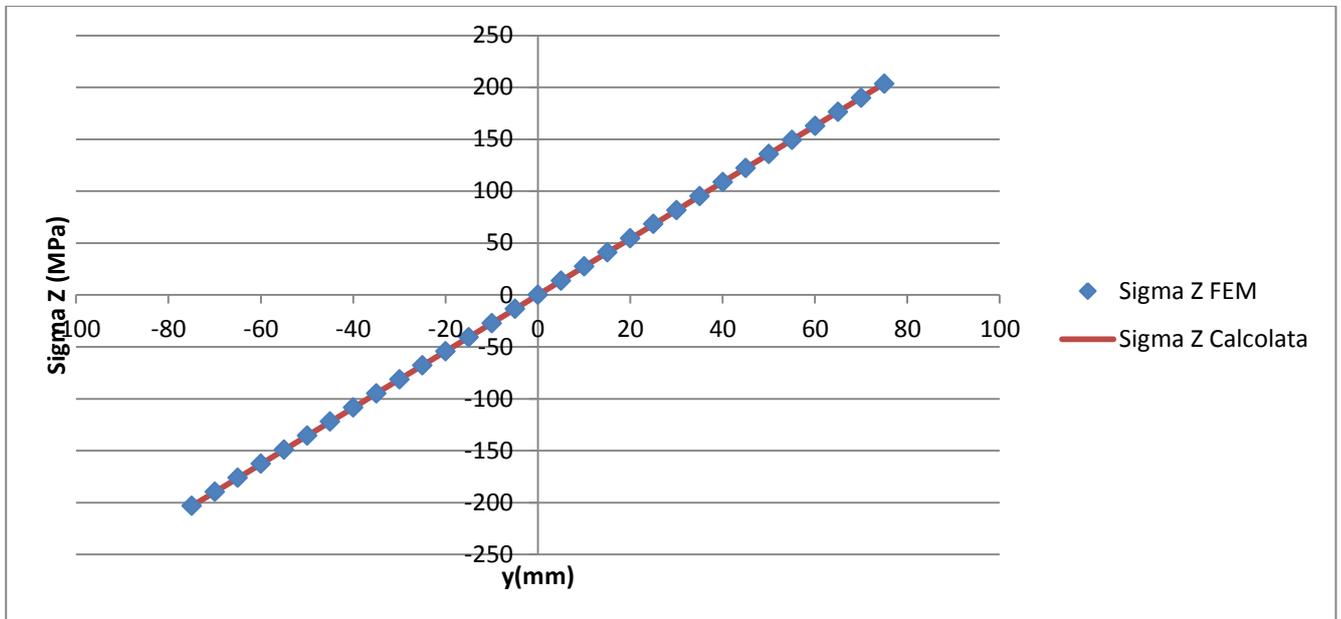
Valgono le stesse identiche considerazioni fatte per la sezione precedente, notando comunque una maggior accuratezza nella previsione dei risultati teorici rispetto a quella fornita dal FEM, sempre al di sotto dei 0,15 MPa, nella regione compresa tra  $y=+20$  mm e  $y=+45$  mm e quella tra  $y=-20$  mm e  $y=-45$  mm.

### Tau XZ:

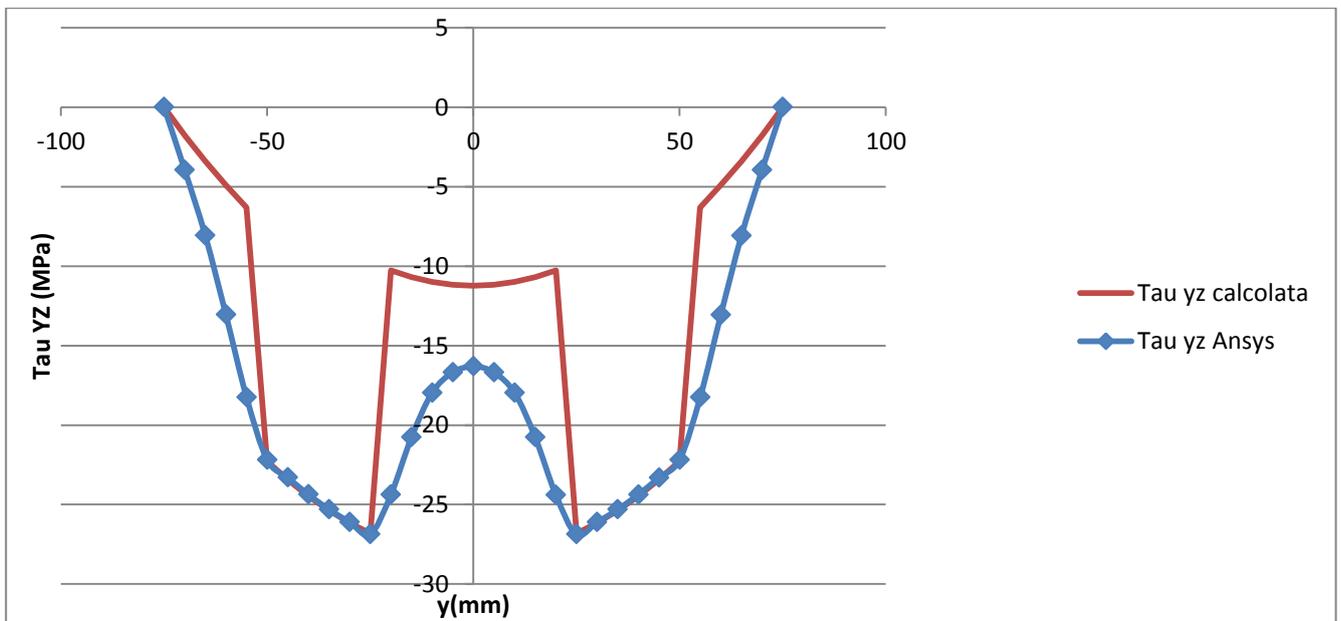
Valgono le stesse considerazioni fatte per la Sezione 3: si può notare come non si notino sostanziali variazioni rispetto a tale sezione.

## SEZIONE 5.

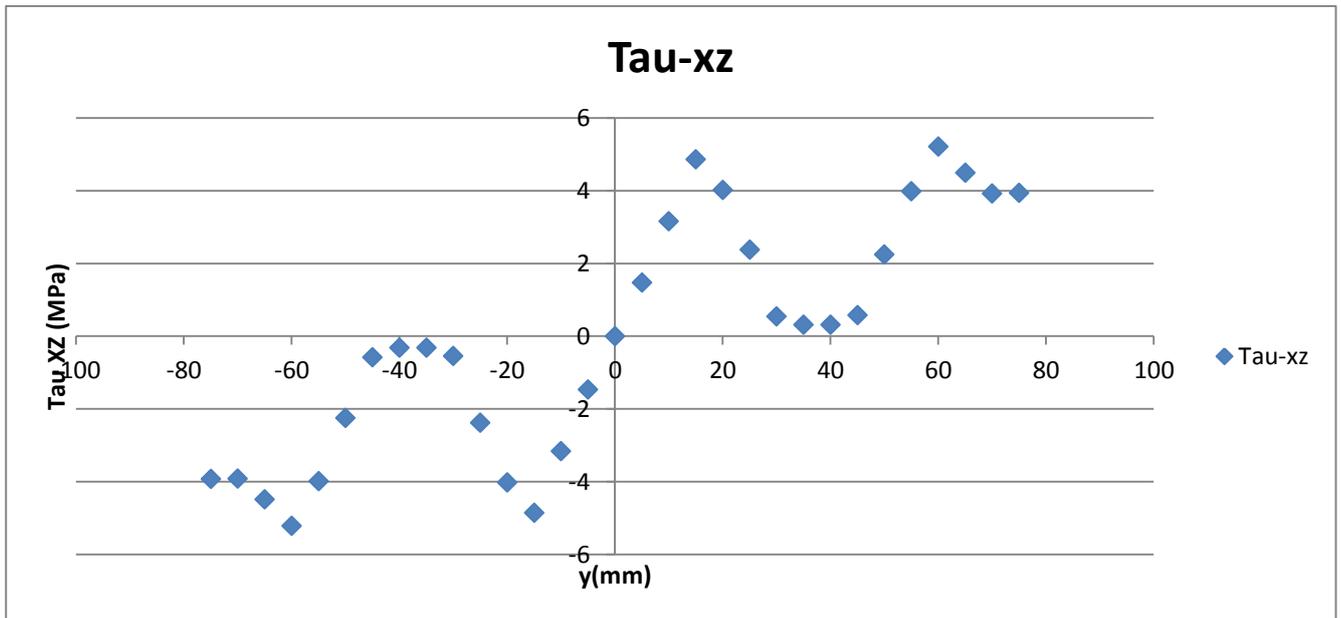
Sigma Z:



Tau YZ:



Tau XZ:



Sigma Z:

La sezione 5 si trova ad una distanza di 560 mm dal punto di applicazione del carico e quindi a 140 mm dall'incastro a terra: si può notare che, essendoci ancora una ottima corrispondenza tra i risultati teorici e quelli previsti dal FEM, la maggiore vicinanza al vincolo, rispetto alla sezione precedente, comunque non pregiudica la applicabilità di Navier.

Tau YZ:

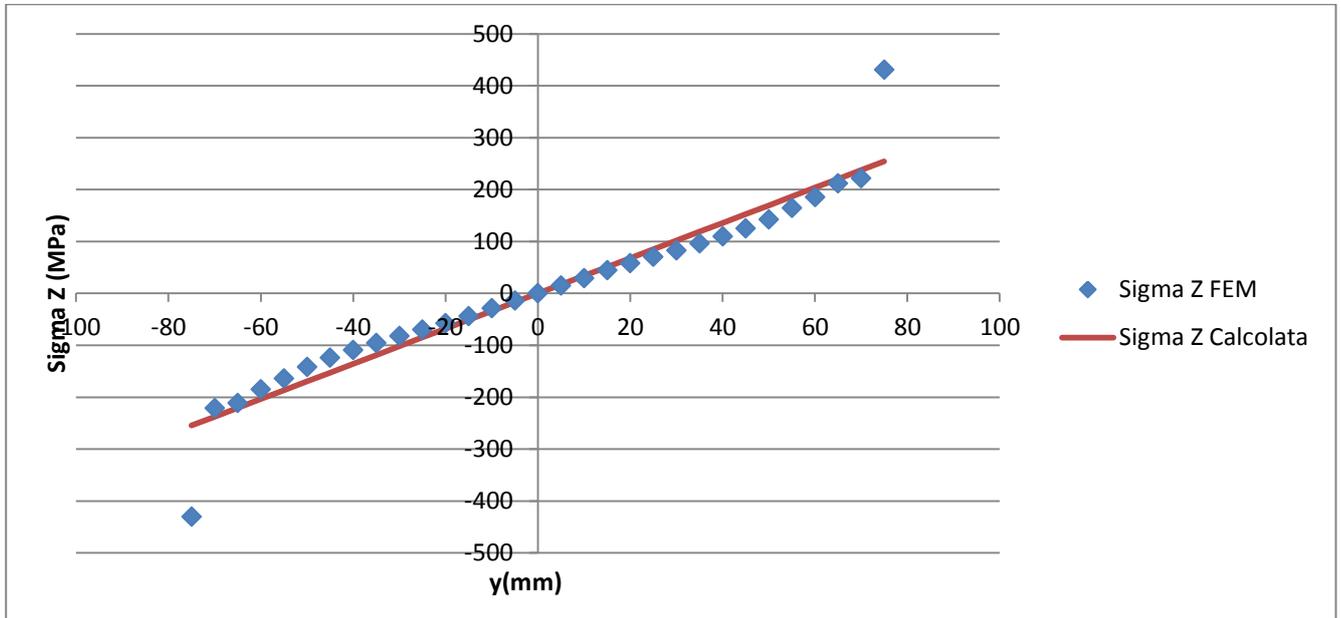
L'andamento previsto dal FEM è molto simile a quello ottenuto per la sezione 4.

Tau XZ:

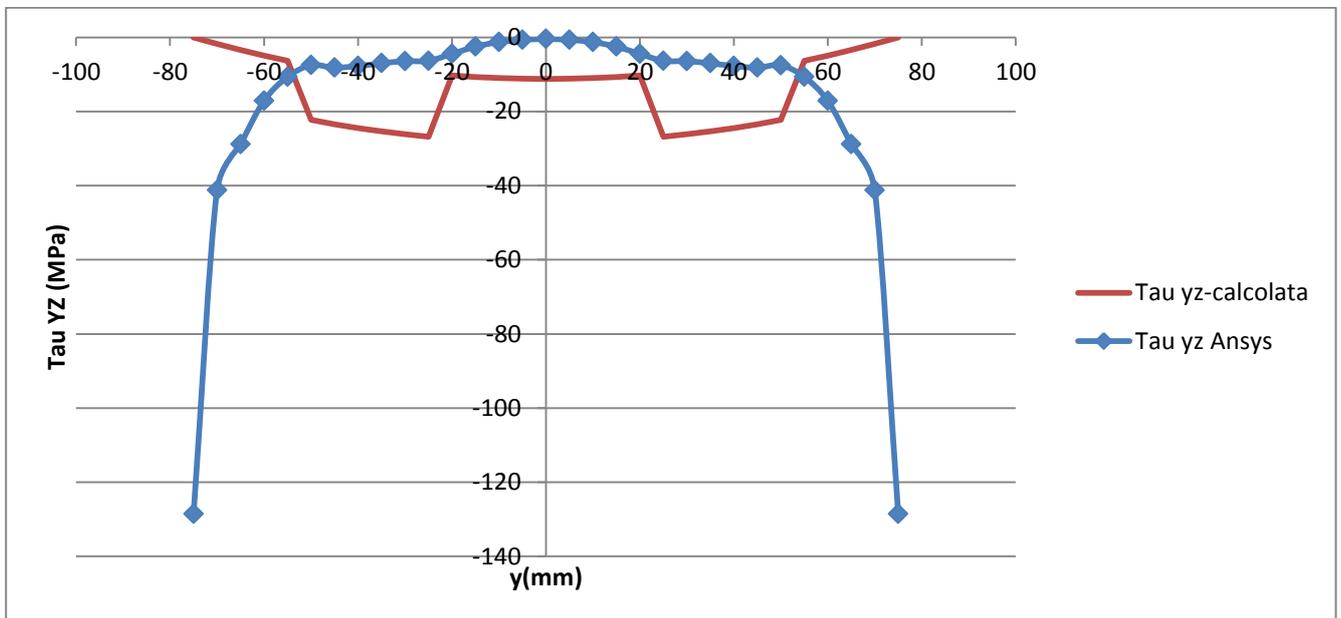
Andamento previsto dal FEM pressoché simile a quello ottenuto per la sezione 4.

## SEZIONE 6.

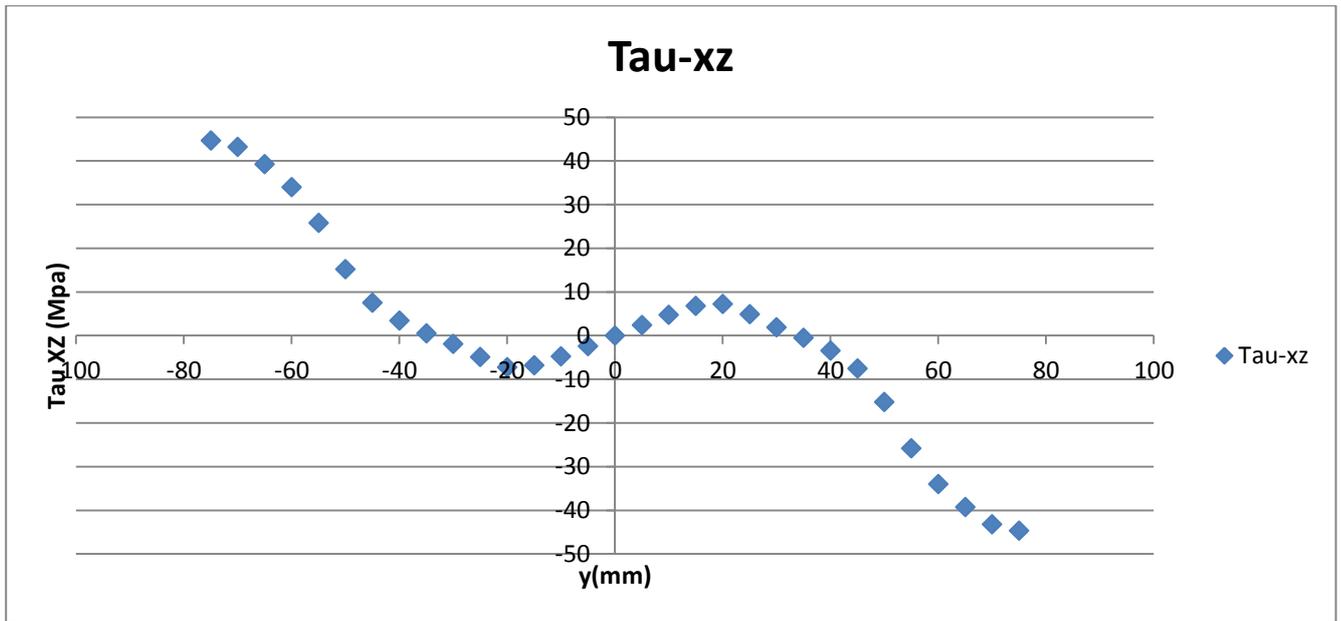
Sigma Z:



Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Si nota come l'andamento previsto dal FEM non sia più perfettamente lineare, come invece stabilirebbe Navier, con picchi nella previsione della tensione normale in corrispondenza dei due punti estremi del path 3: dall'analisi del Contour Plot per la sezione 6, si nota come in corrispondenza degli spigoli esterni più vicini rispetto al path considerato, i valori della tensione normale siano i più alti riscontrabili per la sezione stessa. Possiamo imputare quindi tale fenomeno alla presenza dell'incastro a terra, che comporta sia un andamento delle tensioni non rilevabile con Navier, sia appunto picchi di valore nella tensione normale che la teoria non riuscirebbe prevedere.

### Tau YZ:

L'andamento delle tensioni tangenziali previsto dal FEM è del tutto differente rispetto a quanto visto per le sezioni precedenti. È facile notare come in tale sezione non sia attendibile la teoria di Jourawskj, e ciò è dovuto, come più volte ribadito, alla vicinanza della sezione all'incastro.

Interessante è notare come anche in questo caso si assista a picchi nei valori della tensione tangenziale, in corrispondenza dei due nodi estremi del path 3.

### Tau XZ:

L'andamento delle Tau XZ al FEM, rispetto le sezioni precedenti, è completamente differente: ciò è dovuto alla presenza dell'incastro a terra. Si può notare come i valori raggiunti dalle tensioni tangenziali siano ora molto maggiori, soprattutto nei punti estremi della sezione, e assumano invece valori relativamente bassi nella regione centrale del path.

In sostanza possiamo affermare che applicare Jourawskj per le Tau XZ non ci porta a dedurre neanche lontanamente il reale andamento delle tensioni tangenziali, né in corrispondenza delle sezioni centrali della trave (ad eccezione di quei nodi nei quali i valori teorici effettivamente coincidono con quelli previsti dal FEM), né tantomeno in quelle poste vicino al carico o all'incastro.

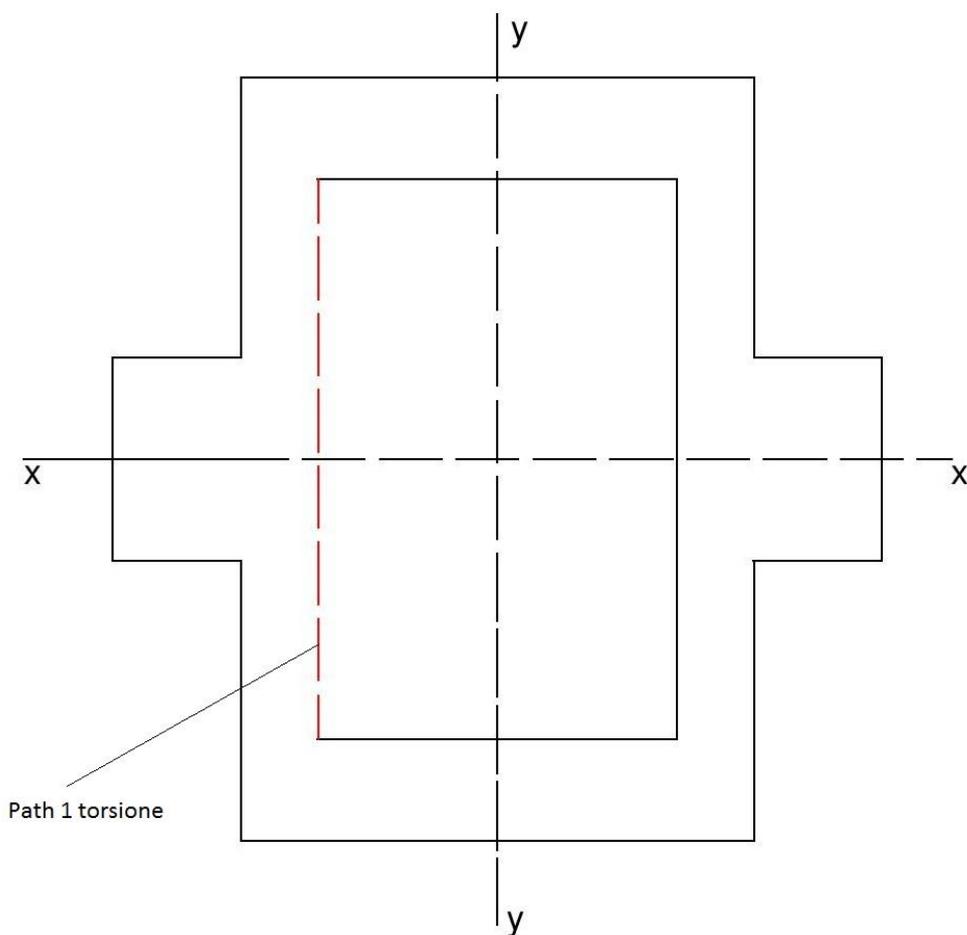
## CAPITOLO 5

### ***Presentazione e analisi dei risultati: torsione.***

Si procede ora all'esposizione dei risultati ottenuti dall'analisi al FEM, derivanti dall'applicazione di una sollecitazione di torsione, di modulo:

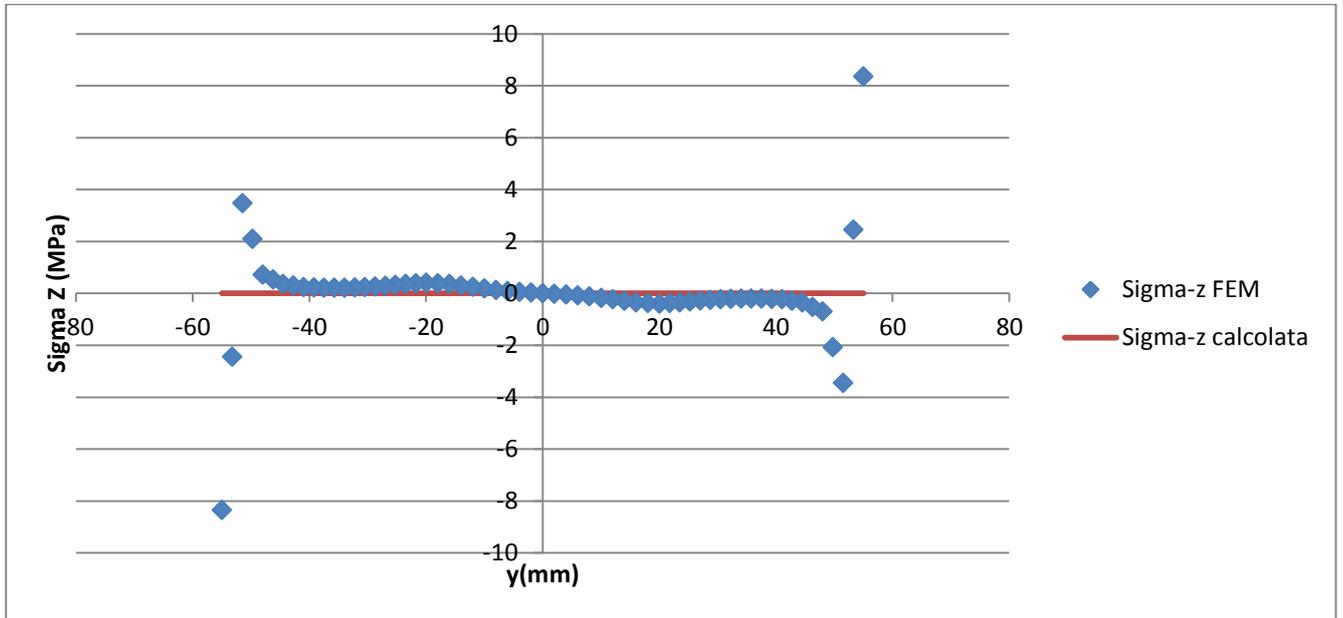
$M_t = 1000000 \text{ N}\cdot\text{mm}$ ;

#### **5.1. Path 1.**

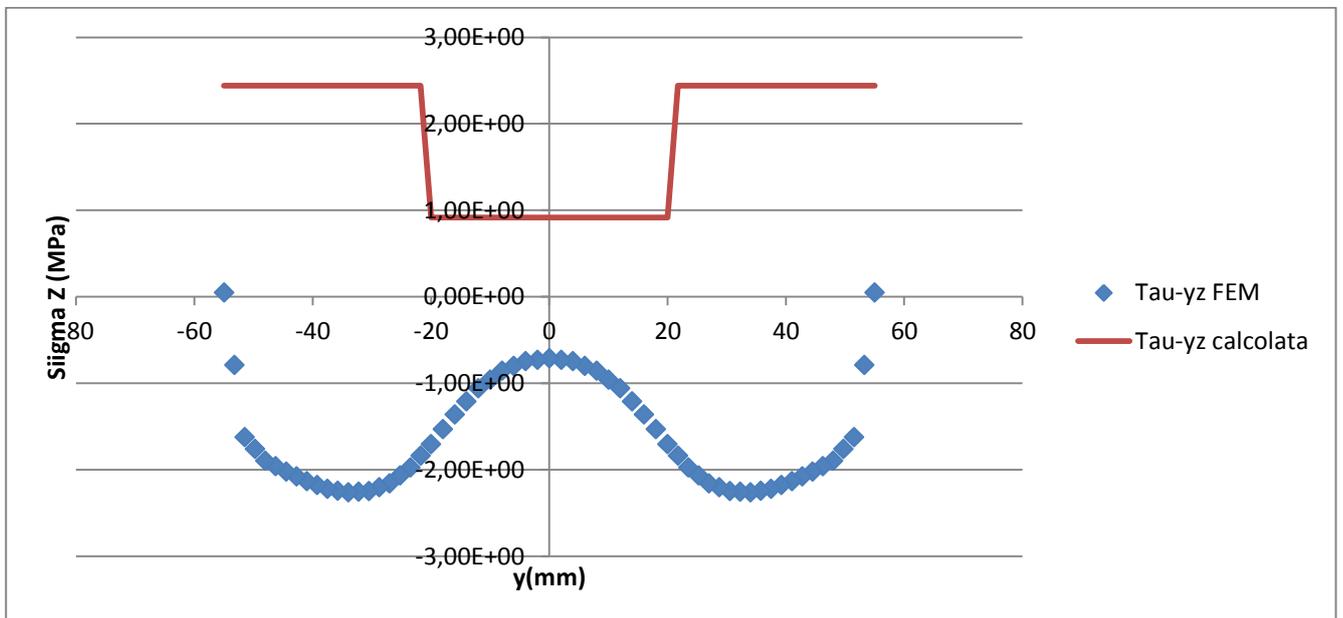


# SEZIONE 1.

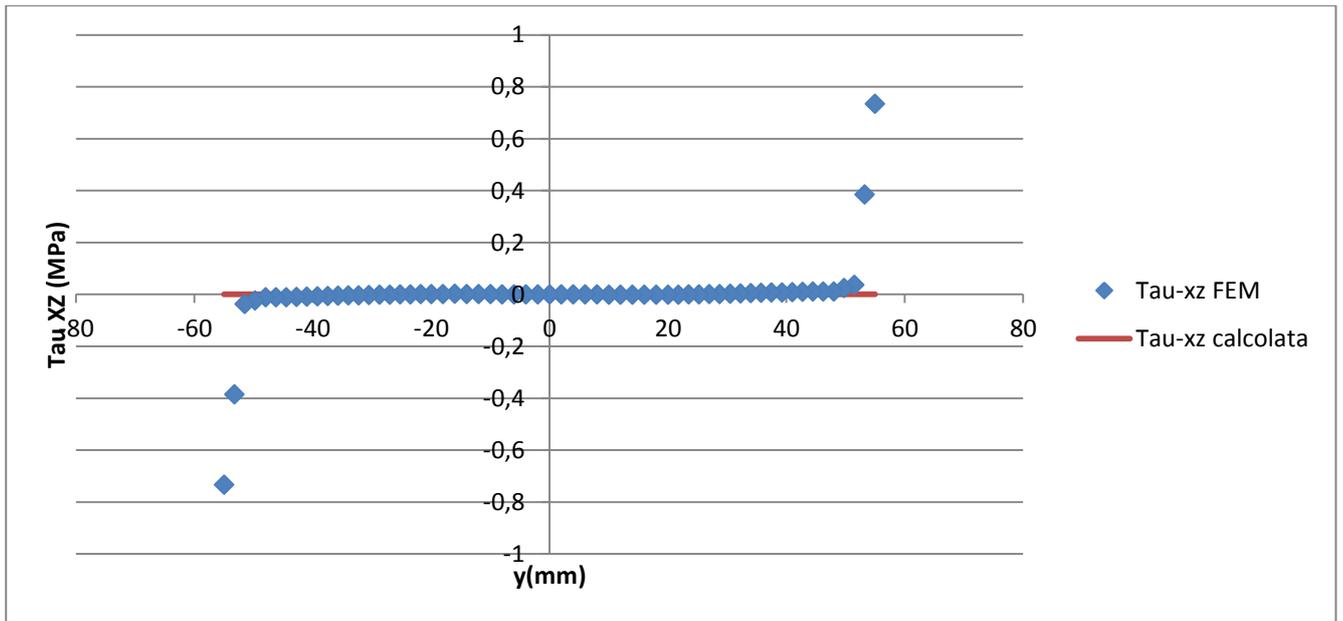
## Sigma Z:



## Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

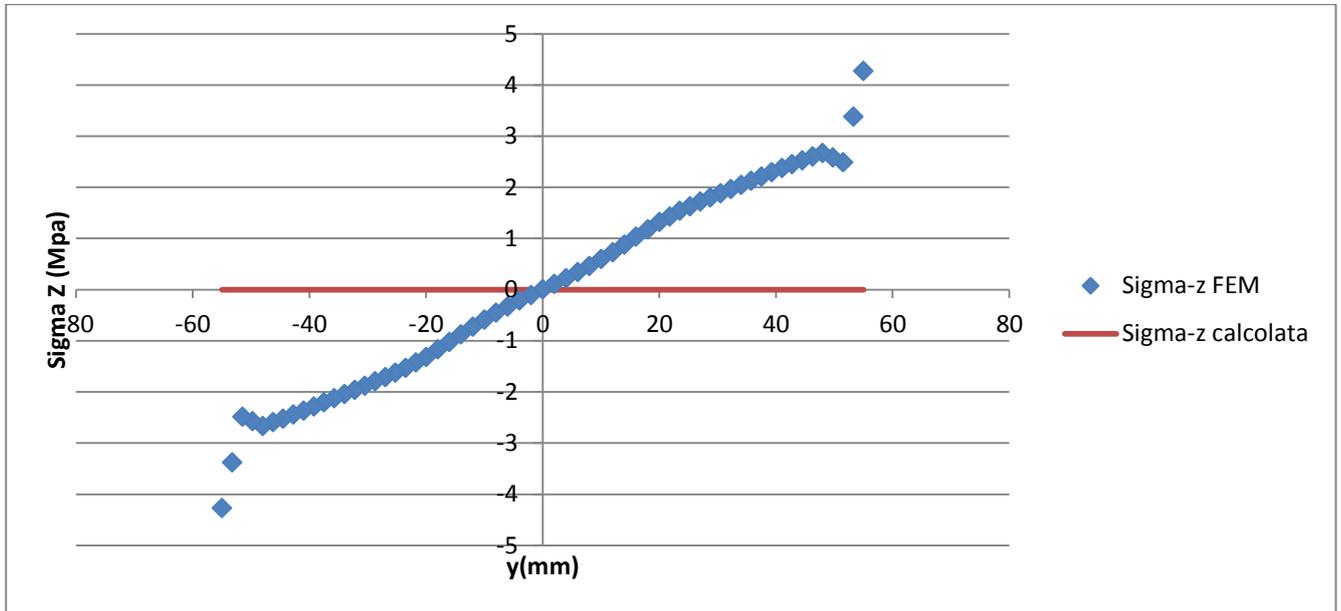


Contour Plot Tau XZ:

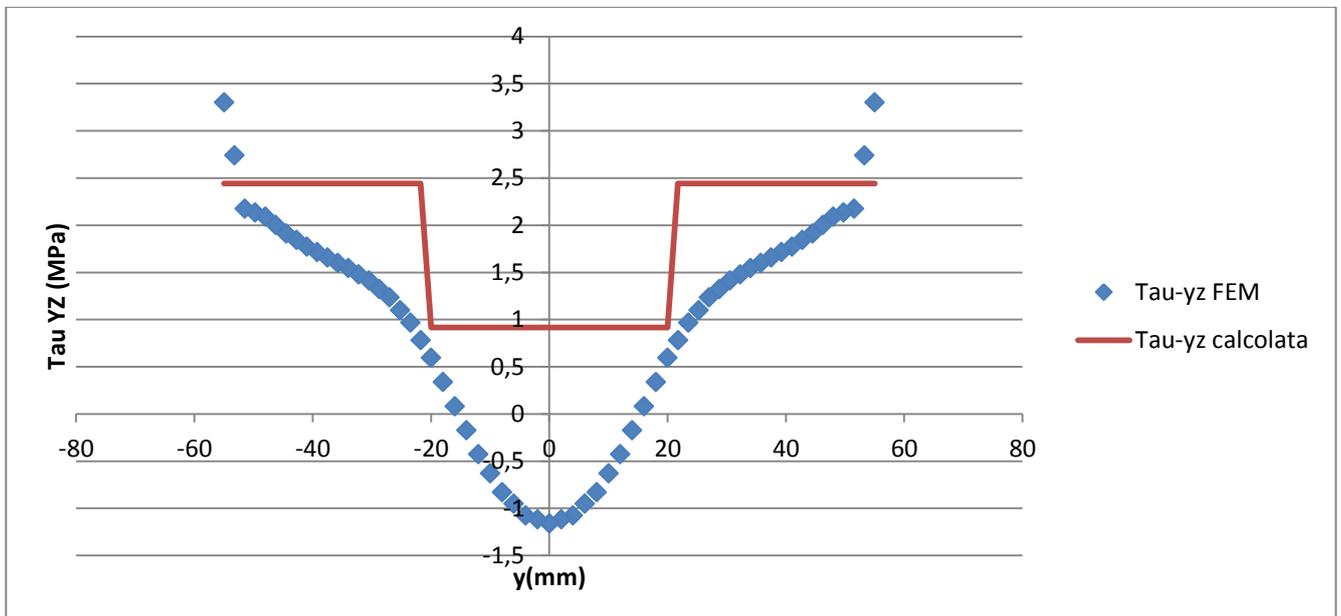


## SEZIONE 2.

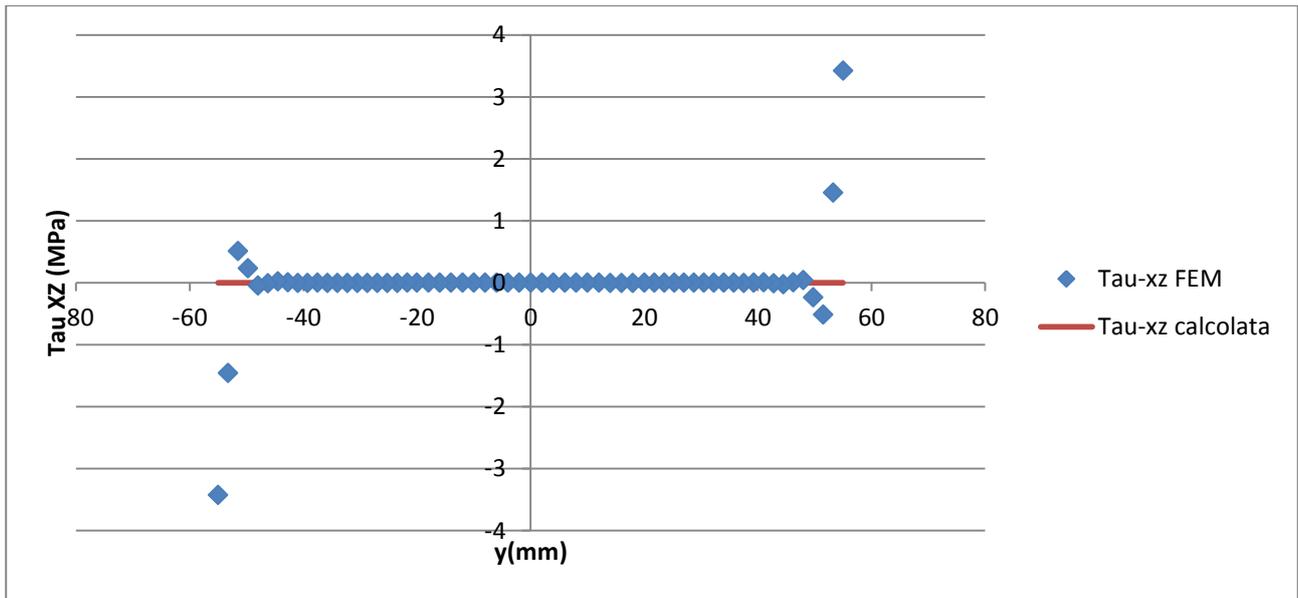
Sigma Z:



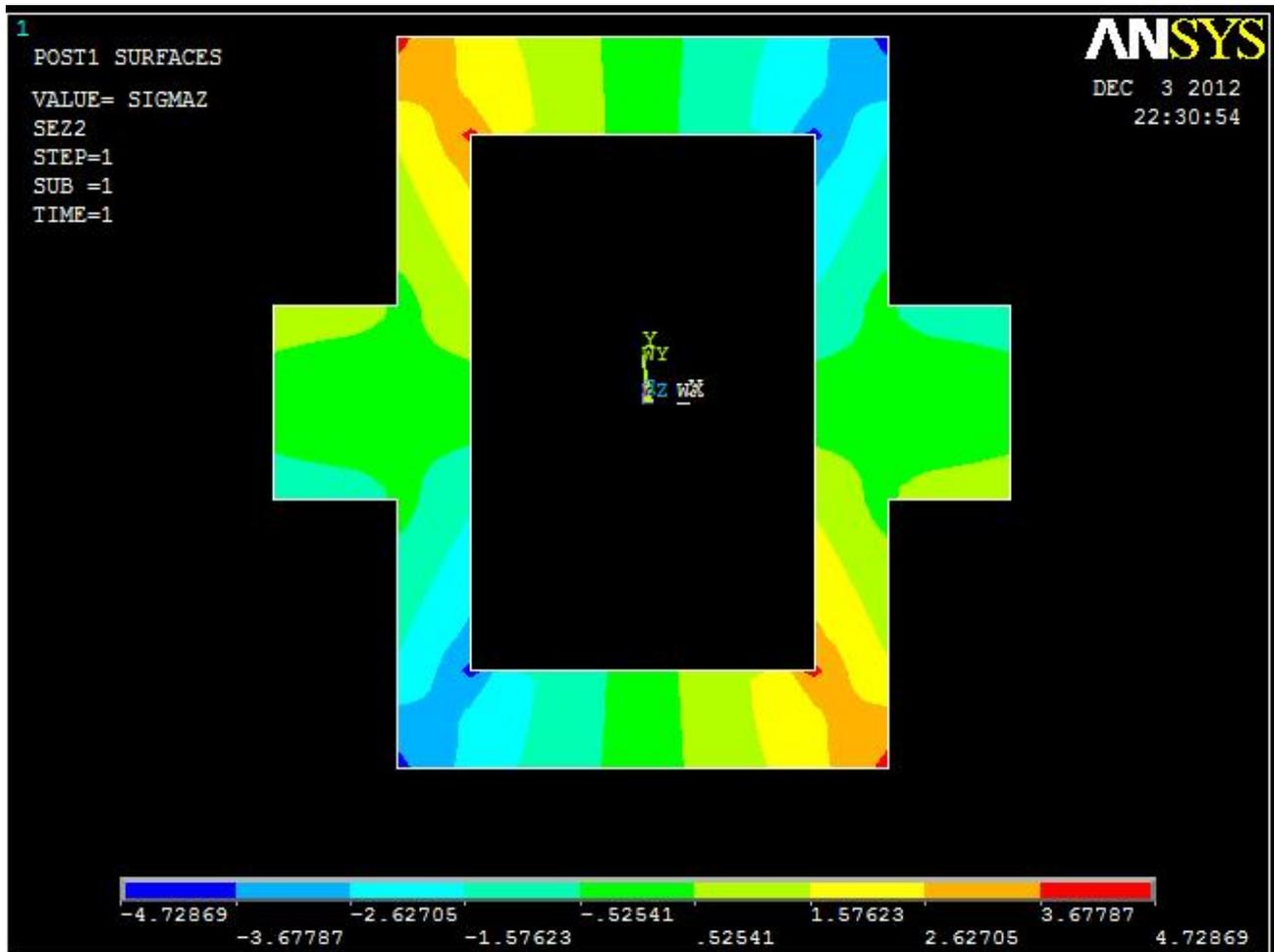
Tau YZ:



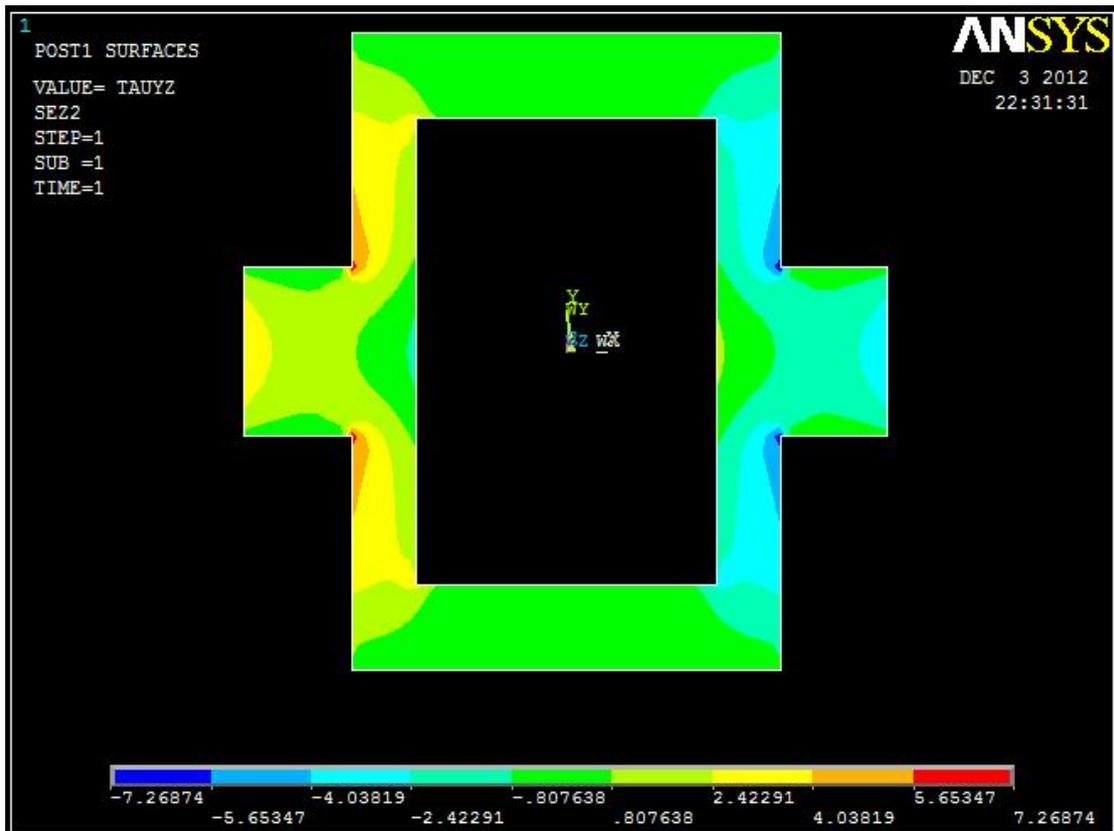
### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

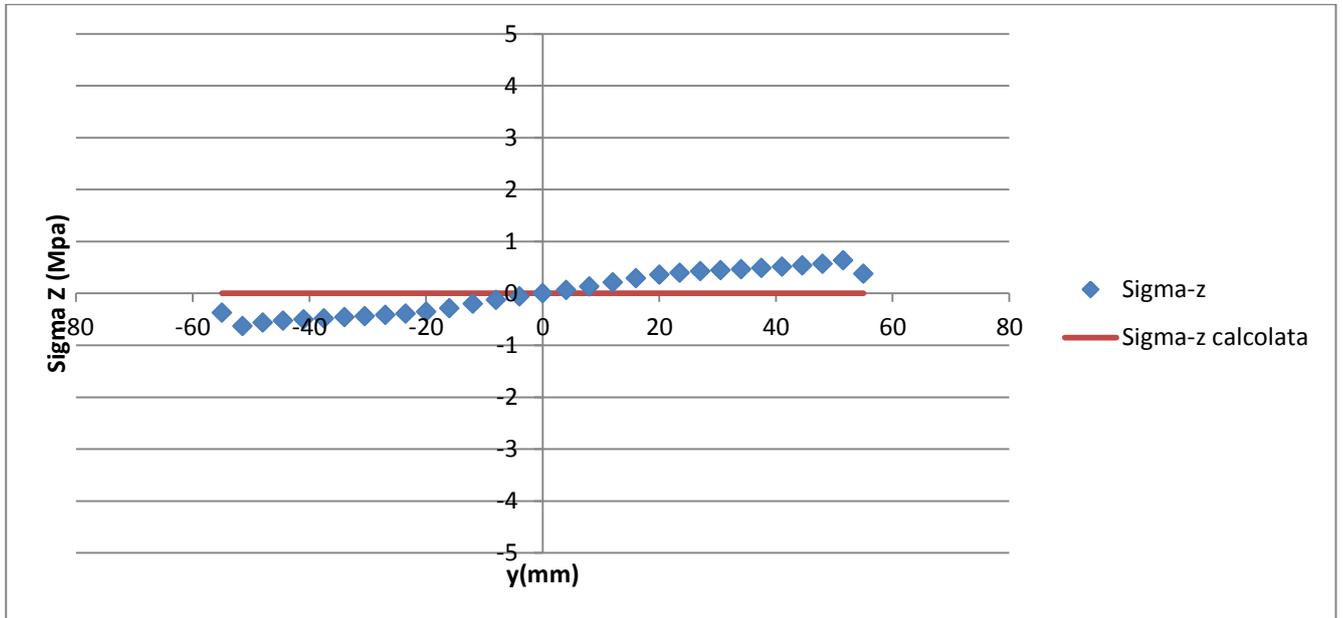


Contour Plot Tau XZ:

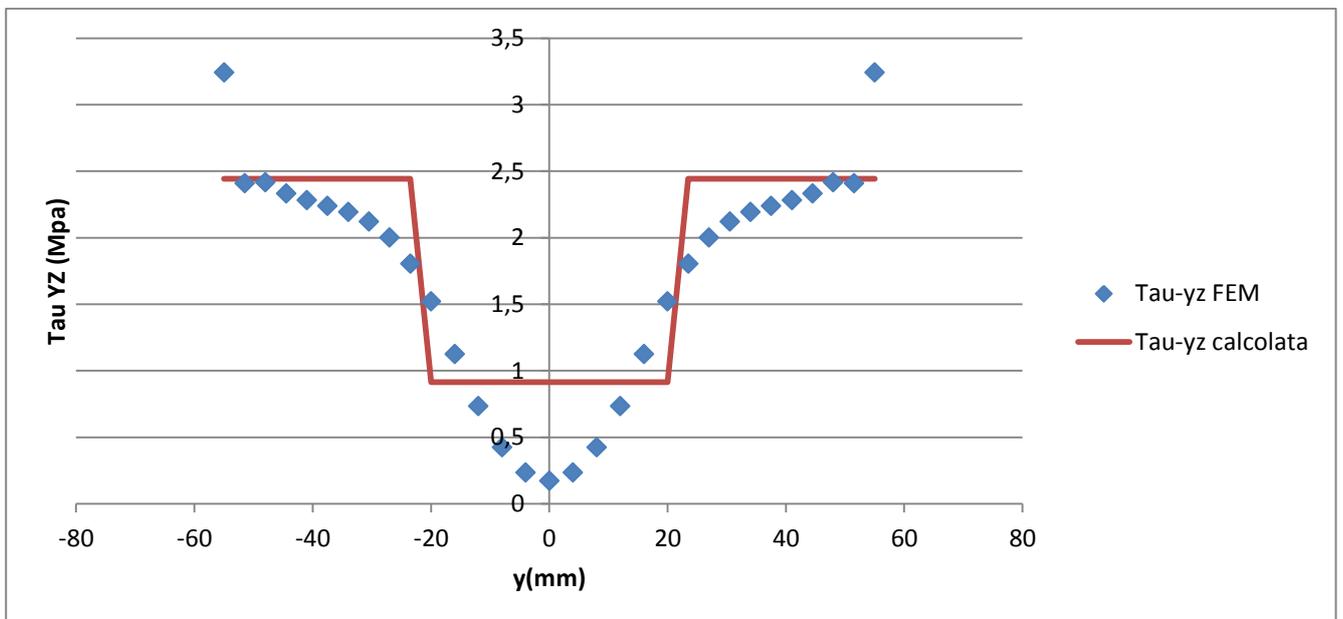


### SEZIONE 3.

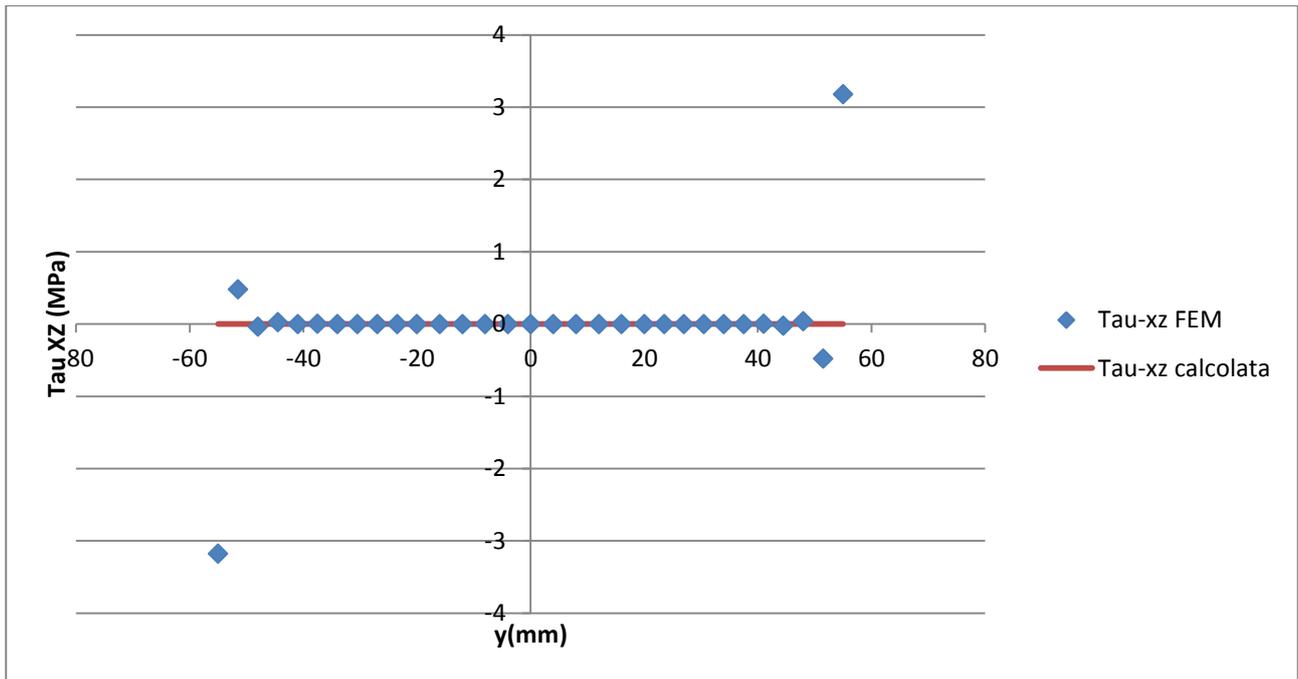
#### Sigma Z:



#### Tau YZ:



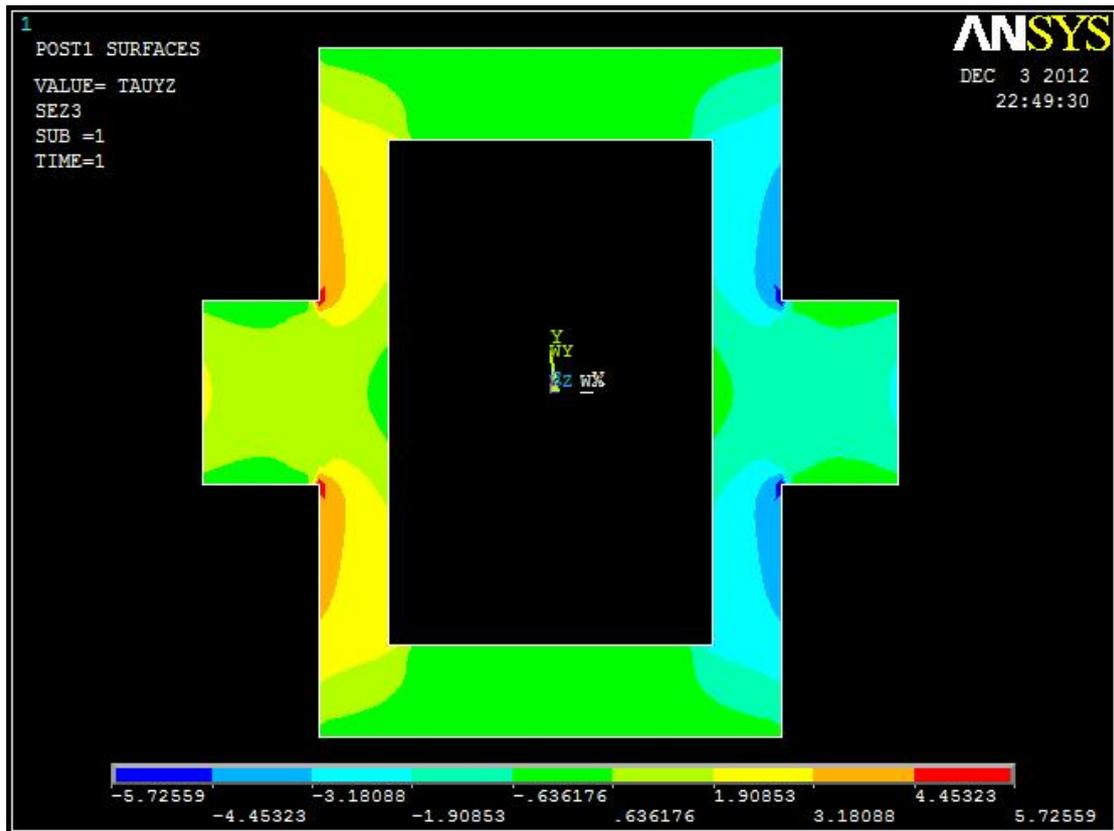
### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

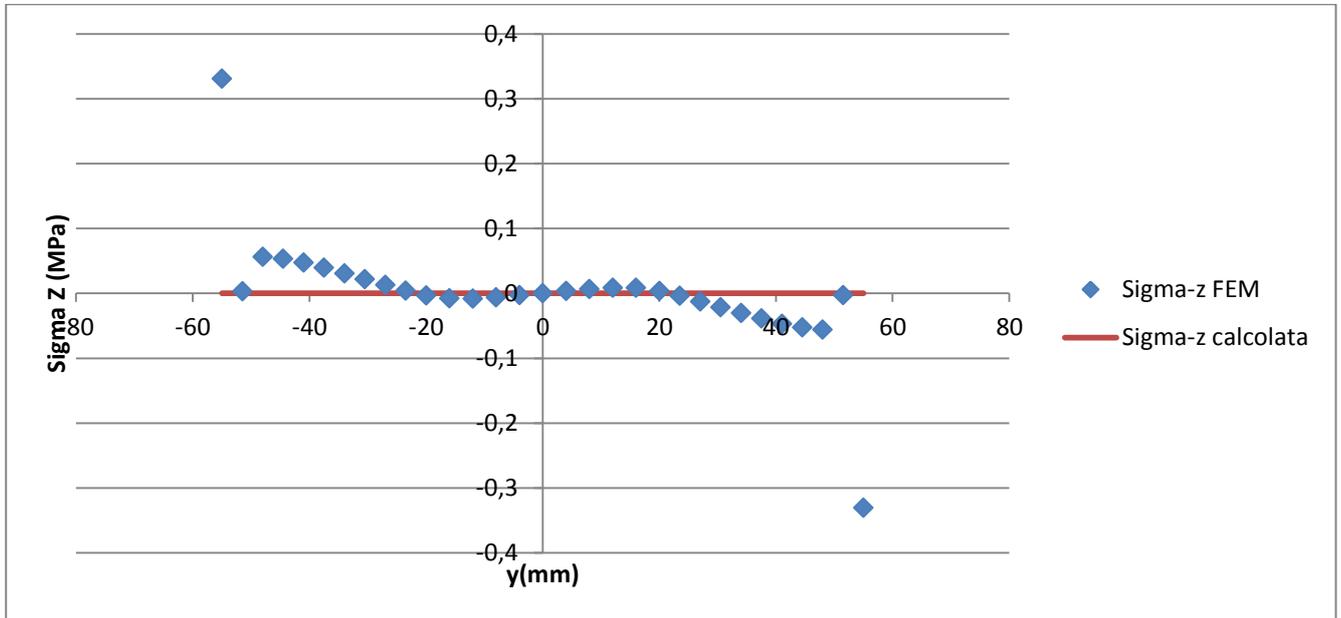


Contour Plot Tau XZ:

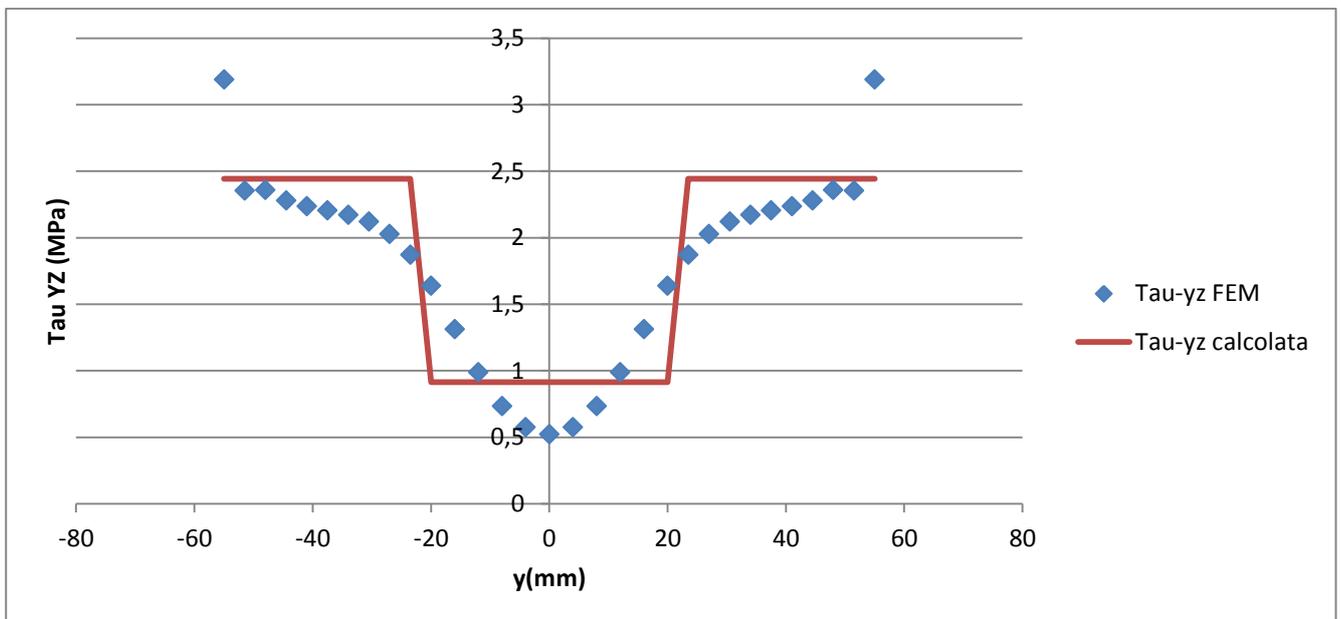


## SEZIONE 4.

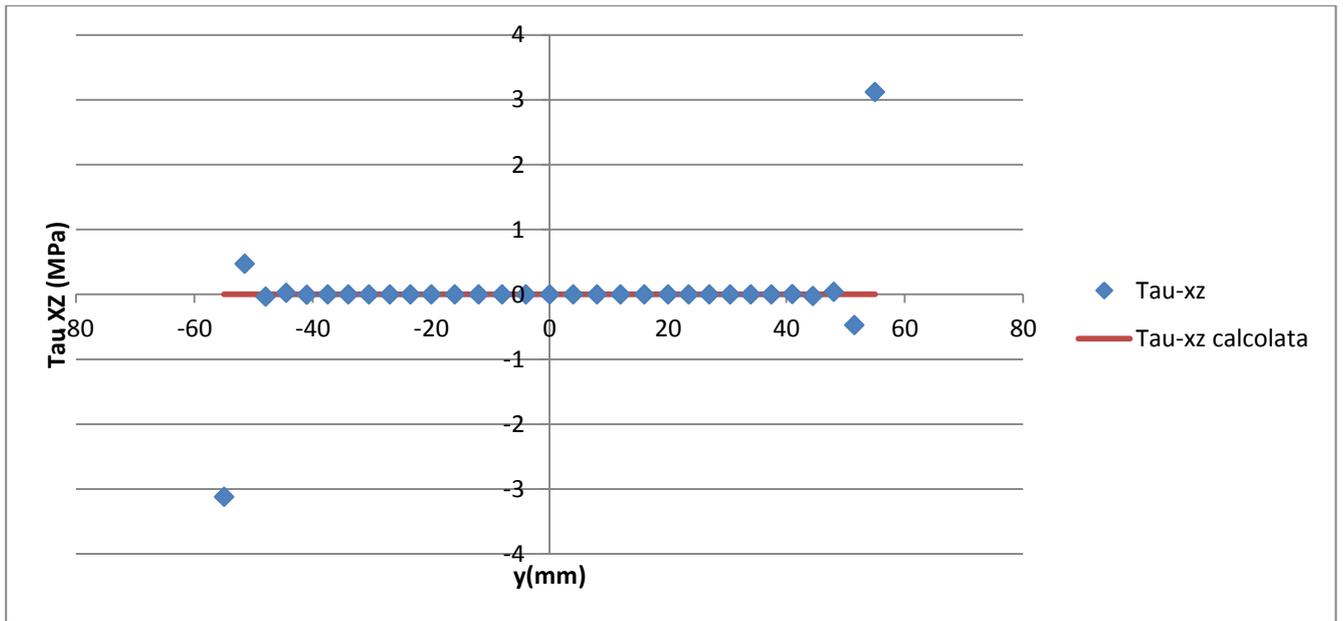
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

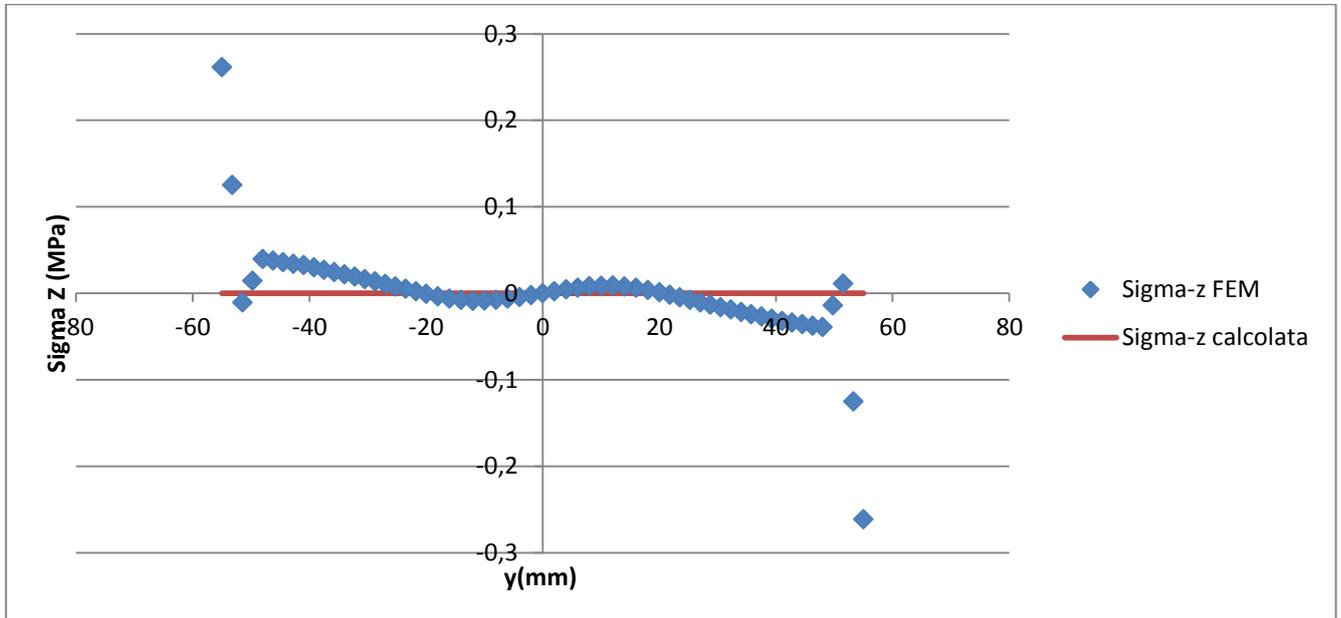


Contour Plot Tau XZ:

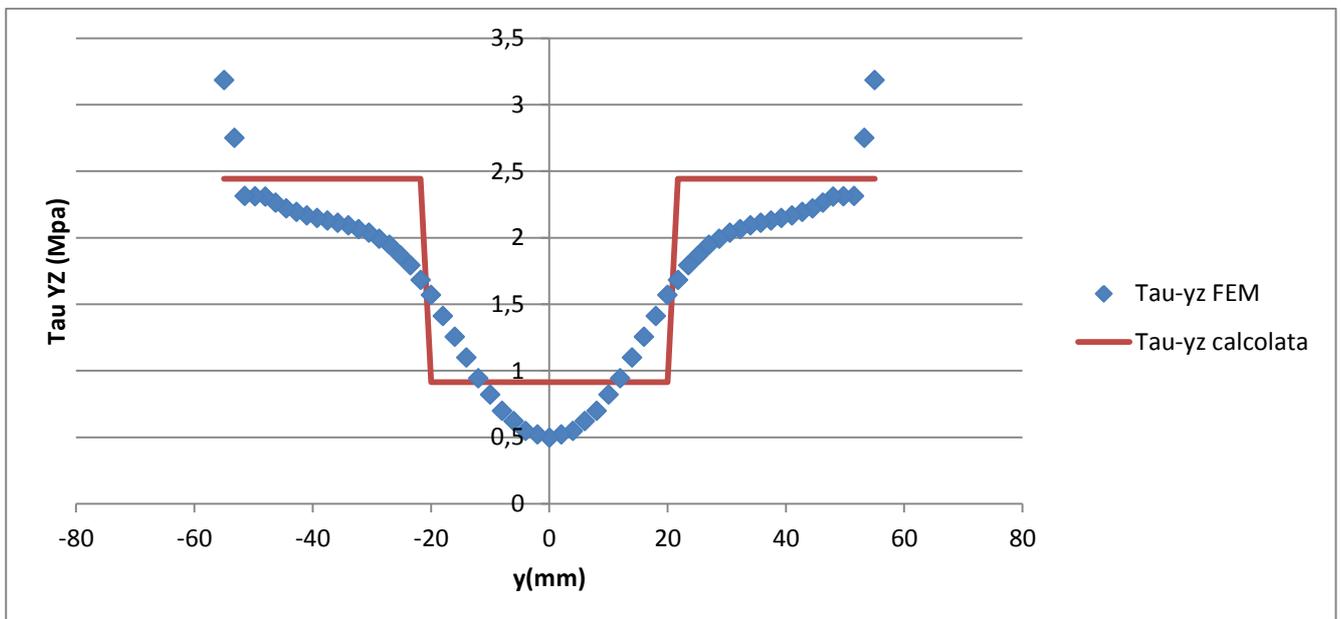


## SEZIONE 5.

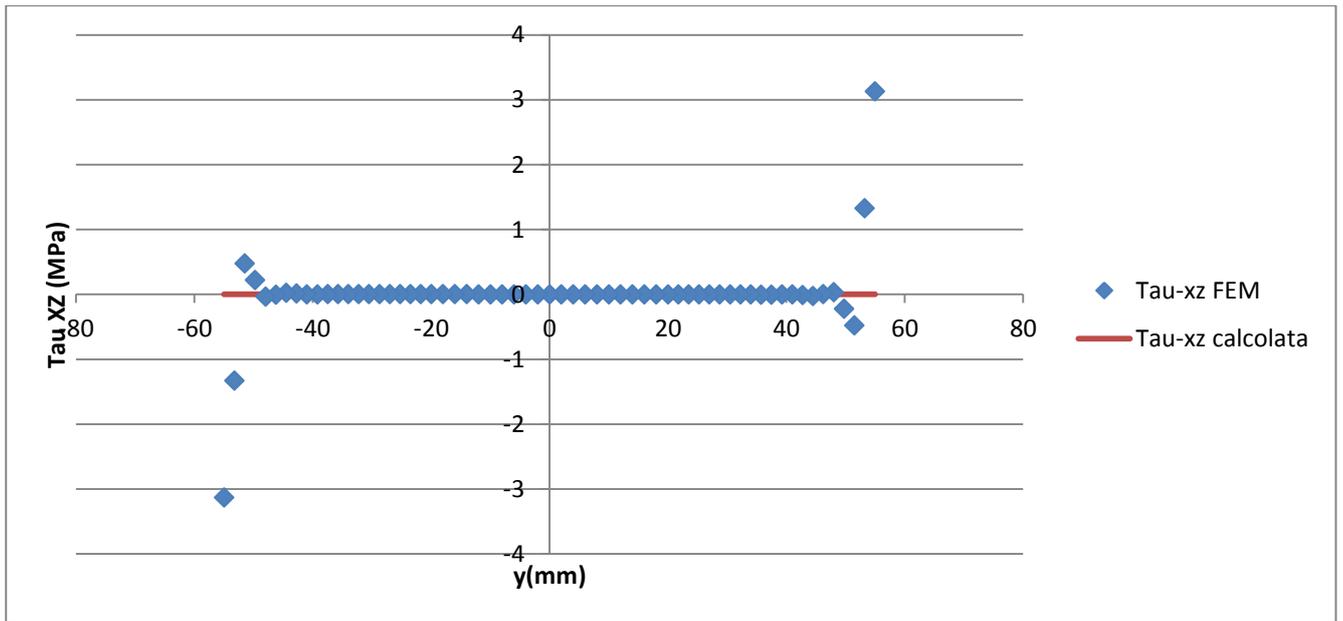
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:

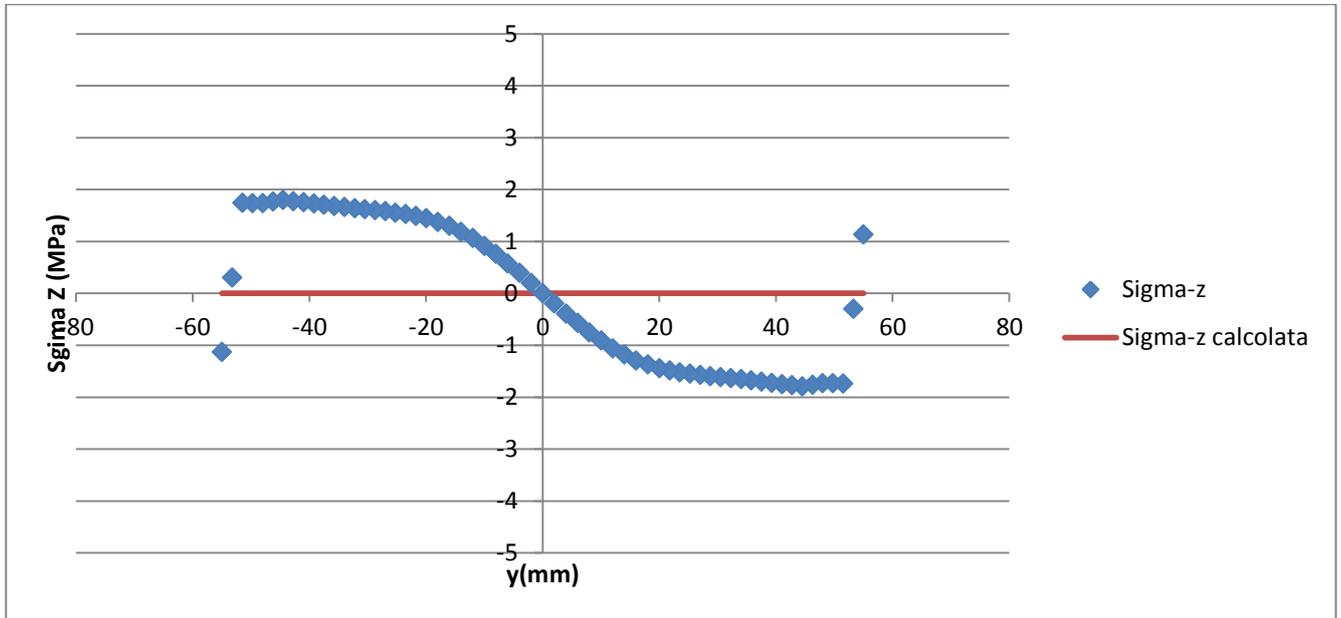


Contour Plot Tau XZ:

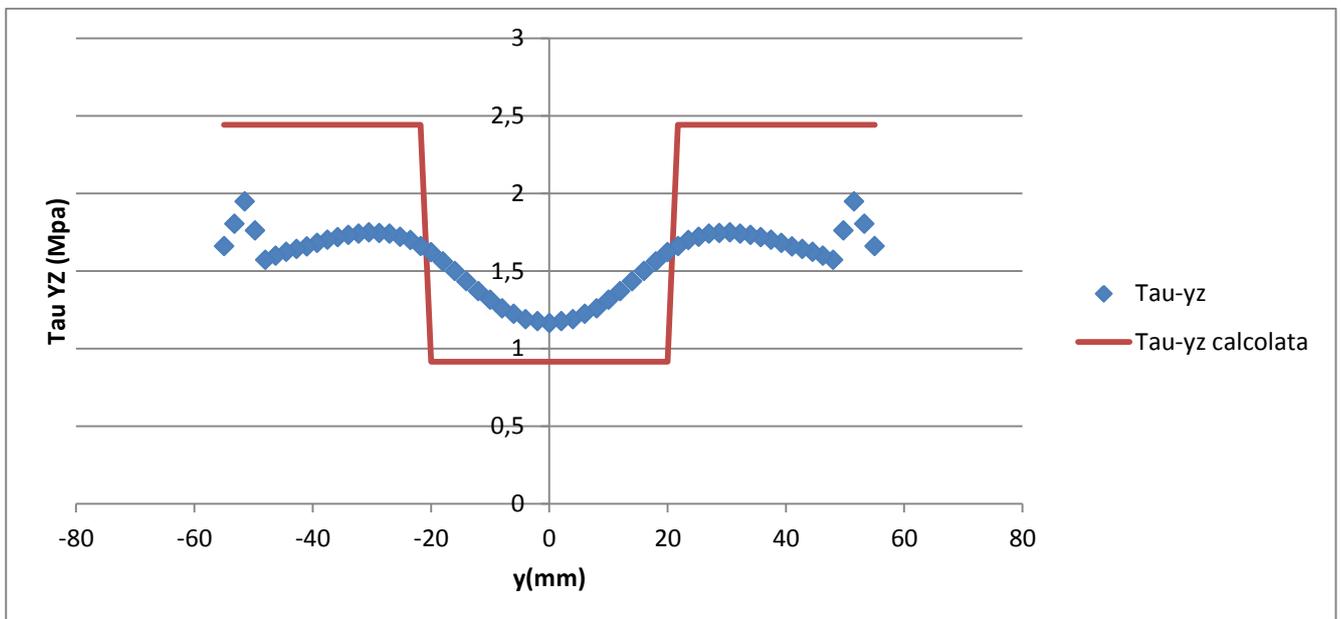


## SEZIONE 6.

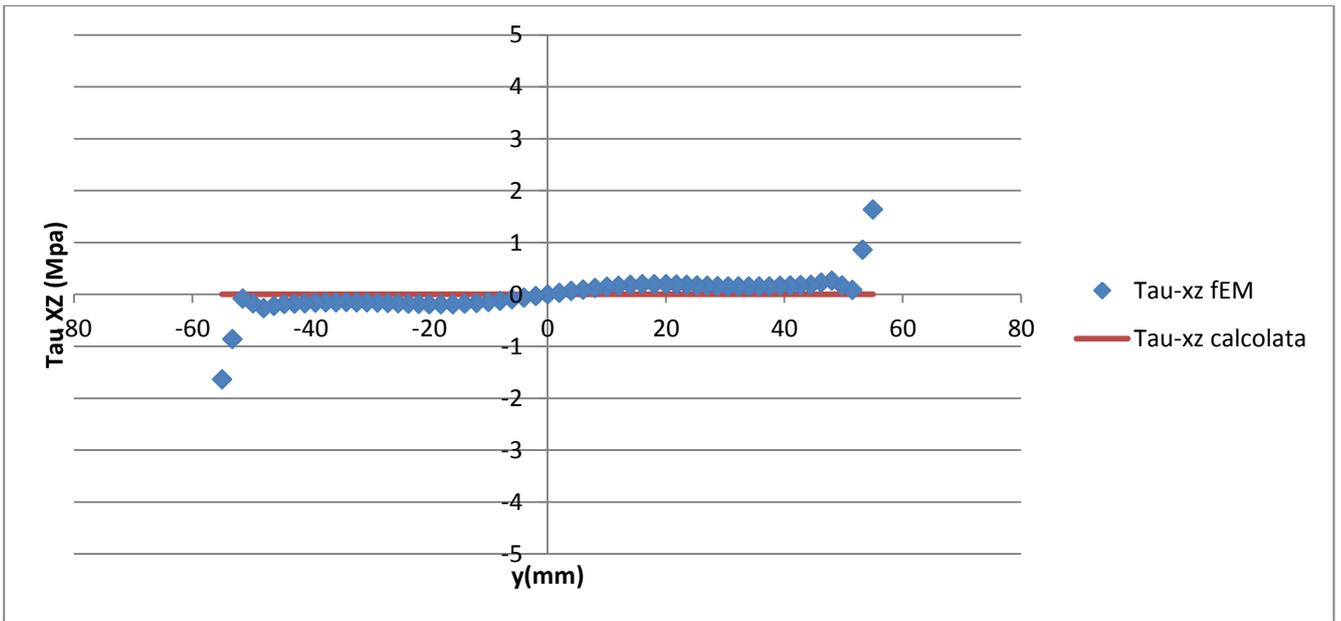
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Contour Plot Sigma Z:



Contour Plot Tau YZ:



Contour Plot Tau XZ:



## Sigma Z:

Non sono presenti tensioni Sigma Z su una qualsiasi delle sei sezioni della trave, visto che la deformazione di quest'ultima è associata ad uno scorrimento, di cui sono responsabili solo tensioni tangenziali tau. Per la *Sezione 1* il FEM conferma quanto esposto dalla teoria, fatta eccezione per i punti ai due estremi del path dove sono registrati valori di trazione e compressione comunque inferiori a 0,8 MPa, ma questi risultati possono derivare dal tipo di mesh utilizzata, che non può essere ai bordi così fitta come richiederebbe un'analisi puntuale e specifica per queste zone della trave.

Tutto questo a maggior ragione del fatto che non sono stati utilizzati, ai fini di questa trattazione, strumenti quali l'infittimento della mesh in corrispondenza dei punti critici, che Ansys poteva mettere a disposizione, ma che richiedevano un notevole incremento della richiesta computazionale.

Per la *Sezione 2*, l'andamento al FEM non rispecchia i risultati teorici: si assiste ad un andamento lineare crescente, variabile con estremi da -2 MPa a +2 MPa. Tali tensioni normali si originano per effetto della vicinanza al punto di applicazione del carico, che evidentemente comporta effetti di bordo che portano le tensioni normali ad aver valore non nullo in tale path.

Analizzando le *Sezioni 3,4,5* si nota un progressivo avvicinamento dell'andamento delle tensioni rilevate al FEM ai valori teorici nulli: la sezione 4 è quella che maggiormente rispecchia tale caratteristica.

Si vede chiaramente invece, che per la *sezione 6* ciò non è più valido, e anzi l'andamento sembra simile, ma opposto rispetto a quello registrato per la *sezione 2*: si può supporre quindi che tale fenomeno sia dovuto alla presenza dell'incastro.

## Tau YZ:

Come visto nella parte teorica, per il calcolo delle tensioni tangenziali teoriche viene utilizzata la teoria di Bredt, la quale però fornisce un valore medio delle tensioni, in ipotesi di trave caratterizzata da parete sottile, e quindi da una sezione cava con spessore molto ridotto rispetto alle dimensioni trasversali della trave.

Essendo tale equazione funzione dello spessore  $t$  nel punto considerato, l'andamento delle tensioni tangenziali teoriche presenterà un salto di discontinuità nel passaggio da un spessore a uno di entità diversa: queste discontinuità di tensione non possono esistere nel reale andamento, di conseguenza il FEM fornirà una curva di valori nel passaggio di spessore lungo la sezione, e non quindi un salto di discontinuità.

In corrispondenza della *sezione 1 e 2*, a causa della vicinanza del punto di applicazione della forza  $F$ , i risultati teorici si discostano completamente dall'analisi ottenuta al FEM, a indicazione del fatto che Bredt non è applicabile, nel caso in cui si volessero ottenere valori delle tensioni tangenziali in modulo vicini a quelli effettivi reali.

Per la *sezione 3,4,5* si nota un progressivo avvicinamento dei valori previsti dal FEM alla teoria: ciò significa che a partire da tali sezioni risentiamo meno degli effetti di bordo causati dalla presenza del carico alla estremità della trave.

Si può inoltre osservare come la teoria di Bredt dia risultati maggiormente vicini al FEM ove lo spessore è minore. In particolare, dal grafico si nota facilmente questa considerazione: l'errore di previsione della teoria è minore nei punti corrispondenti al tratto verticale privo della presenza dell'ala, mentre in corrispondenza dei punti del path all'altezza dell'ala esterna questi raggiungono i 0,5 MPa, come margine di approssimazione: aumentando lo spessore infatti, viene meno una delle ipotesi fondamentali su cui si basa Bredt.

In ogni caso possiamo notare, dai grafici, una sovrastima nei risultati, da parte di Bredt, nei punti del path considerato.

Per la *sezione 6*, invece, si ottiene un andamento al FEM completamente discorde con i risultati teorici: siamo nel punto in corrispondenza dell'incastro a terra, e quindi applicare Bredt ci porta a differenze non trascurabili rispetto all'analisi tridimensionale agli elementi finiti.

In sostanza, si ottiene una buona corrispondenza delle Tau YZ tra FEM e teoria solo nelle sezioni centrali della trave.

### Tau XZ:

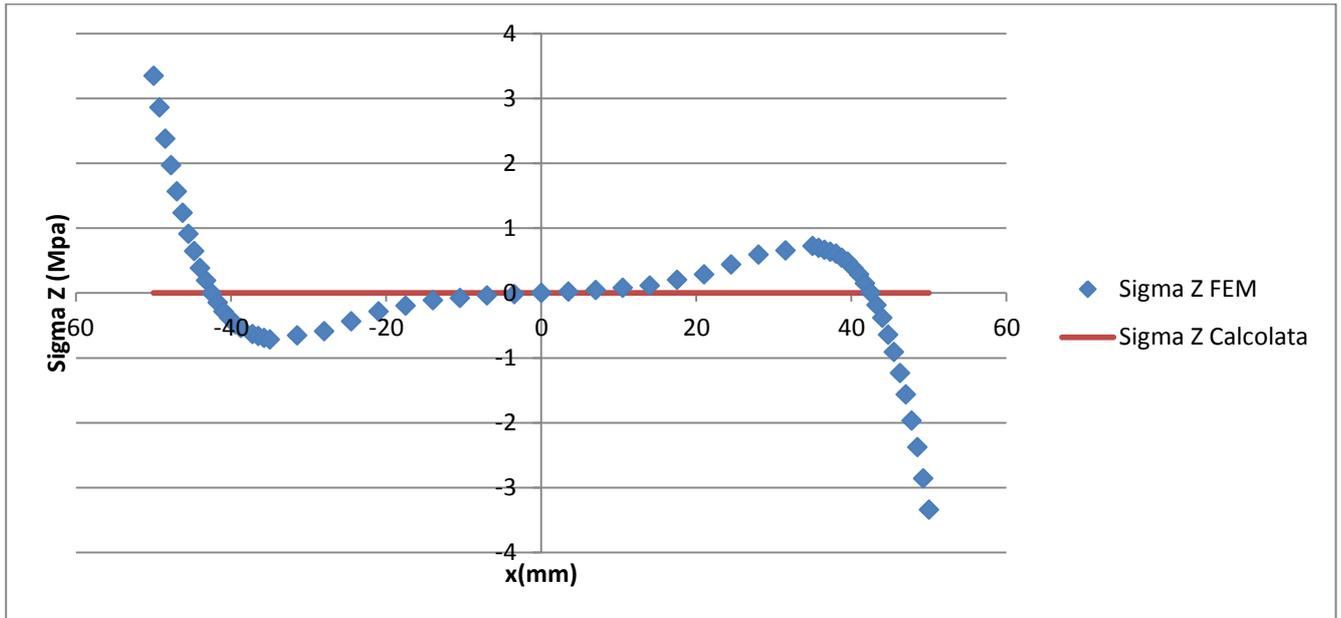
Le tensioni teoriche sono nulle su tutti i punti del path, per ciascuna delle sei sezioni che consideriamo. Detto ciò, troviamo un valido riscontro con i risultati ottenuti al FEM, ad eccezione di pochi punti estremi del path, ove le tensioni Tau XZ raggiungono valori fino a 3 Mpa.

Dall'analisi del Contour Plot della sezione si ricava facilmente tale conclusione: i picchi registrati nella tensione tangenziale si hanno in corrispondenza degli spigoli interni della sezione a Omega. Sappiamo che in corrispondenza di questi spigoli si ha una concentrazione di tensioni, ed è proprio questa la causa dei valori ottenuti in tali punti.

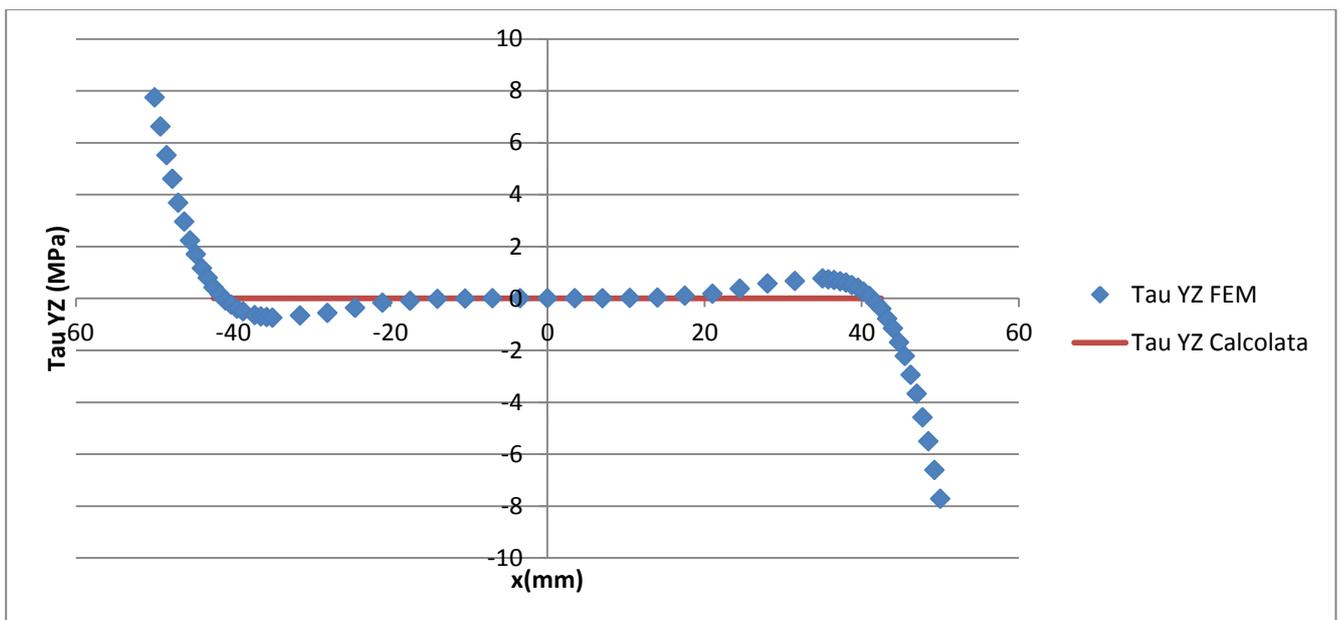
## 5.2. Path 2.

### SEZIONE 1

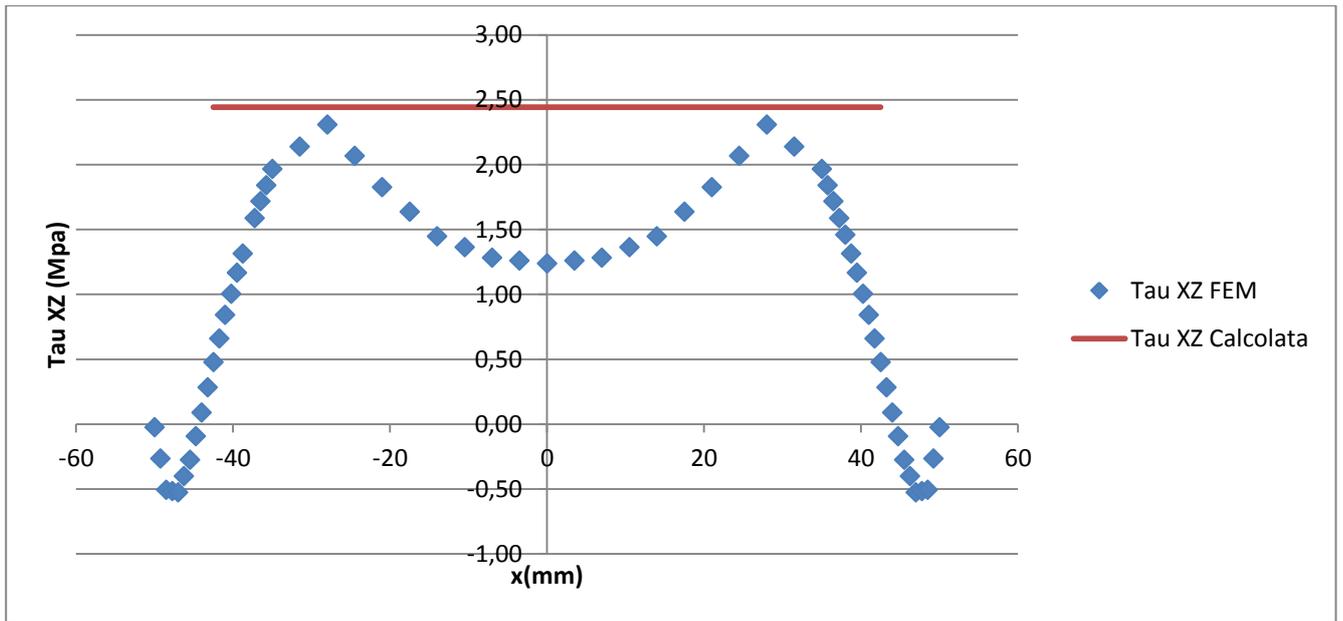
#### Sigma Z



#### Tau YZ:

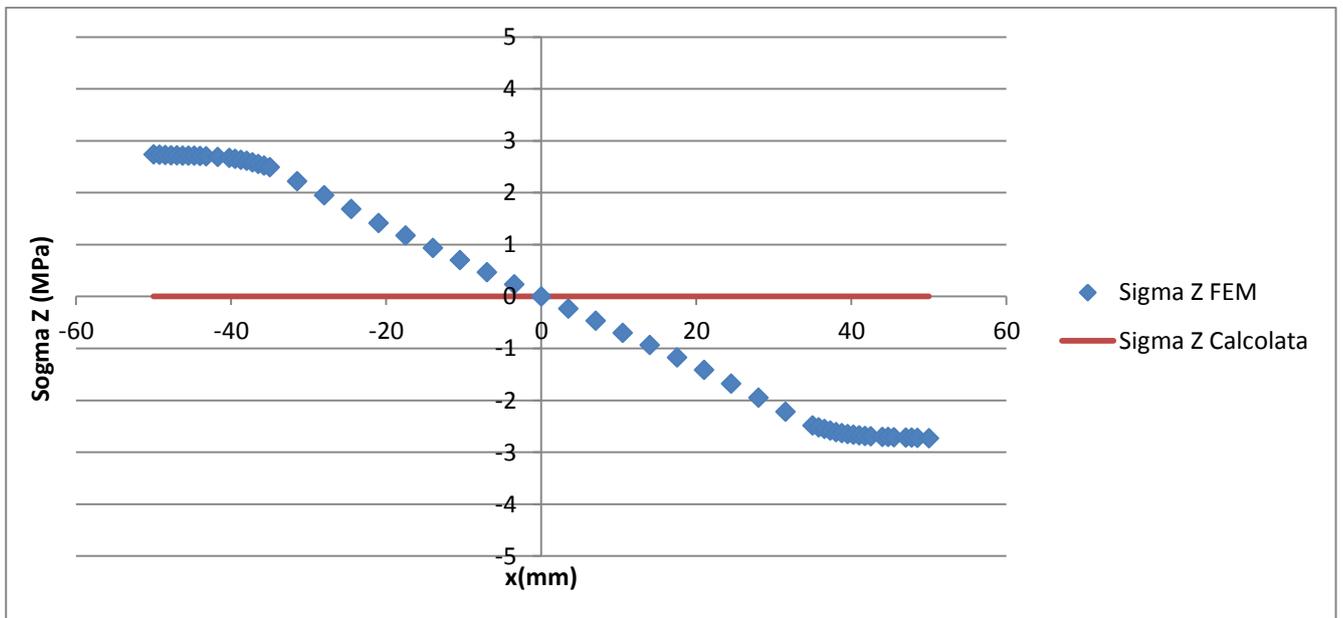


### Tau XZ:

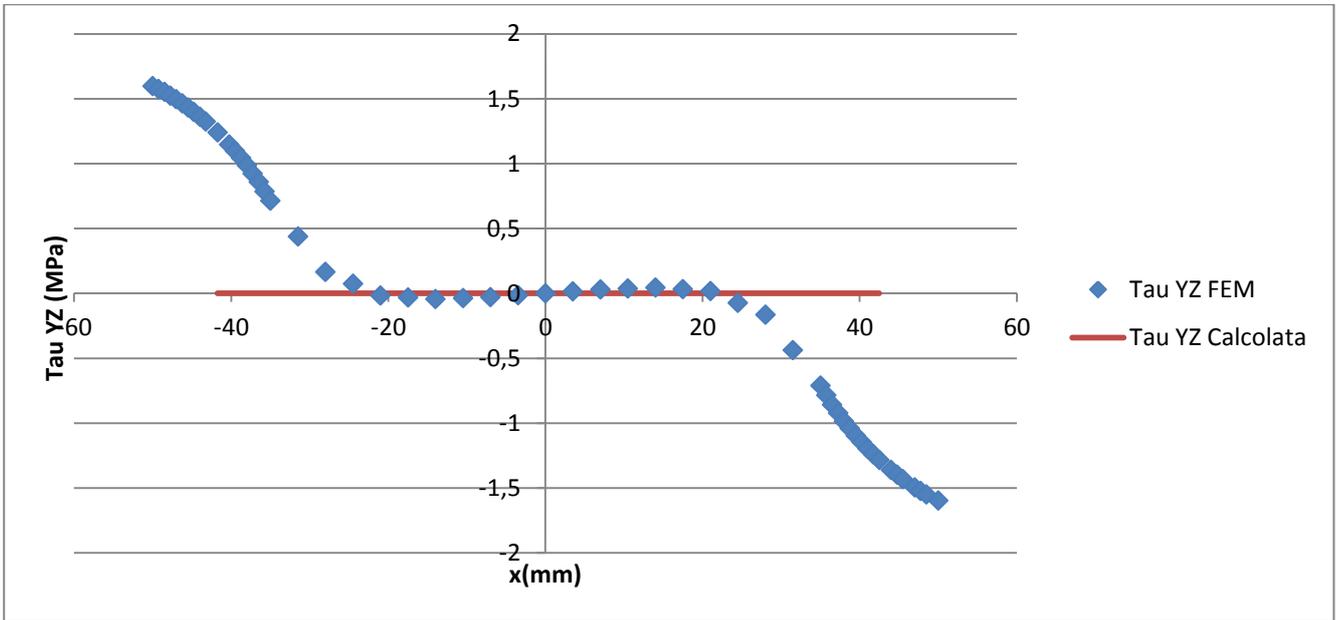


### SEZIONE 2

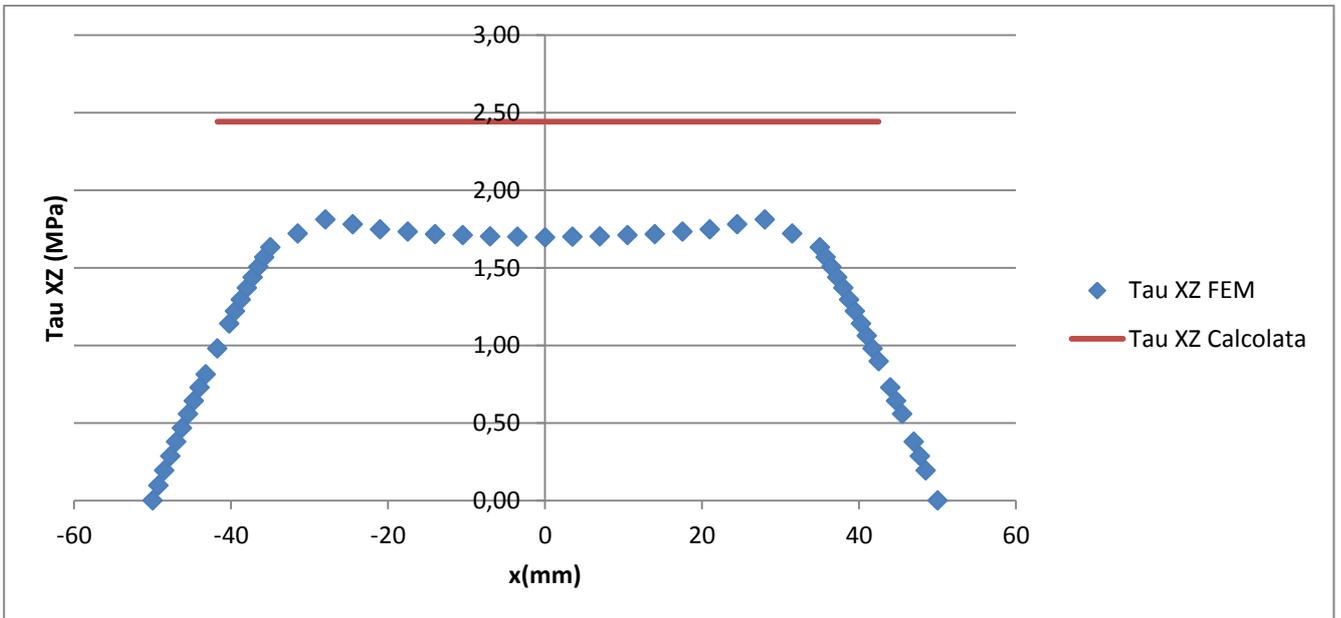
### Sigma Z:



### Tau YZ:

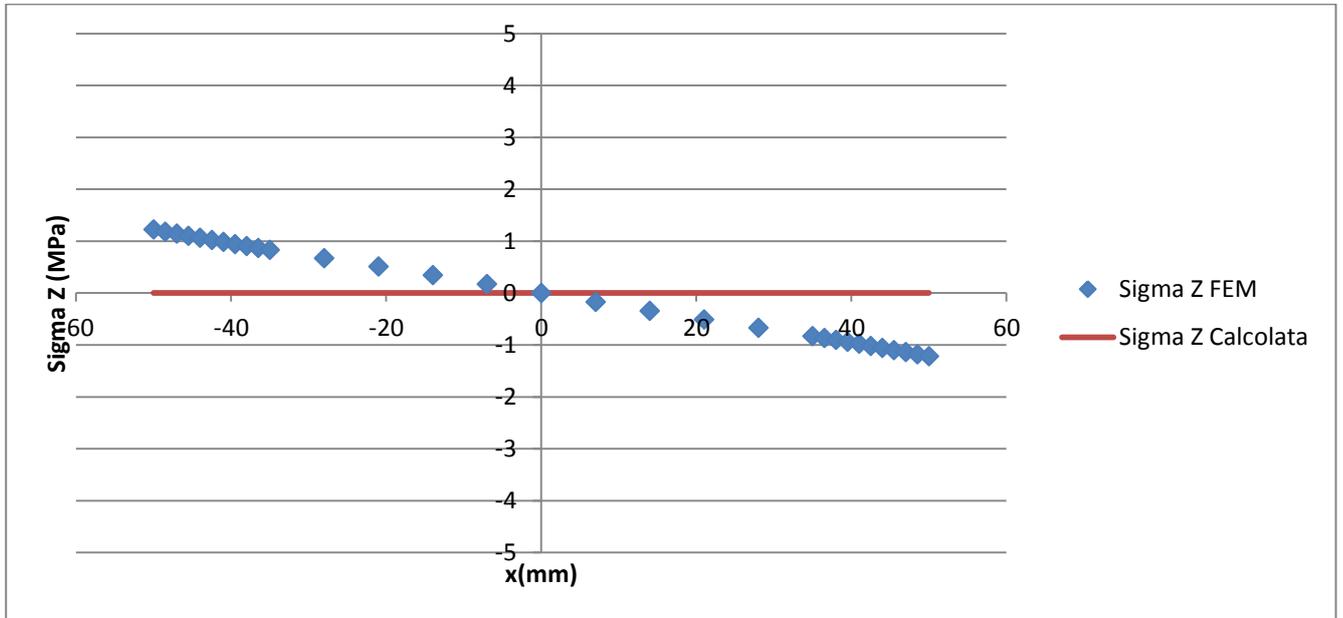


### Tau XZ:

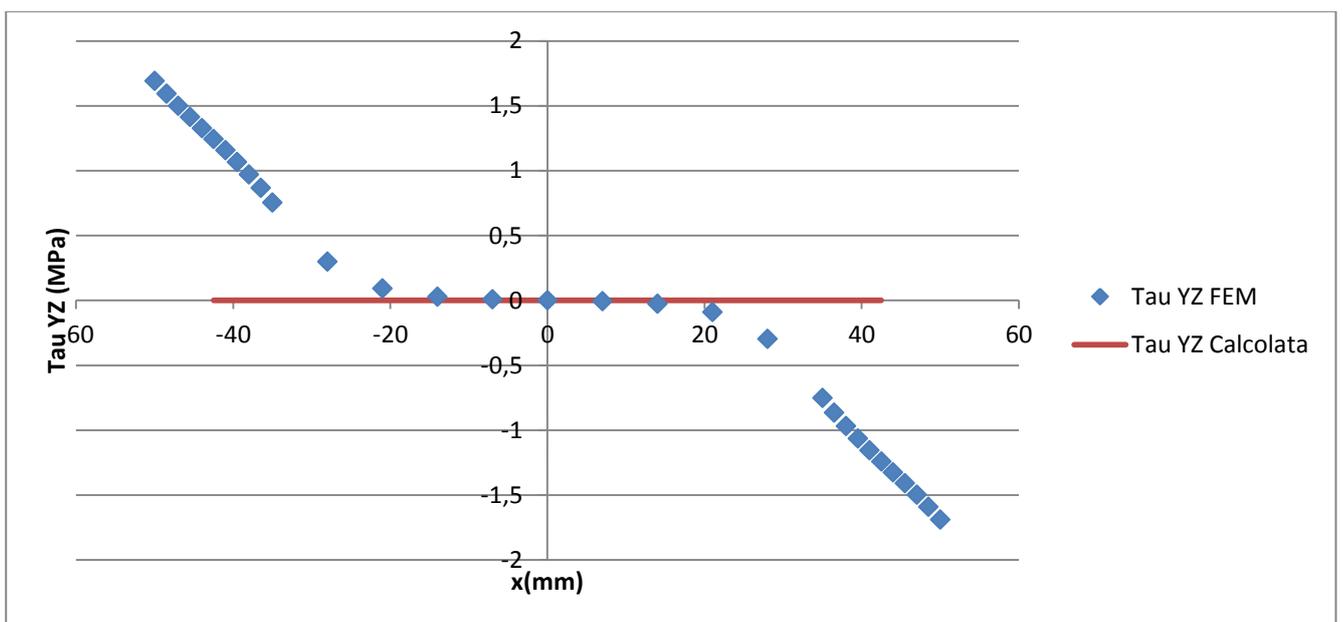


### SEZIONE 3

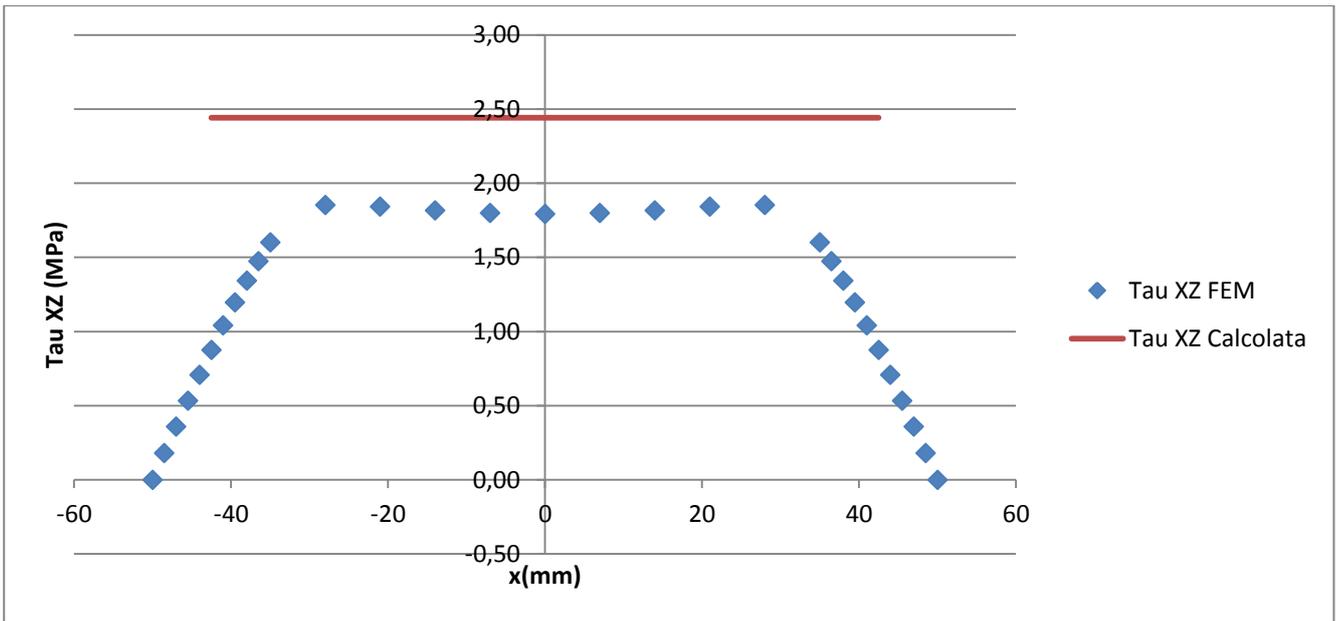
Sigma Z:



Tau YZ:

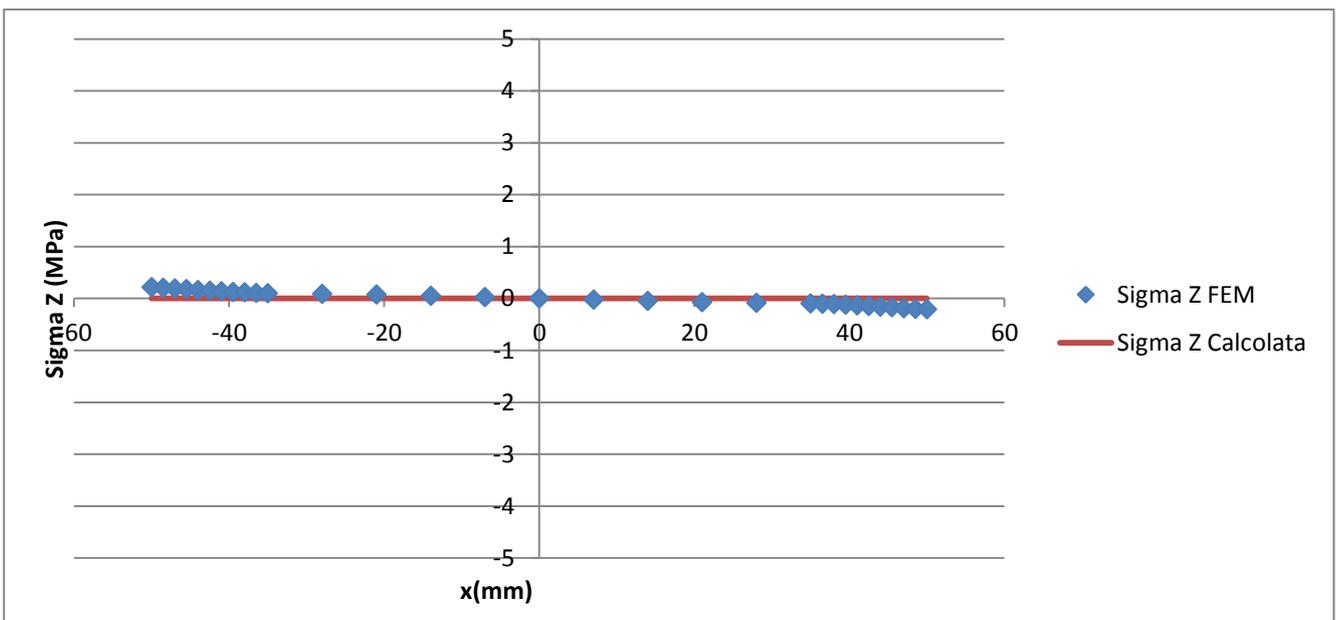


### Tau XZ:

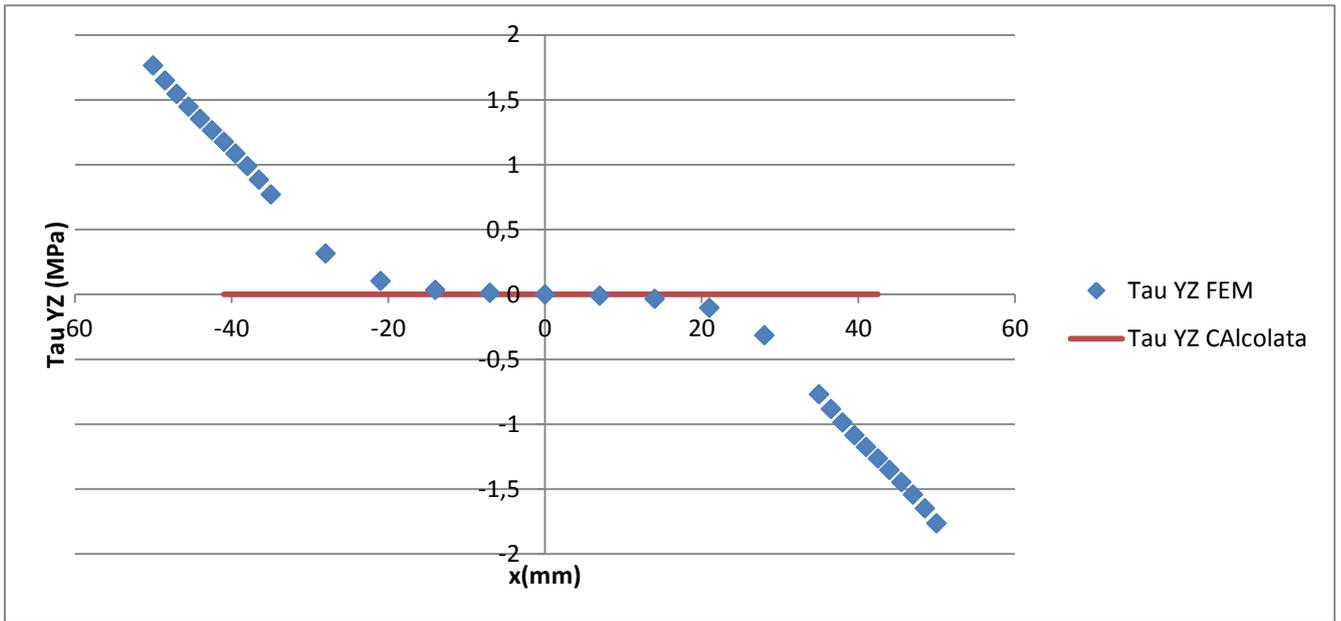


### SEZIONE 4

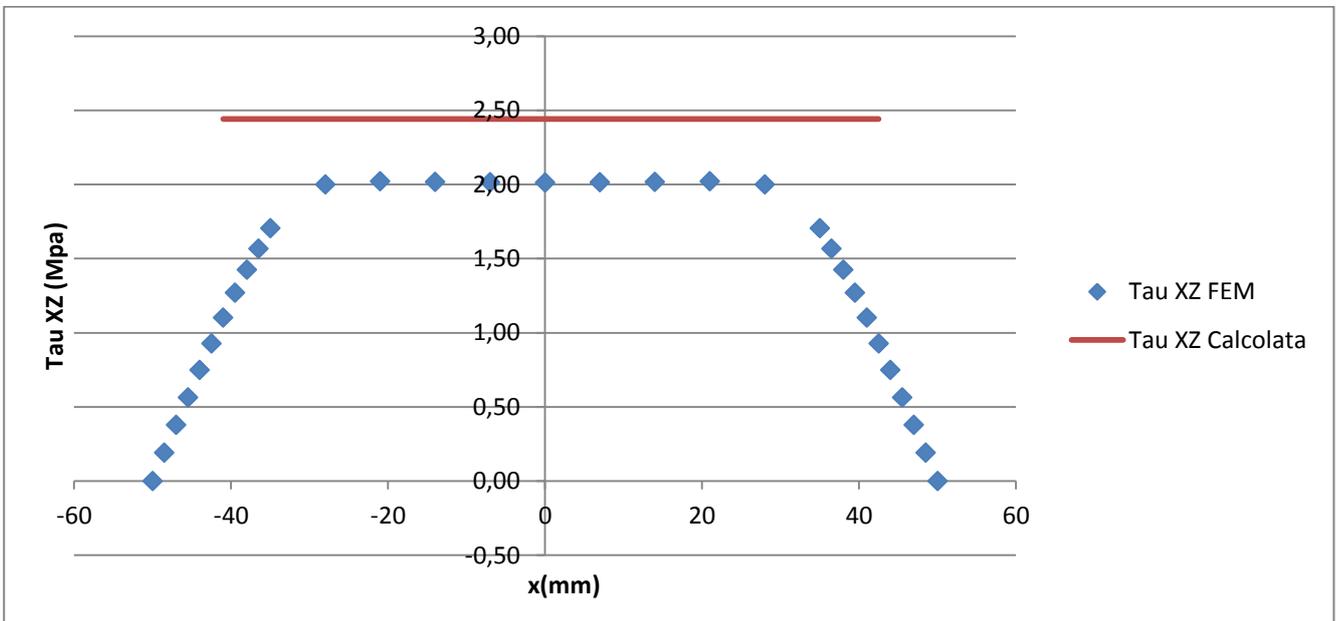
### Sigma Z:



### Tau YZ:

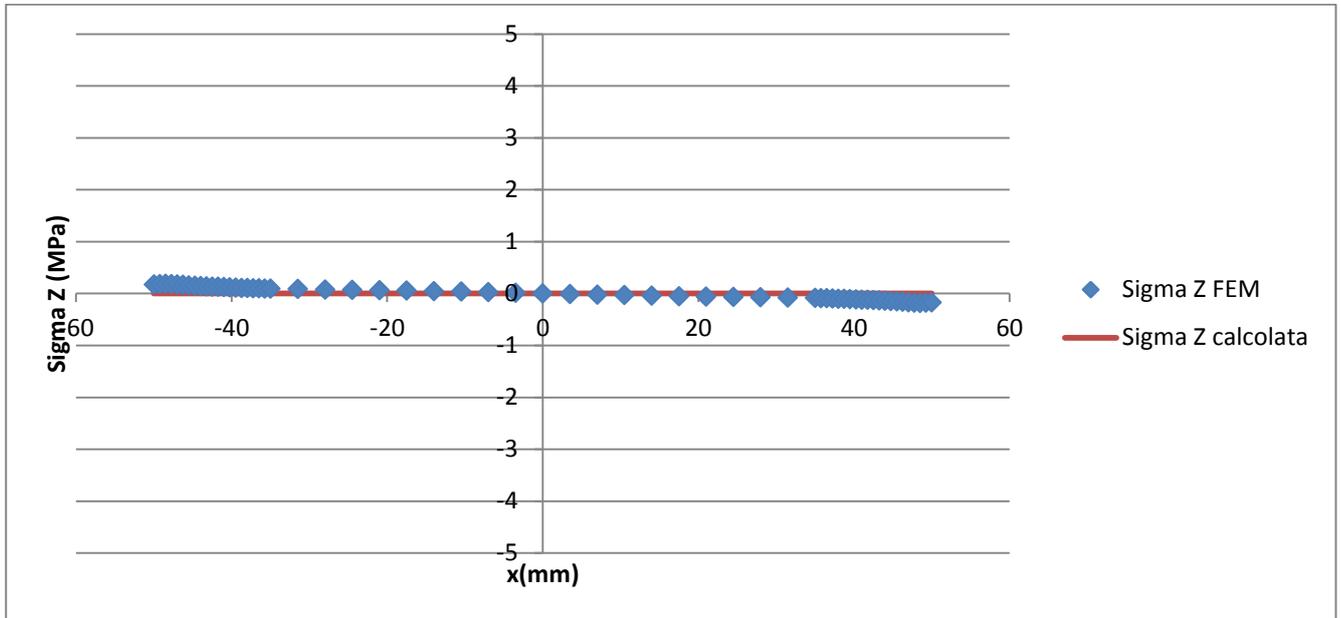


### Tau XZ:

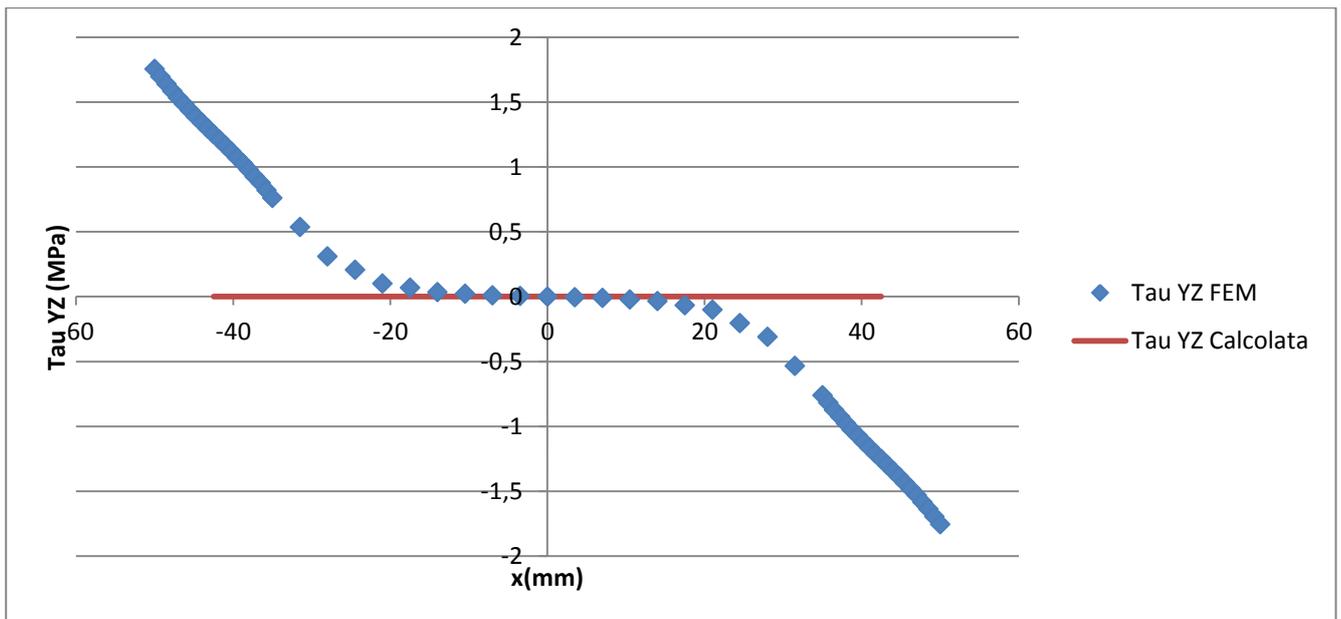


## SEZIONE 5

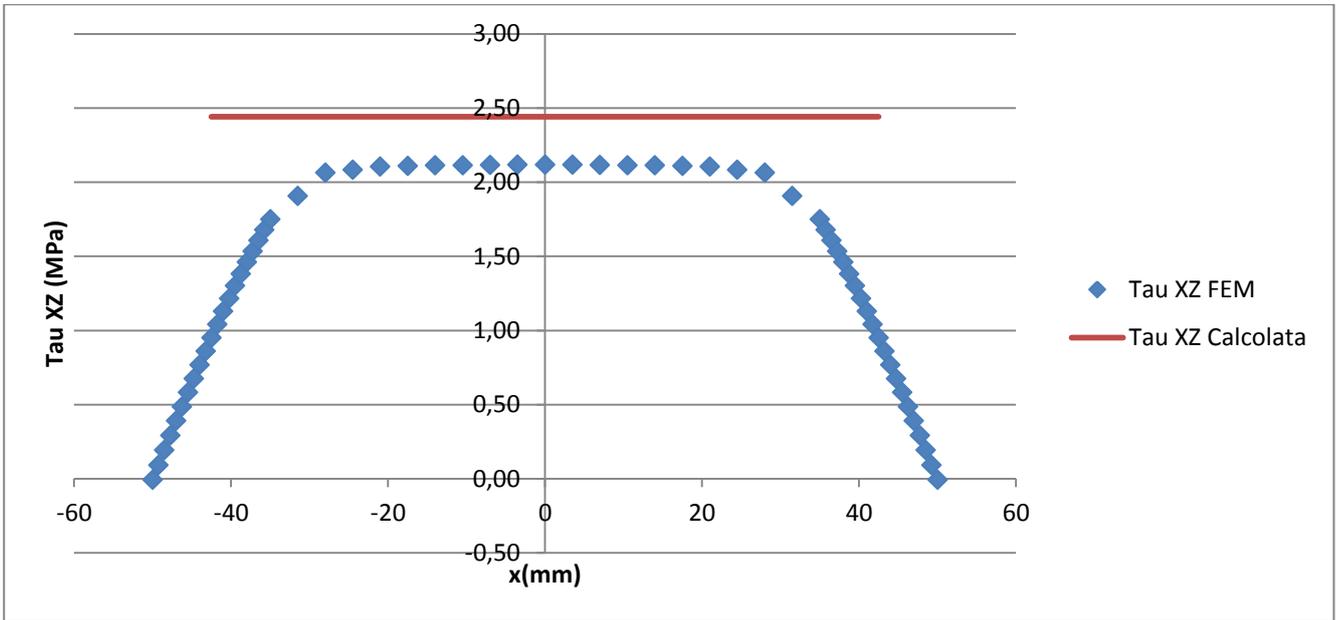
Sigma Z:



Tau YZ:

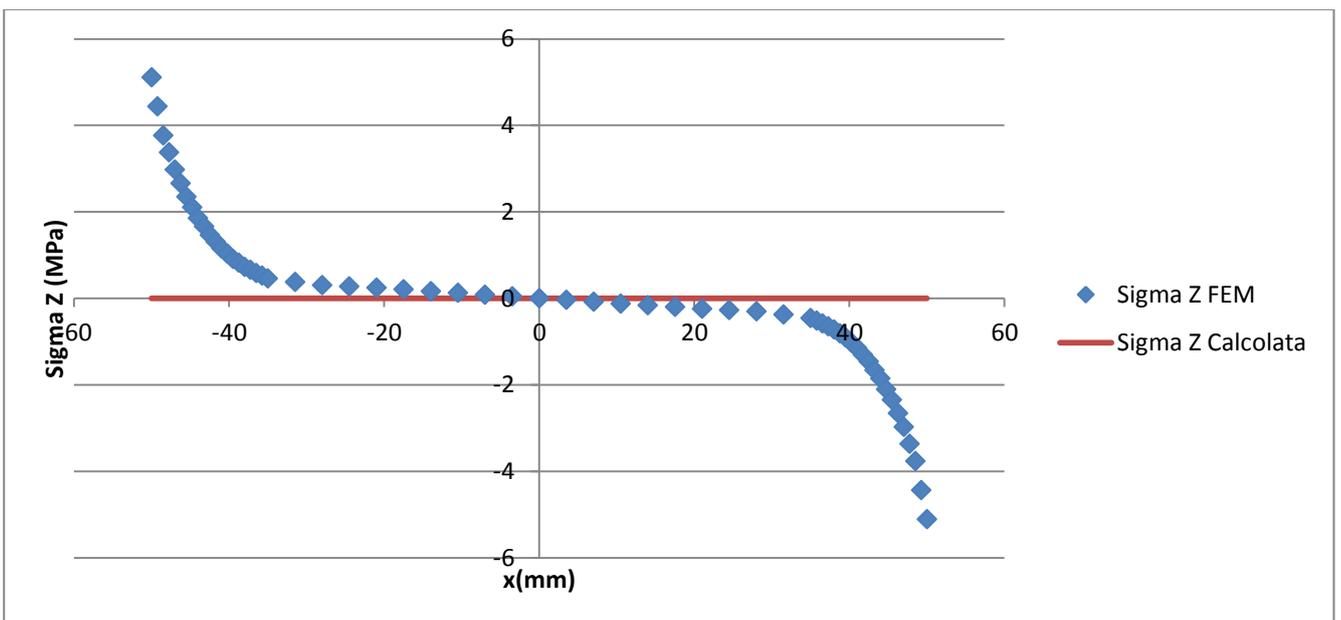


### Tau XZ:

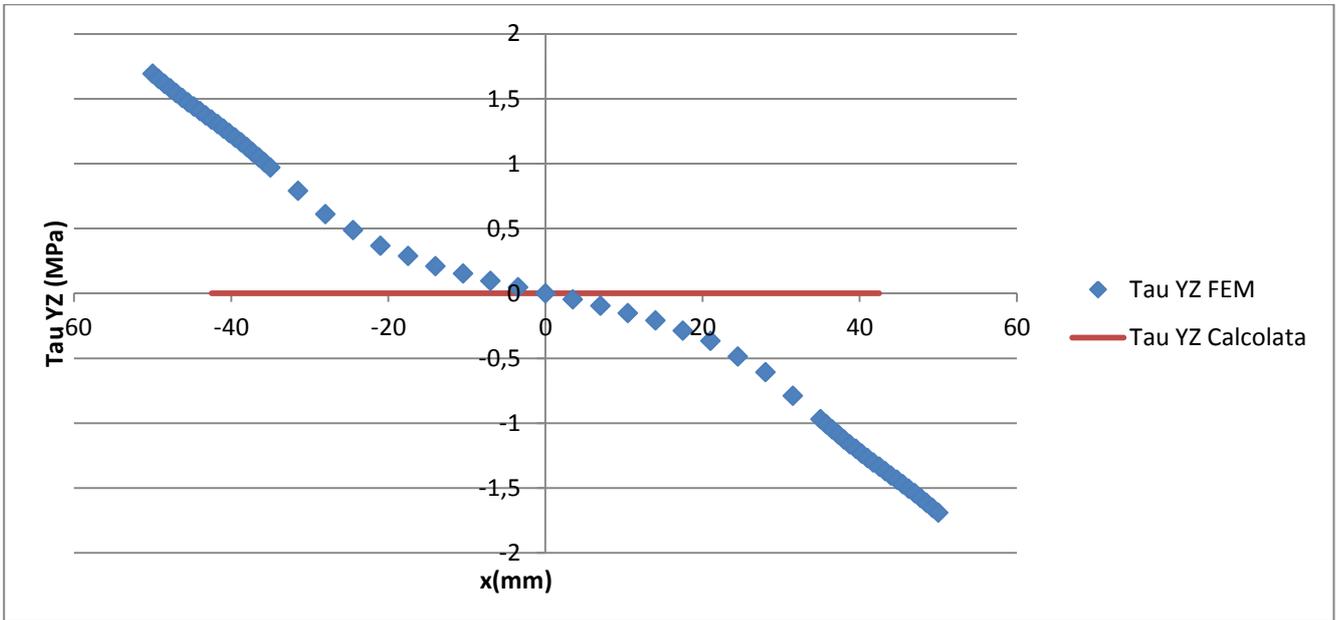


### SEZIONE 6

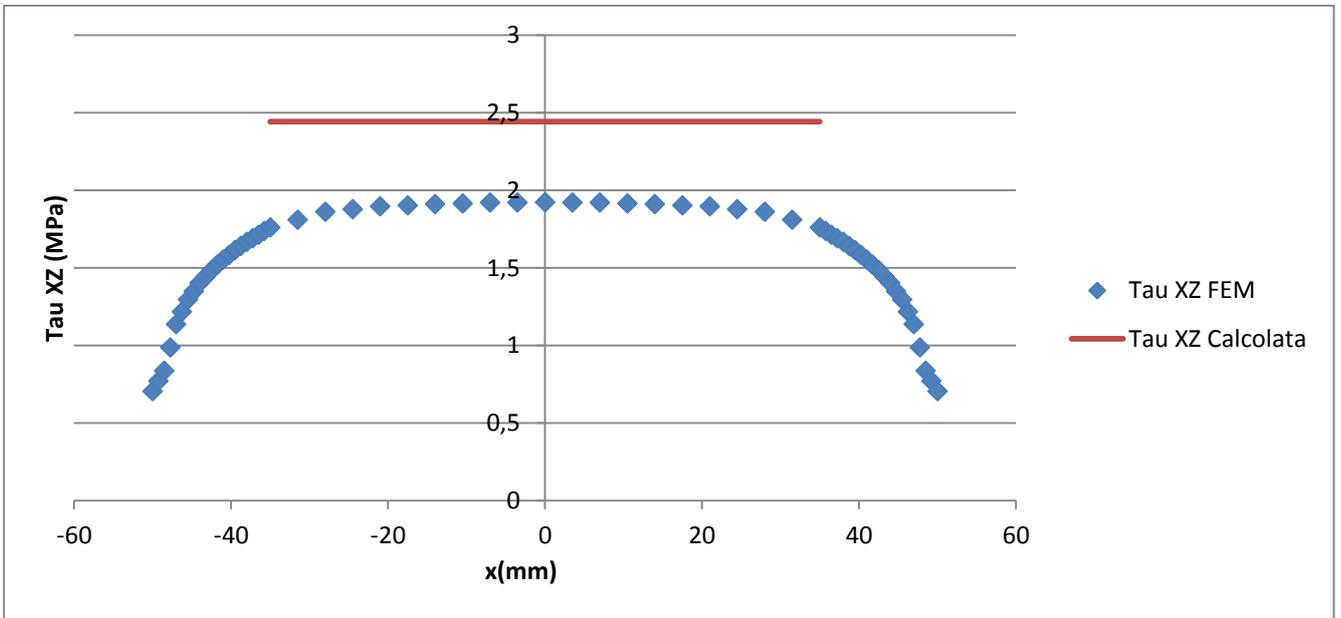
### Sigma Z:



### Tau YZ:



### Tau XZ:



### Sigma Z:

Per lo stesso motivo spiegato precedentemente, relativo al path verticale, le Sigma Z teoriche sono nulle su tutti i punti del path. Ciò è ottimamente confermato dal FEM per le sezioni 4 e 5, ove i valori ottenuti sono molto prossimi a zero.

Si possono notare invece incongruenze evidenti nel confronto per le sezioni 1 e 6, dovute agli effetti di bordo, causati rispettivamente dalla presenza del carico, e dell'incastro a terra.

Per le sezioni 2 e 3 si nota invece una incongruenza della teoria rispetto al FEM, dovuta al fatto che risentiamo, anche se più debolmente, degli effetti di bordo dovuti alla vicinanza al punto di applicazione del carico. In ogni caso la sezione 3 presenta un andamento delle tensioni normali più vicino a quello teorico, ad indicazione del fatto che essa è soggetta in modo meno acuto degli effetti di bordo sopra citati.

### Tau YZ:

La teoria prevede tensioni tangenziali lungo y nulle su tutto il path considerato. Ciò è rispecchiato dal FEM in corrispondenza dei punti centrali del path, ma agli estremi le tensioni raggiungono valori non trascurabili: si può interpretare questo fenomeno come conseguenza dell'andamento delle linee di tensione dovute a torsione. Infatti nei punti estremi del path avviene il passaggio da tensioni tangenziali YZ a tensioni XZ, le quali invece caratterizzano principalmente l'andamento delle tensioni di un ipotetico path verticale, come visto per il path 1(torsione).

### Tau XZ:

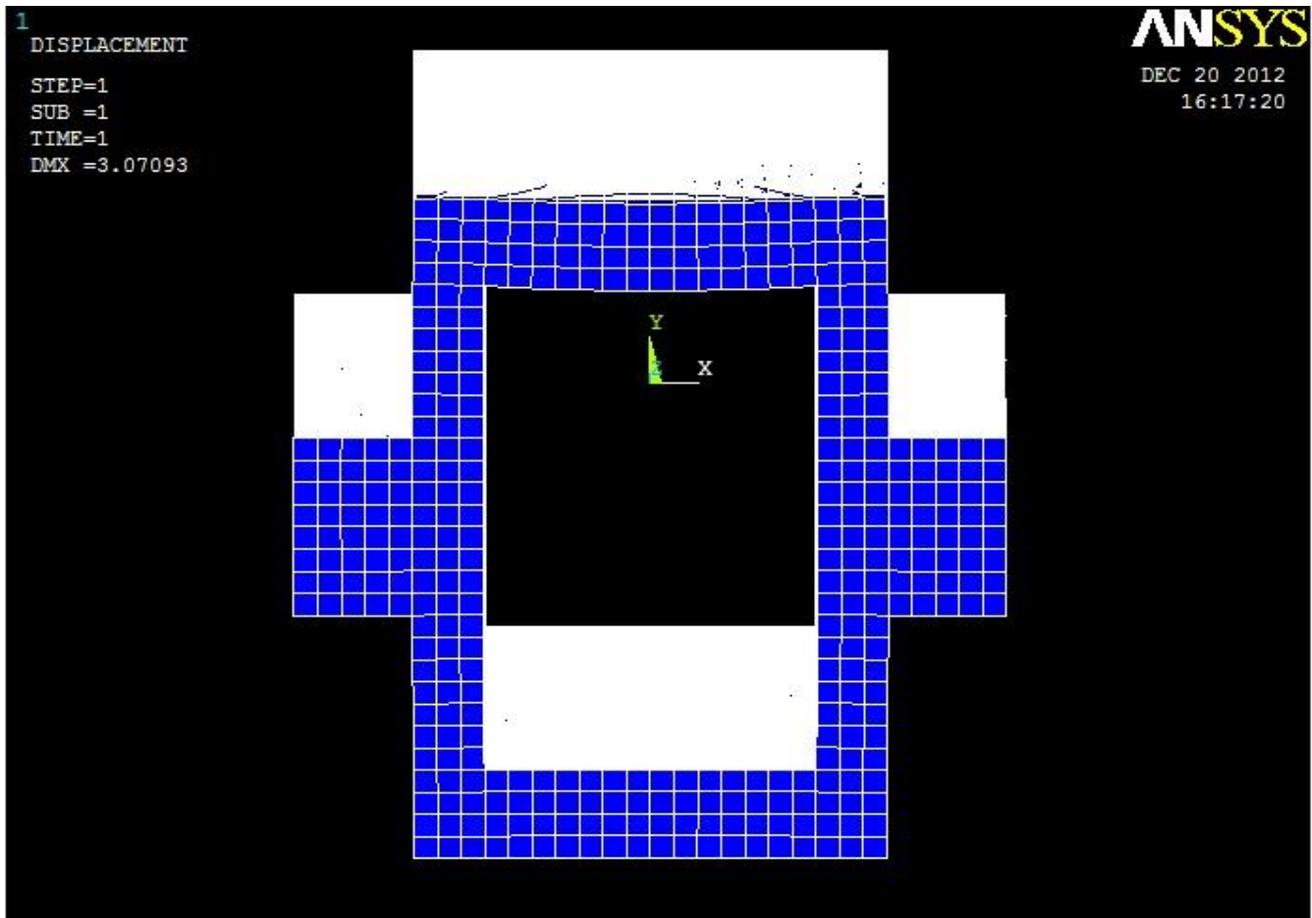
Nel calcolo delle Tau XZ teoriche, mi riferisco ai soli punti del path corrispondenti alla possibile applicazione della teoria di Bredt, e quindi in corrispondenza della linea media. Per questo motivo, nei grafici indicati sono stati esclusi i due tratti estremi del path: al di fuori di tali punti l'applicazione della teoria non avrebbe senso, in quanto non varrebbero le ipotesi previste. Come si può osservare si assiste a una sovrastima da parte dei risultati teorici, di circa 0,4 MPa nelle sezioni centrali della trave, così come nella sezione corrispondente all'incastro a terra. Nella sezione corrispondente alla applicazione del carico, si nota una maggiore sovrastima nei risultati evidentemente dovuta all'influenza del carico stesso sull'andamento delle linee di tensione.

## CAPITOLO 6

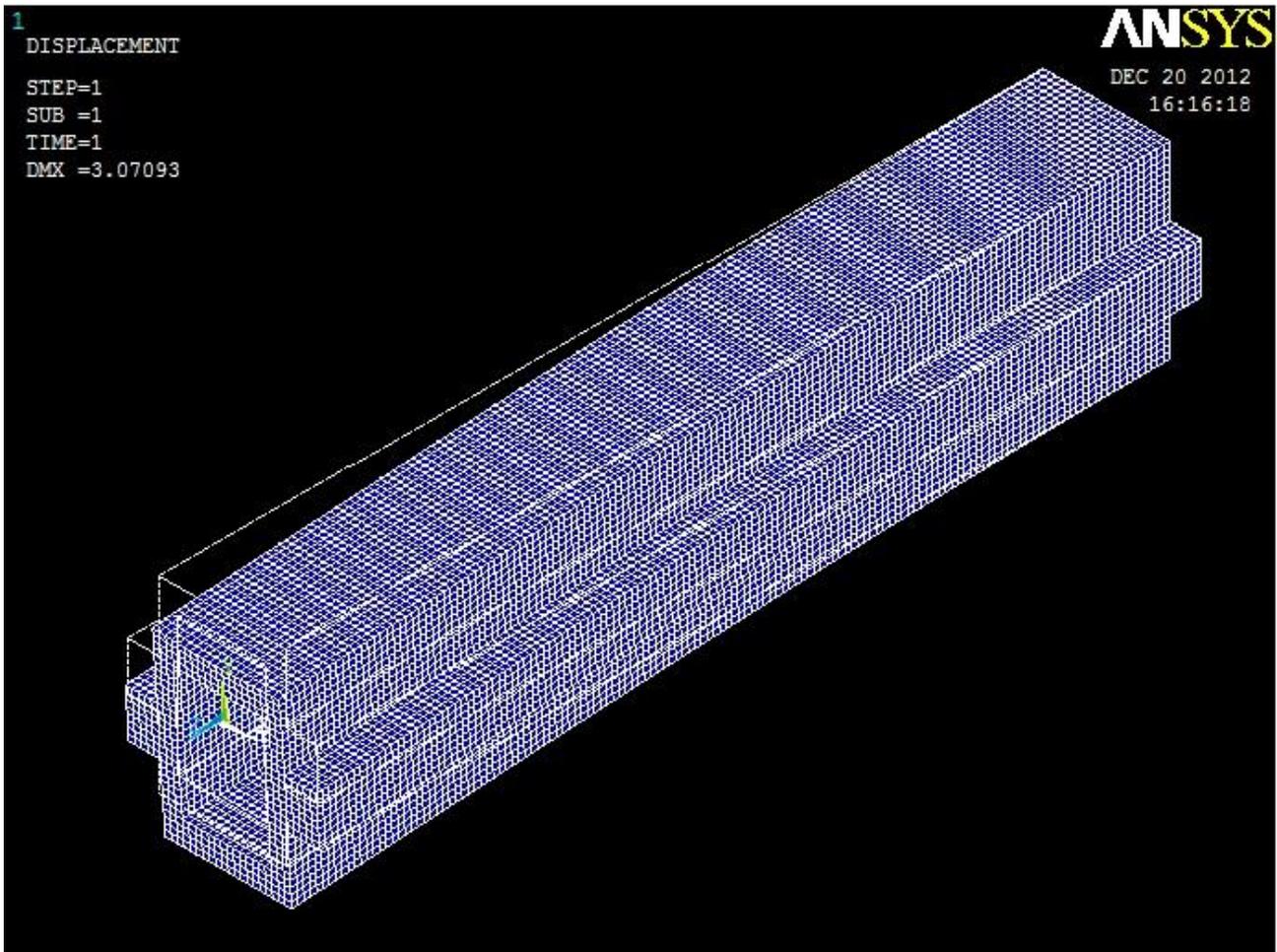
### 5.1. Illustrazione deformata trave per flessione e torsione.

#### *FLESSIONE:*

#### *Rappresentazione frontale trave.*



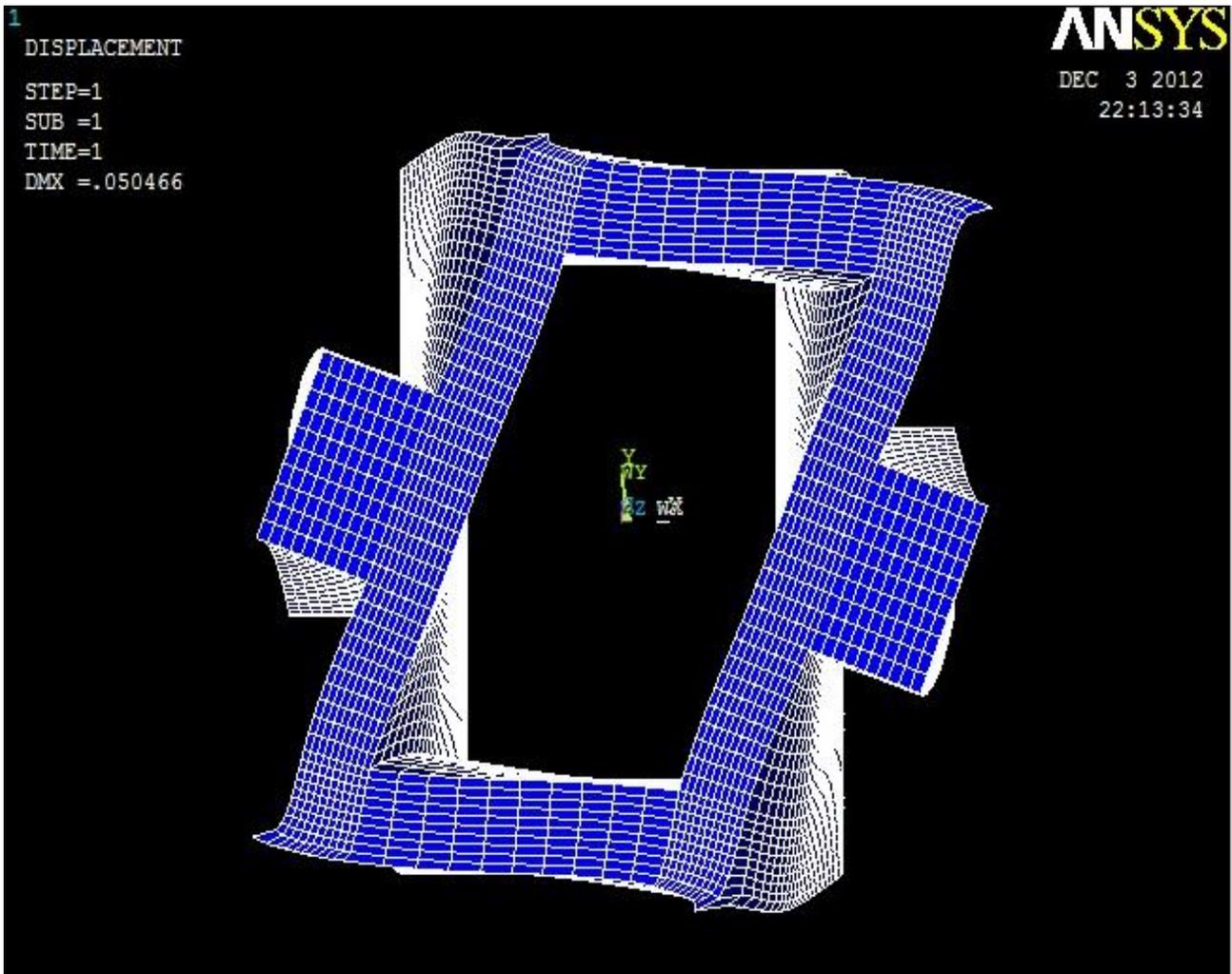
*Rappresentazione frontale della trave deformata soggetta a flessione: si può notare come la sezione nel complesso non sia soggetta a intense deformazioni rispetto alla sua forma originale, si nota solo un leggero abbassamento in corrispondenza dei punti centrali della parte superiore della sezione stessa, dovuti evidentemente alla applicazione della forza F.*



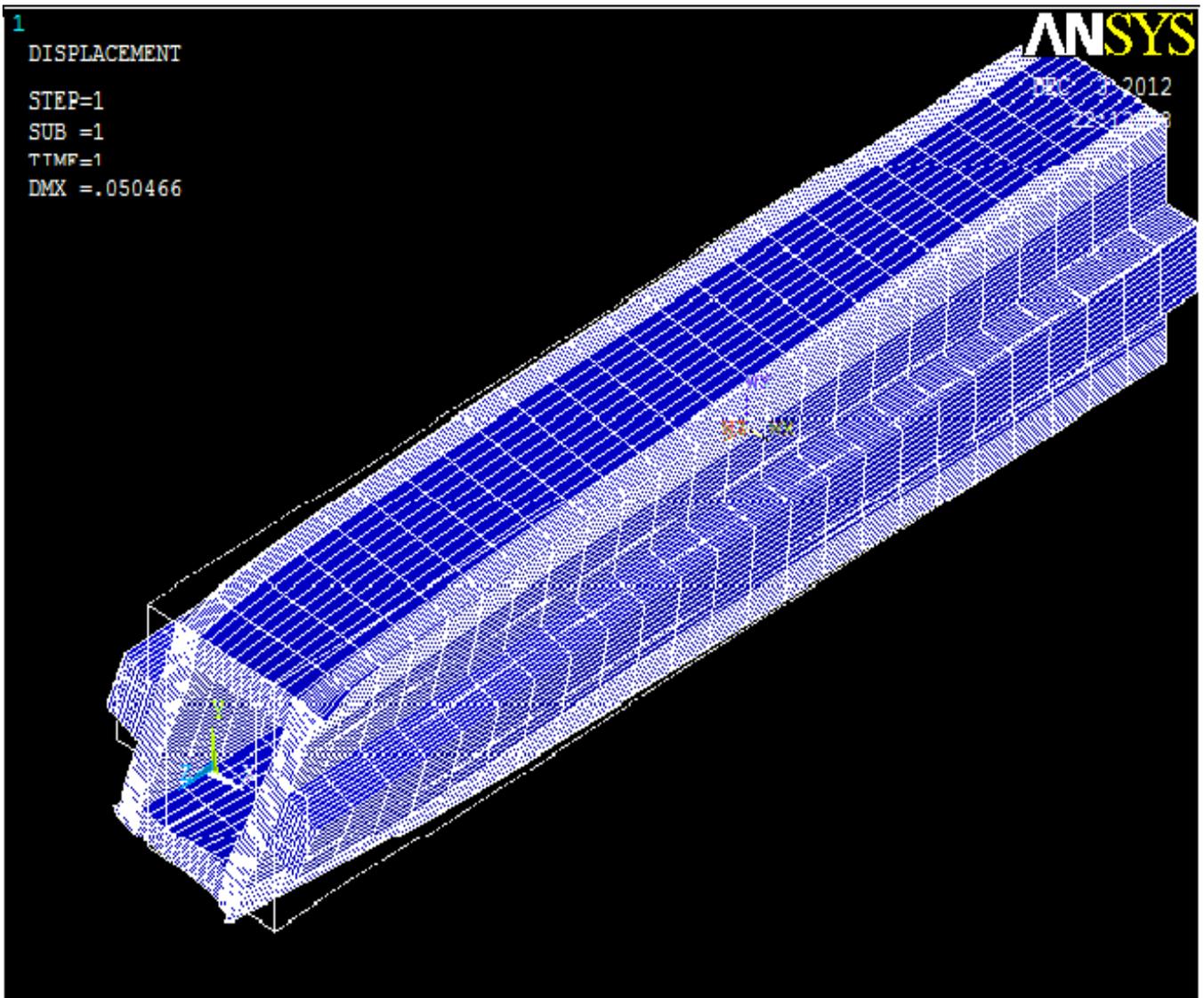
*Rappresentazione tridimensionale della trave soggetta a flessione: si nota una deformazione massima lungo l'asse y in corrispondenza del punto di applicazione della forza  $F$ , deformazione che poi diminuisce progressivamente a mano a mano ci si avvicina all'incastro a terra.*

## **TORSIONE:**

### ***Rappresentazione frontale trave.***



*Rappresentazione frontale della deformata della trave soggetta a torsione: la sezione presenta una considerevole deformazione alle estremità opposte, e questa è accentuata in corrispondenza degli spigoli, ove le tensioni raggiungono i valori più elevati.*



*Rappresentazione tridimensionale della trave soggetta a torsione: la sezione subisce ovviamente una rotazione rispetto all'asse longitudinale, causata dalla sollecitazione applicata.*

## **Bibliografia**

Quaresimin M., Zappalorto M. (2012)

Lezioni ed Esercizi di Costruzioni di Macchine e Laboratorio.