UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE STATISTICHE

CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA
IN STATISTICA ED INFORMATICA

TESI DI LAUREA

SOLUZIONI DI PERMUTAZIONE PER LA VERIFICA D'IPOTESI CONGIUNTA DEI PARAMETRI DI LOCAZIONE-SCALA

RELATORE: CH.MO PROF.
FORTUNATO PESARIN

LAUREANDA: ERIKA BELLIN

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

Ai

miei genitori

Indice

Capitolo 1

Introduzione allo studio

1.1 Descrizione del problema

Consideriamo due insiemi di dati $X = \{X_{ji}, i = 1, \ldots, n_j, j = 1, 2\} = (X_1, X_2)$ provenienti da due variabili casuali indipendenti con rispettive funzioni di distribuzione F_1 e F_2 non note. Vogliamo verificare il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} H_0 : & \big(F(X_1) = F(X_2)\big) = \Big(F_1\Big(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\Big) = F_2\Big(\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}\Big)\Big) \\ H_1 : & \big(F(X_1) \neq F(X_2)\big) \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $F(\cdot)$ rappresenta la funzione di distribuzione di una variabile continua con μ parametro di *locazione* e σ parametro di *scala*.
Il precedente sistema d'ipotesi può anche essere scritto come

$$\begin{cases} H_0 : & \{(\mu_1 = \mu_2) \cap (\sigma_1 = \sigma_2)\} \\ H_1 : & \{(\mu_1 \neq \mu_2) \cup (\sigma_1 \neq \sigma_2)\} \end{cases} \tag{1.2}$$

Si vuole quindi verificare congiuntamente se i parametri di locazione μ e di scala σ delle due distribuzioni coincidono.
Lo scopo di questo lavoro è di valutare due nuove soluzioni non parametriche entrambe basate sul test di permutazione, riassunte in breve qui di seguito:

A) per entrambi i campioni vengono calcolati due test separati, uno per il parametro di locazione ed uno per il parametro di scala, vengono generate

B permutazioni dei campioni osservati ottenendo così la distribuzione approssimata di permutazione dei test; vengono poi calcolati i *p-value* dei due test che successivamente vengono combinati, attraverso delle funzioni di combinazione non parametriche, per ottenere un *p-value* globale;

B) per entrambi i campioni vengono calcolati due test separati, uno per il parametro di locazione ed uno per il parametro di scala, effettuiamo per l'insieme delle statistiche permutate un approssimazione a distibuzioni note, confrontando così direttamente i valori dei test osservati evitando di calcolare la distribuzione di permutazione; i *p-value* dei due test successivamente vengono combinati, attraverso delle funzioni di combinazione non parametriche, per ottenere un *p-value* globale.

Verrà inoltre valutato come le soluzioni precedenti operino per ipotesi alternative unilaterali e quindi saranno considerati anche i seguenti sistemi d'ipotesi

$$\begin{cases} H_0: & \{(\mu_1 = \mu_2) \cap (\sigma_1 = \sigma_2)\} \\ H_1: & \{(\mu_1 < \mu_2) \cup (\sigma_1 < \sigma_2)\} \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{cases} H_0: & \{(\mu_1 = \mu_2) \cap (\sigma_1 = \sigma_2)\} \\ H_1: & \{(\mu_1 > \mu_2) \cup (\sigma_1 > \sigma_2)\} \end{cases} \tag{1.4}$$

in quanto negli studi condotti fino ad ora le ipotesi alternative considerate sono di tipo bilaterale $\{H_1 : \big(F(X_1) \neq F(X_2)\big)\}$.

Entrambe le soluzioni proposte sono soluzioni approsimate in quanto, come vedremo più avanti, con il primo approccio viene violato il principio di scambiabilità delle osservazioni sotto H_0, nel secondo caso le distribuzioni di permutazione sono approssimate tramite delle distribuzioni note.

1.2 Studi precedenti

Per questo tipo di problema la letteratura offre soluzioni sia in ambito parametrico che non parametrico. La soluzione più nota è di Lepage(1971) basata sui ranghi e combina il test di Wilcoxon per l'alternativa di locazione, con il test di Ansary-Bradley per l'alternativa di scala, soluzione che risulta potente per la non-normalità. Questa è considerata la prima soluzione ad essere proposta per tale problema, ma già nel 1968 Cucconi propose un test basato sui concetti di rango e controrango, test del tutto ignorato dalla comunità scientifica ma riportato alla conoscenza grazie ad un recente studio condotto da Marozzi(2006). Questo studio effettua un confronto tra il test di Lepage e di Cucconi ed evidenzia che i due test sono del tutto analoghi e che in situazione di distribuzioni normali il test di Cucconi è preferibile a Lepage. Molti sono stati i tentativi per migliorare il test di Lepage con la conseguente formulazione di test di Lepage modificati. Altre soluzioni sono basate sui test adattativi, i quali sono un rapporto di differenze di quantili, e valutano così il peso delle code della distribuzione. Kössler (2006) in un suo articolo confronta i test adattivi con alcune versioni modificate del test di Lepage e con il test di Lepage per varie distribuzioni campionarie evidenziando buoni risultati. Podgor e Gastwirth (1994) confrontano 14 test non parametrici per distribuzioni simmetriche ed asimmetriche con code più o meno pesanti, individuando i test con potenza maggiore per le varie situazioni indagate.
Büning e Thadewal (2000) conducono uno studio simile ai precedenti proponendo un test adattativo il quale risulta migliore per la maggior parte dei casi studiati. Tutti gli studi finora svolti arrivano alla medesima conclusione che non esiste un test con performance superiore a tutti gli altri , ma che per ciascuna situazione esiste un test appropriato.

Capitolo 2

Metodi non parametrici

2.1 Aspetti generali

Quando si studia un nuovo fenomeno e la forma della distribuzione dei dati è ignota, servono test che possano essere applicati con qualunque forma di distribuzione come sono appunto molti test non parametrici. I metodi non parametrici risultano generalmente meno potenti, per cui è più difficile rifiutare l'ipotesi nulla. Un test non parametrico indipendente dalla distribuzione dei dati e che sotto H_0 ha potenza pari ai test parametrici è il *test di permutazione*.

2.2 I test di permutazione

Il *test di permutazione* risulta molto intuitivo e semplice da applicare: soddisfatta l'assunzione di scambiabilità sotto H_0 nell'insieme dei dati $\mathcal{X}$ si calcola il valore della statistica d'interesse $T^o = T(\mathcal{X})$, si calcolano tutte le B permutazioni $\mathcal{X}^*$ dell'insieme $\mathcal{X}$ e le relative statistiche $T^* = T(\mathcal{X}^*)$. Il *p-value* osservato risulta pari alla frazione di T^* maggiore o uguale a T^o ovvero

$$\lambda = \frac{\#\{T^* \geq T^o\}}{B}$$

Se $\lambda \leq \alpha$ si può concludere rifiutando l'ipotesi nulla, in accordo con le usuali regole. In letteratura esistono tre approcci generali per costruire un test di permutazione. Uno di tipo euristico, basato sul concetto intuitivo di permutazione, applicabile in problemi semplici. Gli altri due, più formali consistono: uno basato sul concetto di invarianza della distribuzione nulla sotto l'azione di un gruppo finito di trasformazioni; l'altro sostanzialmnete fondato sul condizionamento sotto H_0 ad un gruppo di statisiche sufficienti. Quest'ultimo risulta preferibile perchè sembra essere il più naturale e consente di stabilire quando e perchè una soluzione è esatta od approssimata.

Principio del Test di Permutazione *Se due esperimenti assumono valori dallo stesso spazio campionario $\mathcal{X}^n$ rispettivamente con distribuzione sottostante P_1 e P_2, entrambe appartenenti a $\mathcal{P}$, danno lo stesso insieme di dati $\boldsymbol{x}$ ed a condizione che la scambiabilità tra i gruppi risulti soddisfatta sotto l'ipotesi nulla, allora le due inferenze condizionate a $\boldsymbol{x}$ ottenute usando la stessa statistica test devono essere uguali . Se due esperimenti, con distribuzioni sottostanti P_1 e P_2, forniscono rispettivamente $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$, e $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ allora le due inferenze condizionate potrebbero essere diverse.*

Dal principio del test di permutazione si deduce che una condizione sufficiente per applicare un *test di permutazione* consiste nella scambiabilità, sotto H_0, delle osservazioni tra i gruppi.

2.2.1 Condizionamento e scambiabilità

L'insieme dei dati osservati $\mathbf{x}$ sotto H_0 costituisce sempre una statistica sufficiente, qualsiasi sia la distribuzione sottostante. Tutte le famiglie nonparametriche $\mathcal{P}$ che sono interessate in una analisi di permutazione sono assunte sufficientemente "ricche", nel senso che se x e x' sono punti qualsiasi di $\mathcal{X}$, allora $x \neq x'$ implica $f_P(x) \neq f_P(x')$ per almeno una $P \in \mathcal{P}$, esclusi i punti

di densità nulla. Quando assumiamo che la famiglia sottostante $\mathcal{P}$ contiene tutte le distribuzioni continue, allora l'insieme dei dati $\mathbf{x}$ è statstica sufficiente minimale.
Dato un insieme di punti $\mathbf{x}$ se $x^*\in \mathcal{X}^n$ è tale che il rapporto di verosimiglianza $f_P^{(n)}(x)/f_P^{(n)}(x^*) = \rho(x, x^*)$ non dipenda da f_P per qualsiasi $P \in \mathcal{P}$, allora x e x' contengono essenzialmente la stessa informazione rispetto a P, e sono quindi equivalenti. L'insieme dei punti che sono equivalenti a $\mathbf{x}$, rispetto all'informazione contenuta, costituisce *l'orbita associata a* $\mathbf{x}$, e viene indicata con $\mathcal{X}^n_{/x}$. Si nota che, quando i dati sono raccolti con campionamento casuale e le osservazioni sono i.i.d., così che $f_P^{(n)}(x) = \prod_{1\leq i\leq n} f_P(x_i)$,l'orbita associata $\mathcal{X}^n_{/x}$ contiene tutte le permutazioni di $\mathbf{x}$ ed il rapporto di verosimiglianza soddisfa l'equazione $\rho(x, x^*) = 1$. La stessa conclusione si ottiene se per $f_P^{(n)}(x)$ l'assunzione di indipendenza per i dati osservati è sostituita con l'assunzione di scambiabilità:$f_P^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = f_P^{(n)}(x_{u_1^*}, \ldots, x_{u_n^*})$, dove $(u_1^*, \ldots, u_n^*)$ è una qualsiasi permutazione di $(1, \ldots, n)$. Nel contesto dei test di permutazione, il concetto di scambiabilità si riferisce alla scambiabilità dei dati rispetto ai gruppi. Le orbite $\mathcal{X}^n_{/x}$ sono anche chiamate spazi campionari di permutazione. E' importante notare che l'orbita $\mathcal{X}^n_{/x}$ associata al campione dei dati $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^n$ contiene sempre un numero finito di punti, se n è finito. Quindi i test di permutazione sono procedure statistiche condizionate, dove il condizionamento è rispetto all'orbita $\mathcal{X}^n_{/x}$ associata all'insieme dei dati osservati, e $\mathcal{X}^n_{/x}$ gioca il ruolo di insieme di riferimento per l'nferenza condizionata. In questo modo sotto l'ipotesi nulla ed assumendo la scambiabilità, la distribuzione di probabilità condizionata di un generico punto $x' \in \mathcal{X}^n_{/x}$ per qualunque distribuzione sottostante $P\in \mathcal{P}$ è

$$Pr\{x^* = x' | \mathcal{X}^n_{/x}\} = \frac{\#[x^* = x', x^* \in \mathcal{X}^n_{/x}]}{\#[x^* \in \mathcal{X}^n_{/x}]}$$

e risulta indipendente dalla distribuzione P. Se esiste un solo punto in $\mathcal{X}^n_{/x}$ le cui coordinate coincidono con quelle di x' e non esiste nessun altro vincolo nell'insieme dei dati, e le permutazioni corrispondono alle permutazioni dell'argomento, allora la probabilità condizionata risulta $1/n!$. La probabilità

$Pr\{x^* = x' | \mathcal{X}^n_{/x}\}$ risulta quindi uniforme su $\mathcal{X}^n_{/x}$ per ogni $P \in \mathcal{P}$. Per questo l'inferenza di permutazione sotto H_0 risulta invariante rispetto a P, ed i test di permutazione vengono classificati come *distribution-free* e *nonparametrici.* Sotto H_1, invece, la probabilità condizionata mostra sostanziali differenze ed in particolare potrebbe dipendere da P. Consideriamo per esempio un problema a due campioni con x_1 e x_2 due insiemi di dati separati ed indipendenti con rispettive numerosità n_1 e n_2 provenienti da distribuzioni P_1 e P_2. La verosimiglianza associata all'intero insieme dei dati è $f_P^{(n)}(x) = f_{P_1}^{(n_1)}(x_1) \cdot f_{P_2}^{(n_2)}(x_2)$, e per il principio di sufficienza l'insieme dei dati può essere partizionato in due gruppi (x_1, x_2), che forma un gruppo di statistiche sufficienti. L'orbita associata a $\mathbf{x}$ risulta $(\mathcal{X}^{n_1}_{/x_1}, \mathcal{X}^{n_2}_{/x_2})$ dove $\mathcal{X}^{n_1}_{/x_1}$ e $\mathcal{X}^{n_2}_{/x_2}$ sono le orbite parziali associate a x_1 e x_2. Questo implica che i dati x_1 non possono essere scambiati con quelli di x_2 perchè sotto H_1 la scambiabilità è permessa solo all'nterno dei gruppi e non tra gruppi.

2.2.2 Test di permutazione esatto, test di permutazione approssimato

In letteratura esistono due concetti di esattezza per il test di permutazione.Il più importante è legato alla scambiabilità dei dati osservati e della statistica T sotto H_0, rendendo la distribuzione di permutazione dipendente *solo* dalla scambiabilità degli errori e quindi solo da una componente puramente aleaoria. Assumiamo che l'ipotesi nulla sia semplice e che le osservazioni provengano da una variabile $X = \{X(\mu, \delta, Z_i), i = 1, \ldots, n\}$, funzione di tre quantità principali:

- μ una costante della popolazione,
- δ l'effetto del trattamento sperimentale,
- Z una quantità puramente casuale , chaimata usualmente componente d'errore.

La componenete d'errore Z è assunta essere centrata in 0, questo significa che la mediana se esiste, e la media sono paria a $\mathbb{M}(Z) = \mathbb{E}(Z) = 0$. Una condizione sufficiente affinchè il test T sia permutazionalmente esatto per testare $H_0 : \{\delta = \delta_0\}$ contro $H_1 : \{\delta \leq\neq\geq \delta_0\}$ è che sotto H_0 la distribuzione di T dipenda solo dalla componente casuale Z.
L'altro concetto è legato all'algoritmo per valutare la distribuzione di permutazione di una statistica, approssimata o esatta secondo il precedente concetto. Quando si vuole valutare la distribuzione di permutazione di un test si utilizza la procedura CMC, la quale garantisce di ottenere una stima non distorta, all'aumentare del numero B di iterazioni dell'algoritmo di CMC la stima diventa più accurata. In questo caso si parla di distribuzione di permutazione esatta tranne che per un approssimazione statistica. Quando è disponibile una procedura che fornisca l'orbita completa $\mathcal{X}^n_{/x}$ associata a x, la distribuzione del test può essere conosciuta esattamente.
Qualora la proprietà di scambiabilità delle osservazioni non è soddisfatta o non può essere assunta sotto H_0 le inferenze di permutazioni non risultano esatte, in quanto avviene una violazione del principio di permutazione. Si possono applicare però delle trasformazioni che permettano la scambiabilità approssimata (scambiabilità asintotica) e quindi l'applicazione del test di permutazioni, in questo caso si ottengono soluzioni approssimate. La violazione della scambiabilità può comportare che il test non può essere considerato esatto.

2.3 Metodi di combinazione non parametrica

Caratteristica dei test di permutazione è il condizionamento all'insieme dei dati osservati che risulta un insieme di statistiche sufficienti qualunque sia il modello di riferimento sottostante . Le assunzioni principali riguardanti la struttura dei dati, l'insieme dei test parziali e le ipotesi d'interesse per i test, nel contesto della combinazione non parametrica, possono essere così schematizzate:

1. L'insieme q-dimensionale dei dati, o il vettore q-variato delle risposte è indicato con

$$\begin{aligned} X &= \{X_j, j = 1, \dots, C\} = \{X_{ji}, i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, C\} = \\ &= \{X_{hji}, h = 1, \dots, q, i = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, C\}. \end{aligned}$$

   Il vettore q-variato delle risposte X e definito dal modello statistico $(X, \mathcal{X}, \mathcal{B}, P)$, dove $\mathcal{X}$ è lo spazio campionario da cui prende i suoi valori, $\mathcal{B}$ è una σ-algebra e P e una distribuzione di probabilita di solito non specificata proveniente da una famiglia $\mathcal{P}$ di distribuzioni non degeneri. L'insieme dei dati X e costituito da $\mathcal{C} \geqslant 2$ campioni o gruppi di ampiezza $n_j \geqslant 2$, con $n = \sum_j n_j$; i gruppi sono rappresentativi di C livelli di un trattamento e i dati X_j sono supposti i.i.d. con distribuzione $P_j \in \mathcal{P}, j = 1, \dots, C$, secondo un modello MANOVA. Se sono a disposizione delle covariate, è semplice il passaggio ad un modello MANCOVA. Per coerenza con una rappresentazione unita per unita, l'insieme X si puo riscrivere con $X = \{X_{(i)}, i = 1, \dots, n; \quad n_1, \dots, n_C\}$, in cui si assume che i primi n_1 vettori di dati provengano dal primo campione, i successivi n_2 dal secondo e cosi via.

2. Sotto l'ipotesi nulla le distribuzioni multivariate delle risposte sono uguali nei C gruppi e i dati sono scambiabili tra i C campioni. Il sistema d'ipotesi è:

$$\begin{cases} H_0: & \{(P_1 = \ldots = P_C) = \{(X_1 \overset{d}{=} \ldots \overset{d}{=} X_c)\} = \left\{ \bigcap\limits_{1 \leq i \leq k} H_{0i} \right\} \\ H_1: & \{almeno \quad una \quad H_{0i} \quad è \quad falsa\} \end{cases}$$

   Supponiamo che si vogliano analizzare e verificare piu aspetti di un problema, cosi che l'ipotesi nulla H_0 puo essere scomposta in un insieme finito di sottoipotesi $H_{0i}, i = 1, \dots, k$, ciascuna adatta all'aspetto parziale di interesse. H_0 e vera se tutte le H_{0i} sono congiuntamente vere. Di qui si puo definire H_0 come ipotesi nulla globale, tale che $H_0 = \left\{ \bigcap\limits_{i=1}^{k} H_{0i} \right\}$. Sempre considerando la scomposizione in k sottoipotesi, l'ipotesi alternativa globale H_1 è vera se almeno una delle sottoipotesi H_{0i} è falsa, quindi $H_1 = \left\{ \bigcup_{i=1}^{k} H_{1i} \right\}$.

3. con $T = T(X)$ si indica il vettore k-dimensionale di statistiche test, le cui componenti rappresentano i test univariati non degeneri di primo ordine ciascuno idoneo alla verifica delle sub-ipotesi H_{0i} *vs* H_{1i}.

Le assunzioni riguardanti l'insieme di test parziali $T = T_i, i = 1, \cdots, k$ per la combinazione non parametrica sono:

(A.1) Tutti i test parziali T_i sono permutazionalmente esatti, ovvero le variazioni delle statistiche sotto H_0 dipendono solo dalla casualità delle permutazioni, e sono marginalmente corretti, sono stocasticamente significativi per valori grandi, vale a dire che sotto H_1 le loro distribuzioni sono stocasticamente più grandi rispetto ad H_0

(A.2) I test di permutazione T_i sono consistenti, cioè:

$$Pr\{T_i > T_{i\alpha}|H_{1i}\}, \quad \forall \quad \alpha > 0, \quad i = 1, \ldots, k \tag{2.1}$$

e al tendere di n all'infinito si ha che

$$\lim_{n \to \infty} Pr\{T_i > T_{i\alpha} \mid H_{1i}\} \to 1 \tag{2.2}$$

dove n e la numerosita campionaria e $T_{i\alpha}$ è il valore critico, assunto finito, di T_i al livello α .

2.3.1 Funzioni di combinazione non parametrica

La combinazione non parametrica prende in considerazione i *p-value* λ_i di permutazione associati alle statistiche test $T_i, i = 1, \ldots, k$. Il test combinato di secondo ordine $T'' = \psi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ si ottiene tramite una funzione $\psi \div (0,1)^k \to \mathcal{R}^1$ continua, non crescente, univariata, non degenere, reale (misurabile) che soddisfi alle seguenti proprieta:

i) ψ deve essere non crescente in ogni suo argomento, ovvero $\psi(.., \psi_i, ..) \geqslant \psi(\ldots, \psi''_0, \ldots)$ se $\lambda_i < \lambda''_i, \quad i \in (1, \ldots, k)$

ii) assume il suo valore massimo $\overline{\psi}$, che potrebbe non essere finito,quando almeno uno degli argomenti raggiunge lo 0, cioe $\psi(.., \psi_i, ..) \rightarrow \overline{\psi}$ se $\lambda_i \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k$

iii) il suo valore critico T''_α è finito e tale che $T''_\alpha \leq \overline{\psi}, \quad \forall \quad \alpha > 0$.

Queste proprieta definiscono una classe C di funzioni di combinazione. Le funzioni di combinazione ψ che sono state utilizzate in questa tesi sono:

a) La funzione di combinazione di *Fisher*

$$T''_F = -2 \cdot \sum_i log(\lambda_i). \tag{2.3}$$

Se tutti i k test parziali sono indipendenti e continui, sotto l'ipotesi nullaT''_F si distribuisce come un $\mathcal{X}^2$ centrale con $2k$ gradi di liberta.

b) La funzione di combinazione di *Liptak*

$$T''_L = \sum_i \Phi^{-1}(1 - \lambda_i) \tag{2.4}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una normale standard. Se tutti i k test parziali sono indipendenti e continui, sotto l'ipotesi nulla T''_L ha distribuzione normale, con media 0 e varianza k.

c) La funzione di combinazione di *Tippett*

$$T''_T = min_{1 \leq i \leq k}(\lambda_i) \tag{2.5}$$

la prima ad essere riportata nella letteratura. Se tutti i k test parziali sono indipendenti e distribuiti secondo una U(0,1), sotto l'ipotesi nulla la funzione di ripartizione è $F_{T''}(t) = Pr\{min(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \leq t\} = 1 - Pr\{min(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) > t\} = 1 - (1-t)^k$. Se k=2, T''_T si distribuisce come una Triangolare(0,1,0).

Esitono ulteriori forme di combinazione di p-value ma generalmente queste sono le più utilizzate. In questo lavoro vengono considerate tutte e tre le funzioni descritte.

2.3.2 Tecniche di ricampionamento condizionato, il metodo Monte Carlo condizionato (C.M.C.)

Vi sono due criteri per permutare i dati, uno riguarda la permutazione sistematica di tutti i dati, l'altro prende in considerazione solo un campione estratto casualmente dallo spazio di permutazione. Pur assolvendo alla stessa funzione, l'utilizzo del secondo metodo si traduce in un vantaggio in termini di riduzione dei calcoli, vantaggio di notevole importanza soprattutto quando il numero di permutazioni e tanto elevato da richiedere tempi di elaborazione molto lunghi anche per calcolatori potenti. E' stato dimostrato che il fatto di ridurre il numero di permutazioni non porta ad una minor attendibilità del risultato o ad una perdita di potenza del test, anzi, per quanto riguarda quest'ultimo aspetto, ossia quello relativo alla potenza, questa e sempre vicina a quella del test non parametrico piu potente. Una soluzione approssimata, legata al secondo, e basata sul metodo di simulazione di *Monte Carlo Condizionato* (CMC) dall'orbita di permutazione, tramite il quale si puo condurre una tecnica di ricampionamento condizionato all'insieme dei dati osservati. Il campionamento Monte Carlo condizionato altro non e se non la replicazione dei campionamenti senza reinserimento (Without Replacement Resampling). La stima della distribuzione di permutazione sara tanto piu precisa quanto maggiore e il numero di iterazioni (di solito una buona stima si ottiene con 10000 replicazioni). La procedura che consente di ottenere una stima, tramite CMC, della distribuzione di permutazione dei test combinati consta di due fasi: la prima relativa alla stima della distribuzione k-variata di T, la seconda riguarda la stima della distribuzione di permutazione del test combinato T''_ψ e utilizza i risultati ottenuti via CMC nella prima fase. In ambito multivariato dunque, l'algoritmo di simulazione per la stima della distribuzione k-variata di T puo essere descritto nelle seguenti fasi:

a.1) si calcola il valore osservato di $T : T_0 = T(X)$

b.1) si considera un componente g^*, casualmente rilevato da un appropriato gruppo di trasformazioni G, e i valori del vettore $T^* = T(X^*)$ dove

$X^* = g^*(X)$. Una permutazione X^* del file di dati si può anche ottenere considerando una permutazione $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ delle etichette $(1, 2, \ldots, n)$, ciascuna indicante una unita del campione di partenza, e assegnando poi il vettore di dati con le etichette permutate al gruppo appropriato, per esempio nel caso di due campioni di numerosita n_1 e n_2 tali che $n_1 + n_2 = n$ si avra che X_u^* viene assegnato al primo gruppo se l'etichetta i soddisfa la condizione $1 \leq i \leq n_1$, altrimenti al secondo gruppo

c.1) si ripete B volte la fase descritta in $b.1)$ l'insieme dei risultati del CMC $T_r^*, r = 1, \ldots, B$ sono un campione casuale dalla distribuzione nulla k-variata di T

d.1) la funzione di distribuzione empirica simulata k-variata *(*EDF)

$$\widehat{F}_B(z|X) = \left[\frac{1}{2} + \sum_r I(T_r^* \leq z)\right] / (B+1), \quad \forall \quad z \in \mathcal{R}^k$$

con $I(\cdot)$ che vale 1 se la relazione è soddisfatta 0 altrimenti, fornisce una stima della distribuzione di permutazione k-dimensionale $F(z|X)$ di T. Si ha poi che

$$\widehat{L}_i(z|X) = \left[\frac{1}{2} + \sum_r I(T_{ir}^* \geq z)\right] / (B+1), \quad \forall \quad z \in \mathcal{R}^k, \quad i = 1, \ldots, k.$$

da una stima $\forall z \in \mathcal{R}^\infty$ della funzione di permutazione marginale del livello di significativita $\widehat{L}_i(z|X) = Pr(T_i^* \geq z|X)$; così che $\widehat{L}_i(T_{i0}|X) = \hat{\lambda}_i$ fornisce una stima non distorta e consistente del vero *p-value* marginale $\lambda_i = Pr(T_i^* \geq T_{i0}|X)$ relativa al test $T_i, \forall i = 1, \ldots, k$. E' da notare che rispetto agli stimatori EDF standard, $1/2$ e 1 sono rispettivamente aggiunti al numeratore e al denominatore allo scopo di ottenere un valore stimato nell'intervallo aperto (0,1) in modo che le trasformazioni inverse di funzioni continue, come $log(\lambda)$ o $\Phi^{-1}(1-\lambda)$, siano continue e sempre definite. Dato che B e molto grande queste quantità aggiunte sono alterazioni praticamente irrilevanti che non influenzano il comportamento degli stimatori sia per campioni di numerosita finita che asintoticamente. Al posto di 1/2 e 1 si puo dunque mettere una qualsiasi quantita positiva ε e 2ε, assegnando ad ε un valore di granlunga inferiore rispetto al numero di ricampionamenti B.

La combinazione non parametrica segue le seguenti fasi:

a.2) i k p-value $\hat{\lambda}_i = \widehat{L}_i(T_{i0}|X)$ osservati sono stimati sui dati (X) dove $T_{i0} = T_i(X), i = 1, \ldots, k$ rappresenta i valori osservati dei test parziali e $\widehat{L}_i$ è la i-esima funzione marginale del livello di significativita ottenuta tramite ricampionamento CMC sull'insieme dei dati nell'ultimo step dell'algoritmo della prima fase (vedi d.1)

b.2) il valore osservato combinato dei test di secondo ordine utilizza i risultati ottenuti nella prima fase con CMC ed è dato da $T''_0 = \psi(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_k)$

c.2) l' r-esimo vettore statistico simulato combinato è calcolato partendo da $T''^*_r = \psi(\lambda^*_{1r}, \ldots, \lambda^*_{kr})$,dove $\lambda^*_{ir} = \widehat{L}_i(T^*_{ir}|X))$, $\quad i = 1, \ldots, k, \quad r = 1, \ldots,$ B

d.2) il p-value simultato globale è dato da $\hat{\lambda}_\psi = \sum_r I(T''^*_r \geq T''_0)/B$

e.2) si rigetta l'ipotesi nulla globale a livello di significativita fissato e pari ad α se $\hat{\lambda}''_\psi \leq \alpha$.

Capitolo 3

Soluzioni proposte

3.1 Test A

Con riferimento ad un modello univariato $X_{ij} = \mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji}$, i=1,...,n_j, j=1,2, vogliamo testare il sistema di ipotesi

$$\begin{cases} H_0: & \{(\mu_1 = \mu_2) \cap (\sigma_1 = \sigma_2)\} = \{H_{0\mu} \cap H_{0\sigma}\} \\ H_1: & \{(\mu_1 <=> \mu_2)) \cap (\sigma_1 <=> \sigma_2)\} \end{cases} \tag{3.1}$$

Questo problema è quindi relativo ad un test congiunto per il parametro di scala e di locazione. Richiamando i metodi di combinazione non parametrica dei test di permutazione indipendenti, questo problema può essere risolto attraverso due test separati, entrambi approssimativamente non distorti e consistenti. Il primo consiste nel testare l'uguaglianza della locazione non curante della scala, il secondo consiste nel testare l'uguaglianza della scala non curante della locazione.

3.1.1 Test parametro di locazione

Soluzione univariata per la verifica di simmetria

Assumiamo che le risposte X_j, j=1,2, assumono valori nello stesso spazio campionario $\mathcal{X}$, siano distribuite simmetricamente attorno al rispettivo parametro di locazione μ_j, con distribuzione P_j, e parametro di scala σ_j sconosciuto. Definiamo la mediana per l'intero campione come $\widetilde{X} = (X_{(n/2)} + X_{(1+n/2)})/2$ se n è dispari, e $\widetilde{X} = X_{((n+1)/2)}$ se n è pari, dove $X_{(i)}$ indica la i-esima statistica ordinata. Si vuole dimostrare che entrambe le distribuzioni senza condizioni di $Y_j = (X_j - \widetilde{X})$, j=1,2, sono simmetricamente distribuite attorno all'origine se e solo se H_0 è vera, dove $H_0 = \{\mu 1 = \mu 2\}$. In altre parole le distribuzioni di $Y_j = (X_j - \widetilde{X})$, j=1,2, condizionate alla mediana $\widetilde{X}$ generale sono tali che

$$Pr\{Y_j < -z|\widetilde{X}\} = Pr\{Y_j > -z|\widetilde{X} = -t\}, \quad \forall z, t \in \mathcal{R}^1,$$

quindi sono simmetriche. Se sono leggermente asimmetriche, all'aumentare della numerosità campionaria l'assimetria scompare.
Le distribuzioni di Y_js sotto H_0 sono invarianti rispetto al comune parametro di locazione μ , ma sono dipendenti dal parametro di scala σ_j. Per eliminare questa dipendenza, dobbiamo utilizzare un approccio di permutazione condizionando all'intero gruppo congiunto di statistiche sufficienti sotto H_0. Questo insieme è formato dalle coppie di dati $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ nel quale i dati possono essere permutati solo all'interno del gruppo, con spazio di permutazione $\mathcal{X}_{/X_1} \times \mathcal{X}_{/X_2}$. Un altro gruppo di statistiche sufficienti è dato da $(\widetilde{X}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$, perchè esiste una relazione uno-a-uno tra i due gruppi.
Per verificare H_0 contro H_1 è appropriato stabilire due test di simmetria separati, uno per ogni campione, ed in seguito combinati attraverso un opportuna funzione. Una coppia di test di permutazione condizionati potrebbero essere

$$T_j^* = \sum_i Y_{ji} \cdot S_{ji}^*/n_j, \quad j = 1, 2 \tag{3.2}$$

dove i segni casuali $\mathbf{S}^* = \{S_{ji}^*, i = 1, \cdot, n_j, j = 1, 2\}$ sono un campione casuale di n osservazioni i.i.d. da una variabile S che assume i valori $+1, -1$ con probabilità 1/2. E bene notare che condizionatamente a $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ i due test parziali sono indipendenti, perchè la loro distribuzione di permutazione è generata da segni indipendenti e gli Ys giocano il ruolo di coefficienti fissati. Sotto H_0 la distribuzione di permutazione di T_j^* sono μ-invarianti, e grazie il condizionamento alla statistica sufficiente, sono anche (σ_1, σ_2)-invarianti sotto H_0 eH_1,perchè sono coefficienti costanti all'interno di ogni gruppo. Notiamo inoltre che condizionare a $(\widetilde{X}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)$ implica che la distribuzione condizionata di $(Y_j|\widetilde{X})$ non è esattamente simmetrica, quindi la statistica T_j^* può essere solo test approssimato. Questa approssimazione è dovuta al fatto che gli Ys che sono residui, e non sono completamente indipendenti rispetto alle unità e la scambiabilità non può essere applicata. Comunque questa approssimazione risulta abbastanza buona anche per piccole numerosità campionarie.

Combinazione dei due test di simmetria

A questo punto incontriamo il problema di come combinare i due test in uno. Questo problema può essere risolto usando la teoria di combinazione di test indipendenti. Una funzione di combinazione da prendere in considerazione per il suo comportamento asintotico è

$$T_\mu^* = \varphi\Big(T_2^* - T_1^*\Big) \tag{3.3}$$

dove $\varphi(\cdot)$ corrisponde a $+(\cdot)$ se le alternative sono '$<$', $-(\cdot)$ se '$>$', o il valore assoluto $|\cdot|$ se'$\neq$'. La nostra preferenza per questa forma (lineare) di combinazione è dovuta al fatto che il valore medio di permutazione di Ψ^* non è dipendente da $(\mu - \widetilde{X})$, così che la distorsione media di Ψ^* induce a considerare che i residui si annullino. In pratica, entrambe hanno distribuzione simmetrica per assunzione, ogni test parziale gioca il ruolo di un test di locazione. Infatti la risposta del modello è $X_{ij} = \mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji}$, i=1,...,n_j, j=1,2, il modello per i valori osservati della j-esima statistica parziale è $T_j = (\delta_j + \sigma_j \cdot \bar{Z}_{j\cdot})$ dove $\delta_j = (\mu_j - \mu)$ e $\bar{Z}_{j\cdot} = \sum_i Z_{ji}/n_j$. Così $(T_2 - T_1) = \big((\mu_2 - \mu_1) + \sigma_2 \cdot \bar{Z}_{2\cdot} - \sigma_1 \cdot \bar{Z}_{1\cdot}\big)$. Il *p-value* osservato sarà pari a

$$\lambda_\mu^{oss} = \frac{\#\{T_\mu^* \geq T_\mu^o\}}{B}.$$

3.1.2 Test parametro di scala

Immaginiamo di essere interessati a verificare l'uguaglianza del coefficiente di scala di due distribuzioni univariate. Assumiamo che i dati provengano da un modello $X_{ij} = \mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji}$, i=1,...,n_j, j=1,2, e vogliamo verificare l'ipotesi

$$\begin{cases} H_0: & \{\sigma_1 = \sigma_2\} \\ H_1: & \{\sigma_1 <=> \sigma_2\} \end{cases}$$

dove μ_1 e μ_2 sono sconosciuti e le componenti d'errore Z_{ji} sono i.i.d. con media nulla e distribuzione sconosciuta $\mathcal{P}$. Sotto queste condizioni gli Z_{ji} sono scambiabili in entrambe le ipotesi H_0 e H_1. Se i parametri di locazione μ_1 e μ_2 sono sconosciuti non esiste una soluzione di permutazione esatta, quindi proviamo ad esaminare una soluzione di permutazione approssimata. Per questo problema le coppie di dati $\mathbf{X}$=($\mathbf{X}_1$;$\mathbf{X}_2$) sono una coppia di statistiche sufficienti, così che ciascuna soluzione di permutazione viene riferita ad esse, o equivalentemente a $(\bar{X}_1; \bar{X}_2; \mathbf{Y}_1; \mathbf{Y}_2)$ dove $\mathbf{Y}_j$=$\{Y_{ji}$=$X_{ji}-\bar{X}_j$, i=1,..., $n_j\}$, $\bar{X}_j$=$\sum_i X_{ij}/n_j$, poichè esiste una relazione uno ad uno tra i due insiemi di dati. È bene notare come , le deviazioni campionarie, non sono esattamente scambiabili sotto H_0, $Y_{ji} = (X_{ji} - \bar{X}_j) = (\mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji} + \mu_j + \sigma_j \cdot \bar{Z}_j) = \sigma_j(Z_{ji} - \bar{Z}_j)$, in quanto dipendono dal parametro σj e non solo dalle componenti d'errore Z ed è per questo che parliamo di soluzioni approssimate. Se μ_1 e μ_2 sono noti, l'intero gruppo delle vere deviazioni $\mathbf{Y}^\dagger = \{X_{ji} - \mu_j, i = 1, \ldots, n_j, j = 1, 2\}$ risultano essere sufficienti per il problema e la scambiabilità è soddisfatta sotto H_0. Ma visto che μ_1 e μ_2 sono sconosciuti, possiamo procedere approsimativamente, condizionatamente all'intero insieme delle deviazioni campionarie $Y_1 \uplus Y_2$, che può essere considerato una stima di$\mathbf{Y}^\dagger$.
Il problema può essere risolto approsimativamente utilizzando la statistica

$$T_\sigma^* = \varphi\Big(\sum_i Y_{1i}^{*2}/n_1 - \sum_i Y_{2i}^{*2}/n_2\Big)$$

dove le pemutazioni sono ottenute attraverso le permutazioni $(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)$ delle etichette $(1, 2, \ldots, n)$, e la funzione $\varphi(\cdot)$ corrisponde a $+(\cdot)$ se le alternative sono '>', $-(\cdot)$ se '<', o il valore assoluto $|\cdot|$ se'$\neq$'. Il *p-value* osservato sarà pari a

$$\lambda_\sigma^{oss} = \frac{\#\{T_\sigma^* \geq T_\sigma^o\}}{B}.$$

Il test A per la verifica d'ipotesi congiunta dei parametri di locazione-scala può essere ottenuto combinando i due test statistici

$$T_\mu^* = \varphi\Big(T_2^* - T_1^*\Big) \tag{3.4}$$

e

$$T_\sigma^* = \varphi\Big(\sum_i Y_{1i}^{*2}/n_1 - \sum_i Y_{2i}^{*2}/n_2\Big). \tag{3.5}$$

Le permutazioni dei segni S^*, utilizzate per T_μ, sono completamente indipendenti tra loro e tra i dati osservati, e sono anche indipendenti dalle permutazioni delle devianza campionarie Y^* , utilizzate per ottenere T_σ. Questo implica che i due test sono, almeno condizionatamente, approssimativamente indipendenti. La loro combinazione può essere quindi ottenuta utilizzando la teoria della combinazione di test indipendenti.Si osservi che entrambi i test sono approssimativamente non distorti sia che l'ipotesi nulla sia vera o falsa.

Sintesi Test A

Dati due campioni indipendenti X_1 e X_2, e calcolate le trasformazioni $Y_{ji} = (X_{ji} - \bar{X}_j)$ ed $Z_{ji} = (X_{ji} - \tilde{X})$:

i) si calcolano i valori osservati come $Y_{ji} = Y_{ji}^o$ ed $Z_{ji} = Z_{ji}^o$;

ii) si generano B permutazioni degli insiemi degli Y_{ji} e Z_{ji} ottenendo Y_{ji}^* e Z_{ji}^* ;

iii) si calcolano le statistiche T_μ e T_σ, applicando il test A;

iv) si calcolano i $p-value$ dei test parziali $\hat{\lambda}_\mu^k = \sharp(T_\mu^* \geq T_\mu^k)/(B+1)$ e $\hat{\lambda}_\sigma^k = \sharp(T_\sigma^* \geq T_\sigma^k)/(B+1)$;

v) si applica la funzione di combinazione ai due $p-value$ parziali ottenendo il test congiunto T_c ;

vi) si calcola il $p-value$ osservato del test congiunto $\hat{\lambda}_c^o = \sharp(T_c^* \geq T_c^o)/B$.

$X_{11},\dots,X_{1n_1}$	$X_{21},\dots,X_{2n_2}$

i)

$Z^o_{11},\dots,Z^o_{1n_1}$	$Z^o_{21},\dots,Z^o_{2n_2}$

$Y^o_{11},\dots,Y^o_{1n_1}$	$Y^o_{21},\dots,Y^o_{2n_2}$

ii)

$Z^{*1}_{11},\dots,Z^{*1}_{1n_1}$	$Z^{*1}_{21},\dots,Z^{*1}_{2n_2}$
$\dots$	$\dots$
$Z^{*B}_{11}\dots,Z^{*B}_{1n_1}$	$Z^{*B}_{21},\dots,Z^{*B}_{2n_2}$

$Y^{*1}_{11}\dots,Y^{*1}_{1n_1}$	$Y^{*1}_{21},\dots,Y^{*1}_{2n_2}$
$\dots$	$\dots$
$Y^{*B}_{11},\dots,Y^{*B}_{1n_1}$	$Y^{*B}_{21},\dots,Y^{*B}_{2n_2}$

iii)

T^o_μ	$T^{*1}_\mu,\dots,T^{*B}_\mu$
T^o_σ	$T^{*1}_\sigma,\dots,T^{*B}_\sigma$

iv)

λ^o_μ	$\lambda^{*1}_\mu,\dots,\lambda^{*B}_\mu$
λ^o_σ	$\lambda^{*1}_\sigma,\dots,\lambda^{*B}_\sigma$

v)

T^o_C	$T^{*1}_C,\dots,T^{*B}_C$

vi)

$$\boxed{\hat{\lambda}^o_C = \frac{\sharp(T^*_C \geq T^o_C)}{B}}$$

Tabella 3.1: Test A

3.2 Test B

Questa seconda soluzione si basa principalmente sull'approssimazione della distribuzione del test di permutazione a distribuzioni note. L'ipostazione del problema è la medesima, cambia il metodo per calcolare i due test separati.

3.2.1 Test di locazione

Assumiamo le stesse ipotesi per il test di simmetria descritto al paragrafo 3.1.1, ed applichiamo la medesima trasformazione alle osservazioni $Y_j = (X_j - \widetilde{X})$, j=1,2. Per verificare la locazione applichiamo il medesimo test $T_\mu^{oss} = (\sum_i Y_{1i}/n_1 + \sum_i Y_{2i}/n_2)$. Precedentemente le permutazioni del test venivano calcolate come

$$T_\mu^* = \sum_i \frac{Y_{1i} \cdot S_{1i}^*}{n_1} + \sum_i \frac{Y_{2i} \cdot S_{2i}^*}{n_2} \tag{3.6}$$

dove i segni casuali $\mathbf{S}^* = \{S_{ji}^*, i = 1, \ldots, n_j, j = 1, 2\}$ sono un campione casuale di n osservazioni i.i.d. da una variabile S che assume i valori $+1, -1$ con probabilità 1/2.

Se la numerosità campionaria n è grande il *Teorema del Limite Centrale*, TLC, può essere applicato per approssimare la distribuzione $F(\cdot|X)$ di T. Se n è circa 200, σ_x è assunto essere finito e quindi $F(t|X)$ può essere approssimata dal TLC. A questo fine osserviamo che il valore atteso e la varianza di S^* sono rispettivamente $\mathbb{E}(S^*) = 0$ e $\mathbb{V}(S^*) = 1$. Quindi

$$\mathbb{E}\Big\{\Big(\sum_i X_i \cdot S^*/n\Big)|X\Big\} = 0$$

e

$$\mathbb{V}\Big\{\Big(\sum_i X_i \cdot S^*/n\Big)|X\Big\} = \sum_i X_i^2/n^2$$

in quanto grazie al condidionamento a $\mathbf{X}$ le quantità X_i in T^* hanno il ruolo di quantità fissate. La quantità

$$K^* = \Big(\sum_i X_i \cdot S_i^*\Big) \Big/ \Big(\sum_i X_i^2\Big)^{1/2}$$

pari alla somma standardizzata di n variabili indipendenti, è approssimabile alla distribuzione di una normale standard.
Grazie ai risultati precedenti possiamo scrivere

$$\mathbb{E}(T_\mu^*|H_0) = 0 \qquad\qquad \mathbb{V}(T_\mu^*|H_0) = \sum_i \frac{Y_{1i}^2}{n_1^2} \cdot 1 + \sum_i \frac{Y_{2i}^2}{n_2^2} \cdot 1$$

ed approssimare la distribuzione di T_μ^* ad una normale standard

$$F[T_\mu^*|X] = \frac{T_\mu^* - 0}{\sqrt{\mathbb{V}(T_\mu^*|H_0)}} \simeq N(0,1)$$

I $p - value$ osservati sono quindi calcolabili come:

* con $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ $\lambda_\mu^{oss} = 2min(Pr\{N(0,1) \leq T_\mu^{oss}|X\}, Pr\{N(0,1) \geq T_\mu^{oss}|X\})$
* con $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ $\lambda_\mu^{oss} = Pr\{N(0,1) \leq T_\mu^{oss}|X\}$
* con $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ $\lambda_\mu^{oss} = Pr\{N(0,1) \geq T_\mu^{oss}|X\}$.

3.2.2 Test di scala

Si sono analizzate due approssimazioni per il test di scala:

1) un approssimazione alla distribuzione F, test B1;

2) un approssimazione alla distribuzione $Normale$, test B2.

1) **Test B1**
Assumiamo che i dati provengano da un modello approssimativamente normale $X_{ij} = \mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji}$, i=1,. . . ,n_j, j=1,2, e che le numerosità campionarie n_1 ed n_2 siano sufficientemente grandi. Per ciascun campione calcoliamo la varianza campionaria

$$S_j^2 = \frac{\sum_i (X_{ji} - \bar{X}_j)^2}{(n_j - 1)}$$

Effettuando delle semplici sostituzioni

$$\begin{aligned}
S_j^2 &= \frac{\sum_i \left(\mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji} - \frac{\sum_i (\mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji})}{n_j}\right)^2}{(n_j - 1)} \\
&= \frac{\sum_i (\mu_j + \sigma_j \cdot Z_{ji} - \mu_j + \sigma_j \cdot \frac{\sum_i Z_{ji}}{n_j})^2}{(n_j - 1)} \\
&= \frac{\sum_i (\sigma_j \cdot Z_{ji} - \sigma_j \cdot \bar{Z}_j)^2}{(n_j - 1)} \\
&= \sigma_j^2 \frac{\sum_i (Z_{ji} - \bar{Z}_j)^2}{(n_j - 1)}
\end{aligned}$$

per assunzione sappiamo che $E[Z] = 0$ quindi possiamo scrivere

$$S_j^2 = \sigma_j^2 \frac{\sum_i (Z_{ji})^2}{(n_j - 1)} \sim \chi^2_{(n_j-1)} \frac{\sigma_j^2}{(n_j - 1)}$$

e quindi

$$S_j^2 \sim \chi^2_{(n_j-1)}$$

Proviamo a considerare la statistica test $T_\sigma = S_1^2 \setminus S_2^2$.

Dalla teoria generala sappiamo che se W_1 e W_2 sono due variabili indipendenti con distribuzione marginale $W_1 \sim \chi^2_{(\nu_1)}$ e $W_2 \sim \chi^2_{(\nu_2)}$, la distribuzione della variabile casuale

$$T_\sigma = \frac{W_1/\nu_1}{W_2/\nu_2}$$

è detta F di Fisher, con ν_1 e ν_2 gradi di libertà. Quindi possiamo riscrivere la nostra statistica test come

$$T_\sigma = \frac{S_1^2/(n_1 - 1)}{S_2^2/(n_2 - 1)} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

possiamo quindi approssimare la distribuzione di permutazione ad una F di Fisher con ν_1, ν_2 gradi di libertà. I $p - value$ osservati sono quindi calcolabili come:

* con $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$ $\quad \lambda_\sigma^{oss} = 2min(Pr\{F_{\nu_1,\nu_2}) \leq T_\sigma^{oss}|X\}, Pr\{F_{\nu_1,\nu_2} \geq T_\sigma^{oss}|X\}$

* con $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2 \quad \lambda_\sigma^{oss} = Pr\{F_{\nu_1,\nu_2} \leq T_\sigma^{oss}|X\}$
* con $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2 \quad \lambda_\sigma^{oss} = Pr\{F_{\nu_1,\nu_2} \geq T_\sigma^{oss}|X\}$.

2) **Test B2**

Il concetto di fondo per quest'altro test di scala consiste nel valutare se il parametro di scala del primo campione σ_1, del campione X_1, è uguale al parametro di scala σ della popolazione $X = (X_1, X2)$ costituita dall'unione dei due campioni.

Consideriamo l'insieme di dati X=(X_1;X_2). Se i due campioni provengono dalla medesima distribuzione possiamo scrivere che

$$E\Big(\frac{\sum X_{1i}^*}{n_1}|X\Big) = \bar{X} \qquad V(\bar{X}_1^*) = \frac{V(X^*|X)}{n_1} . \frac{n-n_1}{n-1}$$

dove $\bar{X}_j$=$\sum_i X_{ij} \setminus n_j$ e $V(X^*|X) = \sum_{ij}(X_{ij} - \bar{X})^2 \setminus n$.
Trasformiamo i dati nei quadrati degli scarti dalle medie campionarie di gruppo Y_{ji}=(X_{ji}-$\bar{X}_j)^2$. Applicando il TLC il test di scala può essere scritto come

$$T_\sigma^* = \frac{\sum_i Y_{1i}^{*2} - n_1 . \sum_{ij} Y_{ij}^2 / n}{\sqrt{\frac{\sum_{ij}(Y_{ij}^2 - \bar{Y}^2)}{n} . \frac{n_1 n_2}{n-1}}} \sim N(0,1|H_0) \tag{3.7}$$

con $\bar{Y}^2 = \sum_{ij} Y_{ij}^2 \setminus n$.

I $p - value$ osservati sono quindi calcolabili come:

* con $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2 \quad \lambda_\sigma^{oss} = 2min(Pr\{N(0,1)) \leq T_\sigma^{oss}|X\}, Pr\{N(0,1) \geq T_\sigma^{oss}|X\}$
* con $H_1 : \sigma_1 < \sigma_2 \quad \lambda_\sigma^{oss} = Pr\{N(0,1) \leq T_\sigma^{oss}|X\}$
* con $H_1 : \sigma_1 > \sigma_2 \quad \lambda_\sigma^{oss} = Pr\{N(0,1) \geq T_\sigma^{oss}|X\}$.

3.2.3 Combinazione dei *p-value*

Per effettuare la verifica d'ipotesi congiunta, bisogna ora combinare i *p-value* dei due test, utilizzando le funzioni di combinazione per test indipendenti. Le funzioni utilizzate sono state scelte, oltre per la loro capacità di discrminare bene tra le due ipotesi, perchè si conosce la loro distribuzione sotto H_0:

- f.c. di Fisher $T''_{CF} = -2 \cdot (log(\lambda_\mu) + log(\lambda_\sigma))) \simeq \chi^2_4$
- f.c. di Liptak $T''_{CL} = \Phi^{-1}(1-\lambda_\mu) + \Phi^{-1}(1-\lambda_\sigma)) \simeq N(0, \sigma^2 = 2)$
- f.c. di Tippett $T''_{CT} = min(\lambda_\mu, \lambda_\sigma) \simeq Triangolare(0,1,0)$

Per calcolare il $p - value$ del test congiunto si procederà in modo analogo ai precedenti visto che si conosce la distribuzione della funzione di combinazione. Nel caso di utilizzo della funzione di combinazione di Fisher:

* per il sistema d'ipotesi con alternative bilaterali
  $\lambda''^{oss}_C = 2min(Pr\{\chi^2_4 \leq T''^{oss}_{CF}|X\}, Pr\{\chi^2_4 \geq T''^{oss}_{CF}|X\})$
* per entrambi i sistemi d'ipotesi unilaterali
  $\lambda''^{oss}_C = Pr\{\chi^2_4 \geq T''^{oss}_{CF}|X\}$.

Nel caso di utilizzo della funzione di combinazione di Liptak:

* per il sistema d'ipotesi con alternative bilaterali
  $\lambda''^{oss}_C = 2min(Pr\{N(0,2) \leq T''^{oss}_{CL}|X\}, Pr\{N(0,2) \geq T''^{oss}_{CL}|X\})$
* per entrambi i sistemi d'ipotesi unilaterali
  $\lambda''^{oss}_C = Pr\{N(0,2) \geq T''^{oss}_{CL}|X\}$

Nella verifica d'ipotesi con alternativa unilaterale se i p-value dei test parziali sono vicini a 0, a favore dell'ipotesi alternativa , le funzioni di combinazione restituiscono valori grandi quindi il l'errore del primo tipo osservato sarà pari alla probabilità di ottenere un valore di T^*_C maggiore o uguale a quello osservato.

Nel caso di utilizzo della funzione di combinazione di Tippett:

* per il sistema d'ipotesi con alternative bilaterali
  $\lambda_C''^{oss} = 2min(Pr\{Triangolare(0,1,0) \leq T''^{oss}_{CT}|X\}, Pr\{Triangolare(0,1,0) \geq T''^{oss}_{CT}|X\})$

* per entrambi i sistemi d'ipotesi unilaterali
  $\lambda_C''^{oss} = Pr\{Triangolare(0,1,0) \leq T''^{oss}_{CT}|X\}$

Utilizzando la funzione di combinazione di Tippett, in entrambe alternative unilaterali se i p-value dei test parziali sono vicini a 0, a favore dell'ipotesi alternativa , le funzioni di combinazione restituiscono valori piccoli quindi il l'errore del primo tipo osservato sarà pari alla probabilità di ottenere un valore di T_C^* minore o uguale a quello osservato.

Sintesi Test B

Dati due campioni indipendenti X_1 e X_2, si calcolano le trasformazioni $Y_{ji} = (X_{ji} - \bar{X}_j)$ ed $Z_{ji} = (X_{ji} - \tilde{X})$:

i) si calcolano i valori osservati T_μ^o e T_σ^o;

ii) si calcolano i $p-value$ dei test osservati sfruttando l'approssimazione alle distribuzioni note;

iii) si applica la funzione di combinazione ai due $p-value$ parziali;

iv) si calcola il $p-value$ osservato del test congiunto sfruttando l'approssimazione alla distribuzione nota.

$X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$	$X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$

i)

$\boxed{T^o_\sigma \sim F_{\nu_1,\nu_2}}$ $\boxed{T^o_\mu \sim N(0,1)}$

ii)

$\boxed{\lambda^o_\sigma}$ $\boxed{\lambda^o_\mu}$

iii)

$\boxed{T^o_{CF}}$

iv)

$\boxed{\lambda^o_C \simeq \chi^2_4}$

Tabella 3.2: Test B1, utilizzando la funzione di combinazione di Fisher

Capitolo 4

I studio di simulazione

Per valutare le performance delle nuove soluzioni proposte si è effettuato uno studio di simulazione utilizzando il software statistico R, generando un numero di permutazioni pari a B=1000, ed iterando l'algoritmo MCM sotto l'ipotesi nulla MC=2000, e sotto l'ipotesi alternativa MC=1000. In questa prima simulazione si è voluto testare come i test proposti si comportassero sotto la distribuzione normale, in quanto è una distribuzione simmetrica attorno al proprio parametro di locazione e con un proprio parametro di scala. Si sono indagate piccole differenze sia per la locazione che per la scala, e con numerosità piccole e medie, tranne per il test B1 come si vedrà di seguito.

Per la distribuzione Normale $N(\mu, \sigma^2)$ si sono considerati cinque diversi valori sia per il parametro di locazione μ sia per il parametro di scala σ^2:

* $\mu = \{0, 0.2, 0.5, 0.8, 1\}$;
* $\sigma^2 = \{1, 1.5, 2, 4, 100\}$;

e tre numerosità campionarie di dimensione piccole e medie

* $n_1 = 5 \quad n_2 = 10$;
* $n_1 = 10 \quad n_2 = 10$;
* $n_1 = 20 \quad n_2 = 40$;

4.1 Risultati test A

Nelle tabelle 4.1(a),4.1(b) e 4.1(c) sono riportate le percentuali di rifiuto dell'ipotesi nulla ad un livello $\alpha = 0.05$, sul totale delle MC simulazioni, per i sistemi d'ipotesi (1.2, 1.3, 1.4) . Quando le distribuzioni hanno gli stessi parametri, e quindi sotto H_0, il test si mantiene intorno al 5% di rifiuti, cioè il 5% delle simulazioni effettuate restituisce un *p-value* congiunto inferiore a 0.05 portando a rifiutare l'ipotesi di uguaglianza di entrambi i parametri. Si nota che sia all'aumentare della numerosità campionaria sia della diversità tra i parametri le percentuali di rifiuto aumentano notevolmente, indicando la capacità del test di individuare le diversità tra i parametri testati. Il test non funziona bene per la numerosità più piccola ($n_1 = 5, n_2 = 10$), escludendo il caso di $N_2(1, 100)$, ragiunge una percentuale di rifiuto del 62.6%. Il test quindi funziona bene per mumerosità medie ($n_1 = 20, n_2 = 40$) anche non bilanciate. Per quanto riguarda le funzioni di combinazione utilizzate nessuna risulta migliore sulle altre, sembra che per piccole differenze tra i parametri Liptak offre percentuali maggiori, mentre per differenze grandi tra i parametri Fisher da risultati più grandi. Le considerazioni valgono sia per l'alternativa bilaterale che unilaterale, anche se il test sembra lavorare meglio per alternative unilaterali.

4.2 Risultati test B1

Per il Test B1 si sono considerate le stesse situazioni del Test A, ma come ci si poteva attendere i risultati non sono stati i medesimi. Infatti come si nota in tabella 4.2 la percentuale di rifiuti sotto H_1 è molto bassa, tranne per l'ultimo caso $N_1(0, 1) \quad N_2(1, 100)$ dove la diversità tra i parametri è grandissima. Questo malfunzionamento si può forse imputare al fatto che le numerosità campionarie sono di gran lunga inferiori alla numerosità campionaria necessaria per effettuare l'approssimazione normale indicata a circa 200 unità. Sono state quindi considerate delle numerosità maggiori

(a) $N_1 \neq N_2$

	$n_1 = 5$ $n_2 = 10$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 20$ $n_2 = 40$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.5	4.9	5.8
Liptak	5.3	5.0	5.4
Tippett	4.9	5.3	5.4
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	4.2	9.6	16.8
Liptak	4.8	9.2	17.4
Tippett	4.0	9.4	10.7
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	10.8	23.2	53.2
Liptak	13.6	23.8	56.8
Tippett	7.5	17.3	39.9
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	21.8	53.6	90.0
Liptak	62.6	52.6	88.2
Tippett	11.4	46.2	81.7
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	21.4	99.4	97.8
Liptak	25.0	77.6	73.6
Tippett	18.8	99.7	99.2

(b) $N_1 < N_2$

	$n_1 = 5$ $n_2 = 10$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 20$ $n_2 = 40$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.4	4.6	5.6
Liptak	5.7	4.45	5.8
Tippett	5.3	5.5	4.9
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	14.8	19.9	30.2
Liptak	16.8	22.0	32.5
Tippett	10.8	14.6	24.0
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	29.4	37.8	72.9
Liptak	32.1	42.5	75.3
Tippett	20.5	27.0	60.0
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	51.3	70.8	98.5
Liptak	56.4	72.5	97.9
Tippett	11.4	46.2	81.7
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	97.1	99.8	100
Liptak	77.2	85.8	91.1
Tippett	18.8	99.7	99.2

(c) $H_1 : N_1 > N_2$

	$n_1 = 5$ $n_2 = 10$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 20$ $n_2 = 40$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.7	5.0	5.1
Liptak	5.6	5.2	5.3
Tippett	4.85	5.1	4.85
	$N_1(0.2,1.5)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	15.5	17.5	33.2
Liptak	16.1	18.5	34.5
Tippett	12.1	13.1	28.1
	$N_1(0.5,2)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	30.0	40.4	72.9
Liptak	33.5	43.4	76.9
Tippett	24.0	30.4	63.3
	$N_1(0.8,4)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	55.3	68.7	97.8
Liptak	56.76	71.5	96.5
Tippett	45.7	58.6	96.8
	$N_1(1,100)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	96.4	100	100
Liptak	75.9	85.4	88.7
Tippett	98.2	100	100

Tabella 4.1: Test A :percentuale di rifiuti di H_0 sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$

* $n_1 = 50 \quad n_2 = 30$;

* $n_1 = 100 \quad n_2 = 100$;

* $n_1 = 150 \quad n_2 = 200$;

Dalla tabella 4.3 i risultati non sono ancora soddisfacenti: sotto H_0 il test commette un errore del primo tipo molto maggiore del 5% e non coglie piccoli cambiamenti nei parametri. Questo sembra risolversi se le due numerosità campionarie sono uguali, infatti nel caso in cui ($n_1 = 100, n_2 = 100$) il test funziona bene sotto H_0. Si è provato quindi una situazione con numerosità bilanciate $n_1 = n_2$ e di dimensioni abbastanza grandi.

	$n_1 = 5$ $n_2 = 10$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 20$ $n_2 = 40$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	7.50	4.50	29.15
Liptak	6.64	5.05	21.65
Tippett	8.45	5.7	27.3
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	12.60	13.10	16.70
Liptak	11.20	12.10	16.10
Tippett	4.5	5.2	9.3
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	14.20	9.30	19.00
Liptak	13.50	8.60	16.40
Tippett	4.1	10.0	14.8
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	14.50	1.3	5.80
Liptak	12.70	1.8	4.3
Tippett	5.1	34.5	41.3
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	84.00	100	100
Liptak	57.2	98.5	100
Tippett	86.4	100	100

Tabella 4.2: Test B1: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2), H_1 : N_1 \neq N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 30$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 200$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	21.60	4.25	28.95
Liptak	17.90	4.80	22.85
Tippett	24.05	4.95	29.6
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	65.20	44.30	26.50
Liptak	52.90	43.80	23.40
Tippett	67.8	36.3	23.2
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	92.30	97.40	98.9
Liptak	89.80	97.60	98.00
Tippett	91.0	93.4	96.5
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

Tabella 4.3: Test B1: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2), H_1 : N_1 \neq N_2$

I risultati riportati in tabella 4.5 evidenziano un buon comportamento del test anche nell'individuare piccoli scostamenti tra i parametri. Si è provato con numerosità piccole bilanciate, tabella 4.4; sotto H_0 il test risulta buono ma non riesce ad individuare i cambiamenti nei due parametri. Quindi il test offre potenza maggiore nel caso in cui $n_1 = n_2 = 150$, e quindi per poter applicare questo test, la soglia di $n_i = 150$ può essere considerata la minima, la numerosità richiesta per l'approssimazione può essere un pò abbassata. Le funzioni di combinazione sono circa paritarie, Tippett sembra essere leggermente più conservativo nel rifiutare l'ipotesi nulla.

	$n_1 = 5$ $n_2 = 5$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 15$ $n_2 = 15$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	4.15	4.7	4.4
Liptak	4.45	4.8	5.3
Tippett	3.95	4.4	4.4
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	5.7	5.0	7.2
Liptak	5.7	6.3	7.2
Tippett	4.7	5.1	6.7
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	6.0	12.1	19.9
Liptak	6.6	12.7	19.8
Tippett	5.1	12.0	15.9
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	11.8	36.7	64.1
Liptak	13.0	34.2	59.8
Tippett	9.0	30.5	55.3
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	93.5	100	100
Liptak	73.0	98.4	99.9
Tippett	92.4	100	100

Tabella 4.4: Test B1: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2), H_1 : N_1 \neq N_2$

(a) $N_1 \neq N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 50$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 150$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	4.9	4.7	4.75
Liptak	5.1	4.8	5.05
Tippett	4.8	4.5	5.05
	$N_1(0.2,1.5)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	22.60	42.2	65.5
Liptak	22.4	42.3	62.8
Tippett	18.2	38.3	57.8
	$N_1(0.5,2)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	74.8	97.5	99.7
Liptak	75.3	97.3	99.8
Tippett	62.1	94.3	99.6
	$N_1(0.8,4)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	99.80	100	100
Liptak	99.4	100	100
Tippett	99.5	100	100
	$N_1(1,100)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

(b) $N_1 < N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 50$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 150$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.3	4.4	4.8
Liptak	5.05	4.8	5.05
Tippett	5.6	4.9	4.65
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	48.7	74.4	87.7
Liptak	50.3	76.2	88.7
Tippett	41.2	61.7	80.6
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	92.8	99.6	100
Liptak	93.9	99.8	100
Tippett	85.7	98.9	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

(c) $H_1 : N_1 > N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 50$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 150$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.35	4.8	4.6
Liptak	5.00	4.75	4.75
Tippett	4.7	4.55	5.55
	$N_1(0.2,1.5)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	47.0	74.0	87.7
Liptak	47.9	73.9	87.8
Tippett	39.9	64.5	79.0
	$N_1(0.5,2)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	92.2	99.7	100
Liptak	93.8	99.9	100
Tippett	85.0	98.9	100
	$N_1(0.8,4)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	99.9	100	100
	$N_1(1,100)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

Tabella 4.5: Test B1: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$

4.3 Risultati test B2

Per primi si sono testati gli stessi casi del test A, ma anche per il test B2 i risultati hanno evidenziato un malfunzionamento del test, tabella 4.6. Si è provato ad aumentare la numerosità campionaria considerando i casi

* $n_1 = 50 \quad n_2 = 30$
* $n_1 = 100 \quad n_2 = 100$
* $n_1 = 150 \quad n_2 = 200$

Dai risultati in tabelle 4.7 avendo delle numerosità sbilanciate il test B2 funziona bene solo per identificare una diversità tra i parametri. Per le due alternative unilaterali il test B2 sotto H_0 ha una percentuale di rifiuto molto alta, tranne per il caso $n_1 = n_2$, quindi anche questo secondo test è preferibile applicarlo con numerosità campionarie uguali.

	$n_1 = 5$ $n_2 = 10$	$n_1 = 10$ $n_2 = 10$	$n_1 = 20$ $n_2 = 40$
		$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$	
Fisher	3.3	4.05	4.75
Liptak	4.15	4.4	4.85
Tippett	3.1	3.5	4.8
		$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$	
Fisher	3.0	4.8	8.3
Liptak	4.1	5.9	9.7
Tippett	2.3	4.1	5.2
		$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$	
Fisher	4.9	8.8	32.4
Liptak	7.2	10.2	36.8
Tippett	3.3	6.6	19.4
		$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$	
Fisher	9.1	21.4	75.7
Liptak	12.2	25.5	79.5
Tippett	2.9	11.9	54.5
		$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$	
Fisher	7.0	31.6	84.3
Liptak	10.3	29.2	59.4
Tippett	3.1	32.3	91.9

Tabella 4.6: Test B2: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2), H_1 : N_1 \neq N_2$

(a) $N_1 \neq N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 30$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 200$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	5.0	4.15	4.7
Liptak	5.15	4.55	5.35
Tippett	4.7	4.55	4.7
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	16.8	43.6	68.2
Liptak	16.7	42.0	67.6
Tippett	14.1	35.9	60.1
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	56.1	97.6	100
Liptak	54.1	96.7	100
Tippett	45.8	91.1	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	97.4	100	100
Liptak	94.3	100	100
Tippett	95.7	100	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	99.8	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

(b) $N_1 < N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 30$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 200$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	18.9	4.85	26.75
Liptak	14.7	4.85	20.4
Tippett	19.6	5.35	2.72
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	66.2	45.0	25.5
Liptak	55.3	43.6	21.6
Tippett	66.9	38.8	24.9
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	94.7	97.4	98.2
Liptak	90.1	97.9	95.5
Tippett	91.5	94.3	95.5
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	99.6	100	100
Tippett	100	100	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

(c) $N_1 > N_2$

	$n_1 = 50$ $n_2 = 30$	$n_1 = 100$ $n_2 = 100$	$n_1 = 150$ $n_2 = 200$
	$N_1(0,1)$ $N_2(0,1)$		
Fisher	20.05	5.75	26.35
Liptak	15.1	5.3	21.35
Tippett	21.1	5.65	2.91
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.2,1.5)$		
Fisher	67.4	45.5	26.2
Liptak	54.9	43.9	38.8
Tippett	67.4	38.8	23.8
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.5,2)$		
Fisher	93.3	97.1	97.5
Liptak	89.8	96.4	97.7
Tippett	91.1	92.2	95.2
	$N_1(0,1)$ $N_2(0.8,4)$		
Fisher	99.9	100	100
Liptak	99.6	100	100
Tippett	99.9	100	100
	$N_1(0,1)$ $N_2(1,100)$		
Fisher	100	100	100
Liptak	100	100	100
Tippett	100	100	100

Tabella 4.7: Test B2: percentuale di rifiuti di H_0, sotto la distribuzione $N(\mu, \sigma^2)$

Capitolo 5

II Simulazione: confronto tra distribuzioni

In questa seconda simulazione abbiamo applicato i tre test a quattro diverse distribuzioni:

* Normale;
* Laplace;
* LogNormale;
* Esponenziale.

I parametri considerati sono:

* $\mu = \{0, 0.5, 1\}$;
* $\sigma = \{1, 1.5, 2\}$;

Sono state prese in considerazione numerosità campionarie bilanciate e non:

* $n_1 = n_2 = 25$;
* $n_1 = n_2 = 30$;
* $n_1 = 30, \quad n_2 = 300$.

Le numerosità campionarie sono state scelte per valutare i test nelle situazioni più comuni in cui le numerosità sono modeste, ed una situazione più estrema, meno frequente ma pur sempre riscontrabile, con uno sbilanciamento dei dati molto grande. Inoltre saranno utilizzate per dei confronti con studi precedenti. I valori delle tabelle si riferiscono alla percentuale di rifiuti di H_0 ad un livello $\alpha = 0.05$

5.1 Risultati test A

Per quanto riguarda la verifica d'ipotesi bilaterale osserviamo che:

- Normale: riscontriamo gli stessi risultati della simulazione precedente, e riporta le stesse performance anche per il caso più estremo;
- Laplace: il test funziona bene, la funzione di combinazione di Fisher ne aumenta la potenza con numerosità campionarie più grandi , mentre se la numerosità è sbilanciata sembra preferibile Liptak;
- LogNormale: in generale il test porta buoni risultati solo nei casi con numerosità bilanciate ed utilizzando Tippett.
- Esponenziale: sotto H_0 il test porta buoni risultati solo nei casi con numerosità bilanciate ed utilizzando Tippett, ma sotto H_1 si ottiene una potenza massima di circa il 63%.

Per quanto riguarda le alternative unilaterali i risultati sono i medesimi, si evidenzia solo che in un'ipotesi di aumento dei parametri e sotto la distribuzione LogNormale utilizzando la funzione di combinazione di Tippett il test funziona in modo corretto.

		$n_1 = 25 \quad n_2 = 25$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
	F	4.35	58.7	86.6	92.5	96.4
Normale	L	4.55	57.8	74.5	93.3	94.4
	T	4.65	53.5	87.8	86.1	93.8
	F	5.2	33.5	54.2	65.9	75.1
Laplace	L	5.15	32.7	46.2	65.8	72.1
	T	5.15	29.6	52.6	59.1	70.4
	F	9.45	62.8	80.2	91.9	95.3
Log-Normale	L	12.0	68.2	85.4	93.1	97.1
	T	3.0	42.8	63.2	81.3	87.4
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 30$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
	F	5.8	70.3	91.0	95.1	98.8
Normale	L	6.0	67.4	78.3	96.1	98.0
	T	5.8	64.4	90.8	90.6	96.6
	F	5.8	70.3	91.0	95.1	98.8
Laplace	L	4.0	36.6	51.6	73.2	82.8
	T	4.85	33.5	65.9	65.5	80.5
	F	5.8	70.3	91.0	95.1	98.8
Log-Normale	L	12	77.0	89.4	96.4	98.6
	T	2.92	52.5	71.6	87.2	92.2
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 300$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
	F	5.25	89.6	98.3	100	100
Normale	L	5.35	91.3	96.1	100	100
	T	4.5	76.7	98.0	99.6	100
	F	4.85	53.6	62.9	93.5	96.5
Laplace	L	4.35	60.1	69.0	94.4	97.5
	T	5.6	31.0	41.5	88.3	84.6
	F	11.8	97.8	100	100	100
Log-Normale	L	13.9	98	100	100	100
	T	9.95	97.6	100	100	100

Tabella 5.1: Test A, $H_1 : F_1 \neq F_2$

				$n_1 = 25 \quad n_2 = 25$		
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$
	F	4.45	77.0	93.8	97.2	99.0
Normale	L	4.7	79.1	89.6	97.7	98.9
	T	4.85	65.4	92.5	92.7	97.7
	F	4.05	52.6	74.8	81.3	89.5
Laplace	L	3.8	55.6	69.8	83.0	89.1
	T	4.35	42.3	70.2	72.2	83.0
	F	9.3	75.6	88.7	96.2	98.0
Log-Normale	L	11.85	80.7	91.7	97.4	98.2
	T	2.7	53.8	71.9	88.2	93.1
				$n_1 = 30 \quad n_2 = 30$		
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$
	F	5.3	84.9	96.4	99.0	99.8
Normale	L	5.55	85.9	92.7	99.3	99.4
	T	4.95	76.6	95.7	99.6	99.1
	F	5.05	56.7	80.4	84.4	93.2
Laplace	L	5.25	59.1	77.1	87.2	93.8
	T	4.8	46.5	76.4	77.3	87.4
	F	7.9	84.1	93.9	98.1	99.6
Log-Normale	L	10.65	87.3	96.6	99.0	99.7
	T	3.05	66.4	82.2	93.6	96.6
				$n_1 = 30 \quad n_2 = 300$		
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 1.5$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 1 \quad \sigma_1 = 2$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$
	F	5.55	95.6	100	100	100
Normale	L	5.25	95.3	98.4	100	100
	T	5.8	95.1	100	99.4	100
	F	6.05	76.2	95.7	96.5	99.4
Laplace	L	6.35	77.8	90.7	97.0	99.3
	T	5.6	67.9	94.7	92.4	98.6
	F	5.4	93.8	99.0	100	100
Log-Normale	L	7.6	95.3	99.3	100	100
	T	2.65	87.2	97.3	99.7	100

Tabella 5.2: Test A, $H_1 : F_1 > F_2$

		$n_1 = 25 \quad n_2 = 25$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	5.85	74.5	92.9	92.6	98.7
	L	5.55	75.1	89.9	97.3	98.6
	T	5.4	65.0	91.6	91.8	97.8
Laplace	F	5.15	50.0	72.3	80.2	88.4
	L	4.75	52.5	70.5	81.9	89.5
	T	4.7	42.6	67.1	71.2	82.6
Log-Normale	F	8.8	75.2	89.4	96.6	98.3
	L	11.5	79.6	93.1	98.0	98.8
	T	2.85	55.2	74.4	89.7	91.7
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 30$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	5.4	81.8	97.5	99.0	100
	L	5.3	82.8	94.7	99.4	9.8
	T	6.0	72.1	96.0	95.6	99.6
Laplace	F	4.8	56.7	80.5	86.8	93.2
	L	5.1	58.9	76.8	88.4	93.0
	T	4.8	47.0	77.0	77.1	86.3
Log-Normale	F	8.5	81.5	94.7	97.5	99.3
	L	11.1	86.3	96.2	98.3	99.5
	T	2.75	86.3	96.2	98.3	99.6
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 300$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	4.3	98.9	100	100	100
	L	4.55	98.8	100	100	100
	T	4.4	94.8	100	100	100
Laplace	F	4.85	78.7	95.6	97.4	99.8
	L	5.1	81.5	95.8	97.8	99.9
	T	4.75	68.9	92.7	94.9	98.8
Log-Normale	F	11.4	99.3	100	100	100
	L	18.25	99.3	100	100	100
	T	9.9	98.7	100	100	100

Tabella 5.3: Test A, $H_1 : F_1 < F_2$

(a)

		$n_1 = 25 \quad n_2 = 25$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	9.15	84.9	84.2
$Exp_1 < Exp_2$	L	11.9	87.6	88.0
	T	2.6	68.4	66.2
	F	8.45	84.3	82.5
$Exp_1 > Exp_2$	L	11.45	88.2	85.9
	T	2.7	64.5	67.3
	F	8.35	72.4	73.1
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	10.9	76.8	76.1
	T	2.75	49.8	55.1

(b)

		$n_1 = 30 \quad n_2 = 30$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	8.7	89.1	88.1
$Exp_1 < Exp_2$	L	11.1	92.1	90.4
	T	3.4	76.1	74.7
	F	7.7	90.3	90.6
$Exp_1 > Exp_2$	L	9.95	92.6	93.4
	T	2.15	74.3	73.9
	F	7.65	80.1	79.4
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	9.8	83.5	84.1
	T	2.6	63.3	63.0

(c)

		$n_1 = 30 \quad n_2 = 300$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	11.55	99.0	98.9
$Exp_1 < Exp_2$	L	14.2	99.1	99.5
	T	5.55	97.8	97.4
	F	5.55	96.9	97.5
$Exp_1 > Exp_2$	L	7.95	98.0	98.0
	T	2.35	92.2	94.1
	F	8.6	94.3	95.6
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	11.1	95.6	96.9
	T	6.15	91.4	93.1

Tabella 5.4: Test A Esponenziale

5.2 Risultati test B1

In questa seconda simulazione il test B1 funziona esclusivamnete sotto la distribuzione Normale. Sotto le altre distribuzioni riporta una percentuale di rifiuti sotto H_0 molto alta, questo può esere riconducibile alla forte dipendenza del test F alla distribuzione Normale. Queste osservazioni valgono per le ipotesi sia bilaterali che unilaterali.

(a)

		$n_1 = 25$	$n_2 = 25$	
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	18.2	88.9	89.6
$Exp_1 < Exp_2$	L	19.6	89.6	91.7
	T	14.85	82.6	84.0
	F	16.45	88.6	88.6
$Exp_1 > Exp_2$	L	18.1	90.3	89.8
	T	13.2	82.0	82.0
	F	19.05	78.2	78.1
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	19.0	79.7	79.7
	T	17.35	70.9	68.9

(b)

		$n_1 = 30$	$n_2 = 30$	
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	16.95	91.2	92.3
$Exp_1 < Exp_2$	L	18.15	92.2	93.7
	T	14.4	86.4	87.9
	F	17.5	92.7	92.6
$Exp_1 > Exp_2$	L	18.9	93.6	93.5
	T	14.5	86.5	88.6
	F	18.45	83.7	85.2
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	18.7	85.3	86.3
	T	17.9	76.9	76.8

(c)

		$n_1 = 300$	$n_2 = 300$	
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
	F	11.6	100	100
$Exp_1 < Exp_2$	L	10.35	100	100
	T	12.56	100	100
	F	11.6	100	100
$Exp_1 > Exp_2$	L	10.35	100	100
	T	12.56	100	100
	F	11.6	100	100
$Exp_1 \neq Exp_2$	L	10.35	100	100
	T	12.56	100	100

Tabella 5.5: Test B1 Esponenziale

		$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0.5$ $\sigma_2=1.5$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0.5$ $\sigma_2=2$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=1$ $\sigma_2=1.5$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=1$ $\sigma_2=2$
$n_1=25$ $n_2=25$						
Normale	F	4.45	46.0	82.7	81.1	93.7
	L	4.65	44.2	73.0	80.6	93.3
	T	4.2	38.8	82.6	70.7	87.1
Laplace	F	12.3	43.6	74.4	62.2	81.4
	L	10.85	39.2	65.2	62.0	77.9
	T	11.95	42.1	73.2	55.9	78.9
Log-Normale	F	37.8	91.3	97.3	97.6	99.8
	L	35.4	90.7	97.2	97.8	99.8
	T	39.3	90.1	97.3	96.7	99.8
$n_1=30$ $n_2=30$						
Normale	F	5.15	53.9	90.3	89.2	97.7
	L	5.5	53.3	82.1	87.3	96.7
	T	4.9	45.9	87.8	77.8	94.0
Laplace	F	11.00	50.7	77.3	69.8	87.8
	L	9.75	45.2	69.3	67.9	85.1
	T	11.7	45.7	80.2	67.2	84.3
Log-Normale	F	42.1	91.7	98.7	98.4	99.7
	L	38.00	91.8	98.7	98.4	99.7
	T	43.2	92.7	98.5	98.1	99.7
$n_1=300$ $n_2=300$						
Normale	F	5.25	100	100	100	100
	L	5.15	100	100	100	100
	T	5.0	100	100	100	100
Laplace	F	12.6	100	100	100	100
	L	10.8	100	100	100	100
	T	13.3	100	100	100	100
Log-Normale	F	58.05	100	100	100	100
	L	51.8	100	100	100	100
	T	57.9	100	100	100	100

Tabella 5.6: Test B1, $H_1 : F_1 \neq F_2$

		$\mu_1=0\quad\sigma_1=1$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$
$n_1=25\quad n_2=25$						
Normale	F	4.45	76.5	95.7	95.2	99.5
	L	4.9	78.1	93.9	96.1	98.1
	T	4.55	63.8	94.0	89.8	97.7
Laplace	F	11.6	64.7	87.8	82.9	93.4
	L	10.2	63.3	84.9	81.1	93.2
	T	6.85	47.9	52.1	68.1	76.8
Log-Normale	F	25.5	92.4	98.1	98.0	99.5
	L	26.45	93.1	98.4	98.3	99.5
	T	24.2	91.0	97.9	96.8	99.3
$n_1=30\quad n_2=30$						
		$\mu_1=0\quad\sigma_1=1$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$
Normale	F	5.4	81.3	97.0	97.7	99.4
	L	5.2	82.9	96.0	97.9	99.4
	T	5.05	70.1	96.3	97.9	99.1
Laplace	F	11.55	73.9	90.2	88.5	95.7
	L	9.75	72.5	88.8	87.8	95.7
	T	7.1	53.8	55.4	75.3	82.9
Log-Normale	F	28.0	94.9	98.7	99.6	100
	L	28.35	95.0	98.7	99.6	100
	T	26.4	94.0	98.7	99.5	99.8
$n_1=300\quad n_2=300$						
		$\mu_1=0\quad\sigma_1=1$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=0.5\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=1.5$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$	$\mu_1=1\quad\sigma_1=2$ $\mu_2=0\quad\sigma_2=1$
Normale	F	4.5	100	100	100	100
	L	4.75	100	100	100	100
	T	5.45	100	99.9	100	100
Laplace	F	12.1	100	100	100	100
	L	10.6	100	100	100	100
	T	7.05	100	100	100	100
Log-Normale	F	31.95	100	100	100	100
	L	31.7	100	100	100	100
	T	31.75	100	100	100	100

Tabella 5.7: Test B1, $H_1 : F_1 > F_2$

		$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0.5$ $\sigma_2=1.5$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=0.5$ $\sigma_2=2$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=1$ $\sigma_2=1.5$	$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$ $\mu_2=1$ $\sigma_2=2$
$n_1=25$ $n_2=25$						
Normale	F	4.25	74.3	95.2	95.4	98.3
	L	4.35	76.7	92.9	95.5	98.4
	T	4.35	62.8	94.6	90.3	96.6
Laplace	F	11.1	65.8	87.5	86.1	92.9
	L	9.35	64.2	85.0	85.2	93.3
	T	11.65	59.6	85.2	78.8	89.4
Log-Normale	F	28.8	92.5	98.6	98.5	99.7
	L	29.7	93.3	98.6	98.8	99.8
	T	26.8	93.3	98.2	98.1	99.7
$n_1=30$ $n_2=30$						
Normale	F	4.75	80.6	98.6	97.3	99.6
	L	5.4	82.2	97.3	98.3	99.7
	T	4.7	70.0	97.7	94.2	98.9
Laplace	F	12.4	69.0	96.2	89.0	96.1
	L	10.9	68.7	89.2	88.9	95.6
	T	12.9	62.1	89.9	83.5	93.4
Log-Normale	F	29.05	94.1	99.0	98.8	100
	L	29.6	94.6	98.9	99.1	100
	T	27.55	93.3	98.9	98.4	100
$n_1=300$ $n_2=300$						
Normale	F	4.55	100	100	100	100
	L	4.5	100	100	100	100
	T	5.15	100	100	100	100
Laplace	F	11.6	100	100	100	100
	L	10.35	100	100	100	100
	T	12.56	100	100	100	100
Log-Normale	F	32.5	100	100	100	100
	L	31.85	100	100	100	100
	T	31.85	100	100	100	100

Tabella 5.8: Test B1, $H_1 : F_1 < F_2$

5.3 Risultati test B2

Per quanto riguarda la verifica d'ipotesi bilaterale osserviamo che:

- Normale: le performance sono leggermente diminuite nel casi di numerosità campionaria $n_1 = 25, n_2 = 25$, comprensibile per il valore basso, ma ritornano ai livelli dei test precedenti se si utilizza la funzione di combinazione di Tippett ;
- Laplace, LogNormale: sotto H_0 il test funziona bene si mantiene ad una percentuale di rifiuti attorno al 5%, ma sotto H_1 otteniamo un valore massimo di solo 59%; nel caso della numerosità campionaria sbilanciata utilizzando la funzione di combinazione di Tippett i risultati migliorano e diventano accettabili;
- Esponenziale: sotto H_0 i livelli di rifiuto sono accettabili solo utilizzando Tippett e per numerosità campionarie bilanciate, ma poi sotto H_1 il test non è in grado di individuare i cambiamenti, per i campioni sbilanciati il test non funziona.

Per le verifiche d'ipotesi unilaterali :

- Normale: le performance sono buone come neglia altri test ;
- Laplace: i risultati sono accettabili, si nota una leggera diminuzione della potenza per l'alternativa unilaterale sinistra $F_1 < F_2$;
- LogNormale: sotto H_0 i livelli di rifiuto sono accettabili solo utilizzando Tippett e per numerosità campionarie bilanciate, ma poi sotto H_1 il test non è in grado di individuare i cambiamenti, per i campioni sbilanciati il test non funziona;
- Esponenziale: la sitazione è analoga per il problema bilaterale.

Per cercare di ottenere risultati migliori in fase di simulazione si è provato a considerare invece dei quadrati degli scarti dalle medie campionarie di gruppo Y_{ji}=$(X_{ji} - \bar{X}_j)^2$ il modulo degli scarti dalle medie campionarie di gruppo Y_{ji}=$|X_{ji} - \bar{X}_j|$, ma questa diversa trasformazione non ha portato nessn miglioramento.

(a)

		$n_1 = 25$ $n_2 = 25$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
$Exp_1 < Exp_2$	F	8.4	68.3	64.7
	L	10.8	74.0	69.5
	T	3.85	47.5	47.3
$Exp_1 > Exp_2$	F	8.65	68.1	68.8
	L	11.9	72.6	73.1
	T	4.15	49.8	48.3
$Exp_1 \neq Exp_2$	F	7.1	56.1	54.5
	L	9.6	62.2	61.0
	T	3.6	32.8	32.4

(b)

		$n_1 = 30$ $n_2 = 30$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
$Exp_1 < Exp_2$	F	6.9	72.6	75.0
	L	9.65	76.7	79.3
	T	3.15	57.6	57.8
$Exp_1 > Exp_2$	F	8.35	74.2	77.2
	L	10.15	77.5	80.7
	T	1.76	57.0	57.2
$Exp_1 \neq Exp_2$	F	7.0	64.8	62.4
	L	9.15	70.2	68.6
	T	4.25	42.9	42.4

(c)

		$n_1 = 30$ $n_2 = 300$		
		$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 0.5$ $\mu_2 = 1$	$\mu_1 = 1$ $\mu_2 = 2$
$Exp_1 < Exp_2$	F	8.35	96.0	97.1
	L	9.2	95.8	96.9
	T	7.25	95.9	96.7
$Exp_1 > Exp_2$	F	8.85	96.0	97.3
	L	10.15	96.2	97.0
	T	7.45	95.4	97.2
$Exp_1 \neq Exp_2$	F	9.9	96.6	95.0
	L	10.55	96.2	94.5
	T	8.4	96.4	94.4

Tabella 5.9: Test B2 Esponenziale

		$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0 \quad \sigma_2=1$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=2$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=2$
		$n_1=25 \quad n_2=25$				
Normale	F	4.25	37.0	61.0	79.3	84.4
	L	4.75	39.5	53.2	78.9	84.8
	T	4.0	28.2	58.8	64.4	68.1
Laplace	F	4.65	15.2	25.9	40.4	48.9
	L	4.4	16.6	26.1	41.5	51.7
	T	4.1	19.7	36.9	44.7	50.1
Log-Normale	F	3.8	15.5	24.3	41.2	46.2
	L	4.2	18.1	25.8	42.5	51.6
	T	3.7	20.9	32.1	44.4	48.0
		$n_1=30 \quad n_2=30$				
		$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0 \quad \sigma_2=1$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=2$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=2$
Normale	F	4.9	47.2	74.6	87.2	93.6
	L	4.95	48.7	64.5	86.8	93.3
	T	4.0	53.7	85.2	84.8	92.6
Laplace	F	3.75	20.4	34.8	51.7	56.3
	L	4.5	22.4	32.1	51.6	59.6
	T	3.6	23.8	44.9	53.3	59.3
Log-Normale	F	5.6	34.4	29.8	56.4	43.8
	L	7.75	44.3	38.8	64.2	52.2
	T	3.05	10.9	8.4	33.1	15.5
		$n_1=30 \quad n_2=300$				
		$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0 \quad \sigma_2=1$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=0.5 \quad \sigma_2=2$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=1.5$	$\mu_1=0 \quad \sigma_1=1$ $\mu_2=1 \quad \sigma_2=2$
Normale	F	4.25	35.1	45.9	85.9	87.9
	L	4.4	39.4	53.4	84.0	91.6
	T	3.9	89.1	99.7	98.5	100
Laplace	F	4.25	35.1	45.9	85.8	87.9
	L	4.4	39.4	53.4	84.0	91.6
	T	4.7	62.8	92.0	88.4	96.9
Log-Normale	F	12.15	90.6	87.0	97.7	88.4
	L	11.85	82.2	73.4	95.3	78.0
	T	4.85	93.9	92.4	98.8	90.5

Tabella 5.10: Test B2, $H_1 : F_1 \neq F_2$

		$\mu_1=0$ $\sigma_1=1$	$\mu_1=0.5$ $\sigma_1=1.5$	$\mu_1=0.5$ $\sigma_1=2$	$\mu_1=1$ $\sigma_1=1.5$	$\mu_1=1$ $\sigma_1=2$
		$\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_2=0$ $\sigma_2=1$	$\mu_2=0$ $\sigma_2=1$
$n_1=25$ $n_2=25$						
Normale	F	5.4	73.4	92.1	95.8	98.4
	L	5.2	75.5	87.8	95.8	98.3
	T	5.6	59.2	86.4	88.4	94.7
Laplace	F	4.1	44.0	64.9	74.5	84.3
	L	4.7	46.9	62.5	76.3	86.1
	T	3.4	32.2	57.1	59.5	68.2
Log-Normale	F	9.5	70.5	73.2	89.9	80.8
	L	13.35	80.6	86.2	95.5	92.1
	T	2.75	33.2	28.5	64.7	44.2
$n_1=30$ $n_2=30$						
Normale	F	4.4	79.4	96.4	98.5	99.4
	L	4.8	80.9	91.8	98.6	99.4
	T	4.4	67.8	93.9	94.1	97.2
Laplace	F	4.7	52.3	71.7	81.6	88.6
	L	5.15	53.3	67.5	83.2	90.2
	T	4.85	39.3	65.6	69.0	74.5
Log-Normale	F	8.55	72.4	79.3	92.0	84.3
	L	11.9	82.9	90.6	96.7	94.7
	T	2.35	39.1	41.7	72.2	56.6
$n_1=30$ $n_2=300$						
Normale	F	4.25	95.8	99.9	100	100
	L	3.95	96.0	99.7	99.9	100
	T	5.15	93.8	99.9	99.4	100
Laplace	F	4.8	78.6	96.0	96.7	99.7
	L	4.1	78.8	95.4	96.1	99.9
	T	5.45	72.8	94.8	93.1	98.8
Log-Normale	F	9.3	92.1	98.9	99.9	99.9
	L	10.1	92.9	99.1	99.9	99.9
	T	7.8	88.6	98.2	99.3	99.7

Tabella 5.11: Test B2, $H_1 : F_1 > F_2$

		$n_1 = 25 \quad n_2 = 25$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	5.3	75.5	91.5	94.9	98.4
	L	5.5	77.6	86.6	96.0	98.1
	T	5.2	60.9	88.4	85.9	94.0
Laplace	F	4.6	45.7	63.9	76.8	81.8
	L	5.0	50.6	62.5	78.1	83.5
	T	4.55	33.7	54.5	63.4	65.4
Log-Normale	F	9.15	69.8	71.7	89.4	83.2
	L	12.85	80.9	85.4	95.8	93.2
	T	2.7	32.7	30.6	62.3	48.6
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 30$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	4.05	81.4	96.0	97.0	99.5
	L	4.45	81.9	92.7	97.4	99.2
	T	4.25	71.9	94.4	93.0	97.9
Laplace	F	5.45	60.6	75.4	83.2	87.2
	L	5.8	53.9	71.0	84.8	89.3
	T	4.9	39.7	67.2	68.4	73.8
Log-Normale	F	7.0	76.2	77.2	93.0	84.5
	L	11.4	85.7	89.5	96.5	94.1
	T	2.2	42.5	37.8	72.5	55.5
		$n_1 = 30 \quad n_2 = 300$				
		$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0 \quad \sigma_2 = 1$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 0.5 \quad \sigma_2 = 2$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 1.5$	$\mu_1 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ $\mu_2 = 1 \quad \sigma_2 = 2$
Normale	F	3.8	95.5	99.9	100	100
	L	3.9	96.2	99.8	99.9	100
	T	4.2	91.9	99.9	99.9	100
Laplace	F	5.95	79.8	96.5	95.8	99.6
	L	5.3	80.2	96.2	95.4	99.5
	T	7.15	72.9	95.3	91.8	98.6
Log-Normale	F	8.95	92.6	99.0	98.9	100
	L	10.1	93.6	99.2	99.0	100
	T	7.25	88.1	98.6	98.6	100

Tabella 5.12: Test B2: $H_1 : F_1 < F_2$

Capitolo 6

Conclusioni

I tre test proposti in questo studio si sono rivelati applicabili in situazioni diverse:

- Il test A rispetto ai test B1 e B2 ha il vantaggio di poter essere applicato anche ad insiemi di dati con numerosità campionarie piccole. Se i dati sono approssimativamente normali offre risultati migliori utilizzando la funzione di combinazione di Fisher , mentre se i dati provengono da una distribuzione con code pesanti Tippett risulta preferibile. Si consiglia una numerosità campionaria, di ciascun campione, pari ad almeno 10 unità.

- Il test B1 risulta applicabile solo con numerosità campionarie bilanciate ed elevate, minimo pari a $n_i = 100$, e i dati devono provenire dalla distribuzione normale.

- Il test B2 risulta applicabile a dati con distribuzione approssimativamente normale e le numerosità campionarie devono essere anche in questo caso bilanciate. Non risulta applicabile a distribuzioni con code pesanti come si può notare dai risultati ottenuti dalle simulazioni con la lognormale e l'esponenziale.

Se analizziamo i tre test sotto l'aspetto computazionale è evidente che i test B1 e B2 risultano molto veloci rispetto al test A. Quest'ultimo però utilizzando un campione dello spazio di permutazione abbatte di molto i tempi di computo rispetto ad un test di permutazione esatto senza però perdere in termini di precisione. Il test A risulta certamente più lento degli altri due, (nel caso peggiore ($n_1 = 300, n_2 = 300$) per calcolare 1000 permutazioni ha impiegato circa un'ora).

Quindi il test A risulta essere preferibile rispetto ai test B1 B2 in quanto applicabile laddove gli altri test non funzionano. Il test A inoltre evidenzia una maggiore capacità di discriminazione per le ipotesi unilaterali rispetto a quella bilaterale, offrendo così una nuova alternativa per lo studio di quei processi in cui si ipotizza un aumento , o diminuzione, nei valori dei parametri di locazione-scala.

In tabella 6.1 viene effettuato un confronto del test A con risultati pubblicati in articoli precedenti da Podgor (1994) e Buning (1999). Viene considerato il caso in cui $n_1 = 25, n_2 = 25$ sotto la distribuzione normale e per un'ipotesi alternativa bilaterale. Sotto la distribuzione normale il test A offre risultati migliori sia sotto H_0 sia sotto H_1.

Test	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$
	$\mu_2 = 0$ $\sigma_2 = 1$	$\mu_2 = 1$ $\sigma_2 = 2$
Test A	4.35	96.4
Lepage	4.78	84.28
Modified Lepage	4.56	86.65
AdaptiveLePage	4.6	87.51
Rank sum	9.8	67.9
Grambsch-O'Brien generalized t	9.3	92.2
Grambsch-O'Brien generalized rank-sum	9.7	91.8

Tabella 6.1: Proporzione di rifiuti di H_0

Test	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$	$\mu_1 = 0$ $\sigma_1 = 1$
	$\mu_2 = 0$ $\sigma_2 = 1$	$\mu_2 = 0.5$ $\sigma_2 = 1.5$	$\mu_2 = 1$ $\sigma_2 = 1.5$	$\mu_2 = 1$ $\sigma_2 = 2$
Test A	5.2	33.5	65.9	75.1
Lepage	4.92	44.24	87.07	88.07
AdaptiveLePage	4.72	46.81	87.49	90.08

Tabella 6.2: Proporzione di rifiuti di H_0

Sotto la distribuzione di Laplace invece ha una potenza molto inferiore rispetto agli altri test (tab. 6.2) . Per avvicinarsi e persino superare i risultati degli altri test basterebbe aumentare di 5 unità ciascun campione.

In conclusione il test A può essere considerato una valida alternativa ai vari test proposti nella verifica d'ipotesi congiunta per cui si ipotizza un aumento, o diminuzione in entrambi i parametri di locazione-scala. Penso che in futuro potrà essere maggiormente utilizzato in quanto lo sviluppo del test di permutazione e strettamente legato all'aumento della velocità dei calcolatori elettronici. Quando si potrà disporre di calcolatori così potenti da calcolare tutta l'orbita delle permutazioni anche per numerosità abbastanza elevate, si potranno disporre di risultati esatti, e quindi si riuscirà a ricavare la vera informazione contenuta nei dati.

Bibliografia

[1] Bürning, H. e Thandewald, T. "An adaptive two-sample location-scale test of Lepage type for symmetric distributions "*J. Statist. Comput. Simul.* , 2000, Vol. 65, 287-310.

[2] Lepage, Y. (1971) "A combination of Wilcoxon's and Ansary-Bradley's statistics."*Biometrika*, 58 , 213-217.

[3] Kössler, W. (2006) "Asymptotic power and efficency of Lepage-type test for the treatment of combined location-scale alternative " http://edoc.hu-berlin.de/series/informatik-berichte/200/PDF/200.pdf .

[4] Marozzi, M. e Osmetti, S. "Some notes on the Cucconi rank test for location-scale problems ", XLIII Riunione Scientifica, Torino 2006.

[5] Pesarin, F. (2001), *Multivariate Permutation Tests: With Applications in Biostatistics*, John Wiley & Sons, Ltd., New York.

[6] Podgor, M. J. e Gastwirth, J. L. (1994) "On non-parametric and generalized tests for the two-sample problem with location and scale change alternatives "*Statistics in Medicine*, Vol. 13, 747-758.