



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Limiti sulla forza di Higgs attraverso lo  
studio di transizioni atomiche

Relatore

Dr.ssa Ramona Gröber

Laureando

Francesco Zane

Anno Accademico 2019/2020



# Sommario

L'esistenza del bosone di Higgs fu confermata il 4 luglio 2012 grazie agli esperimenti svolti da ATLAS e CMS al Cern. Da quel momento in poi, per verificare ulteriormente la fondatezza della teoria, si sono susseguite numerose misure dell'accoppiamento tra il bosone ed alcune particelle elementari.

Fino ad oggi però, poiché il coefficiente di accoppiamento è proporzionale alla massa della particella elementare con la quale il bosone interagisce, è stato possibile effettuare tali misure solo con le particelle più pesanti. Per l'accoppiamento dell'elettrone, che ha una massa pari a 0.511 MeV, è stato infatti possibile solo individuare dei limiti superiori.

Dati i limiti sperimentali nelle misure ad alta energia, un approccio alternativo consiste nello sfruttare l'alta precisione raggiunta nelle misure delle basse energie. Tale metodo tuttavia è molto generale e può essere usato per studiare particelle predette da teorie oltre il modello standard, come altri bosoni di Higgs o i fotoni massivi. In particolare, può essere adoperato per analizzare la perturbazione causata dallo scambio di un bosone di Higgs tra un protone e un elettrone in un atomo. In questa tesi ci si limita a studiare il caso più semplice, l'atomo di idrogeno, in cui i livelli energetici sono ormai noti con alta precisione.

Infatti, lo scopo di questo studio è calcolare, utilizzando un approccio perturbativo, la variazione nei livelli energetici dell'atomo di idrogeno causata da uno scambio del bosone di Higgs tra l'elettrone e il protone ed inoltre valutare successivamente se la precisione raggiunta sperimentalmente sarebbe sufficiente per misurare l'accoppiamento dell' Higgs con l'elettrone oppure, se anche in questo caso, riuscirebbe solo a fissare dei limiti superiori.

# Indice

<b>1</b>	<b>Bosone di Higgs</b>	<b>5</b>
1.1	Ipotesi e scoperta . . . . .	5
1.2	Coefficienti di accoppiamento . . . . .	5
1.3	Fisica atomica . . . . .	7
1.3.1	Descrizione lagrangiana . . . . .	7
1.3.2	Path integral . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Atomo d'idrogeno</b>	<b>11</b>
2.1	Descrizione quantomeccanica . . . . .	11
2.2	Struttura fine . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Calcolo</b>	<b>14</b>
3.1	Metodo generale . . . . .	15
3.1.1	Espressione in somma dei polinomi di Laguerre associati . . . . .	15
3.1.2	Funzioni generatrici . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Risultati</b>	<b>19</b>
4.1	Studio della perturbazione in funzione di $n$ , $l$ e $m_h$ . . . . .	19
4.2	Confronto con altre correzioni . . . . .	19
4.3	Coefficiente di accoppiamento $y_e$ . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>22</b>

# Capitolo 1

## Bosone di Higgs

### 1.1 Ipotesi e scoperta

Intorno al 1960 i fisici erano stati in grado di sviluppare una valida teoria delle interazioni elettromagnetiche e un modello descrittivo dell'interazione nucleare debole. Quando cercarono però di creare una teoria invariante di gauge per la forza elettrodebole, sorsero le prime difficoltà in quanto, per fare ciò, erano richieste delle simmetrie che avrebbero predetto a zero la massa dei tre mediatori,  $\gamma$ ,  $W$  e  $Z$ . Già allora però, sia le misure sperimentali, che alcune ipotesi teoriche relative al cortissimo raggio d'azione delle interazioni deboli, aveva evidenziato che i mediatori della forza debole non avevano massa nulla, bensì  $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$  GeV e  $m_W = 80.379 \pm 0.012$  GeV. [1]

Nel 1964 [2, 3, 4, 5] venne dimostrato che, pur mantenendo la struttura simmetrica delle interazioni, era possibile introdurre la massa dei campi di gauge attraverso il meccanismo BEH (Brout-Englert-Higgs). Secondo questa teoria esisterebbe un campo scalare, con valore di aspettazione del vuoto diverso da zero, in grado di rompere spontaneamente la simmetria originale e, interagendo con le particelle elementari, di dotarle di massa.

Secondo questo modello la massa delle particelle elementari sarebbe legata all'intensità di accoppiamento con il campo secondo la formula [6]

$$y_f^{SM} = \frac{m_f}{v} \quad v = (\sqrt{2} G_F)^{-1/2} \approx 246 \text{ GeV}, \quad (1.1)$$

dove  $y_f^{SM}$  indica il coefficiente di accoppiamento con un fermione previsto dal modello standard,  $G_F$  è la costante di Fermi e  $v$  è il valore di aspettazione del vuoto del campo di Higgs.

Inoltre, le eccitazioni del campo avrebbero dovuto manifestarsi sotto forma di particella: il bosone di Higgs. I ricercatori decisero quindi di sfruttare quest'ultima proprietà per riuscire a dimostrare l'effettiva presenza di tale campo.

Il 4 luglio 2012 ci fu una conferenza al Cern nella quale veniva ufficialmente annunciata la rilevazione di una particella con una massa di circa 125 GeV, compatibile con il bosone di Higgs [7, 8].

I ricercatori, confrontando le proprietà predette teoricamente con quelle trovate sperimentalmente, riuscirono a confermare che quello fosse effettivamente il bosone di Higgs. Riamane ancora da verificare che le sue proprietà siano compatibili con quelle previste dal modello standard e se sia l'unico bosone di Higgs oppure uno dei tanti, come predetto ad esempio dalla supersimmetria.

### 1.2 Coefficienti di accoppiamento

I successivi passi per la ricerca furono quelli di misurare diversi valori di accoppiamento delle particelle con il bosone di Higgs e verificare se tali risultati fossero compatibili con le previsioni teoriche.

Per ora, come si vede nella figura (1.1) presa dall'articolo [9], è stato possibile misurare solo l'accoppiamento con le particelle più pesanti. Si può inoltre osservare che fino ad adesso, nei limiti dell'incertezza

sperimentale, la proporzionalità dell'accoppiamento con la massa delle particelle, come predetto dal modello standard, è confermata.

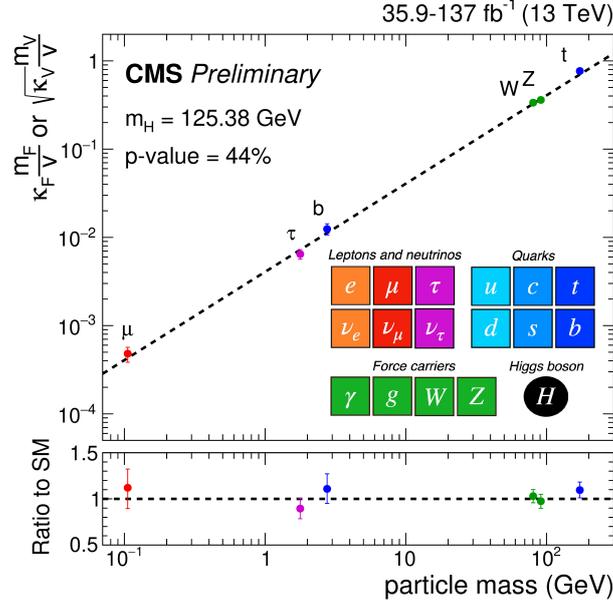


Figura 1.1: Nell'immagine sono rappresentati: dai punti colorati le misure svolte da CMS sull'accoppiamento del bosone di Higgs con alcune particelle fondamentali mentre dalla linea tratteggiata le previsioni teoriche del modello standard. Nel grafico in basso è invece possibile osservare il rapporto tra le misure sperimentali e la previsione teorica.

Per le particelle più leggere come l'elettrone, il quark up e il quark down, l'accoppiamento previsto dal modello standard risulta pari a

$$y_{e,u,d}^{SM}(m_h) \approx 2.0 \times 10^{-6}, 8.8 \times 10^{-6}, 1.9 \times 10^{-5}. \quad (1.2)$$

Tali valori sono stati ottenuti utilizzando l'equazione (1.1) in cui per le masse sono stati usati i valori riportati in [1]:  $m_e = 0.510998946 \pm 0.000000003$  MeV,  $m_u = 2.16 \pm_{-0.26}^{+0.49}$  MeV e  $m_d = 4.76 \pm_{-0.17}^{+0.48}$  MeV.

Nell'articolo [9] l'esperimento CMS del Cern ha reso noto di essere riuscito a stimare l'accoppiamento del bosone con il  $\mu$ , particella che ha come minimo, rispetto alle altre tre sopra citate, una massa venti volte maggiore. Un'ulteriore difficoltà è data dal fatto che mentre per particelle elementari come  $\mu$  o  $e$  il rivelatore è in grado di ricostruirne la traccia, per i quark  $u$  e  $d$  è possibile osservare solo i "jets" ai quali sono associati.

Per le particelle più leggere, sperimentalmente si possono solo individuare dei limiti superiori. Negli articoli [10, 11, 12] si riporta che, per quanto riguarda i quark up e i quark down, le attuali stime siano  $y_{u,d} \lesssim 1.6 \times 10^{-2}$  e si prevede che i limiti "indiretti" ottenuti da fit globali, possano raggiungere  $y_{u,d} \lesssim 5 \times 10^{-3}$ .

In riferimento all'elettrone invece, negli articoli [13, 14] si afferma che, attraverso la ricerca diretta nel decadimento  $h \rightarrow e^+e^-$  si riesce a stimare  $y_e \lesssim 1.35 \times 10^{-3}$  e si ipotizza che, con i successivi run di LHC, possa migliorare di un ordine di grandezza.

Purtroppo, nonostante i possibili futuri progressi, tali stime continueranno ad essere, nel migliore dei casi, due ordini di grandezza superiori a quelle attese e quindi inefficienti per un confronto.

Un approccio alternativo per provare a misurare tali accoppiamenti consiste nello sfruttare gli ultimi traguardi raggiunti nelle misure ad alta precisione delle basse energie (ad esempio nella fisica atomica) come proposto in [6].

Sebbene questo approccio non riesca a raggiungere i limiti della fisica delle alte energie, potrebbe tornare utile per sondare la nuova fisica. In particolare in questa tesi viene utilizzato per lo studio di un primo semplice esempio in cui il segnale è causato dal bosone di Higgs.

Per quanto riguarda invece le particelle composte, la formula (1.1) non è più applicabile. In questi casi il coefficiente di accoppiamento è ottenuto, sulla base della struttura della particella in esame, attraverso una particolare combinazione lineare di coefficienti di accoppiamento riferiti a particelle elementari.

Nel caso del protone (con composizione  $u u d$ ) nell'articolo [6] si riporta che

$$y_p \approx 11 y_u + 6.5 y_d + 0.75 y_s + 2.6 \times 10^{-4} (4.0 \times 10^2 y_c + 88 y_b + 1.5 y_t) , \quad (1.3)$$

in cui  $y_s$ ,  $y_c$ ,  $y_b$  e  $y_t$  sono rispettivamente i coefficienti di accoppiamento con i quark strange, charm, botton e top. Il contributo a  $y_p$  da parte di quark che apparentemente non costituiscono il protone, è dovuto ad un effetto chiamato sea quarks. Secondo tale processo un gluone contenuto in una particella potrebbe adronizzare dando vita ad una coppia virtuale di quark-antiquark.

Prendendo i valori delle masse da [1] e calcolando i coefficienti di accoppiamento utilizzando l'equazione (1.1) si ottiene

Quark	Up	Down	Strange	Charm	Botton	Top
Massa	2.16 MeV	4.67 MeV	93 MeV	1.27 GeV	4.18 GeV	172.9 GeV
$y_{quark}$	$8.8 \times 10^{-6}$	$1.9 \times 10^{-5}$	$3.8 \times 10^{-4}$	$5.2 \times 10^{-3}$	$1.7 \times 10^{-2}$	$7.0 \times 10^{-1}$

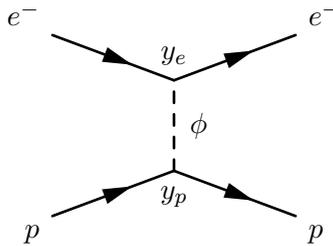
Tabella 1.1: Tabella coefficienti di accoppiamento dei quark con il campo di Higgs.

Inserendo i dati della tabella (1.1) nell'equazione (1.3), si ricava

$$y_p \approx 1.7 \times 10^{-3} . \quad (1.4)$$

### 1.3 Fisica atomica

Lo scambio del bosone di Higgs tra il protone e l'elettrone in un atomo potrebbe essere rappresentato dal grafico di Feynman



I successivi due sottocapitoli hanno lo scopo di riuscire a descrivere tale grafico in funzione di un potenziale agente sull'elettrone e sul protone.

#### 1.3.1 Descrizione lagrangiana

In analogia all'equazione di Poisson  $\nabla^2 \varphi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$  è possibile costruire l'equazione di Klein-Gordon per un campo reale scalare ( $\phi(x)$  con massa  $m$ ) in presenza di una sorgente ( $J$ ) localizzata nel punto  $x$  dello spazio-tempo come

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi(x) = J(x) \quad (1.5)$$

a cui è associata la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J \phi . \quad (1.6)$$

Denotando con  $G(x)$  la funzione di Green tale che

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] G(x) = -\delta^4(x) \quad (1.7)$$

la soluzione all'equazione (1.5) può essere scritta come

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y G(x-y) J(y), \quad (1.8)$$

in cui  $\phi_0(x)$  rappresenta la soluzione all'equazione omogenea di Klein-Gordon.

Nella teoria dei campi quantistici, ad una perturbazione del campo, che ha avuto origine nel punto  $y$  dello spazio-tempo e che ora si è propagata fino ad un generico punto  $x$ , può essere associato il moto di una particella, il propagatore.

Dal punto di vista fisico la funzione  $G(x-y)$  descrive il moto di tale particella, partita da  $y$  ed ora arrivata nel punto generico  $x$ .

Se invece volessimo descrivere il caso in cui sono presenti due sorgenti che perturbano il campo la densità di lagrangiana diventerebbe

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + (J_1 + J_2) \phi \quad (1.9)$$

a cui è associata l'azione

$$S = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + (J_1 + J_2) \phi \right). \quad (1.10)$$

In questo caso la soluzione all'equazione di Klein-Gordon associata alla densità di lagrangiana (1.9) sarebbe

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int d^4y G(x-y) (J_1(y) + J_2(y)). \quad (1.11)$$

Inserendo tale soluzione nella (1.10) e considerando solo i termini di mutua interazione tra le due sorgenti si ottiene

$$S_{int} = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left[ J_2(x) G(x-y) J_1(y) + J_1(x) G(x-y) J_2(y) \right]. \quad (1.12)$$

### 1.3.2 Path integral

L'ampiezza di transizione dallo stato iniziale  $q_i$  allo stato finale  $q_f$  mediante la hamiltoniana  $H$ , nel formalismo del path integral, è descrivibile come [15]

$$\langle q_f | e^{-iHT} | q_i \rangle = \int Dq(t) e^{i \int_0^T dt L(q, \dot{q})} \quad (1.13)$$

dove

$$\int Dq(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{-im}{2\pi\delta_t} \right)^{\frac{N}{2}} \left( \prod_{k=1}^{N-1} \int dq_k \right), \quad (1.14)$$

$T$  rappresenta il tempo impiegato dalla particella per passare dallo stato  $q_i$  allo stato  $q_f$ ,  $\delta_t = T/N$  ed infine con  $q$  sono state indicate le coordinate generalizzate, relative allo stato della particella, mentre con  $\dot{q} = dq/dt$  le velocità ad esse associate.

Se al posto di una particella si volesse descrivere un campo scalare  $\phi$  in cui lo stato finale ed iniziale combaciano con lo stato fondamentale, indicato da  $|0\rangle$ , l'equazione (1.13) diventerebbe

$$Z \equiv \langle 0 | e^{-iHT} | 0 \rangle = \int D\phi e^{iS(\phi)} \quad (1.15)$$

in cui  $S(\phi)$  rappresenta l'azione associata alla lagrangiana.

Se si volessero descrivere dei disturbi rispetto allo stato fondamentale bisognerebbe aggiungere, nel calcolo dell'azione, dei termini in grado di descrivere tali perturbazioni.

Nel caso in cui si voglia descrivere la perturbazione creata da due sorgenti, l'azione da inserire nell'equazione (1.15) sarebbe quella precedentemente descritta in (1.10). Nella teoria del path integral è possibile dimostrare che [15]

$$Z(J) \equiv \int D\phi e^{iS(\phi)} = Z(J=0) e^{iS_{int}(\phi)}. \quad (1.16)$$

Supponendo che le due sorgenti siano puntiformi, localizzate rispettivamente in  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  e con coefficienti di accoppiamento con il campo pari a  $y_1$  e  $y_2$ , le  $J_1$  e  $J_2$ , presenti nella formula (1.10), possono essere descritte come

$$J_1(x) = J_1(\mathbf{x}, t) = y_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \quad J_2(x) = J_2(\mathbf{x}, t) = y_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad (1.17)$$

Inserendo queste sorgenti nell'equazione (1.12) si ottiene

$$S_{int} = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \left[ y_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) G(x-y) y_1 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1) + y_1 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) G(x-y) y_2 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_2) \right]. \quad (1.18)$$

È possibile notare come i due termini nell'integrale differiscano solo nello scambio dell'indice 1 con l'indice 2. Ci si può quindi concentrare sulla soluzione di uno solo dei due, ad esempio

$$I_1 = -\frac{1}{2} \int d^3x dx^0 \int d^3y dy^0 \left[ y_2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) G(x-y) y_1 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}_1) \right]. \quad (1.19)$$

Scrivendo  $G(x)$  attraverso la trasformata di Fourier

$$G(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik_\mu x^\mu} \tilde{G}(k) \quad (1.20)$$

dalla sua stessa definizione nell'equazione (1.7) è possibile verificare che

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{k_\mu k^\mu - m^2}. \quad (1.21)$$

Inserendo i risultati ottenuti in (1.20) e (1.21) nell'equazione (1.19) e integrando [15] si arriva a

$$I_1 = \frac{1}{2} \left( \int dx^0 \right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} y_2 y_1 \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{\mathbf{k}^2 + m^2} = \frac{1}{2} \left( \int dx^0 \right) \frac{y_2 y_1}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \quad (1.22)$$

in cui  $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ .

Poiché  $I_2 = I_1(y_e \rightarrow y_p, y_p \rightarrow y_e)$  l'integrale complessivo (1.18) risulta pari a

$$S_{int} = I_1 + I_2 = \left( \int dx^0 \right) \frac{y_1 y_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}. \quad (1.23)$$

Si ottiene così la serie di equivalenze

$$Z \equiv \langle 0 | e^{-iHT} | 0 \rangle = e^{-iET} \quad (1.24)$$

$$= Z(J=0) e^{iS_{int}(\phi)} = Z(J=0) e^{i \left( \int dx^0 \right) \frac{y_1 y_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}} \quad (1.25)$$

dove la (1.24) deriva dal fatto che lo stato  $|0\rangle$  è autostato dell'operatore  $H$ .  
 Confrontando tra loro la (1.24) e la (1.25) è possibile associare

$$\left( \int dx^0 \right) \longrightarrow \text{il tempo di propagazione tra le due sorgenti, } T \quad (1.26)$$

$$-\frac{y_e y_p}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \longrightarrow \text{l'energia trasportata dal propagatore tra le due sorgenti, } E \quad (1.27)$$

È possibile identificare con  $E$  l'energia potenziale tra le due sorgenti.

Nel nostro caso le due sorgenti  $J_1$  e  $J_2$  sono l'elettrone ed il protone, di conseguenza i coefficienti di accoppiamento sono rispettivamente  $y_1 = y_e$  e  $y_2 = y_p$ . Poiché il campo  $\phi$  rappresenta il campo di Higgs la massa presente nella formula (1.9) altro non è che la massa del bosone di Higgs  $m_h$ .

In conclusione, in termini di potenziale, lo scambio del bosone di Higgs tra un elettrone e un protone in un atomo può essere descritto da

$$V_{Higgs}(\mathbf{r}) = -\frac{y_e y_p}{4\pi} \frac{e^{-m_h r}}{r} . \quad (1.28)$$

## Capitolo 2

# Atomo d'idrogeno

Per analizzare la variazione di energia causata dallo scambio di un bosone di Higgs tra un elettrone e un protone in un atomo, si è ritenuto opportuno utilizzare l'atomo di idrogeno poiché le sue autofunzioni sono descrivibili in forma analitica ed è quindi possibile procedere al calcolo senza bisogno di un elaboratore.

### 2.1 Descrizione quantomeccanica

L'atomo di idrogeno è un sistema a due corpi costituito da un protone e da un elettrone legati assieme dall'interazione coulombiana. La hamiltoniana complessiva del sistema si può riscrivere come la somma di due contributi: uno relativo al centro di massa del sistema, che genera l'equazione di Schrödinger di una particella libera, e un altro, sul quale ci focalizzeremo, che descrive la distanza relativa tra le due particelle. Quest'ultimo può essere espresso dalla hamiltoniana quantistica

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

in cui  $\mathbf{r}$  rappresenta la distanza relativa, mentre  $V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  descrive il potenziale di interazione coulombiana tra il protone e l'elettrone.

Trattandosi di un problema a corpo centrale, sono soddisfatte le seguenti regole di commutazione

$$[H, \mathbf{L}^2] = 0, \quad [L_z, \mathbf{L}^2] = 0, \quad [H, L_z] = 0. \quad (2.2)$$

Riscrivendo la hamiltoniana del sistema (2.1) in coordinate sferiche<sup>1</sup>, l'equazione di Schrödinger per la componente radiale dell'atomo di idrogeno diventa

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{2\mu r^2} \mathbf{L}^2 + V(r) \right] \psi(r, \theta, \phi) = E \psi(r, \theta, \phi). \quad (2.3)$$

Le soluzioni sono descrivibili analiticamente come

$$\psi(r, \theta, \phi) = |n l m\rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.4)$$

$$= a_0^{-3/2} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}} \left( \frac{2r}{na_0} \right)^l e^{-r/na_0} L_{n+l}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi \\ y = r \sin \theta \sin \phi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

in cui  $Y_l^m(\theta, \phi)$  sono le armoniche sferiche,  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$  è il raggio di Bohr e  $L_{n+l}^{2l+1}(\frac{2r}{na_0})$  identificano i Polinomi di Laguerre associati, i quali sono definiti a partire dai polinomi di Laguerre come

$$L_q^p(x) := \frac{d^p}{dx^p} L_q(x) \quad \text{con} \quad L_q(x) \text{ polinomio di Laguerre.}$$

Le condizioni al contorno utilizzate per risolvere l'equazione (2.3) impongono dei vincoli sui numeri quantici  $n$  e  $l$ , più precisamente

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, \dots, n-1 .$$

Tali  $\psi(r, \theta, \phi)$  sono per costruzione autofunzioni di  $H$ ,  $\mathbf{L}^2$  e  $L_z$  con autovalori

$$H \psi(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{2} \frac{m_e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \psi(r, \theta, \phi) = -\frac{E_0}{n^2} \psi(r, \theta, \phi) , \quad (2.6)$$

$$\mathbf{L}^2 \psi(r, \theta, \phi) = \hbar l(l+1) \psi(r, \theta, \phi) , \quad (2.7)$$

$$L_z \psi(r, \theta, \phi) = \hbar m \psi(r, \theta, \phi) . \quad (2.8)$$

Inoltre, essendo l'elettrone una particella con spin pari a  $-1/2$ , l'autofunzione complessiva del sistema risulta essere

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \chi_{s, m_s} , \quad (2.9)$$

con  $\chi_{s, m_s}$  autofunzioni di spin tali per cui

$$\mathbf{S}^2 \chi_{s, m_s} = \hbar s(s+1) \chi_{s, m_s} , \quad S_z \chi_{s, m_s} = \hbar m_s \chi_{s, m_s} . \quad (2.10)$$

## 2.2 Struttura fine

Nella trattazione quantomeccanica sopra esposta, viene considerata e sviluppata solo l'interazione principale che coinvolge il protone e l'elettrone. Altri effetti più piccoli che portano un contributo meno significativo nel definire i livelli energetici, come ad esempio la possibile interazione dovuta alla presenza dello spin dell'elettrone, vanno sotto il nome di Struttura fine. Tali correzioni si suddividono in tre contributi.

### Interazione spin-orbita

Nel sistema di riferimento dell'elettrone il protone si "muove", ed essendo una particella carica, crea un campo magnetico con il quale il momento di dipolo magnetico di spin dell'elettrone si accoppia. Per poter descrivere tale interazione è quindi necessario aggiungere alla hamiltoniana totale del sistema un nuovo termine che, nel sistema di riferimento del laboratorio, è esprimibile come

$$H_{SO} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1}{m_e^2 c^2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} . \quad (2.11)$$

### Correzione relativistica di Thomas

L'elettrone attorno al nucleo si "muove" con una velocità tale da non poter trascurare gli effetti relativistici.

Partendo dalla definizione relativistica dell'energia cinetica  $T = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} - mc^2$  e sviluppandola in serie di McLaurin in funzione di  $p$ , si ottiene

$$T = \frac{p_e^2}{2m_e} - \frac{p_e^4}{8m_e^3 c^2} + \dots$$

Non potendo trascurare il secondo termine dell'espansione e non essendo incluso nella descrizione quantomeccanica (2.1), questa correzione porta un nuovo termine pari a

$$H_{rel} = -\frac{p^4}{8m_e^3 c^2} . \quad (2.12)$$

### Correzioni di Darwin

É anche possibile ricavare le precedenti due correzioni in modo generale attraverso l'equazione di Dirac

$$\left[ \frac{p^2}{2m} + V(r) - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} + \frac{\pi\hbar^2}{2m^2c^2} \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \delta(\mathbf{r}) \right] \psi = \tilde{E} \psi . \quad (2.13)$$

Tale espressione rappresenta una formulazione covariante e lineare dell'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per una particella (di carica  $q$  e massa  $m$ ) in un campo elettromagnetico. I primi due termini corrispondono con la hamiltoniana di Schrödinger, i secondi due, nel caso di potenziale coulombiano, coincidono rispettivamente con la correzione relativistica di Thomas e con il termine di interazione spin-orbita. L'ultimo termine, legato alla natura quantistica dell'elettrone, è noto come termine di Darwin e acquista valori diversi da zero solo per stati con numero quantico  $l = 0$ .

A tale perturbazione è collegata una variazione di energia pari a

$$\Delta E_{Dar} = \begin{cases} -E_n \frac{\alpha^2}{n} & se \quad l = 0 \\ 0 & se \quad l \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

dove  $\alpha$  indica la costante di struttura fine definita da  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon\hbar c}$  e  $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$  rappresenta il livello energetico degli stati con fissato numero quantico  $n$ .

Calcolando i primi due termini attraverso il metodo perturbativo sulle autofunzioni dell'atomo di idrogeno e sommando poi tutti i tre contributi all'energia tra di loro [16], si ottiene

**se  $l = 0$**

$$\Delta E_{sf} = \Delta E_{rel} + \Delta E_{Dar} = -E_n \alpha^2 \left[ \frac{3}{4n^2} - \frac{1}{n} \right], \quad (2.15)$$

**se  $l \neq 0$**

$$\Delta E_{sf} = \Delta E_{rel} + \Delta E_{SO} = -E_n \frac{\alpha^2}{n^2} \left[ \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right]. \quad (2.16)$$

In (2.16)  $j$  è il numero quantico associato al modulo del momento angolare totale  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$

## Capitolo 3

### Calcolo

Per calcolare la variazione di energia portata dal termine (1.28) si è usato il metodo perturbativo, limitandosi al primo ordine, sulle autofunzioni dell'atomo di idrogeno definite nella formula (2.5)<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\Delta E_{Higgs} &= \langle nlm | V_{Higgs}(r) | nlm \rangle = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \right|^2 \left( -\frac{y_e y_p}{4\pi} \frac{e^{-r m_h}}{r} \right) r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \\ &= \int_0^\infty \left| R_{nl}(r) \right|^2 \left( -\frac{y_e y_p}{4\pi} \frac{e^{-r m_h}}{r} \right) r^2 dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left| Y_l^m(\theta, \phi) \right|^2 \sin(\theta) d\theta d\phi .\end{aligned}$$

Per costruzione delle armoniche sferiche, l'integrale sulle variabili  $\theta$  e  $\phi$  è pari all'unità e quindi rimane solo

$$\Delta E_{Higgs} = \int_0^\infty \left| R_{nl}(r) \right|^2 \left( -\frac{y_e y_p}{4\pi} \frac{e^{-r m_h}}{r} \right) r^2 dr . \quad (3.1)$$

Già dopo questo passaggio è possibile notare come la variazione di energia sia indipendente dal numero quantico  $m$ .

Studiando i casi con i numeri quantici più bassi si ottiene

$$n = 1, \quad l = 0 :$$

$$\Delta E_{Higgs} = -\frac{1}{a_0^3} \frac{y_e y_p}{\pi} \left( \frac{1}{\frac{2}{a_0} + m_h} \right)^2 \approx -\frac{1}{a_0^3} \frac{y_e y_p}{\pi} \frac{1}{m_h^2} , \quad (3.2)$$

$$n = 2, \quad l = 0 :$$

$$\Delta E_{Higgs} = -\frac{1}{8 a_0^3} \frac{y_e y_p}{4 \pi} \left[ \frac{4}{\left(\frac{1}{a_0} + m_h\right)^2} - \frac{8}{a_0 \left(\frac{1}{a_0} + m_h\right)^3} + \frac{6}{a_0^2 \left(\frac{1}{a_0} + m_h\right)^5} \right] \approx -\frac{1}{a_0^3} \frac{y_e y_p}{8 \pi} \frac{1}{m_h^2} , \quad (3.3)$$

$$n = 2, \quad l = 1 :$$

$$\Delta E_{Higgs} = -\frac{1}{4 a_0^5} \frac{y_e y_p}{4 \pi} \left( \frac{1}{\frac{1}{a_0} + m_h} \right)^4 \approx -\frac{1}{a_0^5} \frac{y_e y_p}{16 \pi} \frac{1}{m_h^4} . \quad (3.4)$$

In unità di Planck le grandezze fisiche riferite al raggio di Bohr e alla massa del bosone di Higgs risultano essere pari a

$$a_0 = 2.7 \times 10^{-4} \text{ eV}^{-1} \approx 2.7 \times 10^5 \text{ GeV}^{-1} , \quad m_h = 125 \text{ GeV} \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Per il calcolo perturbativo mi sono limitato a rappresentare la parte radiale delle autofunzioni dell'atomo di idrogeno in quanto il termine riferito al centro di massa si fattorizza, ed essendo normalizzato a 1, non porta contributi alla variazione di energia.

e si nota che  $1/a_0 \ll m_h$ . Le approssimazioni presenti nelle equazioni (3.2), (3.3) e (3.4) sono infatti ottenute espandendo i termini  $\frac{1}{(\frac{1}{a_0} + m_h)^k}$  in serie di McLaurin in funzione di  $1/a_0$  fino all'ordine zero.

### 3.1 Metodo generale

È possibile ottenere una forma generale in  $n$  e  $l$ .

Il primo approccio utilizza l'espressione in somma dei polinomi di Laguerre associati e il risultato così ottenuto viene anch'esso espresso in termini di una somma finita; nel secondo caso invece, mediante l'utilizzo delle funzioni generatrici correlate ai polinomi di Laguerre associati, è possibile ottenere una forma chiusa in  $n$  e  $l$ .

Per comodità sono state definite le seguenti grandezze

$$\rho \equiv \frac{2r}{na_0}, \quad N_{nl} \equiv a_0^{-3/2} \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}, \quad C \equiv 1 + \frac{m_h n a_0}{2} \approx \frac{m_h n a_0}{2}. \quad (3.6)$$

L'equazione (3.1) diventa

$$\Delta E_{Higgs} = - \left(N_{nl}\right)^2 \frac{y_e y_p}{4\pi} \left(\frac{n a_0}{2}\right)^2 \int_0^\infty \rho^{2l+1} e^{-\rho C} \left(L_{n+l}^{2l+1}(\rho)\right)^2 d\rho. \quad (3.7)$$

#### 3.1.1 Espressione in somma dei polinomi di Laguerre associati

Una forma esplicita e generale per  $L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$  è data da

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{t=0}^{n-l-1} (-1)^{t+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-t)! (2l+1+t)! t!} \rho^t. \quad (3.8)$$

Concentrandosi sull'integrale della (3.7) lo possiamo riscrivere come

$$\int_0^\infty d\rho \rho^{2l+1} e^{-\rho C} \left( \sum_{t=0}^{n-l-1} (-1)^{t+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-t)! (2l+1+t)! t!} \rho^t \right) \cdot \left( \sum_{s=0}^{n-l-1} (-1)^{s+1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-s)! (2l+1+s)! s!} \rho^s \right). \quad (3.9)$$

Invertendo l'ordine dell'integrale con le due sommatorie e fattorizzando dove possibile si arriva all'espressione

$$\sum_{t=0}^{n-l-1} \sum_{s=0}^{n-l-1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-t)! (2l+1+t)!} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-s)! (2l+1+s)!} (-1)^{t+s} \cdot \frac{1}{t! s!} \int_0^\infty d\rho \rho^{(2l+1+t+s)} e^{-\rho C}. \quad (3.10)$$

Ricordando che

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha!}{\beta^{(\alpha+1)}} \quad (3.11)$$

si ricava infine che la variazione dovuta allo scambio del bosone scalare risulta quindi essere pari a

$$\begin{aligned} \Delta E_{Higgs} = & - \left( N_{nl} \right)^2 \frac{y_e y_p}{4\pi} \left( \frac{n a_0}{2} \right)^2 \sum_{t=0}^{n-l-1} \sum_{s=0}^{n-l-1} \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-t)! (2l+1+t)!} \\ & \cdot \frac{[(n+l)!]^2}{(n-l-1-s)! (2l+1+s)!} (-1)^{t+s} \frac{1}{t! s!} \frac{(2l+1+t+s)!}{C^{(2l+2+t+s)}} . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Si può provare facilmente che per  $(n, l) = (1, 0), (2, 0), (2, 1)$  l'equazione (3.12) risulta essere uguale a (3.2), (3.3) e (3.4).

Per quanto questa soluzione abbia il pregio di non contenere nessuna approssimazione e di essere del tutto generale, purtroppo però risulta complicata ed estremamente scomoda al fine pratico di calcolare la perturbazione per  $n$  e  $l$  fissati.

### 3.1.2 Funzioni generatrici

Nel caso dei polinomi di Laguerre associati le funzioni generatrici sono definite dall'espressione

$$\mathcal{U}_p(\rho, s) := \frac{(-s)^p e^{-\rho s/(1-s)}}{(1-s)^{p+1}} = \sum_{q=p}^{\infty} \frac{L_q^p(\rho)}{q!} s^q . \quad (3.13)$$

La serie presente nel membro di destra converge semplicemente per  $|s| < 1$  e uniformemente in un qualsiasi chiuso contenuto in questo intervallo. Dal modo in cui sono state definite le  $\mathcal{U}_p(\rho, s)$  nel libro [17] (pag. 155-157) è possibile osservare che le relazioni (3.13) rimangono valide anche in un intervallo contenuto in  $(-1, 1)$ , purché la derivazione rispetto alla variabile  $s$  rimanga possibile. Visto che nei successivi passaggi risulterà necessario utilizzare alcune proprietà derivanti dalla convergenza assoluta, d'ora in avanti tutte le relazioni saranno definite in un intervallo  $|s| \leq d$  con  $0 < d < 1$ .

Inoltre, per comodità di notazione, si pone

$$p = 2l + 1 , \quad q = n + l . \quad (3.14)$$

Dalla definizione (3.13) si ottiene la relazione

$$\int_0^{\infty} \rho^p e^{-\rho C} \mathcal{U}_p(\rho, s) \mathcal{U}_p(\rho, t) d\rho = \int_0^{\infty} \rho^p e^{-\rho C} \left( \sum_{k=p}^{\infty} \frac{L_k^p(\rho)}{k!} s^k \right) \left( \sum_{m=p}^{\infty} \frac{L_m^p(\rho)}{m!} t^m \right) d\rho \quad (3.15)$$

$$= \sum_{k=p}^{\infty} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{s^k t^m}{k! m!} I_{pk, pm}^p \quad (3.16)$$

in cui per semplicità è stato definito

$$I_{pk, pm}^p \equiv \int_0^{\infty} \rho^p e^{-\rho C} L_k^p(\rho) L_m^p(\rho) d\rho . \quad (3.17)$$

Concentrandosi sul membro di sinistra dell'equazione (3.15) e sviluppando i vari termini si ottiene

$$\int_0^{\infty} \rho^p e^{-\rho C} \left( \frac{(-s)^p e^{-\rho s/(1-s)}}{(1-s)^{p+1}} \right) \left( \frac{(-t)^p e^{-\rho t/(1-t)}}{(1-t)^{p+1}} \right) d\rho . \quad (3.18)$$

Raccogliendo i termini comuni e fattorizzando dove possibile si arriva a

$$\frac{(-s)^p (-t)^p}{(1-s)^{p+1} (1-t)^{p+1}} \int_0^{\infty} \rho^p e^{-\rho [C + s/(1-s) + t/(1-t)]} d\rho. \quad (3.19)$$

Utilizzando l'integrale noto esposto nella formula (3.11) si ottiene

$$(st)^p \frac{p!}{[C(1-s-t+ts) + s + t - 2ts]^{(p+1)}}. \quad (3.20)$$

Dalla sua stessa definizione nelle relazioni (3.6) è possibile osservare che  $C \gg 1$ ; inoltre, poiché nell'intervallo preso precedentemente in considerazione  $t, s \neq 1$ , possiamo approssimare l'espressione (3.20) ottenendo

$$\frac{(st)^p p!}{[C(1-s)(1-t)]^{(p+1)}}. \quad (3.21)$$

Sfruttando il teorema binomiale

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r \quad (3.22)$$

e sviluppando i termini  $[1/(1-s)^{(p+1)}]$  e  $[1/(1-t)^{(p+1)}]$ , si arriva all'espressione

$$\frac{(st)^p p!}{C^{(p+1)}} \left[ \sum_{f=0}^{\infty} \binom{p+1+f-1}{f} s^f \right] \left[ \sum_{g=0}^{\infty} \binom{p+1+g-1}{g} t^g \right]. \quad (3.23)$$

Dopo aver espanso il termine binomiale e semplificato dove possibile, si confronta il risultato appena ottenuto con il termine di destra dell'equazione (3.16)

$$\frac{1}{C^{(p+1)} p!} \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \frac{(p+f)!(p+g)!}{f!g!} s^{f+p} t^{g+p} = \sum_{k=p}^{\infty} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{s^k t^m}{k!m!} I_{pk, pm}^p. \quad (3.24)$$

A questo punto, per poter ricavare un'espressione per  $I_{pk, pm}^p$ , considerato che l'equazione (3.24) deve valere per ogni  $s$  e  $t$ , è necessario confrontare il termine di sinistra con quello di destra a potenza di  $s$  e  $t$  fissata.

Quello che davvero è significativo, al fine di calcolare la variazione portata dallo scambio del bosone ai livelli energetici, è trovare un'espressione per  $I_{pq, pq}^p$ . Ci si può quindi limitare a studiare i casi in cui si è posto  $k = m = q$ . Per avere anche nel membro di sinistra le stesse potenze di  $s$  e  $t$  bisogna porre  $f = g = q - p$ .

Si ottiene così l'uguaglianza

$$\frac{(p+q-p)!(p+q-p)!}{C^{(p+1)} [(q-p)!]^2 p!} s^q t^q = \frac{s^q t^q}{(q!)^2} I_{pq, pq}^p. \quad (3.25)$$

In conclusione, dopo aver semplificato dove possibile si giunge all'espressione

$$I_{pq, pq}^p = \frac{(q!)^4}{C^{(p+1)} [(q-p)!]^2 p!}. \quad (3.26)$$

Per il calcolo delle variazioni di energia nell'atomo di idrogeno, mettendo assieme tutti i contributi, si ottiene

$$\Delta E_{Higgs} = \langle nlm | H_{Higgs}(r) | nlm \rangle = - \left( N_{nl} \right)^2 \frac{y_e y_p}{4\pi} \left( \frac{n a_0}{2} \right)^2 I_{pq, pq}^p. \quad (3.27)$$

Ricordando come erano stati definiti  $N_{nl}$  e  $C$  nella formula (3.6) e ponendo nella formula (3.26)  $p = 2l + 1$  e  $q = n + l$  si ricava

$$\Delta E_{Higgs} = -a_0^{-3} \frac{4}{n^4} \frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3} \frac{y_e y_p}{4\pi} \left(\frac{n a_0}{2}\right)^2 \frac{[(n+l)!]^4}{[(n-l-1)!]^2 (2l+1)!} \left(\frac{2}{m_h n a_0}\right)^{2(l+1)}. \quad (3.28)$$

Semplificando e raccogliendo i vari termini si ottiene come formula finale

$$\Delta E_{Higgs} = -\frac{y_e y_p}{\pi} \frac{2^{(2l)}}{n^{(2l+4)}} \frac{(n+l)!}{(n-l-1)! (2l+1)!} \frac{1}{a_0^{(2l+3)}} \frac{1}{m_h^{2(l+1)}}. \quad (3.29)$$

Utilizzando questa formula per il calcolo della perturbazione nei casi con  $(n = 1, l = 0)$ ,  $(n = 2, l = 0)$  e  $(n = 2, l = 1)$  e confrontando tali espressioni con (3.2), (3.3) e (3.4), è possibile constatare come le approssimazione presenti in queste ultime espressioni siano equivalenti a quella riportata nell'espressione (3.21).

# Capitolo 4

## Risultati

### 4.1 Studio della perturbazione in funzione di $n$ , $l$ e $m_h$

Ora, alla luce di quanto finora esposto, analizzando la perturbazione in oggetto e la modifica del suo valore al variare dei parametri, appare evidente che all'aumentare di  $n$  ed  $l$  la variazione di energia diminuisce. Tuttavia, come si può vedere dalle figure (4.1) e (4.2), mentre l'aumento di  $n$  di un'unità non influenza di molto il computo complessivo, a causa del termine  $\frac{1}{(a_0 m_h)^{2(l+1)}}$ , l'aumento di  $l$  anche di una sola unità, porta la perturbazione a parità di  $n$ , a diminuire di un fattore  $(a_0 m_h)^2 \approx 10^{15}$ .

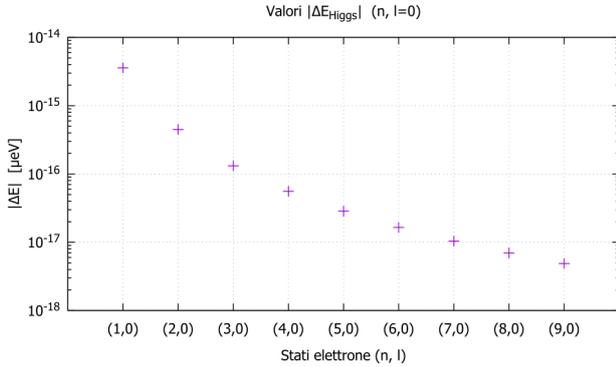


Figura 4.1: Valori della perturbazione  $|\Delta E_{Higgs}|$  al variare di  $n$ , tenendo  $l = 0$ .

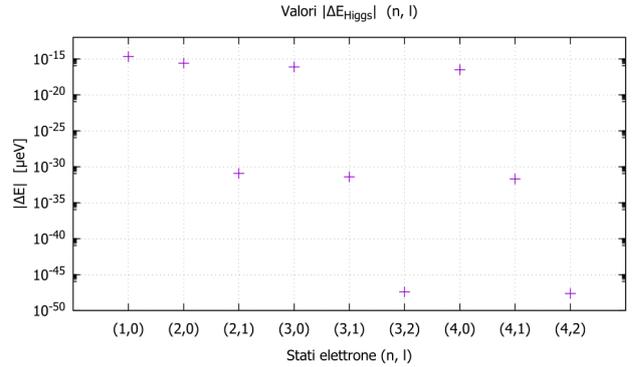


Figura 4.2: Valori della perturbazione  $|\Delta E_{Higgs}|$  al variare di  $n$  e  $l$ .

Figura 4.3: I valori inseriti in queste due figure sono stati ottenuti a partire dall'equazione (3.29).

Se invece del bosone di Higgs del modello standard si volesse calcolare la perturbazione causata dallo scambio di un'altra particella scalare, con massa  $m_s$ , come si trova nelle teorie oltre il modello standard, la variazioni di energia prevista cambierebbe di un fattore  $(\frac{m_h}{m_s})^{2(l+1)}$ .

### 4.2 Confronto con altre correzioni

È immediato poter osservare nella figura (4.4) come la perturbazione ai livelli energetici dell'idrogeno causata dal bosone di Higgs sia estremamente più piccola di quella collegata alla struttura fine.

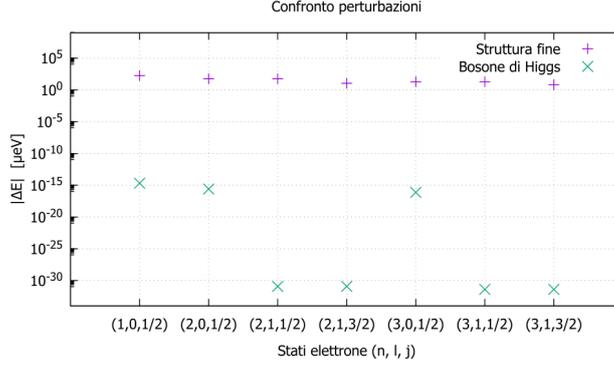


Figura 4.4: I dati riportati nel grafico sono presi dalla tabella (4.1).

Nella tabella (4.1), utilizzando le formule (2.15), (2.16) e (3.29), vengono confrontate le variazioni, ai livelli energetici dell'idrogeno  $E_n$ , portate dalla struttura fine e dallo scambio del bosone.

n	l	j	Struttura fine ( $\mu\text{eV}$ )	Bosone di Higgs ( $10^{-15} \mu\text{eV}$ )
1	0	1/2	-181.032	-3.581
2	0	1/2	-56.5725	-0.448
2	1	1/2	-56.5725	$-2 * 10^{-16}$
2	1	3/2	-11.3145	$-2 * 10^{-16}$
3	0	1/2	-20.1147	-0.133
3	1	1/2	-20.1147	$-7 * 10^{-17}$
3	1	3/2	-6.7049	$-7 * 10^{-17}$

Tabella 4.1: Confronto tra le variazioni di energia portate dalla struttura fine e dallo scambio del bosone di Higgs.

A causa del fattore  $(a_0 m_h)^2$  e del già basso valore della perturbazione legata all'Higgs, nella tabella sono stati riportati solo stati con basso valore di  $l$ .

Anche confrontando la perturbazione oggetto della tesi con la struttura iperfine (ulteriore approssimazione alla struttura fine che considera anche lo spin del nucleo e che nell'atomo di idrogeno è comunque dell'ordine di  $10^{-6}$  eV) è evidente che questa nuova interazione sia estremamente piccola rispetto a quelle precedenti: almeno di un fattore pari a  $10^{17}$ .

Sarebbe quindi stato più corretto usare le autofunzioni "successive" alla struttura fine e molto probabilmente, data l'enorme differenza tra le due variazioni, sarebbe stato opportuno sviluppare il calcolo ad un ordine perturbativo successivo al primo. Risulterebbe allora necessario, oltre ad avere a disposizione misure molto precise, possedere anche un'accurata conoscenza teorica relativa a perturbazioni con intensità paragonabile a quella portata dal bosone di Higgs.

### 4.3 Coefficiente di accoppiamento $y_e$

In questa tesi l'idea di base per riuscire a stimare  $y_e$  è di avere uno strumento in grado di apprezzare piccole variazioni nei livelli energetici dell'atomo di idrogeno e di associare tali variazioni allo scambio del bosone secondo la formula

$$E_{exp} - \Delta E_{struttura\ fine} = \Delta E_{Higgs}(y_e). \quad (4.1)$$

Così facendo sarebbe poi possibile, almeno in linea di principio, invertire tale relazione e ottenere un valore per  $y_e$ .

La precisione nelle misure della frequenza delle transizioni atomiche ha raggiunto un livello pari a qualche millesimo di Hz [18]. Considerata la relazione  $E = h f$  ne consegue una precisione energetica pari a circa  $10^{-18}$  eV. Tuttavia, sebbene sia un risultato eccezionale ciò non è ancora sufficiente per apprezzare perturbazioni che nella migliore delle ipotesi sono dell'ordine di  $10^{-21}$  eV (come indicato nella tabella (4.1) ).

Inoltre, studiando perturbazioni così minime, sarebbe necessario tenere in considerazione anche tutta una serie di effetti altrettanto piccoli (e spesso ancora in fase di studio), che potrebbero portare contributi paragonabili e quindi rendere inefficiente la formula (4.1). Tra queste possibili interazioni ci potrebbero essere quelle dovute allo scambio di altri bosoni, come il  $W$  o lo  $Z$ , oppure, ad esempio, quelle legate al "proton size puzzle".

## Capitolo 5

# Conclusioni

Dopo aver calcolato con successo l'effetto della forza dell'Higgs sulle transizioni atomiche dell'idrogeno, si è potuto constatare che tale perturbazione è troppo piccola per essere misurata dalle moderne apparecchiature e che quindi, anche in questo caso, è possibile solo porre un limite superiore al coefficiente di accoppiamento  $y_e$ .

Come anticipato, per lo studio della nuova fisica, l'effetto risulterebbe più grande nei casi in cui il propagatore fosse più leggero, come ad esempio nei fotoni massivi o in altri bosoni di Higgs più leggeri. Un esempio per lo studio di questi effetti è trattato nell'articolo [19].

Sarebbe interessante inoltre studiare tale fenomeno anche in atomi più pesanti dove la perturbazione potrebbe risultare maggiore; si veda per esempio [6].

# Bibliografia

- [1] Particle Data Group et al. “Review of particle physics”. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2020.8 (2020), p. 083C01.
- [2] Peter W. Higgs. “Broken symmetries, massless particles and gauge fields”. In: *Phys. Lett.* 12 (1964).
- [3] Peter W. Higgs. “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons”. In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964).
- [4] F. Englert e R. Brout. “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons”. In: *Phys. Rev.Lett.* 13 (1964). A cura di J.C. Taylor, pp. 321–323.
- [5] G.S. Guralnik, C.R. Hagen e T.W.B. Kibble. “Global Conservation Laws and Massless Particles”.In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964). A cura di J.C. Taylor, pp. 585–587.
- [6] Cedric Delaunay et al. “Probing Atomic Higgs-like Forces at the Precision Frontier”. In:*Phys. Rev.D*96.9 (2017), p. 093001. arXiv: 1601.05087 [hep-ph] .
- [7] S. Chatrchyan et al. (CMS Collaboration), *Phys. Lett.* B716, 30 (2012).
- [8] G. Aad et al. (ATLAS Collaboration), *Phys. Lett.* B716, 1 (2012).
- [9] CMS collaboration. *CMS sees evidence for the Higgs boson decaying into muon*. URL: <https://cms.cern/news/cms-sees-evidence-higgs-boson-decaying-muons>.
- [10] G. Perez, Y. Soreq, E. Stamou, and K. Tobioka, *Phys. Rev.* **D92**, 033016 (2015).
- [11] C. Delaunay, T. Golling, G. Perez, and Y. Soreq, *Phys. Rev.* **D89**, 033014 (2014).
- [12] A. L. Kagan, G. Perez, F. Petriello, Y. Soreq, S. Stoynev, and J. Zupan, *Phys. Rev. Lett.* 114, 101802 (2015).
- [13] G. Aad et al. (ATLAS), *Phys. Lett.* B738, 68 (2014).
- [14] V. Khachatryan et al. (CMS Collaboration), *Phys. Lett.* B744, 184 (2015).
- [15] Anthony Zee. *Quantum field theory in a nutshell. Vol. 7*. Princeton university press, 2010.

- [16] Alberto Carnera. *Appunti di fisica della materia*. 2013.
- [17] Brian Harold Bransden, Charles Jean Joachain e Theodor J Plivier. *Physics of atoms and molecules*. Pearson education, 2003.
- [18] B. Bloom, T. Nicholson, J. Williams, S. Campbell, M. Bishof, X. Zhang, W. Zhang, S. Bromley, and J. Ye, *Nature* 506, 71 (2014).
- [19] Cedric Delaunay et al. “*Probing new spin-independent interactions through precision spectroscopy in atoms with few electrons*”. In: *Phys. Rev.* D96.11 (2017), p. 115002.
- [20] Paolo Baglioni. *Il campo di Klein-Gordon e i diagrammi di Feynman*. Alma Master Studiorum - Università di Bologna.
- [21] Official Cern website. *The Higgs boson: What makes it special?* URL: <https://home.cern/news/series/lhc-physics-ten/higgs-boson-what-makes-it-special>.
- [22] Official Cern website. *The Higgs boson*. URL: <https://home.cern/science/physics/higgs-boson>.