

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

Formazione di pianeti in sistemi binari di stelle e dinamica dei planetesimi in dischi protoplanetari massivi

Relatore:

PROF. FRANCESCO MARZARI

Laureando:

TIZIANO SCATOLIN

Anno Accademico 2014/2015

Indice

Introduzione	iii
1 Impostazione del problema	1
2 Equazioni di base	3
2.1 Equazioni di Lagrange considerando la gravità	3
2.1.1 Funzione di disturbo dovuta al disco	3
2.1.2 Funzione di disturbo dovuta alla binaria	6
2.1.3 Funzione di disturbo totale del planetesimo	7
2.1.4 Equazioni di evoluzione e loro soluzioni	8
2.2 Equazioni di Lagrange in presenza di drag	9
3 Calcolo della forza di drag	11
4 Conclusioni	13
A Approssimazione locale	17
Bibliografia	21

Introduzione

I risultati delle ricerche sulla velocità radiale (effetto Doppler) dimostrano che circa il 20% degli esopianeti risiede in sistemi binari di stelle. Mentre la maggior parte di questi sistemi binari hanno larga separazione tra le componenti stellari (centinaia di AU), alcuni di loro sono sistemi con periodi binari relativamente corti di circa 100 yr. Uno dei migliori esempi di una binaria del genere è γ Cephei che consiste in due stelle con masse $M_p = 1,6M_\odot$ e $M_s = 0,41M_\odot$, con un semiasse maggiore $a_b = 19$ AU (periodo orbitale $P_b = 58$ yr) e un'eccentricità $e_b = 0,41$. Il pianeta con la massa proiettata $M_{pl} \sin i = 1,6M_J$ (che è la massa che vede l'osservatore studiando l'effetto Doppler) è in orbita attorno alla primaria con un semiasse maggiore $a_{pl} \approx 2$ AU. Molti altri sistemi planetari all'interno di piccole binarie ($a_b \approx 20$ AU) sono noti ad oggi, incluso il pianeta terrestre attorno alla nostra stella vicina α Cen.

Per lungo tempo i teorici si sono sforzati di spiegare l'origine dei pianeti in orbite di tipo S (pianeta che orbita attorno alla primaria) in accordo con la classificazione di Dvorak [11] del 1982. Il problema risiede nel forte eccitamento dinamico al quale ogni oggetto in un sistema binario è soggetto. Ci si aspetta che le perturbazioni gravitazionali dovute alla compagna eccentrica influenzino negativamente la formazione planetaria già nello stadio di crescita planetesimale.

Come in origine mostrato da Heppenheimer [10] le perturbazioni della compagna portano le eccentricità dei planetesimi ad alti valori, raggiungendo facilmente eccentricità pari a 0,1 a 2 AU dalla primaria. I planetesimi dovrebbero quindi collidere a velocità relative di qualche km/s, che sono molto maggiori delle velocità di fuga dalla superficie di un corpo di addirittura 100 km (circa 100 m/s). Come conseguenza, le collisioni dovrebbero portare alla distruzione dei planetesimi, invece che alla loro crescita.

Varie possibilità sono state suggerite per spiegare la formazione dei pianeti nonostante le perturbazioni della binaria. In particolare, Marzari & Scholl [7] (poi verificato in [5], Capitolo 7) studiarono gli effetti dissipativi del gas drag come mezzo di smorzamento delle velocità relative dei planetesimi. Essi hanno mostrato che per un disco assisimmetrico il gas drag induce un allineamento delle orbite dei planetesimi così che i periassi di oggetti piccoli fortemente influenzati dal gas drag

tendono ad aggregarsi attorno a $3/2\pi$ rispetto alla linea degli apsi del sistema binario. Questo fu in origine pensato come metodo per favorire l'accumulazione di planetesimi poiché le velocità relative dei corpi collidenti sono ridotte dal fatto che le orbite sono in fase. Tuttavia, fu successivamente riconosciuto che la riduzione delle velocità relative causata dall'allineamento degli apsi ha effetto solo per planetesimi di dimensioni simili. Oggetti di dimensioni diverse collidono ancora ad alte velocità, il che complica il loro accrescimento.

Questi studi sono generalmente arrivati alla stessa conclusione – la difficoltà della crescita dei planetesimi – nonostante i vari modi in cui il disco gassoso e le sue interazioni con i planetesimi siano state trattate. Mentre i primi calcoli tipicamente assumono che le proprietà del disco debbano essere descritte da alcuni modelli (semi)analitici assisimmetrici, molti studi recenti seguirono le proprietà e l'evoluzione dei dischi gassosi nelle binarie usando simulazioni idrodinamiche dirette. Uno dei più importanti aspetti della fisica del disco che queste ultime catturano è lo sviluppo di non-assisimmetria nella distribuzione della densità superficiale del disco gassoso. Questa non-assisimmetria emerge dalla perturbazione gravitazionale della binaria compagna, e si manifesta soprattutto nel fatto che l'eccentricità delle traiettorie del fluido non è nulla. Un altro fenomeno è la precessione del disco, che a volte si sviluppa nelle simulazioni ed ha un successivo effetto nella dinamica dei planetesimi.

Un modo completamente diverso per diminuire le eccentricità dei planetesimi nelle binarie è stato seguito da Rafikov [4], che dimostrò che le eccentricità dei planetesimi possono essere considerabilmente minori rispetto a quanto pensato in precedenza tenendo conto propriamente della gravità di un disco gassoso massivo assisimmetrico in cui i planetesimi si formano. Il potenziale non-Kepleriano del disco conduce ad una rapida precessione delle orbite dei planetesimi, sopprimendo l'effetto della compagna sulle loro eccentricità.

Si noti che un disco protoplanetario massivo deve essere stato abbastanza naturale in sistemi simili a γ Cep poiché tutti i sistemi noti (ad eccezione di α Cen) hanno pianeti simili a Giove con $M_{pl} \sin i = (1,6 - 4)M_J$. È naturale aspettarsi che la massa del disco originario ecceda significativamente la massa del pianeta, ad esempio di un fattore di circa 10 per la Minimum Mass Solar Nebula - minima massa della nebulosa per formare un sistema come quello Solare - che non rende irragionevole l'assunzione di un disco di massa $(0,01 - 0,1)M_\odot$, nonostante il fatto che ricerche sub-millimetriche (cioè con i radiointerferometri, come ALMA, che arrivano a captare lunghezze d'onda sub-millimetriche per ottenere immagini dettagliate della formazione delle stelle e dei pianeti nell'universo locale) trovano flussi molto bassi di emissione termica di polvere in giovani binarie con semiassi maggiori di molte decine di AU.

Come visto sopra, l'assunzione di un disco puramente assisimmetrico potrebbe

essere troppo semplicistica dato che le simulazioni indicano che i dischi protoplanetari in sistemi binari spesso sviluppano eccentricità significative. Su questo effetto, Silsbee & Rafikov [2] presentarono la prima indagine dell'eccitazione secolare delle eccentricità dei planetesimi grazie alle azioni simultanee delle perturbazioni gravitazionali dovute sia al disco gassoso eccentrico sia alla stella compagna. Mostrano che il campo gravitazionale non assisimmetrico di un disco del genere eccita le eccentricità dei planetesimi (oltre all'eccitazione prodotta dalla compagna) e in genere non gli permette di cadere al di sotto dell'eccentricità del disco, che potrebbe essere piuttosto alta come suggerito da alcune simulazioni. Questo potrebbe a sua volta sopprimere la crescita planetesimale.

D'altro canto, [2] mostrò molti modi nei quali questo problema può essere alleviato, per esempio se il disco gassoso sta eseguendo una rapida precessione o se la sua stessa gravità è capace di ridurre l'eccentricità del disco a bassi livelli. Allo stesso tempo, [2] non include il gas drag nei suoi calcoli, eliminando la possibilità dell'allineamento degli apsi dei planetesimi e lo smorzamento della loro eccentricità tramite drag.

Questo lavoro si basa sui risultati di studi precedenti, ed in particolare quelli riportati in [1] e [2] da Rafikov & Silsbee, tramite l'esplorazione della dinamica dei planetesimi in dischi complanari con la binaria sotto gli effetti combinati di (1) perturbazioni gravitazionali dovute a dischi gassosi eccentrici nei quali i planetesimi sono incorporati, (2) la gravità della compagna eccentrica e (3) gas drag.

L'elaborato è strutturato come segue: verrà presentata l'impostazione generale del problema, con le caratteristiche del disco esaminato; a seguire si deriveranno le equazioni di Lagrange per l'evoluzione dell'eccentricità del planetesimo dovuta alle perturbazioni gravitazionali e le si estenderanno al caso in cui vi è anche il contributo del drag; a tal proposito, verrà calcolata la forza di drag, spiegando cosa si intende per approssimazione locale, che è richiesta in tale calcolo. I risultati ottenuti evidenziano il ruolo decisivo che la gravità del disco e il gas drag giocano nella dinamica dei planetesimi nelle binarie, con importanti conseguenze per la formazione planetaria.

Capitolo 1

Impostazione del problema

L'impostazione generale riprende quella esplorata da Rafikov & Silsbee [1], che a sua volta si basa su quella di [2]. Si consideri un disco ellittico attorno alla stella primaria di un sistema binario con semiasse maggiore a_b , eccentricità e_b e masse delle componenti M_p (primaria) e M_s (secondaria). Si definiscono $\mu \equiv M_s/(M_p + M_s)$ e $\nu \equiv M_s/M_p$. Il sistema binario, il disco e le orbite dei planetesimi contenuti in esso sono assunti complanari. Questo distingue tale studio da molti altri studi focalizzati sugli effetti di oscillazioni di Lidov-Kozai sulle dinamiche di planetesimi in sistemi con compagne inclinate.

La struttura non assisimmetrica del disco è descritta tramite l'eccentricità non nulla del disco. Gli elementi di fluido in un disco seguono traiettorie ellittiche con eccentricità $e_g(a_d)$ che è una funzione del semiasse maggiore a_d di una particolare ellisse. Tali elementi hanno la stella primaria della binaria come fuoco. Per semplicità si assume che tutte le traiettorie ellittiche del fluido abbiano le linee degli apsi allineate, determinando unicamente l'orientazione del disco con un singolo parametro $\bar{\omega}_d$ – l'angolo tra le linee degli apsi del disco e del sistema binario. Quest'ultimo si assume sia fissato nello spazio poiché la precessione della binaria sotto la gravità del disco è più lenta di tutti gli altri processi. L'assunzione dell'allineamento degli apsi non influenza le caratteristiche qualitative della dinamica dei planetesimi e può essere facilmente rilassata con il risultato di Statler [9] - modello ad ellissi concentriche.

Poiché il gas si muove lungo delle ellissi, la sua densità superficiale in generale varia lungo la traiettoria. Per ottenere la densità superficiale del gas $\Sigma(r_d, \phi_d)$ in un punto del disco con coordinate polari (r_d, ϕ_d) , si specifica la densità superficiale del gas al periastro per ogni traiettoria ellittica $\Sigma_p(a_d)$ come funzione del semiasse maggiore della corrispondente ellisse a_d . In [2] si mostra come ciò e la conoscenza di $e_g(a_d)$ possano essere usati per derivare $\Sigma(r_d, \phi_d)$ ovunque nel disco. In questo lavoro, seguendo [2], viene assunta una semplice legge di potenza per la dipendenza

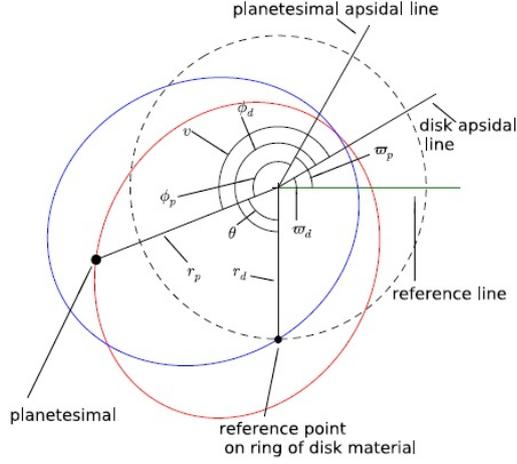


Figura 1.1: Geometria del problema (tratta da [2]), che mostra le traiettorie ellittiche sia del planetesimo (rosso) che dell'elemento di fluido rappresentativo (blu). La loro orientazione è mostrata usando differenti angoli polari. Il cerchio tratteggiato illustra il calcolo che verrà svolto in seguito della funzione di disturbo (senza drag).

sia di e_g che di Σ_p :

$$\Sigma_p(a_d) = \Sigma_0 \left(\frac{a_{out}}{a_d} \right)^p, \quad e_g(a_d) = e_0 \left(\frac{a_{out}}{a_d} \right)^q \quad (1.0.1)$$

dove a_{out} è il semiasse maggiore della più esterna traiettoria ellittica del disco, e Σ_0 ed e_0 sono i valori di Σ_p ed e_g ad a_{out} . La gravità della compagna tronca il disco al suo raggio più esterno a_{out} , che ad esempio per binarie eccentriche con $e_b = 0,14$ è circa $(0,2 - 0,3)a_b$. A meno che specificato diversamente, verrà usato $a_{out} = 5 \text{ AU}$.

In tutti i calcoli si userà un modello di disco con $p = 1$ e $q = -1$, perché tipicamente per i modelli dei dischi protoplanetari si trovano quei valori. La massa totale del disco $M_d \approx 2\pi \int_{a_{in}}^{a_{out}} \Sigma_p(a_d) a_d da_d$ racchiusa entro a_{out} può essere usata per esprimere Σ_p come segue, tenendo conto che $a_{in} \approx 0$:

$$M_d = 2\pi \int_0^{a_{out}} \Sigma_0 a_{out}^p a_d^{1-p} da_d \implies M_d = \frac{2\pi}{2-p} \Sigma_0 a_{out}^2 \implies \Sigma_0 = \frac{2-p}{2\pi} \frac{M_d}{a_{out}^2}$$

e, usando l'equazione (1.0.1) per $\Sigma_p(a_d)$, moltiplicando ambo i membri per $\left(\frac{a_{out}}{a_d} \right)^p$

$$\Sigma_p(a_d) = \frac{2-p}{2\pi} \frac{M_d}{a_{out}^2} \left(\frac{a_{out}}{a_d} \right)^p \approx 3 \times 10^3 \frac{g}{cm^2} M_{d,-2} a_{out,5}^{-1} a_{d,1}^{-1} \quad (1.0.2)$$

La stima numerica di [1] è per $p = 1$, con $M_{d,-2} \equiv \frac{M_d}{10^{-2} M_\odot}$, $a_{out,5} \equiv \frac{a_{out}}{5 \text{ AU}}$, $a_{d,1} \equiv \frac{a_d}{\text{AU}}$.

Capitolo 2

Equazioni di base

L'interesse è rivolto alla dinamica dei planetesimi orbitanti attorno alla primaria entro il disco e complanari ad esso. Si caratterizzano le loro orbite col semiasse maggiore a_p , l'eccentricità e_p e l'angolo rispetto alla linea degli apsi della binaria $\bar{\omega}_p$. L'evoluzione orbitale dei planetesimi è trattata in approssimazione secolare, cioè trascurando perturbazioni gravitazionali a breve termine. Si assume anche $e_p \ll 1$ come $e_g \ll 1$ e si introduce, per praticità, il vettore dell'eccentricità del planetesimo $\mathbf{e}_p = (k_p, h_p) = e_p(\cos \bar{\omega}_p, \sin \bar{\omega}_p)$.

Successivamente, verranno considerate completamente le perturbazioni gravitazionali dovute sia alla compagna che all'eccentricità del disco per derivare poi un set di equazioni di Lagrange che descrivono l'evoluzione di \mathbf{e}_p sotto l'influenza delle sole forze gravitazionali. A completamento di ciò, verrà successivamente introdotta la parte relativa al drag.

2.1 Equazioni di Lagrange considerando la gravità

Considerando ora le perturbazioni gravitazionali sia della compagna binaria che del disco eccentrico, verrà studiata la dinamica dei planetesimi in queste condizioni, svolgendo i calcoli in approssimazione secolare (Murray & Dermott, [3]) mediando la funzione di disturbo del planetesimo R nel tempo, eliminando così i termini a breve periodo, e tenendo solo i contributi che variano lentamente fino al secondo ordine nell'eccentricità del planetesimo e_p e al primo ordine nell'eccentricità del disco e_d (in tutti i termini).

2.1.1 Funzione di disturbo dovuta al disco

Nell'Appendice A di [2] è presente un calcolo dettagliato della funzione di disturbo del planetesimo R_d dovuta al disco non-assisimmetrico con distribuzioni di densità

tà superficiale ed eccentricità date dall'equazione (1.0.1). Questo calcolo è molto generale e può essere applicato ad un disco arbitrariamente eccentrico, non necessariamente attorno ad una componente del sistema binario. In particolare, può essere usato per studiare la dinamica dei planetesimi in un disco circumbinario.

Viene inoltre mostrato nell'Appendice A di [2] che, in approssimazione secolare e all'ordine principale in e_d ed e_p , la funzione di disturbo dovuta al disco eccentrico con orientazione $\bar{\omega}_d$ (indipendente dalla distanza dalla primaria) ha la forma

$$R_d = a_p^2 n_p \left[\frac{1}{2} A_d e_p^2 + B_d e_p \cos(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_d) \right] \quad (2.1.1)$$

dove

$$A_d = 2\pi \frac{G\Sigma_p(a_p)}{a_p n_p} \psi_1$$

$$B_d = \pi \frac{G\Sigma_p(a_p)}{a_p n_p} e_d(a_p) \psi_2$$

ed in cui $n_p \equiv \sqrt{\frac{GM_p}{a_p^3}}$ è il moto medio del planetesimo, con le costanti adimensionali ψ_1 e ψ_2 date da

$$\psi_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4} \left[(1-p)(2-p)\psi_0(\alpha_1, \alpha_2) + 2(p-1)\alpha_2^{p-1} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_2) - \frac{d}{d\alpha_2}(\alpha_2^p b_{1/2}^{(0)}(\alpha_2)) + 2(2-p)\alpha_1^{2-p} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_1) - \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(\alpha_1^{3-p} b_{1/2}^{(0)}(\alpha_1)) \right] \quad (2.1.2)$$

$$\psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{(p+q)(p+q-3)}{2} [I(\alpha_1, 1-p-q, 1) + I(\alpha_2, p+q-2, 1)] + \frac{\alpha_1^{2-p-q}}{2} \times \left[(p+q-1)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_1) + \alpha_1 \frac{\partial b_{1/2}^{(1)}}{\partial\alpha_1} \right] + \frac{\alpha_2^{p+q-1}}{2} \left[(2-p-q)b_{1/2}^{(1)}(\alpha_2) + \alpha_2 \frac{\partial b_{1/2}^{(1)}}{\partial\alpha_2} \right] \quad (2.1.3)$$

ove

$$\psi_0(\alpha_1, \alpha_2) = I(\alpha_1, 1-p, 0) + I(\alpha_2, p-2, 0),$$

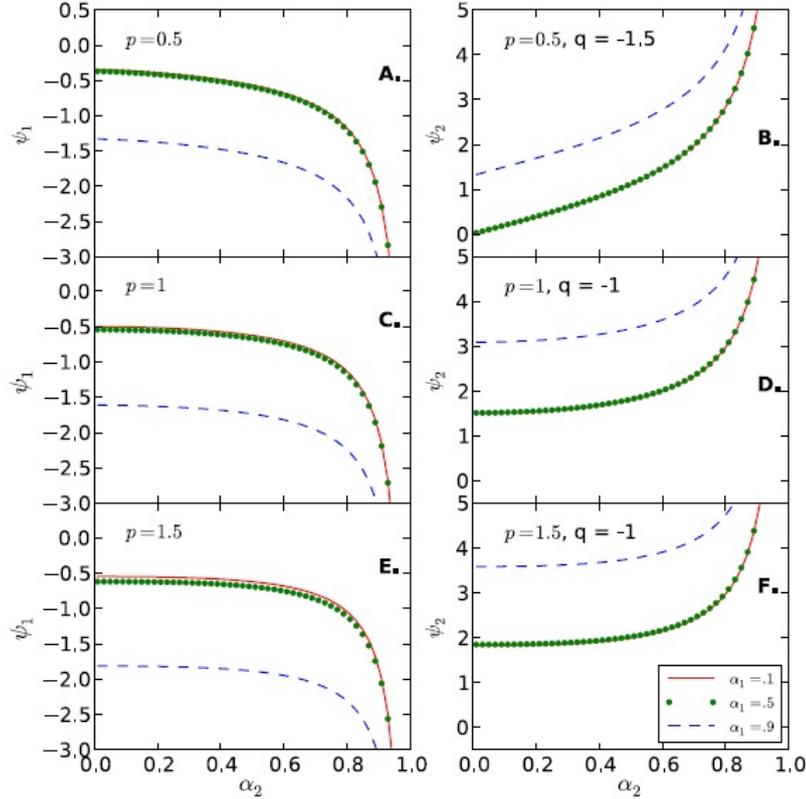
$$I(x, y, z) \equiv \int_x^1 \alpha^y b_{1/2}^{(z)}(\alpha) d\alpha \quad b_s^{(j)}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(j\theta) d\theta}{(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^s}$$

Per derivare l'espressione per R_d (2.1.1) si è usata l'equazione (A31) di [2], cioè

$$R = \pi G\Sigma_0 a_{out}^p a_p^{1-p} [\psi_0 + \psi_1 e_p^2 + \psi_2 e_d(a_p) e_p \cos(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_d)]$$

nella quale si trascura il termine contenente ψ_0 in quanto costante.

Tornando ai coefficienti ψ_1 e ψ_2 , essi sono funzioni degli indici p, q della legge di potenza, caratterizzanti la struttura del disco, come della distanza a_p rispetto ai confini del disco.



La figura (riportata in [2]) mostra il comportamento dei coefficienti per le componenti assisimmetriche (con ψ_1) e non-assisimmetriche (con ψ_2) della funzione di disturbo per vari valori di p, q e diversi $\alpha_1 \equiv a_{in}/a_p$, $\alpha_2 \equiv a_p/a_{out} \leq 1$ calcolato in accordo con le equazioni (2.1.2) e (2.1.3), che definiscono ψ_1 e ψ_2 . Si può vedere che per fissati valori di p, q , sia ψ_1 che ψ_2 convergono a valori dipendenti solo da p e q nel limite di $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0$. Per i valori scelti di p e q , ψ_1 e ψ_2 sono essenzialmente costanti eccetto quando α_1 o α_2 si avvicinano all'unità. Di conseguenza, ψ_1 e ψ_2 sono praticamente costanti distante dai confini del disco, in questi modelli. Questo non è il caso di un modello con $p + q = -1$, come nel riquadro *b*. Inoltre, nell'Appendice A di [2] si mostra che finché

$$-1 < p < 4 \quad \wedge \quad -2 < p + q < 5 \quad (2.1.4)$$

i valori di ψ_1 e ψ_2 sono determinati localmente dalla densità superficiale e dal comportamento di e_d nelle vicinanze di a_p (in Figura 2.1).

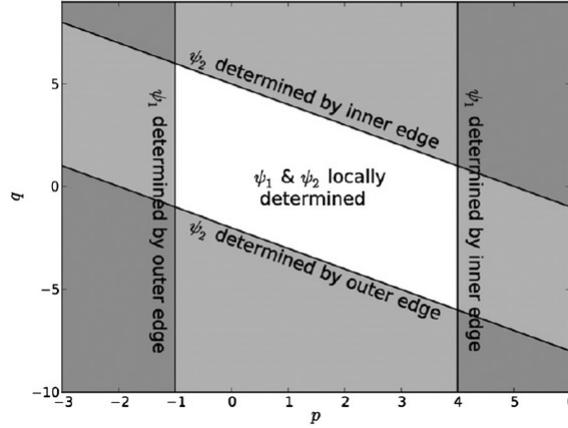


Figura 2.1: Illustrazione (tratta da [2]) delle proprietà di convergenza dei coefficienti ψ_1 e ψ_2 , caratterizzanti la precessione guidata del disco e l'eccitazione dell'eccentricità (equazioni di A_d e B_d), come funzione degli indici della legge di potenza p e q , i quali determinano la dipendenza radiale della densità superficiale del disco e dell'eccentricità. La regione non in ombra è una parte dello spazio dei parametri dove (distante dai confini del disco) i valori di ψ_1 e ψ_2 sono determinati dalle proprietà locali del disco, per ogni valore del raggio, e descritti dalla condizione (2.1.4). Al di fuori di questa regione, i termini di confine devono essere tenuti in considerazione in tutto il disco; si veda a tal proposito la figura precedente.

In questo caso, per un disco che si estende per più di un ordine di grandezza rispetto ad a_p l'effetto gravitazionale delle parti del disco vicine al confine non è importante. Allora ψ_1 e ψ_2 dipendono solo debolmente da $\alpha_{1,2}$ e possono essere ben approssimati dagli andamenti asintotici ricavati in [2]

$$\psi_1(0, 0) = -\frac{1}{2} + \frac{(1-p)(2-p)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)A_n}{(2n+2-p)(2n+p-1)}$$

$$\psi_2(0, 0) \rightarrow \frac{3}{2} - (p+q)(p+q-3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n(4n-1)A_n}{(2n-1)(2n+1-p-q)(2n-2+p+q)}$$

I loro valori in questo limite sono mostrati in Figura 2.2 come funzioni di p e $p+q$. Questo è il modo in cui spesso questi coefficienti saranno trattati (cioè, come costanti) nella seguente analisi, anche se come si è visto questa approssimazione cade vicino ai confini del disco.

2.1.2 Funzione di disturbo dovuta alla binaria

Un'altra perturbazione al moto del planetesimo è data dalla compagna. Per una stella binaria compagna esterna, questa è data dalla funzione di disturbo dovuta

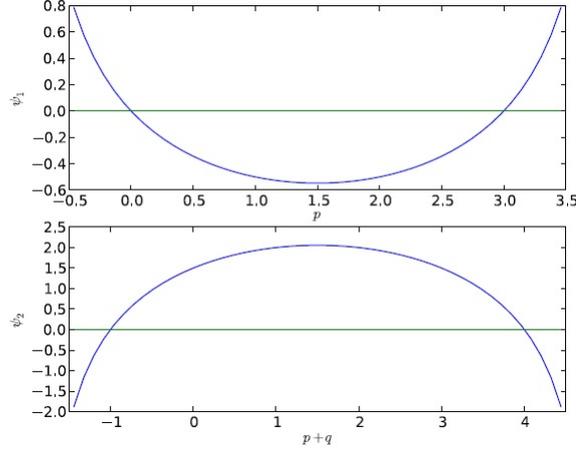


Figura 2.2: Dipendenza dei coefficienti (a) ψ_1 e (b) ψ_2 dagli indici della legge di potenza p e $p+q$, rispettivamente (linea blu), tratta da [2]. Il calcolo assume che le condizioni (2.1.4) siano realizzate (regione non in ombra della Figura 2.1) cosicché i valori di $\psi_{1,2}$ sono determinati dalle proprietà locali del disco per ogni raggio.

ad essa, come calcolato in [3]:

$$R_b = a_p^2 n_p \left[\frac{1}{2} A_b e_p^2 + B_b e_p \cos(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_b) \right]$$

dove

$$A_b = \frac{\nu}{4} n_p \alpha_b^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_b) \approx \frac{3}{4} n_p \nu \left(\frac{a_p}{a_b} \right)^3 \quad (2.1.5)$$

$$B_b = -\frac{\nu}{4} n_p \alpha_b^2 b_{3/2}^{(2)}(\alpha_b) e_b \approx -\frac{15}{16} n_p \nu \left(\frac{a_p}{a_b} \right)^4 e_b \quad (2.1.6)$$

Qui $\alpha_b \equiv a_p/a_b$ e $b_s^{(j)}(\alpha)$ rappresenta il coefficiente standard di Laplace. Le espressioni approssimate assumono $\alpha_b \ll 1$, che è un'assunzione ragionevole. Le equazioni (2.1.5) e (2.1.6) sono valide fino al primo ordine in $e_b \ll 1$.

2.1.3 Funzione di disturbo totale del planetesimo

Dato che la precessione della binaria dovuta alla gravità del disco è lenta, l'orientazione dell'ellisse orbitale della secondaria può essere approssimato come fisso nel tempo. Allora, senza perdita di generalità, si potrebbe scegliere la linea degli apside della binaria come direzione di riferimento, nel qual caso $\bar{\omega}_b = 0$. La funzione di disturbo totale (disco più stella) $R = R_d + R_b$ è data da

$$R = a_p^2 n_p \left[\frac{1}{2} A e_p^2 + B_d e_p \cos(\bar{\omega}_p - \bar{\omega}_d) + B_b e_p \cos \bar{\omega}_p \right]$$

dove

$$A = A_d + A_b$$

Ora, ricordando la definizione del vettore eccentricità del planetesimo $\mathbf{e}_p = (k_p, h_p)$, dove

$$k_p = e_p \cos \bar{\omega}_p, \quad h_p = e_p \sin \bar{\omega}_p,$$

è immediato verificare che R può essere riscritto in termini di h_p e k_p , come segue:

$$R = a_p^2 n_p \left[\frac{1}{2} A e_p^2 (\sin^2 \bar{\omega}_p + \cos^2 \bar{\omega}_p) + B_d e_p (\cos \bar{\omega}_p \cos \bar{\omega}_d + \sin \bar{\omega}_p \sin \bar{\omega}_d) + B_b e_p \cos \bar{\omega}_p \right]$$

da cui si consegue

$$R = a_p^2 n_p \left[\frac{1}{2} A (h_p^2 + k_p^2) + (B_b + B_d \cos \bar{\omega}_d) k_p + B_d \sin \bar{\omega}_d h_p \right] \quad (2.1.7)$$

2.1.4 Equazioni di evoluzione e loro soluzioni

In approssimazione secolare planare, solo l'eccentricità e_p e l'angolo $\bar{\omega}_p$ dell'orbita del planetesimo variano nel tempo. Si studierà questo processo seguendo l'evoluzione di k_p e h_p , usando le equazioni di Lagrange ricavate in [3]

$$\frac{dk_p}{dt} = -\frac{1}{n_p a_p^2} \frac{\partial R}{\partial h_p}, \quad \frac{dh_p}{dt} = \frac{1}{n_p a_p^2} \frac{\partial R}{\partial k_p}$$

Con R dato dall'espressione totale (2.1.7), le equazioni dell'evoluzione diventano

$$\frac{dk_p}{dt} = -A h_p - B_d \sin \bar{\omega}_d \quad (2.1.8)$$

$$\frac{dh_p}{dt} = A k_p + B_b + B_d \cos \bar{\omega}_d \quad (2.1.9)$$

Questo è il sistema di equazioni basilare per questo lavoro, valido finché l'orientazione delle traiettorie ellittiche del fluido, data da $\bar{\omega}_d$, è indipendente dal raggio.

Si noti che nella derivazione di tale sistema non si è fatta alcuna assunzione sul comportamento temporale di $\bar{\omega}_d$. Così, $\bar{\omega}_d$ nelle ultime due equazioni può essere un'arbitraria funzione del tempo, il che rende questo sistema di equazioni applicabile a dischi in rigida precessione così come a dischi in cui la linea degli apsi comune libra attorno alcune orientazioni di equilibrio.

Tuttavia, per semplicità, si vedrà il caso in cui $\bar{\omega}_d = \text{cost}$. Occorre risolvere le equazioni (2.1.8) e (2.1.9) assumendo l'orbita del planetesimo inizialmente circolare, cioè $k_p(0) = h_p(0) = 0$. La soluzione (calcolata in [2])

$$\begin{Bmatrix} k_p(t) \\ h_p(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_p(t) = \mathbf{e}_{\text{forced},b} + \mathbf{e}_{\text{forced},d} + \mathbf{e}_{\text{free}}$$

$$\mathbf{e}_{forced,b} = -\frac{B_b}{A} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{forced,d} = -\frac{B_d}{A} \begin{Bmatrix} \cos \bar{\omega}_d \\ \sin \bar{\omega}_d \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{free}(t) = A^{-1} \sqrt{B_d^2 + 2B_d B_b \cos \bar{\omega}_d + B_b^2} \begin{Bmatrix} \cos(At + \phi) \\ \sin(At + \phi) \end{Bmatrix}$$

è la somma di tre distinti contributi: $\mathbf{e}_{forced,b}$ è l'eccentricità forzata dovuta al potenziale della binaria, $\mathbf{e}_{forced,d}$ è l'eccentricità forzata dovuta al potenziale del disco ed $\mathbf{e}_{free}(t)$ è il vettore eccentricità libera che ruota col tasso di precessione A , con fase ϕ data dall'equazione

$$\sin \phi = \frac{B_d \sin \bar{\omega}_d}{\sqrt{B_d^2 + 2B_d B_b \cos \bar{\omega}_d + B_b^2}}$$

La variazione dell'eccentricità $e_p = (h_p^2 + k_p^2)^{1/2}$ è data da una semplice formula

$$e_p(t) = \frac{2}{A} \left| \sin \frac{At}{2} \right| \sqrt{B_d^2 + 2B_d B_b \cos \bar{\omega}_d + B_b^2}$$

Questo risultato mostra che la massima eccentricità varia da $2(|B_d| - |B_b|)/A$ a $2(|B_d| + |B_b|)/A$, a seconda del valore di $\bar{\omega}_d$.

2.2 Equazioni di Lagrange in presenza di drag

In aggiunta a questa analisi, vengono considerati anche gli effetti del gas drag sull'evoluzione secolare dell'eccentricità dei planetesimi. La dissipazione indotta dal drag si manifesta nella non-conservazione dell'energia e nell'evoluzione di a_p . Tuttavia, all'ordine zero, si può trascurare questo dal momento che lo spiraleggiamento radiale dei planetesimi di solito avviene su tempi scala molto più lunghi rispetto all'evoluzione delle loro eccentricità. Di conseguenza, ci si può concentrare sul comportamento di \mathbf{e}_p ad un fissato a_p e determinare le velocità relative dei planetesimi che ne determinano i diversi risultati nelle collisioni.

Il gas drag introduce termini addizionali nelle equazioni di evoluzione dell'eccentricità (2.1.8) e (2.1.9), che si possono riscrivere nella forma seguente:

$$\frac{dh_p}{dt} = Ak_p + B_b + B_d \cos \bar{\omega}_d(t) + \dot{h}_p^{drag}$$

$$\frac{dk_p}{dt} = -Ah_p - B_d \sin \bar{\omega}_d(t) + \dot{k}_p^{drag}$$

in cui $A = A_b + A_d$ è il tasso di precessione del planetesimo. Ad esso contribuiscono sia la gravità della secondaria (A_b) che del disco (A_d), con

$$A_b = \frac{\nu}{4} n_p \alpha_b^2 b_{3/2}^{(1)}(\alpha_b) \approx \frac{3}{4} n_p \nu \left(\frac{a_p}{a_b} \right)^3 \approx 5,9 \times 10^{-4} yr^{-1} \nu \frac{M_{p,1}^{1/2}}{a_{b,20}} a_{p,1}^{3/2} \quad (2.2.1)$$

dove $M_{p,1} \equiv \frac{M_p}{M_\odot}$, $a_{p,1} \equiv \frac{a_p}{AU}$, $a_{b,20} \equiv \frac{a_b}{20AU}$, $b_s^{(j)}(\alpha)$ è il coefficiente standard di Laplace, $\alpha_b \equiv \frac{a_p}{a_b}$ e l'approssimazione nell'equazione (2.2.1) funziona per $\alpha_b \ll 1$, come si verifica in [1] - in cui si calcolano anche le successive stime numeriche. Il contributo del disco, sfruttando la definizione del moto medio e il profilo di densità superficiale del disco (1.0.2), è

$$\begin{aligned} A_d &= 2\pi \frac{G\Sigma_p(a_p)}{a_p n_p} \psi_1 = 2\pi \frac{GM_d n_p}{a_p n_p^2} \frac{2-p}{2\pi a_{out}^2} \left(\frac{a_{out}}{a_p} \right)^p \psi_1 \\ &= (2-p) \psi_1 n_p \frac{M_d}{M_p} \left(\frac{a_p}{a_{out}} \right)^{2-p} \approx -6,3 \times 10^{-3} yr^{-1} a_{p,1}^{-1/2} \frac{M_{d,-2}}{M_{p,1}^{1/2} a_{out,5}} \end{aligned}$$

dove la stima numerica è per $p = 1$ così che $\psi_1 = -0,5$ ([2]). Si può vedere che per assunzioni ragionevoli sulla massa del disco ($M_d \sim 10^{-2} M_\odot$), il tasso di precessione del planetesimo a 1 AU è dominato dalla gravità del disco.

L'eccitazione dell'eccentricità per mezzo della binaria (B_b) e del disco (B_d) è descritta da

$$B_b = -\frac{\nu}{4} n_p \alpha_b^2 b_{3/2}^{(2)}(\alpha_b) e_b \approx -\frac{15}{16} n_p \nu \left(\frac{a_p}{a_b} \right)^4 e_b$$

e analogamente a quanto fatto per A_d risulta

$$\begin{aligned} B_d &= \pi \frac{G\Sigma_p(a_p)}{a_p n_p} e_d(a_p) \psi_2 = \pi \frac{G(2-p)M_d}{2\pi a_p a_{out}^2 n_p^2} n_p \left(\frac{a_{out}}{a_p} \right)^p e_d(a_p) \psi_2 \\ &= \frac{2-p}{2} \psi_2 e_g(a_p) n_p \frac{M_d}{M_p} \left(\frac{a_p}{a_{out}} \right)^{2-p} \end{aligned}$$

in cui l'ultima esplicitamente dipendente dal valore locale dell'eccentricità del disco $e_g(a_p)$ ($e_g \sim e_d$).

I termini \dot{h}_p^{drag} e \dot{k}_p^{drag} , assenti nella versione originale delle equazioni di Lagrange calcolate in [2], rappresentano l'effetto del gas drag sull'evoluzione dell'eccentricità; essi sono derivati nella successiva sezione, ma va sottolineato che la loro risoluzione è solamente numerica, in generale.

Tuttavia, si può verificare con le simulazioni la convergenza del vettore dell'eccentricità ad un valore stabile (eccentricità forzata) a causa della presenza del drag, e il raggiungimento di questo stato avverrà per tempi brevi o meno, a seconda dell'intensità del drag (marcata o debole, rispettivamente). Il principale risultato di questo lavoro è di vedere come la loro introduzione influenzi la dinamica dei planetesimi.

Capitolo 3

Calcolo della forza di drag

Ora si deriveranno le espressioni per i termini di evoluzione delle eccentricità indotti dal drag \dot{h}_p^{drag} e \dot{k}_p^{drag} applicabili al caso di un disco eccentrico.

Per via dell'assunzione, vista in precedenza, di piccole eccentricità sia per il gas che per i planetesimi, è ragionevole usare l'approssimazione locale (o "guiding center", [3], trattata in seguito nell'Appendice). In particolare, si vedranno le equazioni (A.0.8) che descrivono come k_p e h_p evolvono sotto l'effetto di una forza esterna \mathbf{F} .

Nel caso in esame, la forza \mathbf{F} è quella di drag derivante dal moto dei planetesimi rispetto al gas. Adachi et al. [8] danno la seguente espressione per la forza di drag quadratica (di Stokes) appropriata per oggetti rapidi con dimensioni maggiori del cammino libero medio delle molecole di gas:

$$\mathbf{F} = -\frac{C_D}{2}\pi d_p^2 \rho_g v_r \mathbf{v}_r \quad (3.0.1)$$

dove C_D è il coefficiente di drag per oggetti sferici costante pari a 0,5 in questo lavoro, d_p è la dimensione della particella e ρ_g la densità del gas. La velocità relativa tra gas e particella \mathbf{v}_r è data dalle equazioni (A.0.5)-(A.0.7) con componenti delle eccentricità relative particella-gas

$$h_r = h_p - h_g, \quad k_r = k_p - k_g \quad (3.0.2)$$

ed $\mathbf{e}_g = (k_g, h_g) = e_g(\cos \bar{\omega}_g, \sin \bar{\omega}_g)$ è il valore locale del vettore dell'eccentricità del gas. Usando queste espressioni, si ottengono le componenti della forza

$$F_x = -\frac{3C_D}{8}m_p D v_r^a (k_r \sin n_p t - h_r \cos n_p t)$$

$$F_y = -\frac{3C_D}{16}m_p D v_r^a (k_r \cos n_p t + h_r \sin n_p t)$$

dove m_p è la massa del planetesimo, e la velocità relativa v_r^a è data dall'equazione (A.0.7). Il coefficiente D ([1]) è dato da

$$D = \frac{n_p \Sigma_g r}{\rho_p d_p h}$$

con ρ_p la densità di massa della particella, $\Sigma_g = \sqrt{2\pi} h \rho_g$ e $h = \frac{c_s}{n_p}$ l'altezza di scala del disco ($c_s = \left(\frac{kT_g}{\mu}\right)^{1/2}$, in cui μ è il peso molecolare medio).

Adesso si sostituiscono le espressioni di F_x e F_y nelle prime due equazioni di (A.0.8) e poi le si media su un tempo t che è rappresentato dal periodo orbitale del planetesimo (questa è cioè l'approssimazione secolare mediata). Come conseguenza, si trova in [1]

$$\dot{k}_p^{drag} = -\frac{3C_D}{4\pi} E(\sqrt{3}/2) D k_r e_r$$

$$\dot{h}_p^{drag} = -\frac{3C_D}{4\pi} E(\sqrt{3}/2) D h_r e_r$$

dove $E(\sqrt{3}/2) \approx 1,211$ è un integrale ellittico completo¹, ed $e_r^2 = k_r^2 + h_r^2$. Si possono riscrivere le equazioni precedenti nella forma seguente:

$$\dot{k}_p^{drag} = -\frac{k_p - k_g}{\tau_d}, \quad \dot{h}_p^{drag} = -\frac{h_p - h_g}{\tau_d}$$

dove il tempo di smorzamento dell'eccentricità è

$$\tau_d = \frac{4\pi}{3C_D E(\sqrt{3}/2)} D^{-1} e_r^{-1} \approx 600 \text{yr} C_D^{-1} \frac{a_{out,5} a_{p,1}}{M_{p,1}^{1/2} M_{d,-2}} \frac{h/r}{0,1} \frac{10^{-2}}{e_r d_{p,1}}$$

Qui $d_{p,1} \equiv \frac{d_p}{1 \text{km}}$ e la stima numerica che si riporta in [1] è per $p = 1$ e $\rho_p = 3 \text{gcm}^{-3}$; nel caso della legge di drag quadratica (3.0.1) τ_d dipende da k_p e h_p attraverso e_r : si veda l'equazione (3.0.2).

¹Un integrale ellittico è una qualsiasi funzione f che può esprimersi nella forma

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t)) dt$$

dove R denota una funzione razionale dei suoi due argomenti, P è la radice quadrata di un polinomio in una variabile di grado 3 o 4 privo di radici multiple e c è una costante. La funzione R contiene almeno una potenza dispari di P , mentre R^2 non ha fattori ripetuti.

Un integrale ellittico completo è definito di seconda specie se

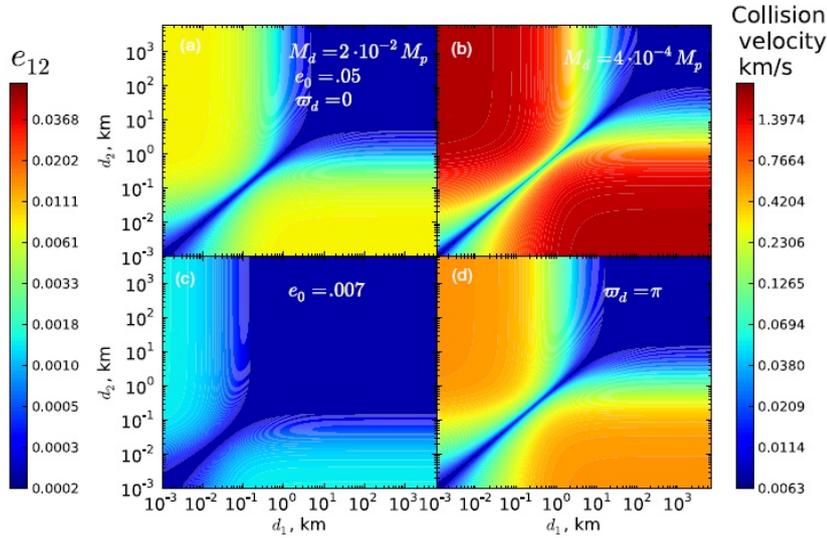
$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2 t^2}{1-t^2}} dt$$

Capitolo 4

Conclusioni

I calcoli finora svolti hanno permesso di stabilire le equazioni che governano l'eccentricità dei planetesimi sottoposti alle perturbazioni del disco, della binaria e del gas drag, senza nulla aggiungere però sulla loro evoluzione successivamente agli scontri che possono avvenire tra di essi.

Per quanto concerne la crescita dei planetesimi, con la successiva formazione di pianeti, i risultati ottenuti nella sezione 8 di [1] dimostrano chiaramente che la velocità relativa con la quale due planetesimi di dimensioni d_1 e d_2 si avvicinano l'uno all'altro precedentemente alla collisione è determinata dalla loro eccentricità relativa $e_{12} = |\mathbf{e}_p(d_1) - \mathbf{e}_p(d_2)|$.



In figura (tratta da [1]) si mappano $e_{12}(d_1, d_2)$ e anche la velocità relativa v_{12} del planetesimo con $a_p = 2$ AU nel sistema γ Cephei per diverse caratteristiche del disco. Vengono variati la massa del disco M_d , l'eccentricità al suo confine

più esterno e_0 e la sua orientazione rispetto all'orbita binaria $\bar{\omega}_d$, uno alla volta, tenendo gli altri parametri del disco fissati. Tutti i riquadri mostrano chiaramente molte caratteristiche invarianti chiave. Innanzitutto, c'è una dimensione critica d_c , attorno a $d_1 = d_2 \sim (0, 1 - 1)$ km, alla quale le mappe mostrano una "strettoia", nella quale e_{12} è piccola per collisioni di corpi con dimensioni uguali. Precisamente, e_{12} diventa piccola per incontri tra corpi entrambi piccoli, con $d_1, d_2 \lesssim d_c$, e per corpi entrambi grandi con $d_c \lesssim d_1, d_2$. Infine, e_{12} satura ad un valore all'incirca indipendente da d_1 o d_2 per collisioni di particelle con dimensioni molto diverse, cioè quando $d_1 \lesssim d_c \lesssim d_2$ e viceversa.

Poiché le particelle che collidono possono trovarsi in diversi regimi di drag (forte o debole), l'esito della collisione può essere molto diverso al variare del regime di ogni particella; le varie possibilità sono discusse in [1]. Ad esempio, per collisioni in cui entrambi i planetesimi sono in regime di drag forte, allora $d_1, d_2 \ll d_c$ e si dimostra che, tenendo conto del fatto che e_c è l'eccentricità caratteristica (cioè la differenza fra l'eccentricità forzata che raggiunge il planetesimo nel tempo e l'eccentricità del gas, in modulo)

$$e_{12}^{ss} \approx e_c \left| \left(\frac{d_1}{d_c} \right)^{1/2} - \left(\frac{d_2}{d_c} \right)^{1/2} \right|$$

Poiché $d_{1,2} \ll d_c$ nel limite di drag forte, si trova che $e_{12}^{ss} \lesssim e_c$, che spiega i bassi valori di e_{12} nell'angolo in basso a sinistra nelle mappe in figura.

Fisicamente, in questo regime, la velocità relativa dei due planetesimi è considerabilmente minore delle loro velocità individuali a causa dell'allineamento degli apsi delle loro orbite dovuto al gas drag ([7]) e ad ordini di grandezza di e_p simili.

Quando invece i due corpi che collidono sono entrambi in regime di drag debole, si trova

$$e_{12}^{ww} \approx e_c \left| \frac{d_c}{d_1} - \frac{d_c}{d_2} \right|$$

Dato che $d_{1,2} \gg d_c$ nel limite di drag debole, si trova ancora che $e_r^{ww} \lesssim e_c$, spiegando le eccentricità relative basse nell'angolo in alto a destra nelle mappe in figura. In questo caso, l'allineamento degli apsi è ancora in corso, ed è un processo che abbassa ulteriormente e_{12} . Tuttavia adesso è causato dalla gravità di disco+binaria, la quale influenza i planetesimi anche quando sono debolmente accoppiati al gas. Questo accade perché il gas smorza l'eccentricità libera, ma non è forte abbastanza da cambiare significativamente l'eccentricità forzata.

Per quel che riguarda l'ultima possibilità, si ha che quando uno dei planetesimi (per esempio di dimensione d_1) è nel regime di drag forte mentre l'altro è nel regime di drag debole, si mostra che la loro eccentricità relativa e_{12} è solo

$$e_{12}^{sw} \approx e_c$$

Si può vedere che e_{12} è all'incirca indipendente dalle dimensioni delle particelle partecipanti in una collisione.

Un confronto con i riquadri (a) e (b) della figura mostra che la massa del disco M_d gioca un ruolo importante nella determinazione del valore di e_{12} (il cui ordine di grandezza si dimostra essere praticamente determinato da e_c): i planetesimi in dischi di piccola massa ($M_d = 4 \times 10^{-4} M_\odot$) collidono con velocità molto maggiori che in dischi di grande massa ($M_d = 2 \times 10^{-2} M_\odot$). Questo perché per il valore scelto di $e_0 = 0,05 \approx e_c$ - valore alto - domina la compagna sul disco di massa piccola. Aumentando M_d come nel riquadro (a) domina il disco, che viene portato vicino alla valle di stabilità, ossia la strettoia lungo la bisettrice del primo quadrante, che ricrea condizioni favorevoli per la crescita dei planetesimi, spiegando quindi un valore molto minore di $e_c \approx 0,008$.

Abbassando e_0 per un disco di grande massa come nel riquadro (c) si riduce la scala delle velocità relative semplicemente perché il sistema va ancora più all'interno della valle di stabilità.

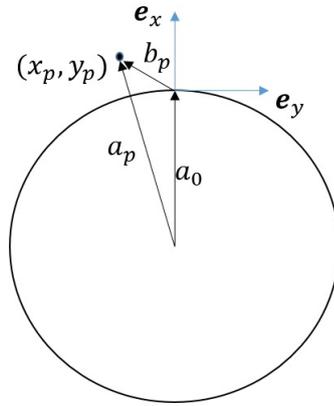
Un confronto tra i riquadri (a) e (d) mostra che anche cambiando l'orientazione del disco si influenza fortemente e_{12} : la valle di stabilità nel disco non allineato è più ridotta e la scala di eccentricità caratteristica aumenta considerevolmente. Di conseguenza, particelle in dischi disallineati collidono a velocità maggiori che nei dischi allineati, dunque la formazione di pianeti in questi casi è sfavorita.

In conclusione, quindi, si evince che la formazione dei pianeti in sistemi binari di stelle è fortemente influenzata dalla dinamica dei planetesimi, che a sua volta è sensibilmente dipendente dalle caratteristiche del disco - dalla sua gravità, in particolar modo. Si è visto dunque come l'introduzione del gas drag nelle equazioni di Lagrange abbia influito sul moto dei planetesimi, fornendone un'approssimazione migliore rispetto a quelle ottenute nei precedenti studi su tale argomento.

Appendice A

Approssimazione locale

L'approssimazione locale, o "guiding center", è spesso usata in studi di dinamica dei planetesimi o delle galassie e forma le basi delle cosiddette approssimazioni di Hill: essa verrà di seguito trattata riprendendo quanto discusso nell'Appendice A di [1] a tal proposito. In questo approccio, il moto eccentrico di un planetesimo è considerato in una struttura cartesiana locale (x_p, y_p) , con \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y che puntano nella direzione radiale e tangenziale rispettivamente. L'origine di questa struttura è nel moto circolare Kepleriano a qualche semiasse maggiore caratteristico a_0 , che è vicino al semiasse maggiore del planetesimo a_p , così che $b_p \equiv |a_p - a_0| \ll a_p$.



Le equazioni del moto per una particella di massa m_p soggetta ad una forza esterna $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ possono essere ridotte alle equazioni di Hill-Clohessy-Wiltshire

$$\ddot{x}_p - 2n_p\dot{y}_p - 3n_p^2x_p = F_x/m_p, \quad \ddot{y}_p + 2n_p\dot{x}_p = F_y/m_p \quad (\text{A.0.1})$$

Queste equazioni sono state dedotte in [6], a partire dalle equazioni di Hill per il problema a 3 corpi ristretto, senza quindi forze esterne, espandendo l'accelerazione

dovuta al Sole in termini di $x/a_0, y/a_0$ e tenendo il primo termine delle serie. Assunto che $e_p \ll 1$, si può rappresentare il moto del planetesimo imperturbato da forze esterne come

$$x_p = b_p - a_0(k_p \cos n_p t + h_p \sin n_p t), \quad y_p = \psi_p - \frac{3}{2}n_p b_p t + 2a_0(k_p \sin n_p t - h_p \cos n_p t) \quad (\text{A.0.2})$$

dove ψ_p è una costante ed $\mathbf{e}_p = (k_p, h_p)$. Questa è un'esatta soluzione dell'equazione (A.0.1) con $\mathbf{F} = 0$.

Assumendo che il fluido in dischi gassosi si muova anch'esso in orbite Kepleriane eccentriche, il moto del gas può essere rappresentato da equazioni analoghe

$$x_g = b_g - a_0(k_g \cos n_p t + h_g \sin n_p t), \quad y_g = \psi_g - \frac{3}{2}n_p b_g t + 2a_0(k_g \sin n_p t - h_g \cos n_p t) \quad (\text{A.0.3})$$

Il moto relativo tra un particolare elemento di fluido ed una particella è descritto usando coordinate relative $x_r = x_p - x_g, y_r = y_p - y_g$. In accordo con le equazioni (A.0.2) e (A.0.3)

$$x_r = b_r - a_p(k_r \cos n_p t + h_r \sin n_p t), \quad y_r = \psi_r - \frac{3}{2}n_p b_r t + 2a_p(k_r \sin n_p t - h_r \cos n_p t) \quad (\text{A.0.4})$$

dove $k_r \equiv k_p - k_g, h_r \equiv h_p - h_g$ sono le componenti del vettore di eccentricità relativa, $b_r \equiv b_p - b_g$ è il semiasse maggiore di separazione tra la particella e l'elemento di fluido, e $\psi_r \equiv \psi_p - \psi_g$. Si è inoltre usato il fatto che $a_g \approx a_0 \approx a_p$ e scambiato a_0 con a_p .

La velocità del moto Kepleriano in approssimazione locale è ottenuta differenziando le equazioni (A.0.4) rispetto al tempo. In particolare, la velocità relativa tra la particella e il gas è data da

$$v_{x,r} = n_p a_p (k_r \sin n_p t - h_r \cos n_p t), \quad v_{y,r} = -\frac{3}{2}n_p b_r + 2n_p a_p (k_r \cos n_p t + h_r \sin n_p t) \quad (\text{A.0.5})$$

Formule analoghe si applicano al moto relativo di due planetesimi di dimensioni d_1 e d_2 , con la sostituzione di $e_r \rightarrow e_{12}, b_r \rightarrow b_{12}, (x_r, y_r) \rightarrow (x_{12}, y_{12})$ e così via. In particolare, le equazioni (A.0.4) mostrano che due oggetti con $|b_{12}| < a_p e_{12}$ possono avere incontri ravvicinati. Quando ciò succede, $x_{12} = y_{12} = 0$ e b_{12} può essere eliminato dalle equazioni (A.0.5), dal momento che $x_{12} = 0 \implies b_{12} = a_p(k_{12} \cos n_p t + h_{12} \sin n_p t)$, fornendo

$$v_{12,y}(x_{12} = 0) = \frac{1}{2}n_p a_p (k_{12} \cos n_p t + h_{12} \sin n_p t) \quad (\text{A.0.6})$$

(qui $\mathbf{e}_{12} = (k_{12}, h_{12})$) così che la velocità relativa di avvicinamento (cioè la velocità non influenzata dalla mutua attrazione gravitazionale delle particelle) si

ottiene come

$$v_{12} = \sqrt{v_{12,x}^2 + v_{12,y}^2} = n_p a_p \left(k_{12}^2 \sin^2 n_p t + h_{12}^2 \cos^2 n_p t - 2h_{12} k_{12} \cos n_p t \sin n_p t + \frac{1}{4} \times \right. \\ \left. (k_{12}^2 \cos^2 n_p t + h_{12}^2 \sin^2 n_p t + 2h_{12} k_{12} \cos n_p t \sin n_p t) \right)^{1/2} = n_p a_p \left(k_{12}^2 \sin^2 n_p t + h_{12}^2 \cos^2 n_p t \right. \\ \left. - 2h_{12} k_{12} \cos n_p t \sin n_p t + \left(1 - \frac{3}{4} \right) (k_{12}^2 \cos^2 n_p t + h_{12}^2 \sin^2 n_p t + 2h_{12} k_{12} \cos n_p t \sin n_p t) \right)^{1/2}$$

che fornisce

$$v_{12} = n_p a_p \left[k_{12}^2 + h_{12}^2 - (3/4)(k_{12} \cos n_p t + h_{12} \sin n_p t)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.0.7})$$

Quando una particella è influenzata da altre forze rispetto alla gravità della stella, cioè $\mathbf{F} \neq 0$, le soluzioni (A.0.2) non sono più rigorosamente valide. Tuttavia, si può rappresentare il moto della particella tramite queste soluzioni, assumendo che gli elementi orbitali evolvano nel tempo. Hasegawa & Nakazawa [12] derivarono queste equazioni per l'evoluzione degli elementi orbitali, in particolare

$$\dot{a}_p = \dot{b}_p = \frac{2F_y}{n_p m_p}, \quad \dot{k}_p = \frac{1}{n_p a_p m_p} (2F_y \cos n_p t + F_x \sin n_p t), \\ \dot{h}_p = \frac{1}{n_p a_p m_p} (2F_y \sin n_p t - F_x \cos n_p t) \quad (\text{A.0.8})$$

Per una data espressione della forza \mathbf{F} , queste equazioni, dopo aver mediato sul periodo orbitale, rappresentano i termini aggiuntivi che entrano nelle equazioni di Lagrange.

Bibliografia

- [1] Rafikov R. R. & Silsbee K. 2015, ApJ, 798, 69
- [2] Silsbee K. & Rafikov R. R. 2015, ApJ, 798, 71
- [3] Murray C. D. & Dermott S. F. 1999, *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press
- [4] Rafikov R. R. 2013, ApJL, 765, L8
- [5] Marzari F., Thébault P., Kortenkamp S. & Scholl H. 2010, *Planets in Binary Star Systems*, Astrophysics and Space Science Library, 366, Nader Haghighipour (Editor), Springer
- [6] Cerdonio M., De Marchi F., De Pietri R., Jetzer P., Marzari F., Mazzolo G., Ortolan A. & Sereno M. 2010, *Classical & Quantum Gravity*, 27, id. 165007
- [7] Marzari F. & Scholl H. 2000, ApJ, 543, 328
- [8] Adachi I., Hayashi C. & Nakazawa K. 1976, PThPh, 56, 1756
- [9] Statler T. S. 2001, AJ, 122, 2257
- [10] Heppenheimer T. A. 1978, A&A, 65, 421
- [11] Dvorak R. 1982, OAWMN, 191, 423
- [12] Hasegawa M. & Nakazawa K. 1990, A&A, 227, 619