



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MECCATRONICA

Tesi di laurea magistrale

COMPORTAMENTO STATICO DI MATERIALI  
IPERELASTICI: MODELLAZIONE E  
VALIDAZIONE SPERIMENTALE

RELATORE: Ch.mo Prof. Filippo Berto

LAUREANDO: Adriano Muraro  
MATRICOLA: 1019800

ANNO ACCADEMICO: 2016/2017



*Ringraziamenti.*

*Ringrazio la mia mamma,  
che grazie alla sua infinita pazienza portata  
in questi anni di studio, mi ha permesso di  
occupare in pianta stabile la tavola del  
salotto.*

*E ringrazio il Professor Filippo Berto che,  
nonostante gli anni passati a scrivere questa  
tesi, nonostante la distanza che ci ha  
inevitabilmente divisi, non mi ha mai fatto  
mancare il suo sostegno sia scientifico, sia  
umano.*



# Indice

Sommario.....	1
Introduzione .....	3

## Capitolo 1

<b>Introduzione alla meccanica della frattura lineare elastica.....</b>	<b>5</b>
1.1 Lo stato tensionale all'apice di una cricca.....	5
1.2 Intagli a spigolo vivo.....	11
1.3 Il metodo di Muskhelishvili-Kolosoff.....	20
1.4 Le equazioni di Lazzarin-Tovo (1996).....	25
1.5 Miglioramento delle equazioni: le nuove formulazioni di Lazzarin-Filippi (2002) .....	33

## Capitolo 2

<b>Criterio sulla densità di energia di deformazione.....</b>	<b>39</b>
2.1 La Strain Energy Density (SED).....	39
2.2 SED negli intagli raccordati.....	44
2.3 Vantaggi dell'approccio SED .....	49

## Capitolo 3

<b>Materiali studiati e prove sperimentali.....</b>	<b>59</b>
3.1 La macchina di prova.....	59
3.2 Materiale uno: PA6GF30.....	59

3.3 Materiale due: Polivincloruro (PVC).....	61
3.4 Materiale tre: Polipropilene (PP). ....	62
3.5 Le prove sperimentali. ....	64
3.5.1 Costruzione dei provini. ....	66
3.6 Caratteristiche tensione - spostamento.....	67
3.6.1 Materiale 1: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	67
3.6.2 Materiale 1: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	68
3.6.3 Materiale 1: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	70
3.6.4 Materiale 1: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	71
3.6.5 Materiale 2: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	73
3.6.6 Materiale 2: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	74
3.6.7 Materiale 2: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	75
3.6.8 Materiale 2: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	77
3.6.9 Materiale 3: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	78
3.6.10 Materiale 3: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	80
3.6.11 Materiale 3: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 5$ mm. ....	81
3.6.12 Materiale 3: raggio di raccordo $\rho = 2$ mm, profondità $a = 10$ mm. ....	82

## Capitolo 4

<b>Simulazioni al calcolatore – Modello lineare.....</b>	<b>87</b>
4.1 Modellazione tramite il codice di calcolo Ansys: caso lineare elastico.....	87
4.2 Calcolo del $K_{IC}$ .....	88
4.3 Determinazione del raggio critico.....	94
4.4 Calcolo della densità di energia di deformazione (SED).....	95

4.5 Analisi di sensibilità lineare elastica.....	101
4.6 Materiale 1: Sintesi dell'analisi di sensibilità.....	103
4.7 Materiale 2: Sintesi dell'analisi di sensibilità.....	106
4.8 Materiale 3: Sintesi dell'analisi di sensibilità.....	109
4.9 Verifica finale.....	113
4.9.1 Metodo 1: applicazione della meccanica della frattura lineare elastica....	113
4.9.2 Metodo 2: Provino liscio intagliato.....	119

## Capitolo 5

<b>Modelli basati sull'integrale della curva tensione-deformazione.....</b>	<b>123</b>
5.1 Curva lineare elastica.....	123
5.2 Modelli iperelastici.....	131
5.3 Equazioni delle deformazioni usate nella teoria dell'elasticità.....	134
5.4 Equazioni delle tensioni usate nella teoria della elasticità.....	136
5.4.1 Calcolo della relazione tensione-deformazione dalla densità di energia di deformazione.....	136
5.5 Note sulla perfetta incomprimibilità dei materiali.....	139
5.6 Forme specifiche della densità di energia di deformazione.....	140
5.6.1 Calibrazione dei modelli elastici non lineari.....	142
5.7 Determinazione dei parametri delle curve tensione-deformazione.....	145
5.8 Analisi FEM per i modelli iperelastici: Modalità di esecuzione.....	148
5.8.1 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 1.....	150
5.8.2 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 2.....	152
5.8.3 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 3.....	154
5.8.4 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 1.....	156

5.8.5 <i>Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 2.</i>	158
5.8.6 <i>Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 3.</i>	160
5.8.7 <i>Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 1.</i>	162
5.8.8 <i>Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 2.</i>	164
5.8.9 <i>Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 3.</i>	166
5.8.10 <i>Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 1.</i>	168
5.8.11 <i>Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 2.</i>	170
5.8.12 <i>Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 3.</i>	172
5.8.13 <i>Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 1.</i>	174
5.8.14 <i>Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 2.</i>	176
5.8.15 <i>Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 3.</i>	178

## **Capitolo 6**

### **Conclusione e discussione.....181**

6.1 Risultati finali..... 181

6.2 Materiale 1. .... 183

6.3 Materiale 2. .... 184

6.4 Materiale 3. .... 186

### **Appendice .....189**

A1 - File Main.txt ..... 189

A2 - File GeometriaEnergiaIper.txt ..... 194

A3 - File SelezioneRaggi.txt..... 197

### **Bibliografia .....201**

# Sommario

In questo elaborato viene studiato il comportamento statico di provini intagliati costruiti con tre materiali a base polimerica. I materiali in oggetto sono il PA6GF30, il polivincloruro (P.V.C.) e il polipropilene (P.P.). Da ogni materiale sono stati costruiti 51 provini di lunghezza pari a 150 mm e larghezza 50 mm. Essi sono stati lavorati sui fianchi alle macchine utensili CNC per creare degli intagli con angoli di apertura di 30°, 60°, 120° e 150° e con due raggi di raccordo all'apice dell'intaglio, nullo oppure 2 mm, mentre la profondità di intaglio è di 5 mm oppure 10 mm. Tutti i provini sono stati sottoposti a prova di trazione per determinare le curve tensione-deformazione e le tensioni di rottura. Lo scopo di tale lavoro è quello di modellizzare il comportamento a trazione tramite il classico modello lineare elastico e tramite i modelli iperelastici. Per quanto riguarda questi ultimi, si sono presi come riferimento il modello di Mooney Rivlin, il modello di Neo Hookean e il modello di Arruda Boyce. Per il modello di Mooney Rivlin, sono stati considerati i modelli a due parametri, a tre parametri e a cinque parametri. Ogni modello e ogni provino è stato simulato in Ansys 14.1 per determinare il valore energetico localizzato all'apice dell'intaglio e confrontato con l'energia critica che porta a rottura il provino liscio, ossia senza intagli. Da tutta l'analisi, sono stati estrapolati tre raggi critici, i quali contengono un'area in cui vi è concentrata tutta l'energia di rottura, e i modelli più adatti a rappresentare il comportamento dei materiali.



# Introduzione

Il problema della rottura inaspettata di componenti è di altissimo interesse nel campo dell'ingegneria, non solo della meccanica classica, ma nei più svariati ambiti. L'insorgenza di difetti, la loro propagazione, la stima della vita residua, il campo di tensione che gli stessi difetti generano sono problematiche che l'ingegnere deve conoscere a prescindere dalla sua specializzazione. Si pensi al caso dell'ingegneria civile, in cui cedimento di pilastri in calcestruzzo, oppure alle tensioni presenti al piede di una diga o al piede di una gallerie sono di fondamentale importanza per evitare catastrofici collassi. Il settore meccanico è l'ambito principe per lo studio delle tensioni e delle cricche a rottura. Una buona progettazione è collegata a doppio filo con le nozioni della meccanica della frattura e non esistono componenti meccanici ad alte prestazioni in cui un accurato studio sulla vita residua non sia stato eseguito. Ma è altrettanto vero che tali studi coinvolgono strumenti matematici e informatici per nulla agevoli, i quali necessitano di una chiara e profonda conoscenza di argomenti anche molto recenti. Con questa idea è stato sviluppato il lavoro di tesi: dare valenza al metodo SED ("Strain Energy Density", densità di energia di deformazione) il quale è un metodo recente che permette di semplificare il lavoro di modellazione con qualsiasi software agli elementi finiti. L'idea di base di questo metodo è semplice: il cedimento di un componente intagliato avviene quando la SED calcolata all'interno di un volume di controllo raggiunge un valore critico  $W_C$ . Quest'ultima è dipendente solo dal tipo di materiale e non coinvolge altre proprietà. Ne segue una diretta ovvietà: l'energia che serve a rompere un componente intagliato è concentrata all'interno di un volume di controllo. Nel caso di problemi piani tale volume di controllo diventa semplicemente un'area piana. La domanda che ci si può porre è se tale metodo vale solo nel modello lineare elastico oppure anche modellizzando i materiali con altre leggi. In questo lavoro si è cercato di dare una risposta a questa domanda facendo un confronto su ciò che fornisce il classico modello lineare e su ciò che forniscono i modelli iperelastici, modelli per i quali cioè a fronte di uno stato tensionale applicato il componente si deforma elasticamente ma non seguendo una legge lineare ma una legge tensione-deformazione che viene derivata da una funzione detta di potenziale energetico. Tali aspetti tecnici riguardano il capitolo cinque dell'elaborato, mentre nei capitoli precedenti si richiamano le nozioni della meccanica della frattura, la valenza industriale dei materiali studiati, i risultati delle

prove di trazione nonché i risultati delle simulazioni al calcolatore. Con maggior dettaglio, il lavoro di tesi è suddiviso nei seguenti capitoli:

Capitolo 1: Una corposa introduzione alla meccanica della frattura, la quale affronta i temi classici dell'argomento fino ad arrivare ai metodi più avanzati per il calcolo delle tensioni su provini intagliati.

Capitolo 2: Viene presentato il metodo della “Strain Energy Density” e descritto quali sono i suoi vantaggi rispetto al metodo della massima tensione ammissibile.

Capitolo 3: In questa sezione viene trattata la costruzione dei provini e i risultati delle prove a trazione.

Capitolo 4: Vengono simulati i provini intagliati tramite il codice di calcolo Ansys usando il modello lineare elastico con due tecniche: la prima basata sul calcolo della tenacità a frattura e il raggio critico con le formule a loro dedicate; la seconda facendo variare la tensione di rottura di un modello equivalente lineare elastico mantenendo inalterato il modulo di Young.

Capitolo 5: Vengono studiati i modelli basati sull'integrale della curva tensione-deformazione tra cui i materiali iperelastici.

Capitolo 6: Discussione conclusiva sulla scelta dei modelli più adatti a rappresentare i tre materiali studiati.

Appendice: Codice in linguaggio APDL (Ansys Parametric Design Language) per la simulazione automatica di tutti i provini.

# Capitolo 1

## Introduzione alla meccanica della frattura lineare elastica.

### 1.1 Lo stato tensionale all'apice di una cricca.

Il fenomeno della frattura fragile si incontra in molti casi della vita quotidiana e molti collassi strutturali che hanno causato la perdita di vite si sono verificati in seguito a improvvisi, inaspettati malfunzionamenti. Uno dei più famosi incidenti che ha coinvolto la rottura fragile è accaduto negli stati uniti nel 1943 durante la seconda guerra mondiale, in cui più di un quinto delle navi cargo costruite hanno avuto rotture in elementi strutturali, come ponti, tubi, serbatoi e telai. Tra queste, il più rappresentativo incidente ha riguardato la SS John P. Gaines, la quale il 24 novembre 1943 si è tranciata in modo netto in due enormi tronconi. Un altro incidente imputabile alla rottura fragile è quello accaduto nel 1938 al ponte Albert Canal in Belgio il quale è completamente crollato, oppure nel 1962 a un altro ponte situato a Melbourne, in Australia, anch'esso completamente crollato. Per quel che riguarda invece i veicoli, due aerei Comets sono precipitati nel mar Mediterraneo nel 1954 al largo di Napoli e dell'isola d'Elba.

I disastri sopra citati hanno gettato le basi per una nuova filosofia nella progettazione strutturale. Tale filosofia è concentrata nel prevenire la rottura fragile ed è nata negli ultimi cinquant'anni, nonostante l'idea di prevenire collassi improvvisi è sempre stata nei principi cardini dei progettisti. Queste problematiche hanno coinvolto molti ricercatori in svariati campi dell'ingegneria fino al raggiungimento di un linguaggio comune quando si parla di meccanica della frattura. Infatti, analizzando le superfici di frattura del ghiaccio artico permafrost, o quelle delle distese di fango quando l'alta marea si ritrae oppure le superfici di rottura che si formano all'interno di una canna d'arma da fuoco, si può osservare una sorprendentemente analogia fra loro. Ciò che cambia è solamente la scala dei danneggiamenti i quali partono da un massimo di 22 metri nel caso del permafrost fino ad arrivare a 0.2 millimetri nel caso delle armi da fuoco.

Lo studio della rottura dei materiali è ben radicato nella storia. Le prime prove sono state effettuate da Leonardo da Vinci per poi proseguire con Galileo Galilei, al quale viene

attribuito il concetto di resistenza dei materiali, poiché osservò che la resistenza di una trave è dipendente dalla sezione della stessa e indipendente dalla lunghezza. Una maggiore spinta alla ricerca è avvenuta lungo il XIX secolo con l'avvento della I e II guerra mondiale. La pietra miliare sullo studio della resistenza a frattura è dovuta a Inglis, il quale ha risolto il problema elastico di un foro ellittico in una piastra uniformemente piana. Facendo tendere a zero il rapporto di ellitticità, Inglis è stato in grado di dedurre alcune importanti proprietà riguardo allo stato di tensione presente all'estremità di un foro ellittico assomigliante ad una cricca. Westergaard, altro studioso della teoria della elasticità, studiò lo stesso problema ma usando il metodo dei potenziali complessi giungendo a una soluzione esatta legando fra loro la tensione locale, la semi-ampiezza della cricca e la tensione applicata a monte della piastra. Griffith, seguendo un approccio sperimentale e usando le basi matematiche gettate da Inglis, tentò di spiegare le grandi discrepanze tra la teoria e la realtà sperimentale misurando la resistenza del vetro. Griffith fu il primo a ipotizzare la presenza di difetti in un solido e a fare i primi passi per predire la frattura fragile dei solidi. L'idea di base dietro a questa teoria è che una cricca inizia a propagare se l'energia elastica rilasciata dalla sua propagazione è maggiore dell'energia richiesta per creare una nuova superficie di frattura. Irwin, applicando la teoria Griffith per risolvere il problema della frattura riconobbe l'importanza dell'intensità del campo locale di tensione e propose tre modi di propagazione di una cricca (modo I, modo II e modo III) i quali sono oggi identificati dal loro rispettivo fattore di intensificazione delle tensioni (SIF, Stress Intensity Factor,  $K_I$ ,  $K_{II}$  e  $K_{III}$ ). In particolare, Irwin definì i tre seguenti modi:

- Modo I o modo di apertura: la cricca tende ad aprirsi lungo il proprio asse e la tensione esterna applicata agisce in modo normale all'asse della cricca;
- Modo II o "Sliding Mode": è rappresentato da un taglio nel piano. Le due superfici della cricca tendono a scorrere l'una sull'altra. Questo modo è molto usato nella modellazione di giunti saldati a sovrapposizione.
- Modo III o "Tearing Mode": è un modo accoppiato ad una torsione. E' ancora una sollecitazione di taglio ma per distinguerla dal modo II viene chiamato taglio fuori piano.

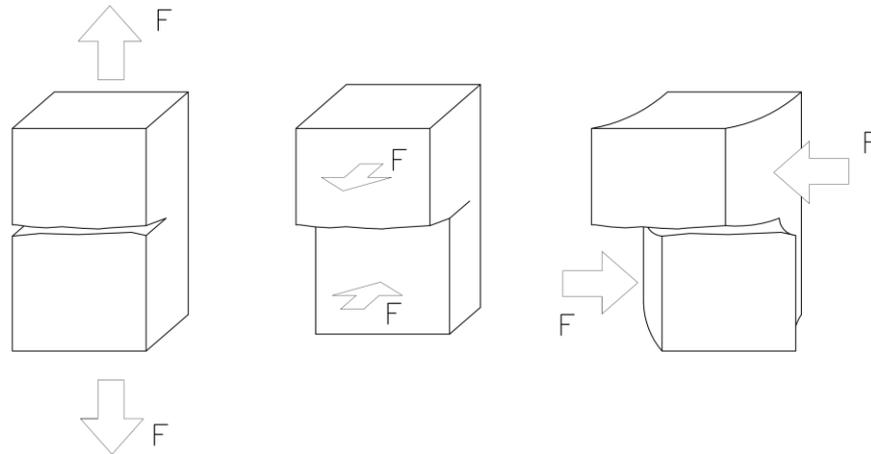


Figura 1.1: Da sinistra a destra, il modo I, modo II e il modo III.

La meccanica della frattura lineare elastica è quella branca della meccanica dei materiali che ha come scopo principale quello di valutare l'influenza dei difetti nei materiali e di trovare relazioni lineari tra dimensione dei difetti, sforzo applicato e resistenza dei materiali. Molti studi sono stati condotti in questa disciplina, sono stati seguiti approcci energetici o secondo la definizione del fattore di intensificazione delle tensioni, la stessa teoria è stata estesa al caso elasto-plastico, è stata studiata la propagazione dei difetti, ma senz'altro l'aspetto più innovativo che ne è seguito è una nuova filosofia di progettazione, detta "Damage Tolerant", ovvero si accetta la presenza di un difetto e la sua propagazione a patto che il componente lavori in piena sicurezza e non arrivi a cedimento. Si è consci della presenza del difetto e lo si accetta, ma si valuta la sua pericolosità e si interviene nella sostituzione del componente prima che esso si rompa. Va da sé che una delle principali finalità della meccanica della frattura è quella di definire quantitativamente la condizione critica che provoca il cedimento. Questa condizione è sempre determinata da tre parametri numerici: sforzo applicato (che viene calcolato), la dimensione del difetto (che viene misurata) e caratteristiche del materiale (che vengono determinate per via sperimentale). Di fatto, se si è di fronte a una cricca e si volesse usare un approccio tradizionale, nel quale si confronta lo sforzo con un limite caratteristico del materiale, si giungerebbe a un paradosso, nel senso che le tensioni all'apice del difetto raggiungono valori tendenti all'infinito. Il primo che si accorse di tale problematica fu Inglis che nel 1913 determinò alcune relazioni tra i difetti e le sovratensioni.

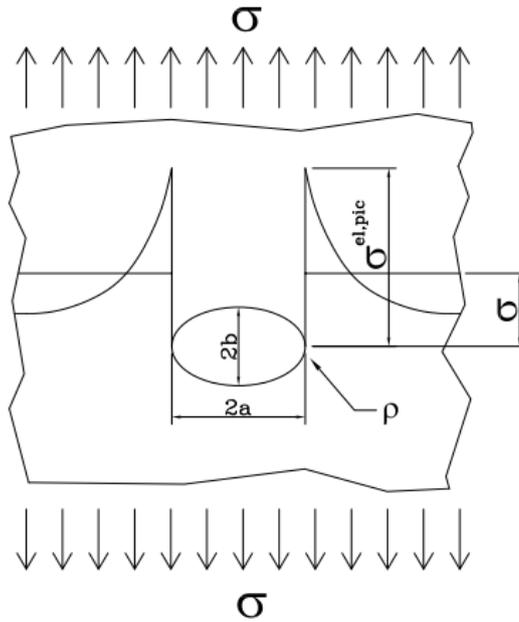


Figura 1.2: Modello teorico di una piastra usata da English.

English considerò una lastra con un foro passante di tipo ellittico di dimensioni  $2a$  e  $2b$  e raggio di raccordo  $\rho$  a cui applicò a monte e a valle una tensione  $\sigma_y = \sigma$  agente nella stessa direzione dell'asse minore. English rilevò che l'andamento della tensione vicino all'intaglio non era più uniforme e determinò il valore dello sforzo massimo in prossimità dell'asse maggiore:

$$\sigma^{\text{el,pic}} = K_t \cdot \sigma \quad (1.1)$$

Assumendo che la piastra avesse dimensioni molto maggiore del foro English trovò che il coefficiente di concentrazione delle tensioni  $K_t$  valeva:

$$K_t = 1 + 2 \sqrt{\frac{a}{\rho}} = 1 + 2 \frac{a}{b} \quad (1.2)$$

Se ora si fa tendere  $b \rightarrow 0$ , il foro ellittico degenera in una cricca di ampiezza  $2a$ . Il raggio di raccordo può essere espresso come:

$$\rho = \frac{b^2}{a} \quad (1.3)$$

English si accorse che al tendere del raggio dell'intaglio a zero il valore di  $K_t$  andava all'infinito e così anche  $\sigma^{\text{el,pic}}$ . Da qui il paradosso menzionato sopra, in quanto con una verifica di tipo tradizionale e di fronte a un difetto di tipo acuto il confronto con una tensione limite non sarebbe mai soddisfatto. Per questa ragione la meccanica della frattura abbandona completamente il criterio di punto (anche chiamato criterio di apice) e adotta un

criterio più generale chiamato criterio di campo, il quale afferma che il cedimento del componente non è più controllato da un punto ma da un intero campo tensionale che si manifesta nell'adiacenza dell'apice del difetto. Nasce dunque la necessità di determinare lo stato tensionale di fronte all'apice della cricca per dare un parere sulla pericolosità del difetto.

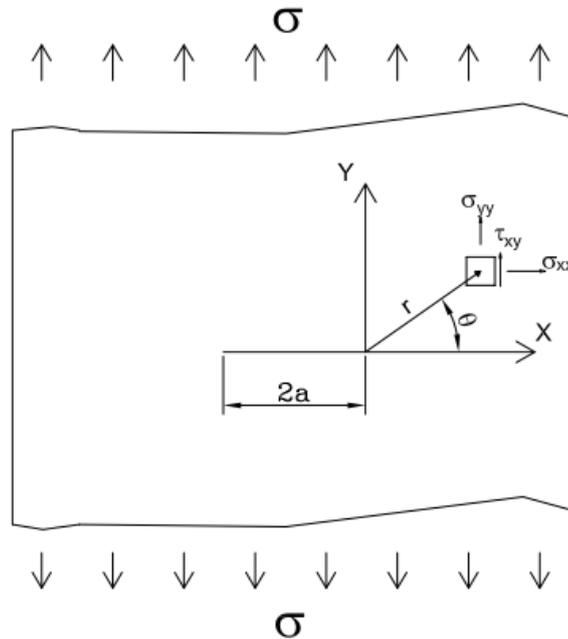


Figura 1.3: Sistema di riferimento utilizzato per lo studio delle tensioni.

Colui che risolse dal punto di vista analitico il problema della determinazione del campo tensionale fu Irwin. Usando un sistema di riferimento riportato nella figura (1.3), Irwin determinò le seguenti equazioni relative a una piastra:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{bmatrix} 1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3/2\theta) \\ 1 + \sin(\theta/2) \cdot \sin(3/2\theta) \\ \sin(\theta/2) \cdot \cos(3/2\theta) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Ponendosi lungo la bisettrice della cricca, ovvero per  $\theta = 0$ , le equazioni diventano:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

La dimostrazione delle equazioni di Irwin verrà proposta più avanti come caso particolare del problema di Williams. Irwin ebbe il merito di introdurre il parametro della tenacità a frattura. Per ora è importante fare alcune considerazioni:

- Le tensioni vanno all'infinito per  $r \rightarrow 0$ . Matematicamente una cricca è un intaglio con raggio di raccordo  $\rho = 0$ . In altre parole la tensione sullo spigolo non è di nessun interesse.
- Per  $r \rightarrow \infty$ , cioè molto lontano dalla cricca, le tensioni vanno a zero, ma questo è in contrapposizione al fatto che lontano dalla cricca si deve ritrovare la tensione nominale. Ciò suggerisce che le equazioni di Irwin hanno valenza locale. Anche se a rigore il range di validità lo si può solo osservare al calcolatore, come regola generale si può usare  $r \leq a/10$ .
- E' evidente che nelle immediate vicinanze dell'apice il materiale raggiunge la condizione di snervamento. Questo fatto limita la validità delle equazioni, nel senso che la teoria può essere applicata solamente quando la tensione esercitata a monte e a valle della cricca non supera il 60% della tensione di snervamento del materiale.
- $K_I$  è il fattore di intensificazione delle tensioni di modo I e si misura in  $\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ .

Dalla equazioni di Irwin, è possibile ricavare il valore del  $K_I$  dal valore della tensione in direzione y:

$$K_I = \sigma_y \cdot \sqrt{2\pi r} = \sigma_y \cdot (2\pi r)^{1-0.5} \quad (1.6)$$

Applicando il logaritmo a destra e sinistra si ottiene:

$$\log K_I = \log \sigma_y + \frac{1}{2} \log 2\pi r \quad (1.7)$$

Eseguendo un modello molto raffinato agli elementi finiti e andando a valutare le tensioni a delle distanze sempre maggiori dall'apice della cricca si ottiene l'andamento delle tensioni al variare della distanza r.

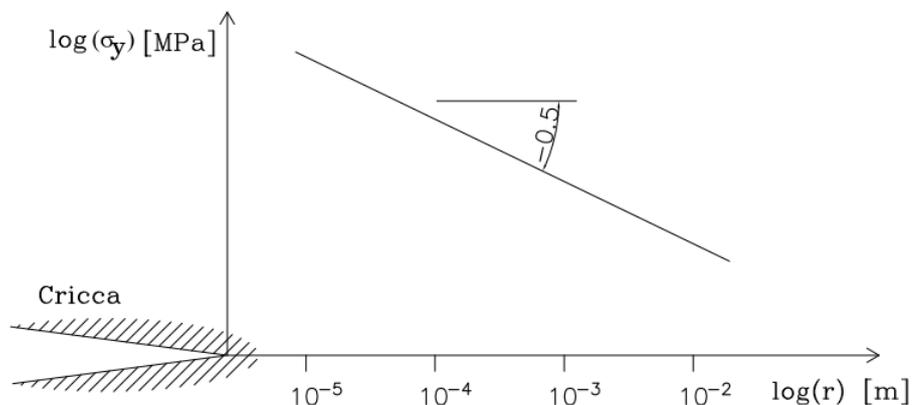


Figura 1.4: Andamento delle tensioni in funzione della distanza dall'apice del difetto.

E' importante sottolineare che in una cricca la pendenza dello stato tensionale, anche chiamato grado di singolarità poiché avvicinandosi all'apice della cricca la tensione sale all' infinito, deve essere pari a -0.5. Spostandosi maggiormente dall'apice della cricca si esce dal campo di validità delle equazioni di Irwin e il campo tensionale cambia la propria pendenza.  $K_I$  controlla l'intensità dell'intera distribuzione delle tensioni. Dal punto di vista matematico, il  $K_I$  è definito come:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \cdot \sigma_y(r, \theta = 0) \quad (1.8)$$

In questa modo si formalizza il fatto che le equazioni sono limitate da  $r$ , anche se in questo modo si rischia di perdere la potenza applicativa del  $K_I$ : esso infatti non vale solo per  $r = 0$  ma anche per un volume finito di materiale e non infinitesimo.

Se  $K_I$  aumenta, allora aumenta anche il campo di tensione. In campo statico si arriva al cedimento quando il  $K_I$  raggiunge un valore caratteristico del materiale, chiamato tenacità a frattura,  $K_C$ .

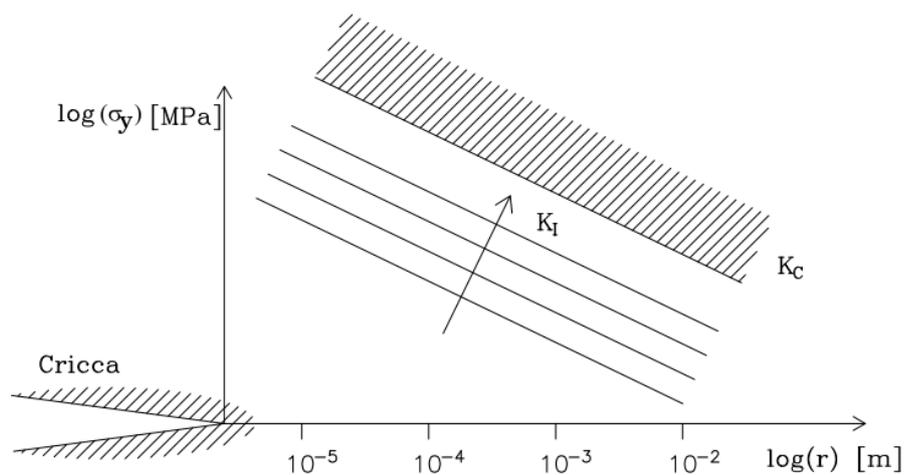


Figura 1.5: Rappresentazione della tenacità a frattura  $K_C$ .

La tenacità a frattura  $K_C$  è un parametro che dipende dallo spessore del componente, dal tipo di materiale e dalla temperatura.

## 1.2 Intagli a spigolo vivo.

La presenza di intagli in una struttura dà luogo a una concentrazione locale delle tensioni le quali, nei materiali fragili, possono generare catastrofiche rotture oppure a riduzione della vita della struttura stessa. Quando la concentrazione delle tensioni è dovuta a cricche

o a intagli a V, le formule derivanti dalla meccanica della frattura lineare elastica possono essere applicate. Comunemente, per gli intagli a V in due dimensioni, ci si riferisce al lavoro di Williams il quale studiò la natura asintotica del campo di tensione per differenti condizioni al contorno e dimostrò che all'apice dell'intaglio le tensioni tendevano a diventare infinite. In particolare, si consideri una piastra con un intaglio laterale a V avente spigolo vivo ed ad esso si associ un sistema di riferimento polare (figura (1.6)). La tensione lungo la bisettrice dell'intaglio, risulta essere governata dalla seguente equazione:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = \frac{K_I \cdot r^{\lambda_1 - 1}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.9)$$

In tale equazione, il  $K_I$  è il fattore generalizzato di intensificazione delle tensioni dell'intaglio (N-SIF), mentre  $r$  è la distanza dall'apice dell'intaglio stesso. Se questa equazione viene rappresentata in un diagramma a scala logaritmica, si ottiene una distribuzione di tensione asintotica che corrisponde a una serie di rette aventi pendenza pari a  $\lambda_1 - 1$ . Il coefficiente  $\lambda_1$  è chiamato autovalore di Williams di modo I, dal nome del primo studioso che si occupò di determinare la distribuzione delle tensioni nell'intorno del vertice di un intaglio a V a spigolo vivo (1952).

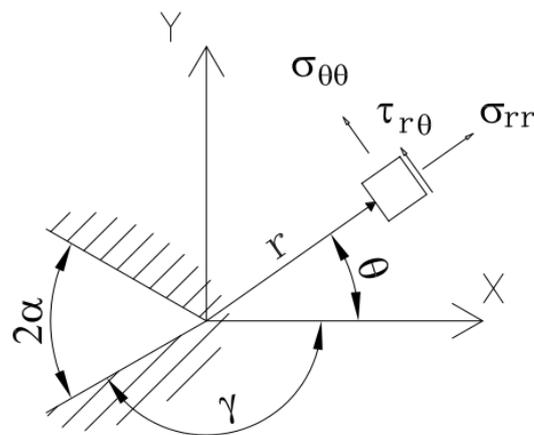


Figura 1.6. Sistema di riferimento usato per l'intaglio.

Per calcolare lo stato tensionale all'apice dell'intaglio, è necessario introdurre tre relazioni di partenza:

1. Relazioni indefinite di equilibrio in coordinate cartesiane in assenza di forze di volume:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0$$

Derivando la prima per x, la seconda per y e sommando termine a termine si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.11)$$

Queste equazioni devono essere sempre soddisfatte e rappresentano l'equilibrio delle forze in direzione x e in direzione y di un elemento materiale di dimensioni infinitesime. Le stesse equazioni possono essere espresse in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

2. Equazione di compatibilità:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad (1.13)$$

Questa equazione lega la deformazione angolare  $\gamma$  con le componenti di deformazione lungo gli assi x e y. Di fatto è necessaria per risolvere il problema delle tensioni visto che sono presenti tre equazioni e tre incognite. Ponendosi nel caso di stato piano di tensione e utilizzando le equazioni di Lamé e la definizione di  $\gamma_{xy}$  si può ottenere:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \right] \rightarrow \\ \rightarrow 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Introducendo ora la equazione (1.11) premoltiplicata per  $(1+\nu)$ , si ottiene facilmente:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (1.15)$$

3. Funzione di Airy denotata con la lettera  $\phi$ :

Coordinate cartesiane	Coordinate polari
$\sigma_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$	$\sigma_{rr} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$
$\sigma_{yy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	$\sigma_{\theta\theta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$
$\tau_{xy} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$	$\tau_{r\theta} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$

(1.16)

La funzione di Airy  $\phi(x,y)$  è una funzione reale delle coordinate  $x$  e  $y$  ed è un metodo molto utilizzato per risolvere problemi piani di teoria della elasticità. E' una funzione che ha il merito di soddisfare automaticamente le equazioni di equilibrio e ciò permette di concentrarsi solamente sulla equazione di compatibilità. Riprendendo ora la (1.15) si ottiene:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.17)$$

Tale equazione prende il nome di equazione bi-armonica. La sua risoluzione permette di calcolare lo stato tensionale per moltissimi problemi di interesse applicativo. Passando da un sistema di riferimento cartesiano a un sistema di riferimento polare l'equazione biarmonica assume la seguente forma:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} \right) = 0 \quad (1.18)$$

Per calcolare lo stato tensionale per l'intaglio a spigolo vivo rappresentato nella figura (1.6), è necessario scegliere la struttura della funzione di Airy. A tal scopo Williams scelse la seguente forma:

$$\phi = r^{\lambda+1} \cdot F(\theta) \quad (1.19)$$

In cui  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Sostituendola all'interno della (1.18) si ottiene:

$$\left[ (\lambda - 1)^2 + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \cdot \left[ (\lambda + 1)^2 F(\theta) + \frac{\partial^2 F(\theta)}{\partial \theta^2} \right] = 0 \quad (1.20)$$

L'equazione (1.20) è una equazione di Eulero del quarto ordine e ammette soluzioni del tipo  $e^{m\theta}$ . Operando la sostituzione  $F(\theta) = e^{m\theta}$  e derivando due e quattro volte si ottiene:

$$[(\lambda - 1)^2 + m^2] \cdot [(\lambda + 1)^2 e^{m\theta} + m^2 e^{m\theta}] = 0 \quad (1.21)$$

Il termine  $e^{m\theta}$  non si annulla mai e quindi le soluzioni sono:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \pm i(\lambda + 1) \\ m_{3,4} &= \pm i(\lambda - 1) \end{aligned} \quad (1.22)$$

La funzione  $F(\theta)$  è data quindi dalla combinazione lineare delle seguenti funzioni (a meno di quattro coefficienti):

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= e^{i(\lambda+1)\theta} = \cos[(\lambda + 1)\theta] + i \sin[(\lambda + 1)\theta] \\ F_2(\theta) &= e^{-i(\lambda+1)\theta} = \cos[(\lambda + 1)\theta] - i \sin[(\lambda + 1)\theta] \\ F_3(\theta) &= e^{i(\lambda-1)\theta} = \cos[(\lambda - 1)\theta] + i \sin[(\lambda - 1)\theta] \\ F_4(\theta) &= e^{-i(\lambda-1)\theta} = \cos[(\lambda - 1)\theta] - i \sin[(\lambda - 1)\theta] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ricordando che la funzione di Airy è una funzione reale e che una combinazione lineare delle (1.23) è ancora una soluzione del problema, si può concludere che la forma della funzione di Airy è nella forma:

$$\begin{aligned} \phi &= r^{\lambda+1}F(\theta) = r^{\lambda+1} \{A[F_1(\theta) + F_2(\theta)] + B[F_3(\theta) + F_4(\theta)] + \\ &+ iC[F_2(\theta) - F_1(\theta)] + iD[F_4(\theta) - F_3(\theta)]\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Sviluppando le somme e i prodotti e tenendo presente la parità del coseno e la disparità del seno si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} \phi &= r^{\lambda+1} \{A \cos[(1 + \lambda)\theta] + B \cos[(1 - \lambda)\theta] + \\ &+ C \sin[(1 + \lambda)\theta] + D \sin[(1 - \lambda)\theta]\} \end{aligned} \quad (1.25)$$

I coefficienti A e B legati al coseno sono termini legati alla parte pari della soluzione, altresì chiamata parte simmetrica, mentre i coefficienti C e D sono legati alla parte antisimmetrica. La parte simmetrica e antisimmetrica sono a loro volta legati ai stati tensionali di modo I e modo II rispettivamente. A questo punto per proseguire è necessario stabilire le condizioni al contorno, le quali sono quelle di bordo dell'intaglio libero dalle tensioni:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \pm\gamma) &= 0 \\ \tau_{r\theta}(r, \pm\gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Utilizzando ora la seconda della (1.16) in coordinate polari,

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\gamma) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \rightarrow (\lambda + 1)\lambda r^{\lambda-1} F(\pm\gamma) = 0 \\
\tau_{r\theta}(r, \pm\gamma) &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \gamma} \right) = 0 \rightarrow -\lambda r^{\lambda-1} \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} = 0
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Di conseguenza, usando la (1.25) e la sua derivata rispetto a  $\gamma$  e ponendo il tutto pari a zero si ottiene:

$$\begin{aligned}
F(\pm\gamma) &= 0 \rightarrow \{A \cos[(1 + \lambda)\gamma] + B \cos[(1 - \lambda)\gamma] + \\
&\quad + C \sin[(1 + \lambda)\gamma] + D \sin[(1 - \lambda)\gamma]\} = 0 \\
\frac{\partial F(\pm\gamma)}{\partial \gamma} &= 0 \rightarrow \{-A(1 + \lambda) \sin[(1 + \lambda)\gamma] - B(1 - \lambda) \sin[(1 - \lambda)\gamma] + \\
&\quad + C(1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda)\gamma] + D(1 - \lambda) \cos[(1 - \lambda)\gamma]\} = 0
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Le (1.28) sono le equazioni che forniscono le tensioni  $\sigma_{\theta\theta}$  e  $\tau_{r\theta}$  nel bordo libero dell'intaglio, ma in generale, sostituendo  $\gamma$  con  $\theta$  valgono per qualsiasi valore angolare. È possibile ora valutare meglio il ruolo dei quattro coefficienti A, B, C e D. A tal riguardo si supponga di applicare dall'esterno uno stato tensionale di modo I, ovvero di trazione. Ponendosi lungo la bisettrice dell'intaglio, saranno solamente presenti delle  $\sigma \neq 0$  e le tensioni di taglio  $\tau$  saranno ovviamente pari a zero. Quindi, per  $\theta = 0$ , i termini A e B saranno non nulli. Ripetendo ora il ragionamento ma applicando solo uno sforzo di taglio, ovvero di modo II, sempre per  $\theta = 0$  sarà  $\sigma = 0$ ,  $\tau \neq 0$  e necessariamente C e D  $\neq 0$ . A questo punto si immagini di applicare uno stato esterno di tensione generale, formato sia da taglio che da trazione. Sfruttando la sovrapposizione degli effetti e ponendosi sul bordo libero dell'intaglio, è possibile disaccoppiare le equazioni (1.28) e rendere più chiaro i contributi di modo I e di modo II.

$$\begin{bmatrix} \cos[(1 + \lambda)\gamma] & \cos[(1 - \lambda)\gamma] & 0 & 0 \\ -(1 + \lambda) \sin[(1 + \lambda)\gamma] & -(1 - \lambda) \sin[(1 - \lambda)\gamma] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin[(1 - \lambda)\gamma] & \sin[(1 - \lambda)\gamma] \\ 0 & 0 & (1 - \lambda) \cos[(1 - \lambda)\gamma] & (1 - \lambda) \cos[(1 - \lambda)\gamma] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{1.29}$$

Per trovare le soluzioni del sistema, il determinante della matrice deve essere nullo. Essendo una matrice diagonale a blocchi, è possibile calcolare separatamente i due determinanti legati ai due minori. Dal punto di vista fisico del problema, il minore di nord-ovest è legato al modo I, mentre il minore di sud-est è legato al modo II. Per il modo I:

$$\begin{aligned}
& -\cos[(1 + \lambda)\gamma] (1 - \lambda) \sin[(1 - \lambda)\gamma] + \\
& + \cos[(1 - \lambda)\gamma] (1 + \lambda) \sin[(1 + \lambda)\gamma] = 0
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Per il modo II:

$$\begin{aligned}
& \sin[(1 + \lambda)\gamma] (1 - \lambda) \cos[(1 - \lambda)\gamma] + \\
& - \sin[(1 - \lambda)\gamma] (1 + \lambda) \cos[(1 + \lambda)\gamma] = 0
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Le quali danno origine alle seguenti:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \sin(2\gamma) + \sin(2\lambda_1\gamma) = 0 \\
& \lambda_2 \sin(2\gamma) + \sin(2\lambda_2\gamma) = 0
\end{aligned} \tag{1.32}$$

Come precedentemente già affermato,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono chiamati autovalori di Williams di modo I e modo II rispettivamente. Osservando ora la (1.19), risulta chiaro che gli autovalori di Williams rappresentano il grado di singolarità delle tensioni  $1 - \lambda$  a una certa distanza  $r$  dall'apice dell'intaglio. Per il modo I, l'andamento dell'autovalore associato al variare dell'angolo  $\gamma = \pi - \alpha$  è rappresentato nella figura (1.7).

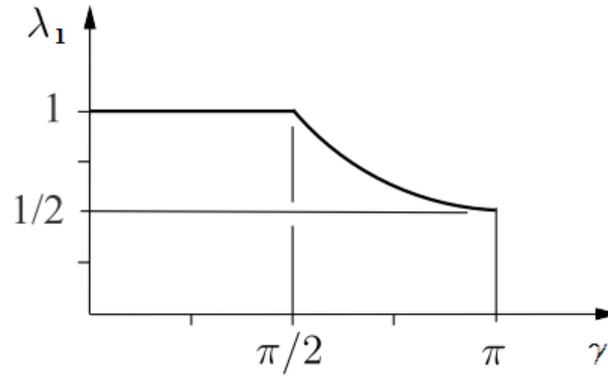


Figura 1.7: Andamento dell'autovalore di Williams al variare dell'angolo  $\gamma$ .

Ora è necessario calcolare i coefficienti A, B, C e D dal sistema (1.29). Risolvendo si ottiene:

$$\begin{aligned}
A &= -B \frac{1 - \lambda_1 \sin[(1 - \lambda_1)\gamma]}{1 + \lambda_1 \sin(1 - \lambda_1)} \stackrel{\text{def}}{=} B \frac{1 - \lambda_1}{1 + \lambda_1} \cdot \chi_1 \\
C &= -D \frac{\sin[(1 - \lambda_2)\gamma]}{\sin[(1 + \lambda_2)\gamma]} \stackrel{\text{def}}{=} -D \cdot \chi_2
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Le tensioni di modo I, in base alle definizioni (1.17) e dopo alcuni tediosi passaggi, risultano essere:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} B \{ (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cos[(1 + \lambda_1)\theta] + \\ + (\lambda_1 + 1) \cos[(1 - \lambda_1)\theta] \}\end{aligned}\quad (1.34)$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta}(r, \theta) = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} B \{ (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \sin[(1 + \lambda_1)\theta] + \\ + (1 - \lambda_1) \sin[(1 - \lambda_1)\theta] \}\end{aligned}\quad (1.35)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} B \{ -(1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cos[(1 + \lambda_1)\theta] + \\ + (3 - \lambda_1) \cos[(1 - \lambda_1)\theta] \}\end{aligned}\quad (1.36)$$

Manca ora la determinazione del coefficiente B. Esso può essere calcolato dalla definizione del fattore di intensificazione delle tensioni dell'intaglio (NSIF, Notch Stress Intensity Factor) di modo I, definizione rivista da Gross e Mendelson nel 1972:

$$K_1 = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} [r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0)] \quad (1.37)$$

Applicando la (1.37) alla (1.34) si ottiene:

$$B = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi} \cdot \lambda_1 \{ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \}} \quad (1.38)$$

Le tensioni di modo I quindi diventano:

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{K_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \{ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \}} \{ (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \cos[(1 + \lambda_1)\theta] + \\ + (\lambda_1 + 1) \cos[(1 - \lambda_1)\theta] \} \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \{ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \}} \{ (1 - \lambda_1) \cdot \chi_1 \sin[(1 + \lambda_1)\theta] + \\ + (1 - \lambda_1) \sin[(1 - \lambda_1)\theta] \} \\ \sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{K_1 r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} \cdot \{ (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \}} \{ -(1 - \lambda_1) \chi_1 \cdot \\ \cdot \cos[(1 + \lambda_1)\theta] + (3 - \lambda_1) \cos[(1 - \lambda_1)\theta] \}\end{aligned}\quad (1.39)$$

Nella tabella (1.1) vengono riportati i valori per cinque valori di apertura dell'intaglio.

$2\alpha$ [rad]	$\lambda_1$	$\chi_1$
0	0.5	1
$\pi/6$	0.5014	1.0707
$\pi/3$	0.5122	1.3123
$2\pi/3$	0.6157	3.0027
$5\pi/6$	0.7520	6.3617

Tabella 1.1: Valori dell'autovalore  $\lambda_1$  per alcuni valori dell'angolo di apertura dell'intaglio.

Quando l'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  è pari a zero, si ottiene una cricca laterale. In tal caso, l'angolo  $\gamma$  assume il valore di  $\pi$  e l'equazione (1.32) fornisce:

$$\lambda_1 \sin(2\pi) + \sin(2\lambda_1\pi) = 0 \rightarrow \sin(2\lambda_1\pi) = 0 \quad (1.40)$$

Osservando le equazioni che governano le tensioni, è l'esponente del termine  $r^{\lambda_1-1}$  che definisce se, per  $r \rightarrow 0$ , le tensioni vanno ad infinito o meno. La (1.37) ha come soluzioni infiniti valori,  $\lambda_1 = n/2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ma l'unica che rende l'esponente negativo, e quindi singolare, è la prima, cioè  $n = 1$ . Ne segue che il grado di singolarità delle tensioni  $\lambda_1 - 1$  in una cricca è pari ad -0.5, il NSIF coincide con la tenacità a frattura e le equazioni (1.39) degenerano in:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{4} \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \cos \left[ \frac{3}{2} \theta \right] + 3 \cos \left[ \frac{1}{2} \theta \right] \right\} \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{1}{4} \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \sin \left[ \frac{3}{2} \theta \right] + \sin \left[ \frac{1}{2} \theta \right] \right\} \\ \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{1}{4} \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ -\cos \left[ \frac{3}{2} \theta \right] + 5 \cos \left[ \frac{1}{2} \theta \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Tali equazioni rappresentano la formulazione di Irwin espresse in coordinate polari e non cartesiane. E' bene notare che mentre nel caso di un intaglio la tensione all'apice in direzione x sono nulle per ragioni di equilibrio, nel caso di una cricca invece essa è diversa da zero e precisamente uguale alla tensione in direzione y.

### 1.3 Il metodo di Muskhelismvili-Kolosoff.

La tecnica usata da Williams si applica a intagli a spigolo vivo. Un metodo più generale che si applica anche ad intagli aventi un raggio di raccordo è stato sviluppando dai prof. Lazzarin e Tovo (1996) il quale si base sul metodo dei potenziali complessi di Muskhelismvili-Kolosoff (1953). E' bene quindi richiamare alcune nozioni sulle funzioni complesse. La variabile complessa  $z$ , anche chiamato numero complesso, ed il suo coniugato sono definiti come:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r e^{i\theta} \\ \bar{z} &= x - iy = r e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (1.42)$$

In cui  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\theta = \arctan(y/x)$ . Si consideri ora una funzione  $f(z)$  e un numero complesso  $z_0 \in A \subseteq \mathbb{C}$ . Se esiste il limite del rapporto incrementale, allora si definisce la derivata di  $f(z)$ :

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.43)$$

Una funzione dotata di derivata complessa nell'insieme  $A$  si chiama olomorfa in  $A$ . Il teorema di derivazione termine a termine assicura che una funzione olomorfa ammette derivata di qualsiasi ordine e che la stessa può essere rappresentata tramite serie di potenze convergente. Di seguito alcune proprietà delle funzioni analitiche:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i \cdot f'(z)$$

La forma generica della  $f(z)$  e del seguente tipo:

$$f(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha + i\beta \quad (1.45)$$

Essa rappresenta la  $f(z)$  come somma di due funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  entrambe funzioni di due parametri reali. Le derivate rispetto a  $x$  e  $y$  della  $f(z)$  valgono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(z)}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} = f'(z) \\ \frac{\partial f(z)}{\partial y} &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} = if'(z) = i \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.46}$$

$f(z)$  ha una derivata che è indipendente dalla direzione di derivazione grazie al rapporto incrementale. L'esistenza del limite assicura la validità delle condizioni di Cauchy-Riemann, cioè l'uguaglianza fra le parti reali e le parti immaginarie dei due membri, cosa sempre permessa dalle funzioni olomorfe:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.47}$$

Derivando la prima rispetto a  $x$ , la seconda rispetto a  $y$  e sommando si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} &= 0 \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 \alpha = 0\end{aligned}\tag{1.48}$$

Il simbolo  $\nabla$  rappresenta l'operatore di Laplace o Laplaciano e ogni equazione nella forma della (1.48) si chiama equazione di Laplace.  $\alpha$  è una sua soluzione e in questo caso si chiama funzione armonica. Derivando ora la prima della (1.47) rispetto a  $y$ , la seconda rispetto a  $x$  e sottraendo termine a termine si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}; & \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} &= 0 \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 \beta = 0\end{aligned}\tag{1.49}$$

E' evidente che anche la funzione  $\beta$  è soluzione dell'equazione di Laplace.  $\alpha$  e  $\beta$  sono dette funzioni coniugate armoniche. Data una funzione  $\alpha$  armonica è sempre dunque possibile, grazie alle condizioni di Cauchy-Riemann, definire a meno di una costante una funzione armonica  $\beta$  che è chiamata coniugata armonica di  $\alpha$ . Riprendendo ora la equazione biarmonica di Airy:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (1.50)$$

Inoltre, si consideri tale equazione applicata a un problema fisico in cui siano presenti delle tensioni diverse da zero:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sigma_x + \sigma_y \neq 0 \quad (1.51)$$

Muskhelishvili definì la funzione P come:

$$\nabla^2 \phi = P$$

Introducendo quest'ultima all'interno della (1.50) si ottiene:

$$\nabla^2 P = 0 \quad (1.52)$$

Di conseguenza P è armonica e risolve l'equazione di Laplace. Ne segue che è sempre possibile definire un'altra equazione Q coniugata armonica di P a meno di una costante. Quindi P e Q sono parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa,  $f(z) = P + iQ$ , la quale ammette derivate di qualsiasi ordine. Ora si può definire l'integrale di  $f(z)$ :

$$\Psi(z) = \frac{1}{4} \int f(z) dz = p + i q \quad (1.53)$$

Anche  $\Psi(z)$  è una funzione analitica. Seguono alcune proprietà:

$$\Psi'(z) = \frac{1}{4} (P + iQ) = \frac{1}{4} f(z)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \Psi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4} f(z) \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{4} P; \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4} Q \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} + i \frac{\partial q}{\partial y}$$

Ricordando le condizioni di Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{1}{4} P \quad (1.55)$$

E' ora necessario dimostrare che la seguente funzione è armonica:

$$p_1 = \phi - px - qv \quad (1.56)$$

Cioè che:

$$\nabla^2(\phi - px - qy) = 0 \quad (1.57)$$

A tal proposito, sviluppando le derivate:

$$\nabla^2\phi - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{\partial p}{\partial x}x + \frac{\partial q}{\partial x}y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial y}x + q + \frac{\partial q}{\partial y}y \right) \right] = 0 \quad (1.58)$$

$$\nabla^2\phi - \left[ \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}x + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}y + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}x + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2}y \right] = 0 \quad (1.59)$$

Usando le condizioni di Cauchy-Riemann, sapendo che  $\nabla^2\phi = P$  e raccogliendo per  $x$  e  $y$  si ottiene:

$$\left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) x + \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right) y = 0 \quad (1.60)$$

I due termini della (1.60) vanno naturalmente a zero quando  $p$  e  $q$  sono funzioni armoniche, soluzioni dell'equazione di Laplace. Quindi si conclude che  $p_1$  è armonica. Ma allora anche in questo caso è sempre possibile definire una funzione  $q_1$  coniugata armonica di  $p_1$ . Allora si può definire il potenziale complesso  $X(z)$ :

$$X(z) = p_1 + i q_1 \quad (1.61)$$

Dall'algebra dei numeri complessi è facile osservare che, data una  $f(z)$  e la sua coniugata  $\bar{f}(\bar{z})$ :

$$f(z) + \bar{f}(\bar{z}) = 2\text{Re}(z) \quad (1.62)$$

Quindi vengono definite due funzioni accessorie e delle loro caratteristiche:

$$H(z) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{z} \Psi(z) + X(z)$$

$$\bar{H}(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} z \bar{X}(\bar{z}) + \bar{X}(\bar{z})$$

(1.63)

$$\text{Re}(H(z)) = \phi = \bar{z}\Psi(z) + X(z) + z\bar{\Psi}(\bar{z}) + \bar{X}(\bar{z})$$

$$H(z) + \bar{H}(\bar{z}) = 2 \text{Re}(H(z)) = 2\phi$$

Derivando rispetto a  $x$  e a  $y$  si ottiene:

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \bar{z} \Psi'(z) + \Psi(z) + X'(z) + z \bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}) \quad (1.64)$$

$$2i \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\bar{z} \Psi'(z) + \Psi(z) - X'(z) + z \bar{\Psi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z})$$

Sommando si ottiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Psi(z) + z \bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{X}'(\bar{z}) \quad (1.65)$$

Derivando ulteriormente rispetto a x e y si giunge a:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \Psi'(z) + z \bar{\Psi}''(\bar{z}) + \bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{X}''(\bar{z}) \quad (1.66)$$

$$i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\Psi'(z) + z \bar{\Psi}''(\bar{z}) - \bar{\Psi}'(\bar{z}) + \bar{X}''(\bar{z})$$

Sottraendo termine a termine e riutilizzando le definizioni della funzione di Airy:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2\Psi'(z) + 2\bar{\Psi}'(\bar{z}) \rightarrow 4 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) = \sigma_x + \sigma_y \quad (1.67)$$

Mentre sommando e sostituendo i con -i a destra e sinistra:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - i 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 \bar{z} \Psi''(z) + 2 X''(z) = \sigma_y + 2 i \tau_{xy} - \sigma_x \quad (1.68)$$

Le equazioni (1.67) ed (1.68) indicano chiaramente che la parte reale è legata alle tensioni  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  mentre la parte immaginaria è legata alla componente di taglio  $\tau_{xy}$ . L'equazione (1.68) può essere leggermente modificata definendo  $X'(z) = \varphi(z)$ :

$$4 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) = \sigma_x + \sigma_y \quad (1.69)$$

$$2 (\bar{z} \Psi''(z) + \varphi'(z)) = \sigma_y + 2 i \tau_{xy} - \sigma_x$$

Le equazioni (1.68) sono il punto di partenza per il lavoro di Lazzarin e Tovo.

#### 1.4 Le equazioni di Lazzarin-Tovo (1996).

Per poter scrivere delle equazioni generali applicabili a un generico intaglio è necessario passare da un sistema di riferimento x-y a un sistema di riferimento polare r-θ. Le equazioni che permettono di fare un tale passaggio sono ottenute dallo sviluppo della matrice di Cauchy:

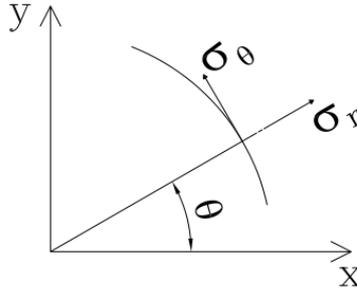


Figura 1.8: sistema di riferimento usato nelle equazioni di Lazzarin-Tovo.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (1.70)$$

La prima della (1.69) non cambia al variare del sistema di riferimento perché coinvolge la somma delle tensioni la quale è un invariante, mentre la seconda diventa:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r &= (\sigma_y - \sigma_x)(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + \\ + 2i\tau_{xy}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{i2\theta}\end{aligned}\quad (1.71)$$

Manipolando le (1.69) si ottiene:

$$\begin{aligned}\sigma_r + \sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) \\ \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} - \sigma_r &= 2 (\bar{z} \Psi''(z) + \varphi'(z))e^{i2\theta}\end{aligned}\quad (1.72)$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = 2 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) - (\bar{z} \Psi''(z) + \varphi'(z))e^{i2\theta} \quad (1.73)$$

In un celebre lavoro, England (1971) propose due particolari potenziali complessi per risolvere il problema di Williams:

$$\Psi(z) = a z^\lambda; \quad \varphi(z) = b z^\lambda \quad (1.74)$$

Con questi potenziali si ritrova perfettamente la soluzione di Williams eseguita con la funzione di Airy. E' però evidente che nel momento in cui si complica la geometria del componente, aggiungendo per esempio un raggio di raccordo  $\rho$  nel fondo dell'intaglio, questi due potenziali non sono sufficienti. E' necessario aumentare i gradi di libertà dei potenziali, e a tal scopo sono stati introdotti i seguenti potenziali complessi:

$$\Psi(z) = a z^\lambda; \quad \varphi(z) = b z^\lambda + c z^\mu \quad (1.75)$$

I parametri  $a, b, c$  sono numeri complessi mentre gli esponenti  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri reali, con l'ipotesi che  $\lambda > \mu$ . Ora, usando la rappresentazione polare dei numeri complessi, si possono preparare le derivate dei potenziali (1.75):

$$\begin{aligned} \Psi'(z) &= a \lambda z^{\lambda-1} \\ \Psi''(z) &= a(\lambda - 1) \lambda z^{\lambda-2} \\ \varphi'(z) &= b \lambda z^{\lambda-1} + c \mu z^{\mu-1} \end{aligned} \quad (1.76)$$

Si calcoli ora il primo addendo della (1.73):

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(\Psi'(z)) &= 2\operatorname{Re}\{(a_1 + ia_2) \lambda r^{\lambda-1} [\cos(\lambda - 1)\theta + i \sin(\lambda - 1)\theta]\} \rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \lambda r^{\lambda-1} [a_1 \cos(\lambda - 1)\theta - a_2 \sin(\lambda - 1)\theta] \end{aligned} \quad (1.77)$$

Ora il secondo addendo della (1.73):

$$\begin{aligned} (\bar{z} \Psi''(z) + \varphi'(z))e^{i2\theta} &= \{\bar{z} a(\lambda - 1) \lambda z^{\lambda-2} + b \lambda z^{\lambda-1} + c \mu z^{\mu-1}\}e^{i2\theta} \rightarrow \\ &\Rightarrow \{r^2 a(\lambda - 1) \lambda z^{\lambda-3} + b \lambda z^{\lambda-1} + c \mu z^{\mu-1}\}e^{i2\theta} \quad (1.77B) \\ &\Rightarrow a(\lambda - 1) \lambda z^{\lambda-1} + b \lambda z^{\lambda-1} e^{i2\theta} + c \mu z^{\mu-1} e^{i2\theta} \end{aligned}$$

Sostituendo  $z = r e^{i\theta}$  e arrangiando:

$$\begin{aligned}
& a(\lambda - 1) \lambda r^{\lambda-1} e^{i\theta(\lambda-1)} + b \lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda-1)\theta} e^{i2\theta} c \mu r^{\mu-1} e^{i(\mu-1)\theta} e^{i2\theta} = \\
& = a(\lambda - 1) \lambda r^{\lambda-1} e^{i\theta(\lambda-1)} + b \lambda r^{\lambda-1} e^{i(\lambda+1)\theta} + c \mu r^{\mu-1} e^{i(\mu+1)\theta}
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Eseguendo ora la differenza tra la (1.77) e la (1.78):

$$\begin{aligned}
\sigma_r - i\tau_{r\theta} &= 2 \lambda r^{\lambda-1} [a_1 \cos(\lambda - 1)\theta - a_2 \sin(\lambda - 1)\theta] + \\
& - (a_1 + ia_2)(\lambda - 1) \lambda r^{\lambda-1} [\cos(\lambda - 1)\theta + i \sin(\lambda - 1)\theta] + \\
& - (b_1 + ib_2) \lambda r^{\lambda-1} [\cos(\lambda + 1)\theta + i \sin(\lambda + 1)\theta] + \\
& - (c_1 + ic_2) \mu r^{\mu-1} [\cos(\mu + 1)\theta + i \sin(\mu + 1)\theta]
\end{aligned} \tag{1.78B}$$

Per dover di chiarezza, si calcoli separatamente la parte reale da quella immaginaria:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \lambda r^{\lambda-1} [a_1(3 - \lambda) \cos(1 - \lambda)\theta + a_2(3 - \lambda) \sin(1 - \lambda)\theta + \\
& - b_1 \cos(1 + \lambda)\theta + b_2 \sin(1 + \lambda)\theta] + \\
& + \mu r^{\mu-1} [-c_1 \cos(1 + \mu)\theta + c_2 \sin(1 + \mu)\theta]
\end{aligned} \tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1 - \lambda) \sin(1 - \lambda)\theta - a_2(1 - \lambda) \cos(1 - \lambda)\theta + \\
& + b_1 \sin(1 + \lambda)\theta + b_2 \cos(1 + \lambda)\theta] + \\
& + \mu r^{\mu-1} [-c_1 \sin(1 + \mu)\theta + c_2 \cos(1 + \mu)\theta]
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Sfruttando ora la (1.72) è possibile ricavare  $\sigma_\theta$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= 4 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) - \sigma_r \rightarrow \\
& = \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1 + \lambda) \cos(1 - \lambda)\theta + a_2(1 + \lambda) \sin(1 - \lambda)\theta + \\
& + b_1 \cos(1 + \lambda)\theta - b_2 \sin(1 + \lambda)\theta] + \\
& + \mu r^{\mu-1} [c_1 \cos(1 + \mu)\theta - c_2 \sin(1 + \mu)\theta]
\end{aligned} \tag{1.81}$$

Ora, per applicare questa metodologia agli intagli raccordati, è obbligatorio cambiare il sistema di riferimento  $r, \theta$  in un nuovo sistema di riferimento per poter seguire meglio il profilo raccordato dell'intaglio. Sarà necessario un sistema di riferimento conforme  $u, v$ , cioè un sistema di riferimento in cui vengano preservate l'ortogonalità delle curve parallele agli assi di riferimento. Tale sistema di riferimento viene chiamato mappatura conforme di

Neuber ed ha la caratteristica di rappresentare sia gli intagli a spigolo vivo, sia quelli raccordati.

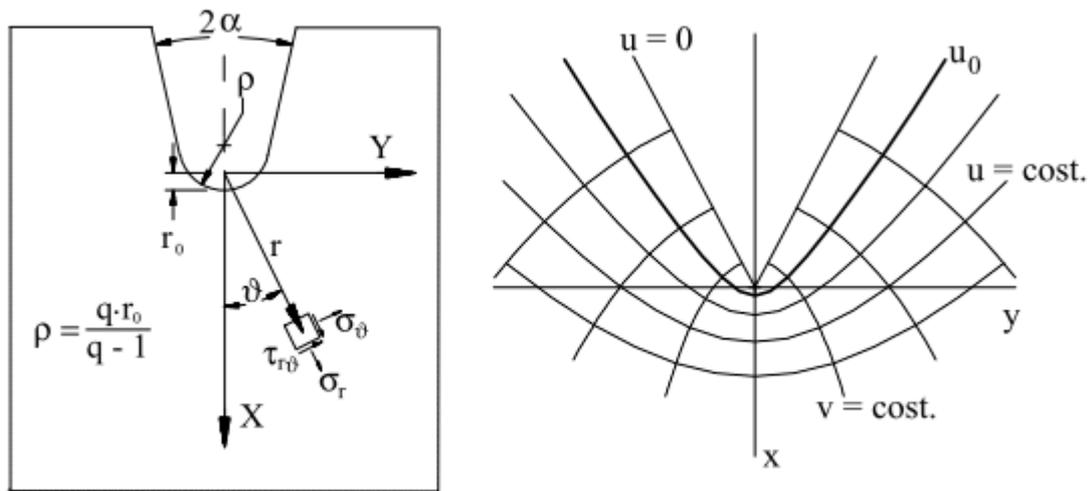


Figura 1.9: Mappatura di Neuber.

La legge che regola la mappatura di Neuber, proposta in figura (1.9), è la seguente:

$$z = x + iy = (u + iv)^q \quad (1.82)$$

$u, v$  sono le coordinate curvilinee, mentre  $q$  è un numero reale che dipende dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$  mediante la relazione:

$$2\alpha = \pi(2 - q) \quad (1.83)$$

$q$  è un valore compreso nell'intervallo  $1 \leq q \leq 2$ , infatti quando  $2\alpha = 0, q = 2$ , mentre per  $2\alpha=180, q=1$ . Il generico intaglio raccordato è rappresentato con  $u_0$  mentre l'intaglio a spigolo vivo si ottiene per  $u = 0$ . La mappatura garantisce che le curve  $u$  e  $v$  siano ortogonali fra loro. Il sistema di riferimento  $x-y$  è posizionato all'apice del profilo avente spigolo vivo, mentre per il generico profilo raccordato, l'origine si trova a una distanza  $r_0 = \frac{q-1}{q} \rho$ . All'apice dell'intaglio è presente una forte perturbazione dei campi di tensioni.

Le  $\sigma_u$  e le  $\tau_{uv}$  in tale zona non hanno nulla a che fare con le  $\sigma_\theta$  e le  $\tau_{r\theta}$ . Lontano dall'apice dell'intaglio, le curve a  $u = \text{cost}$  diventano parallele al fianco dell'intaglio e ciò permette di porre due condizioni al contorno per poter determinare i parametri  $a$  e  $b$  delle equazioni (1.79)-(1.81). Di fatto richiedere che  $\sigma_u = \tau_{uv} = 0$  sul fianco dell'intaglio è come richiedere che  $\sigma_\theta$  e  $\tau_{r\theta}$  siano nulle per  $r \rightarrow \infty$ . Ma allora si ritrovano le equazioni di Williams in cui i coefficienti  $b_i$  dipendono dai coefficienti  $a_i$ , perché grazie all'ipotesi

$\lambda > \mu$  il termine  $\mu r^{\mu-1}$  e un infinito di ordine inferiore rispetto al termine  $\lambda r^{\lambda-1}$  e quindi può essere trascurato. Rimangono da determinare i termini  $c_i$  e  $\mu_i$ , i quali non erano presenti nella soluzione di Williams. Anche in questo caso, sono necessarie le equazioni di Cauchy per il cambio di coordinate per poter esprimere le tensioni nel nuovo sistema di riferimento:

$$\begin{aligned}\sigma_u &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos\left(-\frac{2\theta}{q}\right) + \tau_{r\theta} \sin\left(-\frac{2\theta}{q}\right) \\ \sigma_v &= \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \cos\left(-\frac{2\theta}{q}\right) - \tau_{r\theta} \sin\left(-\frac{2\theta}{q}\right) \\ \tau_{uv} &= -\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \sin\left(-\frac{2\theta}{q}\right) + \tau_{r\theta} \cos\left(-\frac{2\theta}{q}\right)\end{aligned}\quad (1.84)$$

L'angolo  $-\theta/q$  è ricavabile tramite l'uguaglianza delle parti immaginarie e reali tra le due rappresentazioni di un punto nel piano complesso:

$$\begin{aligned}z &= r e^{i\theta} = r (\cos \theta + i \sin \theta) = (u + iv)^q \\ u &= r^{\frac{1}{q}} \cos \frac{\theta}{q}; \quad v = r^{\frac{1}{q}} \sin \frac{\theta}{q}\end{aligned}\quad (1.85)$$

L'angolo  $-\theta/q$  è indicato nella figura (1.10). È anche rappresentato l'angolo  $\theta$  e la distanza  $r$  di un punto  $p$  rispetto al sistema di coordinate cartesiane posizionato sull'apice dell'intaglio, quest'ultimo di apertura  $2\alpha$  e avente spigolo vivo.

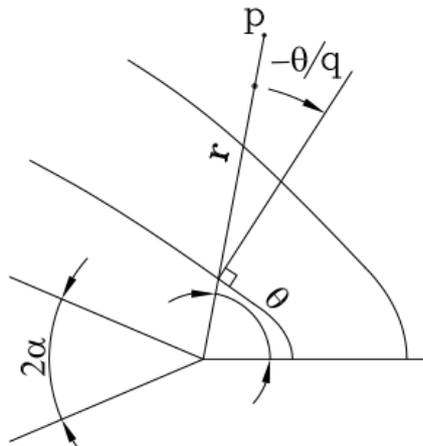


Figura 1.10: L'angolo di riferimento  $-\theta/q$ .

Per determinare i coefficienti  $c_i$  e  $\mu_i$  sono necessarie quattro condizioni al contorno che vengono imposte sull'intaglio. Due saranno poste come valori delle tensioni  $\sigma_u$  e  $\tau_{uv}$

esattamente all'apice dell'intaglio coincidenti con la bisettrice, mentre le restanti due condizioni saranno poste sulle derivate delle tensioni presenti sempre sull'apice in modo da garantire una certa regolarità delle tensioni in tale zona. Le condizioni poste sull'apice possono essere viste come delle condizioni sulla espansione di Taylor arrestata al secondo termine delle tensioni generiche  $\sigma_u$  e  $\tau_{uv}$ . Ricapitolando:

Condizioni lontano dall'apice dell'intaglio:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_u)_{u=u_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pm q \frac{\pi}{2}}} (r^{1-\lambda} \sigma_\theta) = 0 \\ (\tau_{uv})_{u=u_0} = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pm q \frac{\pi}{2}}} (r^{1-\lambda} \tau_{r\theta}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.86)$$

Condizioni sull'apice dell'intaglio:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 \Rightarrow (\sigma_r)_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \\ \left[ \frac{\partial \sigma_u}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - \tau_{r\theta} \frac{2}{q} \right]_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \\ (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 \Rightarrow (\tau_{r\theta})_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \\ \left[ \frac{\partial \tau_{uv}}{\partial v} \right]_{\substack{u=u_0 \\ v=0}} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta \frac{1}{q} \right]_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \end{array} \right. \quad (1.87)$$

Si consideri ora solo il problema di modo I. Dalla prima condizione della (1.87) inserita nella (1.79) si ottiene:

$$\sigma_r|_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \Rightarrow \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} [a_1(3 - \lambda_1) - b_1] - \mu_1 r_0^{\mu_1-1} c_1 = 0 \quad (1.88)$$

Definendo  $\chi_1$ :

$$b_1 = -a_1(1 - \lambda_1) \frac{\sin(1 - \lambda_1)q \frac{\pi}{2}}{\sin(1 + \lambda_1)q \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} a_1(1 - \lambda_1)\chi_1 \quad (1.89)$$

In tal modo la (1.88) diventa:

$$\lambda_1 [a_1(3 - \lambda_1) - a_1(1 - \lambda_1)\chi_1] = \mu_1 r_0^{\mu_1-\lambda_1} c_1 \quad (1.90)$$

Dall'ultima della (1.87) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta} \frac{1}{q} \Big|_{\substack{r=r_0 \\ \theta=0}} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} a_1 \left[ (1 - \lambda_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \left( 1 + \lambda_1 - \frac{1}{q} \right) \right] - \\
& + \mu_1 r_0^{\mu_1-1} \left[ \frac{c_1}{q} - c_1 (1 + \mu_1) \right] = 0
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Ordinando quest'ultima:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 a_1 \left[ (1 - \lambda_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \left( 1 + \lambda_1 - \frac{1}{q} \right) \right] = \\
& = \mu_1 r_0^{\mu_1-\lambda_1} c_1 \left[ \frac{1}{q} - (1 + \mu_1) \right]
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Dalle (1.90) e (1.92) è possibile ricavare i due parametri  $c_1$  e  $\mu_1$  in funzione del parametro  $a_1$ . I due parametri per il modo I risultano essere:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{1}{q} - \left\{ \frac{(1 - \lambda_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \lambda_1) + \chi_1 (1 - \lambda_1) \left( 1 + \lambda_1 - \frac{1}{q} \right)}{(3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1)\chi_1} \right\} - 1 \\
c_1 &= \frac{\lambda_1}{\mu_1} a_1 r_0^{\lambda_1-\mu_1} [(3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1)\chi_1]
\end{aligned} \tag{1.93}$$

Per il modo II operando nella maniera identica fatta per il modo I si ottengono i valori di  $\mu_2$  e  $c_2$ . Per brevità si tralasciano i passaggi e si riportano i valori dei due coefficienti:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= -1 - \left\{ \frac{(3 - \lambda_2)(1 - \lambda_2) - \chi_2 (1 + \lambda_2)^2}{(1 - \lambda_2) + (1 + \lambda_2)\chi_2} \right\} \\
c_2 &= \frac{\lambda_2}{\mu_2} a_2 r_0^{\lambda_2-\mu_2} [(1 - \lambda_2) + (1 + \lambda_2)\chi_2]
\end{aligned} \tag{1.94}$$

$$\chi_2 \stackrel{\text{def}}{=} - \frac{\sin(1 - \lambda_2)q \frac{\pi}{2}}{\sin(1 + \lambda_2)q \frac{\pi}{2}}$$

A questo punto l'unico parametro rimanente è  $a_1$ . Esso può essere legato alla tensione massima quando è presente una tensione in direzione  $y$  a monte e a valle del componente.

Ciò implica che la tensione  $\sigma_r$  sarà pari a zero e la tensione di interesse sarà la  $\sigma_\theta$  espressa dalla equazione (1.81):

$$\begin{aligned}\sigma_{\max, \text{tr}} &= \sigma_\theta \Big|_{\substack{\theta=0 \\ r=r_0}} = 4 \operatorname{Re}(\Psi'(z)) \\ &= 4 \lambda r^{\lambda-1} [a_1 \cos(\lambda-1)\theta - a_2 \sin(\lambda-1)\theta] \Big|_{\substack{\theta=0 \\ r=r_0}} \\ &= 4 \lambda_1 r_0^{\lambda_1-1} a_1\end{aligned}\quad (1.95)$$

Le tre tensioni  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$  e  $\tau_{r\theta}$  per il modo I risultano:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 &= \frac{\sigma_{\max, \text{tr}}}{4} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_1-1} \left\{ \begin{bmatrix} (1+\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1) \cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1) \sin(1-\lambda_1)\theta \end{bmatrix} \cdot \right. \\ &\quad \cdot (1-\lambda_1) \chi_1 \begin{bmatrix} \cos(1-\lambda_1)\theta \\ \cos(1-\lambda_1)\theta \\ \sin(1-\lambda_1)\theta \end{bmatrix} \left. + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} \cdot \right. \\ &\quad \cdot \left. \left[ (3-\lambda_1) - (1-\lambda_1) \chi_1 \right] \begin{bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{bmatrix} \right\}\end{aligned}\quad (1.96)$$

Le stesse equazioni posso essere riscritte coinvolgendo il  $K_I$  e la sua definizione secondo Gross e Mendelson (1972):

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_\theta)_{\theta=0} r^{1-\lambda_1} \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_\theta)_{\theta=0} r^{1-\lambda_2} \quad (1.97)$$

Con tali ipotesi, in base alla (1.81) il  $K_I$  diviene:

$$K_I = \sqrt{2\pi} a_1 \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \lambda_1(1+\lambda_1) + \chi_1(1-\lambda_1) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} [(3-\lambda_1) - (1-\lambda_1)\chi_1] \right\} \quad (1.98)$$

In tal modo il coefficiente  $a_1$  diventa:

$$a_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi} \lambda_1 [(1+\lambda_1) + \chi_1(1-\lambda_1)]} \quad (1.99)$$

In definitiva, le equazioni di Lazzarin-Tovo di modo I con l'introduzione del  $K_I$  diventano:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 &= \frac{K_I \cdot r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} \lambda_1 [(1 + \lambda_1) + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \right] + \right. \\
&+ (1 - \lambda_1) \chi_1 \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \left. \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \cdot \\
&\cdot [(3 - \lambda_1) - (1 - \lambda_1) \chi_1] \begin{pmatrix} \cos(1 + \mu_1) \theta \\ -\cos(1 + \mu_1) \theta \\ \sin(1 + \mu_1) \theta \end{pmatrix} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{1.100}$$

Per il modo II:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^2 &= \frac{K_{II} \cdot r^{\lambda_2-1}}{\sqrt{2\pi} [(1 - \lambda_2) + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left\{ \left[ \begin{pmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{pmatrix} \right] + \right. \\
&+ (1 + \lambda_2) \chi_2 \begin{pmatrix} -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{pmatrix} \left. \right] + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2 - \lambda_2} \\
&\cdot [(1 - \lambda_2) + (1 + \lambda_2) \chi_2] \begin{pmatrix} \sin(1 + \mu_2) \theta \\ -\sin(1 + \mu_2) \theta \\ -\cos(1 + \mu_2) \theta \end{pmatrix} \left. \right\}
\end{aligned} \tag{1.101}$$

È importante osservare che quando si tratta con gli spigoli vivi, il raggio di raccordo  $\rho$  si annulla e di conseguenza anche la distanza  $r_0$  degenera a zero. Ne segue che tutti i termini proporzionali a  $r^\mu$  scompaiono.

### 1.5 Miglioramento delle equazioni: le nuove formulazioni di Lazzarin-Filippi (2002)

E' importante sottolineare che le equazioni (1.100) e (1.101) hanno un eccellente riscontro sperimentale in una zona all'apice dell'intaglio pari a  $0.4\rho$ . Per migliorare l'accuratezza delle equazioni, Lazzarin e Fillippi hanno modificato i potenziali complessi introducendo un nuovo parametro  $d$ :

$$\Psi(z) = a z^\lambda + d z^\mu; \quad \varphi(z) = b z^\lambda + c z^\mu \tag{1.102}$$

Il nuovo termine permette di dare un contributo solo nella zona in prossimità dell'apice dell'intaglio mentre contribuisce in maniera blanda lontano dalla stessa. Nelle equazioni quindi il coefficiente  $d$  permette di avere due nuovi coefficienti  $d_1$  e  $d_2$  i quali vengono calcolati tramite due ulteriori condizioni al contorno poste all'infinito. Sempre utilizzando il metodo di Muskhelismvili-Kolosoff, le tensioni hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = & \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1+\lambda) \cos(1-\lambda)\theta + a_2(1+\lambda) \sin(1-\lambda)\theta + \\ & + b_1 \cos(1+\lambda)\theta - b_2 \sin(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} \cdot [d_1(1+\mu) \cos(1-\mu)\theta + \\ & + c_1 \cos(1+\mu)\theta + d_2(1+\mu) \sin(1-\mu)\theta - c_2 \sin(1+\mu)\theta] \end{aligned} \quad (1.103)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r = & \lambda r^{\lambda-1} [a_1(3-\lambda) \cos(1-\lambda)\theta + a_2(3-\lambda) \sin(1-\lambda)\theta + \\ & - b_1 \cos(1+\lambda)\theta - b_2 \sin(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} \cdot [d_1(3-\mu) \cos(1-\mu)\theta + \\ & - c_1 \cos(1+\mu)\theta + d_2(3-\mu) \sin(1-\mu)\theta + c_2 \sin(1+\mu)\theta] \end{aligned} \quad (1.104)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta} = & \lambda r^{\lambda-1} [a_1(1-\lambda) \sin(1-\lambda)\theta - a_2(1-\lambda) \cos(1-\lambda)\theta + \\ & + b_1 \sin(1+\lambda)\theta + b_2 \cos(1+\lambda)\theta] + \mu r^{\mu-1} \cdot [d_1(1-\mu) \sin(1-\mu)\theta + \\ & + \sin(1+\mu)\theta - d_2(3-\mu) \cos(1-\mu)\theta + c_2 \cos(1+\mu)\theta] \end{aligned} \quad (1.105)$$

Come precedentemente affermato, sono necessarie due nuove condizioni per poter determinare i coefficienti  $d_1$  e  $d_2$ . In particolare si impone l'annullamento della parte simmetrica della tensione normale e della sola parte asimmetrica della tensione tangenziale:

$$\left\{ \begin{aligned} (\sigma_u)_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} + (\sigma_u)_{\substack{u=u_0 \\ v \gg v_0}} = 0 & \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -\frac{q\pi}{2}}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta) + \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \frac{q\pi}{2}}} (r^{1-\mu} \sigma_\theta) = 0 \\ (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \gg v_0}} + (\tau_{uv})_{\substack{u=u_0 \\ v \ll -v_0}} = 0 & \Rightarrow \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \frac{q\pi}{2}}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) - \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow -\frac{q\pi}{2}}} (r^{1-\mu} \tau_{r\theta}) = 0 \end{aligned} \right. \quad (1.106)$$

Dalle stesse condizioni posti nella trattazione precedente si ottengono i parametri  $b_1$  e  $b_2$ :

$$b_1 = -a_1(1 - \lambda_1) \frac{\sin(1 - \lambda_1)q \frac{\pi}{2}}{\sin(1 + \lambda_1)q \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} a_1(1 - \lambda_1)\chi_{b1}$$

$$b_2 = -a_2(1 - \lambda_2) \frac{\sin(1 - \lambda_2)q \frac{\pi}{2}}{\sin(1 + \lambda_2)q \frac{\pi}{2}} \stackrel{\text{def}}{=} -a_2(1 - \lambda_2)\chi_{b2}$$
(1.107)

Con le rimanenti condizioni al contorno si ottengono i restanti parametri. Per il pedice uno:

$$c_1 = \frac{q \lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4 \mu_1 (q - 1)} a_1 \chi_{c1}$$

$$\chi_{c1} = \left[ (1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \mu_1) \right] [(3 - \lambda_1) - \chi_{b1}(1 - \lambda_1)] - (3 - \mu_1)\epsilon_1$$

$$\epsilon_1 = (1 - \lambda_1)^2 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1^2) - \frac{1}{q} \chi_{b1}(1 - \lambda_1)$$
(1.108)

$$d_1 = \frac{q \lambda_1 r_0^{\lambda_1 - \mu_1}}{4 \mu_1 (q - 1)} a_1 \chi_{d1}$$

$$\chi_{d1} = \left[ \frac{1 - q}{q} (1 + \mu_1) \right] [(3 - \lambda_1) - \chi_{b1}(1 - \lambda_1)] - \epsilon_1$$

Mentre per il pedice due:

$$c_2 = \frac{q \lambda_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2}}{4 \mu_2 (\mu_2 - 1)} a_2 \chi_{c2}$$

$$\chi_{c2} = (\mu_2 - 1) \left[ \frac{q(\mu_2 - 3) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] + (1 - \mu_2)\epsilon_2$$

$$\epsilon_2 = (1 - \lambda_2)(3 - \lambda_2) - \chi_{b2}(1 + \lambda_2)^2 + \frac{2}{q}(1 - \lambda_2) + \frac{2}{q}\chi_{b2}(1 + \lambda_2)$$
(1.109)

$$d_2 = \frac{q \lambda_2 r_0^{\lambda_2 - \mu_2}}{4 \mu_2 (\mu_2 - 1)} a_2 \chi_{d2}$$

$$\chi_{d2} = - \left[ \frac{q(1 + \mu_2) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] - \epsilon_2$$

Gli esponenti  $\mu_1$  e  $\mu_2$  possono essere calcolati tramite le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &\Rightarrow \left\{ \left[ \frac{1-q}{q} (1 + \mu_1) \right] [(3 - \lambda_1) - \chi_{b1}(1 - \lambda_1)] - \epsilon_1 \right\} (1 + \mu_1) \cdot \\
&\cdot \cos(1 - \mu_1) q \frac{\pi}{2} + \left\{ \left[ (1 - \mu_1)^2 - \frac{1}{q} (1 + \mu_1) \right] [(3 - \lambda_1) - \chi_{b1}(1 - \lambda_1)] \right\} \cdot \\
&\cdot \cos(1 + \mu_1) q \frac{\pi}{2} = 0 \\
\mu_2 &\Rightarrow \left\{ \left[ \frac{q(1 + \mu_2) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] - \epsilon_2 \right\} (1 - \mu_2) \cdot \\
&\cdot \cos(1 - \mu_2) q \frac{\pi}{2} + \left\{ (\mu_2 - 1) \left[ \frac{q(\mu_2 - 3) - 2}{q} \right] [(\lambda_2 - 1) - \chi_{b2}(1 + \lambda_2)] \cdot \right. \\
&\left. \cdot (1 - \mu_2) \epsilon_2 \right\} \cos(1 - \mu_2) q \frac{\pi}{2} = 0
\end{aligned} \tag{1.110}$$

E ora possibile scrivere le equazioni di Lazzarin-Filippi per il modo I e per il modo II a meno di due coefficienti  $a_1$  e  $a_2$ :

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 &= \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ \begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{pmatrix} + (1 - \lambda_1) \chi_{b1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \right] \right\} + \\
&+ \frac{q}{4(q-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ \chi_{d1} \begin{pmatrix} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1) \theta \end{pmatrix} + \chi_{c1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \mu_1) \theta \\ -\cos(1 + \mu_1) \theta \\ \sin(1 + \mu_1) \theta \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{1.111}$$

Per il modo II:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^2 &= \lambda_2 r^{\lambda_2 - 1} a_2 \left\{ \left[ \begin{pmatrix} (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{pmatrix} + (1 + \lambda_2) \chi_{b2} \begin{pmatrix} \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{pmatrix} \right] \right\} + \\
&+ \frac{q}{4(\mu_2 - 1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2 - \lambda_2} \left[ \chi_{d2} \begin{pmatrix} (1 + \mu_2) \sin(1 - \mu_2) \theta \\ (3 - \mu_2) \sin(1 - \mu_2) \theta \\ (1 - \mu_2) \cos(1 - \mu_2) \theta \end{pmatrix} + \chi_{c2} \begin{pmatrix} -\sin(1 + \mu_2) \theta \\ \sin(1 + \mu_2) \theta \\ -\cos(1 + \mu_2) \theta \end{pmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{1.112}$$

Se si applica uno stato di tensioni di modo I, lungo la bisettrice dell'intaglio, le equazioni degenerano e assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta(r, \theta=0) &= \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \{ [(1 + \lambda_1) + (1 - \lambda_1) \chi_{b1}] + \\
&+ \frac{q}{4(q-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} [\chi_{d1}(1 + \mu_1) + \chi_{c1}] \}
\end{aligned} \tag{1.113}$$

Oppure:

$$\sigma_{\theta}(r, \theta=0) = \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 [(1 + \lambda_1) + (1 - \lambda_1) \chi_{b1}] \left\{ 1 + \tilde{\omega}_1 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \right\} \quad (1.114)$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{q}{4(q-1)} \frac{[\chi_{d1}(1 + \mu_1) + \chi_{c1}]}{[1 + \lambda_1 + (1 - \lambda_1) \chi_{b1}]}$$

Nella (1.114), la funzione accessoria  $\tilde{\omega}_1$  è completamente definita e dipendente dall'angolo dell'intaglio.

Come le equazioni elaborate da Lazzarin-Tovo, anche nelle equazioni di Lazzarin-Filippi è possibile determinare gli ultimi due parametri  $a_1$  e  $a_2$  coinvolgendo il fattore di intensificazione delle tensioni oppure usando la tensione massima di trazione,  $\sigma_{\max, tr}$ . Se viene utilizzato il primo, è bene ricordare che il  $K_I$  è stato ricavato con l'ipotesi di  $\rho$  tendente a zero. Se viene rimossa tale ipotesi, è necessario introdurre il  $K_{I\rho}$ , il quale rappresenta il fattore di intensificazione dell'intaglio generalizzato (cioè che include il raggio di raccordo), numericamente diverso dal  $K_I$ . I due valori coincideranno solo quando  $\rho = 0$ . Una formula utile per determinare il  $K_{I\rho}$  è la seguente:

$$K_{I\rho} = \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1} \frac{\sigma_{\theta}(r, \theta=0)}{1 + \tilde{\omega}_1 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1}} \quad (1.115)$$

Il parametro  $a_1$  è pari dunque a:

$$a_1 = \frac{K_{I\rho} r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} [(1 + \lambda_1) + (1 - \lambda_1) \chi_{b1}]} \quad (1.116)$$

Se invece si utilizza la tensione massima:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\max, tr} r^{\lambda_1-1}}{1 + \tilde{\omega}_1} \quad (1.117)$$

E' possibile osservare che la equazione (1.114), lontano dall'apice dell'intaglio deve corrispondere all'equazione per gli intagli a spigolo vivo. Inoltre le equazioni di Lazzarin-Filippi sono per loro natura approssimate visto che sono ricavate da un profilo parabolico e le condizioni al contorno sono imposte in alcuni punti particolari. Tutti i parametri per il modo I sono riportate nella tabella (1.2).

$2\alpha[\text{rad}]$	$\lambda_1$	$\mu_1$	$\chi_{b1}$	$\chi_{c1}$	$\chi_{d1}$
0	0.5	-0.5	1	4	0
$\pi/6$	0.5014	-0.4561	1.0707	3.7907	0.0632
$\pi/3$	0.5122	-0.4057	1.3123	3.2832	0.0960
$2\pi/3$	0.6157	-0.2678	3.0027	1.5150	0.0871
$5\pi/6$	0.7520	-0.1624	6.3617	0.5137	0.0413

Tabella 1.2: Valori dei parametri per alcuni angoli di apertura dell'intaglio.

# Capitolo 2

## Criterio sulla densità di energia di deformazione.

### 2.1 La Strain Energy Density (SED).

Nel capitolo precedente sono state affrontate lo studio del campo tensionale che si sviluppa in un componente intagliato a spigolo vivo quando sottoposto a carico di modo I. Si è visto che lo stato tensionale è dipendente dall'autovalore di Williams il quale è funzione diretta dell'angolo di apertura dell'intaglio. Lungo la bisettrice dell'intaglio, la tensione vale:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = \frac{K_{I\rho} \cdot r^{\lambda_1 - 1}}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow K_{I\rho} = \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi} r^{1 - \lambda_1} \quad (2.1)$$

Anche il  $K_I$ , cioè il Notch Stress Intesity Factor (N-SIF) è dipendente dall'angolo di apertura dell'intaglio e possiede una unità di misura che varia al variare dell'angolo  $2\alpha$  ( $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_1}$ ). Ne segue che non è possibile confrontare i valori del  $K_I$  di componenti intagliati a V aventi le stesse dimensioni geometriche ma angoli diversi dell'intaglio. Per superare tale limitazione, Lazzarin e Zambardi (2001) hanno formulato un parametro di resistenza, non il  $K_I$ , ma un valore medio di densità di energia di deformazione (Strain Energy Density, SED ) valutato in un volume di controllo di raggio R che avvolge l'apice dell'intaglio e avente una forma a settore circolare (figura (2.1)):

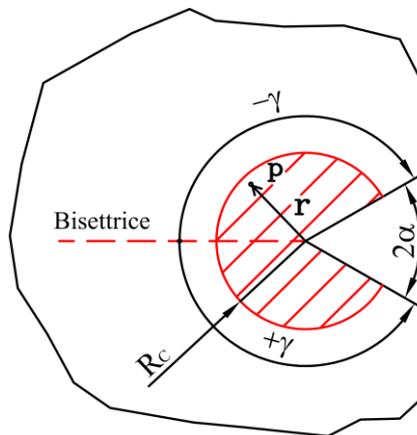


Figura 2.1: Raggio di controllo.

Quello che ci si aspetta è una dimensione del volume di controllo legato ai  $K_I$  e  $K_{II}$  e quindi a un valore ridotto altrimenti entrerebbero in gioco la tensione nominale la quale è sempre presente lontano dall'apice dell'intaglio. Ovviamente il volume di controllo nel caso piano diventa un'area.

Si consideri ora un componente intagliato avente spigolo vivo e sottoposto a una tensione esterna la più complicata possibile. In un generico punto P posto a una distanza  $r$  dall'intaglio (figura (2.1)) a spigolo vivo saranno presenti delle tensioni di modo I e di modo II i cui valori sono calcolabili grazie alle equazioni ricavate nel capitolo uno e qui riportate per completezza:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 &= \frac{K_I \cdot r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi} [(1 + \lambda_1) + \chi_1(1 - \lambda_1)]} \left\{ \begin{Bmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda_1) \chi_1 \begin{Bmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{Bmatrix} \right\} \\ \begin{Bmatrix} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rr} \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^2 &= \frac{K_{II} \cdot r^{\lambda_2-1}}{\sqrt{2\pi} [(1 - \lambda_2) + \chi_2(1 + \lambda_2)]} \left\{ \begin{Bmatrix} -(1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ -(3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + (1 + \lambda_2) \chi_2 \begin{Bmatrix} -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{Bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Le equazioni (2.2) possono essere riscritte in forma più compatta:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(1)} &= \frac{K_I}{r^{1-\lambda_1}} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \\ \sigma_{ij}^{(2)} &= \frac{K_{II}}{r^{1-\lambda_2}} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le funzioni  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$  e  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  sono funzioni angolari dipendenti dall'angolo  $\theta$  che forma il punto P con la bisettrice dell'intaglio e in generale dall'angolo di apertura dell'intaglio  $2\alpha$ . Esse sono perfettamente definite una volta noti il valore angolare del punto P e la sua posizione. I pedici  $i$  e  $j$  assumono i simboli nell'insieme  $\{r, \theta\}$  in cui viene sfruttato la reciprocità delle tensioni  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

Una volta noto lo stato di tensione, grazie alle equazioni di Lamè è possibile calcolare le deformazioni  $\epsilon$  in funzione delle tre tensioni principali:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)) \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))\end{aligned}\quad (2.4)$$

Con quest'ultime si può definire l'energia di deformazione totale coinvolgendo sempre le direzioni principali:

$$E_T = \frac{1}{2}(\sigma_1\epsilon_1 + \sigma_2\epsilon_2 + \sigma_3\epsilon_3)\quad (2.5)$$

Nel caso in cui non siano definite le tensioni principali anche la componente  $\tau$  di taglio dovrà essere considerata nel calcolo dell'energia. Nel punto P l'energia di deformazione sarà esprimibile dalla somma dei contributi di modo I e modo II e la loro interazione fra essi:

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}\quad (2.6)$$

In cui i termini valgono:

$$\begin{aligned}W_1 &= \frac{1}{2E} \frac{K_I^2}{r^{2(1-\lambda_1)}} \left[ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \tilde{\sigma}_r^{(1)2} + \tilde{\sigma}_z^{(1)2} + \right. \\ &\quad \left. - 2\nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_r^{(1)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(1)} + \tilde{\sigma}_r^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1+\nu)\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right] \\ W_2 &= \frac{1}{2E} \frac{K_I^2}{r^{2(1-\lambda_2)}} \left[ \tilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \tilde{\sigma}_r^{(2)2} + \tilde{\sigma}_z^{(2)2} + \right. \\ &\quad \left. - 2\nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_r^{(2)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(2)} + \tilde{\sigma}_r^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(2)}) + 2(1+\nu)\tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right] \\ W_{12} &= \frac{1}{E} \frac{K_I K_{II}}{r^{2-\lambda_1-\lambda_2}} \left[ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_\theta^{(2)} + \tilde{\sigma}_r^{(1)}\tilde{\sigma}_r^{(2)} + \tilde{\sigma}_z^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(2)} + \right. \\ &\quad \left. - \nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_r^{(2)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_r^{(1)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(2)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(1)} + \tilde{\sigma}_r^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\sigma}_r^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(1)}) + 2(1+\nu)\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)}\tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)} \right]\end{aligned}\quad (2.7)$$

La componente  $\sigma_z$  è dipendente dall'ipotesi che si assume per il modello matematico. In particolare la  $\sigma_z$  per la deformazione piana e per la tensione piana assume i seguenti valori:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \nu(\sigma_\theta^{(1)} + \sigma_r^{(1)}) \\ \sigma_z^{(2)} &= \nu(\sigma_\theta^{(2)} + \sigma_r^{(2)}) \end{aligned} \right\} \text{Deformazione piana} \quad (2.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= 0 \\ \sigma_z^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Tensione piana}$$

È degno di nota il fatto che la presenza di una  $\sigma_z \neq 0$  nel caso di deformazione piana e  $\sigma_z = 0$  nel caso di tensione piana fa sì che i due valori di energia ottenuti siano diversi tra loro.

A questo punto è possibile calcolare tramite integrazione l'energia di deformazione all'interno del volume di controllo  $R_C$ :

$$E(R_C) = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} (W_1 + W_2 + W_{12}) r dr d\theta \quad (2.9)$$

Se il volume di controllo è centrato rispetto la bisettrice, allora il contributo legato a  $W_{12}$  è nullo. L'espressione finale della energia di deformazione risulta essere:

$$E(R_C) = \frac{1}{E} \left\{ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1} K_I^2 R_C^{2\lambda_1} + \frac{I_2(\gamma)}{4 \lambda_2} K_{II}^2 R_C^{2\lambda_2} \right\} \quad (2.10)$$

I termini  $I_1(\gamma)$  e  $I_2(\gamma)$  sono due integrali completamente definiti e raccolgono i contributi delle funzioni angolari e non dipendono dal volume di controllo  $R_C$ . I due integrali valgono:

$$\begin{aligned} I_1(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left[ \tilde{\sigma}_\theta^{(1)2} + \tilde{\sigma}_r^{(1)2} + \tilde{\sigma}_z^{(1)2} - 2\nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_r^{(1)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(1)} + \tilde{\sigma}_r^{(1)}\tilde{\sigma}_z^{(1)}) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 + \nu)\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)2} \right] d\theta \\ I_2(\gamma) &= \int_{-\gamma}^{+\gamma} \left[ \tilde{\sigma}_\theta^{(2)2} + \tilde{\sigma}_r^{(2)2} + \tilde{\sigma}_z^{(2)2} - 2\nu(\tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_r^{(2)} + \tilde{\sigma}_\theta^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(2)} + \tilde{\sigma}_r^{(2)}\tilde{\sigma}_z^{(2)}) + \right. \\ &\quad \left. + 2(1 + \nu)\tilde{\tau}_{r\theta}^{(2)2} \right] d\theta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ora, per calcolare la densità dell'energia è necessario dividere la (2.10) per l'area del settore circolare di raggio  $R_C$ , che vale:

$$A(R_C) = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} r \, dr \, d\theta = R_C^2 \gamma \quad (2.12)$$

La densità di energia di deformazione vale quindi:

$$\bar{W} = \frac{E(R_C)}{A(R_C)} = \frac{1}{E} \left\{ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1 \gamma} K_I^2 R_C^{2(\lambda_1-1)} + \frac{I_2(\gamma)}{4 \lambda_2 \gamma} K_{II}^2 R_C^{2(\lambda_2-1)} \right\} \quad (2.13)$$

Ora è necessario definire l'ipotesi di incipiente cedimento, formulata per primo da Beltrami. Esso affermò che il cedimento di un componente avviene quando la densità di energia di deformazione  $\bar{W}$  raggiunge un valore caratteristico del materiale,  $W_C$ . Per i materiali lineari elastici  $W_C$  vale:

$$W_C = \frac{1}{2E} \sigma_{rot}^2 \quad (2.14)$$

In cui la  $\sigma_{rot}$  è la tensione di rottura del materiale. Il criterio ha una valenza generale e quindi vale in ogni caso. Ne segue che se il componente è sottoposto a tensione di modo I, allora è possibile trascurare i contributi di modo II. Applicando ora il criterio appena descritto si ottiene:

$$\bar{W} = W_C \Rightarrow \frac{1}{E} \left\{ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1 \gamma} K_I^2 R_C^{2(\lambda_1-1)} \right\} = \frac{1}{2E} \sigma_{rot}^2 \quad (2.15)$$

Dalla equazione (2.15) è possibile determinare il raggio di controllo  $R_C$ :

$$R_C = \left[ \frac{I_1}{2\lambda_1 \gamma} \left( \frac{K_I}{\sigma_{rot}} \right)^2 \right]^{1/2(1-\lambda_1)} \quad (2.16)$$

È possibile particularizzare l'equazione (2.16) nel caso in cui si consideri una cricca anziché un intaglio. In tal caso l'autovalore di Williams  $\lambda_1$  vale 0.5, l'angolo  $\gamma$  diventa pari a  $\pi/2$  e il  $K_I$  diventa il  $K_C$  definito nel capitolo uno riguardante la meccanica della frattura lineare elastica:

$$R_C = \frac{I_1(\pi)}{\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_{rot}} \right)^2 \quad (2.17)$$

Sempre nel caso di una cricca, altre due utili formulazioni per il calcolo del raggio  $R_C$  sono:

$$R_C = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_{rot}} \right)^2 \text{ Deformazione piana}$$

$$R_C = \frac{(5 - 3\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_C}{\sigma_{rot}} \right)^2 \text{ Tensione piana}$$
(2.18)

Nel caso in cui invece l'angolo di apertura  $2\alpha$  sia diverso da zero, e necessario usare l'equazione (2.16). Inoltre se il componente è sottoposto a un modo di carico misto I+II il volume di controllo risulta essere rigidamente ruotato e centrato rispetto al valore massimo raggiunto dalla stessa SED. Nella tabella (2.1), vengono riportati i valori dell'integrale  $I_1$  per alcuni angoli caratteristici  $2\alpha$  e per diversi valori del coefficiente di Poisson  $\nu$ .

$2\alpha$ [°]	$\gamma$ [°]	$\lambda_1$	$I_1$ , Def. Piana ( $\nu \in 0.1 \div 0.4$ )					$I_1$ , Ten. Piana ( $\nu = 0.3$ )		
			$\nu=0.1$	$\nu=0.15$	$\nu=0.2$	$\nu=0.25$	$\nu=0.3$	$\nu=0.35$	$\nu=0.4$	T.P. $\nu=0.3$
0	180	0.5000	1.1550	1.0925	1.0200	0.9375	0.8450	0.7425	0.6300	1.0250
30	165	0.5014	1.1335	1.0738	1.0044	0.9254	0.8366	0.7382	0.6301	1.0108
60	150	0.5122	1.0678	1.0156	0.9547	0.8850	0.8066	0.7194	0.6235	0.9642
120	120	0.6157	0.8137	0.7859	0.7524	0.7134	0.6687	0.6184	0.5624	0.7701
150	105	0.7520	0.6536	0.6380	0.6186	0.5952	0.5678	0.5366	0.5013	0.6386

Tabella 2.1: Valori dell'integrale  $I_1$  per alcuni angoli di apertura.

## 2.2 SED negli intagli raccordati.

In presenza di componenti con intagli non a spigolo vivo ma con un raggio di raccordo  $\rho$  diverso da zero, le equazioni da utilizzare per determinare il campo tensionale di modo I sono state ricavate nel capitolo uno e qui riportate per comodità:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^1 &= \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 \left\{ \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{array}{l} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{array} \right) + (1 - \lambda_1) \chi_{b1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \end{aligned} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{q}{4(q-1)} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \left[ \chi_{d1} \begin{pmatrix} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1) \theta \end{pmatrix} + \chi_{c1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \mu_1) \theta \\ -\cos(1 + \mu_1) \theta \\ \sin(1 + \mu_1) \theta \end{pmatrix} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

I parametri  $\chi_{b1}$ ,  $\chi_{d1}$  e  $\chi_{c1}$  sono valori dipendenti dall'angolo di apertura dell'intaglio, dall'indice di acutezza  $q$  e da  $r_0$ :

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} \quad (2.20)$$

$$r_0 = \frac{q-1}{q} \rho$$

Per comodità di notazione, è possibile scrivere l'equazione (2.19) in una forma più compatta:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = a_1 r^{\lambda_1 - 1} \left\{ f_{ij}(\theta, \alpha) + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} g_{ij}(\theta, \alpha) \right\} \quad (2.21)$$

La funzione angolare  $f_{ij}$  vale:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{\theta\theta} \\ f_{rr} \\ f_{r\theta} \end{pmatrix}^1 &= \frac{1}{1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)} \left[ \begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \lambda_1) \chi_{b1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Mentre la funzione  $g_{ij}$  vale:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g_{\theta\theta} \\ g_{rr} \\ g_{r\theta} \end{pmatrix}^1 &= \frac{q}{4(q-1)[1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)]} \left[ \chi_{d1} \begin{pmatrix} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1) \theta \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \chi_{c1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \mu_1) \theta \\ -\cos(1 + \mu_1) \theta \\ \sin(1 + \mu_1) \theta \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

Lungo la bisettrice dell'intaglio, la tensione  $\sigma_{\theta\theta}$  vale:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) &= \lambda_1 r^{\lambda_1 - 1} a_1 [1 + \lambda_1 + \chi_{b1}(1 - \lambda_1)] \left\{ 1 + \tilde{\omega}_1 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1 - \lambda_1} \right\} \\ \tilde{\omega}_1 &= \frac{q}{4(q-1)} \frac{[\chi_{d1}(1 + \mu_1) + \chi_{c1}]}{[1 + \lambda_1 + (1 - \lambda_1)\chi_{b1}]} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nel caso di un intaglio raccordato, è possibile determinare il valore del parametro  $a_1$  con il valore della tensione massima  $\sigma_{tip}$  in corrispondenza dell'apice del raccordo  $\rho$ :

$$a_1 = \frac{\sigma_{tip}}{1 + \tilde{\omega}_1} \quad (2.25)$$

Usando tale definizione, l'equazione (2.21) diventa:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma_{\text{tip}}}{1 + \tilde{\omega}_1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\lambda_1} \left[ f_{\theta\theta} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} g_{\theta\theta} \right] \\
 \sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma_{\text{tip}}}{1 + \tilde{\omega}_1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\lambda_1} \left[ f_{rr} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} g_{rr} \right] \\
 \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma_{\text{tip}}}{1 + \tilde{\omega}_1} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{1-\lambda_1} \left[ f_{r\theta} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1} g_{r\theta} \right]
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

La densità di energia di deformazione elastica di un generico punto che si trova a una distanza  $r$  e che forma un angolo  $\theta$  con la bisettrice dell'intaglio è allora data dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 W_1^{(e)}(r, \theta) &= \frac{1}{2E} \left(\frac{\sigma_{\text{tip}}}{1 + \tilde{\omega}}\right)^2 \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(\lambda_1-1)} \tilde{F}_\lambda + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2(\mu_1-1)} + \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{G}_\mu + 2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\lambda_1+\mu_1-2} \tilde{M}_{\lambda\mu} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Nella (2.27), grazie al criterio di Beltrami, i termini  $\tilde{F}_\lambda$ ,  $\tilde{G}_\mu$  e  $\tilde{M}_{\lambda\mu}$  valgono:

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_\lambda &= f_{\theta\theta}^2 + f_{rr}^2 + f_{zz}^2 - 2\nu(f_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}f_{zz} + f_{rr}f_{zz}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^2 \\
 \tilde{G}_\mu &= g_{\theta\theta}^2 + g_{rr}^2 + g_{zz}^2 - 2\nu(g_{\theta\theta}g_{rr} + g_{\theta\theta}g_{zz} + g_{rr}g_{zz}) + 2(1 + \nu)g_{r\theta}^2 \\
 \tilde{M}_{\lambda\mu} &= f_{\theta\theta}g_{\theta\theta} + f_{rr}g_{rr} + f_{zz}g_{zz} - \nu(f_{\theta\theta}g_{rr} + g_{\theta\theta}f_{rr} + f_{\theta\theta}g_{zz} + g_{\theta\theta}f_{zz} \\
 &\quad + f_{rr}g_{zz} + g_{rr}f_{zz}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}g_{r\theta}
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

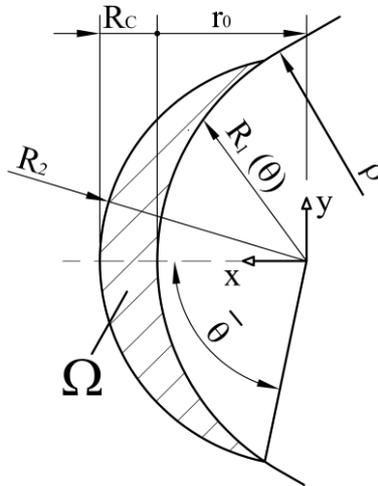


Figura 2.2: Apice dell'intaglio raccordato e area SED.

Considerando l'area  $\Omega$  mostrata in figura (2.2), l'energia di deformazione può essere espressa come:

$$E_1 = \int_{\Omega} W_1 d\Omega = \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} d\theta \int_{R_1(\theta)}^{R_2} W_1(r, \theta) r dr \quad (2.29)$$

In una forma più esplicita:

$$E_1 = \frac{1}{2E} \left[ \frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{tip}}{1 + \tilde{\omega}_1} \right]^2 r_0^{2(1-\lambda_1)} (I_{\lambda} + I_{\mu} + I_{\lambda\mu}) \quad (2.30)$$

In cui:

$$\begin{aligned} I_{\lambda} &= \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} \frac{(R_2^{2\lambda_1} - R_1(\theta)^{2\lambda_1})}{2\mu_1} d\theta \\ I_{\mu} &= (r_0)^{2(\lambda_1 - \mu_1)} \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} \frac{(R_2^{2\mu_1} - R_1(\theta)^{2\mu_1})}{2\mu_1} \tilde{G}_{\mu} d\theta \\ I_{\lambda\mu} &= 2(r_0)^{\lambda_1 - \mu_1} \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} \frac{(R_2^{\lambda_1 + \mu_1} - R_1(\theta)^{\lambda_1 + \mu_1})}{\lambda_1 + \mu_1} \tilde{M}_{\lambda\mu} d\theta \end{aligned} \quad (2.31)$$

Il terzo integrale dell'equazione (2.31) è sempre nullo quando l'angolo  $2\alpha$  è pari a zero. Nel caso in cui l'intaglio sia a forma di U ( $2\alpha = 0$ ) si deve usare la seguente espressione:

$$I_{\lambda\mu} = 2(r_0) \int_{-\tilde{\theta}}^{+\tilde{\theta}} \ln \left[ \frac{R_2}{R_1(\theta)} \right] \tilde{M}_{\lambda\mu} d\theta \quad (2.32)$$

Allo scopo di arrivare a una forma compatta, è possibile scrivere:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} (I_{\lambda} + I_{\mu} + I_{\lambda\mu}) \quad (2.33)$$

In cui l'introduzione di  $2\pi$  rende  $I_1$  consistente con l'espressione già usata per il caso di intaglio a spigolo vivo. In forma sintetica, l'energia nel volume strutturale può essere espressa come:

$$E_1 = \frac{1}{2E} \left[ \frac{\sigma_{tip} \sqrt{2\pi}}{r_0^{\lambda_1 - 1} (1 + \tilde{\omega}_1)} \right] \cdot I_1 \quad (2.34)$$

Dove  $I_1$  dipende da  $2\alpha$ ,  $\rho$  e  $R_C$ . L'area in cui viene calcolata la densità di energia di deformazione è pari a:

$$\Omega = \int_{R_1(\theta)}^{R_2} \int_{-\bar{\theta}}^{+\bar{\theta}} r \, dr \, d\theta \quad (2.35)$$

E quindi la densità di energia di deformazione risulta essere:

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{\Omega} = \frac{1}{E} \left( \frac{I_1}{2\Omega} \right) \sigma_{\text{tip}}^2 r_0^{2(1-\lambda_1)} \left( \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + \tilde{\omega}_1} \right)^2 \quad (2.36)$$

Il rapporto  $I_1/2\Omega$  dipende implicitamente dal parametro del materiale  $R_C$ , visto che  $R_C$  governa  $R_2$ . In generale, l'integrale  $I_1$  e l'area  $\Omega$  dipendono dai parametri  $2\alpha$ ,  $\rho$  e da  $R_C$ . Tuttavia  $I_1$  è proporzionale a  $\rho^{2\lambda}$  (infatti, come si vede nell'equazione (2.33),  $R_2$  è un termine dominante nel calcolo dell'integrale e numericamente simile a  $\rho$ ) mentre  $\Omega$  è proporzionale a  $\rho^2$ . Allora un'adeguata espressione per il rapporto  $I_1/2\Omega$  è:

$$\frac{I_1}{2\Omega} (2\alpha, \rho, R_C) = \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} H \left( 2\alpha, \frac{R_C}{\rho} \right) \quad (2.37)$$

Quando l'area abbraccia i bordi semicirculari dell'intaglio (e non i suoi fianchi rettilinei) il valore medio della SED può essere espresso nella seguente forma:

$$\bar{W}_1 = F(2\alpha) \times H \left( 2\alpha, \frac{R_C}{\rho} \right) \times \frac{\sigma_{\text{tip}}^2}{E} \quad (2.38)$$

In cui  $F(2\alpha)$  dipende dai parametri definiti precedentemente:

$$F(2\alpha) = \left( \frac{q-1}{q} \right)^{2(1-\lambda_1)} \left[ \frac{\sqrt{2\pi}}{1 + \tilde{\omega}_1} \right]^2 \quad (2.39)$$

Mentre  $H$  è un valore dipendente dall'angolo di apertura, dal rapporto tra il raggio critico  $R_C$  e il raggio di raccordo  $\rho$  e anche dal coefficiente di Poisson. I valori di  $H$  e  $F$  sono riportati nelle tabelle (2.2) e (2.3).

$2\alpha$ [rad]	F
0	0.7850
$\pi/6$	0.6917
$\pi/3$	0.6620
$2\pi/3$	0.8779
$5\pi/6$	1.4417

Tabella 2.2: Valori della funzione F per alcuni angoli di apertura.

$2\alpha[\text{rad}]$	$R_C/\rho$	H		
		$\nu = 0.3$	$\nu = 0.35$	$\nu = 0.4$
0	0.05	0.5086	0.4884	0.4652
	0.1	0.4518	0.4322	0.4099
	0.3	0.3069	0.2902	0.2713
$\pi/6$	0.05	0.5760	0.5537	0.5280
	0.1	0.5107	0.4894	0.4651
	0.3	0.3439	0.3264	0.3066
$\pi/3$	0.05	0.5998	0.5769	0.5506
	0.1	0.5302	0.5087	0.4842
	0.3	0.3543	0.3372	0.3179
$2\pi/3$	0.05	0.4465	0.4298	0.4106
	0.1	0.3920	0.3767	0.3591
	0.3	0.2578	0.2467	0.2339

Tabella 2.3: Valori della funzione H per alcuni angoli di apertura.

Usando la definizione del NSIF di modo I per intagli raccordati a V è possibile ricavare una semplice relazione tra  $\sigma_{\text{tip}}$  e  $K_{1\rho}$ :

$$K_{1\rho} = \sqrt{2\pi} \frac{\sigma_{\text{tip}}}{1 + \tilde{\omega}_1} \left( \frac{q-1}{q} \rho \right)^{1-\lambda_1} = \sqrt{F(2\alpha)} \sigma_{\text{tip}} \rho^{1-\lambda_1} \quad (2.40)$$

Quindi è possibile riscrivere l'equazione (2.38) in una forma più compatta:

$$\bar{W}_1 = H \left( 2\alpha, \frac{R_C}{\rho} \right) \times \frac{K_{1\rho}^2}{E} \times \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} \quad (2.41)$$

L'equazione (2.41) può essere usata per riassumere tutti i risultati da intagli blandi (a forma di V) soggetti a carico di modo I. Il criterio può essere applicato per condizioni di carico statiche e a fatica ad alto numero di cicli.

### 2.3 Vantaggi dell'approccio SED.

Al contrario della diretta valutazione del N-SIF, il quale necessita di una analisi agli elementi finiti (nel proseguo FEM) che coinvolge una discretizzazione del dominio di interesse (mesh) molto raffinata, il valore medio della SED elastica su di un volume di controllo può essere determinato con alta precisione usando una mesh grossolana. Delle mesh molto fitte sono necessarie per determinare direttamente il N-SIF dalle distribuzioni

locali delle tensioni. Non è necessario rifinire la mesh quando lo scopo dell'analisi agli elementi finiti è quello di determinare il valore medio della SED su di un volume di controllo che abbraccia il punto di tensione singolare. La SED infatti viene calcolata passando attraverso le funzioni di forma che legano gli spostamenti sul nodo  $i$ -esimo con gli spostamenti del nodo  $j$ -esimo, così che anche una mesh rada è in grado di dare valori di SED sufficientemente accurati e molto stabili. Nel codice agli elementi finiti, la SED viene calcolata con la seguente formula:

$$\bar{W}_{FEM} = \frac{\sum_A W_{FEM,i}}{A} \quad (2.42)$$

In cui la  $W_{FEM,i}$  coinvolge l'energia totale definita da Beltrami. Alcuni recenti contributi documentano la scarsa variabilità della SED determinata da una mesh molto fitta e da una molto rada, considerando alcune tipiche geometrie di giunti saldati e fornendo una giustificazione teorica sulla dipendenza tra la leggera variabilità e il valore medio della SED quando valutata su di un volume di controllo centrato sul piede del cordone di saldatura o allo spigolo dello stesso. Al contrario le distribuzioni di tensioni singolari sono fortemente dipendenti dalla mesh. Il N-SIF può essere stimato dal valore locale della SED per intagli puntuali in piastre soggette a modo I, modo II o a modo misto di carico tramite l'equazione (2.41). Altri importanti vantaggi possono essere raggiunti usando l'approccio SED. I più importanti sono i seguenti:

- Il criterio permette di considerare l'effetto scala su diverse piastre in proporzione geometrica fra loro. Il N-SIF invece cambia con le proporzioni geometriche.
- Permette di considerare il contributo di diversi modi di carico.
- Permette di considerare il rapporto nominale di ciclo quando la SED è utilizzata nel campo della fatica meccanica.
- Permette di superare il grosso problema legato alle differenti unità di misura del N-SIF nel caso di differenti angoli di apertura dell'intaglio (per esempio, nei giunti saldati, l'iniziazione di una cricca al piede del cordone di saldatura ( $2\alpha = 135^\circ$ ) o all'apice ( $2\alpha = 0^\circ$ ) non può essere fra loro confrontata).
- Viene superato il complesso problema di nucleazioni di cricche multiple e la loro iterazione su diversi piani durante la propagazione.
- Considera all'interno dei calcoli la T-Stress e questo aspetto diventa fondamentale quando sono analizzate strutture sottili. In maggior dettaglio, alcuni autori ritengono

che nelle equazioni di Irwin la  $\sigma_y$  dovuta a tensione di modo I debba essere corretta da un termine costante T:

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2)[1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3/2\theta)] + T \quad (2.43)$$

Il quale diventa trascurabile avvicinandosi all'apice della cricca, mentre fa sentire il suo effetto allontanandosi. Molti autori, tra cui il professor Lazzarin, sono giunti a conclusione che l'effetto sia della T-Stress sia dei termini di ordine superiore devono essere adeguatamente presi in considerazione, in particolare quando si lavora con spessori sottili e si voglia descrivere il campo tensionale. A differenza del criterio basato sulle tensioni, la SED considera automaticamente i termini di ordine superiore non singolari.

- Include direttamente l'effetto tridimensionale e le tensioni fuori piano che si sviluppano attraverso lo spessore della piastra che, in alcuni casi può rappresentare un ruolo importante nel processo di frattura e che non sono stimate dalla teoria di Williams. Le teorie piane sull'elasticità fanno uso di due ipotesi riguardanti lo stato di tensione in una piastra soggetta a carico nel piano. Queste sono: tensione piana (tensione trasversale nulla) e deformazione piana (deformazione trasversale nulla). Nella letteratura, specialmente in relazione a problemi sulle cricche, lo stato di tensione dominante è spesso stimato dallo spessore usando una semplice regola empirica. Se la piastra è abbastanza sottile allora lo stato tensionale è normalmente considerato essere piano mentre se lo spessore è notevole allora si parla di stato di deformazione piano. Quindi non è generalmente un criterio accettato nel caso in cui ci sia qualche dubbio riguardo allo spessore del componente per giustificare l'applicazione della corrispondente soluzione entro la teoria piana della elasticità. Molti ricercatori si sono occupati di determinare il fattore di concentrazione delle tensioni per tutto lo spessore di piastre indebolite da fori circolari, fori ellittici e intagli a U ed a V. Tramite un recente studio condotto da Lazzarin e Berto è stato possibile dimostrare che l'approccio SED permette di catturare e unificare i fenomeni indotti da questo effetto tridimensionale.

Nella figura (2.3) viene riportato un diagramma il quale rappresenta il valore di SED normalizzato rispetto alla energia critica  $W_C = \sigma_t^2/(2E)$ . Tale rapporto è posto sotto radice per fare in modo che le energie siano proporzionali a una tensione equivalente  $\sigma$  e non a

una  $\sigma^2$ . I provini usati sono stati testati a modo I aventi intagli a forma di U. Il diagramma è in funzione del rapporto tra il raggio di raccordo dell'intaglio e il raggio critico  $R_C$ . (indicato con  $R_0$  nella figura (2.3) e nelle figure successive).

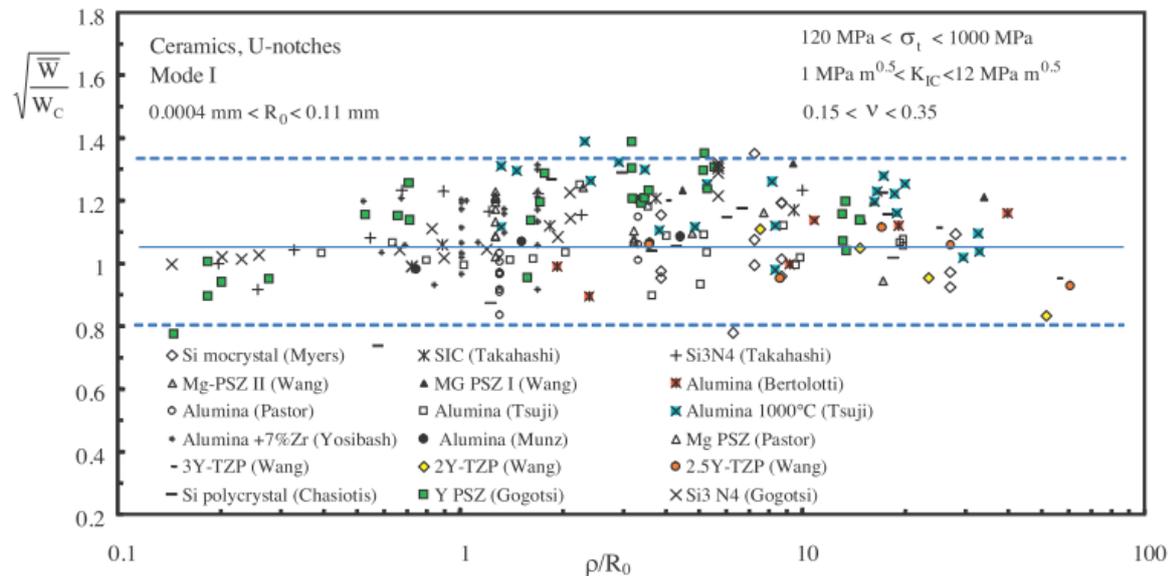


Figura 2.3: Valori di SED per alcuni materiali ceramici testati a modo I.

Il valore medio risulta essere pressoché indipendente dal rapporto  $\rho/R_C$  e con una banda di dispersione compresa tra 0.85 e 1.35 (sette valori su oltre 200 sono al difuori della banda). Va sottolineato la grande variabilità del raggio critico  $R_C$ , il quale varia da 0.0004 a 0.11. In totale sono presenti 18 materiali considerati fragili. Il successivo diagramma, il quale raccoglie diversi tipi di modo di carico, è proposto in figura (2.4).

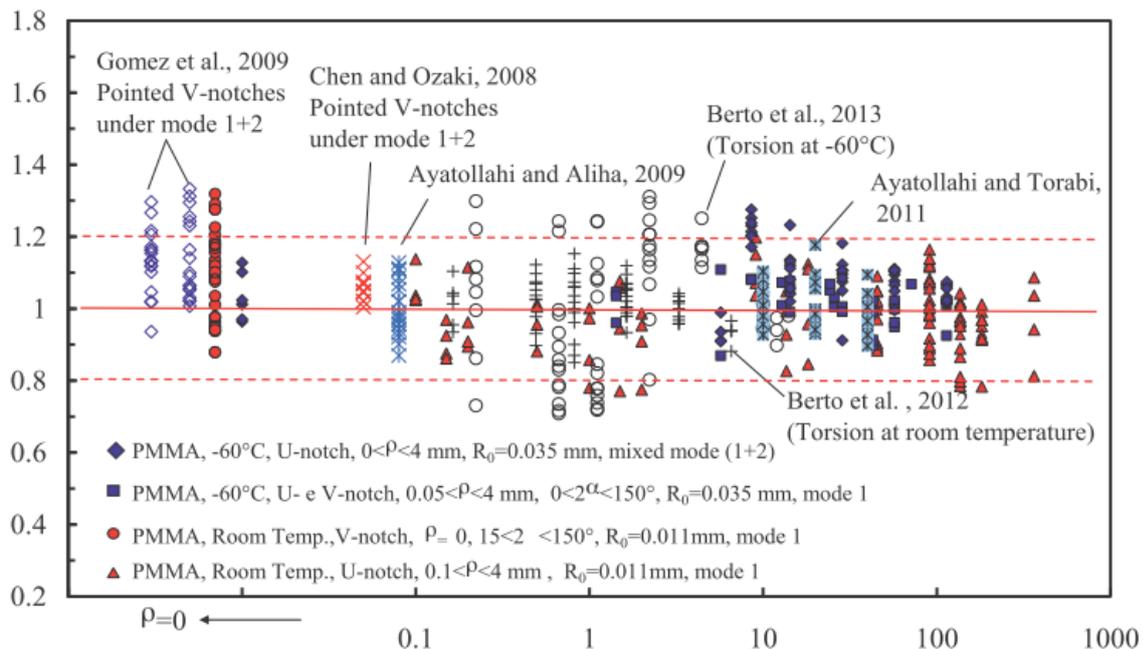


Figura 2.4: Valori di SED per diversi modi di carico.

La sintesi raccoglie i dati di diversi professori (Ayatollahi, Chen e Ozaki, Torabi e Berto). Rispetto al test precedente questo differisce perché i materiali testati sono il PMMA (polimetacrilato) e una resina acrilica (Chen e Ozaki). I provini sono stati testati sia a modo I sia a modo III, a temperatura ambiente e a  $-60^{\circ}\text{C}$ . Gli intagli dei provini erano sia di forma a U sia a V, in quest'ultimo caso con angoli di intaglio  $2\alpha$  pari a  $0^{\circ}$ ,  $5^{\circ}$ ,  $15^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$  e raggio di raccordo nominale pari a zero.

Una ulteriore prova della valenza del metodo SED è stata portata a termine da Lazzarin e Berto ponendo sotto test la grafite isostatica commerciale. E' un materiale che nella pratica industriale viene utilizzata per stampaggio di acciaio e rame, stampi per l'industria vetraria, crogioli per metalli preziosi ecc. I provini utilizzati sono stati di due tipi: i primi erano delle piastre aventi degli intagli centrali a forma di asola, mentre i secondi erano delle piastre aventi un intaglio di tipo "Key-Hole" (si veda la figura (2.5)). Essi, grazie all'orientazione dell'intaglio, sono stati sottoposti a modo misto I+II.

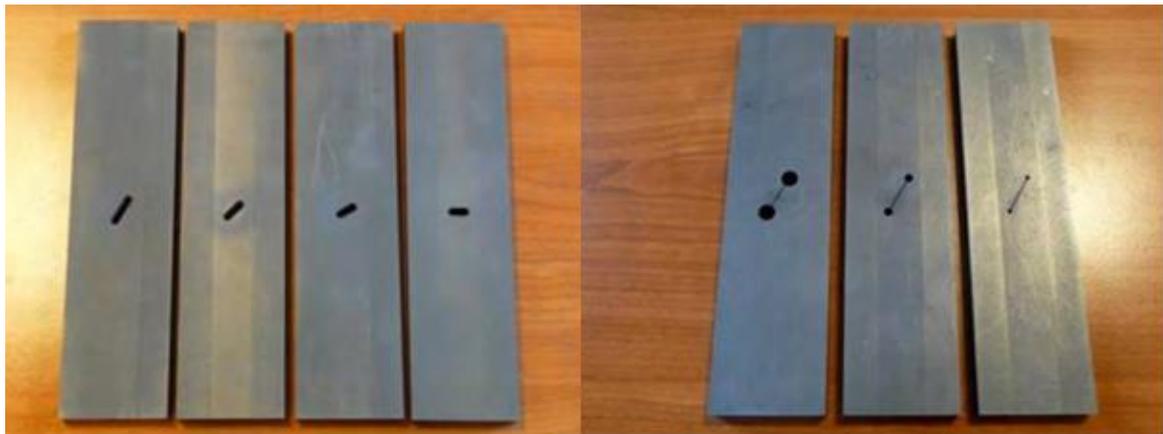


Figura 2.5: Provini costruita in grafite.

La grafite sotto test ha presentato un valore di energia critica pari a  $W_C = 0.13 \text{ MJ/m}^3$  e un raggio critico  $R_C = 0.17 \text{ mm}$ . Usando la stessa rappresentazione dei test precedenti, nella quale la SED è normalizzata rispetto all'energia critica del materiale e posta sotto radice, la figura (2.6) mostra l'andamento di tale valore rispetto al raggio dell'intaglio. E' facile notare che la SED permette una sintesi di tutti provini in una banda molto limitata la quale è completamente indipendente dalla forma dell'intaglio, dalla sua orientazione e dalla sua acutezza.

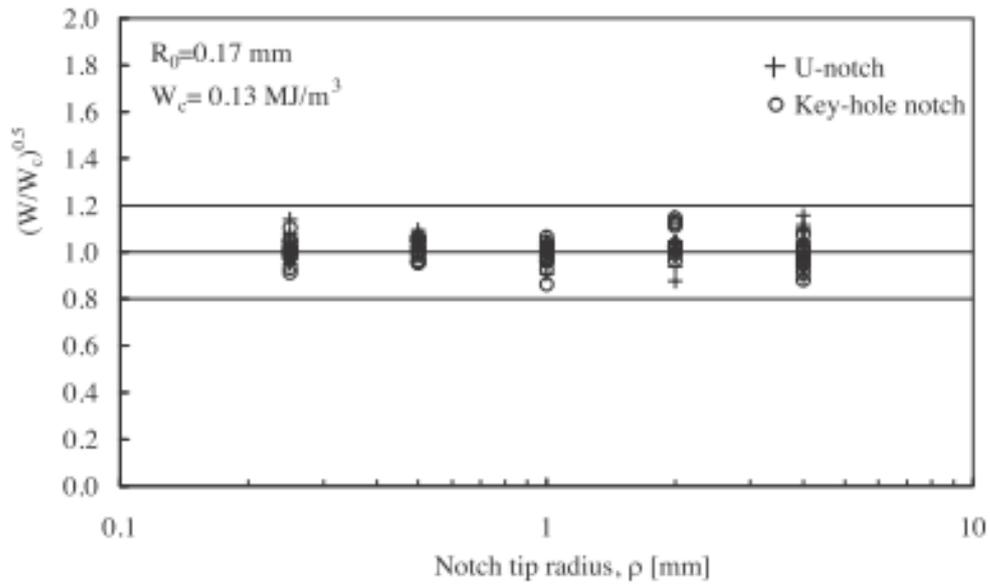


Figura 2.6: Valori SED per provini in grafite aventi intagliati a U e “Key-Hole Notch” .

Sempre per quello che riguarda la grafite, un’ulteriore analisi è stata portata a termine testando dei provini cilindrici a torsione aventi un intaglio circolare di tipo radiale (figura (2.7)).

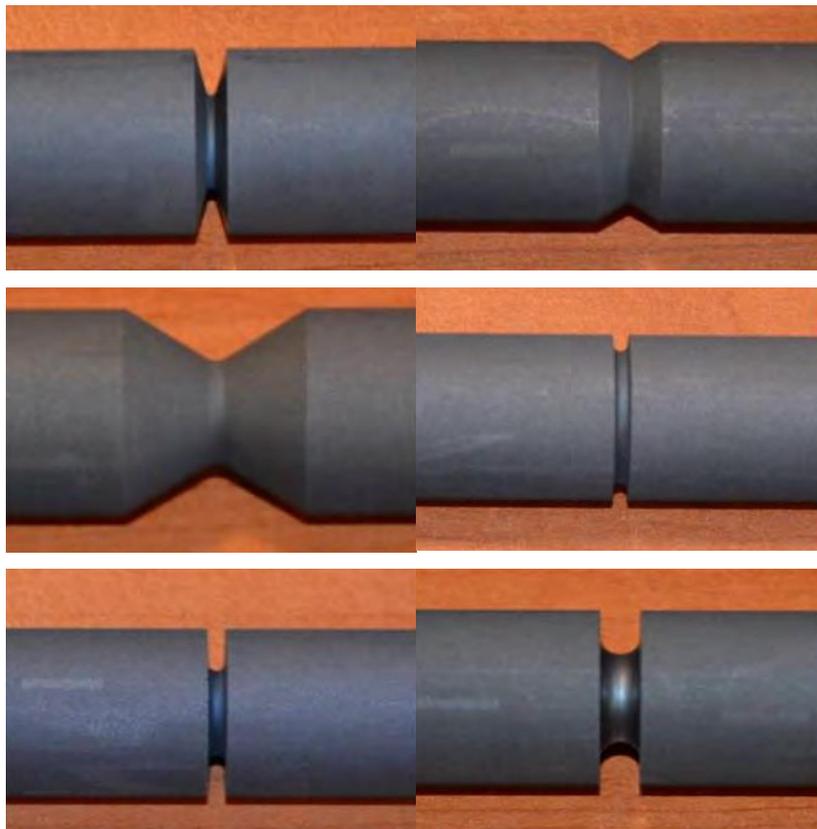


Figura 2.7: Provini cilindrici intagliati. In alto intaglio a V, in basso intagli a U.

Anche in questo caso, l'approccio SED ha dato dei ottimi risultati. In figura (2.8) viene rappresentato come al solito la SED normalizzata nell'asse verticale mentre il rapporto  $\rho/R_C$  nell'asse orizzontale. Da sottolineare che la banda di dispersione è molto limitata e indipendente dall'angolo di apertura dell'intaglio. Inoltre, 68 dei 70 provini sono all'interno della banda 0.85-1.15 mentre il 75% dei dati rientra nella banda 0.9-1.1.

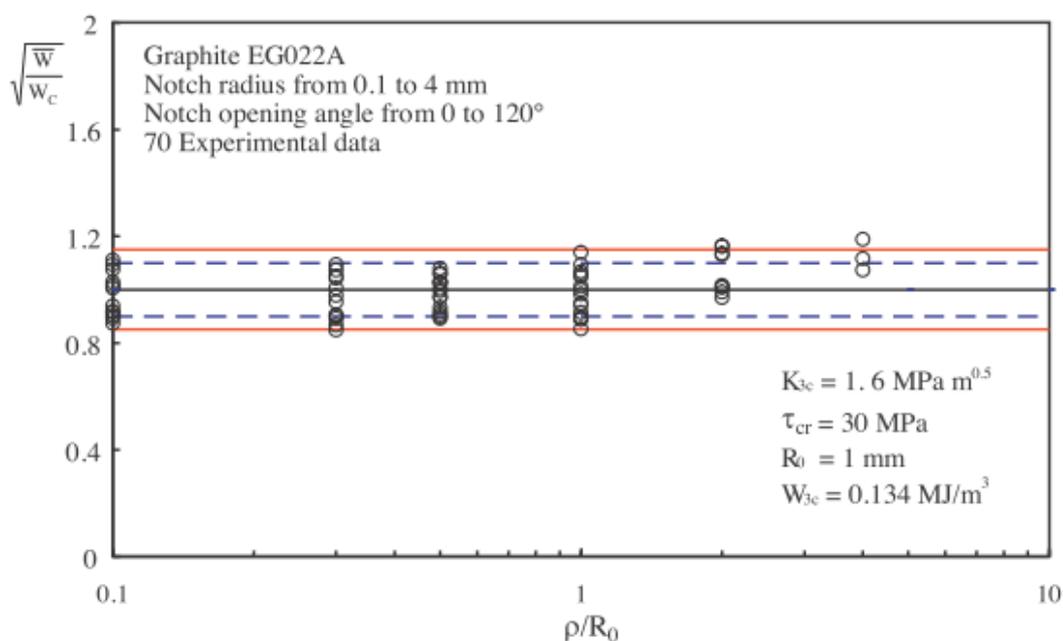


Figura 2.8: Banda di dispersione della SED nel caso di prova a torsione.

Un ulteriore studio ha coinvolto dei provini costruiti sempre in grafite ma sottoposti a compressione. E' uno studio particolare poiché l'equazione per la determinazione del raggio critico ( $R_C = (1 + \nu)(5 - 8\nu)/4\pi \cdot (K_{IC}/\sigma_t)^2$ ) non puo essere applicata visto che la tenacità a frattura non è definita. Per risolvere questa problematica, si è confrontato la SED calcolata in 5 raggi di controllo (0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5 mm) di un provino intagliato avente raggio di raccordo  $\rho = 0.5 \text{ mm}$  con la SED di un provino intagliato con raggio di raccordo  $\rho = 2 \text{ mm}$ . Per il valore di raggio critico pari a 1 mm le due SED sono risultate essere coincidenti (figura (2.9)).

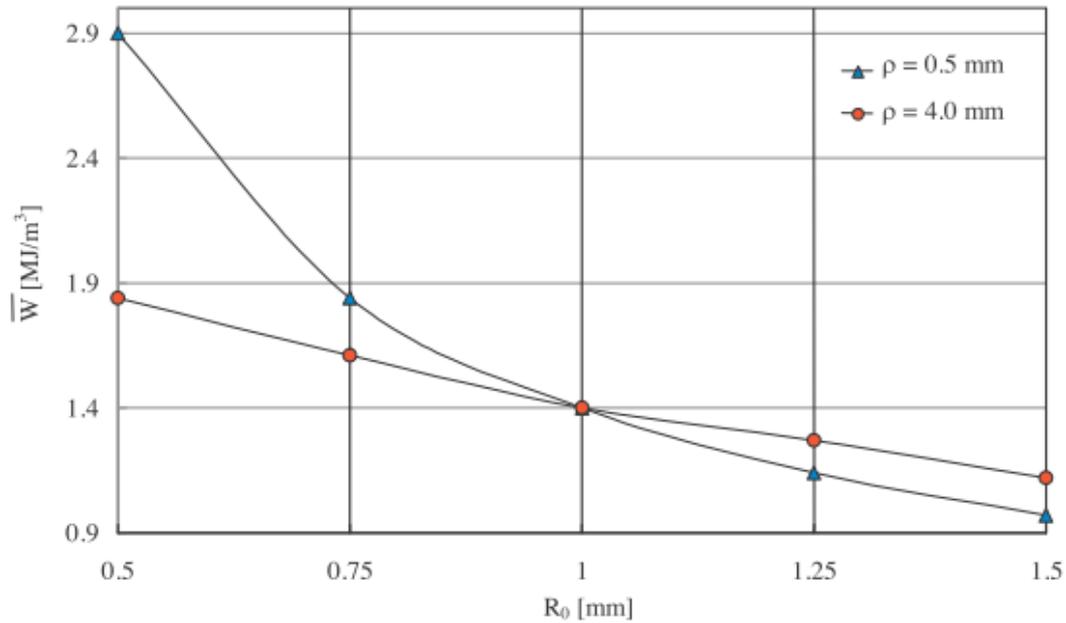


Figura 2.9: Determinazione del raggio critico  $R_C$  (indicato con  $R_0$ ) nel caso di test a compressione.

Questo significa che il valore della SED è indipendente dall'acutezza e dalla forma dell'intaglio. Come fatto per le analisi precedenti, in figura (2.10) viene presentato il rapporto  $\sqrt{SED/W_C}$  in funzione del raggio di raccordo  $\rho$ . Anche in questo caso la banda di dispersione è molto ristretta, visto che essa varia tra 0.9 e 1.1. Da notare che la maggioranza dei dati sperimentali è all'interno della banda 0.95-1.05.

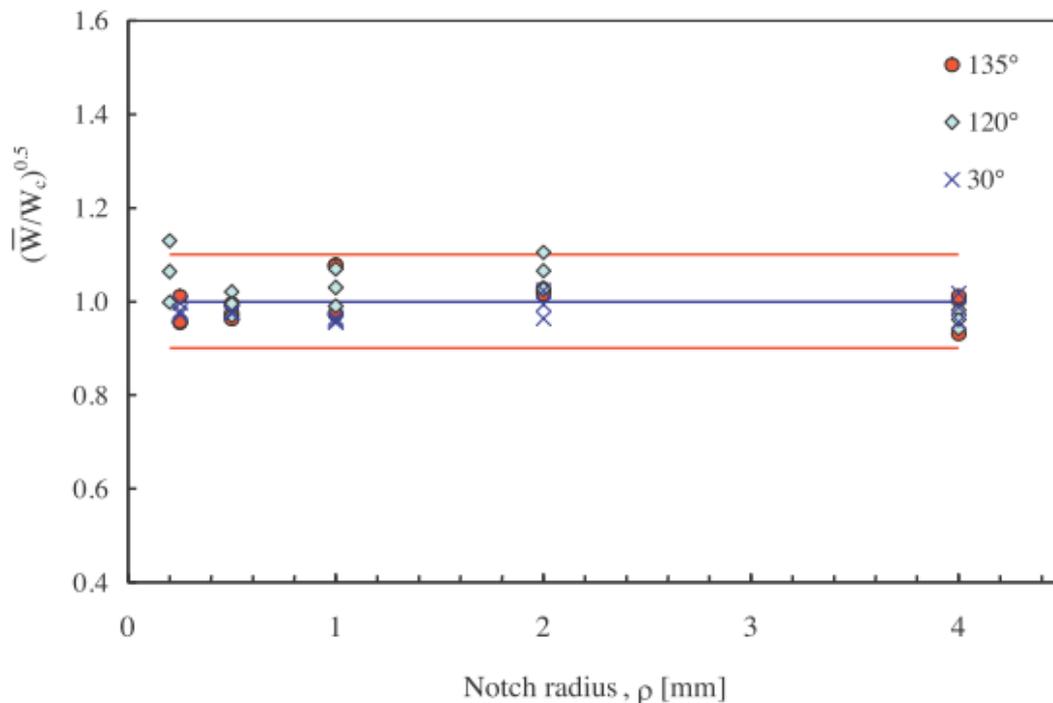


Figura 2.10: Sintesi dei dati sperimentali per provini sottoposti a compressione.  $R_C = 1$  mm.

Una sintesi finale di tutti i test condotti sulla grafite sotto carico di tensione, torsione e compressione viene riportata in figura (2.11), mentre in figura (2.12) viene riportata la sintesi di tutti i materiali ceramici studiati in cui sono raccolti oltre 1000 dati sperimentali.

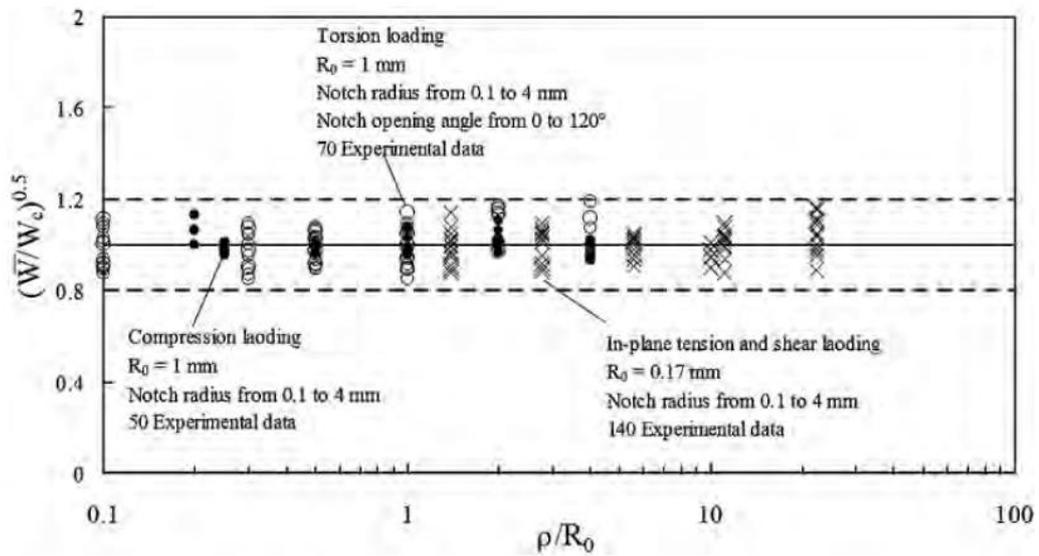


Figura 2.11: Sintesi sperimentale riguardante la grafite.

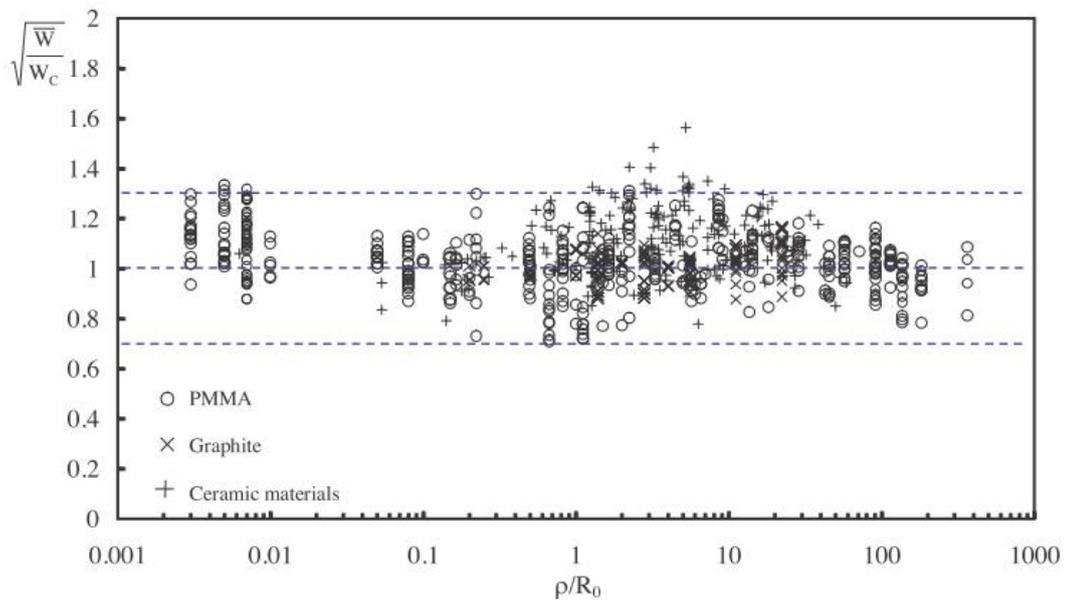


Figura 2.12: Sintesi di alcuni materiali ceramici di interesse ingegneristico.



# Capitolo 3

## Materiali studiati e prove sperimentali.

### 3.1 La macchina di prova.

Le prove sperimentali che sono state eseguite hanno avuto lo scopo di testare a trazione tre tipi di materiali plastici. La macchina di prova utilizzata è una MTS 810 servo-idraulica avente una cella di carico da 250 kN. Tramite il software in dotazione alla macchina è stato registrato il diagramma tensione-deformazione e successivamente è stato possibile calcolare l'energia di deformazione, il carico di rottura e l'allungamento del provino sotto test. I tre materiali studiati sono proposti di seguito.

### 3.2 Materiale uno: PA6GF30.

E' il materiale più performante tra i tre analizzati. Il PA6GF30 è una poliammide estrusa con l'aggiunta di fibra di vetro al 30% e grafite. La carica vetrosa rende il materiale eccezionalmente resistente all'abrasione, alla compressione, alla trazione ed alla flessione. Grazie alla grafite il PA6GF30 mostra anche un'ottima resistenza all'usura e possiede caratteristiche di autolubrificazione. I manufatti costruiti con questo materiale possiedono le migliori caratteristiche di stabilità dimensionali sia all'aumentare della temperatura, sia alle basse temperature. IL PA6GF30 è un materiale particolarmente indicato per l'ottenimento di ingranaggi e pezzi meccanici ad alte resistenze, che possono lavorare anche in ambienti critici, come cantieri, macchine per movimento terra, particolari per l'automotive, senza subire usura. Anche se in maniera limitata, può essere usato per applicazioni elettriche ma comunque il materiale è suscettibile alla umidità ambientale; ciò nonostante viene utilizzato quando siano richieste resistenze meccaniche e alle intemperie. Possiede infine buone resistenze agli acidi, ai composti inorganici e ai solventi. Non è utilizzabile a contatto con gli alimenti. La caratteristica meccanica del PA6GF30 è di tipo fragile, ovvero non presenta una deformazione marcata. Alcuni esempi di applicazioni sono rappresentate nella figura (3.1).



Figura 3.1. Alcune applicazioni con il materiale PA6GF30 (Impianto iniezione auto, componenti per l'abitacolo, collettori di aspirazione, ventole rinforzate).

Le caratteristiche fisiche a catalogo sono riportate nella tabella (3.1), mentre le caratteristiche rilevate sono riportate nella tabella (3.2).

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	8700
Modulo Tangenziale G [MPa]	3085.11
Coefficiente di Poisson $\nu$	0.41
Carico Rottura [MPa]	100
Densità [Kg/dm <sup>3</sup> ]	1.3
Durezza [Shore]	M95
Resistività [ohm·cm]	10 <sup>14</sup>
Conduktività Termica [W/(m·°K)]	0.25
Spessore lastra [mm]	17

Tabella 3.1: Caratteristiche a catalogo.

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	8180.99
Modulo Tangenziale G [MPa]	2901.06
Carico Rottura [MPa]	81.55

Tabella 3.2: Caratteristiche rilevate.

### 3.3 Materiale due: Polivincloruro (PVC).

Il PVC rigido possiede una elevata stabilità chimica e un'ottima resistenza al fuoco, grazie alla sua naturale autoestinguenza. Esso appartiene alla categoria dei termoplastici con una struttura amorfa, presenta un'elevata solidità e un elevato modulo di elasticità, comunque inferiore al PA6GF30. Ha ottime caratteristiche elettriche, soprattutto nel campo delle basse tensioni e delle basse frequenze. Si può tranquillamente utilizzare tra i  $-10^{\circ}\text{C}$  e  $+60^{\circ}\text{C}$ , senza pregiudicare la sua struttura. Fino ai  $60^{\circ}\text{C}$  il PVC rigido è stabile alla maggior parte degli acidi diluiti o concentrati. Il PVC è inerte dal lato fisiologico, possiede buone caratteristiche dielettriche, è un buon isolante elettrico ed assorbe poca acqua. E' inoltre possibile saldarlo e incollarlo e presenta facilità alle lavorazioni alle macchine utensili. Il principale campo di utilizzo è nell'industria chimica, petrolchimica e edile grazie all'elevata resistenza agli acidi e alle intemperie che lo rendono idoneo per la costruzione di valvole, flange, ingranaggi, serramenti e coperture. Non è utilizzabile a contatto con gli alimenti, ma comunque la possibilità di impiegare il prodotto nel settore alimentare dipende esclusivamente dal tipo di stabilizzazione (stabilizzanti a base di calcio, di stagno o stabilizzanti di tipo liquido). Tra i tre materiali in esame, dal punto di vista meccanico il PVC possiede un comportamento duttile. Alcuni utilizzi del PVC sono riportati nella figura (3.2).





Figura 3.2. Alcuni componenti costruiti in PVC (tubi per l'industria chimica, valvole a sfera, particolari meccanici, coperture).

Le caratteristiche a catalogo del PVC sono riportate nella tabella (3.3), mentre le caratteristiche rilevate sperimentalmente sono riportate nella tabella (3.4).

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	3000
Modulo Tangenziale G [MPa]	1034.48
Coefficiente di Poisson $\nu$	0.45
Carico Rottura [MPa]	55
Densità [Kg/dm <sup>3</sup> ]	1.43
Durezza [Shore]	81
Resistività [ohm·cm]	10 <sup>14</sup>
Conduttività Termica [W/(m·°K)]	0.2
Spessore lastra [mm]	15

Tabella 3.3: Caratteristiche a catalogo del PVC.

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	5910.54
Modulo Tangenziale G [MPa]	2038.12
Carico Rottura [MPa]	45.00

Tabella 3.4: Caratteristiche rilevate del PVC.

### 3.4 Materiale tre: Polipropilene (PP).

Il PP possiede un'alta resistenza al calore, bassa densità, buone caratteristiche dielettriche alle alte frequenze, un'ottima resistenza agli agenti chimici, è saldabile e si utilizza

normalmente con temperature tra i  $+5^{\circ}\text{C}$  e  $+90^{\circ}\text{C}$ . La sua facilità di lavorazione alle macchine utensili e la sua saldabilità lo rendono un materiale plastico molto utilizzato in ambito chimico-industriale. Il PP si lavora, come i prodotti analoghi, per estrusione, per iniezione, per stampaggio a compressione e così via. Per le sue ottime proprietà, ha trovato vaste applicazioni per condutture, contenitori, parti di apparecchi elettrici, parti di apparecchiature resistenti sia agli agenti chimici sia al calore, parti di pompe, supporti per spazzole, anelli, flange e per la preparazione di fibre tessili. E' tra i tre materiali analizzati l'unico che può essere utilizzato a contatto con gli alimenti. Di contro possiede delle basse resistenze meccaniche rispetto ai tecnopolimeri. Come il PA6GF30, anche il PP presenta una rottura di tipo fragile con assenza di una chiara deformazione. Alcuni utilizzi del PP sono riportati in figura (3.3).



Figura 3.3: Alcuni oggetti costruiti in PP.

Le caratteristiche meccaniche a catalogo del PP sono riportate in tabella (3.5), mentre le caratteristiche rilevate sperimentalmente sono riportate in tabella (3.6).

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	1350
Modulo Tangenziale G [MPa]	475.35
Coefficiente di Poisson $\nu$	0.42
Carico Rottura [MPa]	34
Densità [Kg/dm <sup>3</sup> ]	0.92
Durezza [Shore]	D70
Resistività [ohm·cm]	10 <sup>14</sup>
Conduttività Termica [W/(m·°K)]	0.22
Spessore lastra [mm]	15

Tabella 3.5: Caratteristiche a catalogo del P.P.

Proprietà	Valore
Modulo Elastico E [MPa]	3520.58
Modulo Tangenziale G [MPa]	1239.64
Carico Rottura [MPa]	35.64

Tabella 3.6: Caratteristiche rilevate del PP.

### 3.5 Le prove sperimentali.

Le prove sperimentali si sono concentrate nel sottoporre a test di trazione una serie di provini costruiti con i tre materiali presentati nei paragrafi precedenti. I provini erano provvisti di due intagli laterali simmetrici a forma di V avente una profondità  $a$ , un angolo di intaglio  $2\alpha$  e un raggio di raccordo all'apice dell'intaglio  $\rho$ . La profondità  $a$  è stata fatta variare tra due valori, precisamente tra 5 mm e 10 mm; l'angolo di intaglio  $2\alpha$  è stato fatto variare tra 4 valori, rispettivamente tra 30°, 60°, 120° e 150° mentre il raggio di raccordo  $\rho$  è stato fatto variare tra 2 valori, 0 e 2 mm. Per ogni combinazione di queste grandezze sono stato costruiti 3 provini per mediare gli inevitabili errori sperimentali che nascono quando si compiono tali sperimentazioni. Infine sono stati costruiti 3 provini lisci, ovvero senza intagli ma con un ampio raggio di raccordo, per ogni tipo di materiale in modo da avere un riferimento per confrontare le elaborazioni dei dati ottenuti. Il numero totale di provini costruiti, considerando i tre materiali, è stato di 153 elementi. In figura (3.4) vengono riportate le immagini di alcuni provini costruiti, mentre nella figura (3.5) viene riportato uno schema rappresentativo del provino intagliato e del provino liscio.

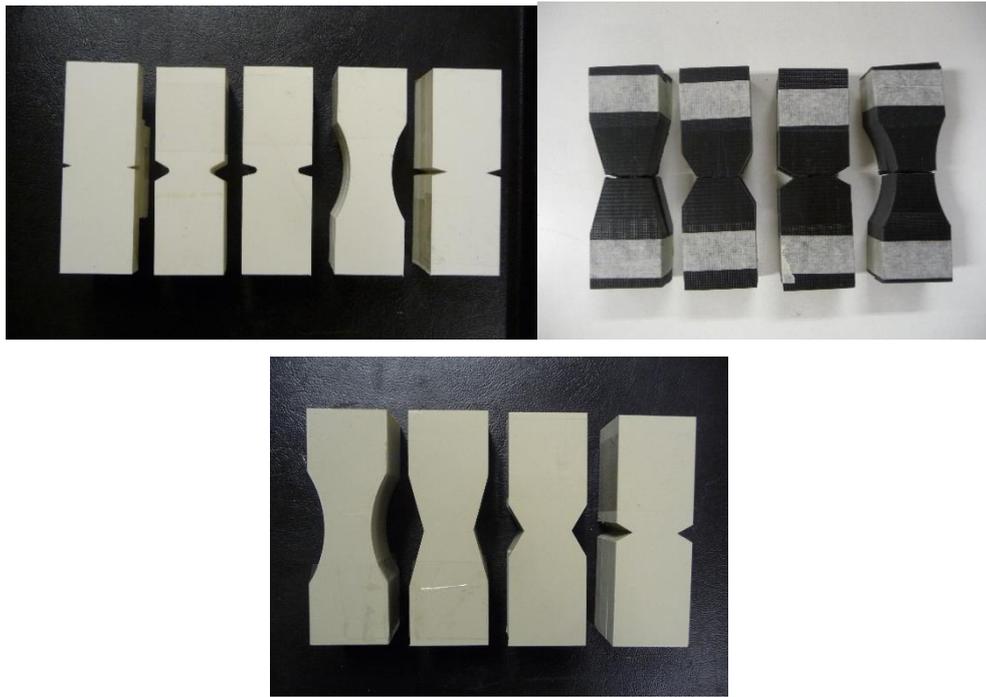


Figura 3.4: Partendo da sinistra, provini in PVC, PA6GF30, PP.

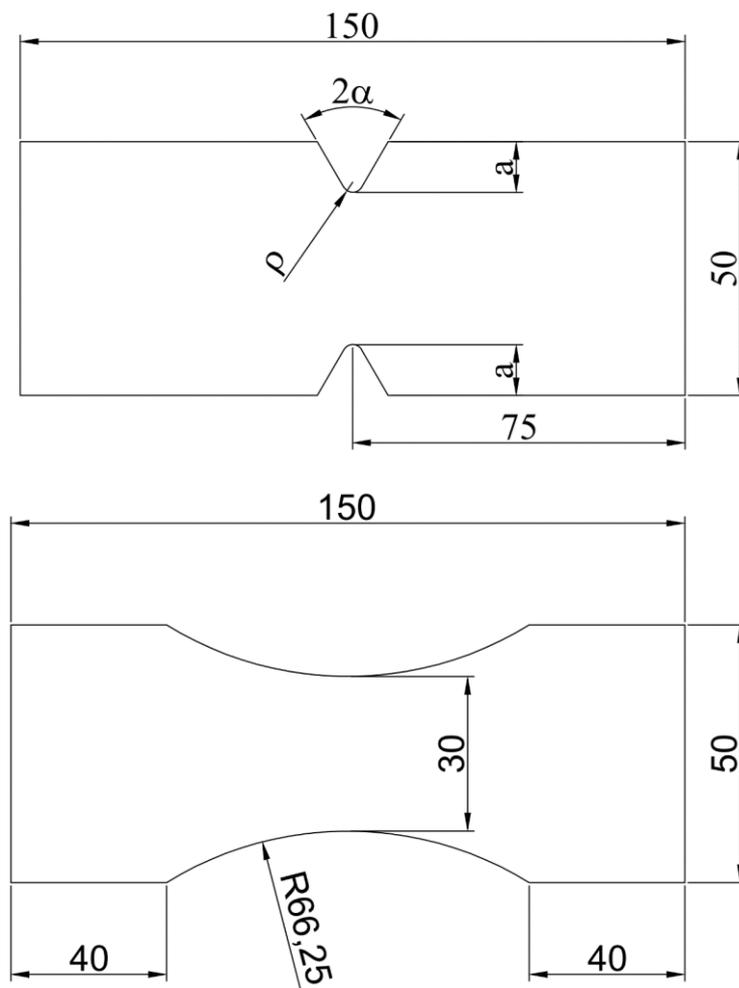


Figura 3.5: Disegni dei provini. In alto un provino generico, in basso il provino liscio.

### 3.5.1 Costruzione dei provini.

La costruzione dei provini è stata eseguita in due macchine utensili, la Water Jet e un centro di lavoro orizzontale. Questa scelta è stata fatta per limitare al massimo i costi di produzione, visto che il costo di vari utensili frese sarebbe stato improponibile.

Si è partito da delle lastre dei tre materiali e si sono posizionati sulla Water Jet. I provini aventi l'intagli con raggio di raccordo  $\rho$  pari a 2 mm sono stati tagliati direttamente in questa prima macchina, indipendentemente dall'angolo di apertura  $2\alpha$  e dalla profondità  $a$ . I restanti provini aventi raggio  $\rho$  uguale a 0 mm, sono stati solamente tagliati perimetralmente, mentre gli intagli sono stati eseguiti con due metodologie diverse. I provini con angolo di intaglio pari a  $30^\circ$  e  $60^\circ$  sono stati eseguiti tramite frese profilate, mentre per i restanti angoli  $120^\circ$  e  $150^\circ$  si è usata una fresa toroidale a  $90^\circ$  e sfruttata la tavola rotante del centro di lavoro. Nelle figura successiva sono riportate le due frese profilate usate per la costruzione e il taglio con la Water Jet.

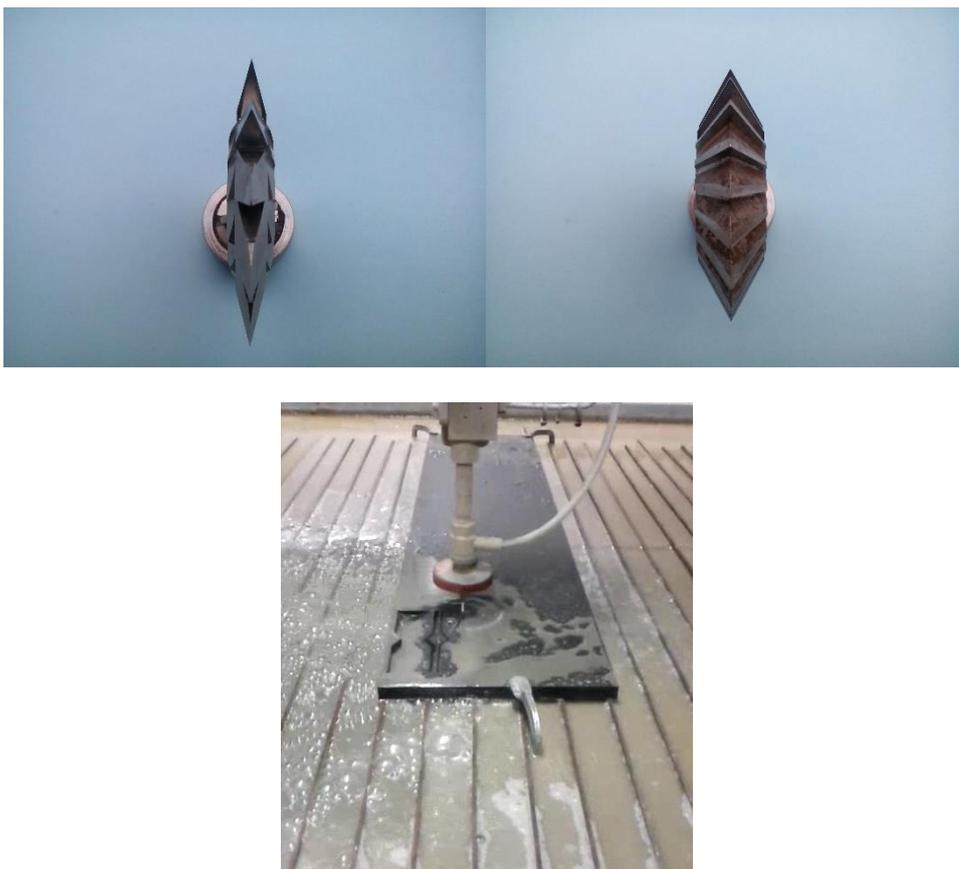


Figura 3.6: Le frese usate per creare gli intagli ( $30^\circ$ ,  $60^\circ$   $\rho = 0$ ) e un dettaglio della Water Jet.

### 3.6 Caratteristiche tensione - spostamento.

Ogni provino è stato sottoposto a un test di trazione fino al raggiungere la completa rottura. Di seguito vengono riportate le curve tensione-spostamento ottenute per i tre materiali e per ogni combinazione delle tre grandezze caratteristiche (raggio di raccordo  $\rho$ , profondità  $a$ , angolo dell'intaglio  $2\alpha$ ).

#### 3.6.1 Materiale 1: raggio di raccordo $\rho = 0$ mm, profondità $a = 5$ mm.

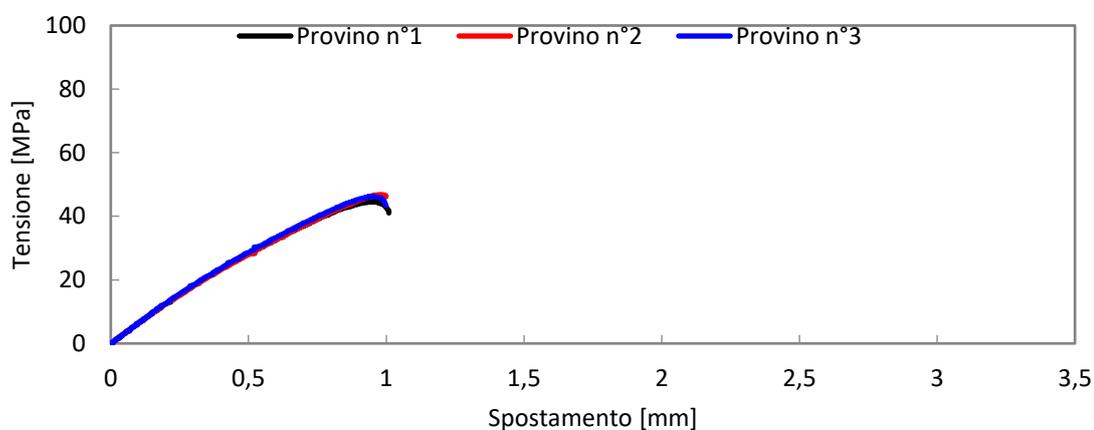


Figura 3.7: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

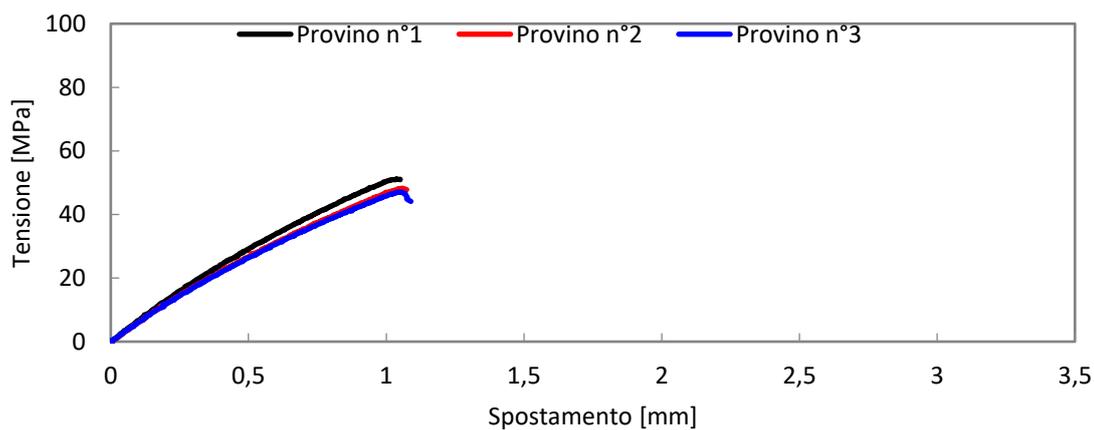


Figura 3.8: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

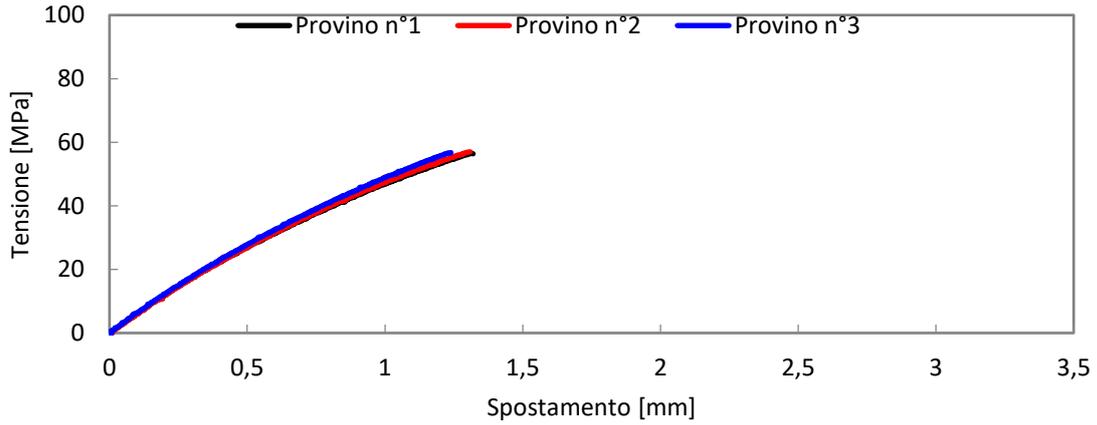


Figura 3.9: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

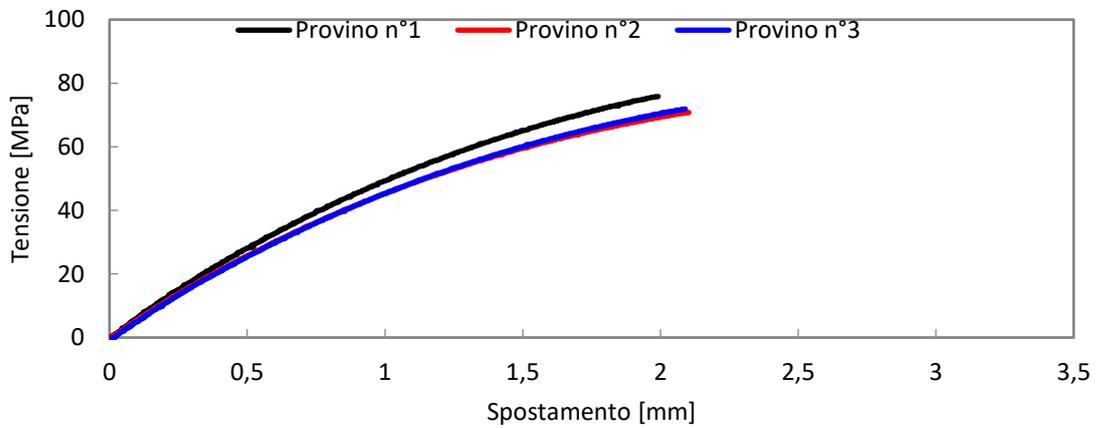


Figura 3.10: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.2 Materiale 1: raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm, profondità  $a = 10$  mm.

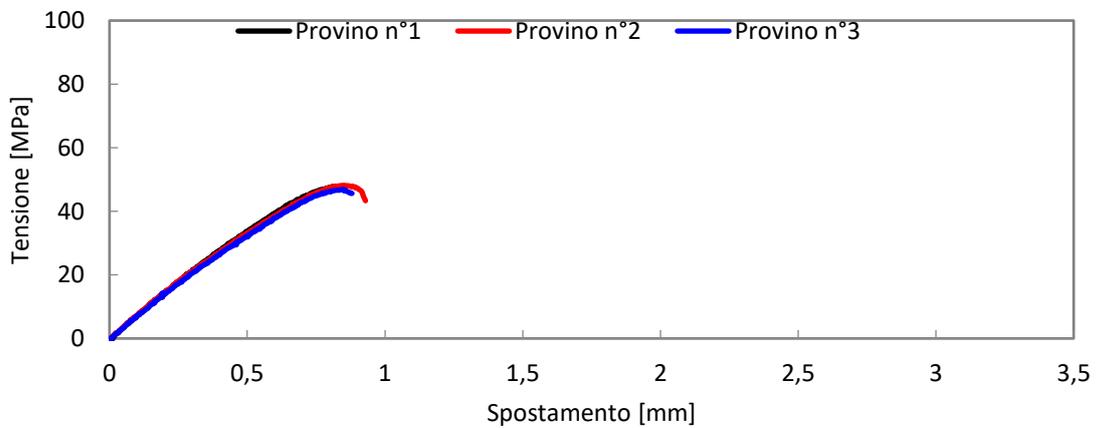


Figura 3.11: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

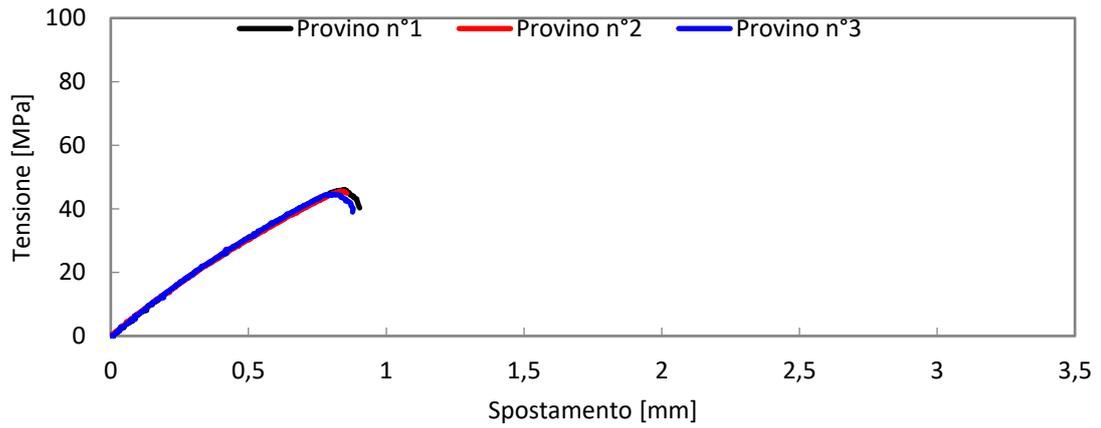


Figura 3.12: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

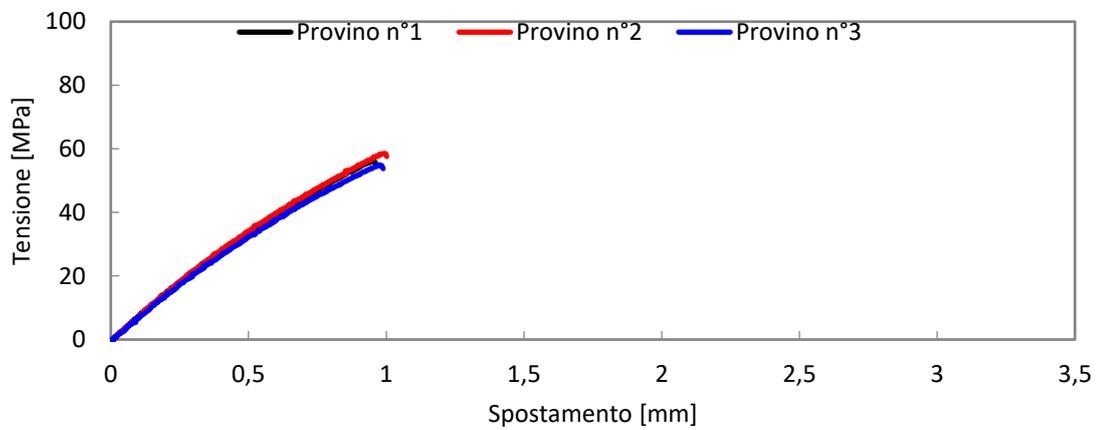


Figura 3.13: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

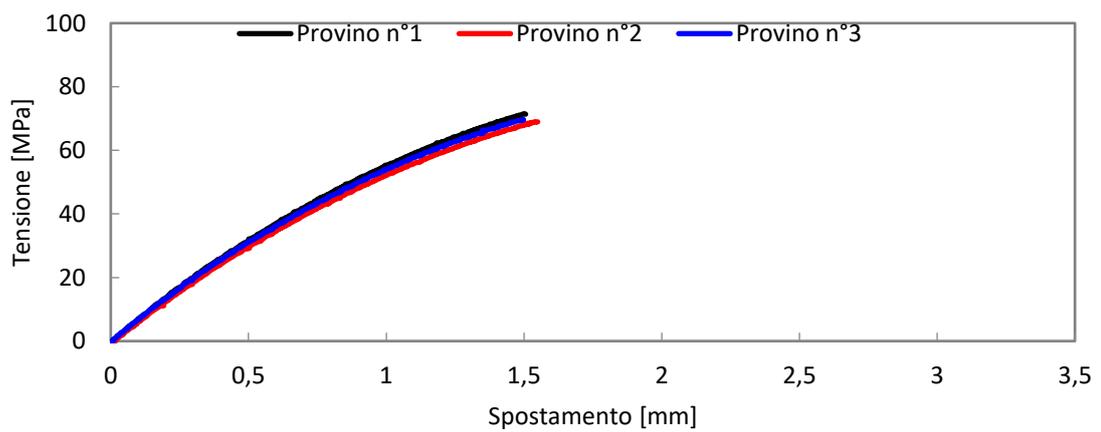


Figura 3.14: Materiale 1,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.3 Materiale 1: raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm, profondità  $a = 5$  mm.

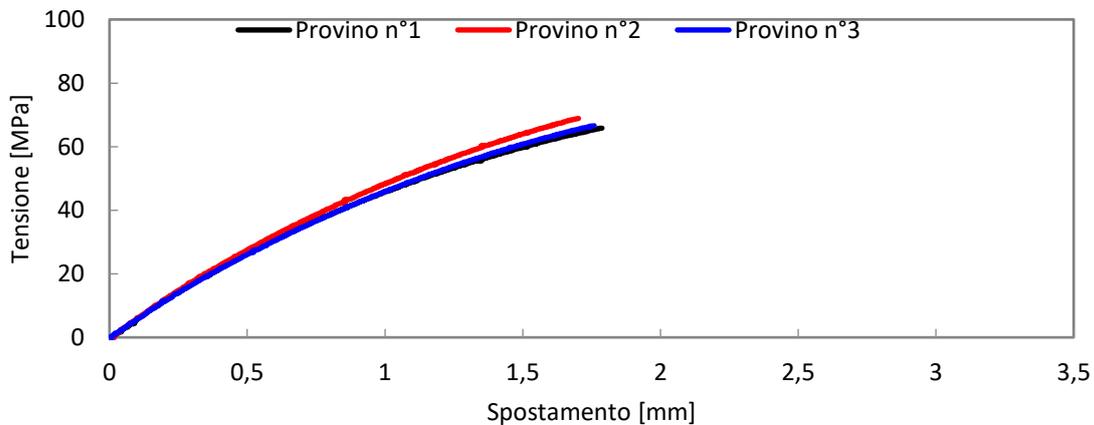


Figura 3.15: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

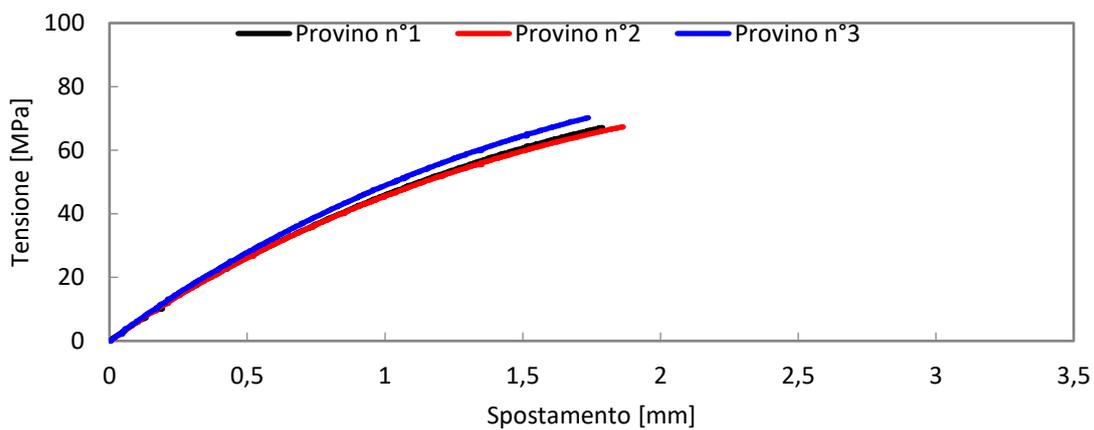


Figura 3.16: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

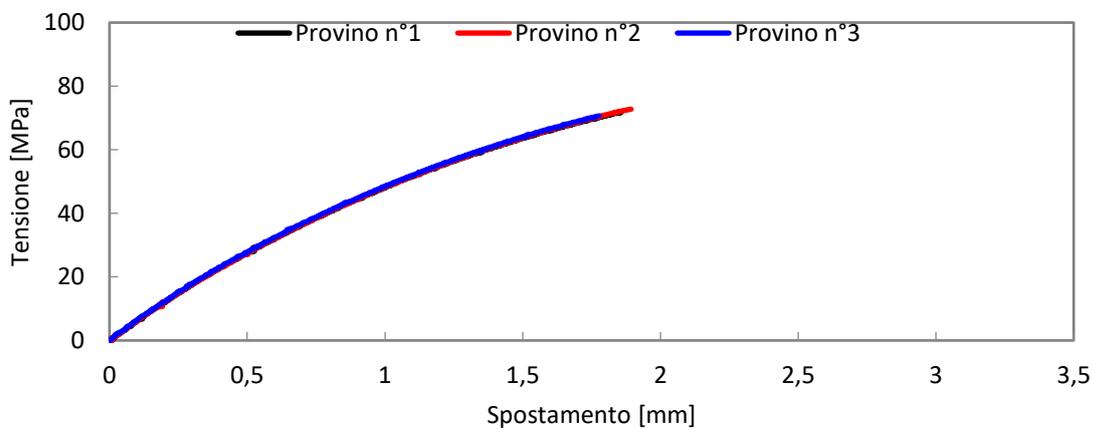


Figura 3.17: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

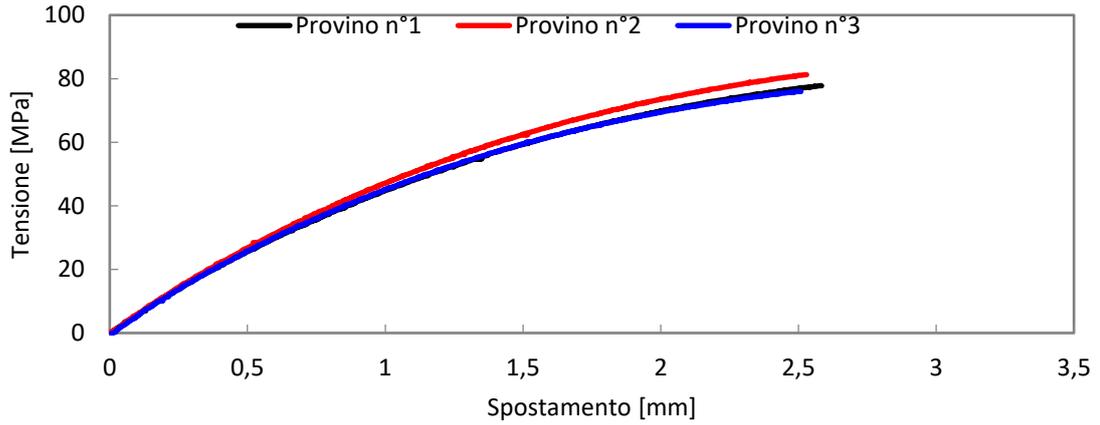


Figura 3.18: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.4 Materiale 1: raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm, profondità  $a = 10$  mm.

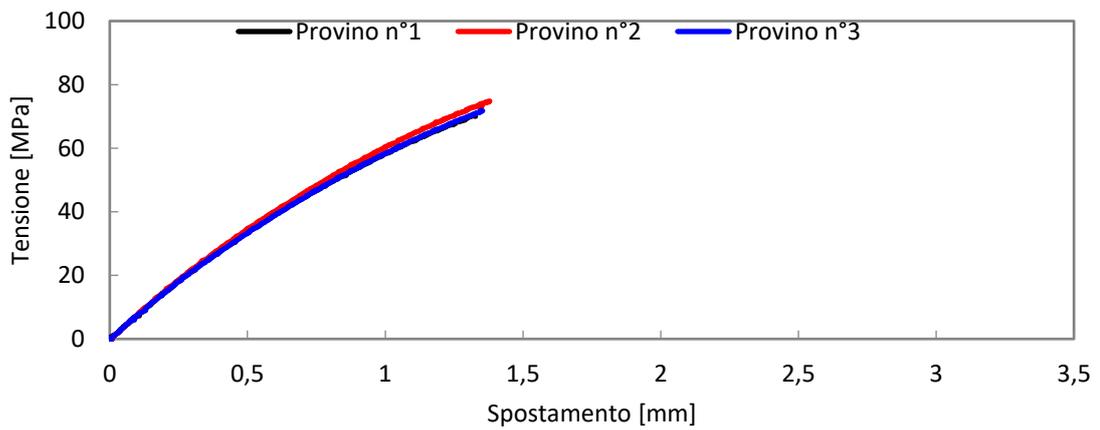


Figura 3.19: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

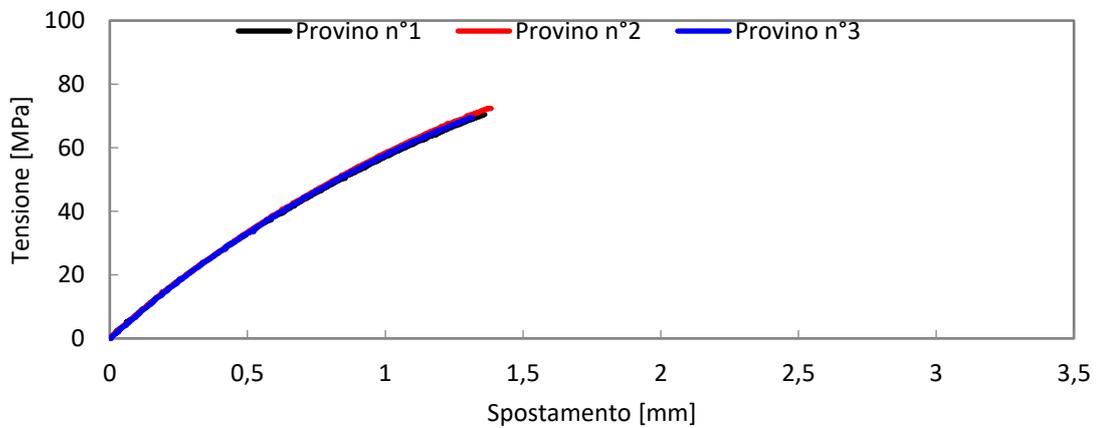


Figura 3.20: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

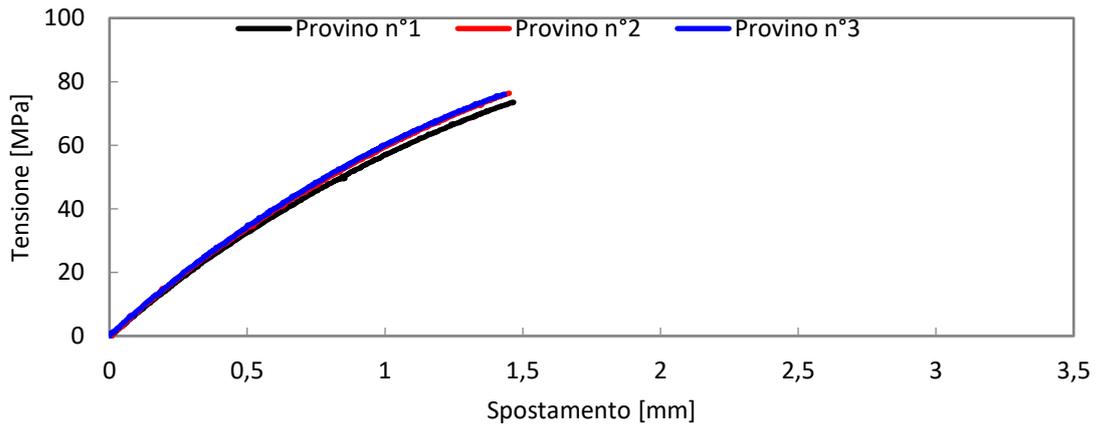


Figura 3.21: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

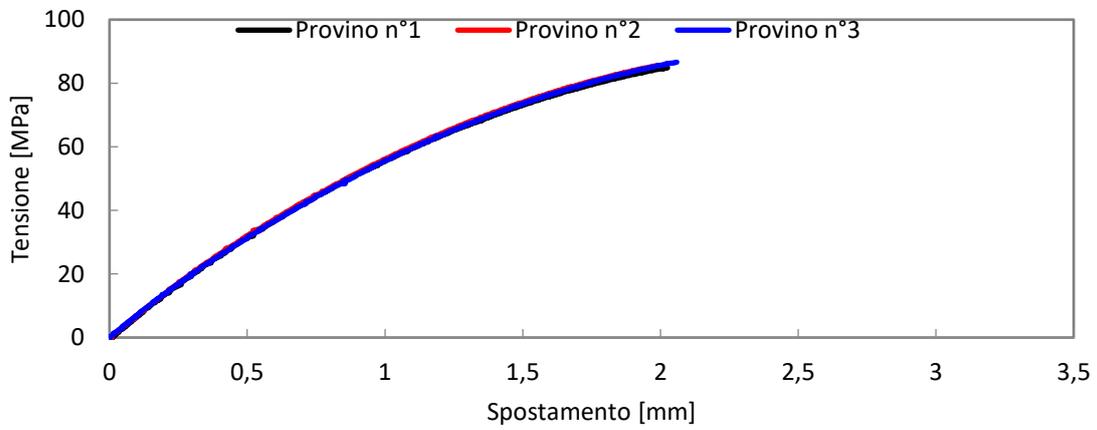


Figura 3.22: Materiale 1,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

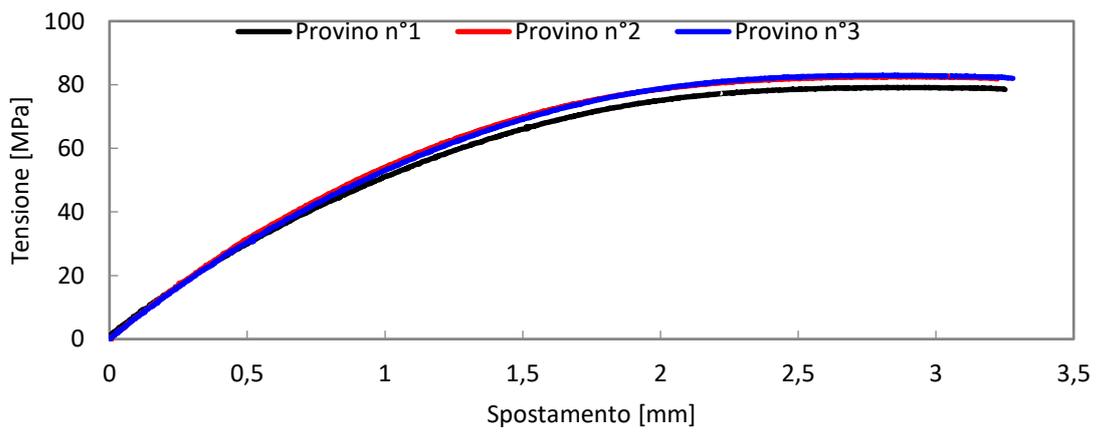


Figura 3.23: Materiale 1, provino liscio.

3.6.5 Materiale 2: raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm, profondità  $a = 5$  mm.

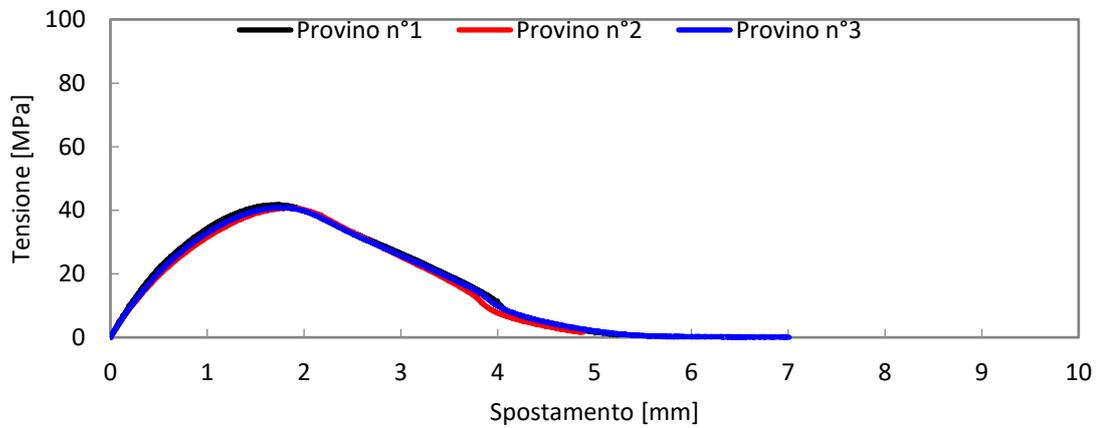


Figura 3.24: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

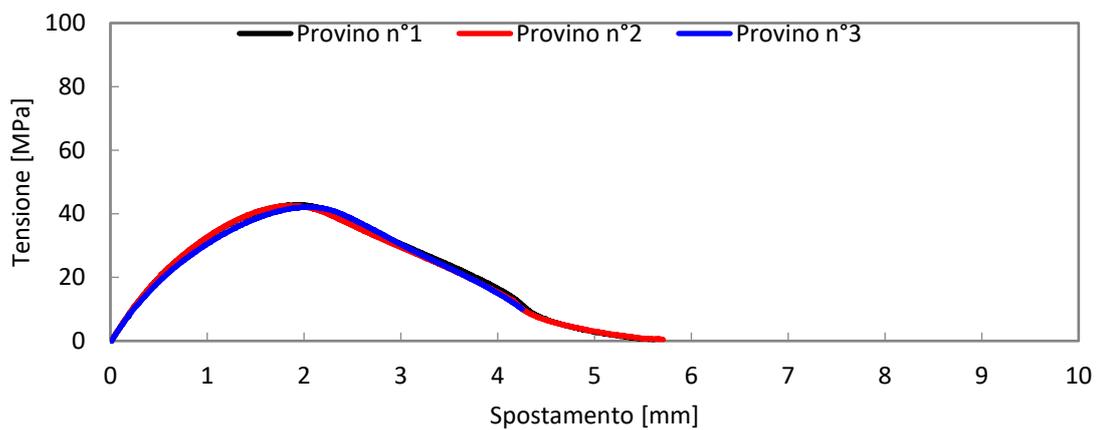


Figura 3.25: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

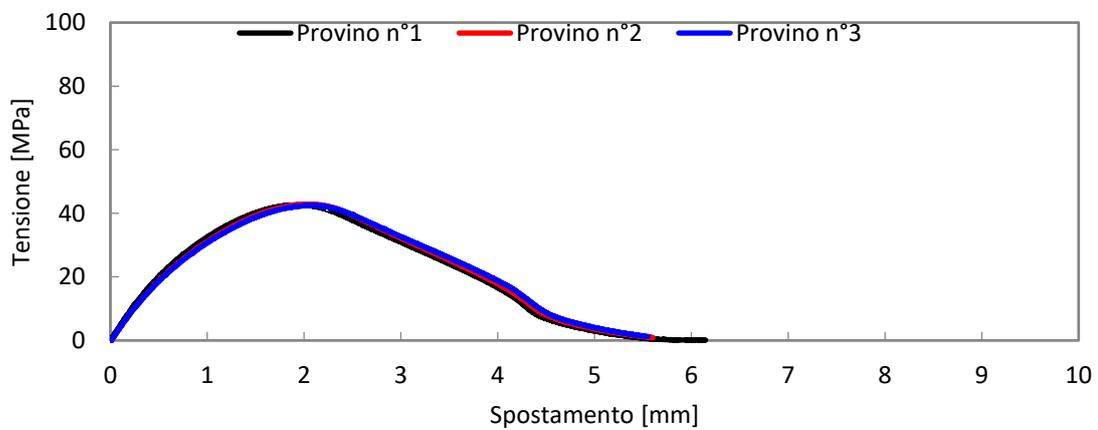


Figura 3.26: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

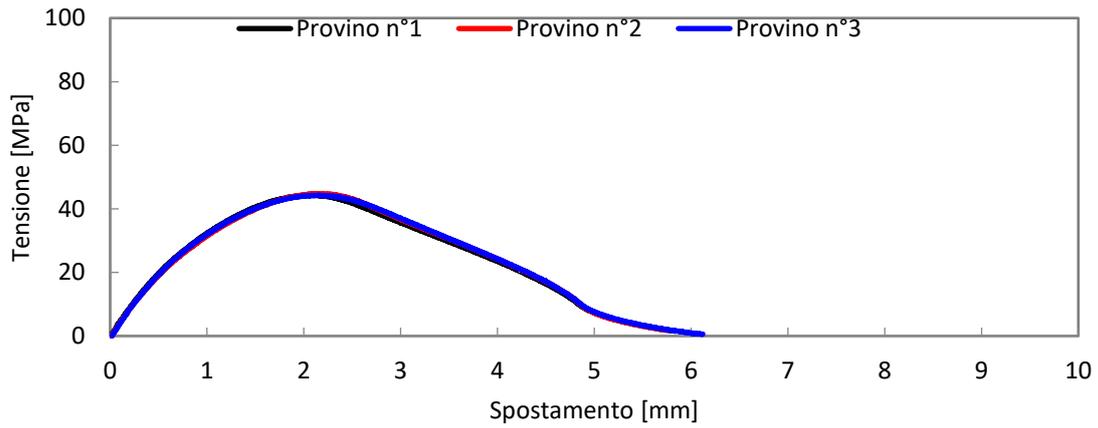


Figura 3.27: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.6 Materiale 2: raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm, profondità  $a = 10$  mm.

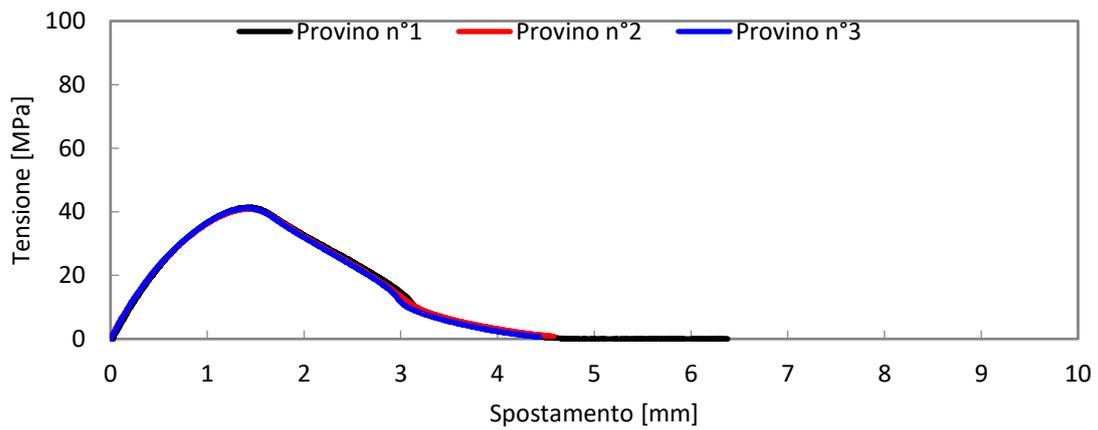


Figura 3.28: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

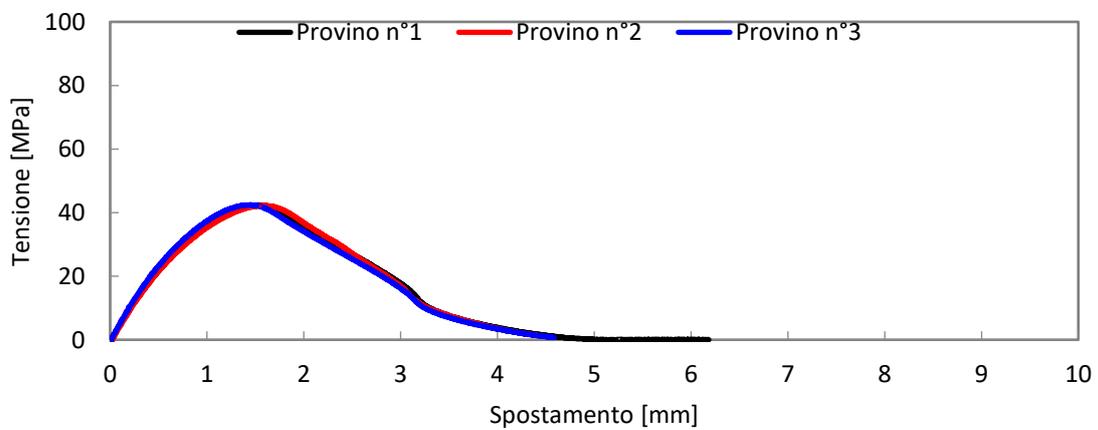


Figura 3.29: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

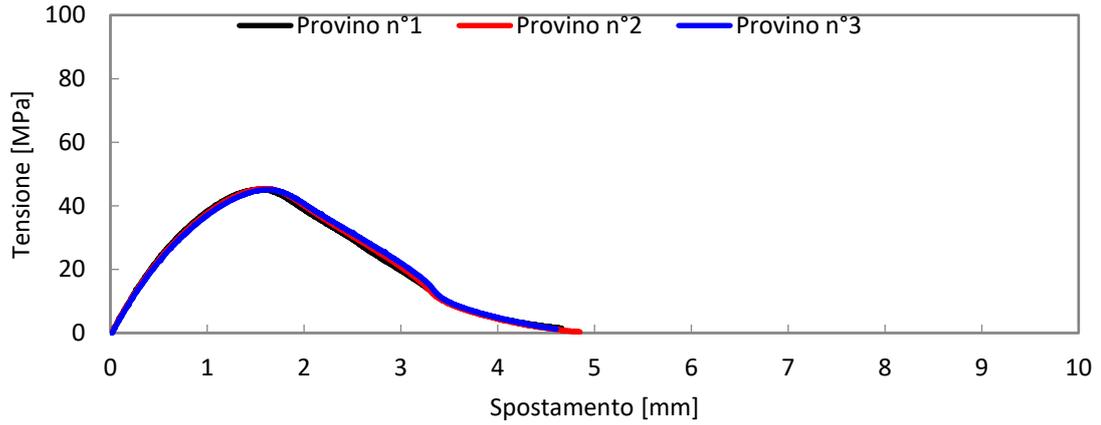


Figura 3.30: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

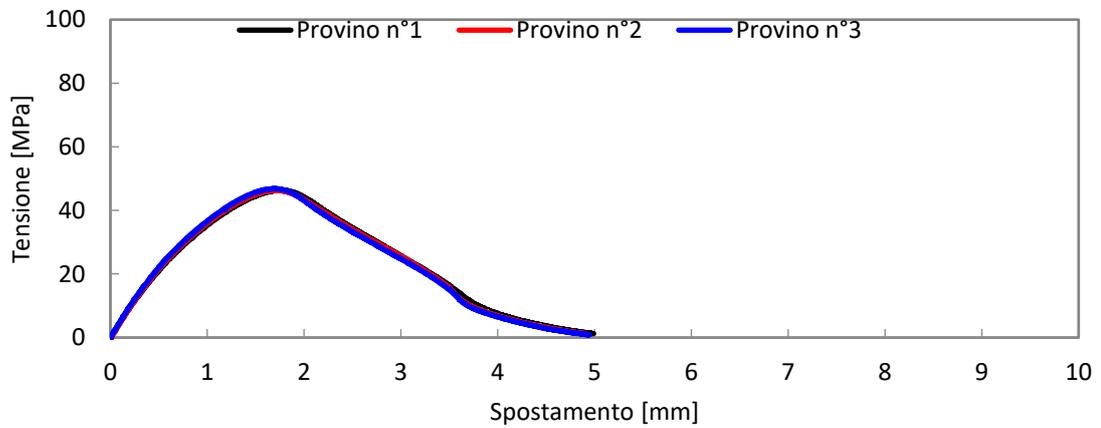


Figura 3.31: Materiale 2,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.7 Materiale 2: raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm, profondità  $a = 5$  mm.

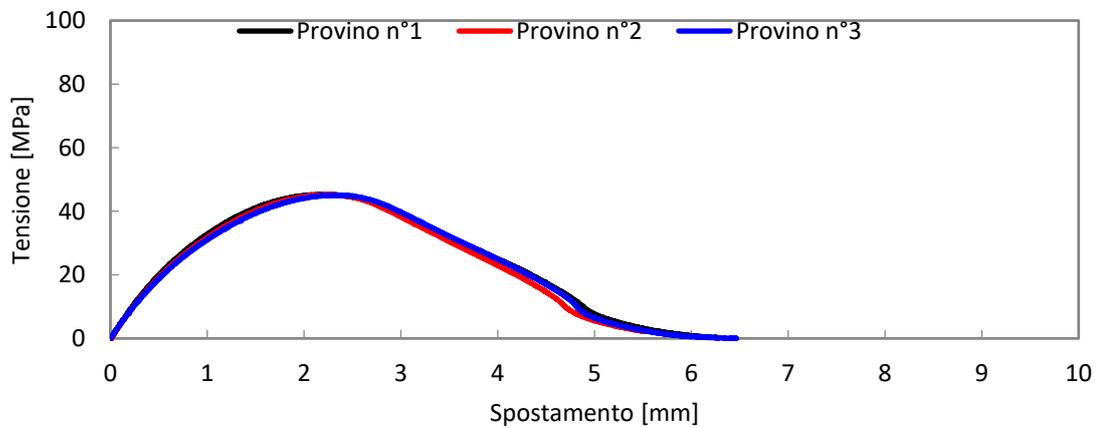


Figura 3.32: Materiale 2,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

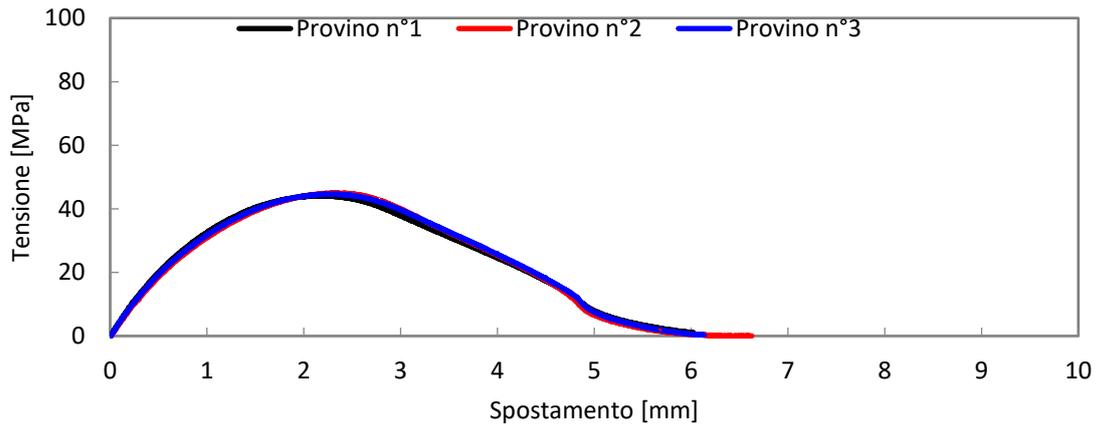


Figura 3.33: Materiale 2,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

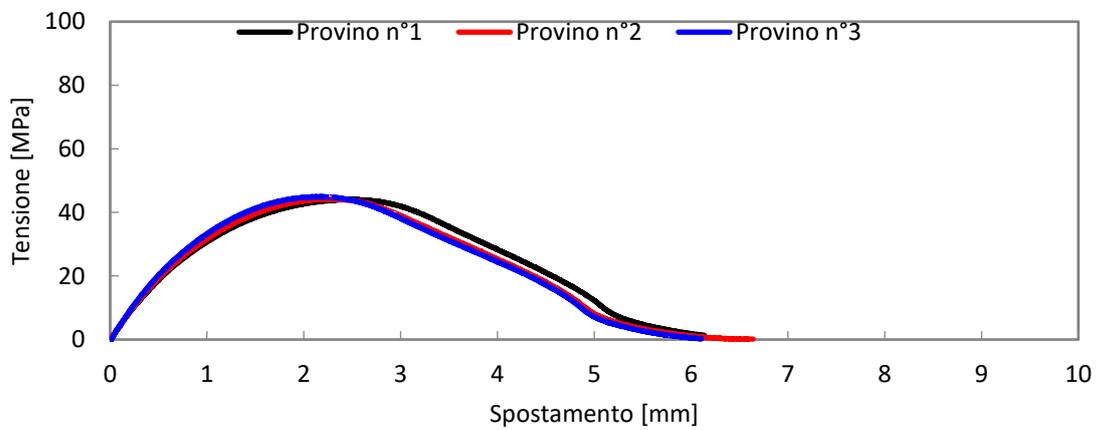


Figura 3.34: Materiale 2,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

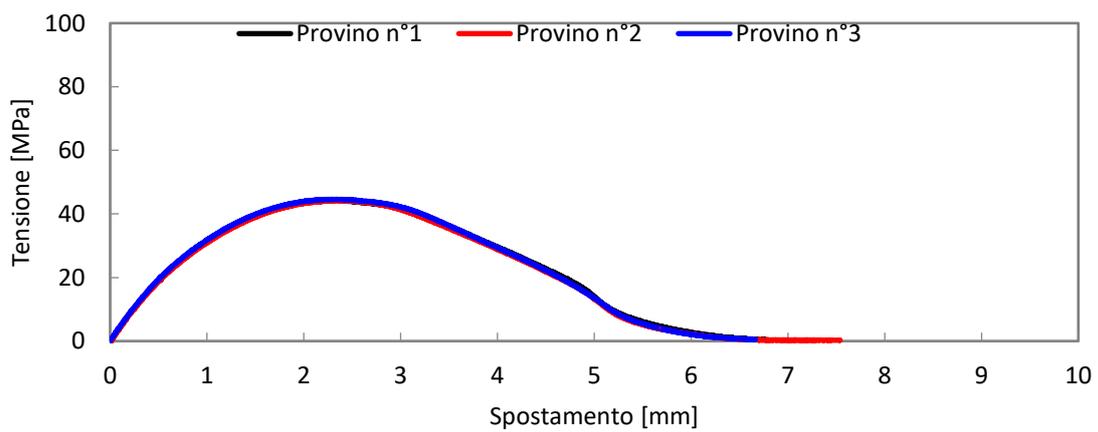


Figura 3.35: Materiale 2,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.8 Materiale 2: raggio di raccordo  $\rho = 2 \text{ mm}$ , profondità  $a = 10 \text{ mm}$ .

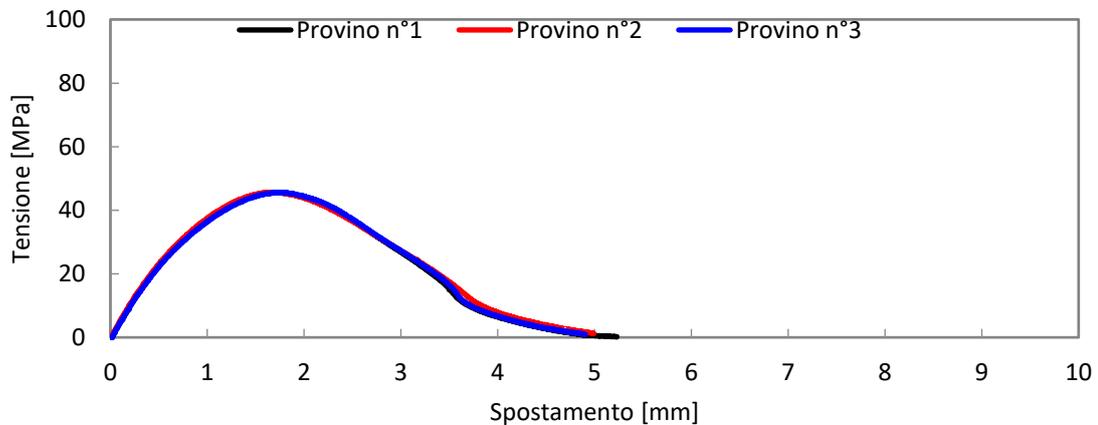


Figura 3.36: Materiale 2,  $\rho = 2 \text{ mm}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 30^\circ$ .

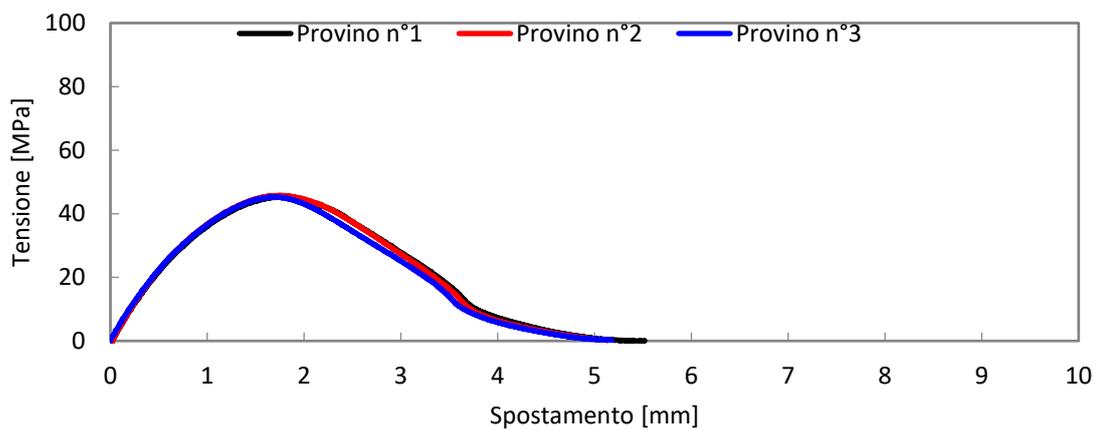


Figura 3.37: Materiale 2,  $\rho = 2 \text{ mm}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 60^\circ$ .

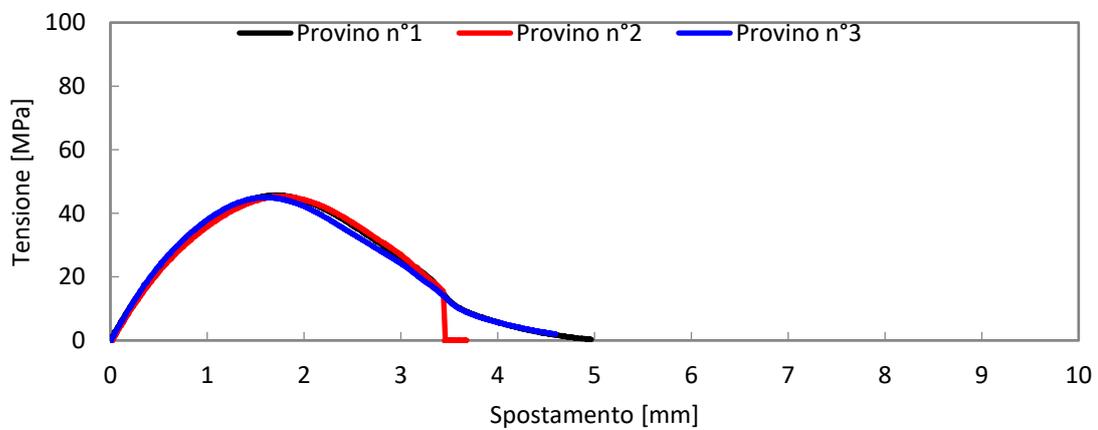


Figura 3.38: Materiale 2,  $\rho = 2 \text{ mm}$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 120^\circ$ .

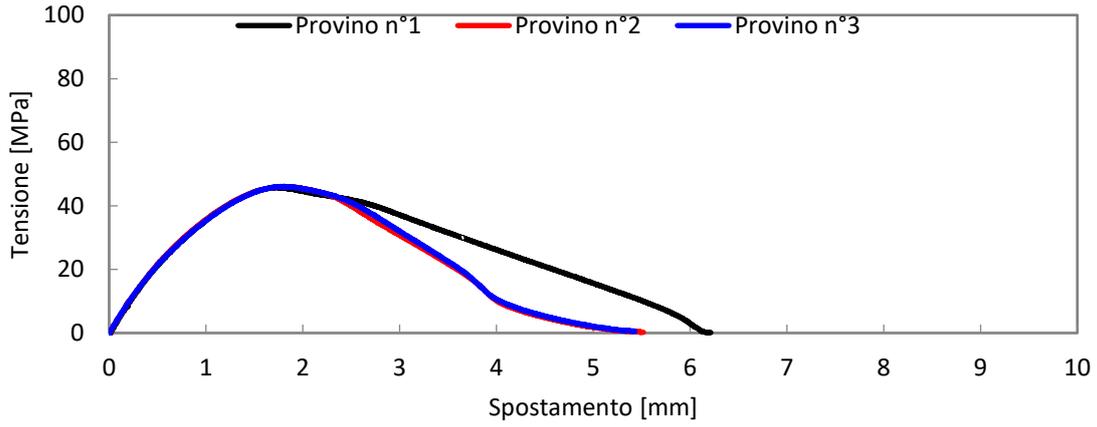


Figura 3.39: Materiale 2,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

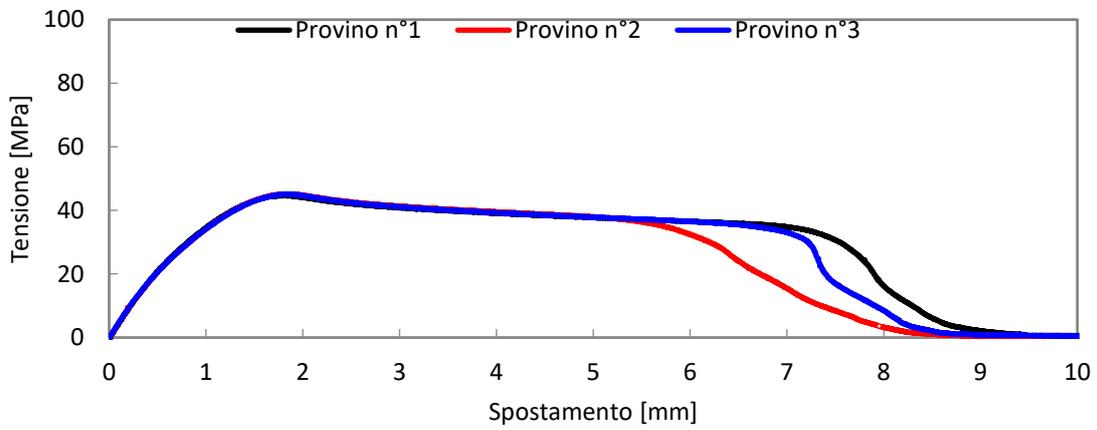


Figura 3.40: Materiale 2, provino liscio.

3.6.9 Materiale 3: raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm, profondità  $a = 5$  mm.

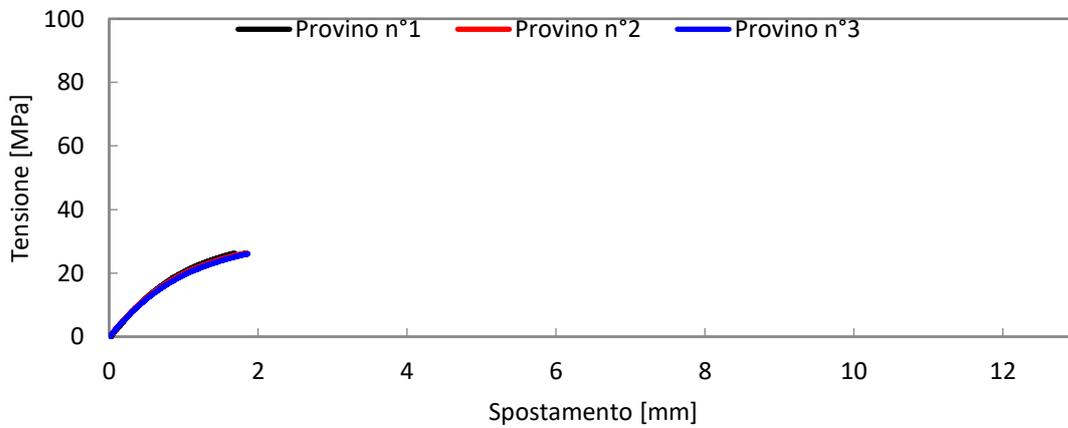


Figura 3.41: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

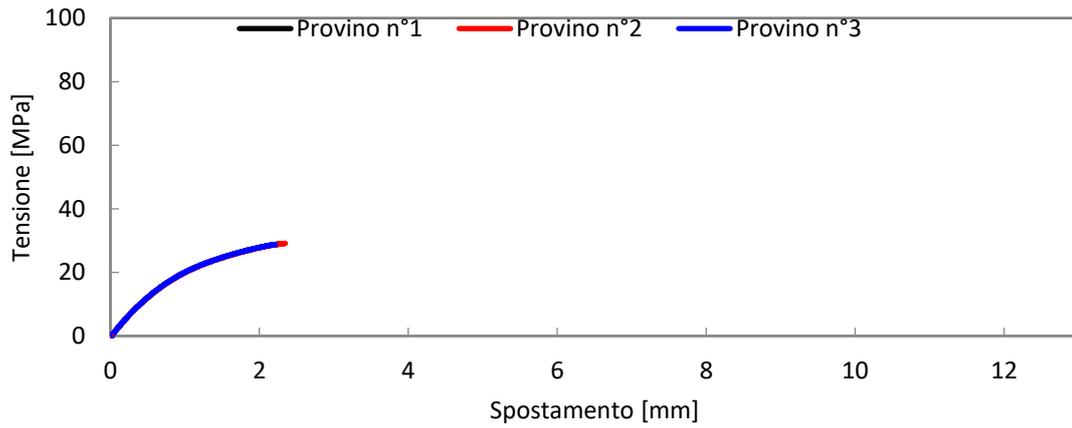


Figura 3.42: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

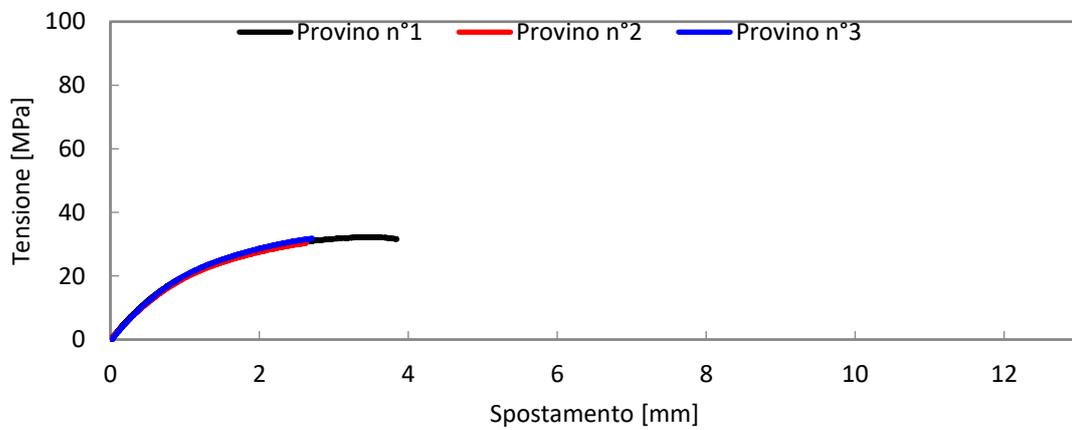


Figura 3.43: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

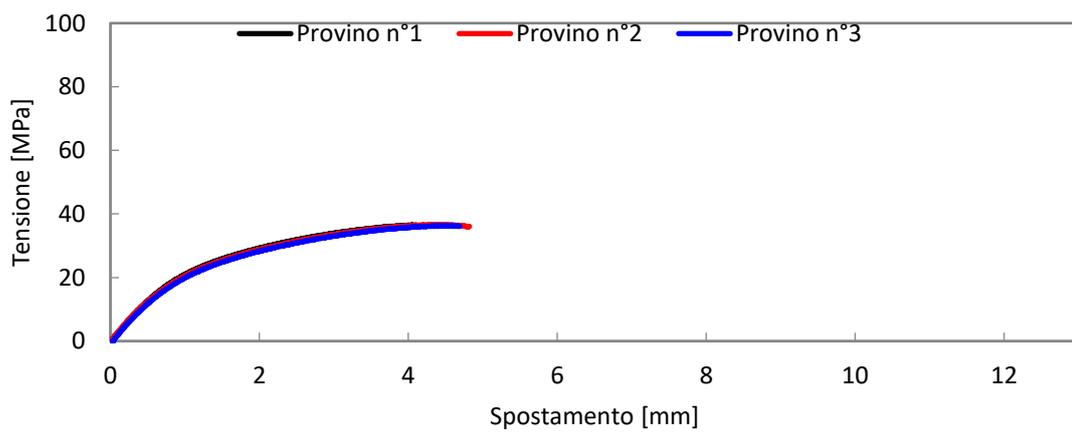


Figura 3.44: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.10 Materiale 3: raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm, profondità  $a = 10$  mm.

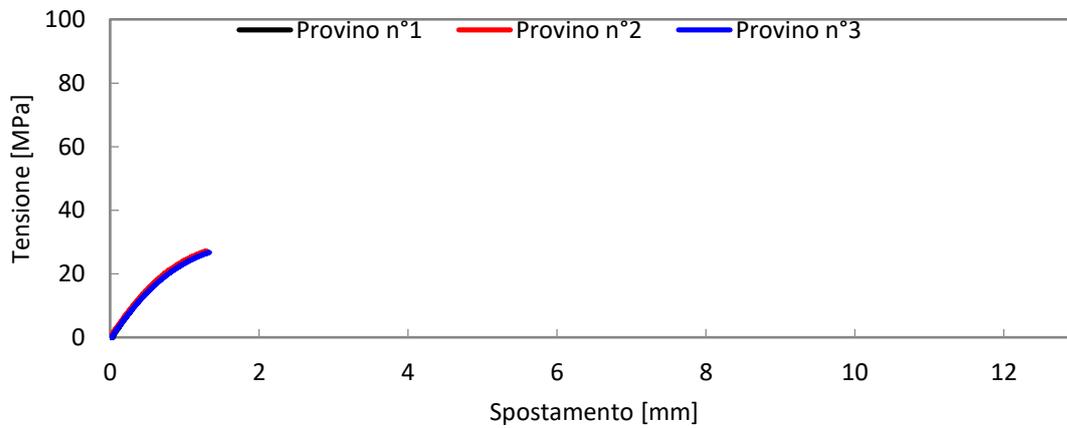


Figura 3.45: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

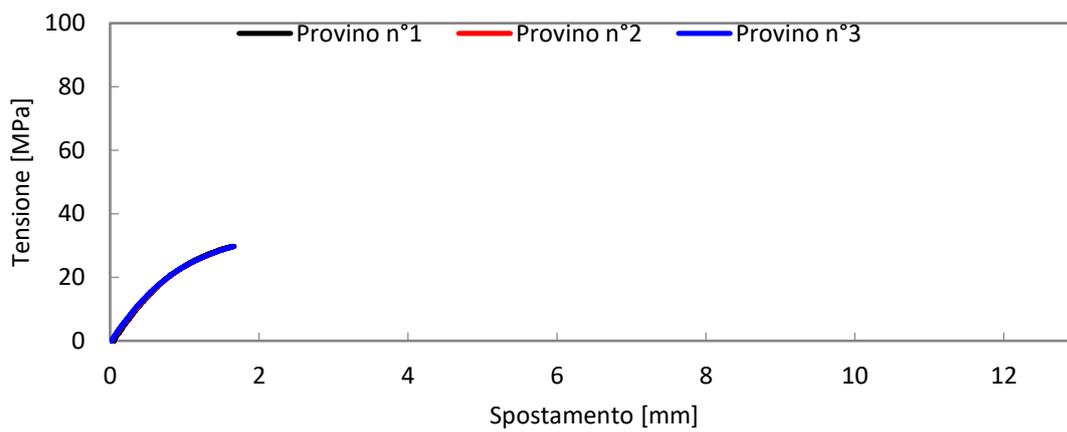


Figura 3.46: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

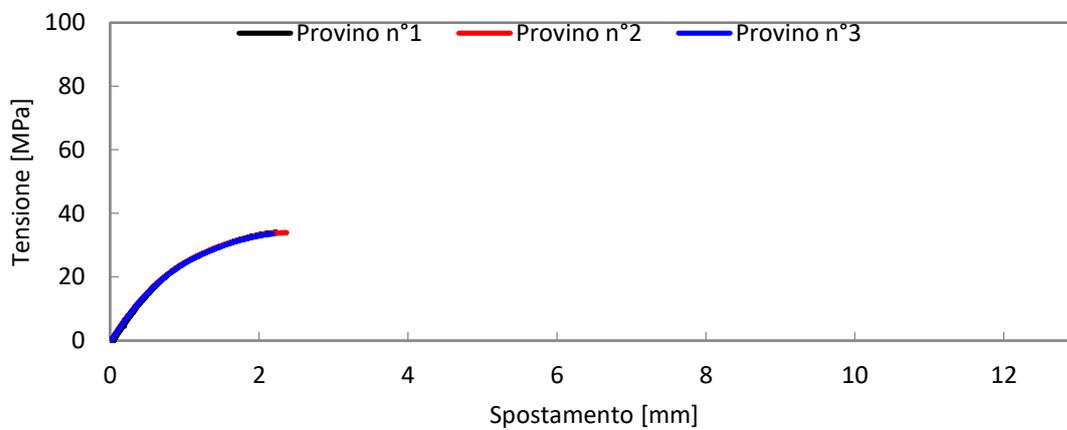


Figura 3.47: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

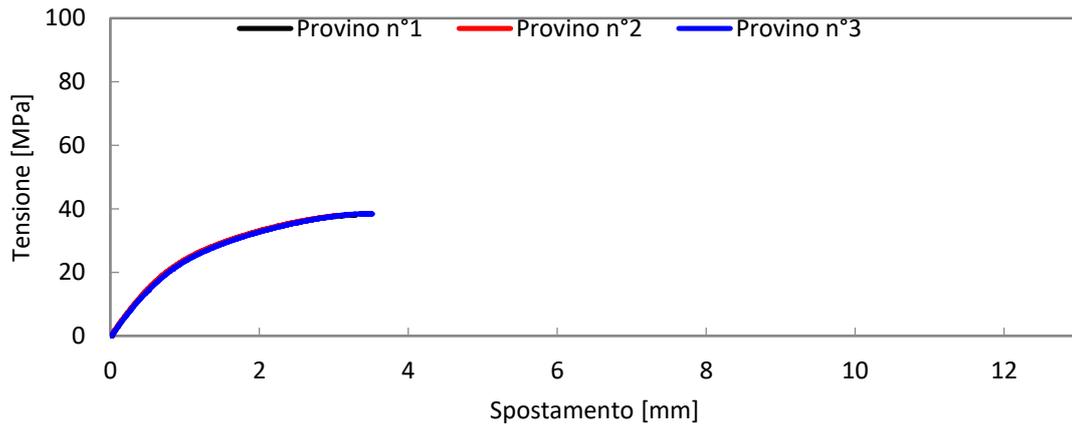


Figura 3.48: Materiale 3,  $\rho = 0$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.11 Materiale 3: raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm, profondità  $a = 5$  mm.

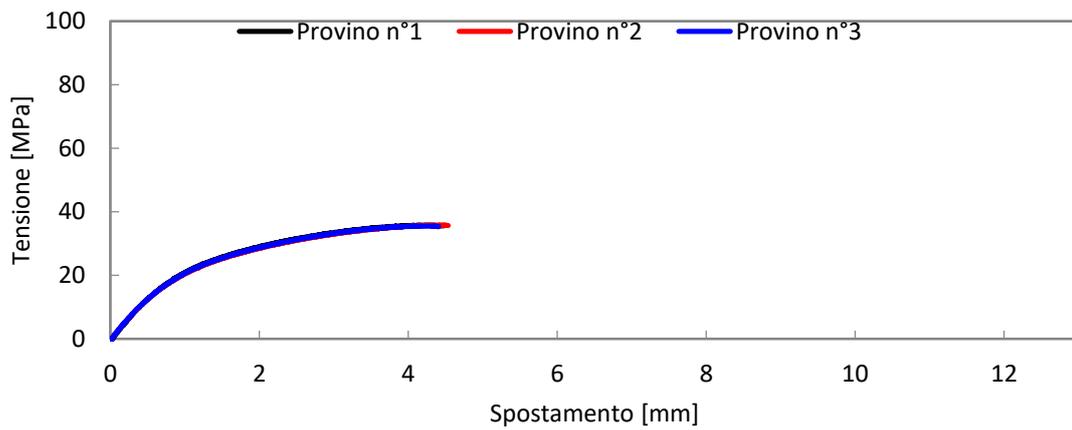


Figura 3.49: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

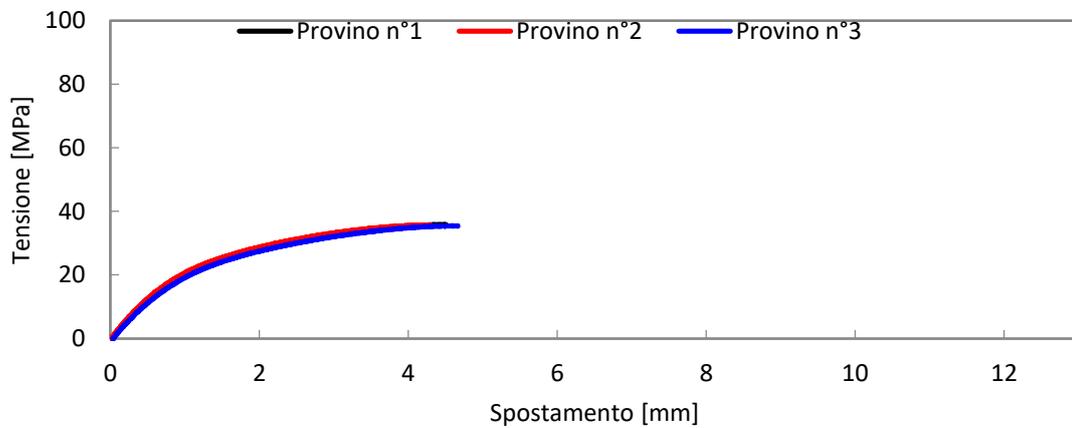


Figura 3.50: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

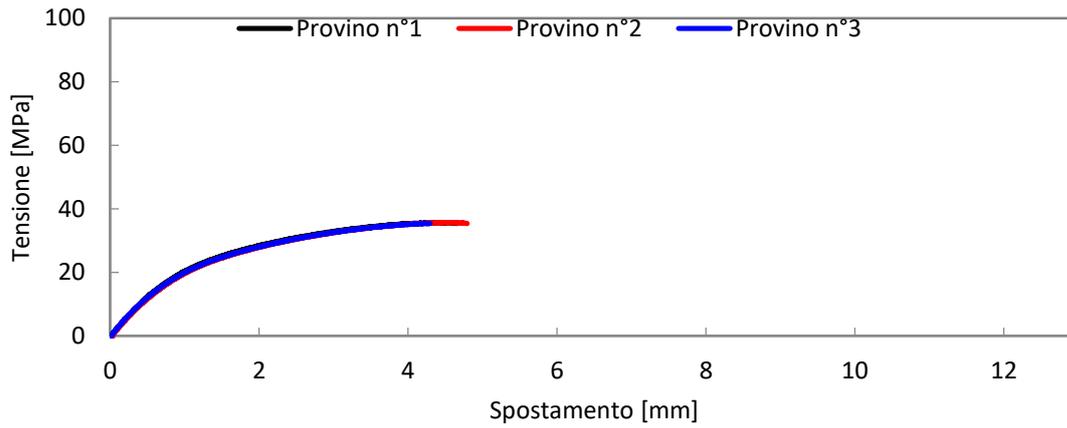


Figura 3.51: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

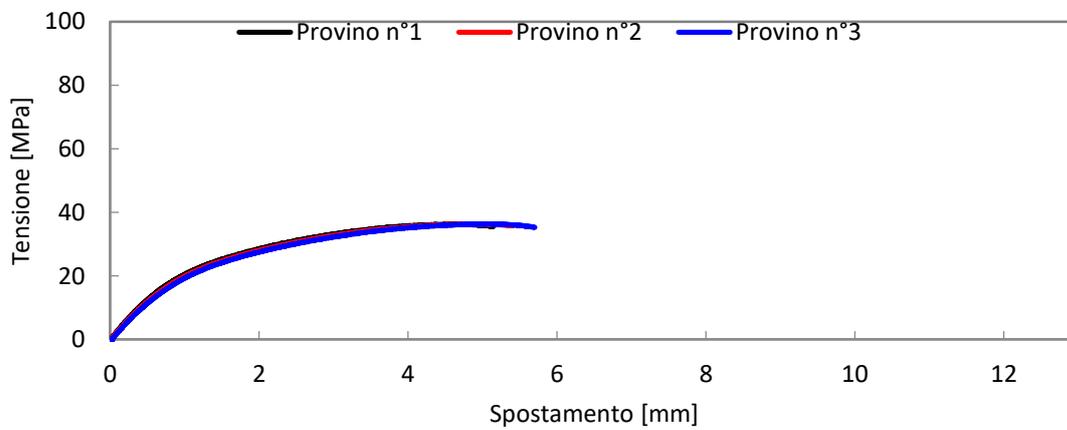


Figura 3.52: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

3.6.12 Materiale 3: raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm, profondità  $a = 10$  mm.

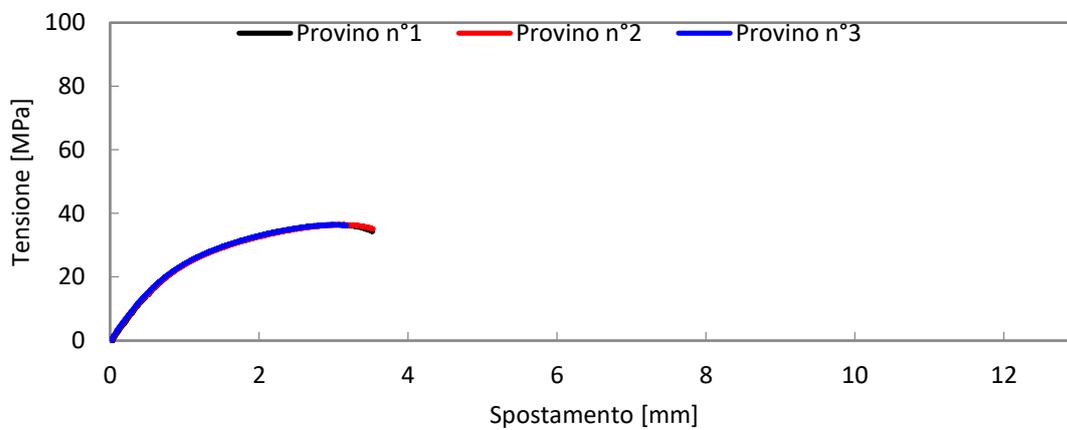


Figura 3.53: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 30^\circ$ .

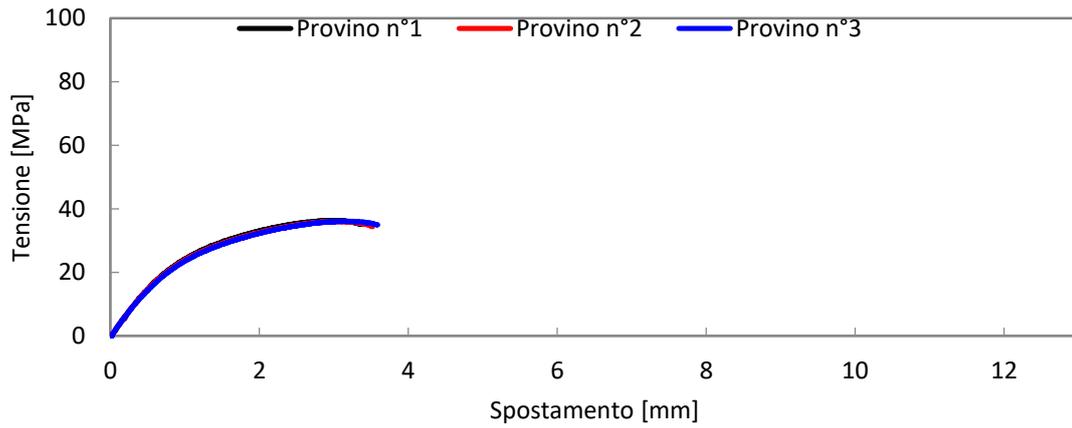


Figura 3.54: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 60^\circ$ .

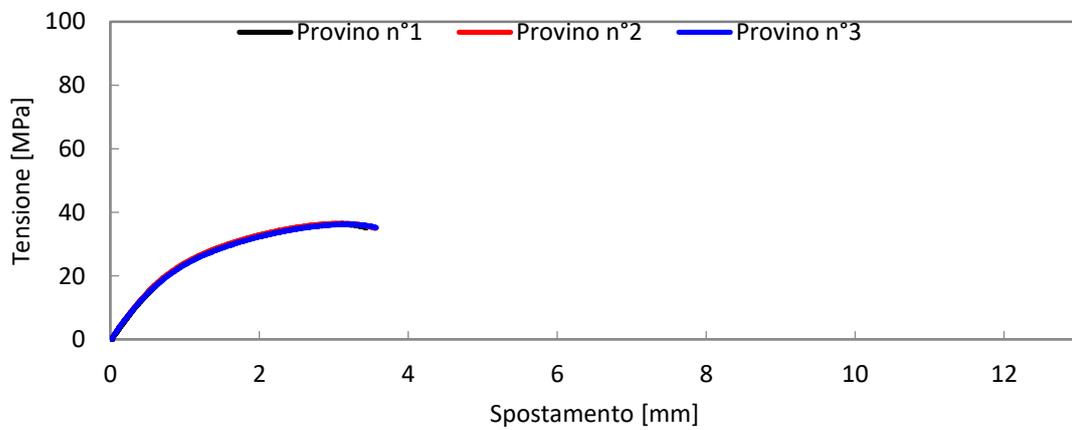


Figura 3.55: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 120^\circ$ .

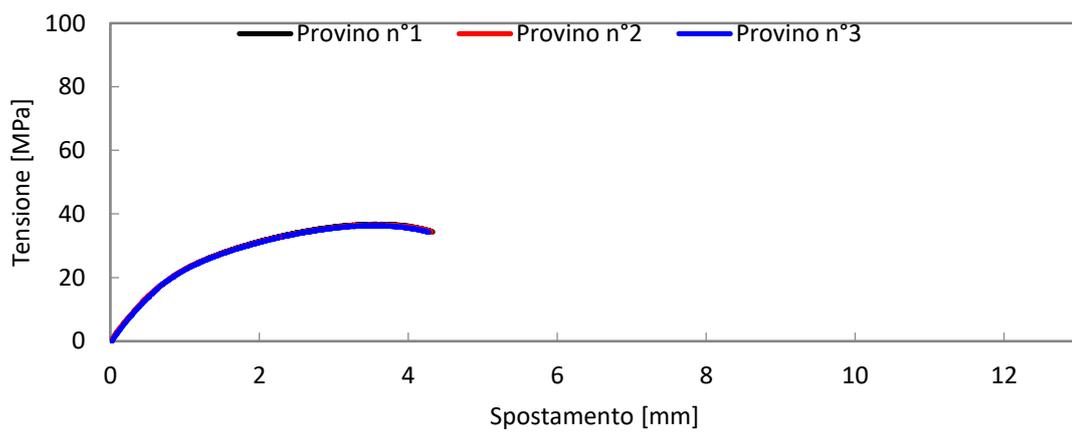


Figura 3.56: Materiale 3,  $\rho = 2$  mm,  $a = 10$  mm,  $2\alpha = 150^\circ$ .

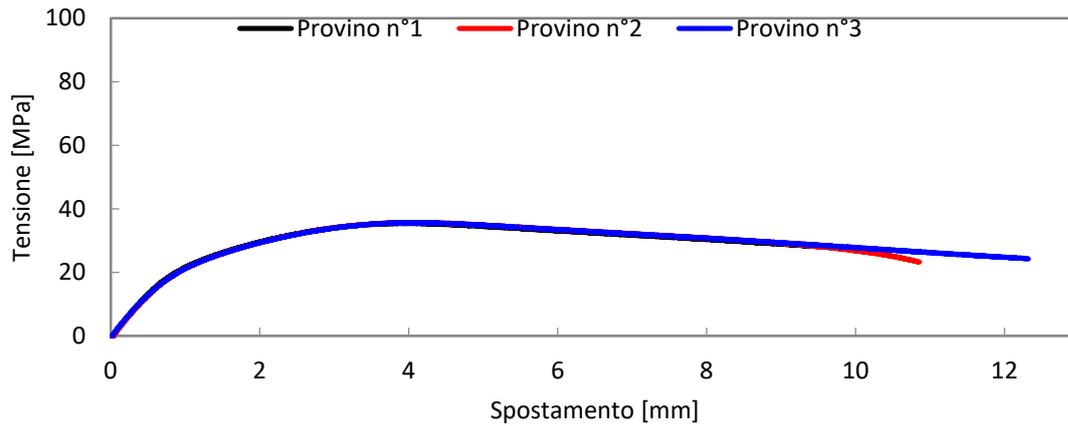


Figura 3.57: Materiale 3, provino liscio.

Nelle successive tre tabelle, viene riportato i valori di carico di rottura di tutte le prove di trazione eseguite.

Larghez. [mm]	Altezza [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [gradi]	Forza [N]			Tensione [MPa]		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	30286.50	39775.87	39291.05	44.54	46.80	46.22
				60	43374.34	41004.10	40012.90	51.03	48.24	47.07
				120	48050.20	48448.83	48222.58	56.53	57.00	56.73
				150	64458.78	60181.56	61129.66	75.83	70.80	71.92
			10	30	24356.57	40924.68	39732.38	47.76	48.15	46.74
				60	39028.49	38683.72	37836.18	45.92	45.51	44.51
				120	47676.30	49744.88	46685.11	56.09	58.52	54.92
				150	60762.94	58593.81	59211.51	71.49	68.93	69.66
		2	5	30	44757.95	58543.94	56604.64	65.82	68.88	66.59
				60	57035.60	57240.29	59664.41	67.10	67.34	70.19
				120	60968.05	61829.96	60052.28	71.73	72.74	70.65
				150	66150.28	69059.22	64566.52	77.82	81.25	75.96
10	30		35811.34	63592.88	61122.08	70.22	74.82	71.91		
	60		59901.04	61538.67	59125.32	70.47	72.40	69.56		
	120		62501.13	64914.47	64641.53	73.53	76.37	76.05		
	150		72097.05	72829.67	73634.12	84.82	85.68	86.63		

Tabella 3.7. Forza e tensione rilevate nelle prove. Spessore  $t=17$  mm. Materiale 1.

Larghez. [mm]	Altezza [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [gradi]	Forza [N]			Tensione [MPa]		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	25028.86	30531.90	30661.19	41.71	40.71	40.88
				60	32115.66	31932.51	31609.29	42.82	42.58	42.15
				120	32007.92	32169.53	31867.86	42.68	42.89	42.49
				150	33214.60	33591.68	33214.60	44.29	44.79	44.29
			10	30	18642.12	30682.34	30912.18	41.43	40.91	41.22
				60	31845.91	31673.53	31845.91	42.46	42.23	42.46
				120	33900.13	34115.61	33828.30	45.20	45.49	45.10
				150	34776.40	34733.31	35135.53	46.37	46.31	46.85
		2	5	30	27183.63	33936.44	33861.03	45.31	45.25	45.15
				60	33085.31	33742.52	33483.94	44.11	44.99	44.65
				120	33052.99	33171.50	33710.19	44.07	44.23	44.95
				150	33257.69	33139.18	33451.62	44.34	44.19	44.60
			10	30	20503.84	34244.89	34201.80	45.56	45.66	45.60
				60	33943.22	34359.82	33957.59	45.26	45.81	45.28
				120	34302.35	34015.05	33813.94	45.74	45.35	45.09
				150	34331.08	34546.56	34589.66	45.77	46.06	46.12

Tabella 3.8: Forza e tensione rilevate nelle prove. Spessore t=15 mm. Materiale 2.

Larghez. [mm]	Altezza [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [gradi]	Forza [N]			Tensione [MPa]		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	15771.96	19736.50	19574.89	26.29	26.32	26.10
				60	21815.86	21869.72	21600.38	29.09	29.16	28.80
				120	24239.97	22774.73	23852.11	32.32	30.37	31.80
				150	27418.26	27482.90	27181.24	36.56	36.64	36.24
			10	30	12169.18	20325.07	20080.86	27.04	27.10	26.77
				60	22336.19	22120.71	22264.36	29.78	29.49	29.69
				120	25510.89	25467.79	25166.12	34.01	33.96	33.55
				150	28613.76	28599.39	28886.69	38.15	38.13	38.52
		2	5	30	21469.18	26825.70	26642.54	35.78	35.77	35.52
				60	26868.79	26761.06	26599.45	35.83	35.68	35.47
				120	26771.83	26793.38	26567.13	35.70	35.72	35.42
				150	27213.56	27245.88	27256.65	36.28	36.33	36.34
			10	30	16409.78	27349.63	27320.90	36.47	36.47	36.43
				60	27263.43	27062.32	27105.42	36.35	36.08	36.14
				120	27234.70	27421.45	27277.80	36.31	36.56	36.37
				150	27636.92	27421.45	27263.43	36.85	36.56	36.35

Tabella 3.9: Forza e tensione rilevate nelle prove. Spessore t=15 mm. Materiale 3.



# Capitolo 4

## Simulazioni al calcolatore – Modello lineare.

### 4.1 Modellazione tramite il codice di calcolo Ansys: caso lineare elastico.

La determinazione del livello energetico presente nei provini deve passare necessariamente per una modellizzazione numerica. A tal scopo, grazie alla simmetria dei provini e dei carichi, è bastato considerare solamente una porzione del provino come rappresentato in figura (4.1).

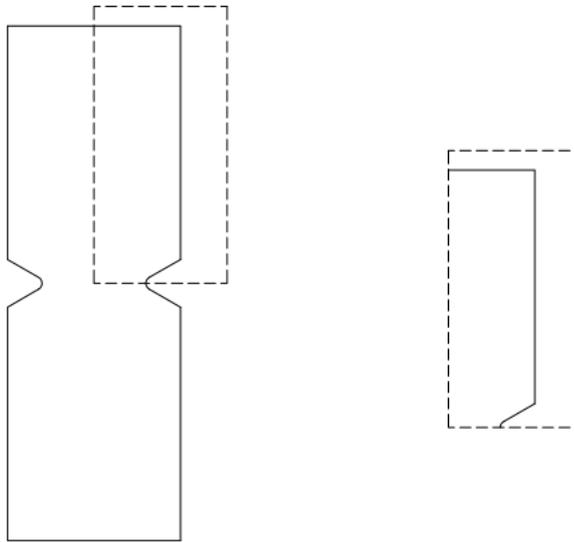


Figura 4.1: Porzione del generico provino modellizzata con Ansys.

Il modello che è stato utilizzato è quello lineare elastico ed ad esso è stato applicato l'ipotesi di deformazione piana. Di fatto lo spessore di 15 mm (17 mm per il solo materiale 1) è tale da impedire contrazioni lungo lo spessore e quindi l'ipotesi utilizzata ben rappresenta la realtà sperimentale. Lo scopo della modellizzazione è quello di determinare la validità del criterio energetico proposto dal professor Lazzarin calcolando la densità di energia di deformazione all'interno di un volume di controllo. Tale volume, come già affermato nei capitoli precedenti, diventa un'area circolare di raggio  $R_C$  nell'ipotesi di deformazione piana. Dal punto di vista teorico, il raggio critico  $R_C$  è esprimibile tramite la formula:

$$R_C = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (4.1)$$

In cui  $K_{IC}$  rappresenta la tenacità di frattura e  $\sigma_t$  indica la tensione di rottura del provino liscio espressa in MPa. Di conseguenza il primo passo da compiere è di calcolare la tenacità a frattura.

#### 4.2 Calcolo del $K_{IC}$ .

Il metodo più preciso per determinare la tenacità a frattura è usare il codice agli elementi finiti Ansys®. L'equazione che permette la determinazione del  $K_I$  è quella di Irwin già discussa nel capitolo due e qui riportata per comodità:

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = \frac{K_I \cdot r^{\lambda_1 - 1}}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow K_I = \sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi} r^{1 - \lambda_1} \quad (4.2)$$

Per questa operazione è necessario creare una mesh molto raffinata in modo da rientrare nel campo di validità della equazione. Si noti che la (4.2) fa riferimento a provini senza raggio di raccordo  $\rho$  all'apice dell'intaglio e quindi si prende in esame quei provini intagliati con la fresa profilata a 30 gradi (autovalore di Williams  $\lambda_1 = 0.5014$ ), sia con profondità 5 mm che 10 mm. Inoltre, con la sopracitata equazione, si determina il  $K_I$  generico quando al modello è applicato a monte e a valle una tensione generica. Per calcolare il  $K_{IC}$  è sufficiente applicare a monte e a valle la tensione di rottura del provino scelto in modo che il  $K_I$  coincida con il  $K_{IC}$ . Riassumendo quindi, si sono presi per ognuno dei tre materiali i sei provini intagliati con la fresa profilata a 30 gradi: tre con profondità 5 mm e tre con profondità 10 mm. Di questi, si è calcolato la tensione media di rottura in modo da ottenere due valori di riferimento per le due diverse profondità di intaglio. Quest'ultimi valori di tensione sono stati applicati al modello in Ansys. Le tabelle (4.1a) e (4.1b) riassumono i valori dei provini intagliati considerati.

Materiale	Angolo $2\alpha$ [°]	Profondità [mm]	$\sigma_{rot}$ [MPa]	$\bar{\sigma}_t$ [MPa]
Materiale 1 PA6GF30	30	5	44.54	45.85
			46.80	
			46.22	
		10	47.76	47.55
			48.15	
			46.74	

Tabella 4.1a: Valori delle tensioni applicate al modello Ansys. Materiale 1.

Materiale	Angolo $2\alpha$ [°]	Profondità [mm]	$\sigma_{rot}$ [MPa]	$\bar{\sigma}_t$ [MPa]
Materiale 2 PVC	30	5	41.71	41.10
			40.71	
			40.88	
		10	41.43	41.18
			40.91	
			41.22	
Materiale 3 PP	30	5	26.29	26.23
			26.32	
			26.10	
		10	27.04	26.97
			27.10	
			26.77	

Tabella 4.1b: Valori delle tensioni applicate al modello Ansys. Materiale 2 e 3.

La corretta applicazione della (4.2) prevede di porsi lungo la bisettrice dell'intaglio e rilevare il valore della tensioni nei nodi fino a una distanza dall'apice tale da garantire la costanza del  $K_I$ . Nella figura (4.2) viene proposto le linee che racchiudono l'apice dell'intaglio. Si può vedere che la zona critica è stata racchiusa da due cerchi concentrici aventi centro nell'apice; il primo cerchio è di raggio 0.5 mm mentre il raggio più piccolo è di raggio  $10^{-4}$ mm.

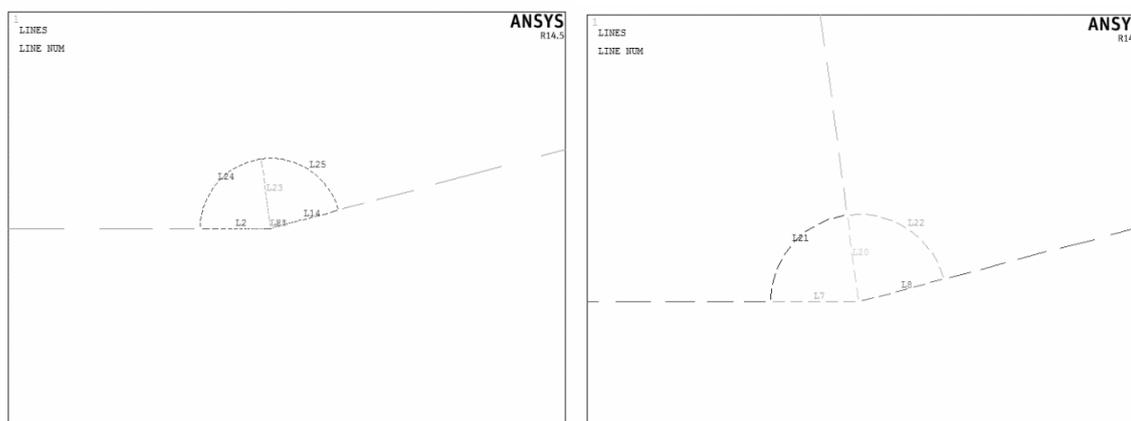


Figura 4.2: A sinistra il cerchio di raggio 0.5 mm e a destra il raggio di  $10^{-4}$ mm.

Per quanto riguarda la mesh in Ansys, è stato necessario applicare anche un punto di concentrazione in modo da poter creare una mesh particolarmente fitta in prossimità dell'apice dell'intaglio. La figura (4.3) riporta il dettaglio della mesh riferita al cerchio di 0.5 mm e l'intero modello completamente discretizzato. Non si è posto particolare cura nella mesh lontano dalla zona critica visto che è completamente superflua nella determinazione del  $K_{IC}$ .

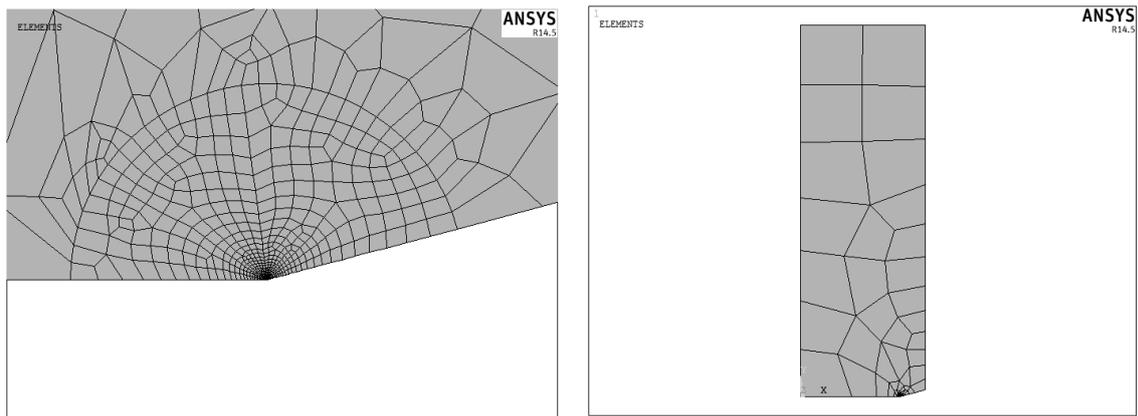


Figura 4.3: Dettaglio della meshatura creata in Ansys.

Una volta risolto il modello, si è provveduto a rilevare lo stato tensionale lungo la bisettrice dell'intaglio. A tal scopo, si sono selezionati tutti i nodi che partono dall'apice dell'intaglio (nodo 18 della figura (4.4)) fino al nodo che corrisponde al raggio da 0.5 mm (nodo 310). In questo modo sono stati selezionati oltre 110 nodi su cui è stato rilevato la tensione agente sugli stessi.

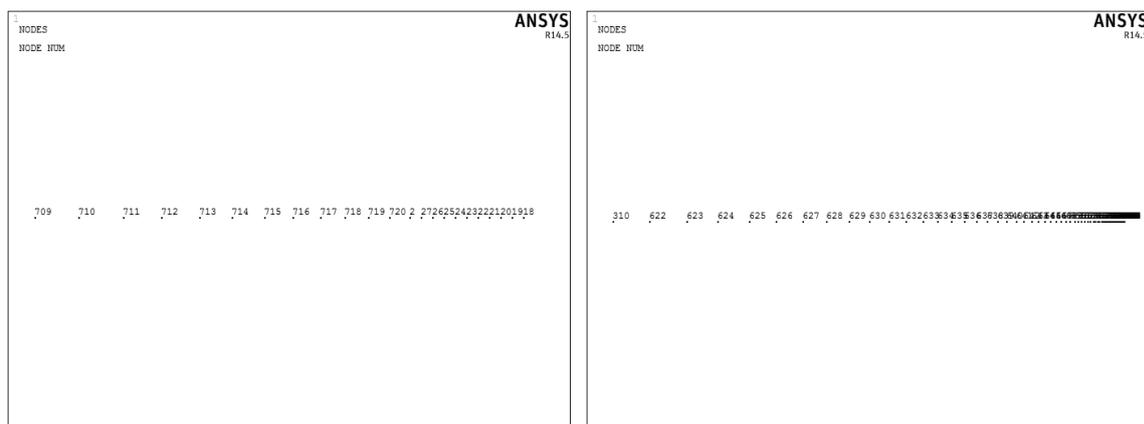


Figura 4.4: Nodi selezionati su cui viene rilevata la tensione.

Una volta calcolato la tensione agente su ogni nodo, è possibile determinare il  $K_{IC}^n$  di ogni nodo. Il  $K_{IC}^a$  della specifica profondità dell'intaglio (5 o 10 mm) viene ottenuto come media tra tutti i valori di tenacità rilevati sui singoli nodi. In tal modo il valore finale da considerare nelle successive elaborazioni del  $K_{IC}$  è ottenuto come media tra i due valori specifici di apertura dell'intaglio. Nelle figure (4.5)-(4.10) vengono rappresentati gli andamenti asintotici delle tensioni in funzione della distanza dall'apice dell'intaglio. I grafici sono in scale doppio logaritmiche e sono relativi agli intagli studiati per la determinazione del  $K_{IC}$ .

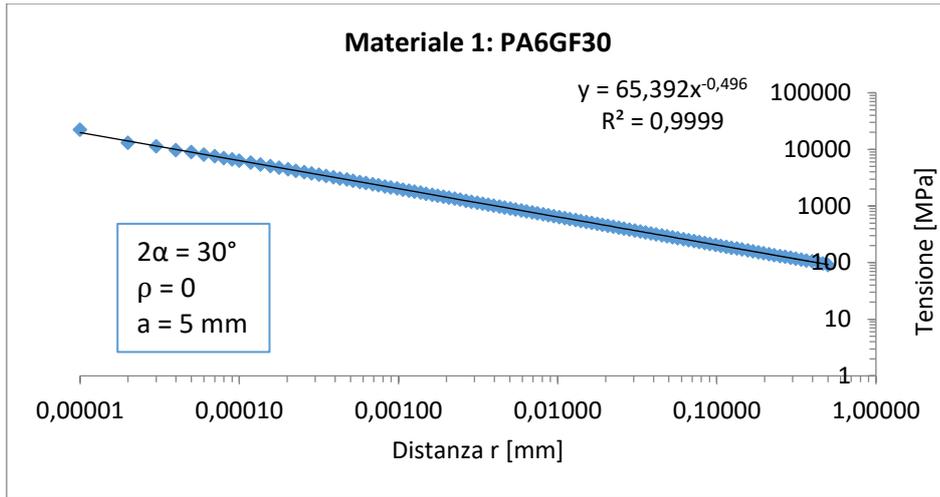


Figura 4.5: Tensione asintotica per il Materiale 1,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

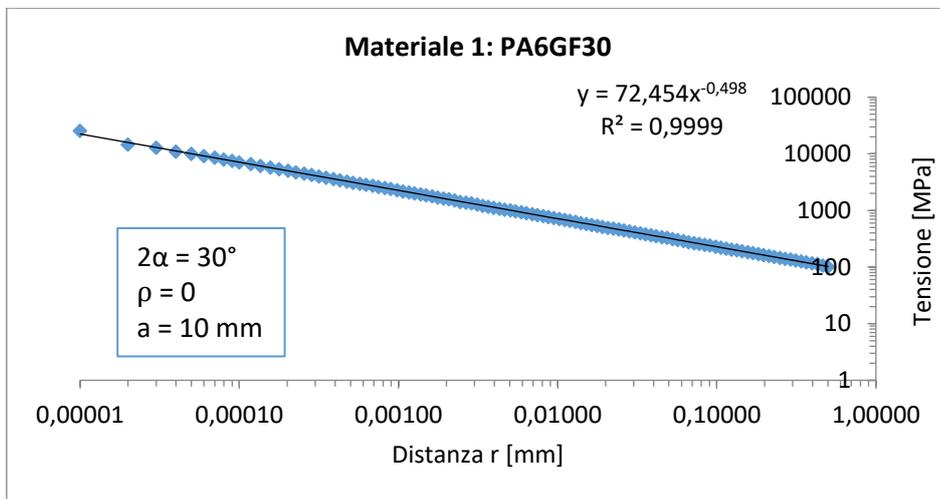


Figura 4.6: Tensione asintotica per il Materiale 1,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

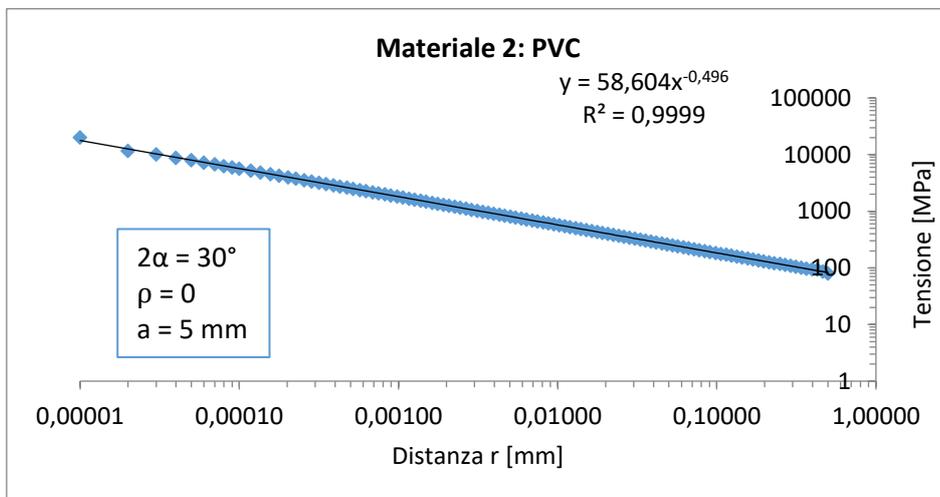


Figura 4.7: Tensione asintotica per il Materiale 2,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

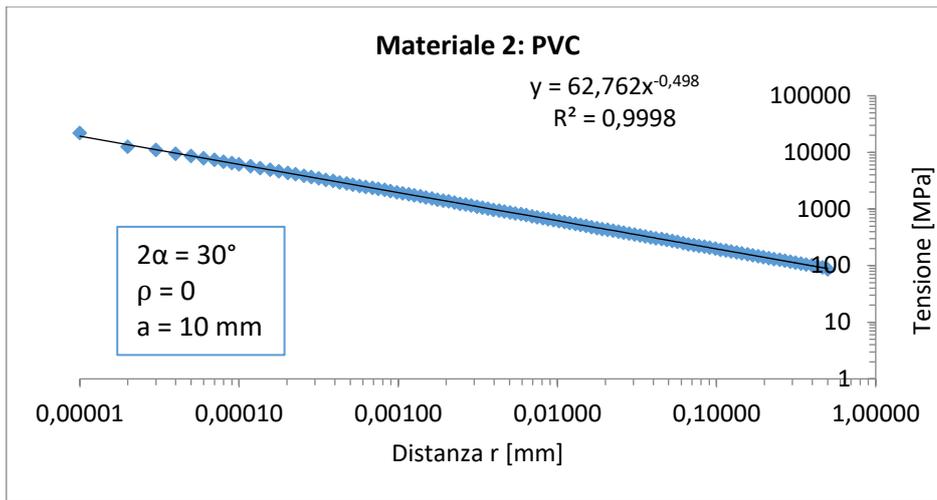


Figura 4.8: Tensione asintotica per il Materiale 2,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

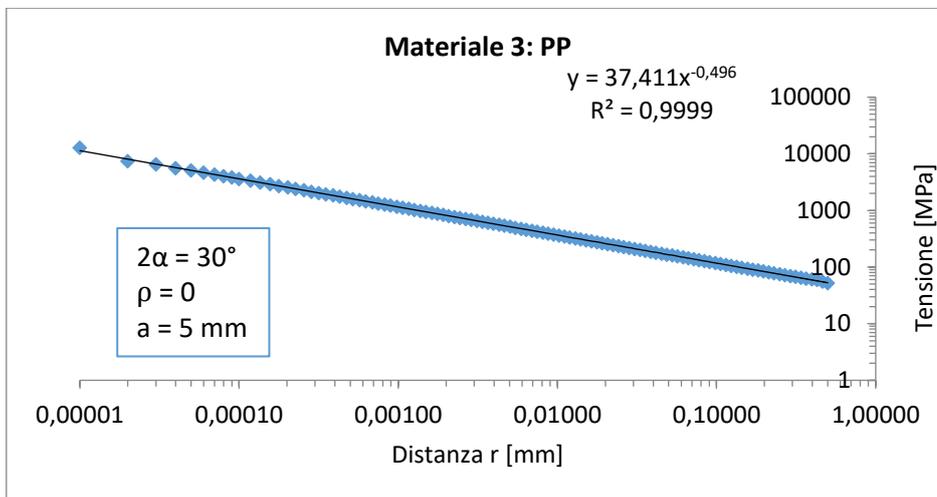


Figura 4.9: Tensione asintotica per il Materiale 3,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

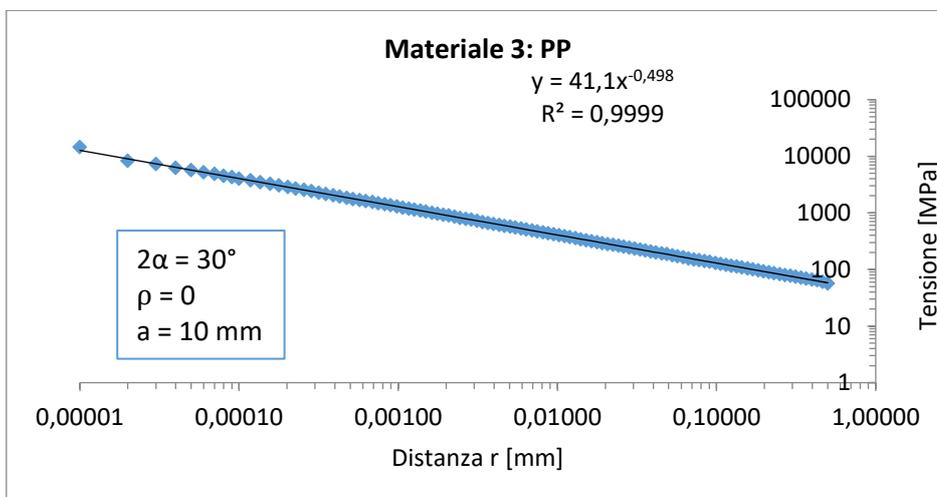


Figura 4.10: Tensione asintotica per il Materiale 3,  $2\alpha = 30^\circ$ ,  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0$ .

Nelle successive figure, dalla (4.11) alla (4.13), viene proposto l'andamento della tenacità a frattura puntuale, ovvero calcolata su ogni singolo nodo. L'asse delle ascisse è in scala logaritmica. Si può ben notare che l'andamento è concentrato su dei valori medi ben definiti.

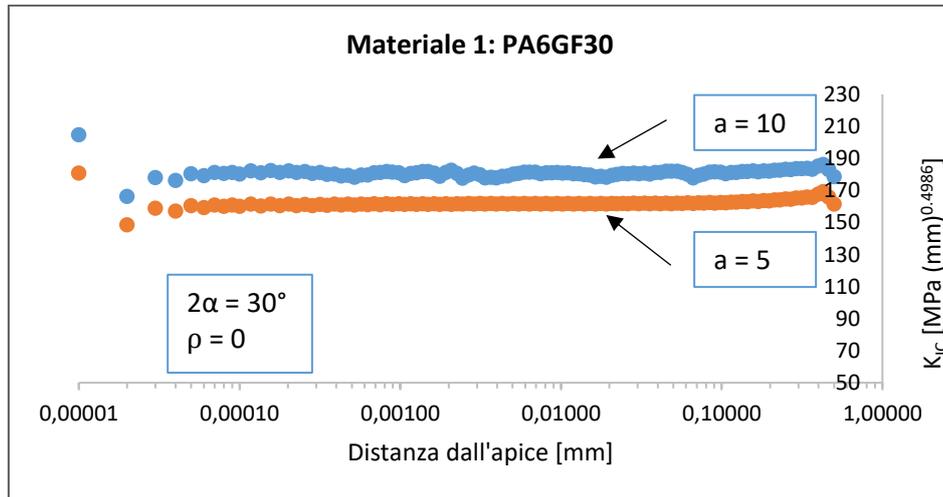


Figura 4.11: Andamento della tenacità a frattura per il materiale 1.

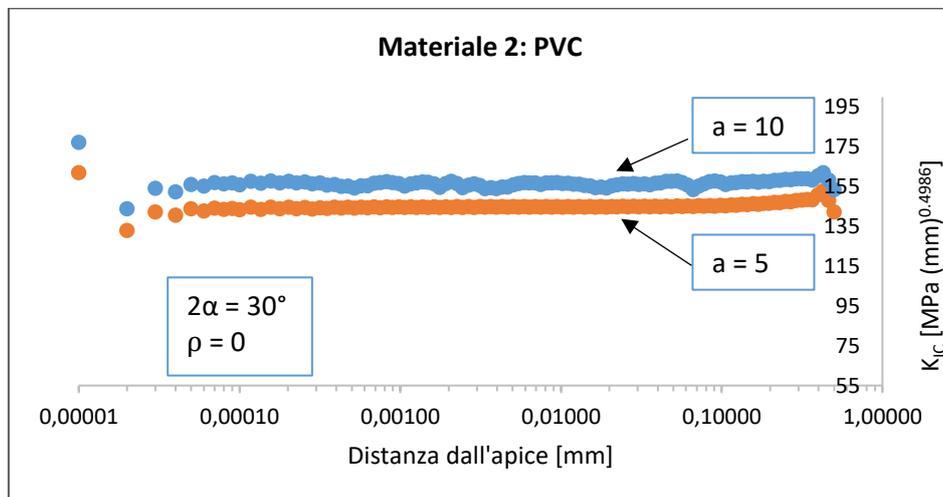


Figura 4.12: Andamento della tenacità a frattura per il materiale 2.

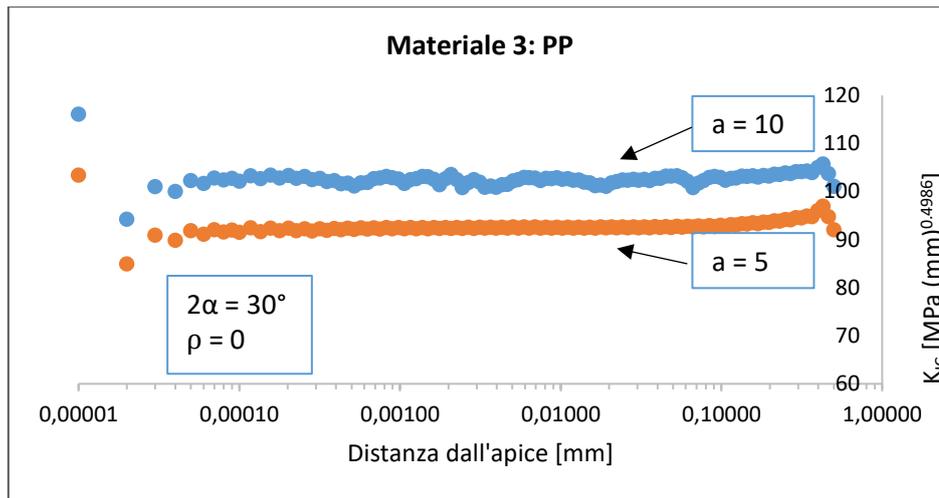


Figura 4.13: Andamento della tenacità a frattura per il materiale 3.

Nella tabella (4.2) vengono riassunti i valori del  $K_{IC}^{30^\circ}$  ottenuti e il calcolo del valore finale della tenacità a frattura come media dei due valori ricavati dalle diverse profondità  $a$ .

Materiale	$K_{IC}^{30^\circ}$ [MPa (mm) <sup>0.4986</sup> ] $a = 5$ mm	$K_{IC}^{30^\circ}$ [MPa (mm) <sup>0.4986</sup> ] $a = 10$ mm	$K_{IC}$ [MPa (mm) <sup>0.4986</sup> ]
Materiale 1	162.05	180.89	171.47
Materiale 2	145.25	156.68	150.96
Materiale 3	92.71	102.61	97.66

Tabella 4.2: Valori ottenuti della tenacità a frattura e suo valore medio per i tre materiali.

### 4.3 Determinazione del raggio critico.

Una volta noto il  $K_{IC}$  è possibile calcolare il raggio critico con l'equazione (4.1). A tal scopo nella tabella (4.3) sono riassunti i dati necessari e i risultati.

Materiale	Poisson $\nu$	$\sigma_t$ [MPa]	$K_{IC}(a)$		$R_C(a)$ [mm]		$R_C$ [mm]
			$a = 5$	$a = 10$	$a = 5$	$a = 10$	
Materiale 1	0.41	81.55	162.05	180.89	0.762	0.950	0.856
Materiale 2	0.45	45.00	145.25	156.68	1.683	1.959	1.821
Materiale 3	0.42	35.64	92.71	102.61	1.254	1.537	1.395

Tabella 4.3: Calcolo del raggio critico  $R_C$ .

#### 4.4 Calcolo della densità di energia di deformazione (SED).

Nel momento in cui è nota la tenacità a frattura, è possibile calcolare per via analitica la densità dell'energia di deformazione nel caso lineare elastico per mezzo della formula vista nel capitolo due e qui riportata per comodità:

$$\bar{W} = W_{CR} \Rightarrow \frac{1}{E} \left\{ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1 \gamma} K_I^2 R_C^{2(\lambda_1-1)} \right\} = \frac{1}{2E} \sigma_t^2 \quad (4.3)$$

Nella formula sopra, la  $\sigma_t$  rappresenta la tensione di rottura del provino liscio. La tabella (4.4) indica i valori di energia calcolati tramite la formula sopra esposta.

Materiale	E [MPa]	$\sigma_t$ [MPa]	$W_{CR}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]
Materiale 1	8180.99	81.55	0.406
Materiale 2	5910.54	45.00	0.171
Materiale 3	3520.58	35.64	0.180

Tabella 4.4: Calcolo della energia critica  $W_{CR}$ .

A questo punto, noto il raggio critico, è possibile calcolare la densità di energia di deformazione tramite il codice di calcolo Ansys. Per ogni singolo provino quindi è stato calcolato la SED con la seguente equazione:

$$\bar{W}_{FEM} = \frac{\sum_A W_{FEM,i}}{A} \quad (4.4)$$

In cui A indica l'area racchiusa nel raggio critico ed  $W_{FEM,i}$  rappresenta l'energia del singolo elemento finito. Le figure (4.14), (4.15a) e (4.15b) rappresentano il particolare del raggio critico in cui la mesh è stata resa fitta tramite le normali opzioni rese disponibili dal software. Nessun punto di accumulo è stato applicato nel calcolo della SED. Le stesse immagini si riferiscono a una profondità di intaglio  $a = 5$  mm. Per semplicità non sono state fornite le immagini con profondità pari a 10 mm.

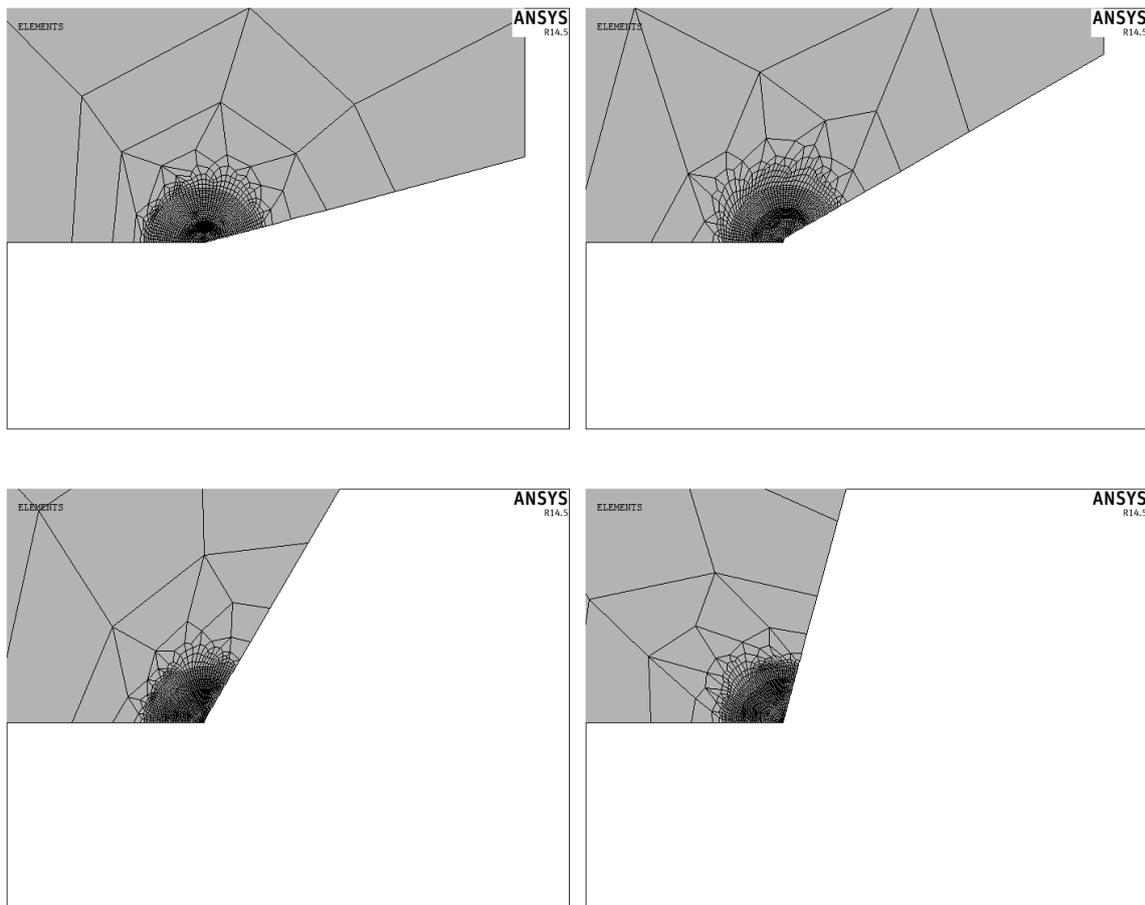


Figura 4.14: Particolare dei provini discretizzati. Da sinistra a destra e dall'alto verso il basso:  $2\alpha = 30^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  e  $150^\circ$  aventi tutti raggio di raccordo  $\rho = 0$  mm,  $a = 5$  mm.

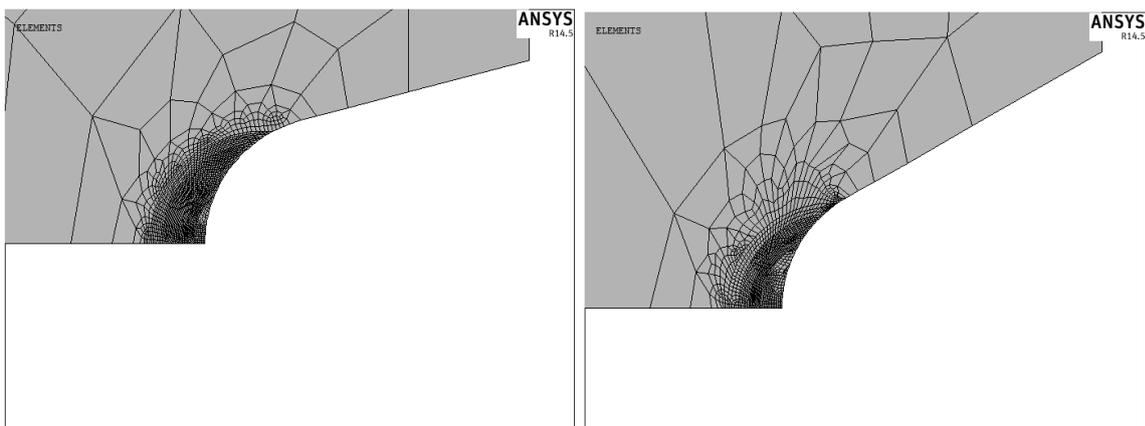


Figura 4.15a: Particolare dei provini discretizzati. Da sinistra a destra:  $2\alpha = 30^\circ, 60^\circ$  aventi tutti raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm.

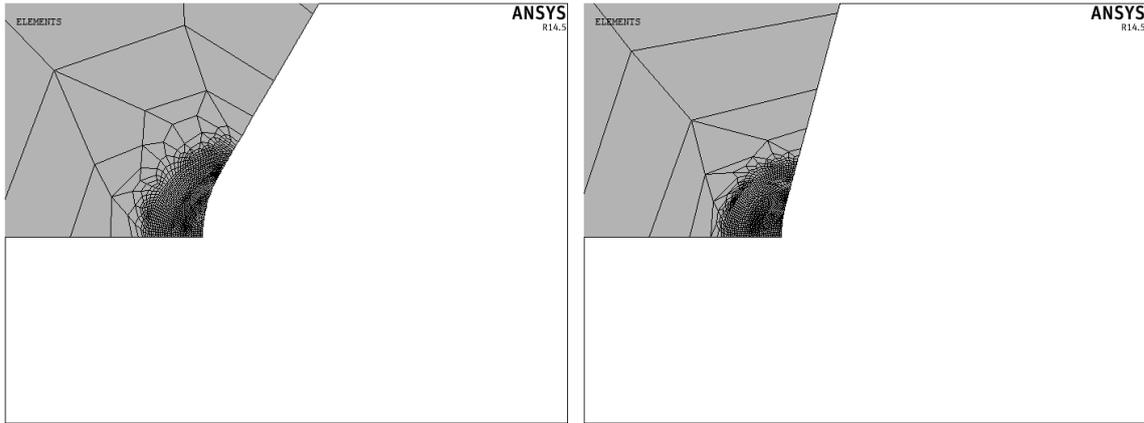


Figura 4.15b: Particolare dei provini discretizzati. Da sinistra a destra:  $2\alpha = 120^\circ$  e  $150^\circ$  aventi tutti raggio di raccordo  $\rho = 2$  mm,  $a = 5$  mm.

Nella figura (4.16) è rappresentato lo schema di principio della modellazione in Ansys. L'area racchiusa dal raggio critico  $R_C$  è denominata  $\Omega$ . Il centro del raggio critico si trova a una distanza pari a  $r_0$  in modo conforme alla mappatura di Neuber vista nel capitolo uno. Esso dipende sia dal raggio di raccordo dell'intaglio  $\rho$  sia dall'angolo di apertura dell'intaglio come mostra l'equazione (4.5).

$$r_0 = \rho(\pi - 2\alpha)/(2\pi - 2\alpha) \quad (4.5)$$

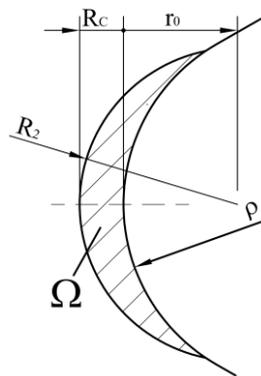


Figura 4.16: Apice dell'intaglio raccordato con indicate le grandezze caratteristiche.

E' evidente che per i provini aventi spigolo vivo,  $\rho = 0$ , la (4.5) restituisce un valore di  $r_0$  nullo. Per i provini aventi raggio  $\rho$  pari a 2 mm la distanza  $r_0$  è dipendente solamente dall'angolo di apertura dell'intaglio. Nella tabella (4.5) sono indicati i valori di  $r_0$  per gli angoli di apertura di interesse.

$2\alpha$ [°]	30	60	120	150
$r_0$ [mm]	0.909	0.800	0.500	0.286

Tabella 4.5: Valori della distanza  $r_0$  per gli angoli dei provini.

Nelle tabelle (4.6), (4.7) e (4.8) sono presentati i valori calcolati della SED di tutti i provini analizzati. In tali tabelle viene anche riportato il valore del rapporto tra la SED e l'energia critica  $W_{CR}$  posto sotto radice. Come discusso nel capitolo due, ciò è necessario per fare in modo che le energie siano proporzionali a una tensione equivalente  $\sigma$  e non a una  $\sigma^2$ .

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.390	0.431	0.420	0.980	1.030	1.017
				60	51.03	48.24	47.07	0.565	0.505	0.481	1.179	1.114	1.087
				120	56.53	57.00	56.73	0.729	0.742	0.735	1.340	1.351	1.345
				150	75.83	70.80	71.92	0.915	0.798	0.823	1.501	1.401	1.423
			10	30	47.76	48.15	46.74	0.515	0.523	0.493	1.125	1.134	1.101
				60	45.92	45.51	44.51	0.515	0.506	0.484	1.126	1.116	1.092
				120	56.09	58.52	54.92	0.723	0.787	0.693	1.334	1.392	1.306
				150	71.49	68.93	69.66	0.718	0.668	0.682	1.329	1.282	1.295
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	0.942	1.032	0.964	1.523	1.593	1.540
				60	67.10	67.34	70.19	1.023	1.030	1.119	1.586	1.592	1.660
				120	71.73	72.74	70.65	1.131	1.164	1.098	1.668	1.692	1.643
				150	77.82	81.25	75.96	0.932	1.016	0.888	1.515	1.581	1.478
			10	30	70.22	74.82	71.91	1.198	1.360	1.256	1.717	1.829	1.758
				60	70.47	72.40	69.56	1.242	1.311	1.210	1.748	1.796	1.725
				120	73.53	76.37	76.05	1.181	1.274	1.263	1.704	1.770	1.763
				150	84.82	85.68	86.63	0.994	1.015	1.037	1.564	1.580	1.597

Tabella 4.6: SED relativi al materiale 1 (PA6GF30).  $R_c = 0.856$  mm,  $W_{CR} = 0.4064$  MJ/m<sup>3</sup>.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$			
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.214	0.204	0.206	1.118	1.091	1.096	
				60	42.82	42.58	42.15	0.248	0.245	0.240	1.202	1.195	1.183	
				120	42.68	42.89	42.49	0.297	0.300	0.294	1.316	1.323	1.311	
				150	44.29	44.79	44.29	0.278	0.285	0.278	1.275	1.289	1.275	
			10	30	41.43	40.91	41.22	0.228	0.222	0.226	1.154	1.139	1.148	
				60	42.46	42.23	42.46	0.264	0.261	0.264	1.241	1.234	1.241	
				120	45.20	45.49	45.10	0.333	0.337	0.332	1.395	1.404	1.392	
				150	46.37	46.31	46.85	0.273	0.272	0.279	1.263	1.261	1.276	
			2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.275	0.274	0.273	1.267	1.265	1.263
					60	44.11	44.99	44.65	0.281	0.292	0.288	1.281	1.306	1.296
					120	44.07	44.23	44.95	0.320	0.322	0.333	1.366	1.371	1.393
					150	44.34	44.19	44.60	0.278	0.276	0.281	1.273	1.269	1.281
		10		30	45.56	45.66	45.60	0.303	0.304	0.304	1.331	1.333	1.332	
				60	45.26	45.81	45.28	0.322	0.330	0.322	1.371	1.388	1.371	
				120	45.74	45.35	45.09	0.343	0.337	0.333	1.414	1.403	1.394	
				150	45.77	46.06	46.12	0.265	0.268	0.269	1.243	1.251	1.253	

Tabella 4.7: SED relativi al materiale 2 (PVC).  $R_C = 1.821$  mm,  $W_{CR} = 0.1713$  MJ/m<sup>3</sup>.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$			
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.197	0.197	0.194	1.045	1.046	1.038	
				60	29.09	29.16	28.80	0.265	0.266	0.259	1.211	1.214	1.199	
				120	32.32	30.37	31.80	0.375	0.331	0.363	1.441	1.354	1.418	
				150	36.56	36.64	36.24	0.382	0.384	0.376	1.456	1.459	1.443	
			10	30	27.04	27.10	26.77	0.232	0.233	0.227	1.134	1.136	1.123	
				60	29.78	29.49	29.69	0.309	0.303	0.307	1.309	1.297	1.305	
				120	34.01	33.96	33.55	0.416	0.414	0.405	1.518	1.516	1.498	
				150	38.15	38.13	38.52	0.372	0.371	0.379	1.436	1.435	1.450	
			2	5	30	35.78	35.77	35.52	0.400	0.400	0.395	1.490	1.489	1.479
					60	35.83	35.68	35.47	0.427	0.424	0.419	1.539	1.533	1.524
					120	35.70	35.72	35.42	0.453	0.454	0.446	1.585	1.587	1.573
					150	36.28	36.33	36.34	0.373	0.374	0.375	1.439	1.440	1.441
		10		30	36.47	36.47	36.43	0.463	0.463	0.462	1.602	1.602	1.600	
				60	36.35	36.08	36.14	0.486	0.479	0.481	1.642	1.630	1.632	
				120	36.31	36.56	36.37	0.468	0.474	0.469	1.610	1.621	1.613	
				150	45.77	46.06	46.12	0.343	0.338	0.334	1.379	1.368	1.360	

Tabella 4.8: SED relativi al materiale 3 (PP).  $R_C = 1.396$  mm,  $W_{CR} = 0.1804$  MJ/m<sup>3</sup>.

Nei successivi grafici (4.17), (4.18) e (4.19) vengono proposti gli andamenti della densità di energia di deformazione normalizzata rispetto all'energia critica. In ascissa è presente l'angolo di apertura dell'intaglio.

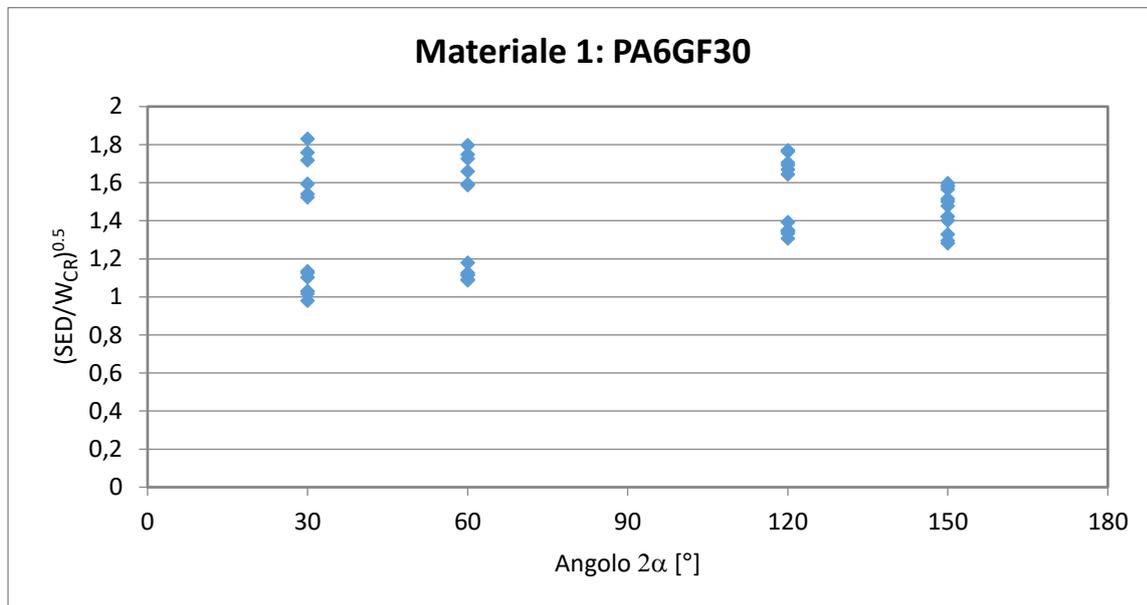


Figura 4.17: Andamento dell'energia normalizzata per il materiale 1.

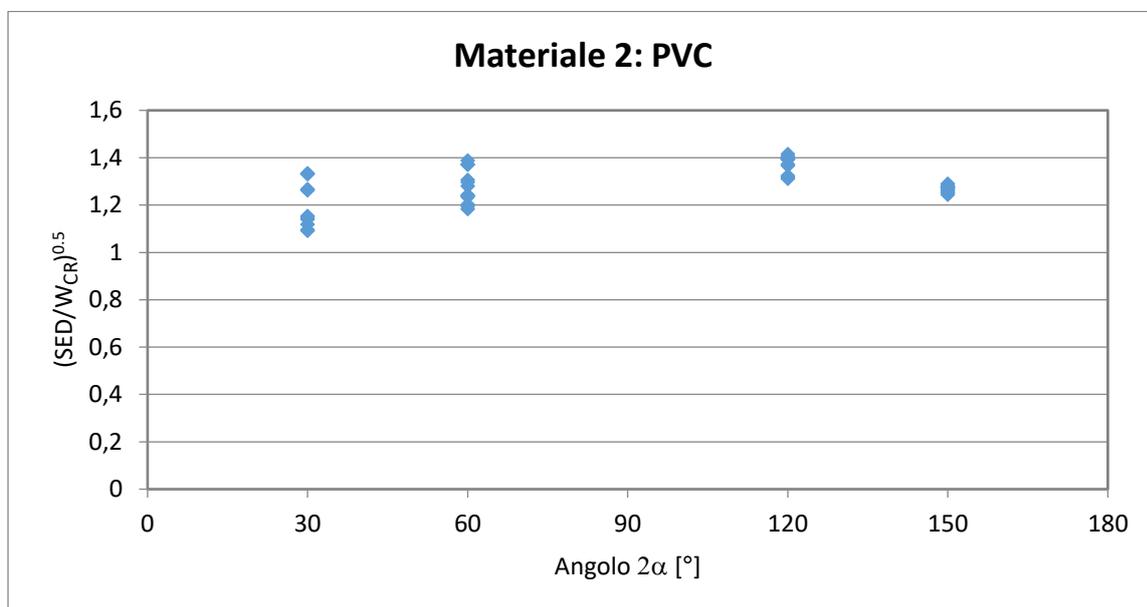


Figura 4.18: Andamento dell'energia normalizzata per il materiale 2.

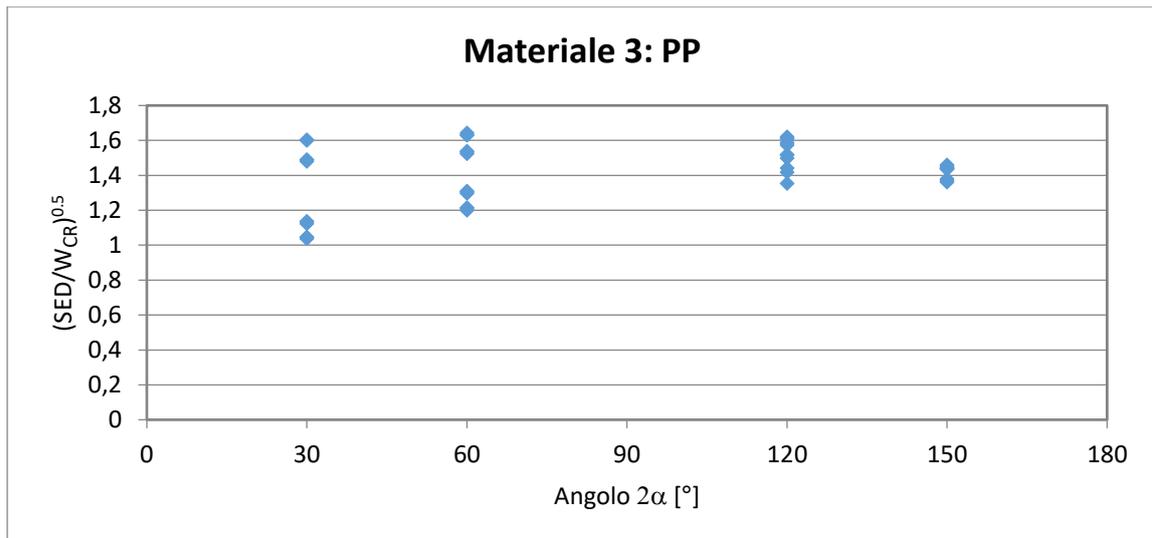


Figura 4.19: Andamento dell'energia normalizzata per il materiale 3.

È palese che l'approccio base lineare-elastico di questa fase non dà i risultati sperati. Di fatto tutti e tre materiali presentano dei livelli energetici non centrati rispetto il valore unitario, ma piuttosto sono dispersi sempre al di sopra del valore unitario. Ciò significa che i tre materiali sopportano un'energia superiore a quella prevista dal modello lineare elastico. Questa considerazione si trova in buon accordo anche con l'andamento delle curve tensione-deformazione viste nel capitolo tre, le quali evidenziano un comportamento del materiale fortemente non lineare. I valori medi dell'energia normalizzata per i tre materiali sono riportati nella tabella (4.9).

	Materiale 1	Materiale 2	Materiale 3
$R_C$ [mm]	0.856	1.821	1.395
$\overline{(SED/W_{CR})}$	1.438	1.282	1.422

Tabella 4.9: Valori medi della SED per i tre materiali.

#### 4.5 Analisi di sensibilità lineare elastica.

Come visto nel paragrafo precedente, la semplice analisi lineare non fornisce risultati soddisfacenti, principalmente causati dalla non linearità dei materiali. Ciò significa che il raggio di controllo per il caso lineare elastico non è quello corretto. In particolare si può osservare dalla tabella (4.9) che i materiali possiedono un'energia che risulta essere sempre al di sopra del valore unitario. E' quindi opportuno sfruttare ancora l'ipotesi lineare elastica ma facendo un uso di tipo puntuale col seguente modo:

- Far variare il raggio di controllo  $R_C$ ;
- Calcolare la SED al suo interno per tutti i provini;
- Confrontare la SED con l'equivalente energia del modello lineare elastico avente una tensione di rottura tale da fornire il medesimo raggio di controllo.
- L'equivalenza numerica tra le due energie fornisce il raggio critico corretto.

Per questa fase si è ancora sfruttata l'equazione (4.6) vista nel capitolo due per la deformazione piana, qui riportata per ragioni di comodo:

$$R_C = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_t} \right)^2 \quad (4.6)$$

Con essa, facendo variare la sigma di rottura, è possibile calcolare il raggio critico corrispondente. Per non confondere i le grandezze vere con i valori fittizi, verrà indicato con  $\sigma_t^*$  e  $R_C^*$  i valori di prova ottenuti con la (4.6) mentre l'energia critica del modello lineare elastico verrà indicata  $W_{CR}^* = \sigma_t^{*2}/(2E)$ . I valori del raggio critico fittizio  $R_C^*$ , della tensione fittizia  $\sigma^*$  e dell'energia critica per i tre materiali sono riportati nelle tabelle (4.10), (4.11) e (4.12).

Una volta noti i raggi critici, è necessario calcolare la SED tramite il codice di calcolo Ansys per tutti i provini. Nelle successive tabelle, vengono proposti le nuove SED calcolate con i raggi critici fittizi. Per ragioni di sintesi, non verranno proposte i dati elaborati per tutti i 16 raggi critici fittizi, ma solo tre valori rappresentativi per ognuno dei tre materiali studiati. Nelle tabelle (4.13), (4.14) e (4.15) vengono proposte le analisi per il materiale 1; nelle tabelle (4.17), (4.18) e (4.19) per il materiale 2 e infine nelle tabelle (4.21), (4.22) e (4.23) per il materiale 3.

$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]
75	1.009	0.34	42	2.087	0.15	30	1.964	0.13
85	0.785	0.44	48	1.598	0.19	38	1.224	0.21
95	0.629	0.55	51	1.416	0.22	44	0.913	0.27
105	0.515	0.67	54	1.263	0.25	47	0.800	0.31
115	0.429	0.81	57	1.133	0.27	50	0.707	0.36
125	0.363	0.95	60	1.023	0.30	54	0.606	0.41
135	0.311	1.11	63	0.928	0.34	58	0.525	0.48
145	0.270	1.28	75	0.655	0.48	70	0.361	0.70
150	0.252	1.38	88	0.475	0.66	80	0.276	0.91
155	0.236	1.47	97	0.391	0.80	90	0.218	1.15
160	0.222	1.56	105	0.334	0.93	95	0.196	1.28
175	0.185	1.87	112	0.294	1.06	102	0.170	1.48
188	0.161	2.16	115	0.278	1.12	105	0.160	1.57
201	0.140	2.47	136	0.199	1.56	123	0.117	2.15
205	0.135	2.57	160	0.144	2.17	135	0.097	2.59
240	0.099	3.52	180	0.114	2.74	155	0.074	3.41

Tabella 4.10: Materiale 1.

Tabella 4.11: Materiale 2.

Tabella 4.12: Materiale 3.

#### 4.6 Materiale 1: Sintesi dell'analisi di sensibilità.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	1.933
				60	51.03	48.24	47.07	2.814	2.515	2.395	1.141	1.079	1.053
				120	56.53	57.00	56.73	2.554	2.597	2.573	1.087	1.096	1.091
				150	75.83	70.80	71.92	2.130	1.856	1.915	0.993	0.927	0.942
			10	30	47.76	48.15	46.74	2.600	2.643	2.491	1.097	1.106	1.074
				60	45.92	45.51	44.51	2.627	2.581	2.469	1.103	1.093	1.069
				120	56.09	58.52	54.92	2.558	2.785	2.453	1.088	1.135	1.066
				150	71.49	68.93	69.66	1.656	1.540	1.572	0.875	0.844	0.853
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	2.080	2.278	2.130	0.981	1.027	0.993
				60	67.10	67.34	70.19	2.225	2.241	2.435	1.015	1.019	1.062
				120	71.73	72.74	70.65	2.321	2.387	2.252	1.037	1.051	1.021
				150	77.82	81.25	75.96	1.693	1.845	1.613	0.885	0.924	0.864
			10	30	70.22	74.82	71.91	2.592	2.943	2.719	1.096	1.167	1.122
				60	70.47	72.40	69.56	2.617	2.763	2.550	1.101	1.131	1.087
				120	73.53	76.37	76.05	2.375	2.562	2.540	1.049	1.089	1.084
				150	84.82	85.68	86.63	1.791	1.827	1.868	0.910	0.920	0.930

Tabella 4.13:  $\sigma_t^* = 188$  MPa;  $\overline{SED} = 2.294$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.161$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 1.207$ . Materiale 1.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	2.222
				60	51.03	48.24	47.07	3.170	2.833	2.698	1.133	1.071	1.045
				120	56.53	57.00	56.73	2.814	2.861	2.834	1.068	1.076	1.071
				150	75.83	70.80	71.92	2.207	1.924	1.985	0.945	0.883	0.897
			10	30	47.76	48.15	46.74	3.033	3.082	2.905	1.108	1.117	1.085
				60	45.92	45.51	44.51	2.995	2.942	2.815	1.101	1.092	1.068
				120	56.09	58.52	54.92	2.821	3.071	2.704	1.069	1.115	1.047
				150	71.49	68.93	69.66	1.779	1.654	1.689	0.849	0.819	0.827
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	2.144	2.347	2.194	0.932	0.975	0.943
				60	67.10	67.34	70.19	2.255	2.272	2.468	0.956	0.959	1.000
				120	71.73	72.74	70.65	2.377	2.444	2.306	0.981	0.995	0.966
				150	77.82	81.25	75.96	1.734	1.890	1.652	0.838	0.875	0.818
			10	30	70.22	74.82	71.91	2.664	3.024	2.794	1.039	1.107	1.064
				60	70.47	72.40	69.56	2.684	2.832	2.615	1.043	1.071	1.029
				120	73.53	76.37	76.05	2.431	2.622	2.600	0.992	1.030	1.026
				150	84.82	85.68	86.63	1.854	1.892	1.934	0.866	0.875	0.885

Tabella 4.14:  $\sigma_t^* = 201$  MPa;  $\overline{SED} = 2.456$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.141$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 0.993$ . Materiale 1.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	3.202
				60	51.03	48.24	47.07	4.609	4.119	3.922	1.144	1.082	1.056
				120	56.53	57.00	56.73	3.664	3.725	3.691	1.020	1.029	1.024
				150	75.83	70.80	71.92	2.621	2.285	2.358	0.863	0.806	0.818
			10	30	47.76	48.15	46.74	4.217	4.286	4.040	1.095	1.103	1.071
				60	45.92	45.51	44.51	4.262	4.187	4.006	1.100	1.091	1.067
				120	56.09	58.52	54.92	3.680	4.006	3.529	1.022	1.067	1.001
				150	71.49	68.93	69.66	2.046	1.903	1.943	0.762	0.735	0.743
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	2.316	2.536	2.371	0.811	0.849	0.821
				60	67.10	67.34	70.19	2.380	2.397	2.604	0.822	0.825	0.860
				120	71.73	72.74	70.65	2.496	2.567	2.422	0.842	0.854	0.829
				150	77.82	81.25	75.96	1.836	2.001	1.749	0.722	0.754	0.705
			10	30	70.22	74.82	71.91	2.785	3.162	2.921	0.890	0.948	0.911
				60	70.47	72.40	69.56	2.814	2.970	2.742	0.894	0.919	0.882
				120	73.53	76.37	76.05	2.577	2.780	2.756	0.856	0.889	0.885
				150	84.82	85.68	86.63	1.965	2.006	2.050	0.747	0.755	0.763

Tabella 4.15:  $\sigma_t^* = 240$  MPa;  $\overline{SED} = 2.969$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.099$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 0.909$ . Materiale 1.

Nella tabella (4.16) sono indicati i valori di sintesi delle simulazioni in Ansys per i valori della tabella (4.10). La figura (4.20) indica l'andamento della SED media al variare del raggio critico  $R_C^*$ . Inoltre è indicato anche l'andamento della energia critica  $W_{CR}^*$ . L'intersezione delle curve avviene per il valore di raggio critico  $R_C = 0.141$  mm.

$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\overline{SED}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$(\overline{SED}/W_{CR}^*)^{0.5}$
75	1.009	0.34	0.768	1.473
85	0.785	0.44	0.921	1.424
95	0.629	0.55	1.070	1.375
105	0.515	0.67	1.219	1.330
115	0.429	0.81	1.358	1.284
125	0.363	0.95	1.494	1.241
135	0.311	1.11	1.625	1.200
145	0.270	1.28	1.758	1.164
150	0.252	1.38	1.814	1.144
155	0.236	1.47	1.890	1.130
160	0.222	1.56	1.940	1.109
175	0.185	1.87	2.144	1.067
188	0.161	2.16	2.294	1.027
201	0.141	2.47	2.456	0.993
205	0.135	2.57	2.518	0.986
240	0.099	3.52	2.969	0.910

Tabella 4.16: Valori della SED per le tensioni fittizie. Materiale 1.

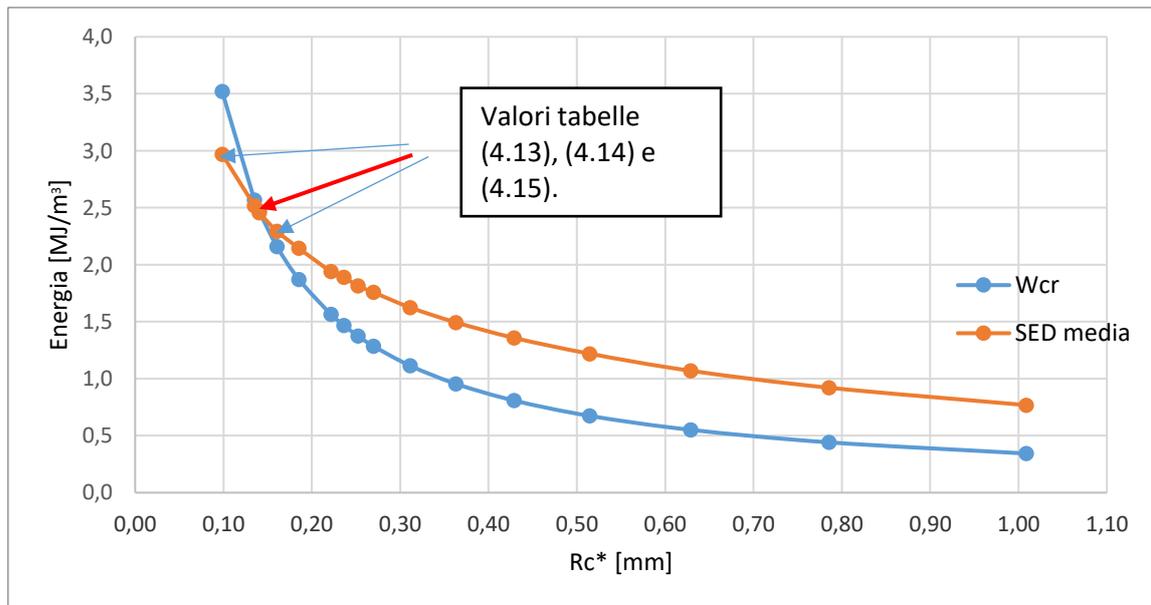


Figura 4.20: Andamento della SED e della  $W_{CR}$  al variare del  $R_C^*$ . Materiale 1.

In figura (4.21) viene riportato la dispersione del rapporto tra la SED e l'energia critica  $W_{CR}$ . Tale andamento rappresenta i valori della tabella (4.14).

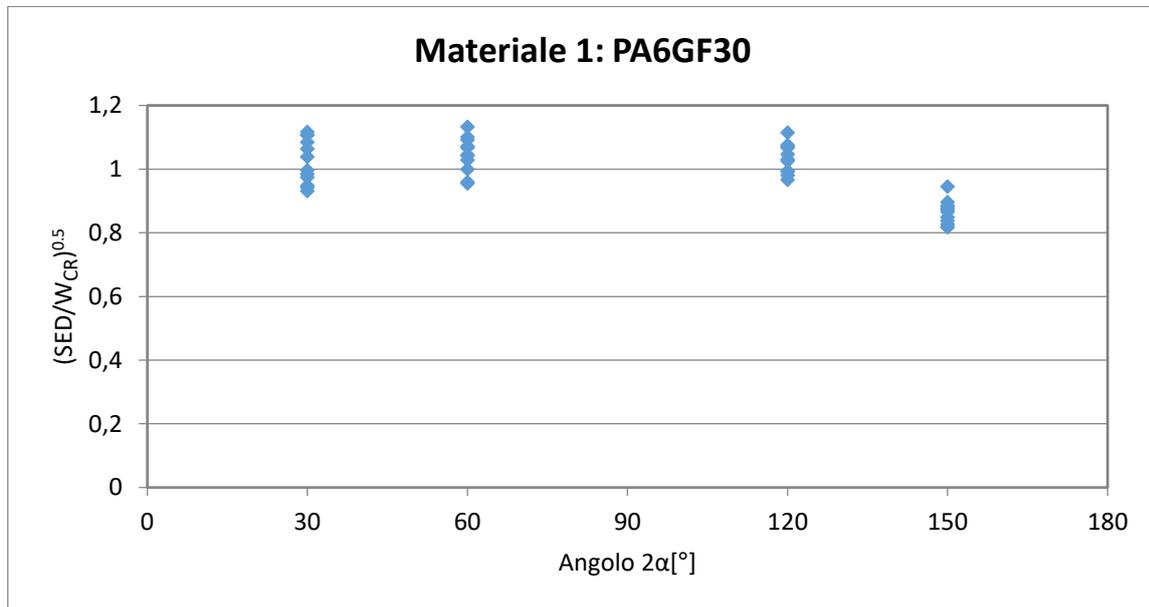


Figura 4.21: Andamento dell'energia normalizzata ricavato dall'analisi di sensibilità.  $R_C = 0.141$  mm.

#### 4.7 Materiale 2: Sintesi dell'analisi di sensibilità.

Larghez. [mm]	Altezz. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	1.016
				60	42.82	42.58	42.15	1.192	1.178	1.155	1.130	1.124	1.113
				120	42.68	42.89	42.49	1.082	1.093	1.072	1.077	1.082	1.072
				150	44.29	44.79	44.29	0.640	0.655	0.640	0.828	0.838	0.828
			10	30	41.43	40.91	41.22	1.147	1.118	1.135	1.109	1.095	1.103
				60	42.46	42.23	42.46	1.324	1.309	1.324	1.191	1.185	1.191
				120	45.20	45.49	45.10	1.212	1.228	1.207	1.140	1.147	1.138
				150	46.37	46.31	46.85	0.621	0.619	0.634	0.816	0.815	0.824
			5	30	45.31	45.25	45.15	1.037	1.034	1.029	1.054	1.053	1.051
				60	44.11	44.99	44.65	1.007	1.047	1.031	1.039	1.060	1.052
				120	44.07	44.23	44.95	0.910	0.916	0.946	0.988	0.991	1.007
				150	44.34	44.19	44.60	0.588	0.583	0.594	0.794	0.791	0.798
			10	30	45.56	45.66	45.60	1.149	1.154	1.151	1.110	1.112	1.111
				60	45.26	45.81	45.28	1.175	1.204	1.176	1.122	1.136	1.123
				120	45.74	45.35	45.09	0.998	0.982	0.970	1.035	1.026	1.020
				150	45.77	46.06	46.12	0.559	0.566	0.568	0.774	0.779	0.780

Tabella 4.17:  $\sigma_t^* = 105$  MPa;  $\overline{SED} = 0.977$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.334$  mm;  $\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}} = 1.015$ . Materiale 2.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	1.154
				60	42.82	42.58	42.15	1.337	1.321	1.295	1.122	1.116	1.105
				120	42.68	42.89	42.49	1.187	1.199	1.177	1.058	1.063	1.053
				150	44.29	44.79	44.29	0.681	0.696	0.681	0.801	0.810	0.801
			10	30	41.43	40.91	41.22	1.276	1.244	1.263	1.097	1.083	1.091
				60	42.46	42.23	42.46	1.506	1.490	1.506	1.191	1.185	1.191
				120	45.20	45.49	45.10	1.336	1.353	1.330	1.122	1.129	1.120
				150	46.37	46.31	46.85	0.669	0.668	0.683	0.794	0.793	0.802
		2	5	30	45.31	45.25	45.15	1.112	1.109	1.105	1.024	1.023	1.020
				60	44.11	44.99	44.65	1.061	1.103	1.087	1.000	1.020	1.012
				120	44.07	44.23	44.95	0.978	0.985	1.017	0.960	0.963	0.979
				150	44.34	44.19	44.60	0.615	0.611	0.622	0.761	0.759	0.766
			10	30	45.56	45.66	45.60	1.225	1.230	1.227	1.074	1.077	1.075
				60	45.26	45.81	45.28	1.197	1.227	1.198	1.062	1.075	1.063
				120	45.74	45.35	45.09	1.039	1.022	1.010	0.989	0.981	0.975
				150	45.77	46.06	46.12	0.582	0.589	0.591	0.740	0.745	0.746

Tabella 4.18:  $\sigma_t^* = 112$  MPa;  $\overline{SED} = 1.058$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.294$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 0.986$ . Materiale 2.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	1.654
				60	42.82	42.58	42.15	1.933	1.911	1.873	1.112	1.105	1.094
				120	42.68	42.89	42.49	1.618	1.634	1.604	1.017	1.022	1.012
				150	44.29	44.79	44.29	0.845	0.864	0.845	0.735	0.743	0.735
			10	30	41.43	40.91	41.22	1.892	1.845	1.873	1.100	1.086	1.094
				60	42.46	42.23	42.46	2.178	2.154	2.178	1.180	1.173	1.180
				120	45.20	45.49	45.10	1.789	1.812	1.782	1.069	1.076	1.067
				150	46.37	46.31	46.85	0.807	0.805	0.824	0.718	0.717	0.726
		2	5	30	45.31	45.25	45.15	1.236	1.232	1.227	0.889	0.888	0.886
				60	44.11	44.99	44.65	1.206	1.254	1.235	0.878	0.895	0.889
				120	44.07	44.23	44.95	1.067	1.074	1.109	0.826	0.829	0.842
				150	44.34	44.19	44.60	0.689	0.684	0.697	0.663	0.661	0.667
			10	30	45.56	45.66	45.60	1.366	1.371	1.368	0.934	0.936	0.935
				60	45.26	45.81	45.28	1.350	1.383	1.351	0.929	0.940	0.929
				120	45.74	45.35	45.09	1.152	1.133	1.120	0.858	0.851	0.846
				150	45.77	46.06	46.12	0.652	0.660	0.662	0.646	0.650	0.650

Tabella 4.19:  $\sigma_t^* = 136$  MPa;  $\overline{SED} = 1.337$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.199$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 0.911$ . Materiale 2.

Nella tabella (4.20) sono indicati i valori di sintesi delle simulazioni in Ansys per i valori della tabella (4.11). La figura (4.22) indica l'andamento della SED media al variare del raggio critico  $R_C^*$ . Inoltre è indicato anche l'andamento della energia critica  $W_{CR}^*$ . L'intersezione delle curve avviene per il valore di raggio critico  $R_C = 0.294$  mm.

$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\overline{SED}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}}$
42	2.087	0.15	0.255	1.311
48	1.598	0.19	0.313	1.270
51	1.416	0.22	0.344	1.252
54	1.263	0.25	0.376	1.235
57	1.133	0.27	0.410	1.218
60	1.023	0.30	0.445	1.204
63	0.928	0.34	0.480	1.190
75	0.655	0.48	0.622	1.141
88	0.475	0.66	0.777	1.082
97	0.391	0.80	0.881	1.046
105	0.334	0.93	0.978	1.014
112	0.294	1.06	1.058	0.987
115	0.278	1.12	1.091	0.973
136	0.199	1.56	1.337	0.914
160	0.144	2.17	1.637	0.852
180	0.114	2.74	1.910	0.809

Tabella 4.20: Valori della SED per le tensioni fittizie. Materiale 2.

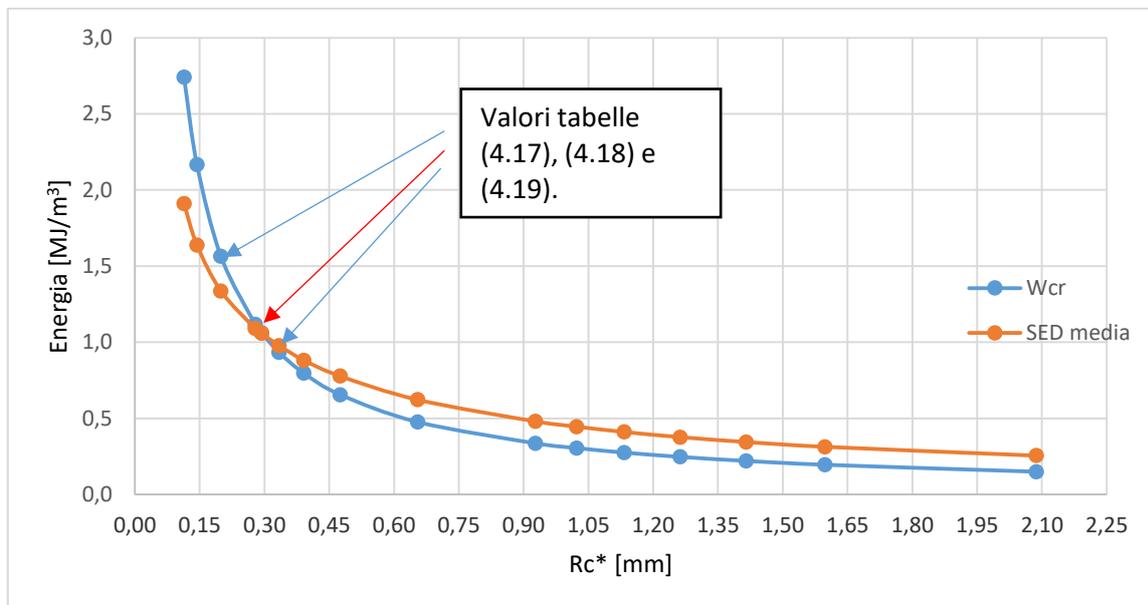


Figura 4.22: Andamento della SED e della  $W_{CR}$  al variare del  $R_C^*$ . Materiale 2.

In figura (4.23) viene riportato la dispersione del rapporto tra la SED e l'energia critica  $W_{CR}$ . Tale andamento rappresenta i valori della tabella (4.18).

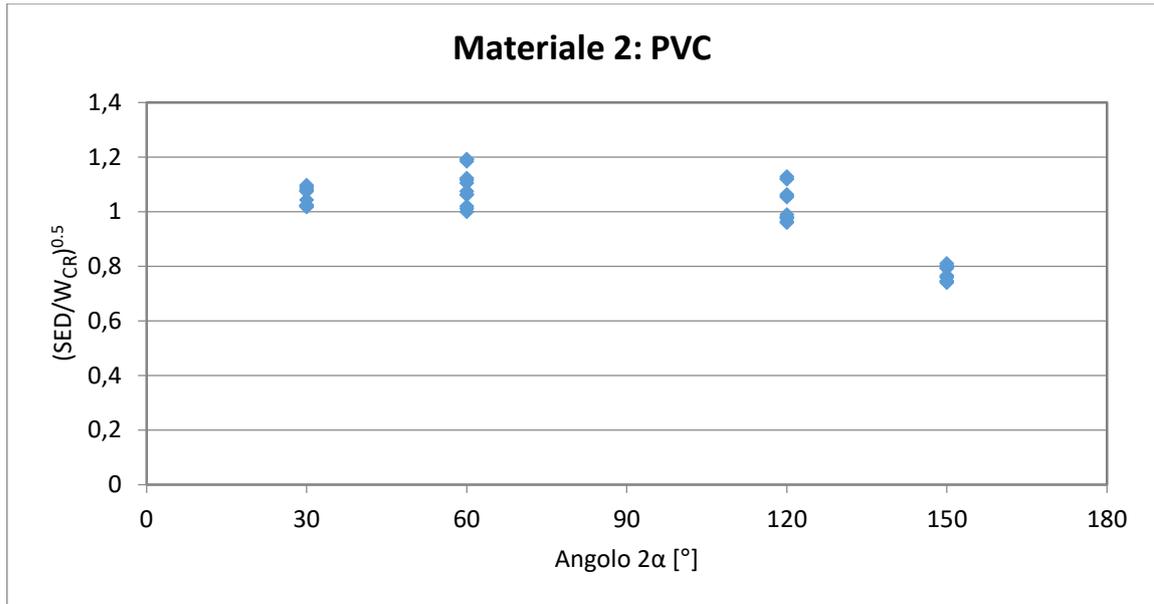


Figura 4.23: Andamento dell'energia normalizzata ricavato dall'analisi di sensibilità.  $R_C = 0.294$  mm.

#### 4.8 Materiale 3: Sintesi dell'analisi di sensibilità.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	1.147
			5	60	29.09	29.16	28.80	1.520	1.527	1.490	1.149	1.152	1.138
			5	120	32.32	30.37	31.80	1.550	1.369	1.501	1.161	1.091	1.142
			5	150	36.56	36.64	36.24	0.949	0.954	0.933	0.908	0.911	0.901
			10	30	27.04	27.10	26.77	1.398	1.404	1.371	1.103	1.105	1.092
			10	60	29.78	29.49	29.69	1.814	1.779	1.802	1.256	1.244	1.252
			10	120	34.01	33.96	33.55	1.697	1.691	1.651	1.214	1.212	1.198
			10	150	38.15	38.13	38.52	0.934	0.933	0.951	0.901	0.900	0.909
		2	5	30	35.78	35.77	35.52	1.316	1.315	1.297	1.069	1.069	1.062
		2	5	60	35.83	35.68	35.47	1.351	1.341	1.324	1.084	1.080	1.073
		2	5	120	35.70	35.72	35.42	1.205	1.207	1.187	1.023	1.024	1.016
		2	5	150	36.28	36.33	36.34	0.788	0.790	0.790	0.828	0.828	0.829
			10	30	36.47	36.47	36.43	1.492	1.492	1.489	1.139	1.139	1.138
			10	60	36.35	36.08	36.14	1.488	1.466	1.471	1.137	1.129	1.131
			10	120	36.31	36.56	36.37	1.218	1.235	1.222	1.029	1.036	1.031
			10	150	45.77	46.06	46.12	0.722	0.711	0.702	0.792	0.786	0.781

Tabella 4.21:  $\sigma_t^* = 90$  MPa;  $\overline{SED} = 1.276$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.218$  mm;  $(SED/W_{CR})^{0.5} = 1.045$ . Materiale 3.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	1.480	1.483	1.459	1.001	1.002	0.994
				60	29.09	29.16	28.80	2.005	2.015	1.966	1.165	1.168	1.153
				120	32.32	30.37	31.80	1.824	1.610	1.766	1.111	1.044	1.093
				150	36.56	36.64	36.24	1.101	1.106	1.082	0.863	0.865	0.856
			10	30	27.04	27.10	26.77	1.788	1.795	1.752	1.100	1.102	1.089
				60	29.78	29.49	29.69	2.376	2.330	2.361	1.268	1.256	1.264
				120	34.01	33.96	33.55	2.051	2.044	1.996	1.178	1.176	1.162
				150	38.15	38.13	38.52	1.024	1.023	1.044	0.833	0.832	0.841
		2	5	30	35.78	35.77	35.52	1.424	1.423	1.403	0.982	0.981	0.975
				60	35.83	35.68	35.47	1.439	1.428	1.410	0.987	0.983	0.977
				120	35.70	35.72	35.42	1.276	1.278	1.257	0.929	0.930	0.922
				150	36.28	36.33	36.34	0.835	0.837	0.838	0.752	0.753	0.753
			10	30	36.47	36.47	36.43	1.580	1.580	1.576	1.034	1.034	1.033
				60	36.35	36.08	36.14	1.574	1.551	1.556	1.032	1.025	1.026
				120	36.31	36.56	36.37	1.317	1.335	1.321	0.944	0.950	0.946
				150	45.77	46.06	46.12	0.768	0.756	0.748	0.721	0.715	0.711

Tabella 4.22:  $\sigma_t^* = 102$  MPa;  $\overline{SED} = 1.479$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.170$  mm;  $\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}} = 0.989$ . Materiale 3.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	2.114	2.118	2.084	0.992	0.993	0.985
				60	29.09	29.16	28.80	2.838	2.852	2.782	1.149	1.152	1.138
				120	32.32	30.37	31.80	2.484	2.193	2.405	1.075	1.010	1.058
				150	36.56	36.64	36.24	1.284	1.290	1.262	0.773	0.775	0.766
			10	30	27.04	27.10	26.77	2.630	2.641	2.578	1.106	1.109	1.095
				60	29.78	29.49	29.69	3.381	3.316	3.359	1.254	1.242	1.250
				120	34.01	33.96	33.55	2.671	2.662	2.600	1.115	1.113	1.100
				150	38.15	38.13	38.52	1.245	1.243	1.268	0.761	0.761	0.768
		2	5	30	35.78	35.77	35.52	1.513	1.512	1.491	0.839	0.839	0.833
				60	35.83	35.68	35.47	1.521	1.508	1.490	0.841	0.838	0.833
				120	35.70	35.72	35.42	1.390	1.392	1.369	0.804	0.805	0.798
				150	36.28	36.33	36.34	0.894	0.896	0.896	0.645	0.646	0.646
			10	30	36.47	36.47	36.43	1.687	1.687	1.683	0.886	0.886	0.885
				60	36.35	36.08	36.14	1.681	1.657	1.662	0.885	0.878	0.879
				120	36.31	36.56	36.37	1.417	1.437	1.422	0.812	0.818	0.814
				150	45.77	46.06	46.12	0.828	0.815	0.806	0.621	0.616	0.612

Tabella 4.23:  $\sigma_t^* = 123$  MPa;  $\overline{SED} = 1.832$  MJ/m<sup>3</sup>;  $R_C^* = 0.117$  mm;  $\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}} = 0.906$ . Materiale 3.

Nella tabella (4.24) sono indicati i valori di sintesi delle simulazioni in Ansys per i valori della tabella (4.12). La figura (4.24) indica l'andamento della SED media al variare del raggio critico  $R_C^*$ . Inoltre è indicato anche l'andamento della energia critica  $W_{CR}^*$ . L'intersezione delle curve avviene per il valore di raggio critico  $R_C = 0.170$  mm.

$\sigma_t^*$ [MPa]	$R_C^*$ [mm]	$W_{CR}^*$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$SED_{MEDIO}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$(SED/W_{CR})^{0.5}$
30	1.964	0.13	0.285	1.481
38	1.224	0.21	0.409	1.403
44	0.913	0.27	0.513	1.356
47	0.800	0.31	0.565	1.332
50	0.707	0.36	0.618	1.310
54	0.606	0.41	0.688	1.279
58	0.525	0.48	0.758	1.251
70	0.361	0.70	0.958	1.166
80	0.276	0.91	1.117	1.101
90	0.218	1.15	1.276	1.045
95	0.196	1.28	1.357	1.020
102	0.170	1.48	1.479	0.990
105	0.160	1.57	1.522	0.975
123	0.117	2.15	1.832	0.906
135	0.097	2.59	2.064	0.870
155	0.074	3.41	2.440	0.815

Tabella 4.24: Valori della SED per le tensioni fittizie. Materiale 3.

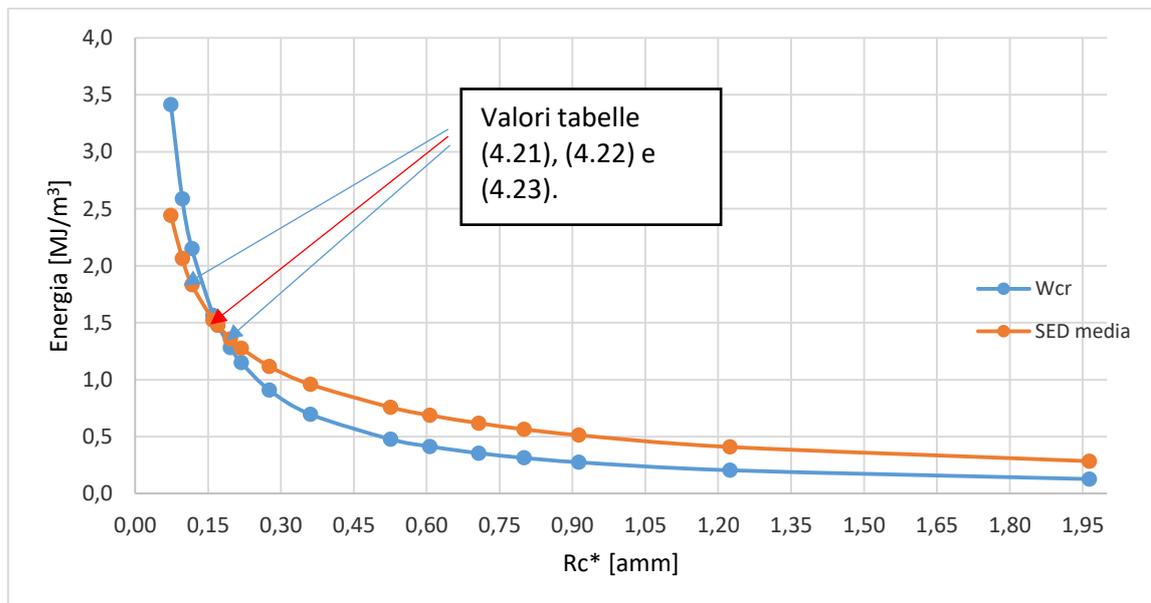


Figura 4.24: Andamento della SED e della  $W_{CR}$  al variare del  $R_C^*$ . Materiale 3.

In figura (4.25) viene riportato la dispersione del rapporto tra la SED e l'energia critica  $W_{CR}$ . Tale andamento rappresenta i valori della tabella (4.22).

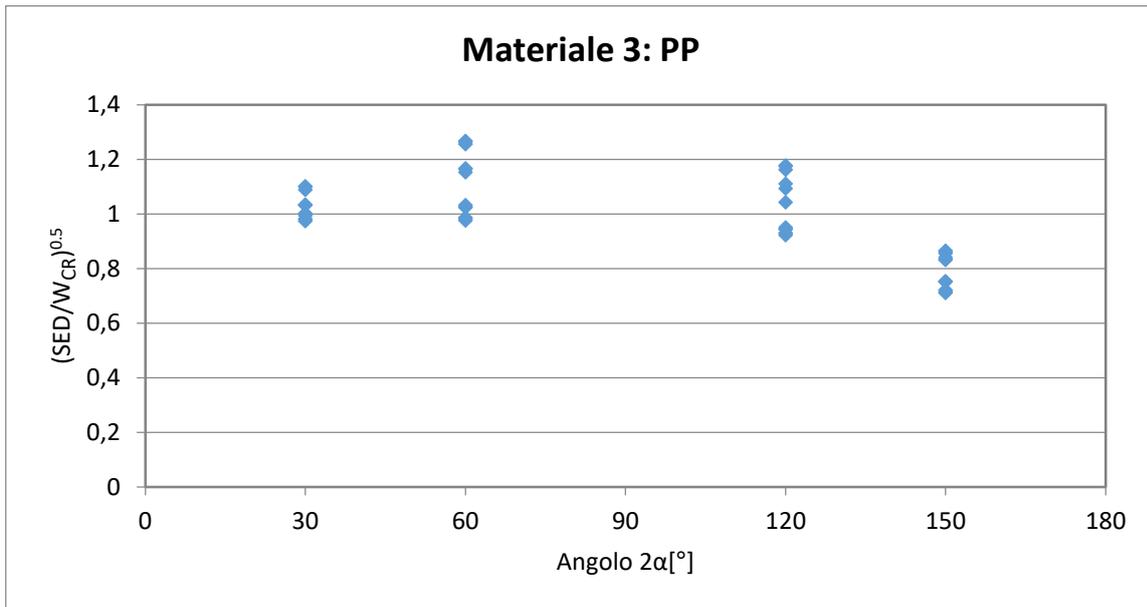


Figura 4.25: Andamento dell'energia normalizzata ricavato dall'analisi di sensibilità  $R_C = 0.170$ . mm.

I tre valori di  $R_C$  risultanti dall'analisi di sensibilità per il caso lineare elastico sono riportati per semplicità nella tabella (4.27). Per confronto, vengono riportato nella tabella (4.26) i valori per il caso perfettamente lineare elastico.

	Materiale 1	Materiale 2	Materiale 3
$R_C$ [mm]	0.856	1.821	1.395
$(SED/W_{CR})^{0.5}$	1.438	1.282	1.422

Tabella 4.26: Valori del raggio critico  $R_C$  per il caso perfettamente lineare elastico.

	Materiale 1	Materiale 2	Materiale 3
$R_C$ [mm]	0.141	0.294	0.170
$(SED/W_{CR})^{0.5}$	0.993	0.989	0.990

Tabella 4.27: Valori del raggio critico  $R_C$  ricavato dall'analisi di sensibilità per il caso lineare elastico.

## 4.9 Verifica finale.

E possibile ora applicare i valori dei raggi critici calcolati fino ad ora ai provini lisci, visto che tali parametri, come già affermato nel capitolo due, sono caratteristiche del materiale indipendenti dalla geometria. Ciò nonostante è necessario determinare l'area corretta su cui mediare l'energia di deformazione e in particolare la distanza  $r_0$  che determina il centro del raggio di controllo  $R_C$ . Per far questo si può procedere in due modi:

1. Considerando il componente all'incipiente cedimento e applicare la teoria della meccanica della frattura lineare elastica;
2. Considerare l'intaglio del provino liscio come la parte finale di un intaglio avente raggio di raccordo  $\rho = 66.5$  mm e angolo  $2\alpha = 116.22^\circ$ .

### 4.9.1 Metodo 1: applicazione della meccanica della frattura lineare elastica.

L'ipotesi alla base di questa tecnica è che il componente sia prossimo alla rottura di schianto. Ciò significa che la cricca sta per nascere e che lo stato tensionale sia il medesimo di quando la cricca è già presente. Appena la cricca nasce istantaneamente propaga e porta a rottura il provino. Si parla in questi casi di nucleazione della cricca. Con questa ipotesi, applicando il criterio di Beltrami è possibile calcolare l'area su cui mediare l'energia tramite l'equazione (4.7) vista nel capitolo due qui riportata per comodità:

$$\frac{E(R_C)}{A(R_C)} = W_{CR} \Rightarrow \frac{1}{E} \left\{ \frac{I_1(\gamma)}{4 \lambda_1} K_I^2 R_C^{2\lambda_1} \right\} \frac{1}{A(R_C)} = \frac{1}{2E} \sigma_t^2 \quad (4.7)$$

Considerando ora l'incipiente cedimento,  $\lambda_1 = 0.5$  e la (4.8) permette il calcolo dell'area  $A(R_C)$ :

$$A(R_C) = \frac{I_1(\pi) K_{IC}^2 R_C}{\sigma_t^2} \quad (4.8)$$

Come visto nel capitolo due,  $I_1$  rappresenta il contributo delle funzioni angolari. Esso è un termine numerico e non dipende dal raggio critico. Viene tabulato nella tabella (2.1) del capitolo due in funzione del coefficiente di Poisson. Per i tre materiali studiati il coefficienti di Poisson assunti sono 0.41, 0.45 e 0.42 e non sono presenti nella tabella menzionata. Per superare tale problema, si è scelto di interpolare i valori della tabella (2.1) tramite una

funzione polinomiale e ricavare quindi il valore del parametro  $I_1$ . Nella figura (4.26) sono rappresentati i valori di  $I_1$  al variare del coefficiente di Poisson  $\nu$ .

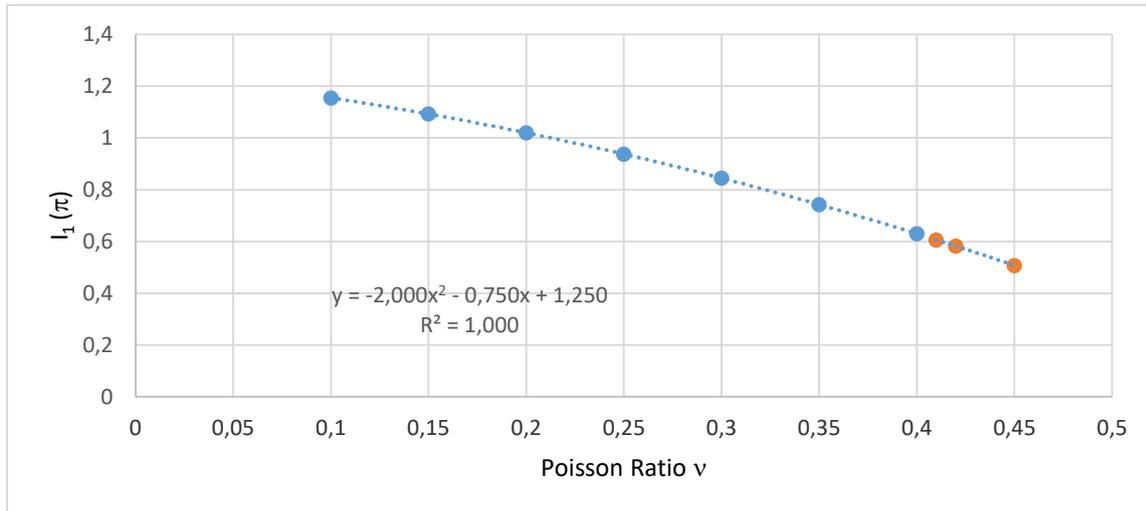


Figura 4.26: Andamento del parametro  $I_1(\pi)$  al variare del coefficiente di Poisson.

La funzione polinomiale interpolatrice fornisce un grado di confidenza pari a  $R = 1$  e ha la seguente espressione:

$$p = -2 \cdot \nu^2 - 0.75 \cdot \nu + 1.25 \quad (4.9)$$

I valori di  $I_1$  e i conseguenti valori dell'area sono riportati nella tabella (4.28).

Materiale	Poisson $\nu$	$I_1(\pi)$	$K_{IC}$ [MPa(mm) <sup>0.5</sup> ]	$R_C$ [mm]	$\sigma_t$ [MPa]	A [mm <sup>2</sup> ]
PA6GF30	0.41	0.606	171.47	0.141	81.55	0.376
PVC	0.45	0.507	150.96	0.294	45.00	1.675
PP	0.42	0.582	97.66	0.170	35.64	0.742

Tabella 4.28: Valori calcolati per il parametro  $I_1$  e conseguenti valori dell'area A.

Una volta nota l'area critica rimane una incognita. Infatti ora è noto l'area e il raggio critico ma la corretta distanza  $r_0$  deve essere determinata tramite un approccio di tipo geometrico. Per tale ragione si osservi la figura (4.27).

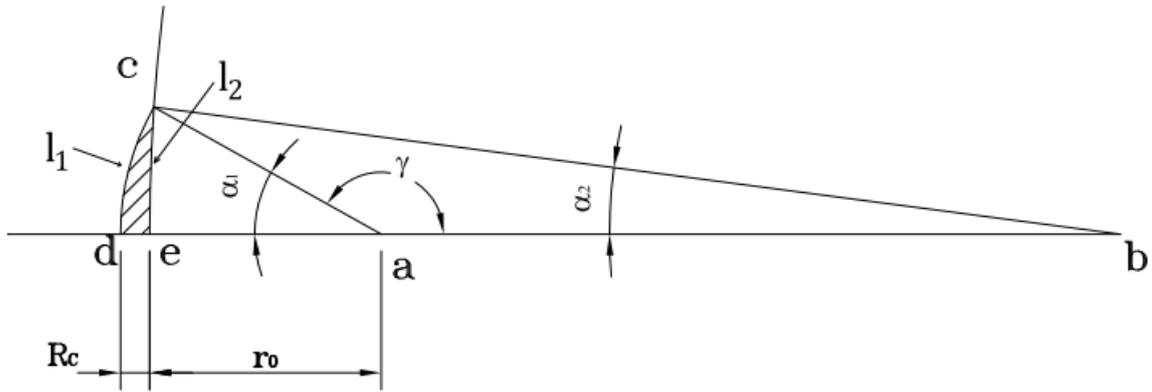


Figura 4.27: Dettaglio dell'area critica nel provino liscio.

Essa rappresenta l'apice dell'intaglio sul provino liscio. L'idea alla base è quella di determinare il valore di  $r_0$  in modo tale che l'area critica  $A$  (area tratteggiata) sia uguale all'area fornita dall'equazione (4.7). Una volta determinato il valore esatto, sarà possibile eseguire una analisi FEM e confrontare i risultati con la tabella (4.23). A tal proposito si possono indentificare alcuni punti notevoli utili per il ragionamento:

- Punto "a": rappresenta il centro dell'area critica  $A$  (area tratteggiata, delimitata dai vertici c-d-e)
- Punto "b": centro del raggio di raccordo  $\rho$  (pari alla distanza c-b)
- Punto "c": intersezione tra l'area critica  $A$  e il raggio di raccordo  $\rho$  (il segmento c-a è pari alla somma tra il raggio critico  $R_c$  e  $r_0$ )

Si definiscono inoltre le seguenti grandezze:

- $S_1$ : Area del settore circolare di estremi a-c-d;
- $S_2$ : Area del settore circolare di estremi b-c-e;
- $S_3$ : Area del settore circolare di estremi a-c-e;
- $A_{tr}$ : Area del triangolo di estremi a-b-c;
- $l_1$ : Arco di estremi c-d;
- $l_2$ : Arco di estremi c-e;
- $\alpha_1$ : Angolo al vertice "a" che sottende l'arco  $l_1$ ;
- $\alpha_2$ : Angolo al vertice "b" che sottende l'arco  $l_2$ ;
- $C_1$ : Circonferenza di raggio  $R_c + r_0$ . (L'arco  $l_1$  è una porzione di tale circonferenza);

- $r$ : Segmento b-c. Rappresenta il raggio con cui il provino liscio è intagliato ( $r = 66.25$  mm).

Il punto c è determinabile tramite l'intersezione di due circonferenze, rispettivamente aventi raggio c-b ed  $R_C + r_0$ . A tal proposito, posizionando un sistema di riferimento sul punto b, le coordinate del punto c risultano essere parametrizzate rispetto  $r_0$  e pari a:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$x = \frac{2 \cdot r \cdot r_0 + R_C^2 + 2 \cdot R_C \cdot r_0 - r^2}{2(r - r_0)} \quad (4.10)$$

Osservando la figura (4.27), è facile notare che l'area A corrisponde a:

$$A = S_1 - S_3 \quad (4.11)$$

Dove l'area  $S_3$  è equivalente a:

$$S_3 = S_2 - A_{tr} \quad (4.12)$$

L'area  $A_{tr}$  è calcolabile grazie alla formula di Erone, la quale afferma che l'area di un triangolo qualsiasi è uguale a:

$$A_{tr} = \sqrt{p(p - \overline{ab})(p - \overline{bc})(p - \overline{ca})}$$

$$p = \frac{\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca}}{2} \quad (4.13)$$

Dove  $p$  rappresenta il semiperimetro del triangolo in questione. Esso risulta essere una costante, indipendente da  $r_0$ . Infatti:

$$p = \frac{(r - r_0) + r + r_0 + R_C}{2} = r + \frac{R_C}{2} \quad (4.14)$$

Manca ora di definire il valore delle aree  $S_1$  e  $S_2$ . Sfruttando le proporzioni, si può scrivere:

$$S_1 : A_1 = l_1 : C_1 \quad (4.15)$$

$$S_1 = \frac{\pi(R_C + r_0)^2 \cdot l_1}{2\pi(R_C + r_0)} = \frac{(R_C + r_0)l_1}{2} \quad (4.16)$$

Con le stesse considerazioni, è possibile calcolare l'area  $S_2$ :

$$S_2 = \frac{r \cdot l_2}{2} \quad (4.17)$$

Per usare la (4.16) e la (4.17) è necessario calcolare gli archi  $l_1$  e  $l_2$ . Sfruttando sempre le proporzioni è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} l_1 : C_1 &= \alpha_1 : 2\pi \\ l_1 &= (R_C + r_0)\alpha_1 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Allo stesso modo,

$$l_2 = r \cdot \alpha_2 \quad (4.19)$$

Gli angoli  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono facilmente calcolabili note le coordinate del punto c:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arcsin\left(\frac{y}{R_C + r_0}\right) \\ \alpha_2 &= \arcsin\left(\frac{y}{r}\right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Va considerato che la (4.8) fornisce il valore del settore circolare completo, mentre fin qui si è considerata solo metà dell'area sfruttando la simmetria. Riaggiornando ora l'equazione (4.11) e ponendola pari alla (4.8), si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{I_1(\pi) K_{fC}^2 R_C}{\sigma_t^2} &= \frac{(r_0 + R_C)l_1 - r \cdot l_2}{2} + \\ &+ [p(p - r + r_0)(p - r)(p - R_C - r_0)]^{0.5} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$r_0^2 q_1 + r_0 q_2 + q_3 = 0 \quad (4.22)$$

In cui i termini  $H$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  sono pari a:

$$\begin{aligned} H &:= \frac{1}{2} \frac{I_1(\pi) K_{fC}^2 R_C}{\sigma_t^2} \\ q_1 &:= \left( \frac{1}{4} l_1^2 + p(p - r) \right) \\ q_2 &:= l_1 \left( \frac{1}{2} l_1 R_C - \frac{1}{2} r l_2 - H \right) - p(p - r)(r - R_C) \\ q_3 &:= (R_C l_1 - r l_2) \left[ \frac{1}{4} (R_C l_1 - r l_2) - H \right] + H^2 - p(p - r)^2 (p - R_C) \end{aligned} \quad (4.23)$$

La (4.22) è una equazione non lineare visto che i termini  $l_1$  e  $l_2$  dipendono da delle funzioni angolari inverse. Ciò nonostante è possibile risolvere la (4.20) per via numerica facendo variare  $r_0$  da 0 fino a un limite superiore. Tale limite nasce dal fatto che la quota  $y$  deve essere un numero reale. Da questa considerazione il limite superiore è pari a:

$$(r_0)_{MAX} = (4r^2 - R_C^2)/(4r + 2R_C) \quad (4.24)$$

I valori di  $r_0$  sono indicati nella tabella (4.29).

Materiale	Poisson $\nu$	$I_1(\pi)$	$K_{IC}$ [MPa(mm) <sup>0.5</sup> ]	$R_C$ [mm]	$\sigma_t$ [MPa]	A [mm <sup>2</sup> ]	$r_0$ [mm]
PA6GF30	0.41	0.606	171.47	0.141	81.55	0.376	11.683
PVC	0.45	0.507	150.96	0.294	45.00	1.675	21.016
PP	0.42	0.582	97.66	0.170	35.64	0.742	21.295

Tabella 4.29: Valori del parametro  $r_0$  con il metodo 1.

In tabella (4.30) sono riportati i valori della SED per i nove provini lisci analizzati tramite FEM, mentre in figura (4.28) è rappresentato la dispersione della SED rispetto al valore unitario. L'energia critica considerata qui è quella fornita dalla vera tensione di rottura dei provini.

Largh.	Altez.	Sez. netta	Mat.	E [MPa]	$K_{IC}$ [MPa√mm]	$R_C$ [mm]	$W_{CR}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	Prova	$\sigma_t$ [MPa]	SED [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\left(\frac{SED}{W_{CR}}\right)^{0.5}$	$\sigma_{PIC}$ [MPa]
50	150	30	1	8180	171.47	0.140	0.406	1	79.14	0.419	1.015	90.98
								2	82.54	0.456	1.059	94.89
								3	82.96	0.460	1.064	95.37
			2	5910	150.97	0.294	0.171	1	44.70	0.176	1.014	51.42
								2	45.18	0.180	1.025	51.97
								3	45.10	0.179	1.023	51.88
			3	3520	97.66	0.170	0.180	1	35.49	0.193	1.035	40.81
								2	35.70	0.196	1.041	41.05
								3	35.72	0.196	1.042	41.07

Tabella 4.30: Valori ottenuti tramite analisi FEM. Metodo 1.

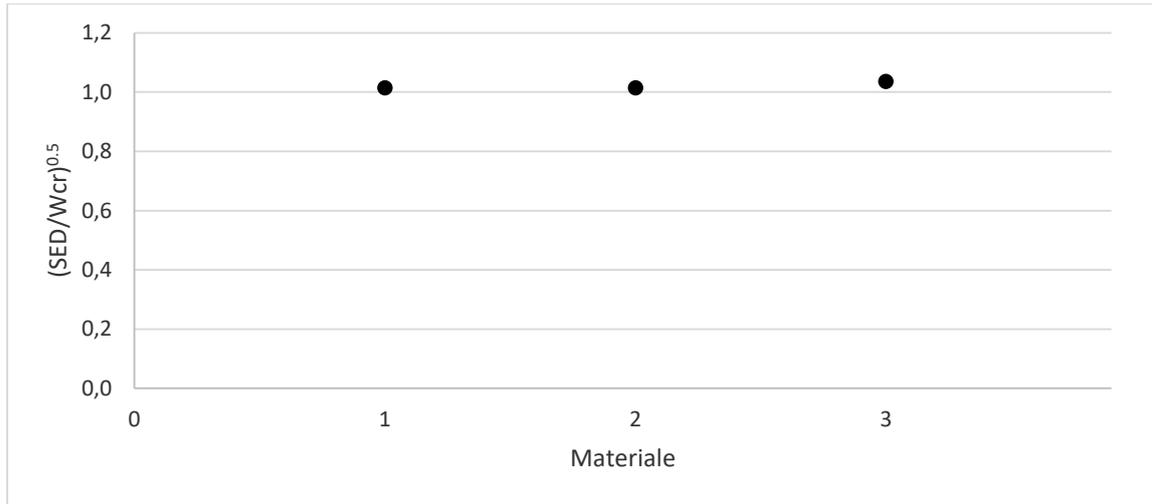


Figura 4.28: Dispersione della SED rispetto al valore unitario.

#### 4.9.2 Metodo 2: Provino liscio intagliato.

Questa seconda verifica considera i provini lisci come la parte finale di un intaglio a V avente raggio di raccordo  $\rho$  pari a 66.5 mm e angolo di intaglio  $2\alpha$  pari a  $116.22^\circ$ . La figura (4.29) rappresenta l'intaglio del provino liscio modellato in Ansys. In questo modo è possibile applicare la formula (4.5), qui riportata per semplicità:

$$r_0 = \rho(\pi - 2\alpha)/(2\pi - 2\alpha) \quad (4.25)$$

Il valore ottenuto è riportato nella colonna di estrema destra della tabella (4.31). Viene anche riportato lo stesso valore di  $r_0$  e dell'area critica calcolati con il metodo 1 e con il metodo 2.

Materiale	A/2 [mm <sup>2</sup> ] Metodo 1	A/2 [mm <sup>2</sup> ] Metodo 2	$\alpha_2$ [°] Metodo 1	$\alpha_2$ [°] Metodo 2	$r_0$ [mm] Metodo 1	$r_0$ [mm] Metodo 2
PA6GF30	0.187	0.241	1°43'43''	2°13'47''	11.614	17.333
PVC	0.838	0.731	3°41'10''	3°13'37''	20.966	
PP	0.371	0.321	2°49'44''	2°26'58''	21.276	

Tabella 4.31: Valori di  $r_0$  e dell'area critica calcolati con il metodo 1 e metodo 2.

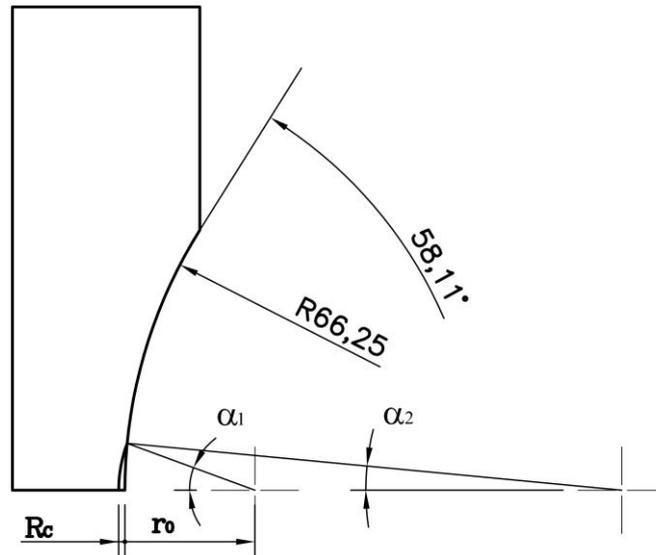


Figura 4.29: Dettaglio del provino intagliato per la verifica con il metodo 2.

La tabella (4.32) rappresenta i dati sperimentali e la figura (4.30) la dispersione della SED normalizzata rispetto all'energia critica  $W_C$ . In questo caso la  $W_C$  è l'energia critica fornita dalla vera tensione di rottura dei provini lisci.

Largh.	Altez.	Sez. netta	Mat.	E [MPa]	$K_{IC}$ [MPa $\sqrt{mm}$ ]	$R_C$ [mm]	$W_{CR}$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	Prov.	$\sigma_t$ [MPa]	SED [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\left(\frac{SED}{W_{CR}}\right)^{0.5}$	$\sigma_{PIC}$ [MPa]
50	150	30	1	8180	171.47	0.140	0.406	1	79.14	0.418	1.015	90.98
								2	82.54	0.455	1.058	94.89
								3	82.96	0.460	1.064	95.37
			2	5910	150.97	0.294	0.171	1	44.70	0.176	1.014	51.42
								2	45.18	0.180	1.025	51.97
								3	45.10	0.179	1.023	51.88
			3	3520	97.66	0.170	0.180	1	35.49	0.193	1.036	40.81
								2	35.70	0.196	1.042	41.05
								3	35.72	0.196	1.042	41.07

Tabella 4.32: Grandezze caratteristiche e dati elaborati per i provini lisci dei tre materiali.

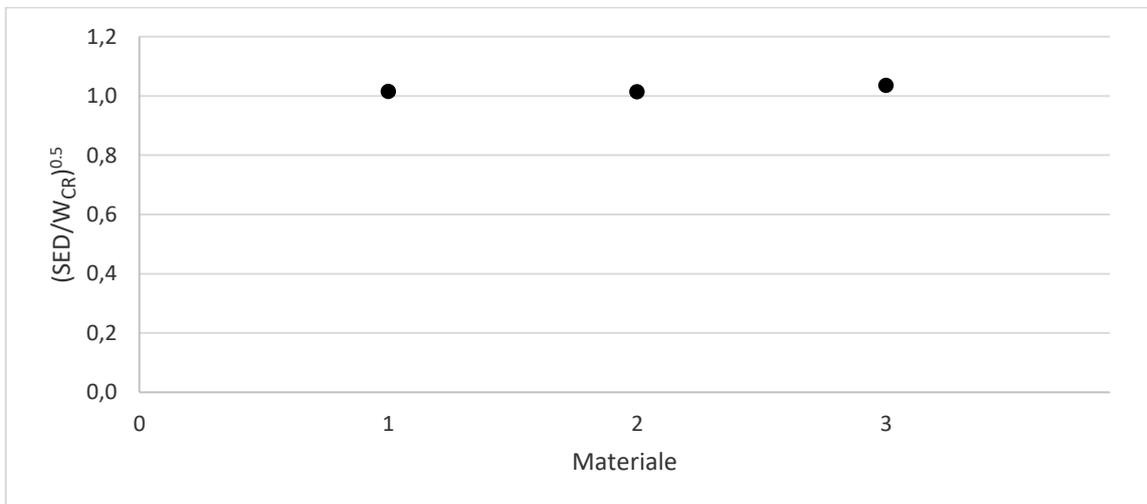


Figura 4.30: Andamento dell'energia per i tre materiali. Provini lisci.

Il valore della SED risulta essere praticamente indistinguibili tra i due metodi di verifica adottati. Questo fatto è giustificabile in quanto la zona a massima tensione è completamente inscritta nell'area critica in entrambi i due metodi. Ciò che cambia è solamente nella forma dell'area critica la quale sarà più allungata agli estremi (nel caso del materiale 1) o più corta (nel caso del materiale 2 e 3). Quest'ultima considerazione nasce dall'analisi dell'angolo  $\alpha_2$  di tabella (4.31).



# Capitolo 5

## Modelli basati sull'integrale della curva tensione-deformazione.

### 5.1 Curva lineare elastica.

Un'alternativa all'analisi di sensibilità lineare elastica è quella di determinare il raggio critico partendo dall'integrale della curva tensione-deformazione, ovvero dall'energia spesa per deformare il provino. A tal proposito, considerando che i dati forniti dalla macchina di prova sono affetti da rumore (si veda il dettaglio della figura (5.1)), si è scelto di costruire una curva tensione-deformazione di tipo polinomiale che sia la miglior curva interpolante per i dati in oggetto.

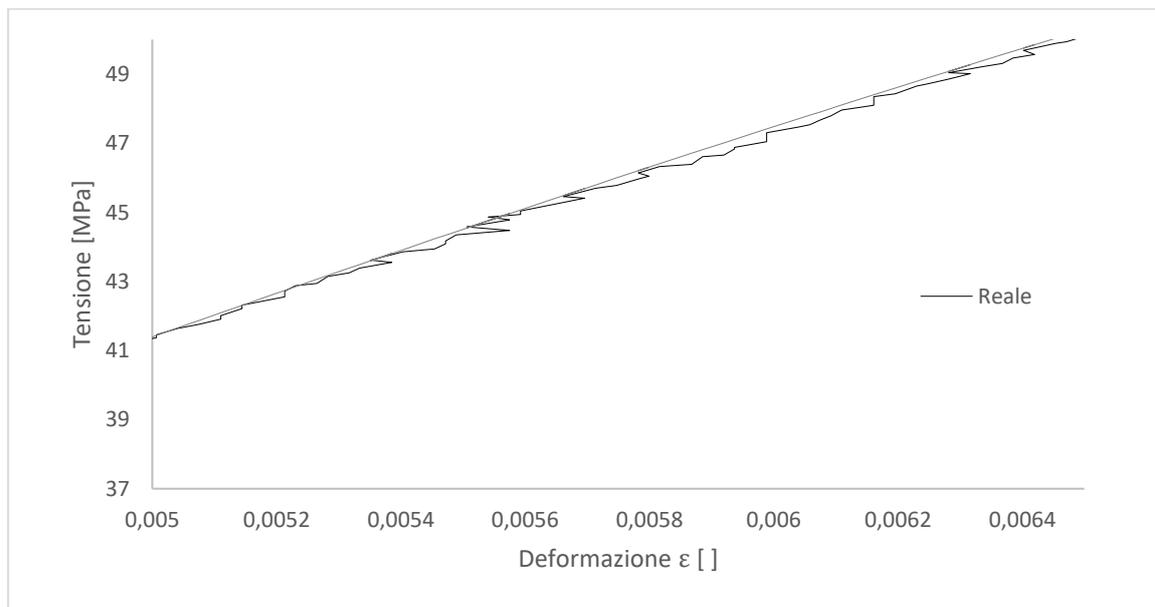


Figura 5.1: Dettaglio del rumore sui dati forniti dalla cella di carico. Provino 1, materiale 1.

Questa operazione va eseguita per ognuno dei tre provini lisci di ogni materiale. Inoltre, le curve sono state trattate in senso ingegneristico, ovvero trattandole fino al valore di tensione massima, tralasciando la zona delle grandi deformazioni. Appena si è in possesso dei polinomi l'integrale è immediato da eseguire. Il valore di energia inteso come lavoro speso è ottenuto come media tra i tre provini lisci.

La forma polinomiale è riportata nella equazione (5.1) e i coefficienti sono riportati nella tabella (5.1). Il best fitting (nel senso dei minimo quadratico) è stato eseguito tramite la funzione polyfit di Matlab®. La scelta del grado del polinomio è stata fatta in base a tre criteri: il polinomio deve avere il grado più basso possibile in modo da non creare problemi di simulazione in Ansys; l'errore massimo punto a punto tra la curva reale e la curva polinomiale deve avere carattere stabile al variare del grado polinomiale; il coefficiente di correlazione R deve essere prossimo a uno. Nelle figure (5.2) - (5.4) sono rappresentati gli errori massimi tra le curve reali e polinomiali per ciascuno dei tre materiali. Tramite i tre criteri appena citati, si è scelto un grado polinomiale pari a tre per i materiali 1 e 2, mentre per il materiale 3 si è scelto un grado quattro.

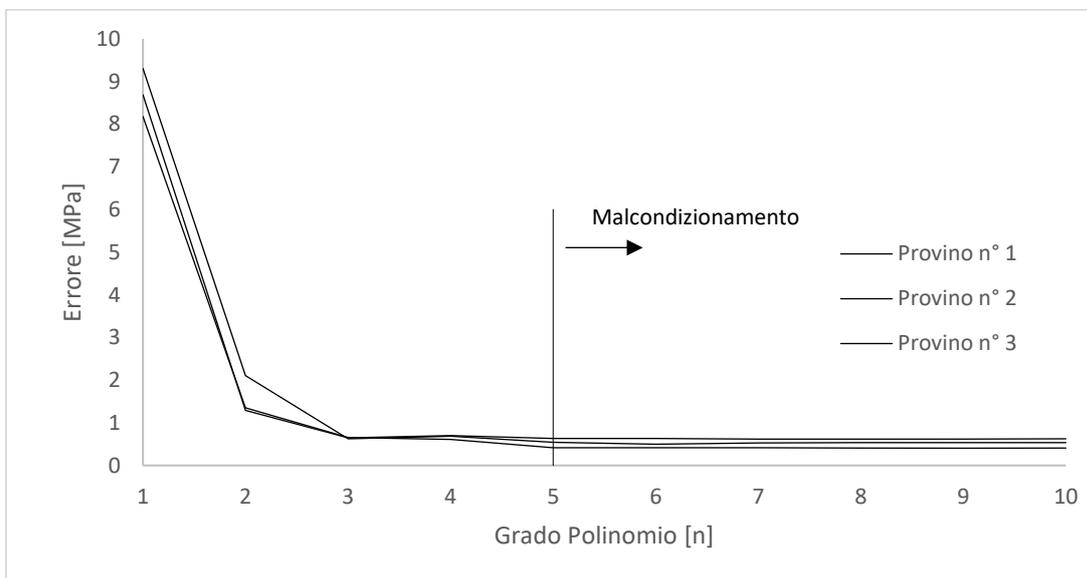


Figura 5.2: Andamento errore tra la curva reale e la curva polinomiale. Materiale 1.

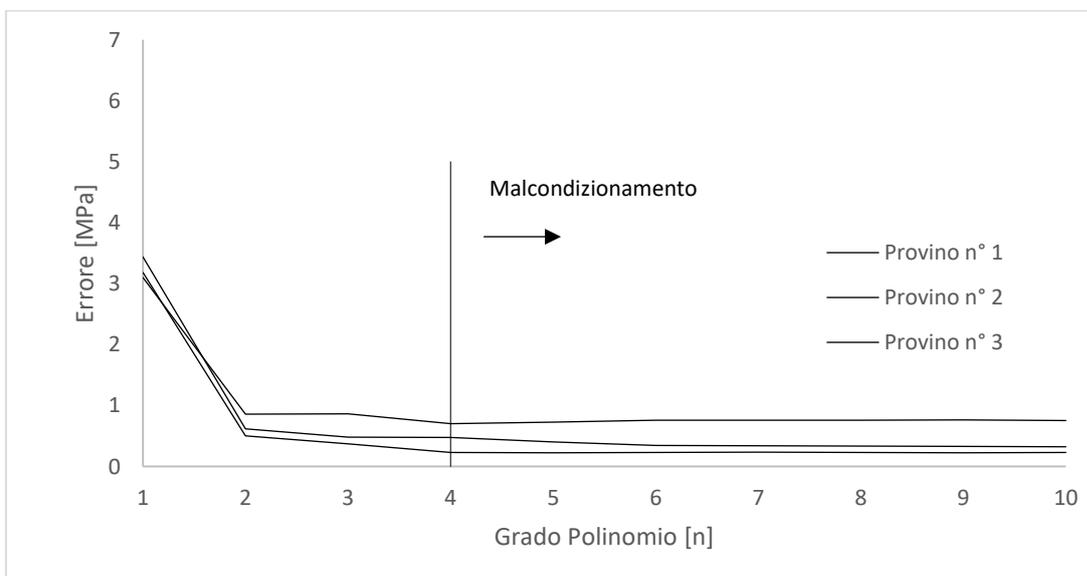


Figura 5.3: Andamento errore tra la curva reale e la curva polinomiale. Materiale 2.

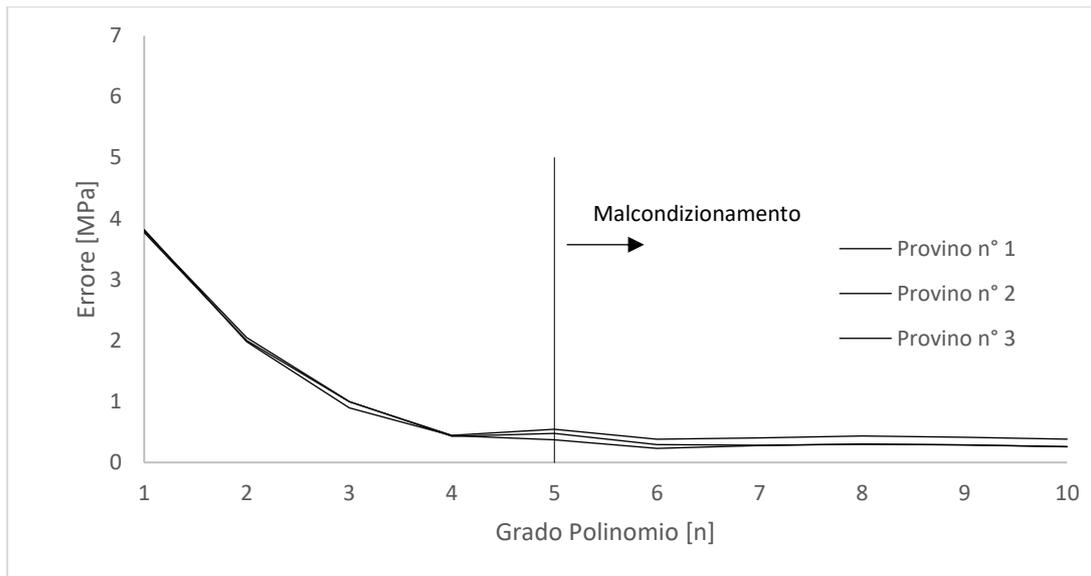


Figura 5.4: Andamento errore tra la curva reale e la curva polinomiale. Materiale 3.

$$\sigma(\epsilon) = p_1\epsilon^n + p_2\epsilon^{n-1} + p_3\epsilon^{n-2} + \dots + p_n\epsilon + p_{n+1} \quad (5.1)$$

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	R
Provino 1	$2.92 \cdot 10^6$	$-3.51 \cdot 10^5$	$9.68 \cdot 10^3$	1.4	0.99
Provino 2	$4.56 \cdot 10^6$	$-4.27 \cdot 10^5$	$1.08 \cdot 10^4$	$-2.29 \cdot 10^{-2}$	
Provino 3	$2.51 \cdot 10^6$	$-3.58 \cdot 10^5$	$1.02 \cdot 10^4$	$-2.38 \cdot 10^{-1}$	

Tabella 5.1: Valori dei coefficienti polinomiali. Grado  $n = 3$ . Materiale 1.

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	R
Provino 1	$3.42 \cdot 10^6$	$-3.40 \cdot 10^5$	$7.37 \cdot 10^3$	$-2.48 \cdot 10^{-1}$	0.99
Provino 2	$3.32 \cdot 10^6$	$-3.16 \cdot 10^5$	$7.10 \cdot 10^3$	$-8.84 \cdot 10^{-2}$	
Provino 3	$3.11 \cdot 10^6$	$-3.14 \cdot 10^5$	$7.08 \cdot 10^3$	$-2.26 \cdot 10^{-1}$	

Tabella 5.2: Valori dei coefficienti polinomiali. Grado  $n = 3$ . Materiale 2.

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	R
Provino 1	$-2.26 \cdot 10^8$	$1.50 \cdot 10^7$	$-3.90 \cdot 10^5$	$5.35 \cdot 10^3$	$-8.85 \cdot 10^{-1}$	0.99
Provino 2	$-2.06 \cdot 10^8$	$1.40 \cdot 10^7$	$-3.73 \cdot 10^5$	$5.28 \cdot 10^3$	-1.28	
Provino 3	$-1.81 \cdot 10^8$	$1.26 \cdot 10^7$	$-3.46 \cdot 10^5$	$5.05 \cdot 10^3$	$-6.05 \cdot 10^{-1}$	

Tabella 5.3: Valori dei coefficienti polinomiali. Grado  $n = 4$ . Materiale 3.

Nelle figure (5.5)-(5.7) sono riportate le curve reali e le curve polinomiali riferite ai tre provini lisci per ognuno dei tre materiali. Le curve polinomiali sono ben sovrapposte alle curve reali e risultano indistinguibili.

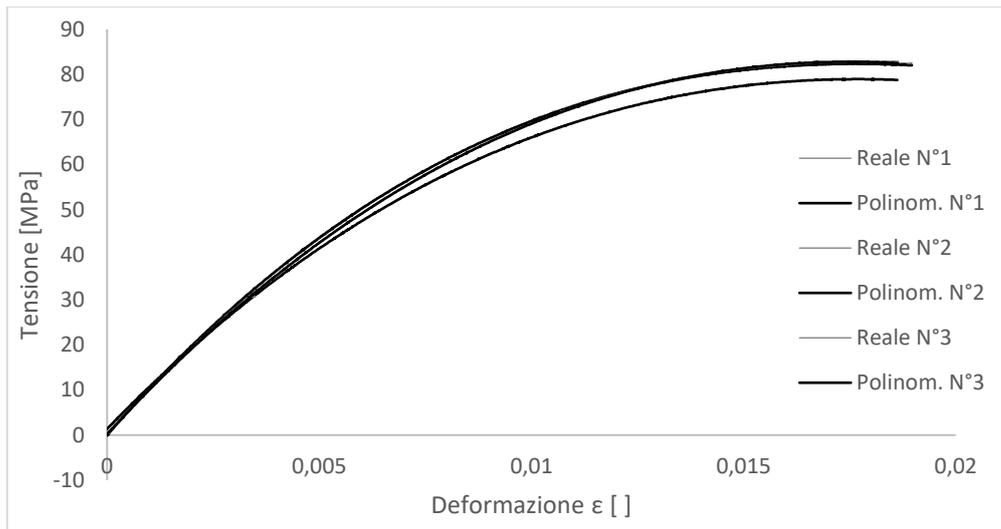


Figura 5.5: Andamento curve reali e polinomiali. Materiale 1.

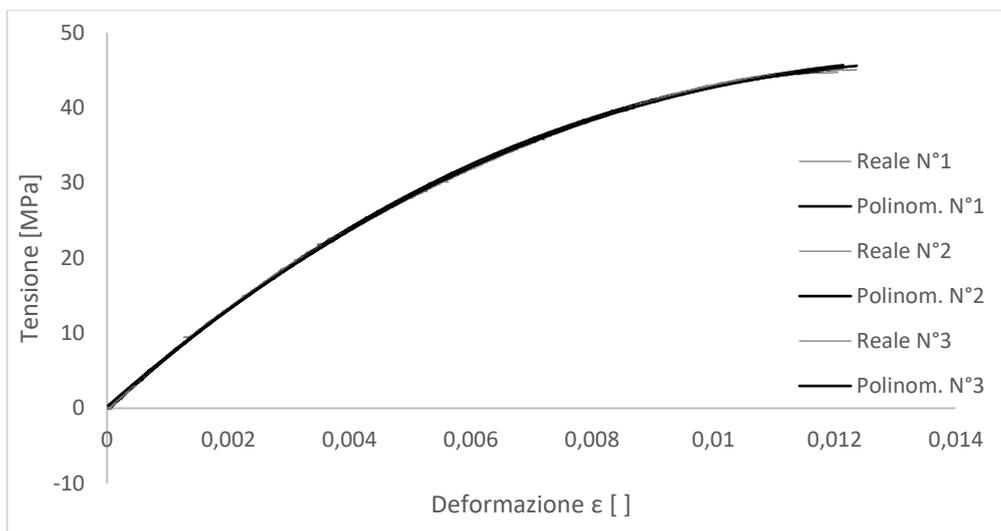


Figura 5.6: Andamento curve reali e polinomiali. Materiale 2.

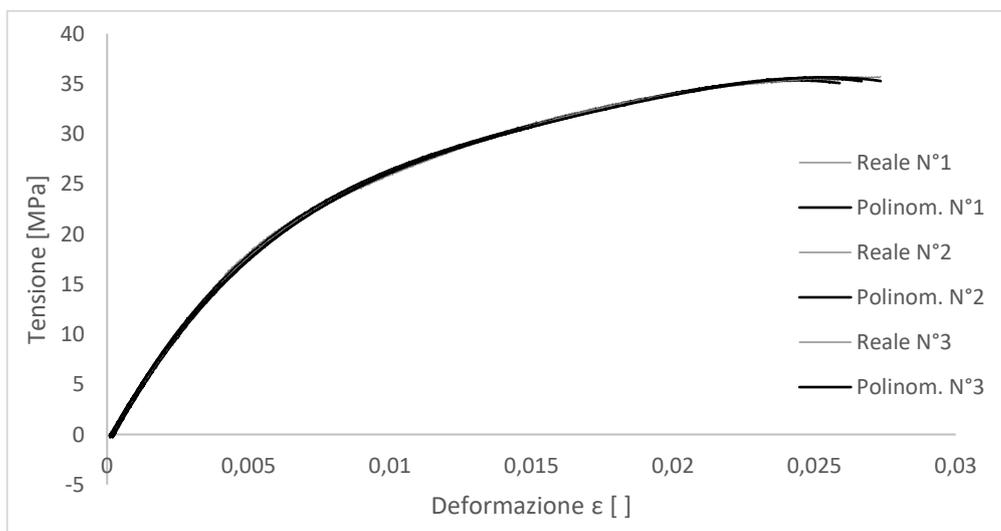


Figura 5.7: Andamento curve reali e polinomiali. Materiale 3.

Per semplice integrazione del polinomio, ora è possibile calcolare il lavoro speso per deformare i tre materiali. Una volta noti i valori di energia, è possibile calcolare la tensione equivalente del caso lineare elastico tramite l'equazione (5.2) (in figura (5.8) una rappresentazione). Tramite la formula (5.3) è possibile infine calcolare il raggio critico  $R_C$  e eseguire un'analisi FEM. Nella tabella (5.4) sono indicati i valori di energia, di tensione equivalente  $\sigma_{eq}$  e il raggio critico rispettivi di ogni materiale.

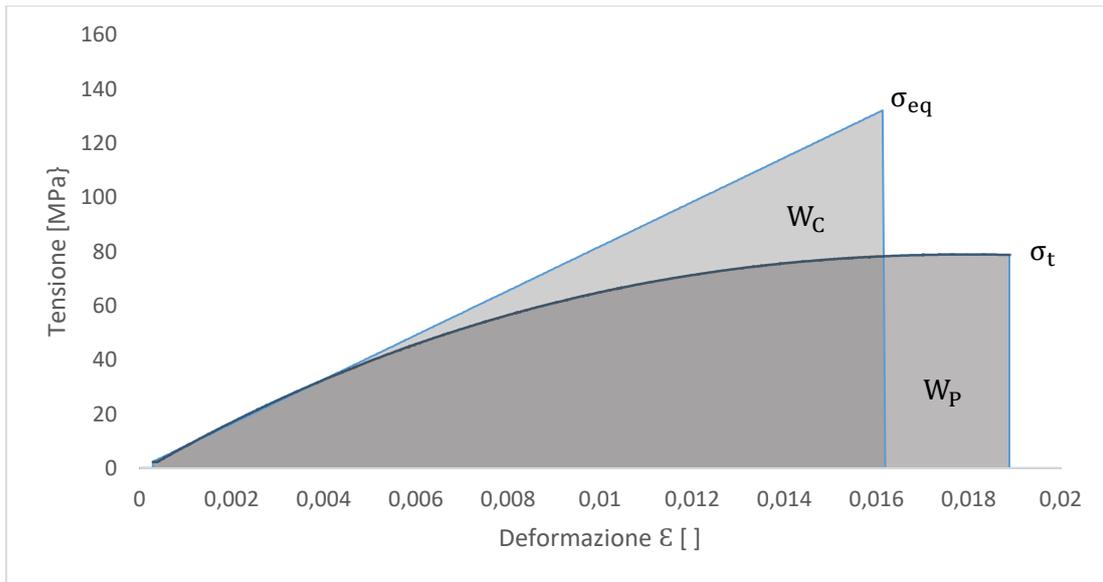


Figura 5.8: Uguaglianza energetica tra i due modelli, lineare e reale.

$$W_P = W_C \rightarrow W_P = \frac{1}{2E} \sigma_{eq}^2 \rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{2EW_P} \quad (5.2)$$

$$R_C = \frac{(1 + \nu)(5 - 8\nu)}{4\pi} \left( \frac{K_{IC}}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (5.3)$$

Mat.	$\nu$	$K_{IC}$ [MPa·mm <sup>0.5</sup> ]	E [MPa]	$\sigma_t$ [MPa]	$\epsilon_{MAX}$	N° Prova	$W_P$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\bar{W}_P$ [MJ/m <sup>3</sup> ]	$\sigma_{eq}$ [MPa]	$R_C$ [mm]
1	0.41	171.47	8180.99	81.55	0.019	1	1.037	1.078	132.79	0.322
						2	1.115			
						3	1.081			
2	0.45	150.97	5910.54	45.00	0.012	1	0.352	0.357	64.92	0.874
						2	0.354			
						3	0.364			
3	0.42	97.66	3520.58	35.64	0.027	1	0.675	0.698	70.10	0.360
						2	0.697			
						3	0.722			

Tabella 5.4. Valori caratteristici dell'equivalente modello lineare elastico usando l'integrale della curva polinomiale.

Nella successive tabelle (5.5)-(5.7) sono raccolti i dati provenienti dall'analisi FEM, mentre nei grafici (5.9)-(5.11) sono rappresentati la dispersione della SED normalizzata per i tre materiali. Negli stessi grafici sono anche riportati gli andamenti della SED per i raggi critici derivanti dall'analisi di sensibilità.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.993
				60	51.03	48.24	47.07	1.430	1.278	1.217	1.152	1.089	1.063
				120	56.53	57.00	56.73	1.552	1.578	1.564	1.200	1.210	1.204
				150	75.83	70.80	71.92	1.474	1.285	1.326	1.169	1.092	1.109
			10	30	47.76	48.15	46.74	1.327	1.349	1.271	1.110	1.119	1.086
				60	45.92	45.51	44.51	1.333	1.310	1.253	1.112	1.102	1.078
				120	56.09	58.52	54.92	1.519	1.654	1.456	1.187	1.239	1.162
				150	71.49	68.93	69.66	1.160	1.079	1.101	1.037	1.000	1.011
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	1.692	1.852	1.732	1.253	1.311	1.268
				60	67.10	67.34	70.19	1.814	1.827	1.985	1.297	1.302	1.357
				120	71.73	72.74	70.65	1.898	1.952	1.842	1.327	1.346	1.307
				150	77.82	81.25	75.96	1.409	1.536	1.342	1.143	1.194	1.116
			10	30	70.22	74.82	71.91	2.124	2.411	2.227	1.404	1.496	1.437
				60	70.47	72.40	69.56	2.156	2.276	2.101	1.414	1.453	1.396
				120	73.53	76.37	76.05	1.971	2.126	2.108	1.352	1.404	1.399
				150	84.82	85.68	86.63	1.500	1.531	1.565	1.180	1.192	1.205
		66.25	10	116.2	79.14	82.54	82.96	0.349	0.380	0.384	0.621	0.647	0.651

Tabella 5.5: Analisi FEM per il materiale 1.  $R_C = 0.322$  mm,  $W_C = 1.078$  MJ/m<sup>3</sup>.

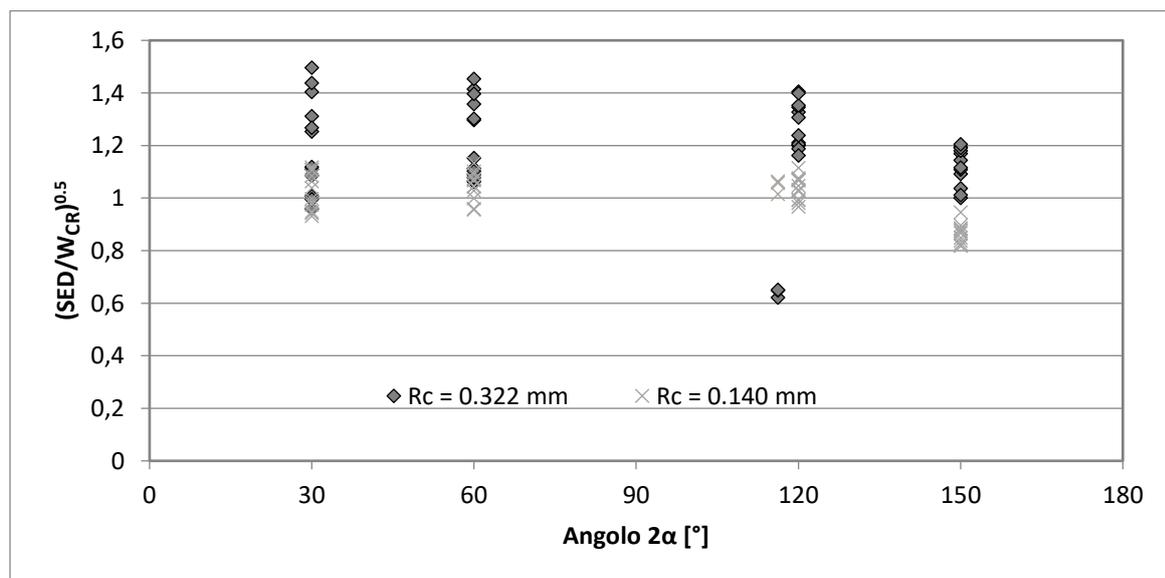


Figura 5.9: Andamento della SED normalizzata ricavato dall'analisi FEM. Materiale 1,  $R_C = 0.322$  mm,  $W_C = 1.078$  MJ/m<sup>3</sup>.

Larghez. [mm]	Altezz. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.409
				60	51.03	48.24	47.07	0.474	0.469	0.459	1.153	1.146	1.135
				120	56.53	57.00	56.73	0.516	0.521	0.511	1.203	1.209	1.198
				150	75.83	70.80	71.92	0.400	0.409	0.400	1.059	1.071	1.059
			10	30	47.76	48.15	46.74	0.453	0.442	0.448	1.127	1.113	1.121
				60	45.92	45.51	44.51	0.520	0.515	0.520	1.208	1.202	1.208
				120	56.09	58.52	54.92	0.583	0.590	0.581	1.279	1.287	1.276
				150	71.49	68.93	69.66	0.388	0.387	0.396	1.043	1.041	1.053
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	0.562	0.560	0.558	1.255	1.254	1.251
				60	67.10	67.34	70.19	0.557	0.579	0.570	1.250	1.274	1.265
				120	71.73	72.74	70.65	0.543	0.546	0.564	1.233	1.238	1.258
				150	77.82	81.25	75.96	0.395	0.392	0.399	1.052	1.049	1.058
			10	30	70.22	74.82	71.91	0.634	0.637	0.635	1.334	1.336	1.335
				60	70.47	72.40	69.56	0.649	0.665	0.649	1.349	1.366	1.350
				120	73.53	76.37	76.05	0.580	0.570	0.564	1.276	1.265	1.257
				150	84.82	85.68	86.63	0.373	0.378	0.379	1.023	1.029	1.031
		66.25	10	116.2	44.70	45.18	45.10	0.172	0.176	0.175	0.695	0.702	0.700

Tabella 5.5: Analisi FEM per il materiale 2.  $R_C = 0.874$  mm,  $W_C = 0.357$  MJ/m<sup>3</sup>.

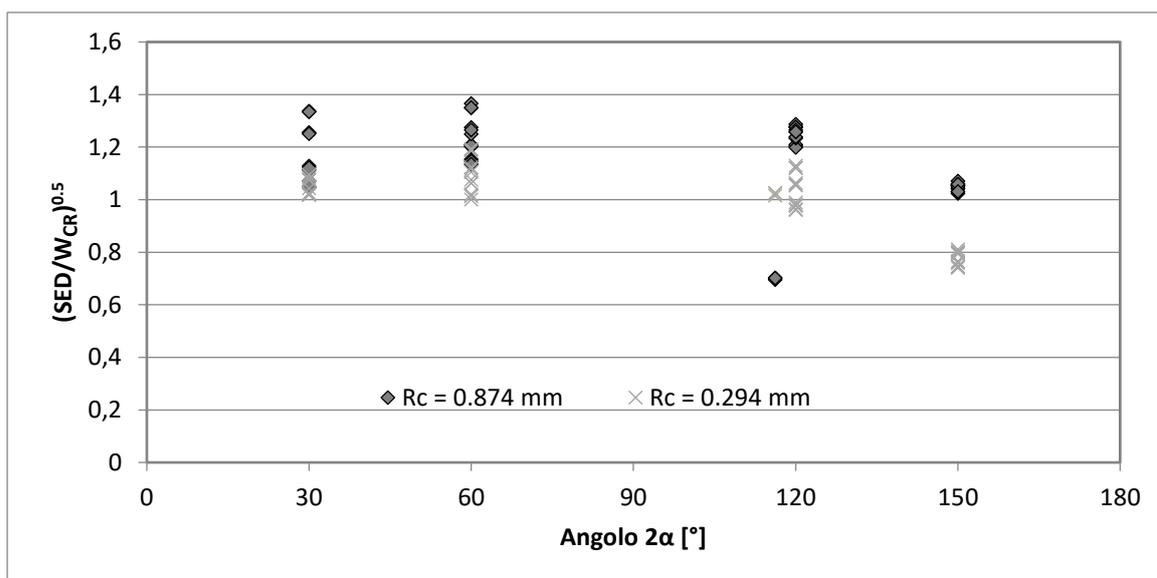


Figura 5.10: Andamento della SED normalizzata ricavato dall'analisi FEM. Materiale 2,  $R_C = 0.874$  mm,  $W_C = 0.357$  MJ/m<sup>3</sup>.

Larghez. [mm]	Altezz. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione di rottura [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{cr})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
					50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.704
				60	51.03	48.24	47.07	0.942	0.946	0.923	1.162	1.164	1.150
				120	56.53	57.00	56.73	1.059	0.935	1.026	1.232	1.158	1.212
				150	75.83	70.80	71.92	0.741	0.744	0.728	1.030	1.033	1.021
			10	30	47.76	48.15	46.74	0.849	0.852	0.832	1.103	1.105	1.092
				60	45.92	45.51	44.51	1.152	1.130	1.145	1.285	1.273	1.281
				120	56.09	58.52	54.92	1.163	1.159	1.132	1.291	1.289	1.273
				150	71.49	68.93	69.66	0.715	0.714	0.729	1.012	1.012	1.022
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	1.106	1.105	1.090	1.259	1.258	1.250
				60	67.10	67.34	70.19	1.148	1.138	1.125	1.282	1.277	1.269
				120	71.73	72.74	70.65	1.014	1.016	0.999	1.206	1.207	1.196
				150	77.82	81.25	75.96	0.670	0.672	0.672	0.980	0.981	0.982
			10	30	70.22	74.82	71.91	1.262	1.262	1.259	1.345	1.345	1.343
				60	70.47	72.40	69.56	1.260	1.242	1.246	1.344	1.334	1.336
				120	73.53	76.37	76.05	1.057	1.071	1.060	1.231	1.239	1.233
				150	84.82	85.68	86.63	0.612	0.603	0.596	0.937	0.929	0.924
		66.25	10	116.2	35.49	35.70	35.72	0.192	0.194	0.195	0.525	0.528	0.528

Tabella 5.6: Analisi FEM per il materiale 3.  $R_c = 0.360$  mm,  $W_c = 0.698$  MJ/m<sup>3</sup>.

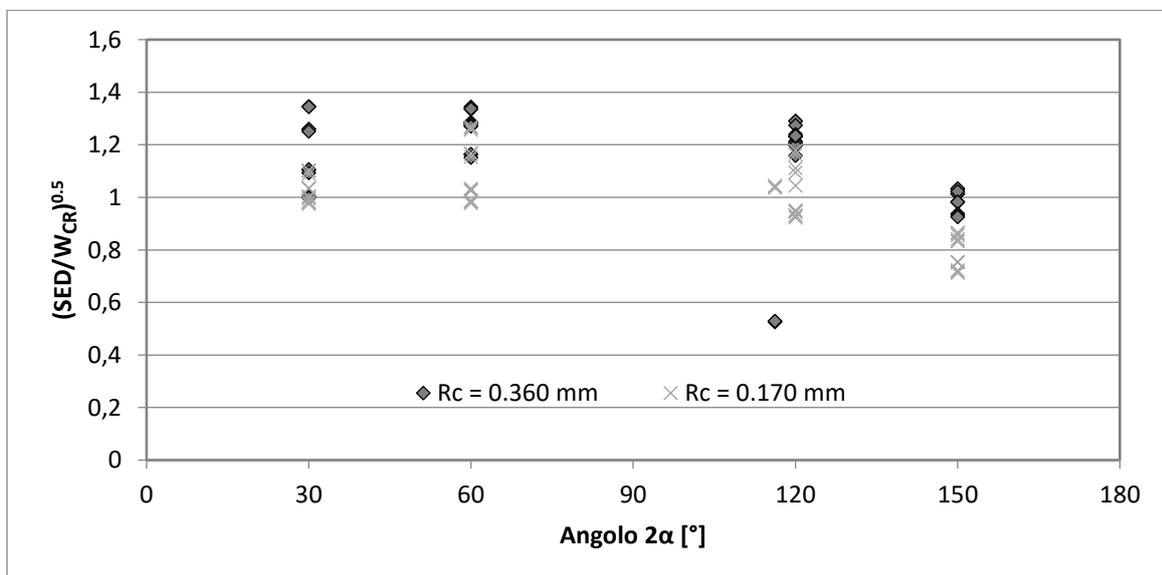


Figura 5.11: Andamento della SED normalizzata ricavato dall'analisi FEM. Materiale 3,  $R_c = 0.360$  mm,  $W_c = 0.698$  MJ/m<sup>3</sup>.

E' immediato osservare che per tutti i tre materiali la densità di energia normalizzata risulta essere maggiore rispetto al valore unitario. Ciò significa che il modello lineare costruito in

base all'energia della curva reale sottostima la vera energia del materiale a sopportare una sollecitazione di modo uno. La miglior stima del raggio critico risulta essere quella fornita dall'analisi di sensibilità, anche in forza del fatto che i provini lisci (per una ascissa di  $116^\circ$ ) risultano essere per tutti e tre i materiali fortemente al di sotto del valore unitario (da un valore minimo di 0.52 a un valore massimo di 0.70). Nella tabella (5.7) sono indicati i valori medi della SED per gli intagli e i valori di verifica per i provini lisci.

	$W_p$			Analisi Sensibilità lineare Elastica		
	$R_c$ [mm]	Intagli $\frac{SED}{W_{CR}}^{0.5}$	Lisci $\frac{SED}{W_{CR}}^{0.5}$	$R_c$ [mm]	Intagli $\frac{SED}{W_{CR}}^{0.5}$	Lisci $\frac{SED}{W_{CR}}^{0.5}$
Mat. 1 PA6GF30	0.322	1.210	0.640	0.140	0.993	1.045
Mat. 2 PVC	0.874	1.182	0.700	0.294	0.989	1.021
Mat. 3 PP	0.360	1.164	0.527	0.170	0.990	1.040

Tabella 5.7: Valori medi della SED per i due modelli utilizzati.

## 5.2 Modelli iperelastici.

I modelli iperelastici sono usati per caratterizzare quei materiali che rispondono elasticamente quando soggetti a enormi deformazioni ma che allo stesso tempo il legame tensione-deformazione non è lineare. I materiali che ricadono sotto questa categoria di modelli subiscono un notevole cambiamento di forma quando sono sottoposti a uno stato tensionale. La figura (5.12a) rappresenta un confronto tra un materiale lineare-elastico e un materiale iperelastico.

Le principali applicazioni della teoria sono:

- Modellare il comportamento di polimeri o schiume polimeriche che possono essere soggette a grandi e reversibili variazioni di forma (per esempio spugne);
- Modellare elastomeri;
- Modellare tessuti biologici.

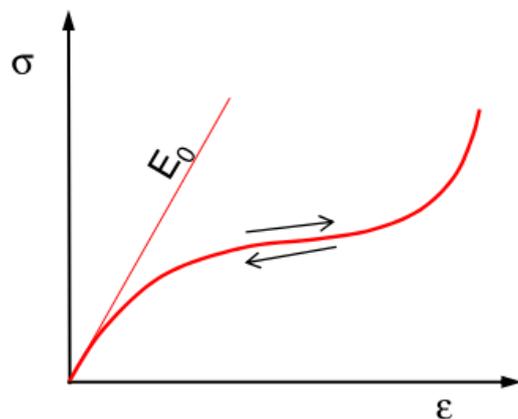


Figura 5.12a: Confronto tra una curva lineare-elastica ( $E_0$ ) e una curva iperelastica.

In generale la risposta di un tipico polimero è fortemente dipendente dalla temperatura, dalla storia di deformazione e dall'ampiezza del carico. Infatti i polimeri possiedono tre regimi di comportamento meccanico, chiamati “vetroso”, “viscoelastico” e “gommoso”. I vari regimi possono essere identificati per un certo polimero applicando al solido una variazione sinusoidale dello sforzo di taglio e misurando la conseguente ampiezza della deformazione. Un tipico risultato è illustrato nella figura (5.12b), la quale mostra la variazione subita dal modulo di Young al cambiare della temperatura.

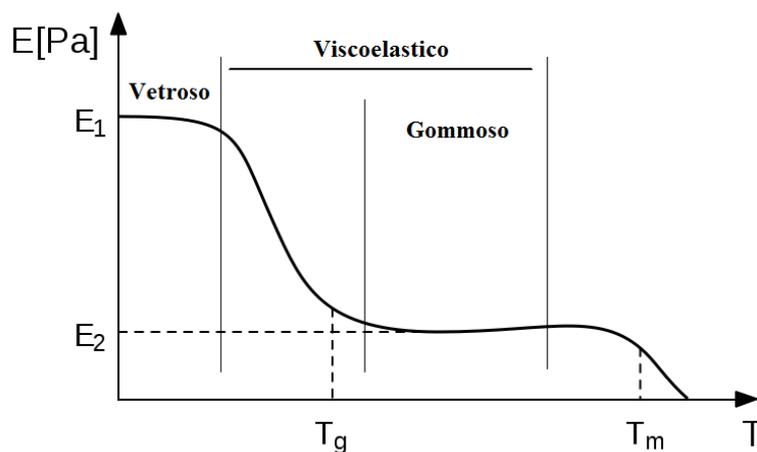


Figura 5.12b: Andamento del modulo di Young al variare della temperatura.

A una temperatura critica nota come temperatura di transizione duttile-fragile  $T_g$ , un materiale polimerico subisce un forte cambiamento della risposta meccanica. Al di sotto di questa temperatura esso si comporta come un materiale fragile, avente una risposta rigida. Vicino alla temperatura di transizione duttile-fragile, la tensione dipende fortemente dall'ampiezza della deformazione. Alla temperatura di transizione c'è una drammatica

caduta del modulo di Young. Al di sopra di questa temperatura c'è un regime dove il polimero mostra un comportamento gommoso. In questa zona la risposta è elastica; la tensione non dipende in modo esclusivo dall'ampiezza della deformazione o dalla storia di deformazione, mentre il modulo di Young incrementa leggermente con la temperatura. Tutti i polimeri mostrano questo trend generale, ma l'estensione di ogni regione e il comportamento dettagliato all'interno di ogni zona dipende dalla struttura molecolare del solido. Polimeri con una forte reticolazione sono i più probabili a mostrare un comportamento di tipo gommoso. Le leggi iperelastiche sono intese per approssimare tale comportamento.

Le caratteristiche alla base della teoria sono:

- 1) Il materiale è quasi idealmente elastico, cioè (i) quando deformato a una temperatura costante la tensione è una funzione solo della deformazione puntuale e indipendente dalla storia o dall'ampiezza del carico, (ii) il comportamento è reversibile: nessun lavoro è accumulato nel solido quando soggetto a un ciclo chiuso di deformazione.
- 2) Il materiale possiede un'ottima resistenza ai cambiamenti di volume. Il modulo di compressibilità (rapporto tra la componente idrostatica della tensione e la variazione di volume) è comparabile a quella dei metalli;
- 3) Il materiale subisce dei forti scorrimenti: il modulo di taglio è nell'ordine di  $10^{-5}$  volte rispetto quello di molti metalli;
- 4) Il materiale è isotropico: la risposta tensione-deformazione è indipendente dalla orientazione del materiale;
- 5) Il modulo di taglio è dipendente dalla temperatura: il materiale inizia a irrigidirsi mentre si riscalda, in netto contrasto rispetto i metalli;
- 6) Il materiale rilascia calore quando è sottoposto a trazione.

La letteratura scientifica riguardante il legame tensione-deformazione dei modelli iperelastici è abbastanza difficile da seguire, in parte perché non esiste una notazione univoca per indicare le grandezze in esame, in parte perché esistono molti modi per scrivere le stesse equazioni. Ciò nonostante sono sempre presenti alcune caratteristiche:

- 1) E' definita la relazione tensione-deformazione per il solido specificando la sua densità di energia di deformazione  $W$  come funzione del tensore del gradiente di deformazione:

$W = W(\mathbf{F})$ . Questo assicura che il materiale sia perfettamente elastico e che si a che fare con una funzione scalare. La forma generale della densità di energia di deformazione è dettata da esperimenti; la formula per la densità di energia di deformazione contiene sempre le caratteristiche del materiale che possono essere aggiustate per descriverlo adeguatamente.

- 2) Il materiale indeformato è usualmente assunto essere isotropico (cioè il comportamento del materiale è indipendente dalla sua orientazione rispetto al carico). Se la densità di energia di deformazione è una funzione del tensore sinistro di Cauchy-Green,  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ , l'equazione costitutiva è automaticamente isotropica. Se  $\mathbf{B}$  è usato come misura della deformazione, allora l'energia di deformazione deve essere una funzione degli invarianti di  $\mathbf{B}$  per assicurare che l'equazione costitutiva sia oggettiva (si ricorda che è chiamata oggettiva una qualsiasi trasformazione in un spazio vettoriale del tipo  $\mathbf{t}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{t}$  in cui  $\mathbf{Q}$  è una matrice ortogonale).
- 3) Le formule per le tensioni in termini di deformazione sono calcolate tramite differenziazione della densità di energia di deformazione.

### 5.3 Equazioni delle deformazioni usate nella teoria dell'elasticità.

Si supponga che un solido sia soggetto a un campo di spostamento  $u_i(x_k)$ . Si intende che il vettore  $\mathbf{u}$  avente componente  $u_i$  rappresenta la distanza che intercorre tra un punto in configurazione indeformata e lo stesso punto in configurazione deformata. Si definisce:

- Il gradiente di deformazione e il suo Jacobiano:

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (5.4)$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j; 0 \text{ se } i \neq j$$

- Il tensore sinistro di deformazione di Cauchy-Green:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad B_{ij} = F_{ik} F_{jk}; \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$$

In cui  $(X_1, X_2, X_3)$  sono le coordinate del punto indeformato mentre  $(u_1, u_2, u_3)$  sono le coordinate del vettore spostamento;

- Gli invarianti di  $\mathbf{B}$ :

$$I_1 = \text{trace}(\mathbf{B}) := \mathbf{B}_{kk} \quad (5.5)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1 - \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - \mathbf{B}_{ik} \cdot \mathbf{B}_{ki}) \quad (5.6)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{B}) = J^2 \quad (5.7)$$

- Un set alternativo di invarianti di  $\mathbf{B}$  più convenienti per modellare materiali quasi incomprimibili (va notato che  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  rimangono costanti sotto un puro cambio di volume):

$$\bar{I}_1 = \frac{I_1}{J^{2/3}} = \frac{\mathbf{B}_{kk}}{J^{2/3}}$$

$$\bar{I}_2 = \frac{I_2}{J^{4/3}} = \frac{1}{2} \left( \bar{I}_1^2 - \frac{\mathbf{B}_{ki} \mathbf{B}_{ki}}{J^{4/3}} \right) \quad (5.8)$$

$$J = \sqrt{\det(\mathbf{B})}$$

- Deformazioni principali e loro direzioni:

1.  $e_1, e_2, e_3$  denotano i tre autovalori di  $\mathbf{B}$ . Le deformazioni principali sono:

$$\lambda_1 = \sqrt{e_1}; \quad \lambda_2 = \sqrt{e_2}; \quad \lambda_3 = \sqrt{e_3} \quad (5.9)$$

2.  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$  indicano tre autovettori di  $\mathbf{B}$  ortonormali fra loro. Questi definiscono le direzioni principali di allungamento (si noti che siccome  $\mathbf{B}$  è simmetrico i suoi autovettori sono automaticamente perpendicolari fra loro purché non ci siano due autovalori uguali. Se due o tre autovalori sono uguali, gli autovettori non sono univocamente definiti. In questo caso è conveniente usare un qualsiasi set di autovettori ortogonali fra loro).
3. Si ricorda che  $\mathbf{B}$  può essere espresso in termini dei suoi autovettori e autovalori come:

$$\mathbf{B} = \lambda_1 \mathbf{b}^{(1)} \otimes \mathbf{b}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{b}^{(2)} \otimes \mathbf{b}^{(2)} + \lambda_3 \mathbf{b}^{(3)} \otimes \mathbf{b}^{(3)} \quad (5.10)$$

#### 5.4 Equazioni delle tensioni usate nella teoria della elasticità.

Solitamente la legge tensione-deformazione è data come equazione che lega la tensione di Cauchy (tensione vera o 'true')  $\sigma_{ij}$  con il tensore sinistro di deformazione di Cauchy-Green. Per alcuni calcoli, può essere più conveniente usare altre equazioni di legame. Esse sono definite come di seguito:

- Tensione di Cauchy 'vera', la quale rappresenta il limite del rapporto tra la forza applicata e l'area deformata. In formule:

$$\sigma_{ij} = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dP}{dA} \quad (5.11)$$

- Tensione di Kirchhoff:  $\tau = J\sigma$   $\tau_{ij} = J\sigma_{ij}$
- Tensione nominale (Prima di Piola - Kirchhoff)  $S = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma$   $S = JF_{ik}^{-1}\sigma_{kj}$
- Tensione materiale (Seconda di Piola - Kirchhoff):  $\sum J\mathbf{F}^{-1} \cdot \sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} = \sum_{ij} JF_{ik}^{-1}\sigma_{kl}F_{jl}^{-1}$

##### 5.4.1 Calcolo della relazione tensione-deformazione dalla densità di energia di deformazione.

La legge costitutiva per un materiale isotropico iperelastico è definita da una equazione riguardante la densità di energia di deformazione del materiale e il gradiente di deformazione, o, per un solido isotropico, alle tre invarianti del tensore di deformazione:

$$W(\mathbf{F}) = U(I_1, I_2, I_3) = \bar{U}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = \tilde{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (5.12)$$

La legge tensione-deformazione deve essere dedotta dalla differenziazione della densità di energia di deformazione. Per ogni scelta di invariante di deformazione sono riportate di seguito le equazioni delle tensioni-deformazioni. I risultati sono:

Densità di energia di deformazione in termini di  $F_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} \frac{\partial W}{\partial F_{kj}} \quad (5.13)$$

Densità di energia di deformazione in termini di  $I_1, I_2, I_3$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) B_{ij} - \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} B_{kj} \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial U}{\partial I_3} \delta_{ik} \quad (5.14)$$

Densità di energia di deformazione in termini di  $\bar{I}_1, \bar{I}_2, J$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{J} \left[ \frac{2}{J^{2/3}} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + I_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) B_{ij} - \left( \bar{I}_1 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + 2I_2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{1}{J^{4/3}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} B_{ik} B_{kj} \right] + \frac{\partial \bar{U}}{\partial J} \delta_{ij} \quad (5.15)$$

Densità di energia di deformazione in termini di  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_1} b_i^{(1)} b_j^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_2} b_i^{(2)} b_j^{(2)} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_3} b_i^{(3)} b_j^{(3)} \quad (5.16)$$

Per la dimostrazione, si è iniziato dalla formula generale per la tensione in termini di  $W(\mathbf{F})$ :

1. Si noti che, per definizione, se il solido è soggetto a qualche storia di carico, l'ampiezza della variazione della densità di energia di deformazione  $W(\mathbf{F})$  deve essere uguale al lavoro meccanico fatto sul materiale per unità di volume.
2. L'ampiezza del lavoro fatto per unità di volume indeformato dalle forze applicate sul corpo è espresso in termini di tensione nominale  $S_{ij}$  come  $S_{ij} \dot{F}_{ij}$  ( $\dot{F}_{ij}$  rappresenta la derivata del gradiente di deformazione rispetto al tempo).
3. Quindi, per qualunque deformazioni del gradiente  $F_{ij}$ :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = S_{ji} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} \quad (5.17)$$

Questo deve essere valido per tutte le possibili derivate di  $F_{ij}$  ( $\dot{F}_{ij}$ ), così che:

$$\frac{\partial W}{\partial F_{ij}} = S_{ij} \quad (5.18)$$

4. Infine, la formula per la tensione di Cauchy segue dalla equazione che lega  $\sigma_{ij}$  a  $S_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} F_{ik} S_{kj} = \frac{1}{J} F_{ik} \frac{\partial W}{\partial F_{kj}} \quad (5.19)$$

Per un materiale isotropico è necessario trovare le derivate degli invarianti rispetto alle componenti di  $\mathbf{F}$  in modo da calcolare la funzione tensione-deformazione per una data densità di energia. Esse sono un calcolo diretto:

$$\frac{\partial I_1}{\partial F_{ij}} = 2F_{ij}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial F_{ij}} = 2(I_1 F_{ij} - B_{ik} F_{kj}); \quad \frac{\partial I_3}{\partial F_{ij}} = 2I_3 F_{ji}^{-1} \quad (5.20)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial F_{ij}} &= \frac{\partial U}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial U}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial F_{ij}} \\ &= 2 \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) F_{ij} - 2 \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} F_{kj} 2I_3 \frac{\partial U}{\partial I_3} F_{ji}^{-1} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{I_3}} F_{ik} \frac{\partial W}{\partial F_{kj}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) B_{ij} - 2 \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} B_{kj} \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial U}{\partial I_3} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Quando si usa la densità di energia di deformazione nella forma  $\bar{U}(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J)$ , si dovrà calcolare le derivate degli invarianti  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$  e  $J$  rispetto a le componenti di  $\mathbf{F}$  per trovare:

$$\frac{\partial W}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial F_{ij}} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \quad (5.23)$$

Si giungerà a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} &= J F_{ji}^{-1} \\ \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial F_{ij}} &= \frac{2}{J^{2/3}} F_{ij} - \frac{2}{3} \bar{I}_1 F_{ji}^{-1} \\ \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial F_{ij}} &= \frac{2}{J^{2/3}} \bar{I}_1 F_{ij} - \frac{2}{J^{4/3}} B_{ik} F_{ij} - \frac{4}{3} \bar{I}_2 F_{ji}^{-1} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{2}{J^{5/3}} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + \frac{\bar{I}_1}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) B_{ij} - \frac{2}{3J} \left( \frac{\bar{I}_1}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_1} + \frac{2\bar{I}_2}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} \right) \delta_{ij} - \frac{2}{J^{7/3}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{I}_2} B_{ik} B_{kj} \\ &\quad + \frac{\partial \bar{U}}{\partial J} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ora si può trovare la relazione tensione-deformazione dalla densità di energia di deformazione  $\tilde{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  la quale è espressa come funzione della tensione principale:

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= U(I_1, I_2, I_3) \\ I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2\end{aligned}\tag{5.26}$$

Dopo alcuni passaggi si arriva a:

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + (I_1 - \lambda_i^2) \frac{\partial U}{\partial I_2} + \frac{I_3}{\lambda_i^2} \frac{\partial U}{\partial I_3} \right) \quad (i = 1, 2, 3)\tag{5.27}$$

Usando la (5.27) e l'espressione che lega le componenti di tensione con le derivate di  $\mathbf{U}$ :

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + \frac{I_1}{I_2} \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) B_{ij} - \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} B_{kj} \right] + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial U}{\partial I_3} \delta_{ij}\tag{5.28}$$

Si trova che le tensioni principali  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sono legate alle corrispondenti allungamenti principali  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  (radice quadrata degli autovalori di  $\mathbf{B}$ ) attraverso:

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3)\tag{5.29}$$

La decomposizione spettrale di  $\mathbf{B}$  in termini dei suoi autovalori  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$  e autovettori  $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}$ , porta ad ottenere:

$$B_{ij} = \lambda_1^2 b_i^{(1)} b_j^{(1)} + \lambda_2^2 b_i^{(2)} b_j^{(2)} + \lambda_3^2 b_i^{(3)} b_j^{(3)}\tag{5.30}$$

Infine, è possibile scrivere la tensione generica  $\sigma_{ij}$  come:

$$\sigma_{ij} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_1} b_i^{(1)} b_j^{(1)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_2} b_i^{(2)} b_j^{(2)} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \lambda_3} b_i^{(3)} b_j^{(3)}\tag{5.31}$$

## 5.5 Note sulla perfetta incomprimibilità dei materiali.

Le precedenti formule assumono che il materiale possieda qualche piccola comprimibilità, cioè se il materiale viene caricato con una pressione idrostatica, il suo volume cambierà di

un valore misurabile. La maggior parte dei polimeri resiste fortemente ai cambiamenti di volume, e nei calcoli al calcolatore è conveniente approssimarli come perfettamente incomprimibili. Il modello per un materiale incomprimibile ha le seguenti specifiche:

- La deformazione deve soddisfare  $J = 1$  per preservare il volume.
- La densità di energia di deformazione è di conseguenza solo una funzione di due invarianti; inoltre entrambi i set di invarianti definiti precedentemente sono identici. Si può usare la densità di energia di deformazione nella forma  $U(I_1, I_2)$ .
- Siccome è possibile applicare qualsiasi pressione a un solido incomprimibile senza cambiare la sua forma, la tensione non può essere univocamente determinata dalla deformazione. Conseguentemente, la legge tensione-deformazione specifica solo la tensione deviatorica  $= \overline{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \cdot \delta_{ik} / 3$ . In problemi che includono carichi quasi statici, la tensione idrostatica  $p = \sigma_{kk} / 3$  può solitamente essere calcolata, risolvendo le equazioni di equilibrio (assieme ad appropriate condizioni al contorno).

La formula per la tensione in termini di  $U(I_1, I_2)$  ha la forma:

$$\sigma_{ij} = 2 \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) B_{ij} - \left( \frac{\partial U}{\partial I_1} + 2 I_2 \frac{\partial U}{\partial I_2} \right) \frac{\delta_{ij}}{3} - \frac{\partial U}{\partial I_2} B_{ik} B_{kj} \right] + p \delta_{ij} \quad (5.32)$$

La tensione idrostatica  $p$  è una variabile sconosciuta, la quale deve essere calcolata dalla soluzione del problema sfruttando le condizioni al contorno.

## 5.6 Forme specifiche della densità di energia di deformazione.

- Solido generalizzato Neo-Hookean (Adattato da Treolar):

$$\bar{U} = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{K_1}{2} (J - 1)^2 \quad (5.33)$$

Dove  $\mu_1$  e  $K_1$  sono proprietà del materiale (per piccole deformazioni,  $\mu_1$  e  $K_1$  sono il modulo di scorrimento e il modulo di compressibilità rispettivamente). La trattazione meccanica/statistica afferma che  $\mu_1 = NkT$ , dove  $N$  è il numero di catene di polimeri per unità di volume,  $k$  è la costante di Boltzmann, e  $T$  è la temperatura. Questo è il modello iperelastico per caratterizzare polimeri aventi una scarsa comprimibilità, e dovrebbe essere applicato con  $K_1 \gg \mu_1$ . La relazione tensione-deformazione diviene:

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{J^{5/3}} \left( B_{ij} - \frac{1}{3} B_{kk} \right) + K_1 (J - 1) \delta_{ij} \quad (5.34)$$

- Solido di Mooney-Rivlin generalizzato (Adattato da Mooney):

$$\begin{aligned} \bar{U} = & C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + \\ & + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + \\ & + C_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3 + \frac{K_1}{2} (J - 1)^2 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Dove  $C_{10}, C_{01}, \dots, C_{12}, C_{03}$  e  $K_1$  sono proprietà del materiale. Il modello di Mooney Rivlin può essere ridotto partendo dai 9 parametri iniziali a 2, 3 e 5 parametri ponendo a zero i parametri superflui. Nel particolare:

- Mooney Rivlin a 2 parametri:  $C_{10}, C_{01}, K_1 \neq 0$ , parametri restanti nulli.
- Mooney Rivlin a 3 parametri:  $C_{10}, C_{01}, C_{11}, K_1 \neq 0$ , parametri restanti nulli.
- Mooney Rivlin a 5 parametri:  $C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, K_1 \neq 0$ , parametri restanti nulli.

Per il modello a due parametri e per piccole deformazioni, il modulo di taglio e il modulo di compressibilità del solido diventano  $\mu = C_{10} + C_{01}$  e  $K = K_1$ . Il modello di Mooney Rivlin caratterizza adeguatamente tutti i polimeri e dovrebbe essere usato con  $K_1 \gg C_{10}$ . La relazione tensione-deformazione diventa (modello a 2 parametri):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \frac{2 \cdot C_{10}}{J^{5/3}} \left( B_{ij} - \frac{1}{3} I_1 \delta_{ij} \right) + \frac{2 \cdot C_{01}}{J^{7/3}} \cdot \\ & \cdot \left( I_1 B_{ij} - \frac{1}{3} I_1^2 \delta_{ij} - B_{ik} B_{ki} + \frac{1}{3} B_{kn} B_{nk} \delta_{ij} \right) + K_1 (J - 1) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.36)$$

- Modello di Arruda-Boyce:

$$\begin{aligned} \bar{U} = & \mu \left\{ \frac{1}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{20\beta^2} (\bar{I}_1^2 - 9) + \frac{11}{1050\beta^4} (\bar{I}_1^3 - 27) + \right. \\ & \left. + \frac{19}{7050\beta^6} (\bar{I}_1^4 - 81) + \frac{519}{673750\beta^8} (\bar{I}_1^5 - 243) \right\} + \frac{K}{2} (J - 1)^2 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dove  $\mu, \beta, K$  sono proprietà del materiale. Per piccole deformazioni  $\mu$  è il modulo di scorrimento mentre  $K$  è il modulo di compressibilità. Anche questo è un modello

elastico per gomme e va usato con  $K \gg \mu$ . Il potenziale è stato derivato dal calcolo dell'entropia di una semplice catena-lunga di molecole e la serie è il risultato di una espansione di Taylor di una funzione inversa di Langevin. Se necessario, il modello fornisce molti altri termini additivi. La legge tensione-deformazione risulta essere:

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu}{J^{5/3}} \left( 1 + \frac{B_{kk}}{5J^3\beta^2} + \frac{33}{525} \frac{B_{kk}}{J^{4/3}\beta^4} + \dots \right) + \left( B_{ij} - \frac{B_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) + K(J - 1)\delta_{ij} \quad (5.38)$$

### 5.6.1 Calibrazione dei modelli elastici non lineari.

Per usare queste relazioni, è necessario determinare i valori per le costanti dei materiali. In alcuni casi questo è abbastanza semplice (il modello di Neo-Hookean ha una sola costante); mentre per modelli come quello di Mooney il lavoro di determinazione è molto impegnativo.

Concettualmente, tuttavia, la procedura è inequivocabile. Si possono fare vari tipi di test su un campione di materiale, includendo tensione, taglio puro, tensioni biassiali uguali, o compressione volumetrica. I parametri possono quindi essere scelti per dare la miglior rappresentazione del comportamento sperimentale di ogni prova eseguita.

Ci sono alcune linee-guida per fare questo nel miglior modo:

1. Quando si modella il comportamento della gomma in un campo di tensione, è prassi normale assumere che il materiale sia vicino alla incomprimibilità e non ci sia la necessità di caratterizzare la risposta alla compressione nel dettaglio. Per i modelli iperelastici descritti precedentemente, si può prendere  $K_1 \approx 10^5 \text{ MPa}$ . Per trovare i parametri rimanenti, si può assumere che il materiale sia perfettamente incomprimibile.
2. Se il materiale è soggetto a grandi tensioni idrostatiche ( $>100 \text{ MPa}$ ) la risposta volumetrica e di taglio sono fortemente accoppiate. La compressione incrementa il modulo di scorrimento, e una pressione sufficientemente alta può indurre a una transizione fragile. Per considerare questo fatto, si può usare uno dei modelli per schiume poichè in essi la risposta volumetrica e del taglio sono disaccoppiate.
3. Per i modelli più semplici dei materiali, (per esempio il solido di Neo-Hookean, il materiale di Mooney-Rivlin o il modello di Arruda-Boyce, i quali contengono solo

due parametri del materiale in aggiunta al modulo di compressibilità) si può stimare i parametri del materiale tramite un best fit dei risultati da una prova di trazione monoassiale. Ci sono varie vie per attuare il fit, ma il più utilizzato rimane quello dei minimi quadrati, anche se i modelli calibrati in questa via non sempre predicono il comportamento del materiale accuratamente quando sottoposti a carichi multiassiali.

Per la determinazione dei parametri riguardanti i tre materiali in analisi si devono usare le prove di trazione e l'ipotesi di perfetta incomprimibilità. Dal punto di vista teorico, tali ipotesi si traducono in:

$$\det(\mathbf{F}) = 1; \quad \lambda_1 = \lambda; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (5.39)$$

Gli invarianti e le loro derivate diventano:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + 2\lambda^{-1} & I_2 &= 2\lambda + \lambda^{-2} \\ \frac{dI_1}{d\lambda} &= 2\lambda - 2\lambda^{-2} & \frac{dI_2}{d\lambda} &= 2 - 2\lambda^{-3} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Visto che i tre materiali sono di tipo plastici e che i provini da loro costruiti possiedono una elevata sezione lorda, la tensione ingegneristica  $\sigma_e$  e la deformazione  $\varepsilon$  sono pari a:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \varepsilon \\ \sigma_e &= (1 + \varepsilon) \sigma_{11} \\ \varepsilon &= \lambda - 1 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Da queste ultime equazioni, per semplice derivata dell'energia rispetto a  $\lambda$ , è possibile ricavare la tensioni ingegneristica finali per i tre modelli. Per il solo modello di Mooney Rivlin, le equazioni vengono scritte ancora in modo compatto per amor di brevità:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= v_1 + v_2 + v_3 \\ v_1 &:= C_{10} \frac{dI_1}{d\lambda} + C_{01} \frac{dI_2}{d\lambda} + C_{11} \left[ (I_2 - 3) \frac{dI_1}{d\lambda} + (I_1 - 3) \frac{dI_2}{d\lambda} \right] \end{aligned} \quad (5.42a)$$

$$\begin{aligned}
v_2 &:= 2 C_{20} (I_1 - 3) \frac{dI_1}{d\lambda} + 2 C_{02} (I_2 - 3) \frac{dI_2}{d\lambda} \\
v_3 &:= 3 C_{30} (I_1 - 3)^2 \frac{dI_1}{d\lambda} + C_{21} \left[ 2 (I_1 - 3)(I_2 - 3) \frac{dI_1}{d\lambda} (I_1 - 3)^2 \frac{dI_2}{d\lambda} \right] + \\
&+ C_{12} \left[ (I_2 - 3)^2 \frac{dI_1}{d\lambda} + 2(I_1 - 3)(I_2 - 3) \frac{dI_2}{d\lambda} \right] + 3 C_{03} (I_2 - 3)^2 \frac{dI_2}{d\lambda}
\end{aligned} \quad (5.42b)$$

Per il solo caso a 2 parametri, il modello di Mooney assume la seguente forma:

$$\sigma_e = C_{10}[2(1 + \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)^{-2}] + C_{01}[2 + 2(1 + \varepsilon)^{-3}] \quad (5.43)$$

Per il modello di Neo-Hookean:

$$\sigma_e = \frac{\mu}{2}[2(1 + \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)^{-2}] \quad (5.44)$$

In fine il modello di Arruda-Boyce diventa:

$$\begin{aligned}
\sigma_e &= \frac{\mu}{2}[2(1 + \varepsilon) - 2(1 + \varepsilon)^{-2}] \cdot v_1 \\
v_1 &:= 1 + \frac{1}{5\beta^2} I_1 + \frac{11}{175\beta^4} I_1^2 + \frac{76}{3525\beta^6} I_1^3 + \frac{519}{67375\beta^8} I_1^4
\end{aligned} \quad (5.45)$$

Si noti che tutti i tre modelli possiedono un termine moltiplicativo in comune. Partendo dal modello di Neo Hookean, si può arrivare agli altri modelli aggiungendo coefficienti pesati opportunamente. Nella successiva tabella (5.8) è riportato un riassunto delle equazioni dei tre modelli.

Invarianti geometrici (prova di trazione)	$\lambda = \frac{l}{L_0} = 1 + \varepsilon \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-1/2}$ $I_1 = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$
Neo-Hookean	$\sigma_e = S_1 = \mu(\lambda - \lambda^{-2})$
Mooney-Rivlin (2 parametri)	$\sigma_e = S_1 = \mu_1(\lambda - \lambda^{-2}) + \mu_2(1 - \lambda^{-3})$
Arruda-Boyce (Modello ridotto)	$\sigma_e = S_1 = \mu(\lambda - \lambda^{-2}) \left( 1 + \frac{I_1}{5\beta^2} + \frac{33I_1^2}{525\beta^4} \right)$

Tabella 5.8: Equazioni per i modelli iperelastici.

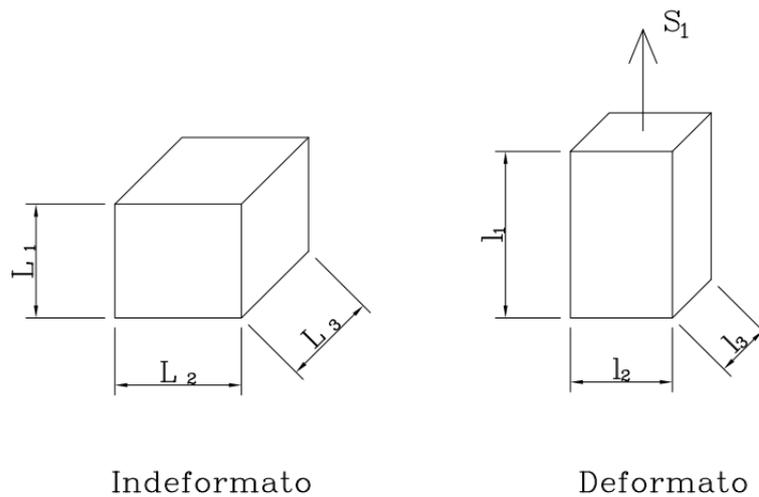


Figura 5.13: Schema di principio che indica le grandezze prima e dopo la deformazione.

### 5.7 Determinazione dei coefficienti dalle curve tensione-deformazione.

Nel caso trattato in questo elaborato si hanno a disposizione solo prove di trazione monoassiale e quindi i parametri caratterizzanti per ogni modello considerato sono stati ricavati tramite il codice di calcolo Ansys sfruttando il modulo dedicato a tal scopo, il "Material Curve Fitting". Tal modulo necessita delle grandezze ingegneristiche e non delle grandezze "true". Esse sono ovviamente già fornite dalla macchina di prova, ma siccome sono a disposizione tre prove (avendo tre provini lisci) e il modulo di Ansys richiede una solo set di dati, si è dovuto trovare il best fitting (tecnica dei minimi quadrati) delle tre prove sperimentali. Nelle figure (5.13), (5.14) e (5.15) sono rappresentate, per ognuno dei tre materiali, la curva di best fitting e le tre prove sperimentali.

I parametri determinati per il modello di Mooney Rivlin sono riportati nelle tabelle (5.9), (5.10) e (5.11) per i tre materiali. I parametri per i modelli di Neo Hookean e Arruda Boyce sono invece riportati nella tabelle (5.12), (5.13) e (5.14).

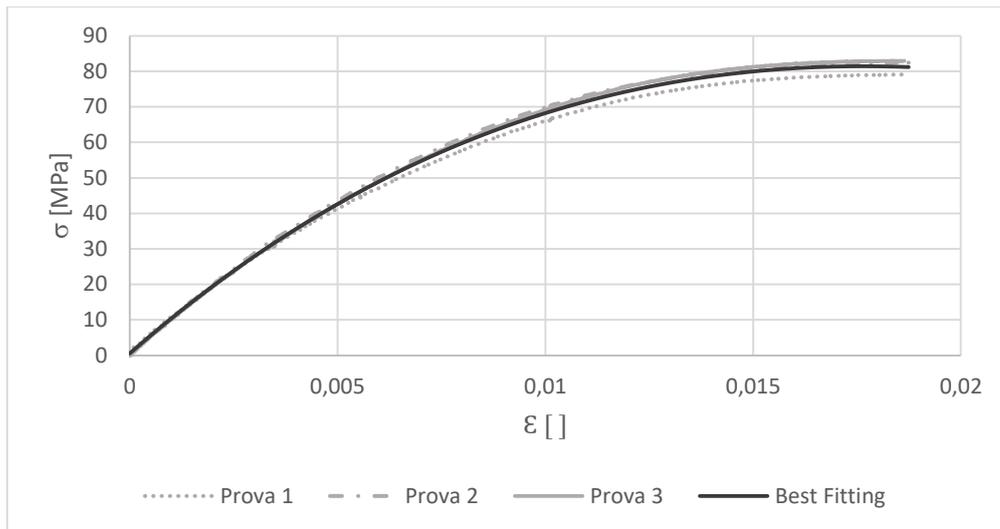


Figura 5.13: Andamento della curva di Best Fitting. Materiale 1.

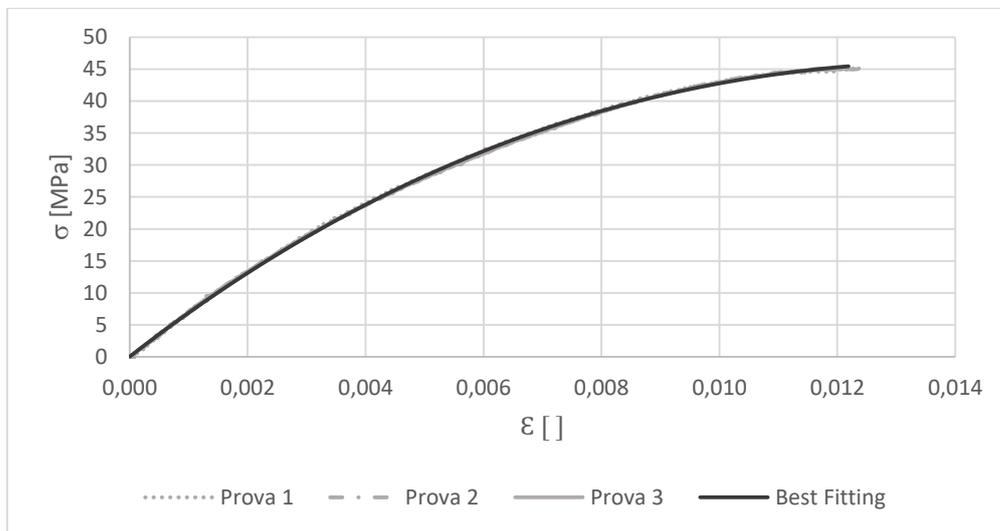


Figura 5.14: Andamento della curva di Best Fitting. Materiale 2.

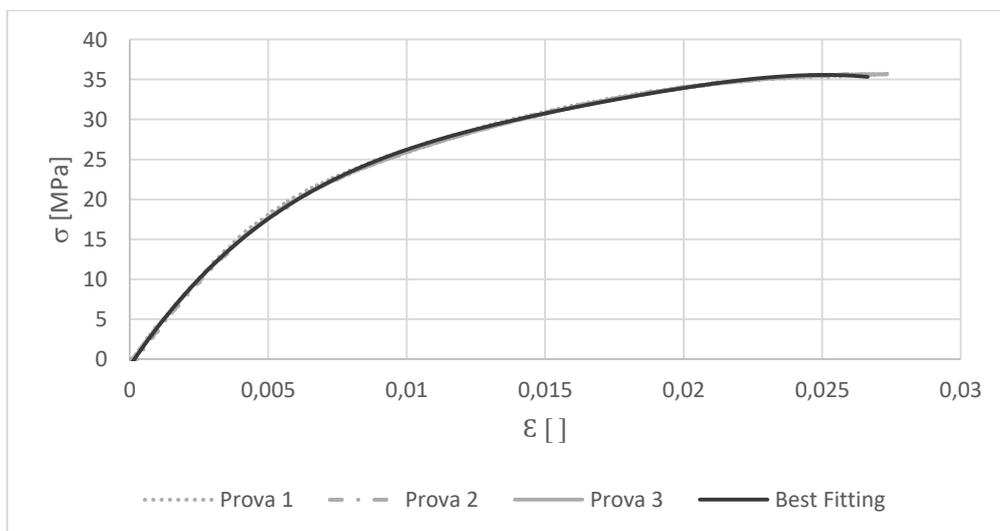


Figura 5.15: Andamento della curva di Best Fitting. Materiale 3.

Materiale 1 [MPa]						
N° Par.	C10	C01	C20	C11	C02	Residui
2	-53532	55252				1.97
3	-78092	79909		$1.96 \cdot 10^5$		1.44
5	$-1.79 \cdot 10^5$	$1.82 \cdot 10^5$	$6.83 \cdot 10^9$	$-1.39 \cdot 10^{10}$	$7.08 \cdot 10^9$	1.13

Tabella 5.9: Parametri riguardanti il modello di Mooney Rivlin, materiale 1.

Materiale 2 [MPa]						
N° Par.	C10	C01	C20	C11	C02	Residui
2	-46706	47900				0.25
3	-58986	60210		$1.55 \cdot 10^5$		0.18
5	$-1.06 \cdot 10^5$	$1.07 \cdot 10^5$	$1.24 \cdot 10^{10}$	$-2.50 \cdot 10^{10}$	$1.26 \cdot 10^{10}$	0.14

Tabella 5.10: Parametri riguardanti il modello di Mooney Rivlin, materiale 2.

Materiale 3 [MPa]						
N° Par.	C10	C01	C20	C11	C02	Residui
2	-10871	11392				42.91
3	-37033	37791		$1.14 \cdot 10^5$		40.65
5	-81569	82427	$9.53 \cdot 10^8$	$-1.96 \cdot 10^9$	$1.00 \cdot 10^9$	18.51

Tabella 5.11: Parametri riguardanti il modello di Mooney Rivlin, materiale 3.

Materiale 1			
Modello	Parametri		Residui
Neo Hookean	$\mu = 2127.0 \text{ MPa}$		53.5
Arruda Boyce	$\mu = 2127.0 \text{ MPa}$	$\beta = 4.10 \cdot 10^6 \text{ MPa}$	53.5

Tabella 5.12: Parametri per i modelli di Neo Hookean e Arruda Boyce relativi al materiale 1.

Materiale 2			
Modello	Parametri		Residui
Neo Hookean	$\mu = 1682.8 \text{ MPa}$		19.3
Arruda Boyce	$\mu = 1682.8 \text{ MPa}$	$\beta = 5.11 \cdot 10^6 \text{ MPa}$	19.3

Tabella 5.13: Parametri per i modelli di Neo Hookean e Arruda Boyce relativi al materiale 2.

Materiale 3			
Modello	Parametri		Residui
Neo Hookean	$\mu = 653.02 \text{ MPa}$		87.4
Arruda Boyce	$\mu = 653.02 \text{ MPa}$	$\beta = 1.47 \cdot 10^6 \text{ MPa}$	87.4

Tabella 5.14: Parametri per i modelli di Neo Hookean e Arruda Boyce relativi al materiale 3.

### 5.8 Analisi FEM per i modelli iperelastici: Modalità di esecuzione.

L'analisi FEM che viene di seguito proposta è volta a determinare il valore del raggio critico  $R_C$  tale per cui l'energia in esso contenuta sia uguale all'energia per fratturare il materiale misurata sperimentalmente. Per energia misurata è intesa quella che, tal punto di vista matematico, corrisponde all'area sottesa dalla curva tensione-deformazione del modello polinomiale,  $W_P$ , ovvero quella energia che meglio si avvicina alla realtà. Per raggiungere tal scopo, si è proceduto nella seguente maniera:

- Si è preso per riferimento un multiplo del raggio critico calcolato nel caso lineare-elastico. Si è ottenuto un  $R_M$ ;
- La distanza  $r_0$  è la medesima del caso lineare elastico;
- Ogni raggio  $R_M$  è stato suddiviso in  $N$  porzioni. Ogni porzione è di una dimensione minima  $d_i$  tale da garantire la soluzione di tutti i modelli e di tutti i provini intagliati.  $d_i$  ha un valore di circa  $14 \mu\text{m}$ ;
- Considerato la simulazione di un provino, si è calcolata la SED riferita a ogni raggio  $r_i$  ( $r_i = R_M/N$ ;  $r_{i+1} - r_i = d_i$ );
- Per tutti i provini di un singolo materiale, si è calcolato il valore medio della  $\overline{SED}$  del generico  $r_i$ ;
- Infine, si è confrontato il valore della  $\overline{SED}$  con l'energia  $W_P$ .

La figura (5.16) indica le grandezze qui sopra riportate.

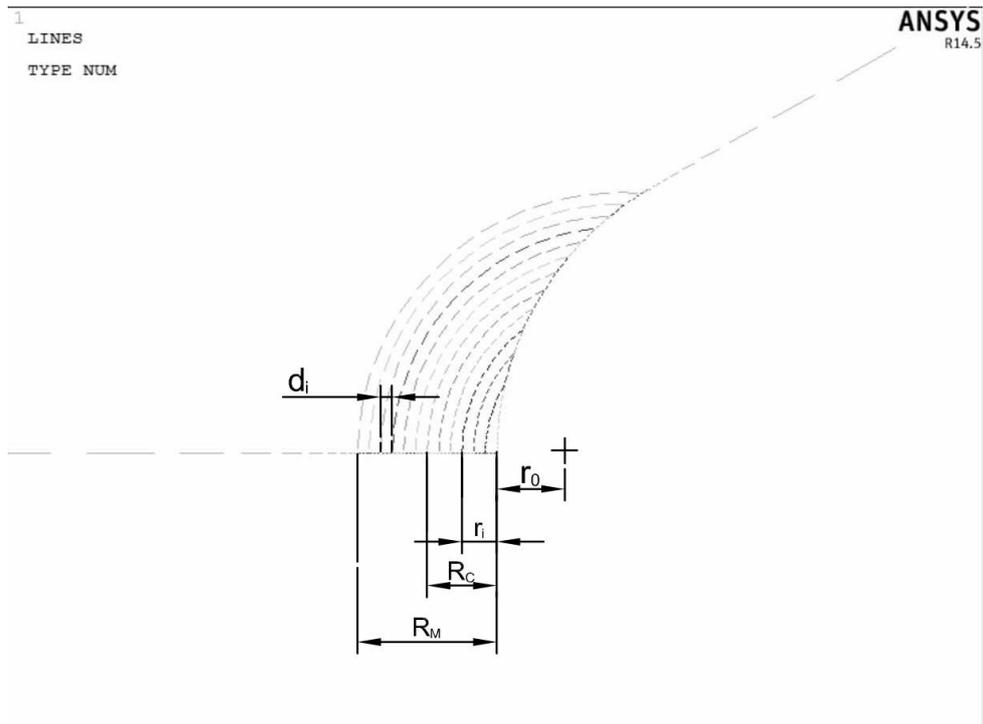


Figura 5.16: Raggi e grandezze utilizzate nell'analisi FEM. Nell'esempio,  $R_M = 0.9$  mm;  $R_C = 0.15$  mm;  $N = 12$ .

Di seguito sono riportate le analisi FEM di tutti i modelli iperelastici effettuate sui tre materiali in esame. Una volta scelto il modello e un materiale, sono riportate in ordine:

- La curva tensione-deformazione;
- Il numero  $N$  di raggi  $r_i$ , la distanza  $d_i$  e il raggio massimo  $R_M$ ;
- Il grafico che esprime l'andamento della  $\overline{SED}$  al variare del raggio critico  $r_i$ ;
- Per il valore di  $r_i$  per cui la  $\overline{SED}$  coincide con la  $W_{CR}$ , è riportata una tabella indicante i valori di  $SED$  calcolata per ogni provino del materiale in esame.
- Il grafico che indica la dispersione del valore normalizzato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  rispetto all'angolo di apertura dell'intaglio.

### 5.8.1 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 1.

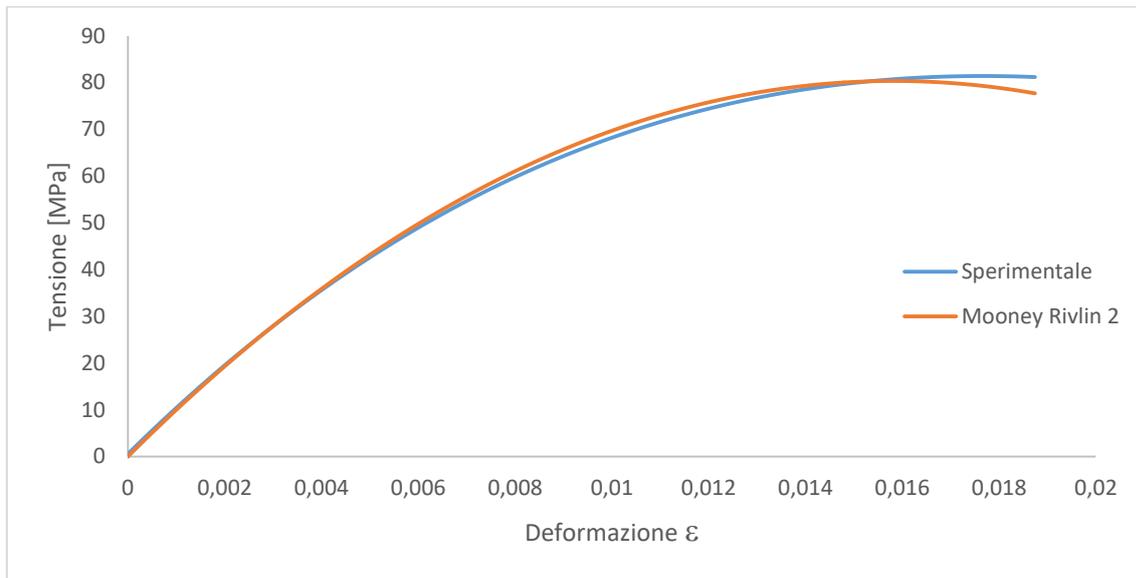


Figura 5.17: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Materiale 1.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.423	30	14.1

Tabella 5.15: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.282	0.296	0.310	0.324	0.338	0.353	0.367	0.381	0.395	0.409	0.423
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.178	1.148	1.119	1.093	1.067	1.043	1.021	0.999	0.978	0.959	0.940
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.035	1.021	1.008	0.995	0.983	0.972	0.960	0.950	0.939	0.929	0.920
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.078										

Tabella 5.16: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

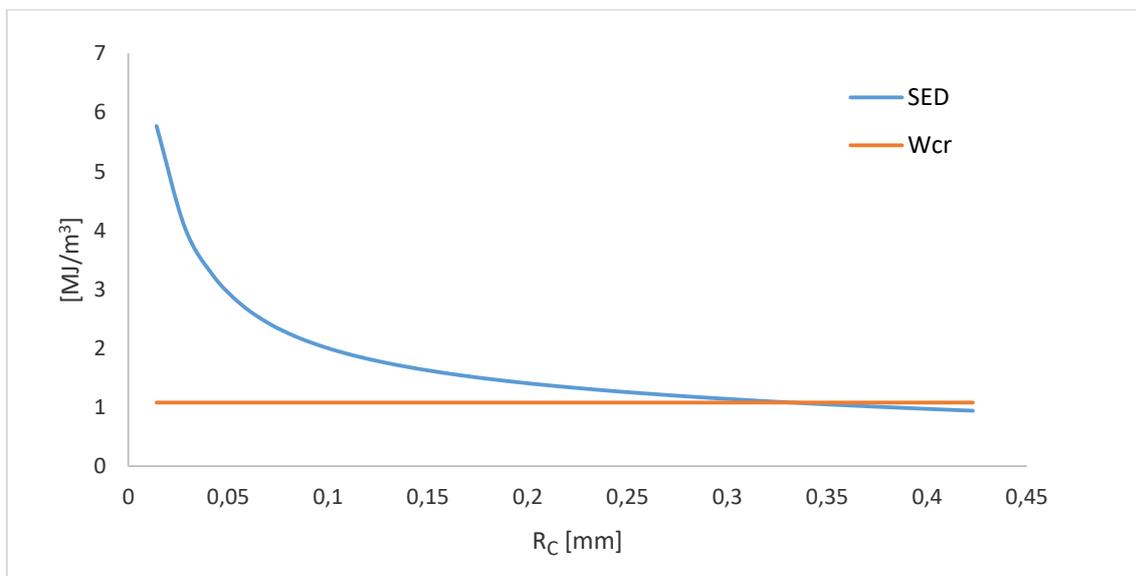


Figura 5.18: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.338 mm. La tabella (5.17) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.983.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.528	0.583	0.568	0.700	0.735	0.726
				60	51.03	48.24	47.07	0.866	0.773	0.736	0.896	0.847	0.826
				120	56.53	57.00	56.73	0.970	0.987	0.977	0.949	0.957	0.952
				150	75.83	70.80	71.92	1.017	0.887	0.915	0.971	0.907	0.921
				30	47.76	48.15	46.74	0.649	0.660	0.622	0.776	0.782	0.759
				60	45.92	45.51	44.51	0.726	0.714	0.682	0.821	0.814	0.796
				120	56.09	58.52	54.92	0.977	1.064	0.937	0.952	0.994	0.932
				150	71.49	68.93	69.66	0.799	0.743	0.759	0.861	0.830	0.839
			10	30	65.82	68.88	66.59	1.205	1.320	1.234	1.057	1.106	1.070
				60	67.10	67.34	70.19	1.309	1.319	1.433	1.102	1.106	1.153
				120	71.73	72.74	70.65	1.325	1.362	1.285	1.109	1.124	1.092
				150	77.82	81.25	75.96	1.001	1.091	0.954	0.964	1.006	0.941
				30	70.22	74.82	71.91	1.501	1.705	1.575	1.180	1.257	1.209
				60	70.47	72.40	69.56	1.483	1.565	1.445	1.173	1.205	1.158
				120	73.53	76.37	76.05	1.509	1.628	1.614	1.183	1.229	1.224
				150	84.82	85.68	86.63	1.055	1.077	1.100	0.989	0.999	1.010

Tabella 5.17: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.338 mm. M.R.2, Materiale 1.

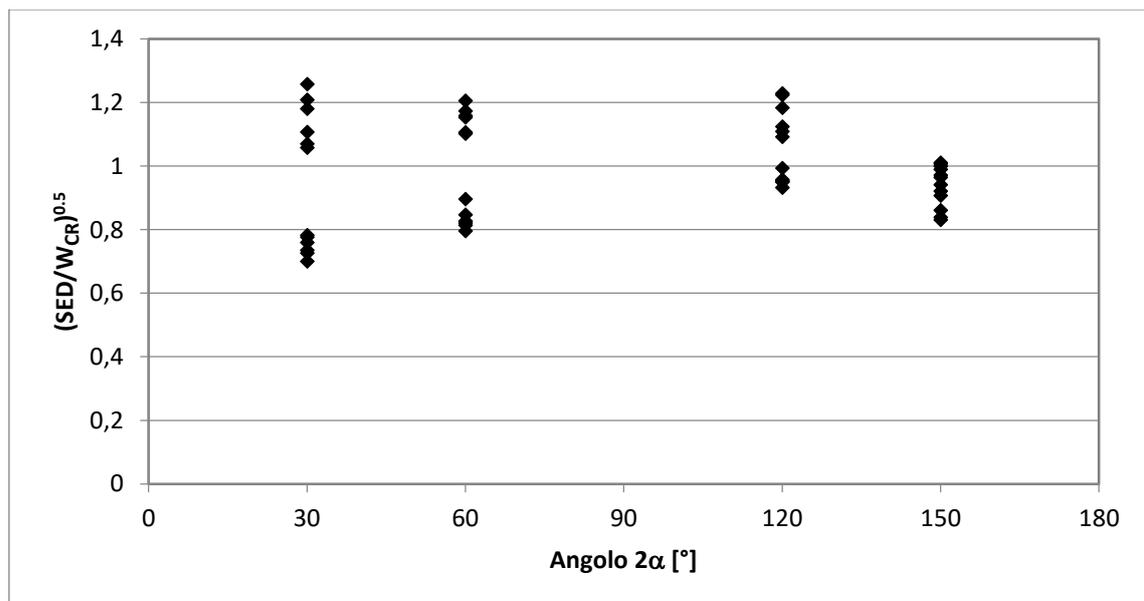


Figura 5.19: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Valore medio=0.983. Materiale 1.

### 5.8.2 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 2.

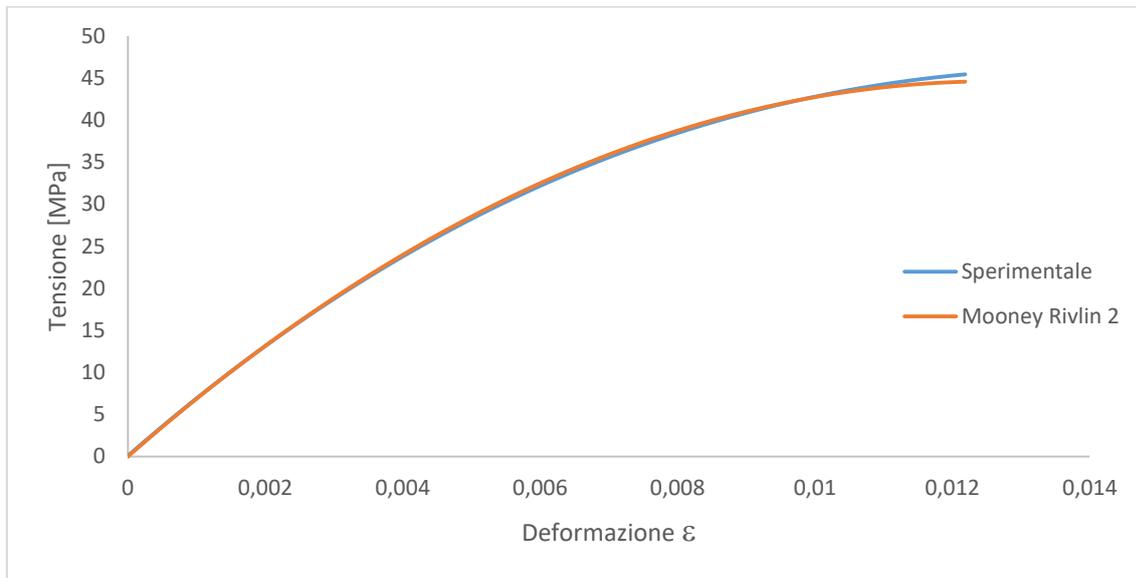


Figura 5.20: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Materiale 2.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.176	84	14.0

Tabella 5.18: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.868	0.882	0.896	0.91	0.924	0.938	0.952	0.966	0.98	0.994	1.008
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.374	0.369	0.365	0.361	0.356	0.352	0.348	0.344	0.340	0.336	0.333
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.018	1.012	1.006	1.000	0.994	0.988	0.983	0.977	0.972	0.966	0.961
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.357										

Tabella 5.19: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

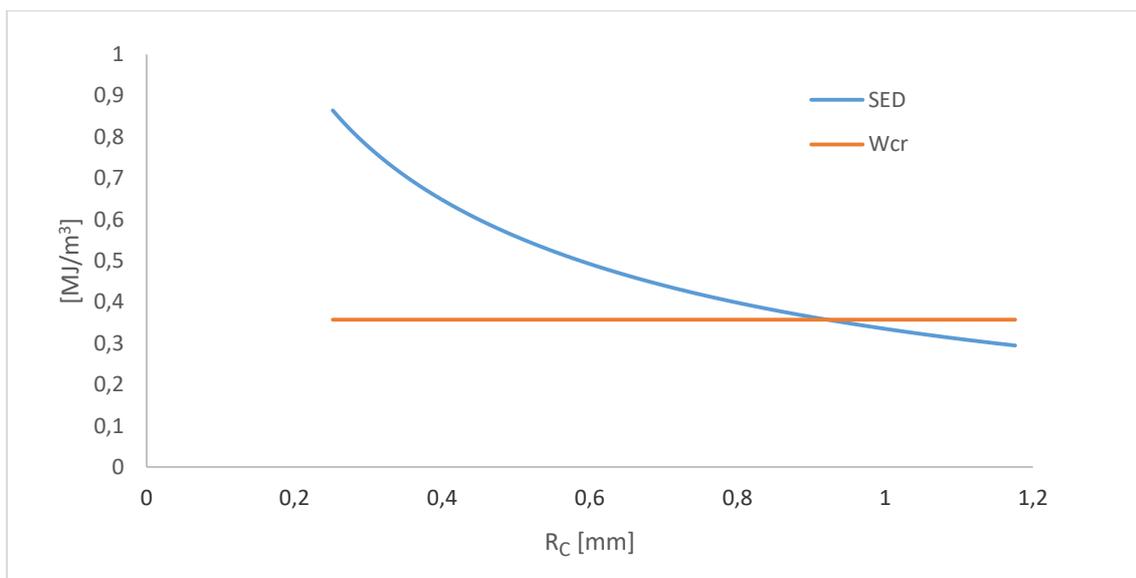


Figura 5.21: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.924 mm. La tabella (5.20) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.994.

Larghez. [mm]	Altezz. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$				
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3		
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.261	0.248	0.251	0.855	0.834	0.838		
				60	42.82	42.58	42.15	0.302	0.299	0.292	0.920	0.914	0.905		
				120	42.68	42.89	42.49	0.351	0.355	0.348	0.992	0.997	0.987		
				150	44.29	44.79	44.29	0.306	0.313	0.306	0.926	0.937	0.926		
				10	30	41.43	40.91	41.22	0.279	0.272	0.276	0.883	0.872	0.879	
					60	42.46	42.23	42.46	0.342	0.338	0.342	0.978	0.973	0.978	
					120	45.20	45.49	45.10	0.442	0.448	0.440	1.113	1.120	1.111	
					150	46.37	46.31	46.85	0.291	0.290	0.297	0.902	0.901	0.911	
				2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.400	0.398	0.397	1.058	1.057	1.054
						60	44.11	44.99	44.65	0.393	0.409	0.402	1.049	1.070	1.062
						120	44.07	44.23	44.95	0.397	0.400	0.413	1.054	1.058	1.075
						150	44.34	44.19	44.60	0.293	0.291	0.296	0.906	0.902	0.911
			10		30	45.56	45.66	45.60	0.456	0.458	0.457	1.130	1.132	1.131	
					60	45.26	45.81	45.28	0.469	0.481	0.470	1.147	1.161	1.147	
					120	45.74	45.35	45.09	0.432	0.425	0.420	1.100	1.091	1.085	
					150	45.77	46.06	46.12	0.284	0.287	0.288	0.892	0.897	0.898	

Tabella 5.20: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.924 mm. M.R.2, Materiale 2.

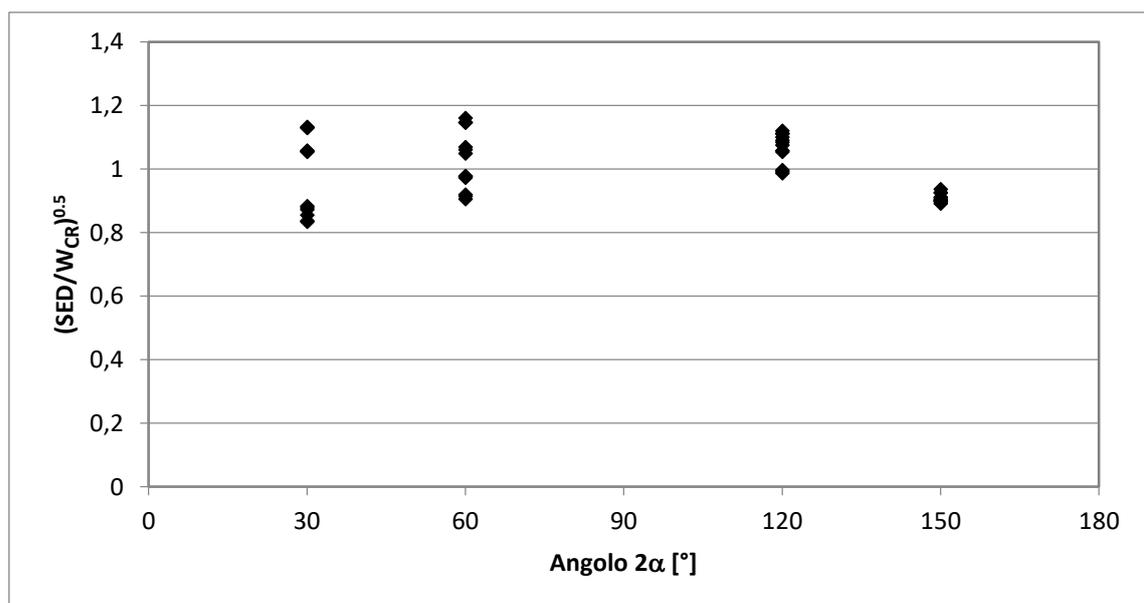


Figura 5.22: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Valore medio=0.994. Materiale 2.

### 5.8.3 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 2 parametri: Materiale 3.

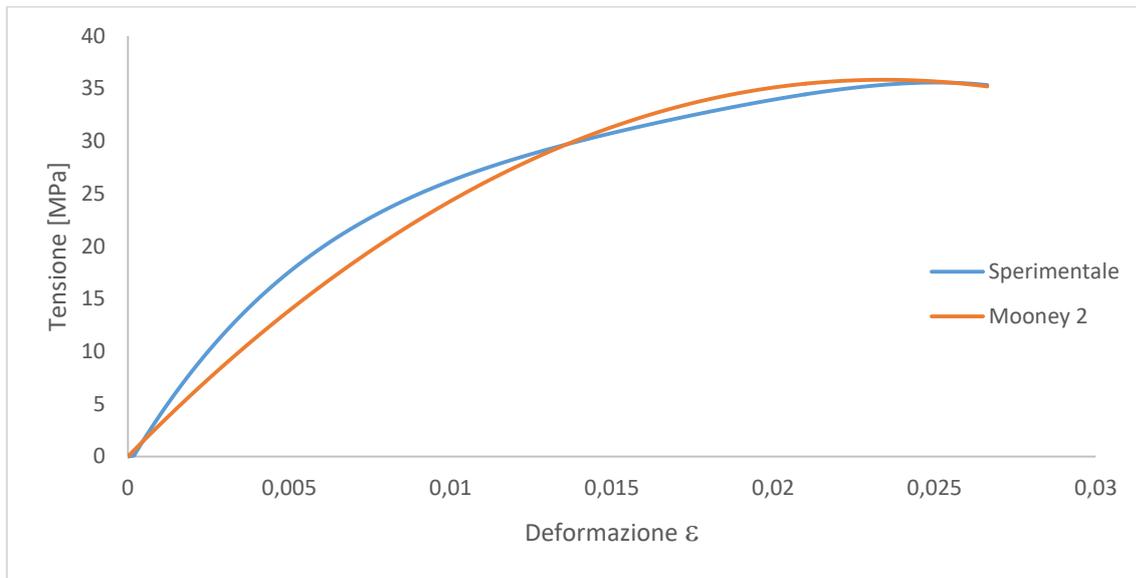


Figura 5.23: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Materiale 3.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.680	48	14.1

Tabella 5.21: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.496	0.510	0.524	0.538	0.553	0.567	0.581	0.595	0.609	0.623	0.638
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.751	0.737	0.724	0.711	0.699	0.687	0.676	0.665	0.655	0.644	0.635
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.029	1.019	1.010	1.001	0.992	0.984	0.976	0.968	0.960	0.952	0.945
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.698										

Tabella 5.22: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

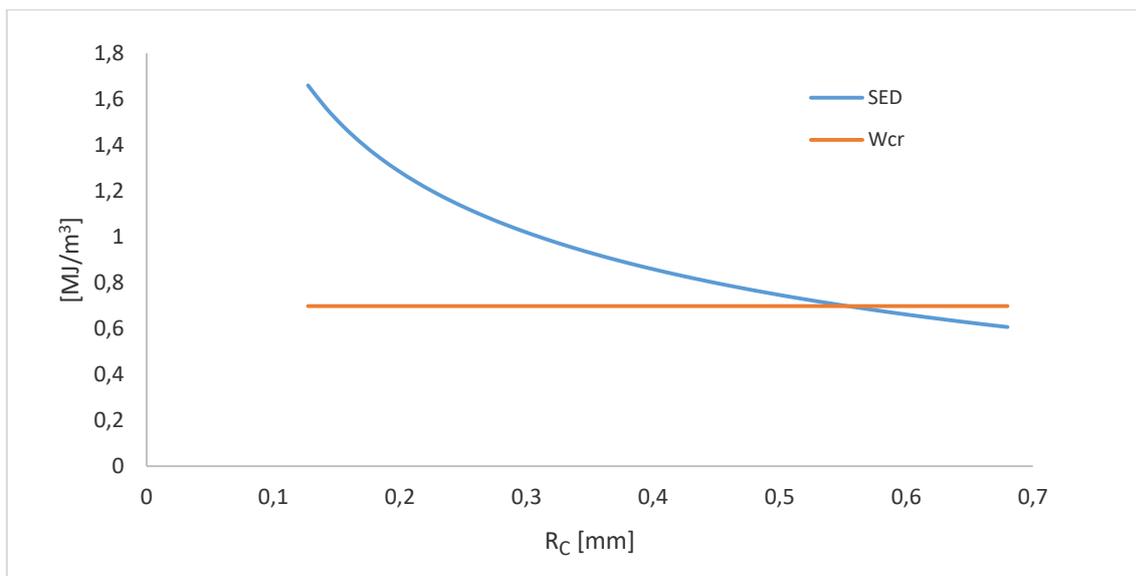


Figura 5.24: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.553 mm. La tabella (5.23) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.992.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.413	0.414	0.407	0.769	0.770	0.764
				60	29.09	29.16	28.80	0.549	0.551	0.538	0.887	0.889	0.878
				120	32.32	30.37	31.80	0.717	0.632	0.694	1.013	0.952	0.997
				150	36.56	36.64	36.24	0.613	0.616	0.603	0.937	0.939	0.929
			10	30	27.04	27.10	26.77	0.448	0.450	0.439	0.801	0.803	0.793
				60	29.78	29.49	29.69	0.603	0.591	0.599	0.929	0.920	0.926
				120	34.01	33.96	33.55	0.822	0.819	0.800	1.085	1.083	1.070
				150	38.15	38.13	38.52	0.592	0.592	0.604	0.921	0.921	0.930
		2	5	30	35.78	35.77	35.52	0.885	0.884	0.872	1.126	1.125	1.118
				60	35.83	35.68	35.47	0.906	0.899	0.888	1.139	1.135	1.128
				120	35.70	35.72	35.42	0.812	0.813	0.799	1.078	1.079	1.070
				150	36.28	36.33	36.34	0.579	0.580	0.581	0.911	0.912	0.912
			10	30	36.47	36.47	36.43	0.967	0.967	0.965	1.177	1.177	1.176
				60	36.35	36.08	36.14	0.962	0.948	0.951	1.174	1.165	1.167
				120	36.31	36.56	36.37	0.875	0.887	0.877	1.119	1.127	1.121
				150	36.85	36.56	36.35	0.527	0.519	0.513	0.869	0.862	0.857

Tabella 5.23: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.553 mm. M.R.2, Materiale 3.

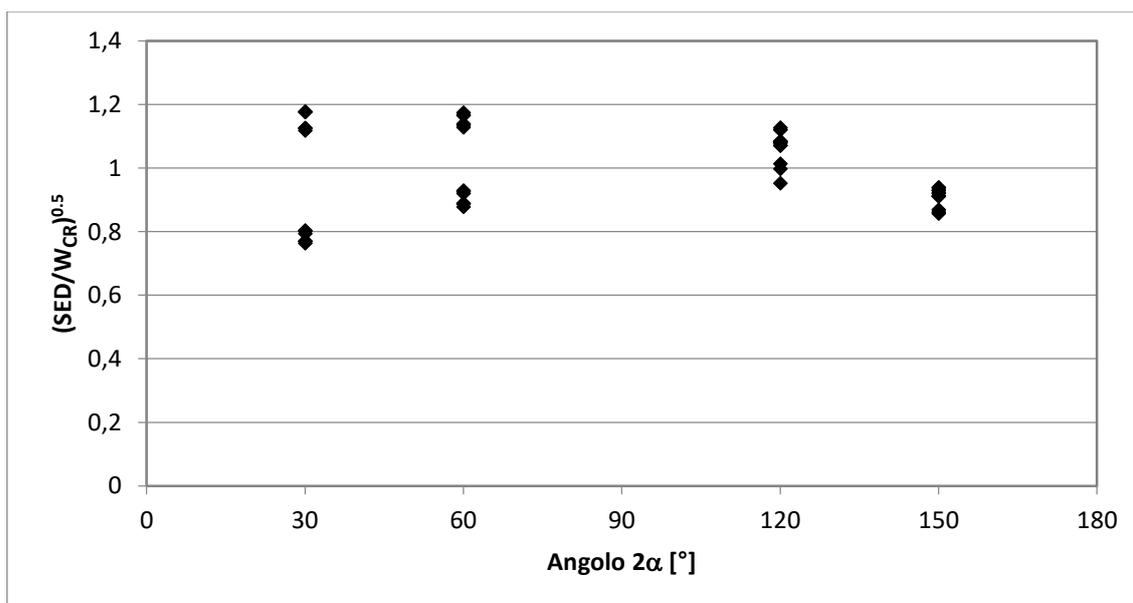


Figura 5.25: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 2 parametri. Valore medio=0.992. Materiale 3.

### 5.8.4 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 1.

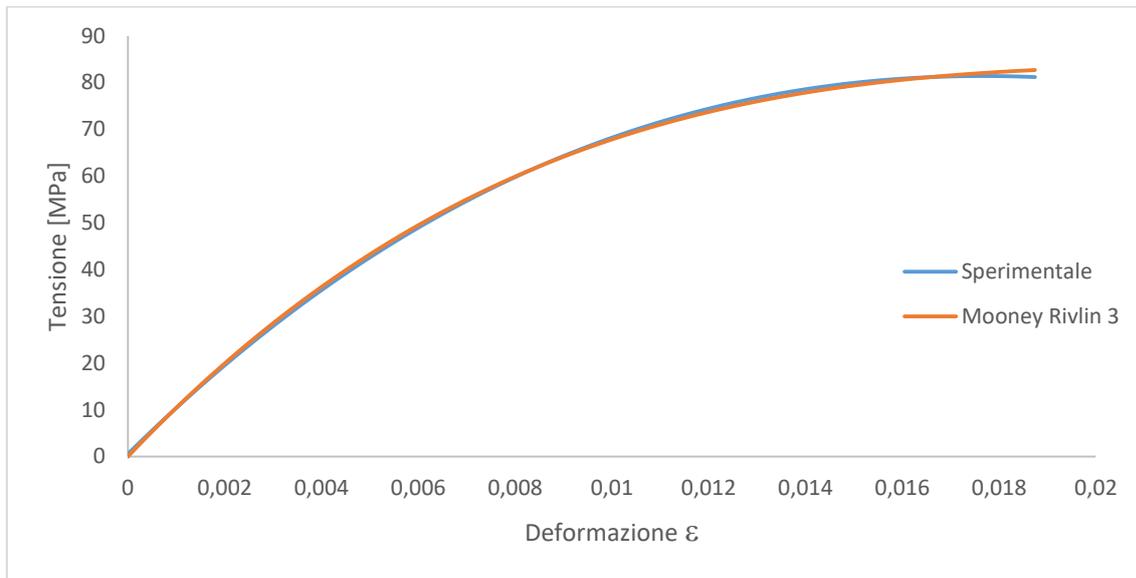


Figura 5.26: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Materiale 1.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.423	30	14.1

Tabella 5.24: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.212	0.226	0.240	0.254	0.268	0.282	0.296	0.310	0.324	0.338	0.353
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.205	1.167	1.133	1.101	1.071	1.043	1.017	0.992	0.969	0.947	0.926
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.050	1.033	1.017	1.001	0.987	0.974	0.961	0.948	0.937	0.926	0.915
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.078										

Tabella 5.25: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

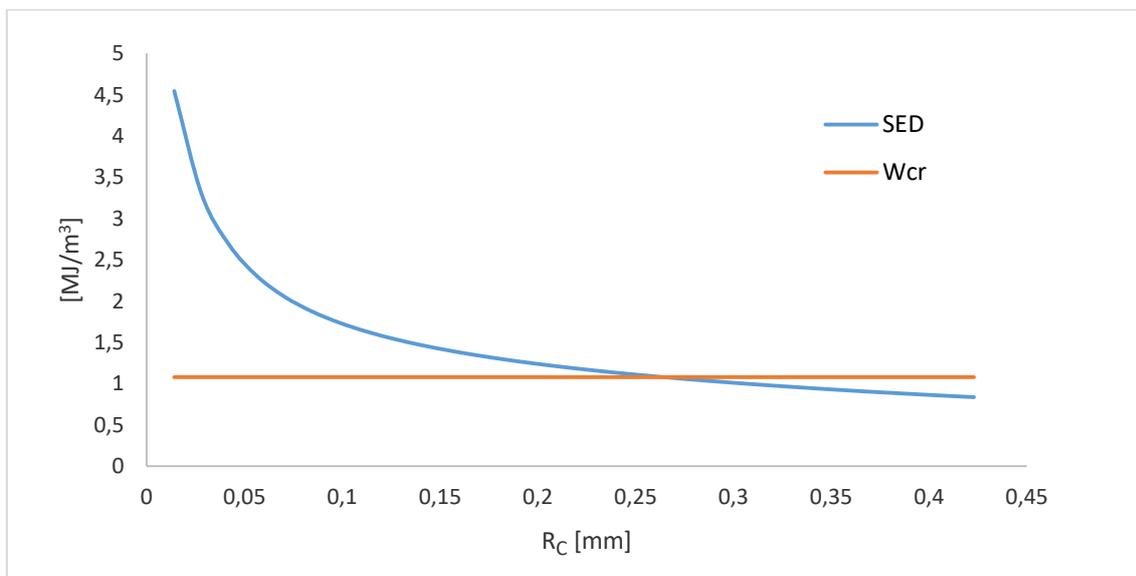


Figura 5.27: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.268 mm. La tabella (5.26) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.987.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.577	0.633	0.619	0.731	0.766	0.758
				60	51.03	48.24	47.07	0.924	0.832	0.794	0.926	0.878	0.858
				120	56.53	57.00	56.73	1.014	1.030	1.021	0.970	0.977	0.973
				150	75.83	70.80	71.92	1.005	0.883	0.909	0.965	0.905	0.918
			10	30	47.76	48.15	46.74	0.705	0.716	0.677	0.809	0.815	0.792
				60	45.92	45.51	44.51	0.788	0.775	0.743	0.855	0.848	0.830
				120	56.09	58.52	54.92	1.021	1.106	0.981	0.973	1.013	0.954
				150	71.49	68.93	69.66	0.801	0.747	0.763	0.862	0.833	0.841
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	1.193	1.300	1.220	1.052	1.098	1.064
				60	67.10	67.34	70.19	1.286	1.294	1.400	1.092	1.096	1.140
				120	71.73	72.74	70.65	1.279	1.313	1.243	1.089	1.104	1.074
				150	77.82	81.25	75.96	0.969	1.051	0.926	0.948	0.988	0.927
			10	30	70.22	74.82	71.91	1.481	1.672	1.550	1.172	1.245	1.199
				60	70.47	72.40	69.56	1.454	1.531	1.418	1.161	1.192	1.147
				120	73.53	76.37	76.05	1.476	1.587	1.574	1.170	1.213	1.208
				150	84.82	85.68	86.63	1.021	1.041	1.063	0.973	0.983	0.993

Tabella 5.26: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.268 mm. M.R.3, Materiale 1.

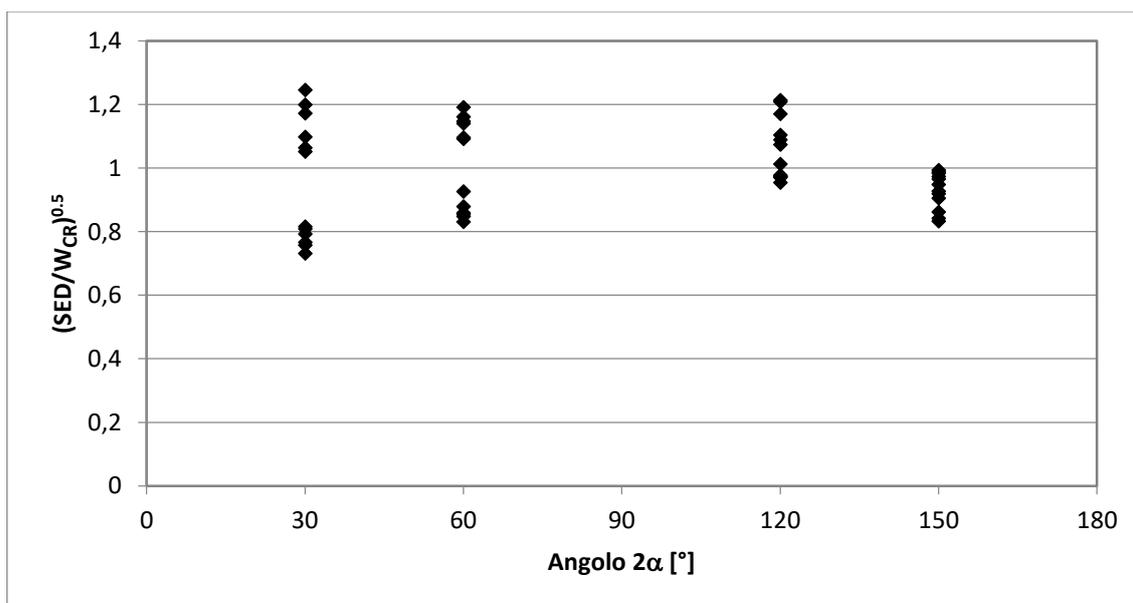


Figura 5.28: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Valore medio= 0.987. Materiale 1.

### 5.8.5 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 2.

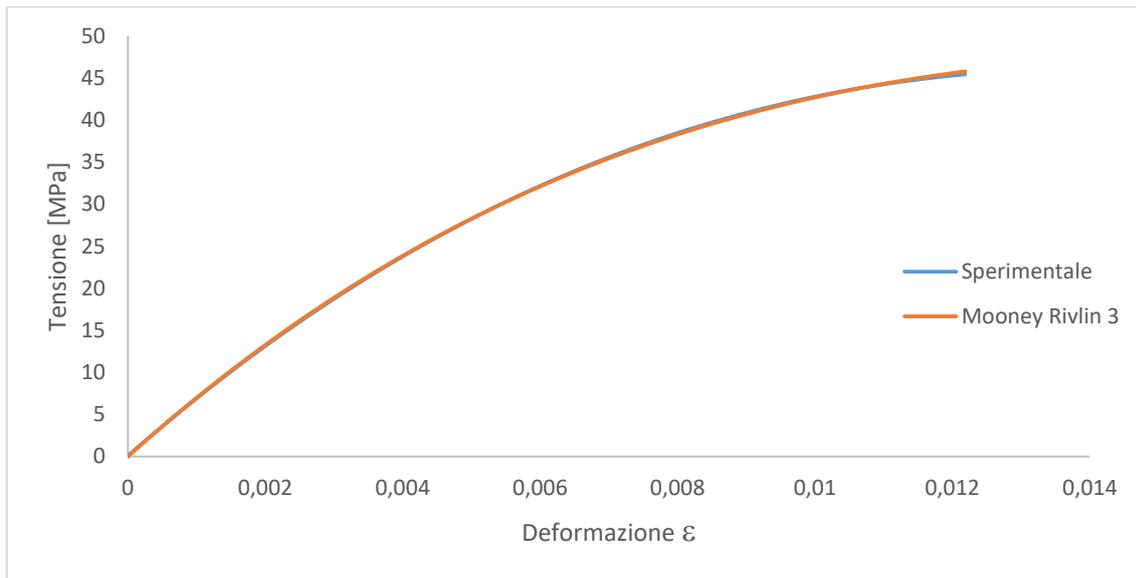


Figura 5.29: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Materiale 2.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.176	84	14.0

Tabella 5.27: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.770	0.784	0.798	0.812	0.826	0.840	0.854	0.868	0.882	0.896	0.910
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.375	0.370	0.365	0.360	0.356	0.352	0.347	0.343	0.339	0.335	0.331
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.019	1.013	1.006	1.000	0.993	0.987	0.981	0.975	0.970	0.964	0.958
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.357										

Tabella 5.28: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

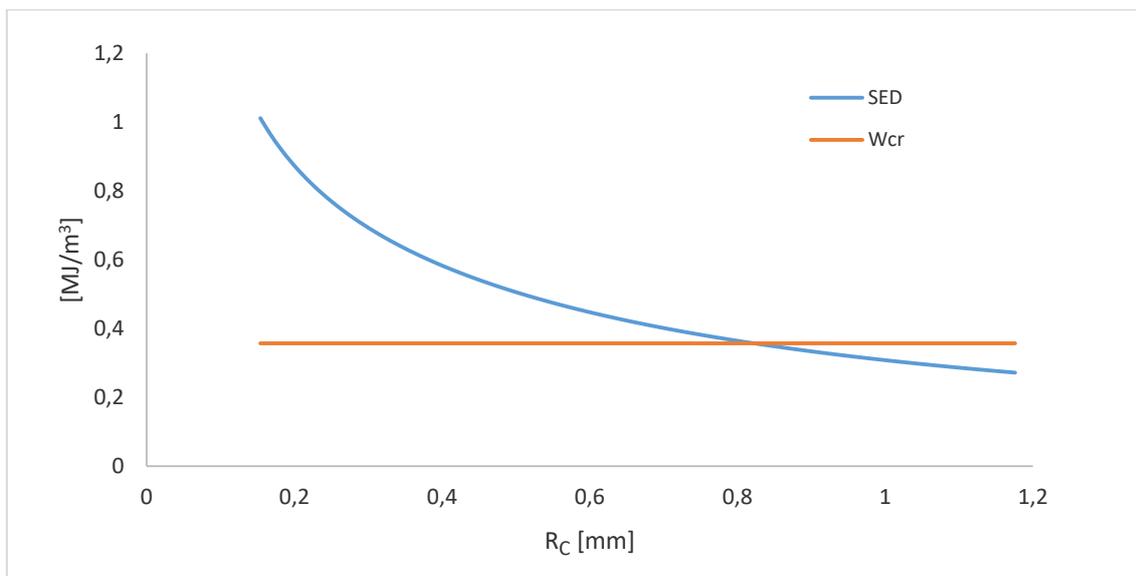


Figura 5.30: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.826 mm. La tabella (5.29) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.993.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$			
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.261	0.249	0.251	0.854	0.835	0.838	
				60	42.82	42.58	42.15	0.301	0.298	0.292	0.918	0.913	0.904	
				120	42.68	42.89	42.49	0.348	0.351	0.345	0.987	0.992	0.983	
				150	44.29	44.79	44.29	0.301	0.307	0.301	0.918	0.928	0.918	
				30	41.43	40.91	41.22	0.280	0.274	0.278	0.886	0.876	0.882	
				60	42.46	42.23	42.46	0.341	0.338	0.341	0.978	0.973	0.978	
				120	45.20	45.49	45.10	0.440	0.445	0.438	1.110	1.117	1.108	
				150	46.37	46.31	46.85	0.286	0.286	0.292	0.896	0.895	0.904	
			2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.405	0.404	0.402	1.065	1.064	1.062
					60	44.11	44.99	44.65	0.397	0.413	0.407	1.055	1.075	1.067
					120	44.07	44.23	44.95	0.393	0.396	0.408	1.049	1.053	1.069
					150	44.34	44.19	44.60	0.288	0.286	0.291	0.898	0.895	0.903
				10	30	45.56	45.66	45.60	0.463	0.465	0.464	1.139	1.141	1.140
					60	45.26	45.81	45.28	0.476	0.487	0.476	1.154	1.168	1.155
					120	45.74	45.35	45.09	0.431	0.424	0.419	1.099	1.090	1.084
					150	45.77	46.06	46.12	0.280	0.283	0.284	0.886	0.891	0.892

Tabella 5.29: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.826 mm. M.R.3, Materiale 2.

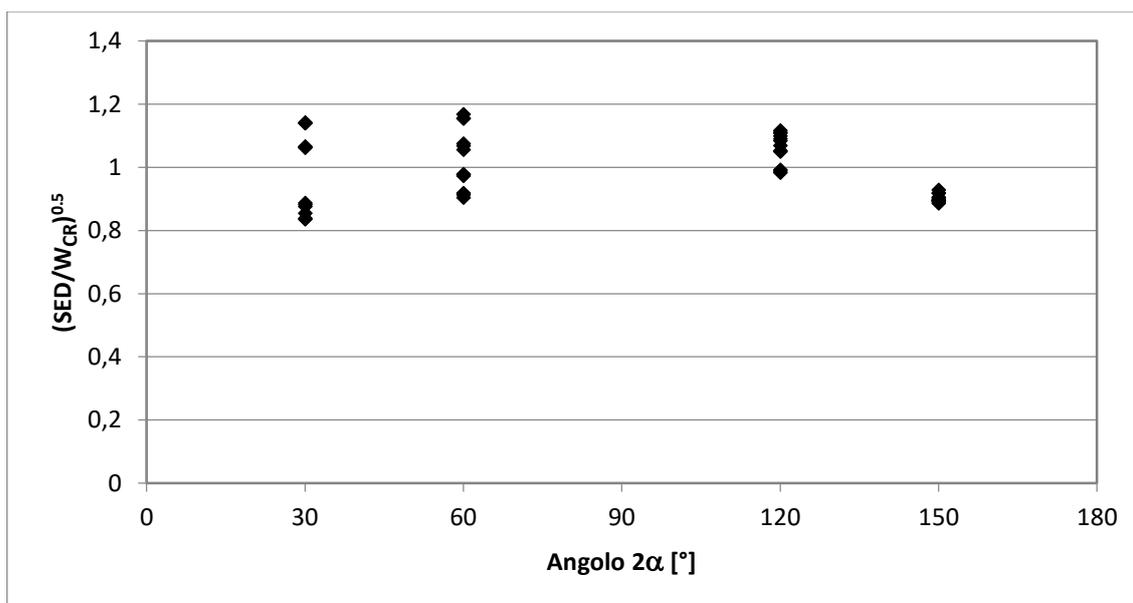


Figura 5.31: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Valore medio= 0.993. Materiale 2.

### 5.8.6 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 3 parametri: Materiale 3.

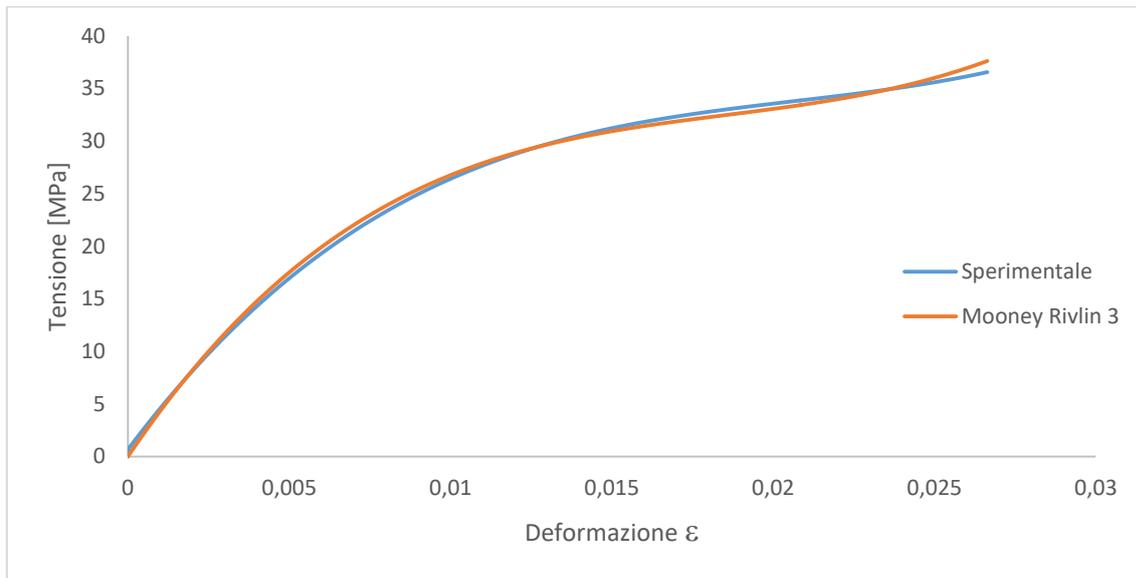


Figura 5.32: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Materiale 3.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.510	36	14.2

Tabella 5.30: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.198	0.213	0.227	0.241	0.255	0.269	0.283	0.298	0.312	0.326	0.340
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.789	0.762	0.736	0.713	0.692	0.672	0.653	0.636	0.620	0.605	0.590
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.056	1.037	1.019	1.003	0.988	0.973	0.960	0.947	0.934	0.923	0.911
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.698										

Tabella 5.31: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

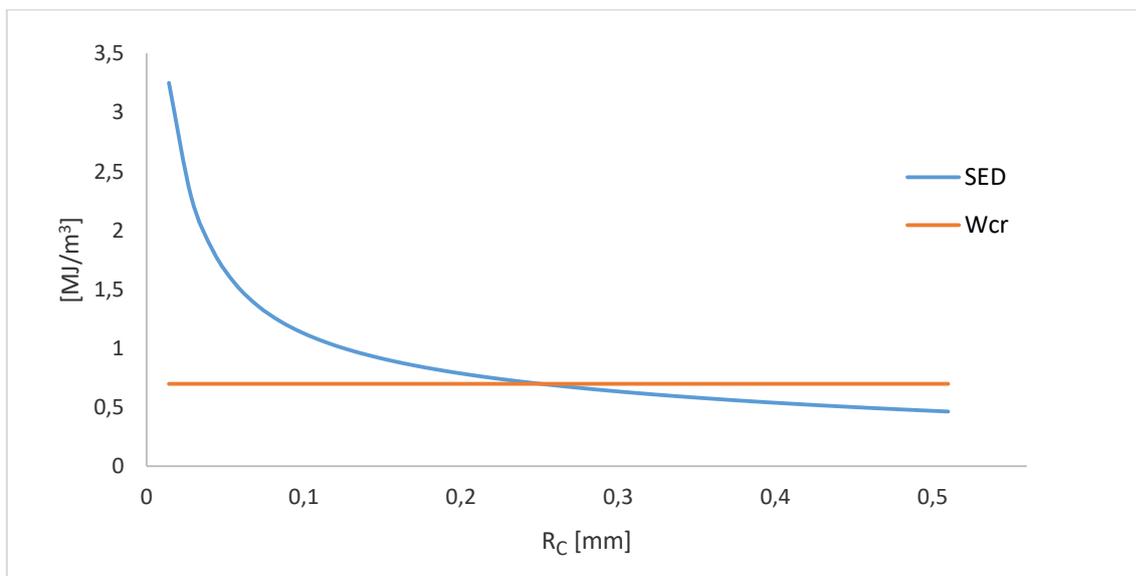


Figura 5.33: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.255 mm. La tabella (5.32) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.987.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$			
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.429	0.430	0.424	0.784	0.785	0.779	
				60	29.09	29.16	28.80	0.672	0.675	0.660	0.981	0.983	0.972	
				120	32.32	30.37	31.80	0.746	0.667	0.725	1.034	0.978	1.019	
				150	36.56	36.64	36.24	0.549	0.552	0.541	0.887	0.889	0.880	
			10	30	27.04	27.10	26.77	0.525	0.527	0.516	0.867	0.869	0.860	
				60	29.78	29.49	29.69	0.785	0.771	0.780	1.060	1.051	1.057	
				120	34.01	33.96	33.55	0.855	0.852	0.834	1.107	1.105	1.093	
				150	38.15	38.13	38.52	0.533	0.533	0.542	0.874	0.873	0.882	
			2	5	30	35.78	35.77	35.52	0.806	0.805	0.795	1.074	1.074	1.067
					60	35.83	35.68	35.47	0.810	0.804	0.795	1.077	1.073	1.067
					120	35.70	35.72	35.42	0.735	0.737	0.725	1.027	1.027	1.019
					150	36.28	36.33	36.34	0.493	0.494	0.495	0.840	0.841	0.842
				10	30	36.47	36.47	36.43	0.934	0.934	0.933	1.157	1.157	1.156
					60	36.35	36.08	36.14	0.969	0.955	0.958	1.178	1.170	1.172
					120	36.31	36.56	36.37	0.843	0.854	0.845	1.099	1.106	1.101
					150	36.85	36.56	36.35	0.458	0.452	0.447	0.810	0.805	0.800

Tabella 5.32: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.255 mm. M.R.3, Materiale 3.

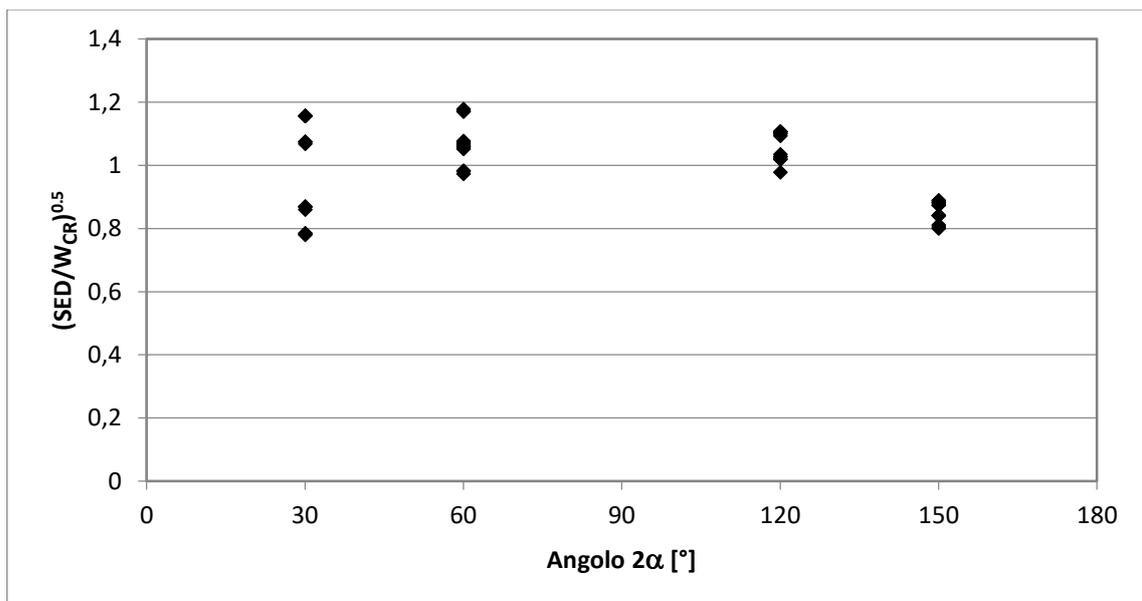


Figura 5.34: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Valore medio= 0.987. Materiale 3.

### 5.8.7 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 1.

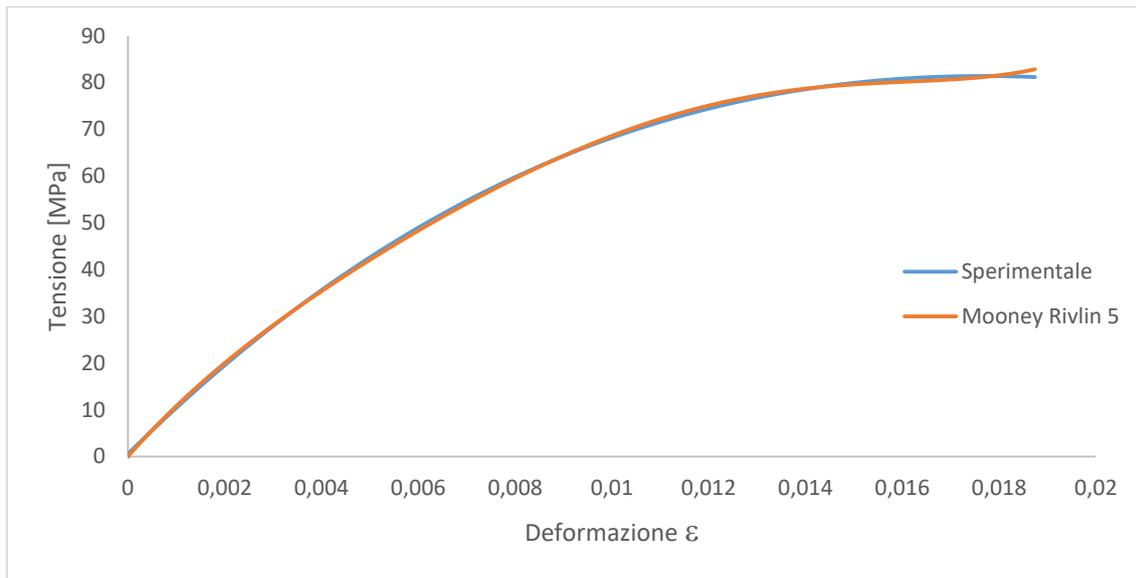


Figura 5.35: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Materiale 1.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.282	20	14.1

Tabella 5.33: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.071	0.085	0.099	0.113	0.127	0.141	0.155	0.169	0.183	0.197	0.212
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.446	1.320	1.224	1.147	1.083	1.030	0.983	0.942	0.906	0.873	0.843
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.150	1.101	1.061	1.027	0.998	0.973	0.950	0.929	0.911	0.893	0.878
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.078										

Tabella 5.34: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

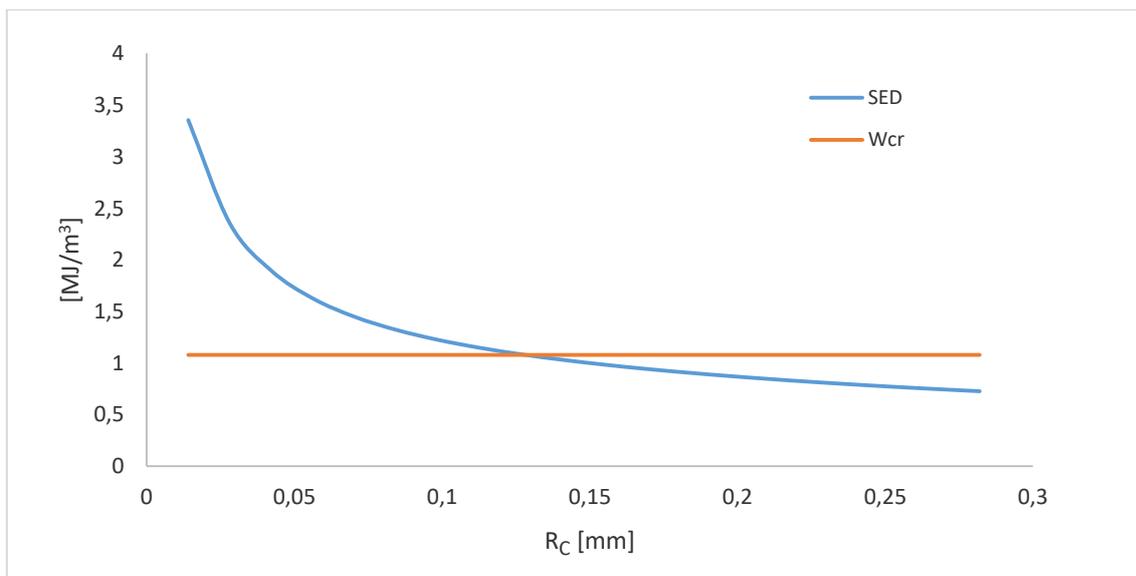


Figura 5.36: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.127 mm. La tabella (5.35) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.998.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$			
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.725	0.786	0.771	0.820	0.854	0.846	
				60	51.03	48.24	47.07	1.208	1.102	1.059	1.059	1.011	0.991	
				120	56.53	57.00	56.73	1.207	1.224	1.214	1.058	1.065	1.061	
				150	75.83	70.80	71.92	1.027	0.916	0.940	0.976	0.922	0.934	
			10	30	47.76	48.15	46.74	1.005	1.019	0.970	0.966	0.972	0.948	
				60	45.92	45.51	44.51	0.999	0.985	0.950	0.963	0.956	0.939	
				120	56.09	58.52	54.92	1.277	1.375	1.232	1.089	1.129	1.069	
				150	71.49	68.93	69.66	0.843	0.793	0.807	0.884	0.858	0.865	
			2	5	30	65.82	68.88	66.59	1.110	1.198	1.132	1.015	1.054	1.025
					60	67.10	67.34	70.19	1.126	1.133	1.214	1.022	1.025	1.061
					120	71.73	72.74	70.65	1.040	1.063	1.014	0.982	0.993	0.970
					150	77.82	81.25	75.96	0.834	0.895	0.801	0.880	0.911	0.862
				10	30	70.22	74.82	71.91	1.389	1.549	1.447	1.135	1.199	1.159
					60	70.47	72.40	69.56	1.347	1.411	1.317	1.118	1.144	1.105
					120	73.53	76.37	76.05	1.242	1.325	1.316	1.074	1.109	1.105
					150	84.82	85.68	86.63	0.872	0.887	0.904	0.900	0.907	0.916

Tabella 5.35: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.127 mm. M.R.5, Materiale 1.

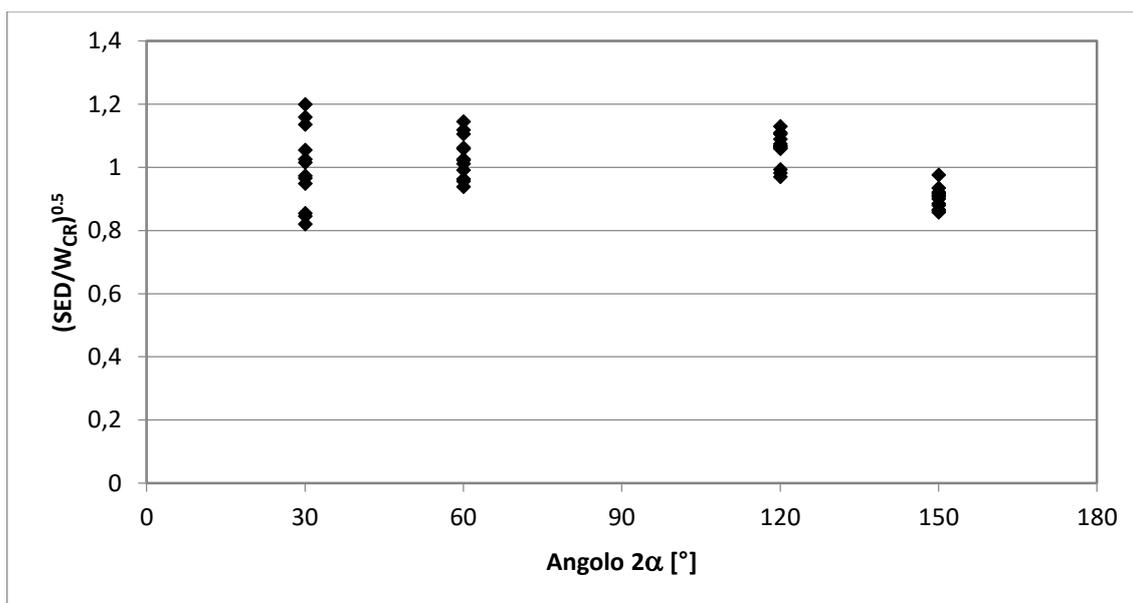


Figura 5.37: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Valore medio= 0.998. Materiale 1.

### 5.8.8 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 2.

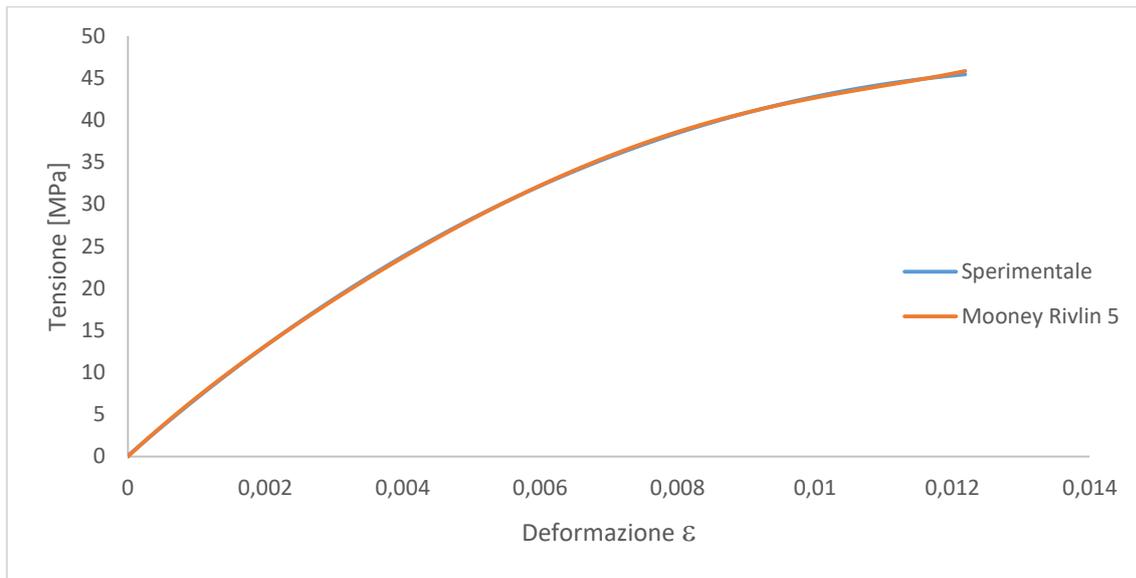


Figura 5.38: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Materiale 2.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.623	49	15.0

Tabella 5.36: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.450	0.465	0.480	0.495	0.510	0.525	0.540	0.555	0.570	0.585	0.600
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.385	0.377	0.369	0.362	0.355	0.349	0.342	0.336	0.330	0.325	0.319
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.033	1.022	1.012	1.002	0.992	0.983	0.974	0.965	0.957	0.948	0.940
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.357										

Tabella 5.37: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

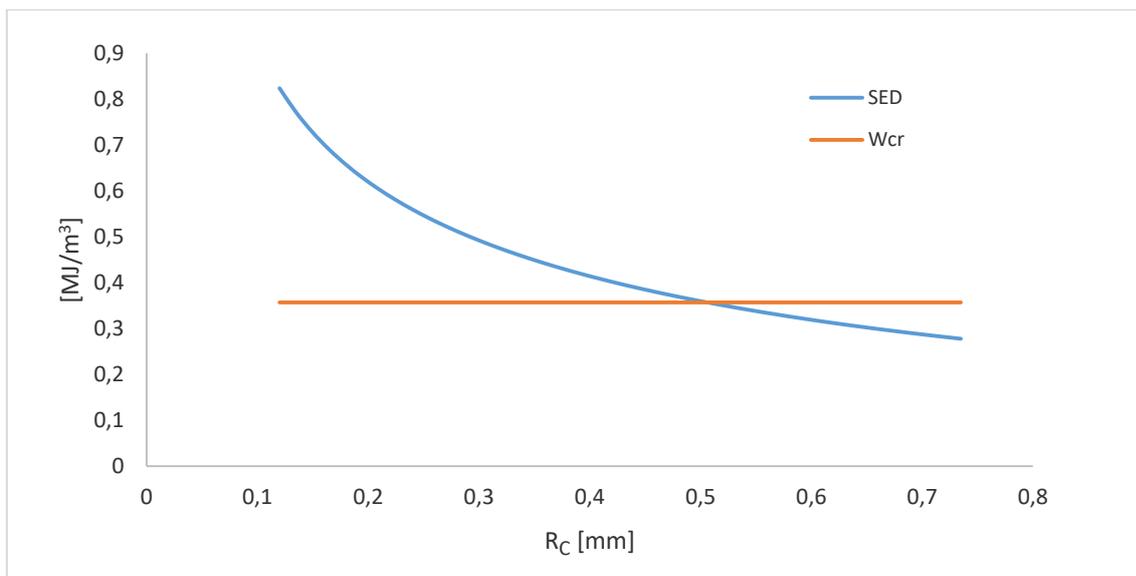


Figura 5.39: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.510 mm. La tabella (5.38) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.992.

Larghez. [mm]	Altezz. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.253	0.243	0.245	0.841	0.825	0.828
				60	42.82	42.58	42.15	0.318	0.315	0.310	0.944	0.940	0.932
				120	42.68	42.89	42.49	0.347	0.349	0.344	0.985	0.989	0.982
				150	44.29	44.79	44.29	0.279	0.284	0.279	0.884	0.892	0.884
			10	30	41.43	40.91	41.22	0.313	0.307	0.310	0.936	0.927	0.932
				60	42.46	42.23	42.46	0.350	0.347	0.350	0.990	0.986	0.990
				120	45.20	45.49	45.10	0.411	0.416	0.410	1.074	1.079	1.072
				150	46.37	46.31	46.85	0.279	0.279	0.284	0.885	0.884	0.892
		2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.405	0.404	0.403	1.065	1.064	1.063
				60	44.11	44.99	44.65	0.408	0.420	0.415	1.068	1.085	1.079
				120	44.07	44.23	44.95	0.385	0.387	0.397	1.038	1.041	1.054
				150	44.34	44.19	44.60	0.271	0.269	0.273	0.871	0.868	0.875
			10	30	45.56	45.66	45.60	0.456	0.457	0.456	1.130	1.132	1.130
				60	45.26	45.81	45.28	0.484	0.494	0.485	1.165	1.176	1.165
				120	45.74	45.35	45.09	0.459	0.452	0.448	1.133	1.125	1.120
				150	45.77	46.06	46.12	0.266	0.268	0.269	0.863	0.867	0.868

Tabella 5.38: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.510 mm. M.R.5, Materiale 2.

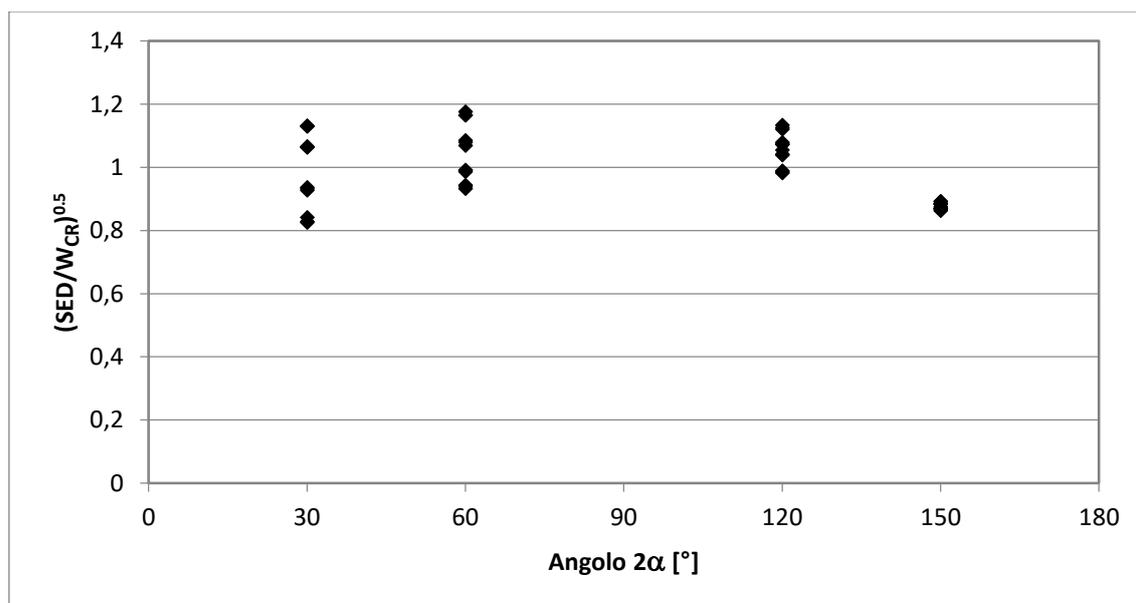


Figura 5.40: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Valore medio= 0.992. Materiale 2.

### 5.8.9 Analisi FEM Modello di Mooney Rivlin a 5 parametri: Materiale 3.

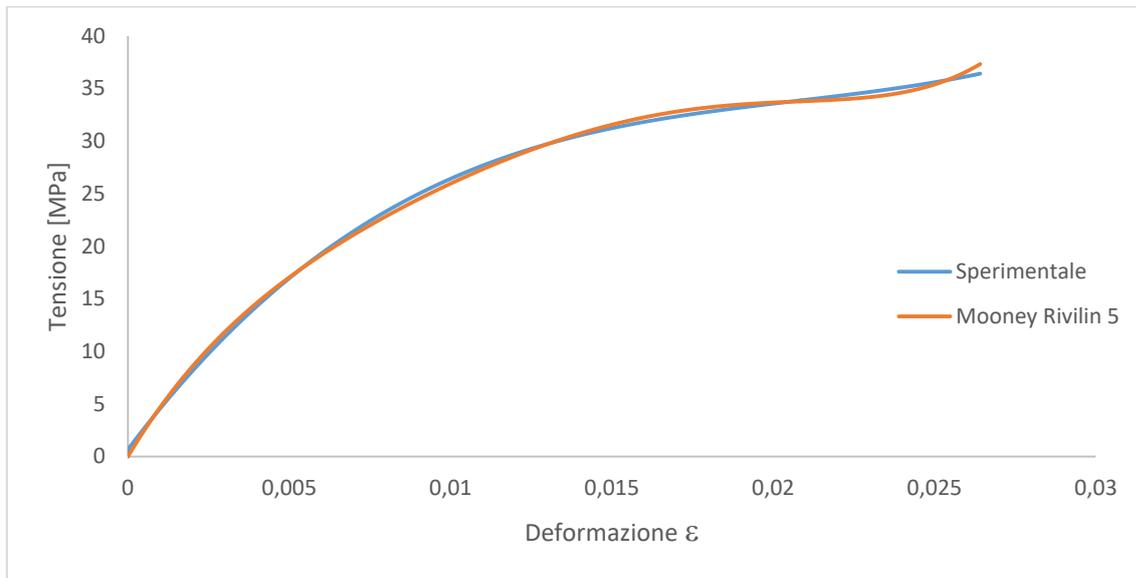


Figura 5.41: Curva tensione -deformazione per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Materiale 3.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.340	24	14.2

Tabella 5.39: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.071	0.085	0.099	0.113	0.128	0.142	0.156	0.170	0.184	0.198	0.213
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.963	0.869	0.799	0.744	0.699	0.662	0.629	0.601	0.577	0.555	0.535
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.152	1.099	1.057	1.022	0.992	0.966	0.942	0.921	0.902	0.885	0.869
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.698										

Tabella 5.40: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

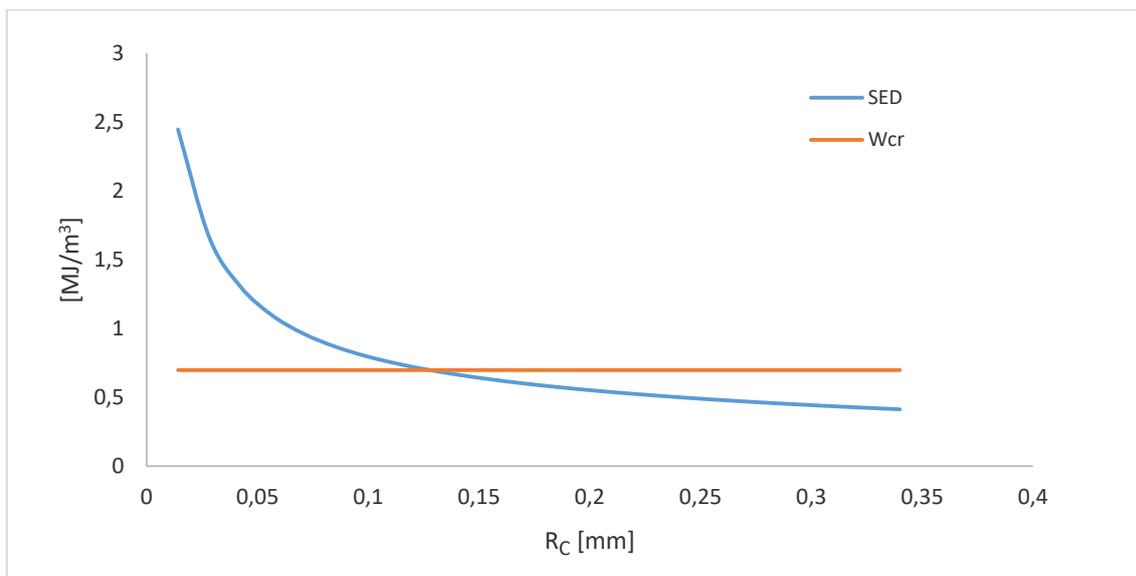


Figura 5.42: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.128 mm. La tabella (5.41) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.992.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$				
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3		
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.557	0.558	0.550	0.893	0.894	0.888		
				60	29.09	29.16	28.80	0.841	0.844	0.828	1.098	1.100	1.089		
				120	32.32	30.37	31.80	0.867	0.783	0.845	1.115	1.059	1.100		
				150	36.56	36.64	36.24	0.514	0.516	0.507	0.858	0.860	0.852		
				10	30	27.04	27.10	26.77	0.691	0.693	0.679	0.995	0.997	0.986	
					60	29.78	29.49	29.69	1.038	1.022	1.033	1.220	1.210	1.216	
					120	34.01	33.96	33.55	1.015	1.012	0.992	1.206	1.204	1.192	
					150	38.15	38.13	38.52	0.525	0.524	0.533	0.867	0.867	0.874	
				2	5	30	35.78	35.77	35.52	0.697	0.697	0.689	1.000	0.999	0.994
						60	35.83	35.68	35.47	0.732	0.727	0.720	1.024	1.021	1.015
						120	35.70	35.72	35.42	0.643	0.644	0.635	0.960	0.960	0.954
						150	36.28	36.33	36.34	0.410	0.411	0.411	0.767	0.768	0.768
			10		30	36.47	36.47	36.43	0.833	0.833	0.832	1.093	1.093	1.092	
					60	36.35	36.08	36.14	0.798	0.788	0.790	1.069	1.062	1.064	
					120	36.31	36.56	36.37	0.702	0.711	0.704	1.003	1.009	1.005	
					150	36.85	36.56	36.35	0.400	0.394	0.391	0.757	0.752	0.748	

Tabella 5.41: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.128 mm. M.R.5, Materiale 3.

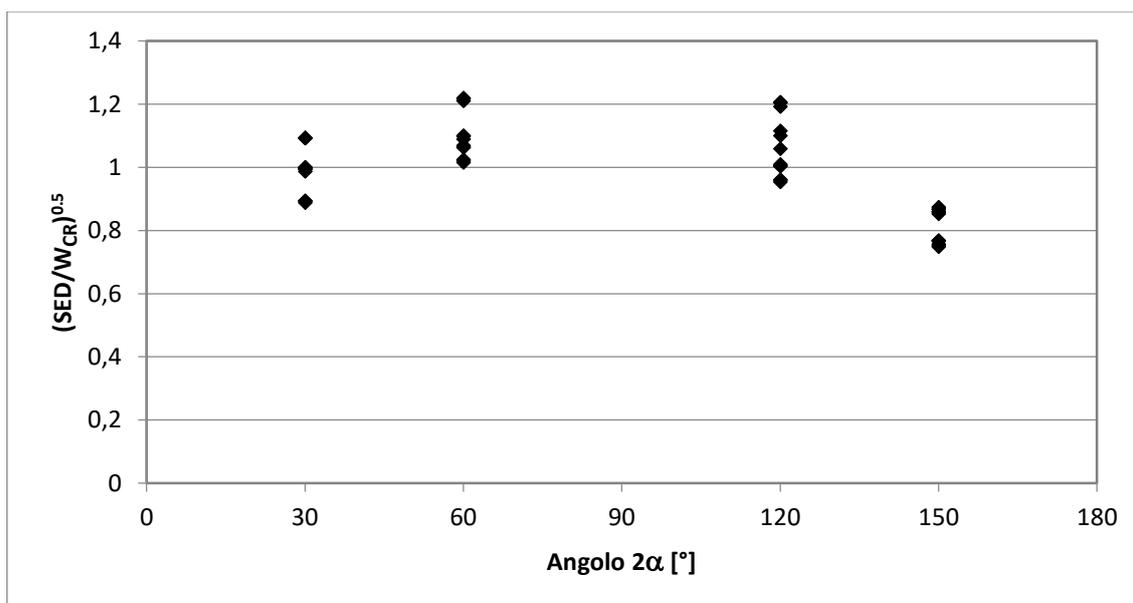


Figura 5.43: Valori normalizzati per il modello di Mooney Rivlin a 5 parametri. Valore medio= 0.992. Materiale 3.

5.8.10 Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 1.

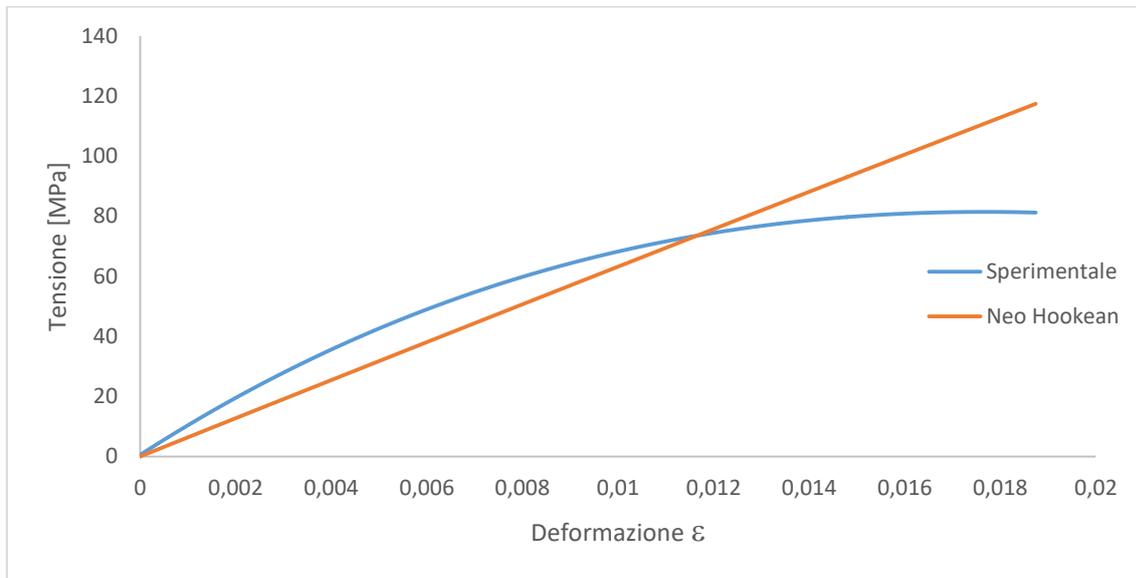


Figura 5.44: Curva tensione -deformazione per il modello di Neo Hookean. Materiale 1.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.846	60	14.1

Tabella 5.42: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.635	0.649	0.663	0.677	0.691	0.705	0.719	0.733	0.747	0.761	0.776
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.147	1.130	1.114	1.098	1.082	1.067	1.053	1.038	1.025	1.011	0.998
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.014	1.006	0.999	0.992	0.985	0.978	0.971	0.964	0.957	0.951	0.945
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.078										

Tabella 5.43: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

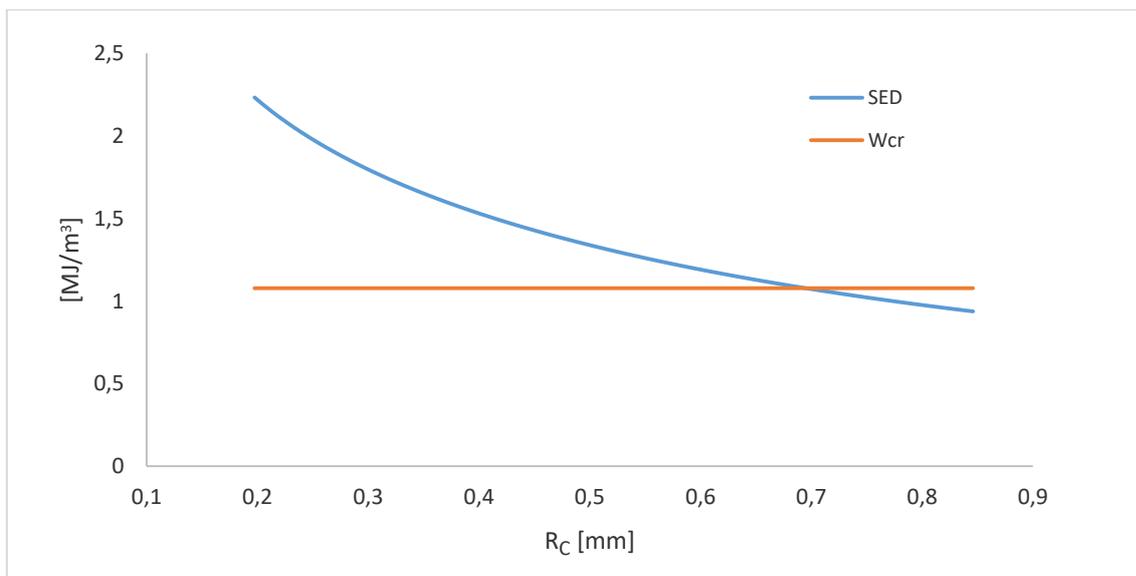


Figura 5.45: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.691 mm. La tabella (5.44) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.985.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.426	0.471	0.459	0.629	0.661	0.653
				60	51.03	48.24	47.07	0.661	0.590	0.562	0.783	0.740	0.722
				120	56.53	57.00	56.73	0.887	0.901	0.893	0.907	0.914	0.910
				150	75.83	70.80	71.92	1.141	0.995	1.026	1.029	0.961	0.976
			10	30	47.76	48.15	46.74	0.602	0.612	0.576	0.747	0.753	0.731
				60	45.92	45.51	44.51	0.595	0.585	0.559	0.743	0.736	0.720
				120	56.09	58.52	54.92	0.886	0.965	0.849	0.906	0.946	0.887
				150	71.49	68.93	69.66	0.914	0.850	0.868	0.921	0.888	0.897
		2	5	30	65.82	68.88	66.59	1.236	1.354	1.266	1.071	1.121	1.084
				60	67.10	67.34	70.19	1.297	1.306	1.420	1.097	1.101	1.148
				120	71.73	72.74	70.65	1.414	1.454	1.372	1.145	1.162	1.128
				150	77.82	81.25	75.96	1.189	1.296	1.133	1.050	1.096	1.025
			10	30	70.22	74.82	71.91	1.487	1.690	1.560	1.175	1.252	1.203
				60	70.47	72.40	69.56	1.617	1.707	1.575	1.225	1.258	1.209
				120	73.53	76.37	76.05	1.567	1.690	1.676	1.205	1.252	1.247
				150	84.82	85.68	86.63	1.233	1.259	1.287	1.070	1.081	1.092

Tabella 5.44: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 0.691 mm. Neo H., Materiale 1.

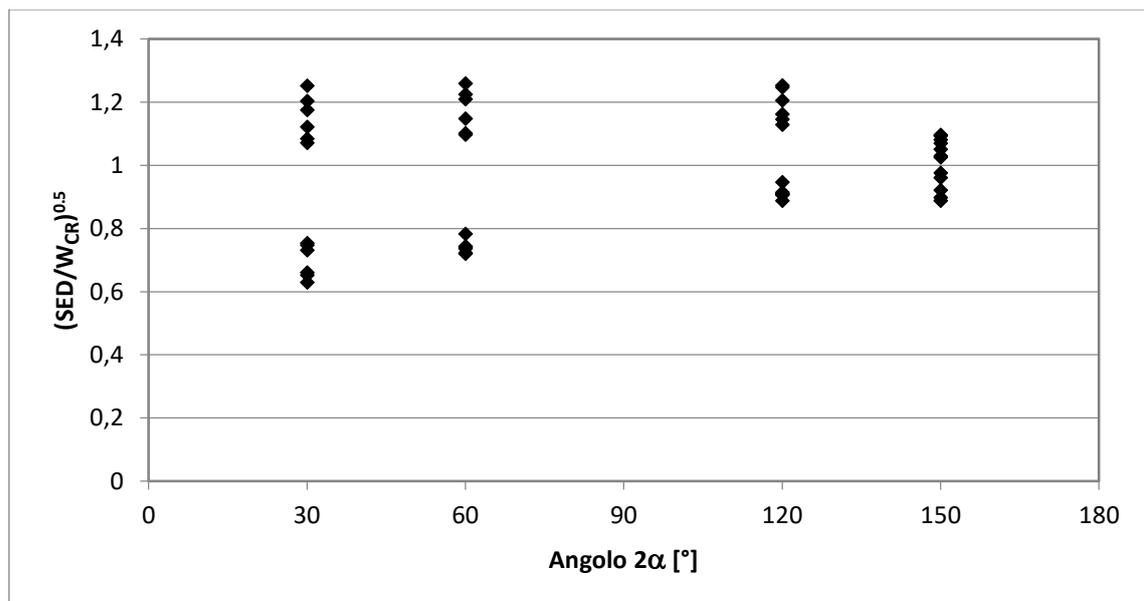


Figura 5.46: Valori normalizzati per il modello di Neo Hookean. Valore medio= 0.985. Materiale 1.

5.8.11 Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 2.

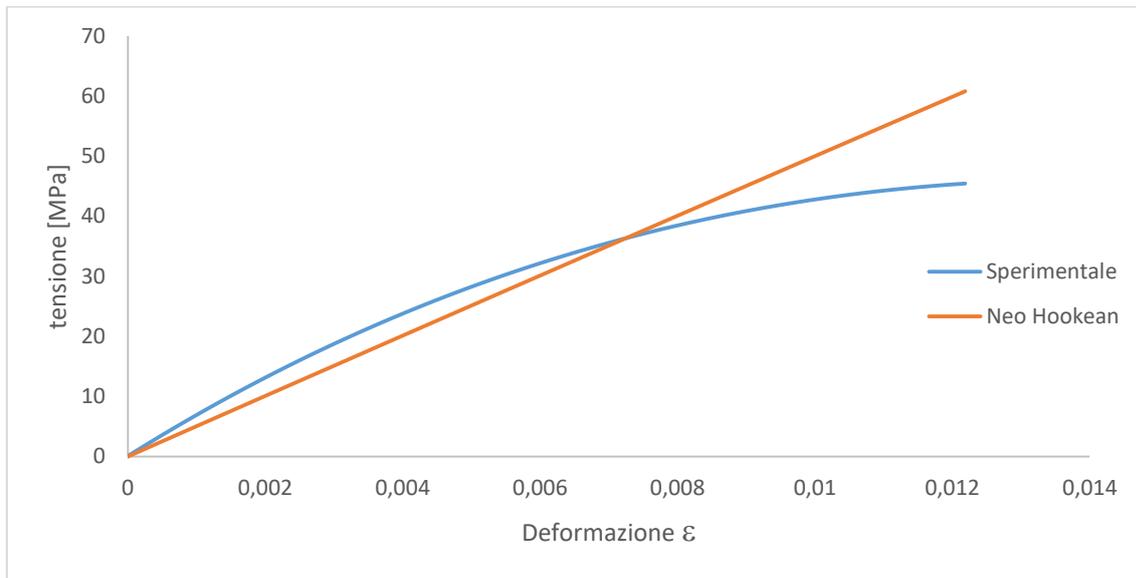


Figura 5.47: Curva tensione -deformazione per il modello di Neo Hookean. Materiale 2.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.764	126	14.0

Tabella 5.45: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	1.344	1.358	1.372	1.386	1.400	1.414	1.428	1.442	1.456	1.470	1.484
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.370	0.367	0.364	0.361	0.358	0.355	0.353	0.350	0.347	0.345	0.342
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.015	1.011	1.007	1.003	0.999	0.995	0.991	0.987	0.983	0.980	0.976
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.357										

Tabella 5.46: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

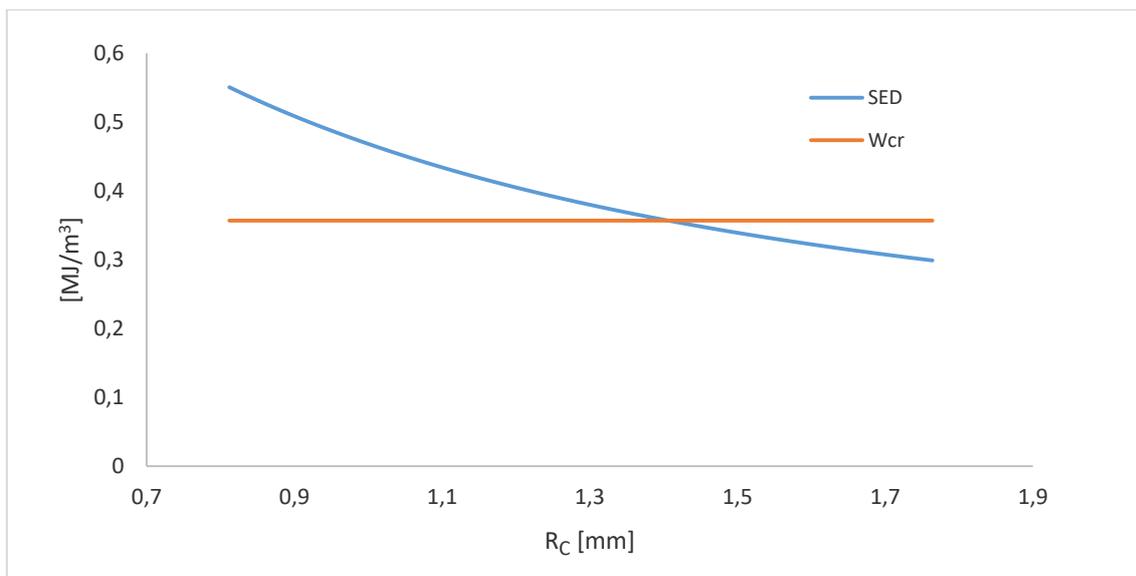


Figura 5.48: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 1.400 mm. La tabella (5.47) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.999.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.262	0.250	0.252	0.857	0.836	0.840
				60	42.82	42.58	42.15	0.308	0.304	0.298	0.928	0.923	0.914
				120	42.68	42.89	42.49	0.370	0.374	0.367	1.018	1.023	1.014
				150	44.29	44.79	44.29	0.353	0.362	0.353	0.995	1.006	0.995
			10	30	41.43	40.91	41.22	0.266	0.260	0.264	0.864	0.853	0.859
				60	42.46	42.23	42.46	0.318	0.315	0.318	0.944	0.939	0.944
				120	45.20	45.49	45.10	0.419	0.424	0.417	1.083	1.090	1.081
				150	46.37	46.31	46.85	0.339	0.338	0.346	0.975	0.974	0.985
		2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.365	0.365	0.363	1.012	1.011	1.008
				60	44.11	44.99	44.65	0.372	0.387	0.381	1.021	1.041	1.033
				120	44.07	44.23	44.95	0.404	0.407	0.420	1.064	1.068	1.085
				150	44.34	44.19	44.60	0.350	0.347	0.354	0.990	0.986	0.995
			10	30	45.56	45.66	45.60	0.400	0.401	0.400	1.058	1.060	1.059
				60	45.26	45.81	45.28	0.431	0.442	0.431	1.099	1.112	1.099
				120	45.74	45.35	45.09	0.442	0.434	0.429	1.112	1.103	1.097
				150	45.77	46.06	46.12	0.328	0.332	0.333	0.958	0.964	0.966

Tabella 5.47: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 1.400 mm. Neo H., Materiale 2.

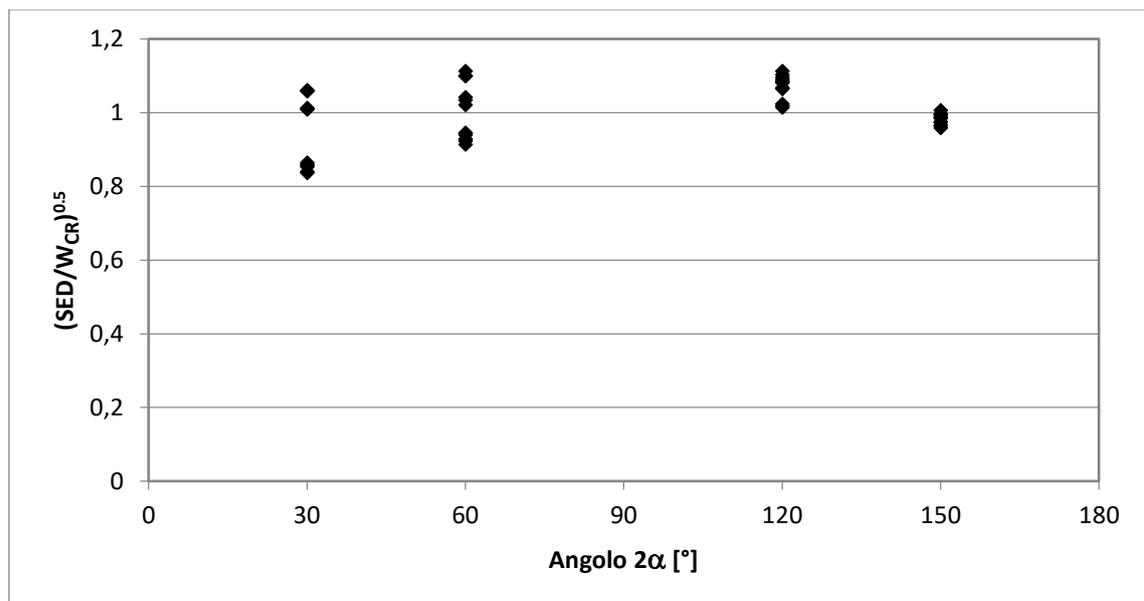


Figura 5.49: Valori normalizzati per il modello di Neo Hookean. Valore medio= 0.999. Materiale 2.

5.8.12 Analisi FEM Modello di Neo Hookean: Materiale 3.

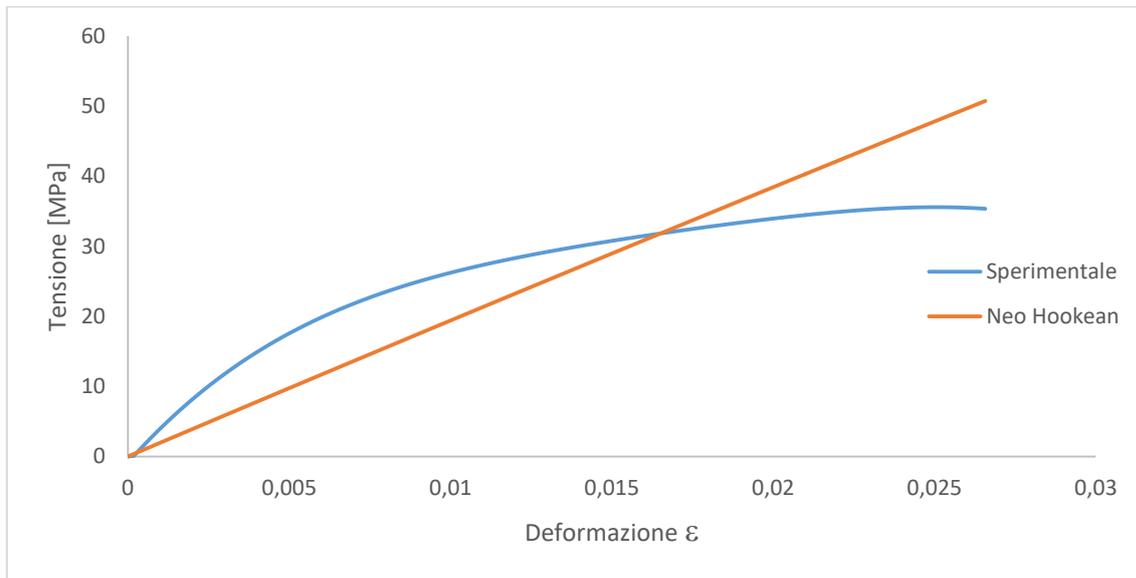


Figura 5.50: Curva tensione -deformazione per il modello di Neo Hookean. Materiale 3.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.360	97	14.0

Tabella 5.48: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.995	1.009	1.024	1.038	1.052	1.066	1.080	1.094	1.108	1.122	1.136
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.725	0.717	0.709	0.702	0.694	0.687	0.680	0.673	0.667	0.660	0.654
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.009	1.004	0.999	0.993	0.988	0.983	0.978	0.973	0.968	0.964	0.959
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.698										

Tabella 5.49: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

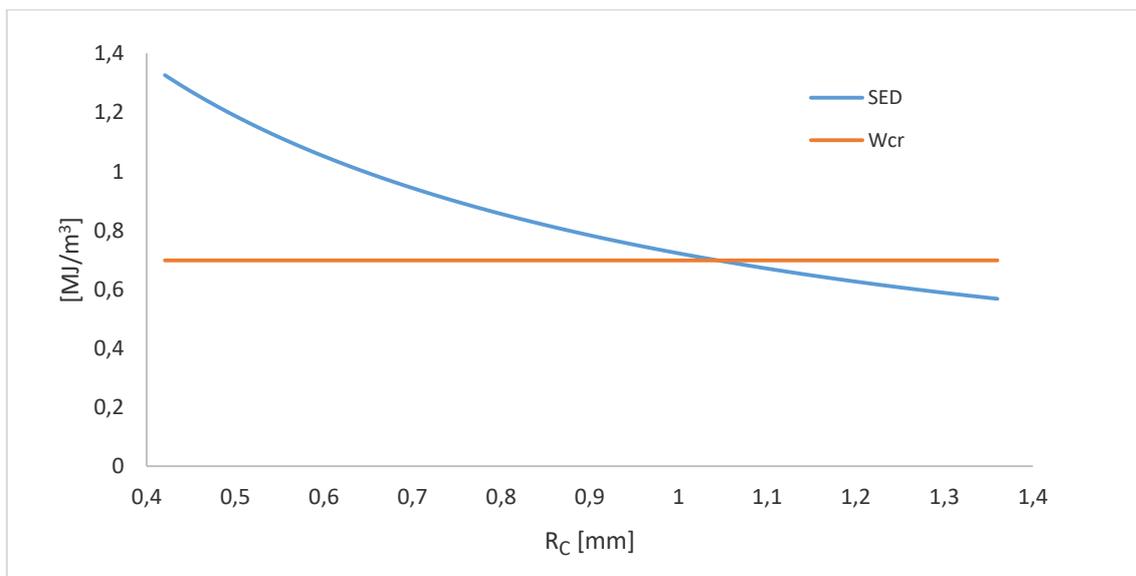


Figura 5.51: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 1.052 mm. La tabella (5.50) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.988.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.343	0.344	0.339	0.701	0.702	0.696
				60	29.09	29.16	28.80	0.480	0.482	0.470	0.829	0.831	0.821
				120	32.32	30.37	31.80	0.693	0.611	0.671	0.997	0.936	0.981
				150	36.56	36.64	36.24	0.702	0.706	0.690	1.003	1.006	0.995
				30	27.04	27.10	26.77	0.418	0.420	0.410	0.774	0.776	0.766
				60	29.78	29.49	29.69	0.498	0.489	0.495	0.845	0.837	0.842
				120	34.01	33.96	33.55	0.808	0.805	0.786	1.076	1.074	1.061
				150	38.15	38.13	38.52	0.686	0.686	0.699	0.992	0.991	1.001
			10	30	35.78	35.77	35.52	0.799	0.798	0.787	1.070	1.069	1.062
				60	35.83	35.68	35.47	0.836	0.829	0.819	1.094	1.090	1.083
				120	35.70	35.72	35.42	0.848	0.849	0.835	1.102	1.103	1.094
				150	36.28	36.33	36.34	0.680	0.682	0.682	0.987	0.988	0.989
				30	36.47	36.47	36.43	0.936	0.936	0.934	1.158	1.158	1.157
				60	36.35	36.08	36.14	0.965	0.950	0.953	1.176	1.167	1.169
				120	36.31	36.56	36.37	0.872	0.884	0.874	1.117	1.125	1.119
				150	36.85	36.56	36.35	0.626	0.616	0.609	0.947	0.939	0.934

Tabella 5.50: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini alla distanza di 1.052 mm. Neo H., Materiale 3.

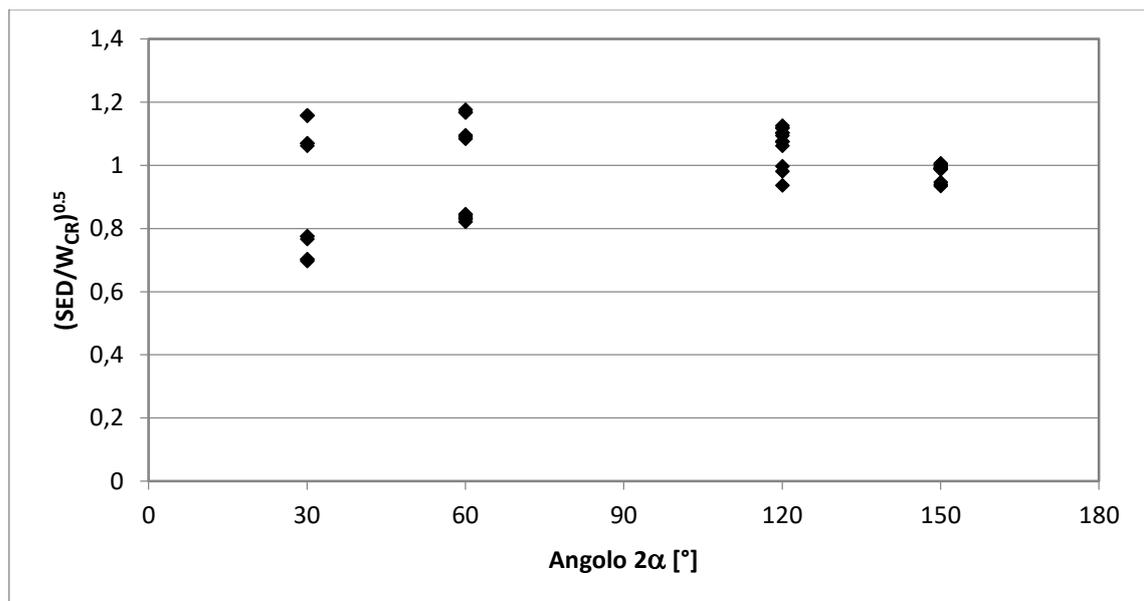


Figura 5.52: Valori normalizzati per il modello di Neo Hookean. Valore medio= 0.988. Materiale 3.

### 5.8.13 Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 1.

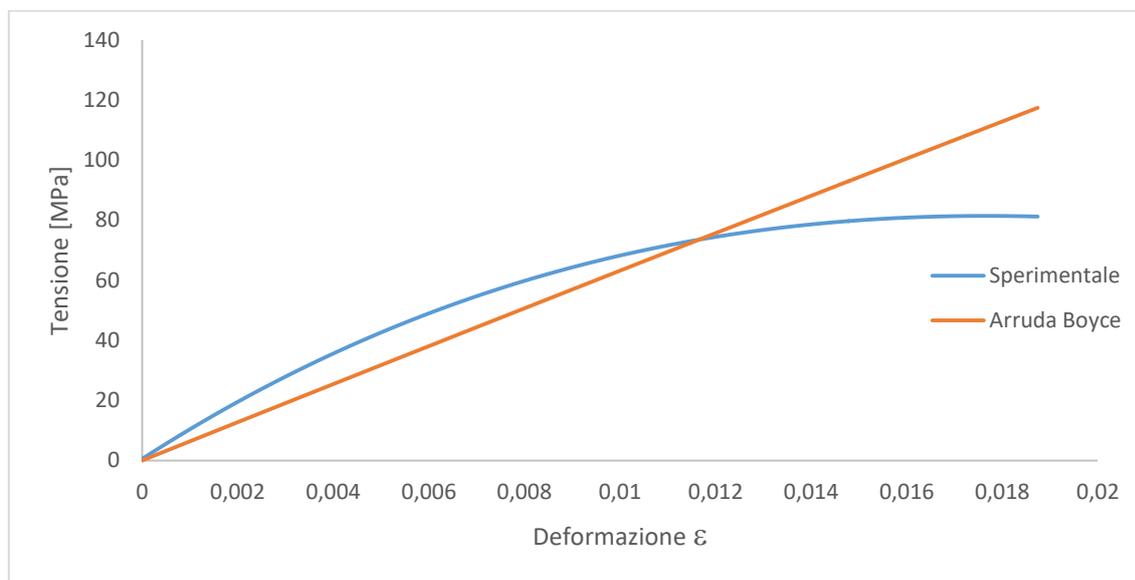


Figura 5.53: Curva tensione -deformazione per il modello di Arruda B. Materiale 1.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
0.846	60	14.1

Tabella 5.51: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.635	0.649	0.663	0.677	0.691	0.705	0.719	0.733	0.747	0.761	0.776
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.147	1.130	1.114	1.098	1.082	1.067	1.053	1.038	1.025	1.011	0.998
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.014	1.006	0.999	0.992	0.985	0.978	0.971	0.964	0.957	0.951	0.945
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	1.078										

Tabella 5.52: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

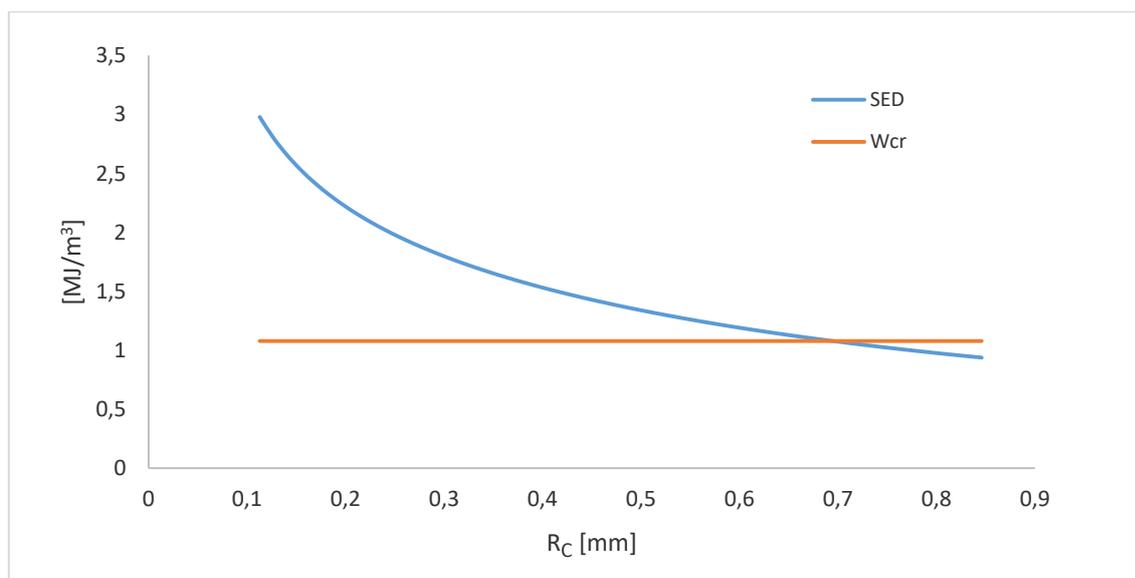


Figura 5.54: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 0.691 mm. La tabella (5.53) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.985.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	44.54	46.80	46.22	0.426	0.471	0.459	0.629	0.661	0.653
				60	51.03	48.24	47.07	0.661	0.590	0.562	0.783	0.740	0.722
				120	56.53	57.00	56.73	0.887	0.901	0.893	0.907	0.914	0.910
				150	75.83	70.80	71.92	1.141	0.995	1.026	1.029	0.961	0.976
				30	47.76	48.15	46.74	0.602	0.612	0.576	0.747	0.753	0.731
				60	45.92	45.51	44.51	0.595	0.585	0.559	0.743	0.736	0.720
				120	56.09	58.52	54.92	0.886	0.965	0.849	0.906	0.946	0.887
				150	71.49	68.93	69.66	0.914	0.850	0.868	0.921	0.888	0.897
				30	65.82	68.88	66.59	1.236	1.354	1.266	1.071	1.121	1.084
				60	67.10	67.34	70.19	1.297	1.306	1.420	1.097	1.101	1.148
				120	71.73	72.74	70.65	1.414	1.454	1.372	1.145	1.162	1.128
				150	77.82	81.25	75.96	1.189	1.296	1.133	1.050	1.096	1.025
			30	70.22	74.82	71.91	1.487	1.690	1.560	1.175	1.252	1.203	
			60	70.47	72.40	69.56	1.617	1.707	1.575	1.225	1.258	1.209	
			120	73.53	76.37	76.05	1.567	1.690	1.676	1.205	1.252	1.247	
			150	84.82	85.68	86.63	1.233	1.259	1.287	1.070	1.081	1.092	

Tabella 5.53: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini. Distanza 0.691 mm. Arruda B., Materiale 1.

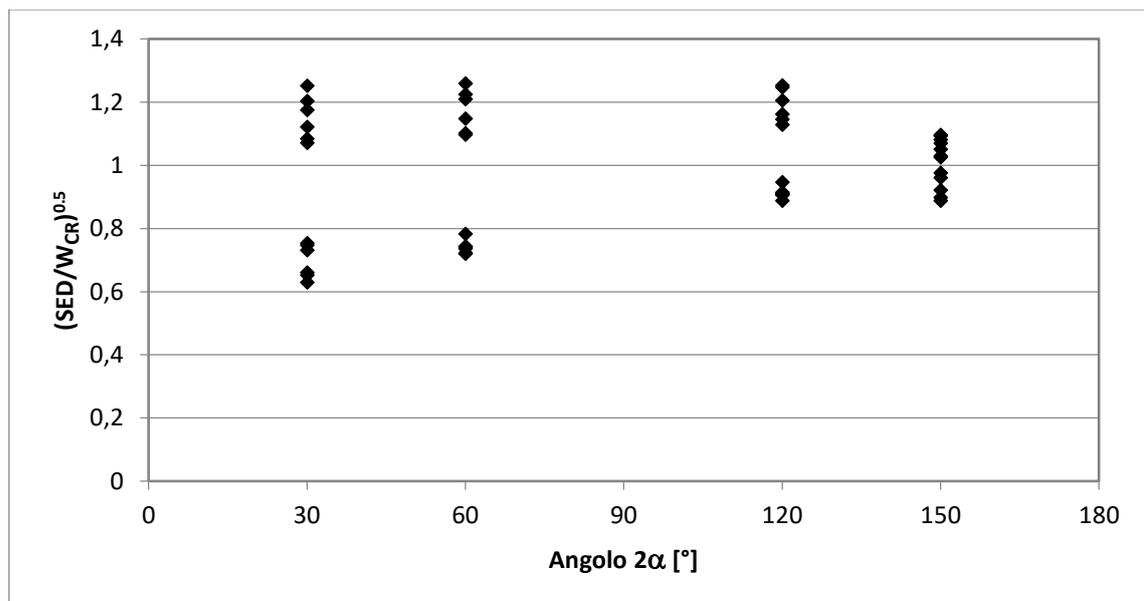


Figura 5.55: Valori normalizzati per il modello di Arruda Boyce. Valore medio= 0.985. Materiale 1.

### 5.8.14 Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 2.

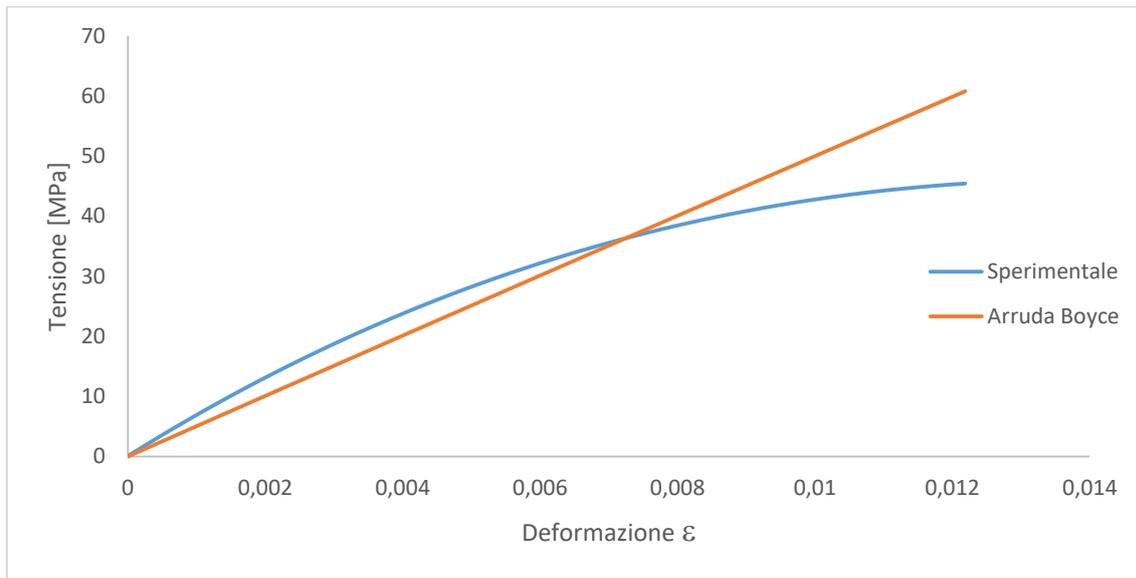


Figura 5.56: Curva tensione -deformazione per il modello di Arruda B. Materiale 2.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.764	126	14.0

Tabella 5.54: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	1.344	1.358	1.372	1.386	1.400	1.414	1.428	1.442	1.456	1.470	1.484
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.370	0.367	0.364	0.361	0.358	0.355	0.353	0.350	0.347	0.345	0.342
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.015	1.011	1.007	1.003	0.999	0.995	0.991	0.987	0.983	0.980	0.976
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.357										

Tabella 5.55: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

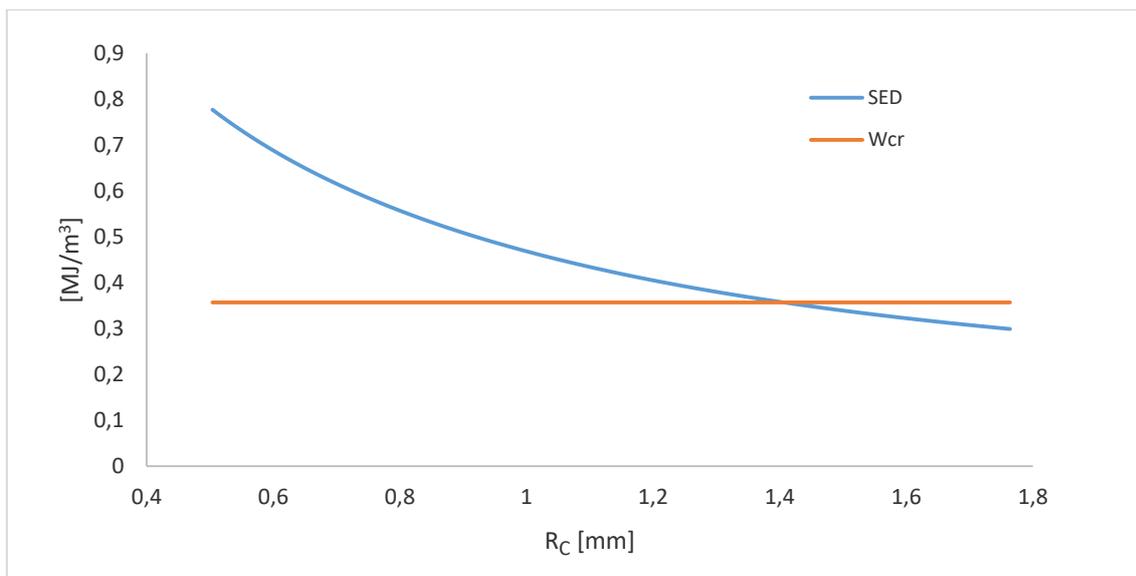


Figura 5.57: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 1.400 mm. La tabella (5.56) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.999.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$				
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3		
50	150	0	5	30	41.71	40.71	40.88	0.262	0.250	0.252	0.857	0.836	0.840		
				60	42.82	42.58	42.15	0.308	0.304	0.298	0.928	0.923	0.914		
				120	42.68	42.89	42.49	0.370	0.374	0.367	1.018	1.023	1.014		
				150	44.29	44.79	44.29	0.353	0.362	0.353	0.995	1.006	0.995		
				10	30	41.43	40.91	41.22	0.266	0.260	0.264	0.864	0.853	0.859	
					60	42.46	42.23	42.46	0.318	0.315	0.318	0.944	0.939	0.944	
					120	45.20	45.49	45.10	0.419	0.424	0.417	1.083	1.090	1.081	
					150	46.37	46.31	46.85	0.339	0.338	0.346	0.975	0.974	0.985	
				2	5	30	45.31	45.25	45.15	0.365	0.365	0.363	1.012	1.011	1.008
						60	44.11	44.99	44.65	0.372	0.387	0.381	1.021	1.041	1.033
						120	44.07	44.23	44.95	0.404	0.407	0.420	1.064	1.068	1.085
						150	44.34	44.19	44.60	0.350	0.347	0.354	0.990	0.986	0.995
			10		30	45.56	45.66	45.60	0.400	0.401	0.400	1.058	1.060	1.059	
					60	45.26	45.81	45.28	0.431	0.442	0.431	1.099	1.112	1.099	
					120	45.74	45.35	45.09	0.442	0.434	0.429	1.112	1.103	1.097	
					150	45.77	46.06	46.12	0.328	0.332	0.333	0.958	0.964	0.966	

Tabella 5.56: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini. Distanza 1.400 mm. Arruda B., Materiale 2.

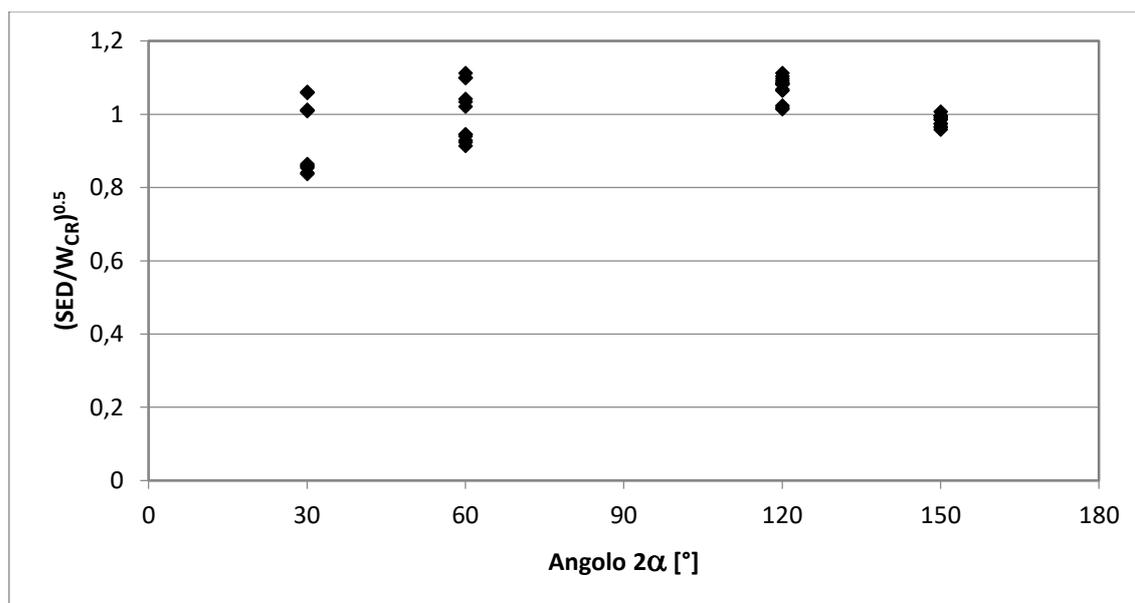


Figura 5.58: Valori normalizzati per il modello di Arruda Boyce. Valore medio= 0.999. Materiale 2.

### 5.8.15 Analisi FEM Modello di Arruda Boyce: Materiale 3.

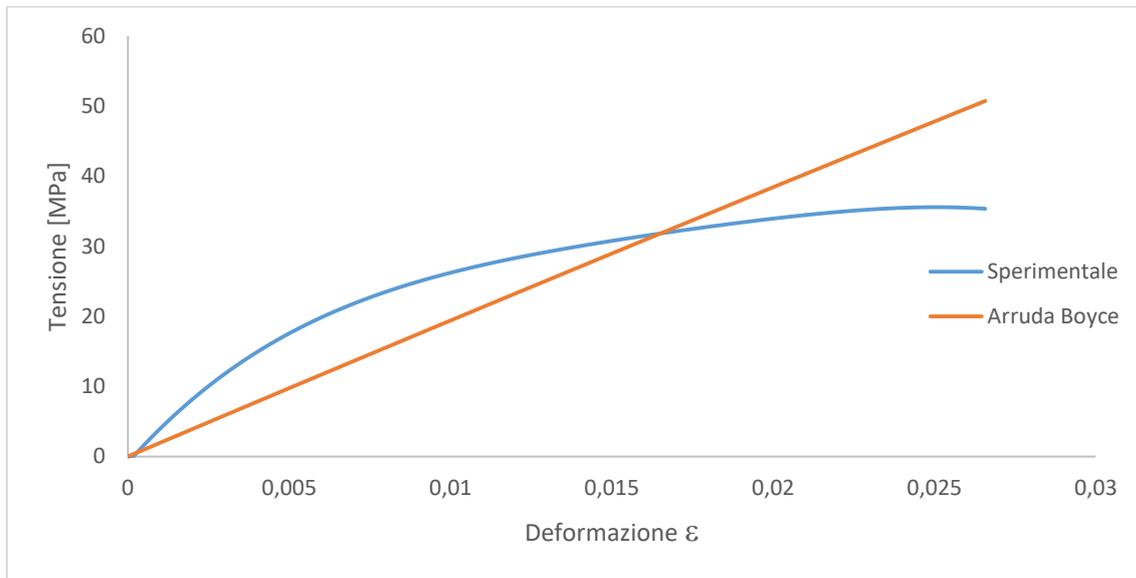


Figura 5.59: Curva tensione -deformazione per il modello di Arruda B. Materiale 3.

$R_M$ [mm]	N° $r_i$	$d_i$ [ $\mu\text{m}$ ]
1.360	97	14.0

Tabella 5.57: Suddivisione archi usata per la determinazione del  $R_C$ .

$r_i$ [mm]	0.995	1.009	1.024	1.038	1.052	1.066	1.080	1.094	1.108	1.122	1.136
$\overline{SED}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.725	0.717	0.709	0.702	0.694	0.687	0.680	0.673	0.667	0.660	0.654
$(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$	1.009	1.004	0.999	0.993	0.988	0.983	0.978	0.973	0.968	0.964	0.959
$W_{CR}$ [ $\text{MJ}/\text{m}^3$ ]	0.698										

Tabella 5.58: Valori della  $\overline{SED}$  al variare di alcuni raggi  $r_i$ .

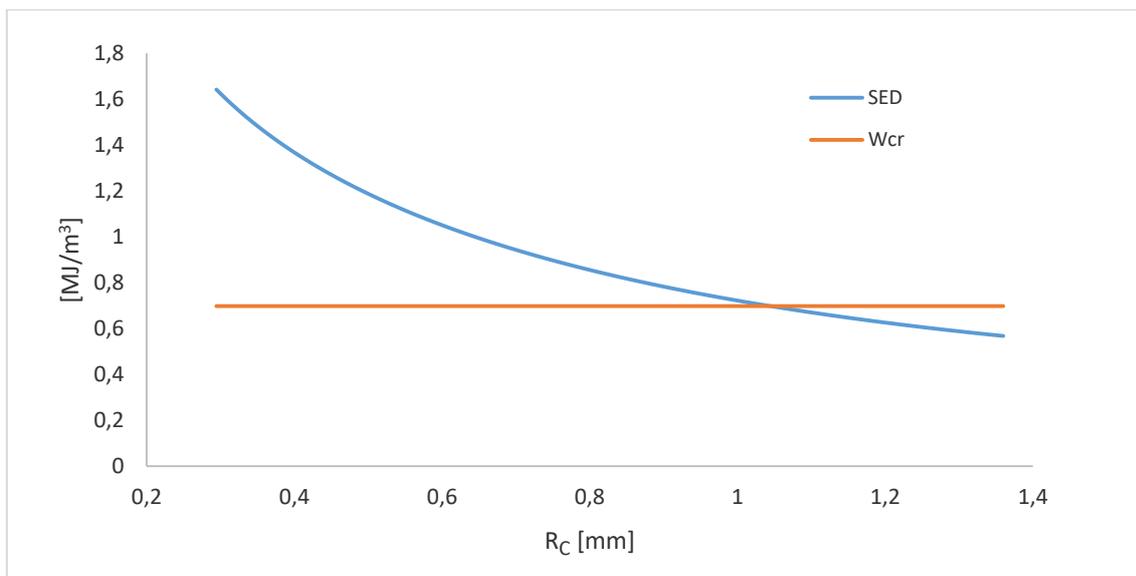


Figura 5.60: Andamento grafico della SED al variare dei raggi  $r_i$ .

L'uguaglianza tra l'energia critica  $W_{CR}$  e la  $\overline{SED}$  media avviene per il raggio 1.052 mm. La tabella (5.59) fornisce i valori di SED per tale raggio critico. Il valore normato  $(\overline{SED}/W_{CR})^{0.5}$  è pari a 0.988.

Larghez. [mm]	Altez. [mm]	$\rho$ [mm]	a [mm]	$2\alpha$ [°]	Tensione [MPa]			SED [MJ/m <sup>3</sup> ]			$(SED/W_{CR})^{0.5}$		
					Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3	Prova 1	Prova 2	Prova 3
50	150	0	5	30	26.29	26.32	26.10	0.343	0.344	0.339	0.701	0.702	0.696
				60	29.09	29.16	28.80	0.480	0.482	0.470	0.829	0.831	0.821
				120	32.32	30.37	31.80	0.693	0.611	0.671	0.997	0.936	0.981
				150	36.56	36.64	36.24	0.702	0.706	0.690	1.003	1.006	0.995
			10	30	27.04	27.10	26.77	0.418	0.420	0.410	0.774	0.776	0.766
				60	29.78	29.49	29.69	0.498	0.489	0.495	0.845	0.837	0.842
				120	34.01	33.96	33.55	0.808	0.805	0.786	1.076	1.074	1.061
				150	38.15	38.13	38.52	0.686	0.686	0.699	0.992	0.991	1.001
		2	5	30	35.78	35.77	35.52	0.799	0.798	0.787	1.070	1.069	1.062
				60	35.83	35.68	35.47	0.836	0.829	0.819	1.094	1.090	1.083
				120	35.70	35.72	35.42	0.848	0.849	0.835	1.102	1.103	1.094
				150	36.28	36.33	36.34	0.680	0.682	0.682	0.987	0.988	0.989
			10	30	36.47	36.47	36.43	0.936	0.936	0.934	1.158	1.158	1.157
				60	36.35	36.08	36.14	0.965	0.950	0.953	1.176	1.167	1.169
				120	36.31	36.56	36.37	0.872	0.884	0.874	1.117	1.125	1.119
				150	36.85	36.56	36.35	0.626	0.616	0.609	0.947	0.939	0.934

Tabella 5.59: Valori della SED e valori normalizzati per tutti i provini. Distanza 1.052 mm. Arruda B., Materiale 3.

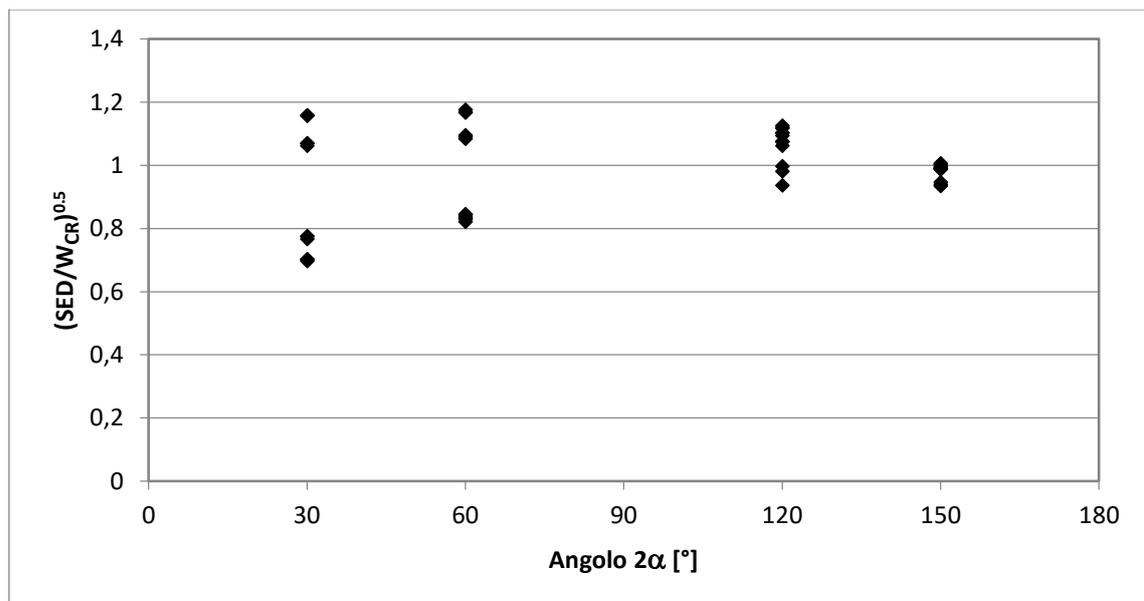


Figura 5.61: Valori normalizzati per il modello di Arruda Boyce. Valore medio= 0.988. Materiale 3.



# Capitolo 6

## Conclusione e discussione.

### 6.1 Risultati finali.

Modello	Materiale 1		Materiale 2		Materiale 3	
	$R_C$ [mm]	$\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}}$	$R_C$ [mm]	$\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}}$	$R_C$ [mm]	$\overline{(SED/W_{CR})^{0.5}}$
Lineare Elastico	0.141	0.994±0.092	0.294	0.985±0.135	0.170	0.984±0.147
Mooney Rivlin 2	0.338	0.983±0.155	0.924	0.994±0.099	0.553	0.992±0.131
Mooney Rivlin 3	0.268	0.987±0.140	0.826	0.993±0.102	0.255	0.987±0.125
Mooney Rivlin 5	0.127	0.998±0.097	0.510	0.992±0.106	0.128	0.992±0.135
Neo Hookean	0.691	0.985±0.189	1.400	0.999±0.078	1.052	0.988±0.137
Arruda Boyce	0.691	0.985±0.189	1.400	0.999±0.078	1.052	0.988±0.137

Tabella 6.1: Valori riassuntivi dei raggi critici e dell'energia normata con relativa deviazione standard.

La tabella (6.1) riassume i risultati dei capitoli precedenti. La prima osservazione riguarda un confronto tra il modello di Neo Hookean e il modello di Arruda Boyce. I due modelli, sia per la determinazione dei raggi critici dei tre materiali (0.691 mm, 1.400 mm, 1.052 mm rispettivamente) sia per i valori di energia normata (0.985, 0.999, 0.988) risultano identici. È ragionevole quindi evitare le simulazioni con uno dei due modelli. La scelta su quale modello evitare ricade sicuramente sul modello di Arruda Boyce per due semplici motivi. Il primo sta nel fatto che la determinazione dei due coefficienti del modello ( $\mu$  e  $\beta$ ) è del tipo non lineare e quindi è dispendiosa in termini di tempo; il secondo motivo, legato al precedente, riguarda il tempo di simulazione. Infatti tutte le simulazioni con il modello di Arruda Boyce sono risultate essere le più onerose dal punto di vista del costo computazionale. Si sottolinea che questa coincidenza tra i due modelli vale per questi materiali. Di fatto, anche dal punto di vista matematico, il modello di Arruda Boyce coincide con il modello di Neo Hookean per valori di  $\beta$  che tendono all'infinito. Per quei materiali per la quale i modelli sono stati sviluppati (si ricorda che i modelli iperelastici sono stati ingegnerizzati per valori di stretch minore di 5, quindi elastomeri, gomme sintetiche o naturali, poliuretano, etilene vinil acetato, tessuti biologici, ecc.) tale semplificazione non è più ammessa visto che il comportamento tra i due modelli non è più

coincidente. La figura (6.1) rappresenta un confronto tra le curve tensione–deformazione per i modelli di Mooney Rivlin, Arruda Boyce, Neo Hookean, Yeoh e Ogden. Il materiale studiato nella figura è la gomma naturale, ed è chiaro che in questo caso la differenza tra il modello di Neo Hookean e Arruda Boyce è significativa.

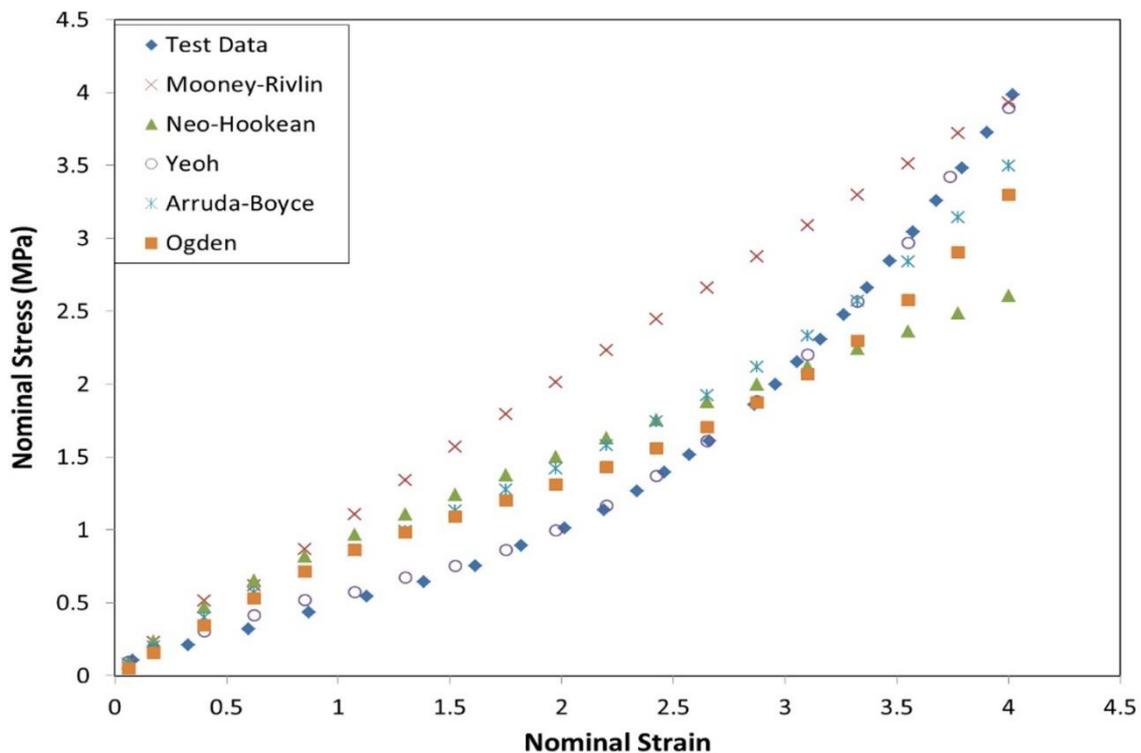


Figura 6.1: Confronto tra modelli iperelastici. Gomma naturale.

Vengono di seguito forniti i risultati di ulteriori simulazioni con Ansys. E' stato considerato un raggio critico fornito da un modello iperelastico o lineare-elastico ed è stata calcolata l'energia normalizzata con i restanti modelli. Lo scopo di questa operazione è quella di determinare quale sia il raggio critico più adatto da associare al materiale in esame. Se un valore di raggio critico, applicato a tutti i modelli, fornisce valori di energia normalizzata prossima all'unità con il più alto numero di occorrenze, esso sarà il miglior candidato per essere associato al materiale in oggetto. Si badi però che è necessario fare una scelta di tipo prioritario, nel senso che prima si sceglie il raggio critico corretto e successivamente si determina il modello. Se, come si spera, sono presenti tanti modelli che forniscono la medesima energia normalizzata con lo stesso  $R_C$ , si sceglierà il modello che fornisce un'energia normata la più prossima all'unità. Con queste considerazioni, si studiano i tre materiali.

## 6.2 Materiale 1.

Materiale 1 $(SED/W_{CR})^{0.5}$					
$R_C$ [mm]	L.E.	M.R. 2	M.R. 3	M.R. 5	Neo H.
0.127(M.R.5)	1.019±0.107	1.294±0.111	1.206±0.098	0.998±0.097	1.648±0.144
0.141(L.E.)	0.994±0.092	1.253±0.111	1.169±0.102	0.977±0.099	1.596±0.144
0.268(M.R.3)	0.842±0.085	1.048±0.130	0.987±0.140	0.822±0.111	1.335±0.163
0.338(M.R.2)	0.785±0.094	0.983±0.155	0.926±0.140	0.774±0.118	1.252±0.185
0.691(Neo)	0.630±0.105	0.776±0.150	0.734±0.139	0.615±0.109	0.985±0.189

Tabella 6.2: Andamento dell'energia normalizzata al variare dei raggi critici con deviazione standard. Materiale 1.

Come si evince dalla tabella (6.2) e dalla figura (6.2), il modello di Neo Hookean fornisce dei valori di energia normalizzata sempre al di sopra del valore unitario per qualsiasi raggio critico (ovvia eccezione fa quel raggio critico fornito dallo stesso modello di Neo Hookean, 0.691 mm). Si possono anche escludere i punti forniti dal raggio critico pari a 0.691 mm, visto che sono fortemente al di sotto del valore unitario. Con queste eliminazioni, si ottiene la figura (6.3).

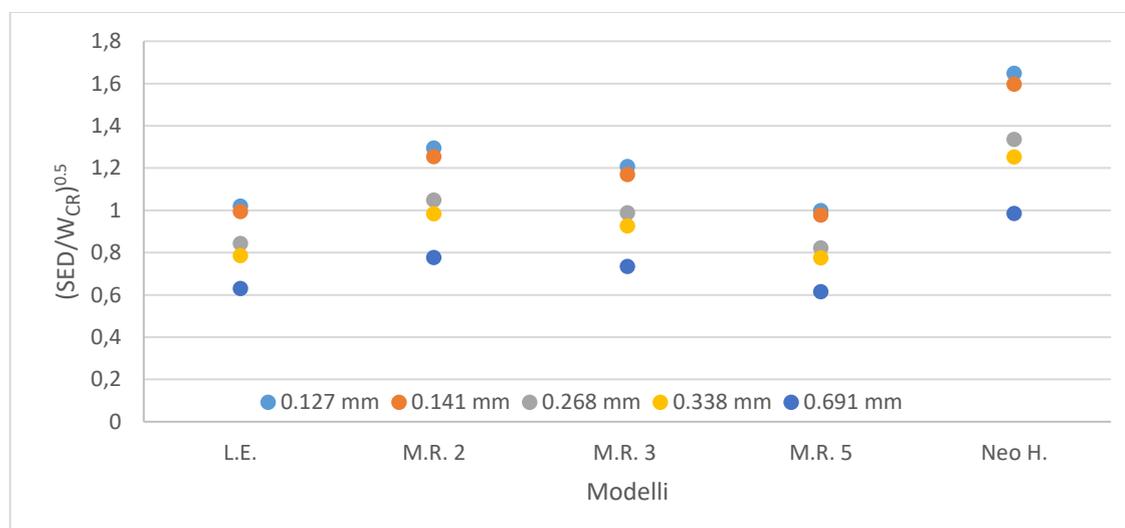


Figura 6.2: Confronto tra modelli e raggi critici forniti dagli stessi. Materiale 1.

Se si considera una fascia di  $\pm 0.2$  centrata nel valore unitario dell'asse delle ordinate, si possono escludere i valori che sono al di fuori di tale fascia. Risulta solamente il raggio critico pari a 0.268 mm che, indipendentemente dal modello, fornisce un valore di energia normalizzata prossimo all'unità. Tale valore è quello associato al modello di Mooney Rivlin a

3 parametri. La figura (6.4) raffigura i dati relativi al raggio critico scelto per il materiale uno.

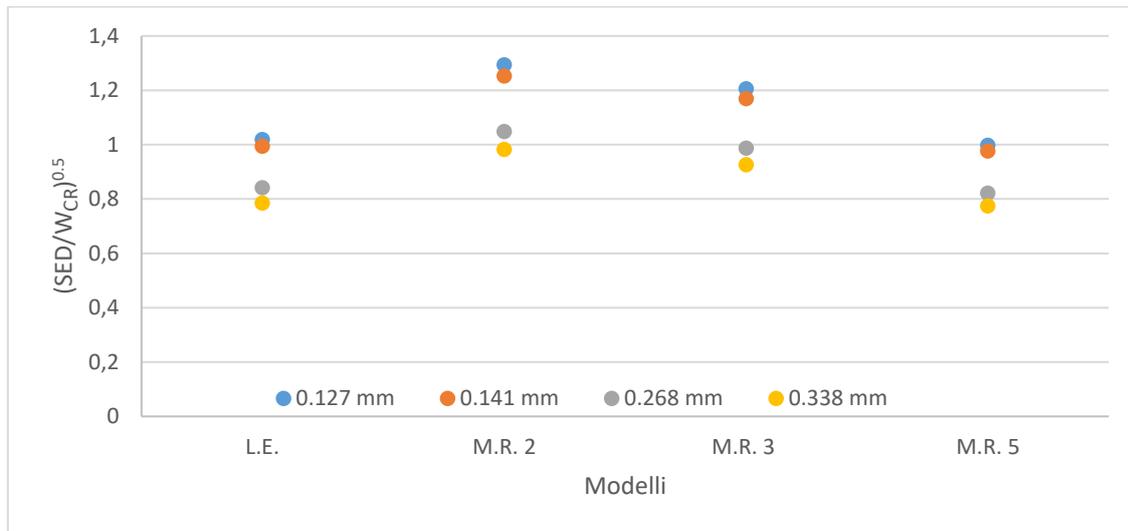


Figura 6.3: Modelli risultanti, materiale 1.

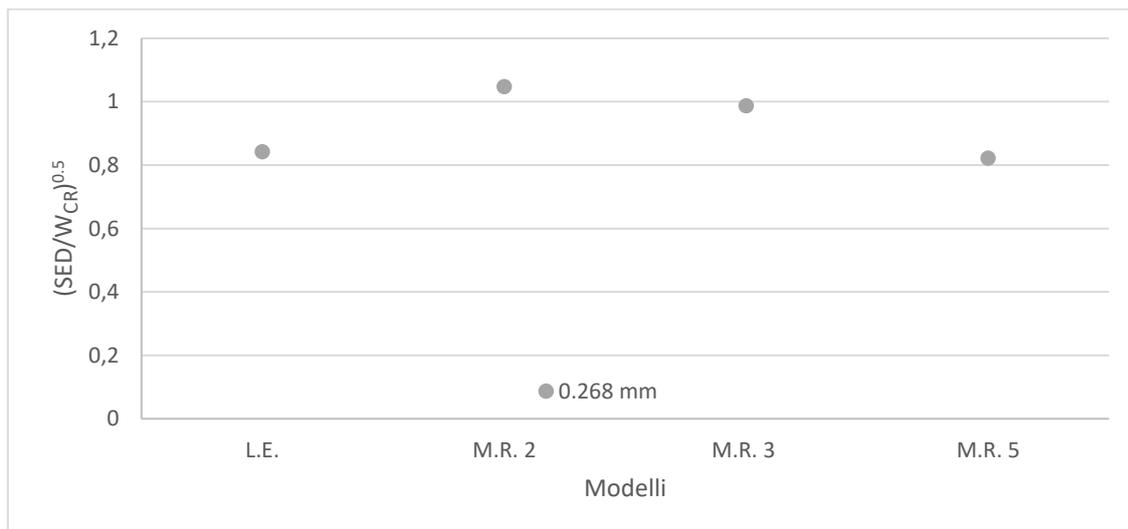


Figura 6.4: Raggio critico per il materiale 1. Viene scelto il raggio critico pari a 0.268 mm.

### 6.3 Materiale 2.

Materiale 2 $(SED/W_{CR})^{0.5}$					
$R_C$ [mm]	L.E.	M.R. 2	M.R. 3	M.R. 5	Neo H.
0.294(L.E.)	0.985±0.135	1.475±0.180	1.396±0.160	1.186±0.130	1.760±0.216
0.510(M.R.5)	0.826±0.091	1.239±0.144	1.180±0.135	0.992±0.106	1.478±0.172
0.826(M.R.3)	0.699±0.065	1.040±0.100	0.993±0.102	0.849±0.079	1.241±0.119
0.924(M.R.2)	0.670±0.059	0.994±0.099	0.950±0.095	0.812±0.077	1.182±0.119
1.400(Neo)	0.570±0.040	0.839±0.069	0.808±0.066	0.696±0.055	0.999±0.078

Tabella 6.3: Andamento dell'energia normalizzata al variare dei raggi critici con deviazione standard. Materiale 2.

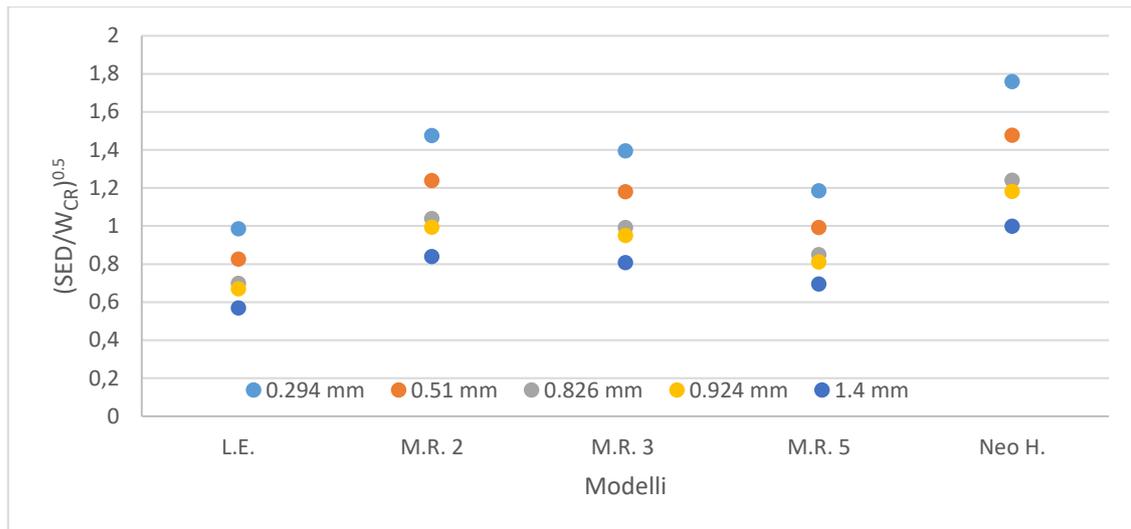


Figura 6.5 Confronto tra modelli e raggi critici forniti dagli stessi. Materiale 2.

Anche per il materiale 2 è possibile eliminare il modello di Neo Hookean e il raggio critico a lui riferito (pari a 1.4mm) per le stesse identiche ragioni viste per il materiale uno. Il risultato è rappresentato in figura (6.6). Considerando ancora una banda di  $\pm 20\%$  centrata nel valore unitario dell'asse delle ordinate, per il materiale due esistono due raggi critici che forniscono valori di energia mediamente all'interno di tale banda. Essi sono: 0.510 mm (fornito dal modello di Mooney Rivlin a 5 parametri) e 0.826 mm (fornito dal modello di Mooney Rivlin a 3 parametri). Il raggio critico di 0.826 mm, nonostante fornisca un valore di energia normata di 0.699 una volta applicato al modello lineare elastico (si veda la figura (6.7)), presenta una dispersione energetica più contenuta rispetto al raggio critico di 0.510 mm. Per tale ragione risulta essere più idoneo il raggio critico fornito dal modello di Mooney a 3 parametri.

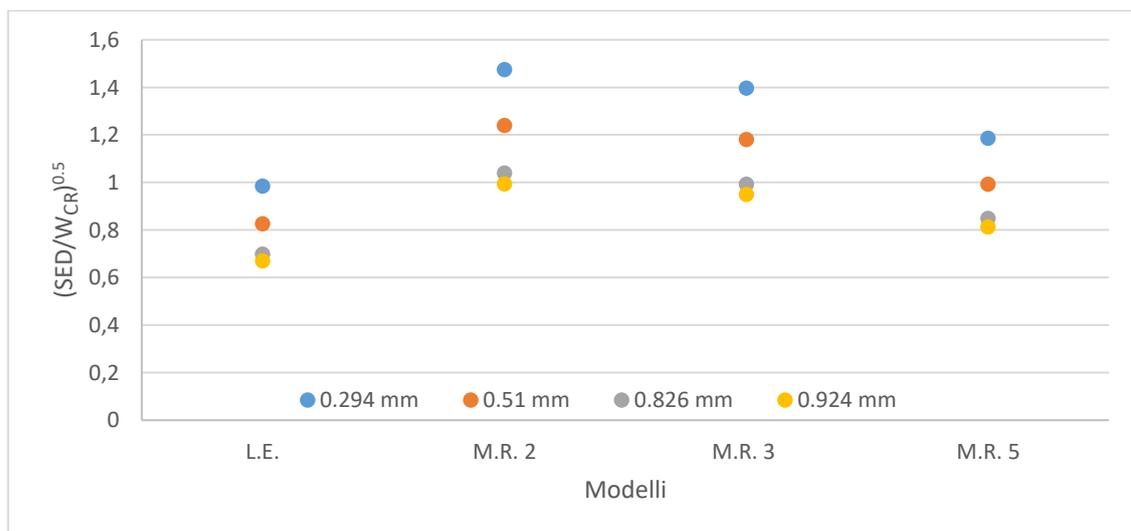


Figura 6.6: Modelli risultanti, materiale 2.

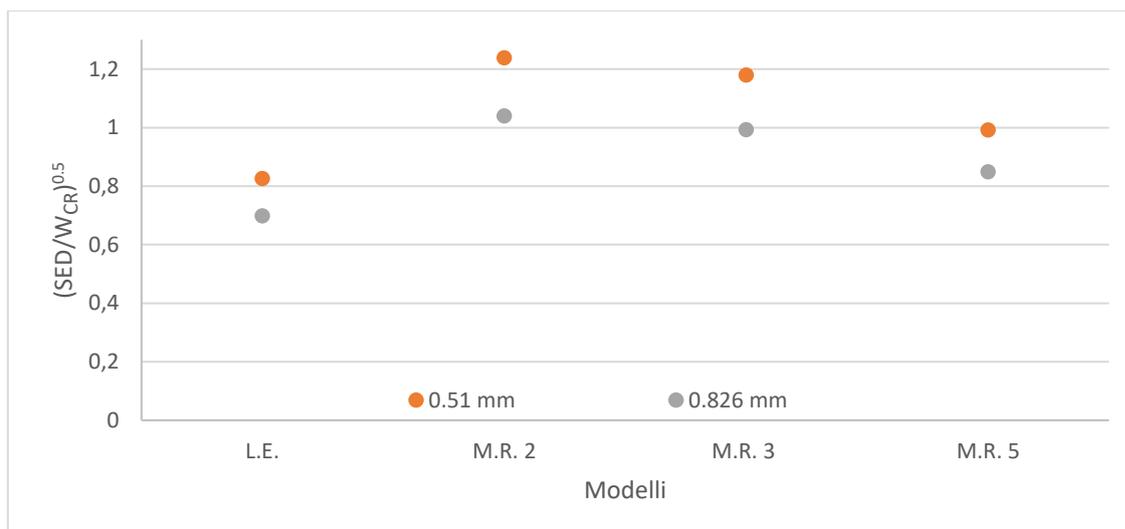


Figura 6.7: Raggi critici per il materiale 2. Viene scelto il raggio critico pari a 0.826 mm.

### 6.4 Materiale 3.

Materiale 3 $(SED/W_{CR})^{0.5}$					
$R_c$ [mm]	L.E.	M.R. 2	M.R. 3	M.R. 5	Neo H.
0.128(M.R.5)	1.065±0.198	1.578±0.285	1.204±0.176	0.992±0.135	2.005±0.378
0.170(L.E.)	0.984±0.147	1.439±0.183	1.107±0.122	0.927±0.101	1.826±0.241
0.255(M.R.3)	0.883±0.102	1.279±0.155	0.987±0.125	0.830±0.099	1.622±0.198
0.553(M.R.2)	0.698±0.084	0.992±0.131	0.777±0.110	0.650±0.091	1.256±0.177
1.052(Neo)	0.554±0.067	0.783±0.115	0.619±0.089	0.520±0.071	0.988±0.137

Tabella 6.4: Andamento dell'energia normalizzata al variare dei raggi critici con deviazione standard. Materiale 3.

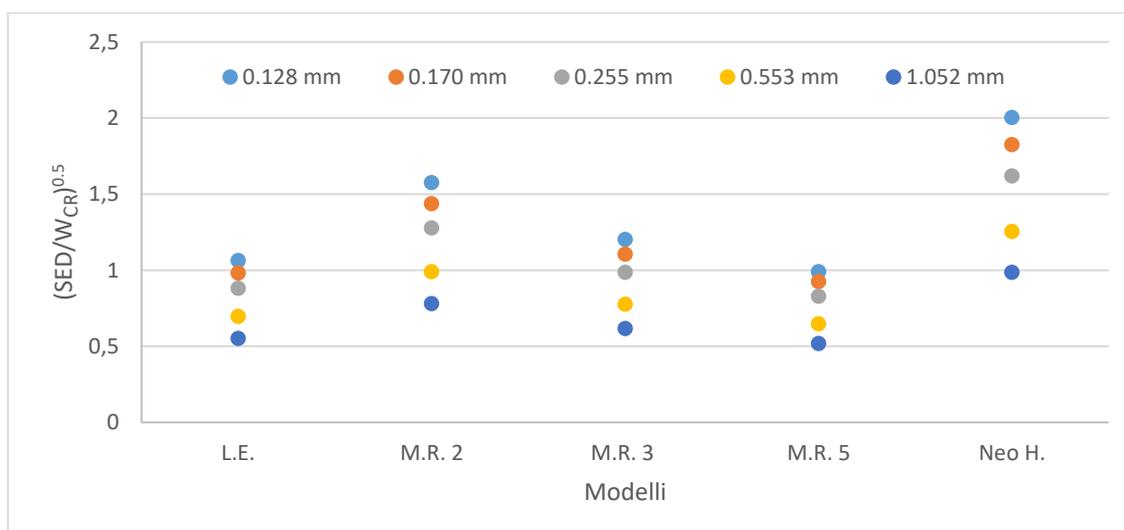


Figura 6.8: Confronto tra modelli e raggi critici forniti dagli stessi. Materiale 3.

Per terminare l'analisi, anche per il materiale 3 il modello di Neo Hookean fornisce valori di SED normalizzata al di sopra dell'unità (fino a un massimo di 2.005). Eliminando tale modello e il suo raggio critico (il quale fornisce un  $R_C$  pari a 1.052 mm e valori di energia prossimi allo 0.6) si ottiene la figura (6.9). Anche per quest'ultimo materiale, una volta considerata una banda del  $\pm 20\%$  rispetto al valore unitario, risultano due raggi critici che danno valori di energia normata ragionevolmente centrato sul valore unitario. Essi sono rappresentati nella figura (6.10) e sono: 0.170 mm (associato al modello lineare) e 0.255 mm (associato al modello di Mooney a 3 parametri). Mediamente, il raggio critico di 0.255 mm permette di avere valori di energia maggiormente prossimi all'unità.

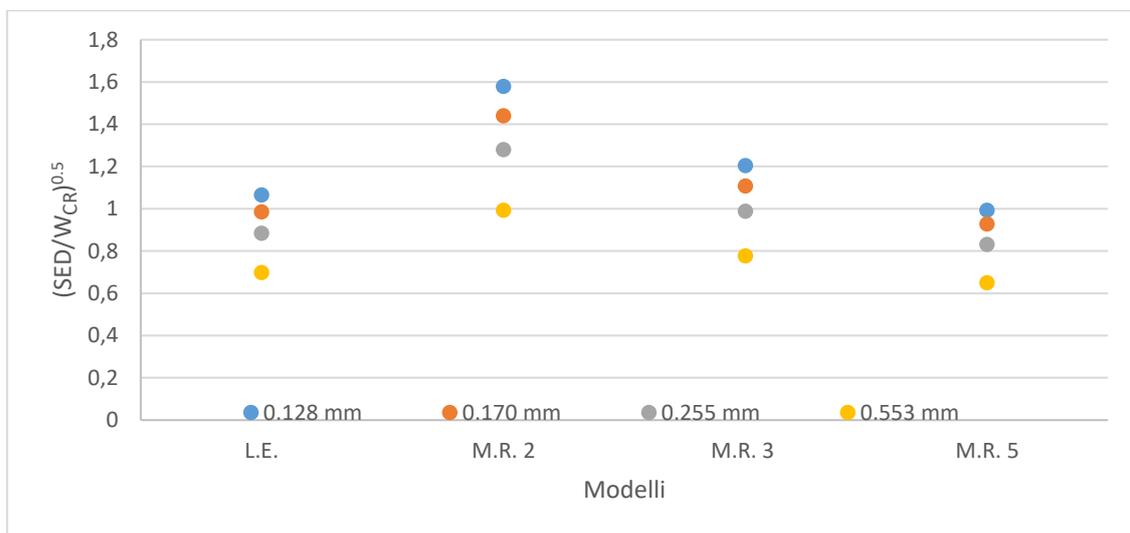


Figura 6.9: Modelli risultanti, materiale 3.

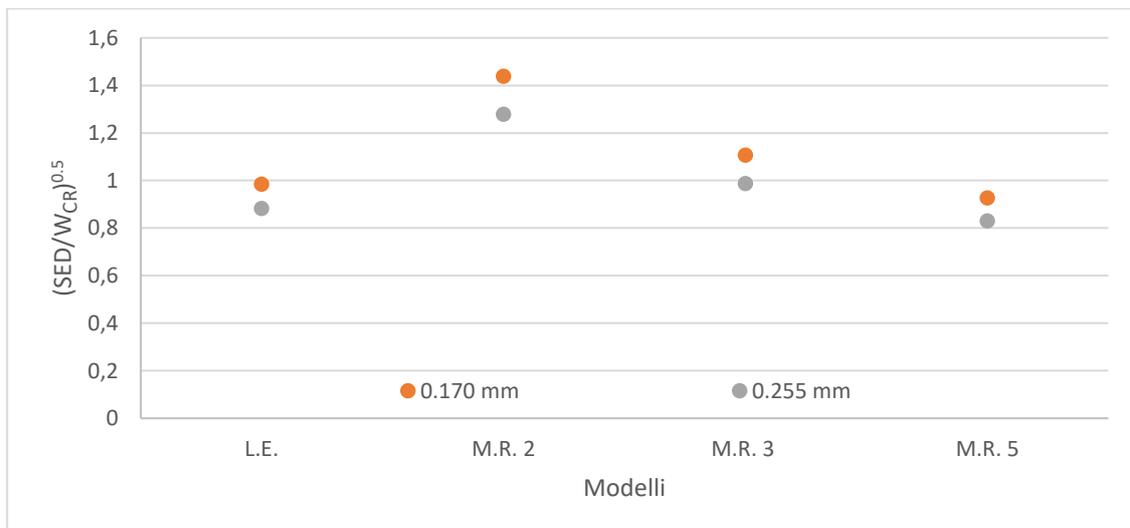


Figura (6.10): Raggi critici per il materiale 3. Viene scelto il raggio critico pari a 0.255 mm.

E' possibile fare una considerazione finale sui modelli studiati. Per i tre materiali esaminati è sempre presente il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri. Va ricordato che il modello di Mooney, nonostante la determinazione dei parametri sia lineare, la soluzione in Ansys è di tipo non lineare. Può quindi accadere che la soluzione non converga e quindi si debbano aggiustare i parametri del modulo "Material curve fitting" di Ansys per far collimare la soluzione. Una soluzione praticabile potrebbe essere quella di scegliere un modello più semplice, e tale strategia porterebbe alla scelta o del modello lineare elastico, o del modello di Mooney a 2 parametri. Dall'ispezione delle tabelle (6.2), (6.3) e (6.4) riferite ai tre materiali, viene escluso il modello lineare visto che, per i rispettivi raggi critici sopra determinati (0.268 mm, 0.826 mm e 0.255 mm) sono associate delle energie pari a 0.842, 0.699 e 0.883. Per il materiale 1 e 2, può essere scelto il modello di Mooney a 2 parametri visto che per tali materiali viene fornita un'energia normata pari a 1.048 e 1.040 rispettivamente. Per il materiale 3, il modello di Mooney a 2 parametri fornisce un valore energetico normato pari a 1.279, il quale risulta essere al di fuori della banda +20%. Concludendo:

- Materiale 1:  $R_C = 0.268$  mm, Modello adatto: Mooney Rivlin a 3 parametri (oppure a 2 parametri).
- Materiale 2:  $R_C = 0.826$  mm, Modello adatto: Mooney Rivlin a 3 parametri (oppure a 2 parametri).
- Materiale 3:  $R_C = 0.255$  mm, Modello adatto: Mooney Rivlin a 3 parametri.

# Appendice

Di seguito viene riportato il codice in linguaggio APDL per simulare i provini intagliati. Esso è composto da un codice primario (detto Main) il quale richiama due sotto-codici: “GeometriaEnergiaIper.txt” e “SelezioneRaggi.txt”. Nel codice Main vengono anche caricati altri file, ma sono file di dati, cioè che contengono i nomi dei singoli provini oppure le loro caratteristiche (tipo tensione di rottura, angolo di apertura dell’intaglio, raggio di raccordo, modulo di Young, coefficiente di Poisson, dimensioni). Il codice scritto può essere usato con parametri geometrici diversi dai provini intagliati, a patto di rispettare i seguenti limiti:

- $\rho \geq 0$
- $2\alpha \geq 0$
- Sia fisicamente possibile la costruzione del provino.

Di seguito il codice “Main.txt”, “GeometriaEnergiaIper.txt” e “SelezioneRaggi.txt” (si è scelto il modello di Mooney Rivlin a 3 parametri). Nelle figure (A1)–(A10) sono raffigurati i provini con alcuni parametri geometrici scelti arbitrariamente.

## A1 - File Main.txt

```
1 !Main.txt
2
3 *get,tempo1,ACTIVE,0,time,wall
4
5 !Variabile da cambiare in base al materiale. 'Nero','Bianco','Grigio'
6
7 Materiale = 'Grigio'
8
9 !Raggi critici per i tre materiali
10
11 *dim,rt,array,3
12
13 rt(1) = 0.141,0.294,0.17
14
15 !Modello iperelastico usato. MR2, MR3, MR5, MR9, Arruda, Neo
16
17 modello = 'MR3'
18
19 !=====
20 !=====
21
22 !Costruzione variabili d'ambiente
23
24 *if,Materiale,EQ,'Nero',then
25
```

```

26     index = 1
27
28     !--N° divisioni dell'area SED
29
30     multi = 3
31
32     divisioni = 30
33
34 *elseif,Materiale,EQ,'Bianco'
35
36     index = 2
37
38     multi = 4
39
40     divisioni = 84
41
42 *elseif,Materiale,EQ,'Grigio'
43
44     index = 3
45
46     multi = 3
47
48     divisioni = 36
49
50 *endif
51
52 r1 = multi*rt(index)/divisioni
53
54 /mkdir,%Materiale%
55
56 *dim,temp4,string,40
57
58 !Costruzione nomi delle directory.
59
60 *dim,maindir,string,245,6
61
62 !Lettura directory di lavoro
63
64 /inquire,maindir(1,1),directory
65
66 Riassunto = strcat('Riassunto',Materiale)
67
68 NomiFile = strcat('Nomi',Materiale)
69
70 maindir(1,2) = strcat(maindir(1,1),'Gestione\')
71
72 maindir(1,3) = strcat(maindir(1,2),Riassunto)
73
74 maindir(1,4) = strcat(maindir(1,2),NomiFile)
75
76 maindir(1,5) = strcat(maindir(1,2),'GeometriaEnergiaIper')
77
78 maindir(1,6) = strcat(maindir(1,2),'SelezioneRaggi')
79
80 !Lettura del numero di righe del file Riassunto
81
82 /INQUIRE,numline,LINES,maindir(1,3),txt
83
84 !Cancellazione eventuale tabella presente
85
86 *DEL,tabella,,NOPR
87

```

```

88 !Definizione della tabella
89
90 *DIM,tabella, TABLE,numline-1,12-1
91
92 !Lettura del file riassunto.txt
93
94 *TREAD,tabella,maindir(1,3),txt,,to_skip
95
96 !Lettura del file Nomi.txt
97
98 *DEL,nomi,,NOPR
99
100 *dim,nomi,string,128,numline
101
102 *SREAD,nomi,maindir(1,4),txt
103
104 !Creazione file contenente l'energia in funzione della distanza dall'apice.
105
106 *do,i,1,divisioni
107
108     *dim,tempNome,char,4
109
110     tempNome(1) = chrval(i*r1)
111
112     *cfcopen,%Materiale%\%tempNome(1)%,txt,,append
113
114     *VWRITE,'Provino','Distanza ','(cost.)','SED',Materiale, modello
115
116 (a7,a31,a7,a21,a10,a8)
117
118     *cfcclose
119
120     !Cancellazione variabile tempNome
121
122     tempNome =
123
124 *enddo
125
126 !Memorizzazione delle variabili
127
128 *do,riga,2,numline
129
130     sezioneNetta=tabella(riga,2)/2
131
132     larghezza=tabella(riga,3)/2
133
134     altezza=tabella(riga,4)/2
135
136     rho=tabella(riga,5)
137
138     alfa=tabella(riga,6)/2
139
140     ni=tabella(riga,7)
141
142     E=tabella(riga,8)
143
144     tensNom=- tabella(riga,9)*sezioneNetta/larghezza
145
146     tensLiscio=tabella(riga,10)
147
148     KIC=tabella(riga,11)
149

```

```

150     r0=*multi*rt(index)
151
152     !Scelta del tipo di elemento con opzione plain strain.
153
154     /PREP7
155
156     ET,1,PLANE182
157
158     KEYOPT,1,1,0
159
160     KEYOPT,1,3,2
161
162     KEYOPT,1,6,0
163
164     NLGEOM,ON
165
166     !Scelta de modello di Mooney Rivling a 3 parametri
167
168     TB,HYPE,1,1,3,MOON
169
170     TBTEMP,0
171
172     *if,Materiale,EQ,'Nero',then
173
174     TBDATA,, -78092,79909,1.9605E+005,0,,
175
176     *elseif,Materiale,EQ,'Bianco'
177
178     TBDATA,, -58986,60210,1.5486E+005,0,,
179
180     *elseif,Materiale,EQ,'Grigio'
181
182     TBDATA,, -37033,37791,1.1351E+005,0,,
183
184     *endif
185
186     !Load file geometria
187
188     /INPUT,maindir(1,5),'txt',,, 0
189
190     !Inizio post processamento
191
192     /POST1
193
194     !Scelta del nodo all'apice
195
196     primoNodo=node(sezioneNetta,0,0)
197
198     !Salvataggio file lis tensione massima
199
200     nsel,node,primoNodo
201
202     !Memorizzazione tensione presente all'apice
203
204     *GET,tensione,node,primoNodo,s,y
205
206     !Creazione file con stesso nome del provino in analisi
207
208     *cfopen,%Materiale%\%nomi(1,riga)%,lis,,append
209
210     *VWRITE,'Distanza',' ','apice','Energia','Volume','SED'
211

```

```

212 (a8,a1,a5,a15,a19,a19)
213
214 *cfclose
215
216 !Valutazione energia per tutte le divisioni
217
218 /INPUT,maindir(1,6),'txt',,, 0
219
220 FINISH
221
222 !Salvataggio tutti i parametri
223
224 parsav,all,variabili
225
226 !Resetto Ansys
227
228 /CLEAR,START
229
230 /input,start145,ans,'C:\Program Files\ANSYS Inc\v145\ANSYS\apdl\'
231
232 !Load parametri appena salvati
233
234 parres,new,variabili
235
236 !Disattivazione messaggi
237
238 /PREP7
239
240 SHPP,OFF
241
242 !Cancellazione vettore rag
243
244 *del,rag,,nopr
245
246 *enddo
247
248 *get,tempo2,ACTIVE,0,time,wall
249
250 !calcolo tempo
251
252 t_simu = (tempo2-tempo1)*60
253
254 !Ridimensionamento schermo
255
256 /AUTO,1
257
258 /REP,FAST
259
260 !Salvataggio parametri
261
262 parsav,all,%Materiale%\variabili%Materiale%
263
264 /delete,variabili,
265
266 !Print time
267
268 *msg,ui,t_simu
269
270 Tempo simulazione: %g (Minuti)
271
272 /eof

```

## A2 - File GeometriaEnergiaIper.txt

```
1 !GeometriaEnergiaIper.txt
2
3 PI=3.1415
4
5 !Inizio elaborazione
6
7 alfaRad=alfa*pi/180
8
9 !Definizione dell'arco per SED
10
11 rOPic=rho*(pi-2*alfaRad)/(2*pi-2*alfaRad)
12
13 rSed=r0+rOPic
14
15 !Opzione angoli espressi in sesantesimi
16
17 *AFUN,DEG
18
19 !Creazione di un'area rettangolare
20
21 RECTNG,0,larghezza,-altezza,altezza
22
23 *GET,temp,KP,0,NUM,MAXD
24
25 !kp del centro del raccordo rho
26
27 k,temp+1,sezioneNetta,0
28
29 k,temp+2,sezioneNetta+rho,0
30
31 !Kp dell'area triangolare
32
33 *if,rho,ne,0,or,alfa,ne,0,then
34
35     *if,rho,eq,0,and,alfa,ne,0,then
36
37         k,temp+3,larghezza,(larghezza-sezioneNetta)*tan(alfa)
38
39         k,temp+4,larghezza,-ky(temp+3)
40
41         l,temp+1,temp+3
42
43         l,temp+3,temp+4
44
45         l,temp+4,temp+1
46
47         *GET,temp,LINE,0,NUM,MAXD
48
49         !Area triangolare
50
51         al,temp-2,temp-1,temp
52
53         !Sottraggo le due aree
54
55         asba,1,2
56
57     *else
58
59         k,temp+3,kx(temp+2)-rho*sin(alfa),rho*cos(alfa)
```

```

60
61     k,temp+4,kx(temp+3),-ky(temp+3)
62
63     k,temp+5,larghezza,ky(temp+3)+(larghezza-kx(temp+3))*tan(alfa)
64
65     k,temp+6,kx(temp+5),-ky(temp+5)
66
67     !Linee dell'area triangolare con il raggio rho
68
69     larc,temp+4,temp+1,temp+2,rho
70
71     larc,temp+1,temp+3,temp+2,rho
72
73     l,temp+3,temp+5
74
75     l,temp+5,temp+6
76
77     l,temp+6,temp+4
78
79     *GET,temp,LINE,0,NUM,MAXD
80
81     !Area triangolare
82
83     al,temp-4,temp-3,temp-2,temp-1,temp
84
85     !Sottrazione delle due aree
86
87     asba,1,2
88
89     *endif
90
91 *endif
92
93 !Centro per l'area SED
94
95 *GET,temp,KP,0,NUM,MAXD
96
97 k,centroSed,sezioneNetta+rOPic,0
98
99 !costruzione area per simmetria
100
101 *GET,area1,AREA,0,NUM,MAXD
102
103 numArea=20
104
105 numstr,area,numArea
106
107 RECTNG,0,larghezza,-altezza,0
108
109 *GET,area2,AREA,0,NUM,MAXD
110
111 asba,area1,area2
112
113 numstr,area,0
114
115 !Costruzione vari archi e le aree
116
117 *get,dime,parm,rag,dim,x
118
119 *do,i,1,divisioni-1
120
121     cyl4,kx(centroSed),ky(centroSed),rSed-i*r1,0,rSed-(i-1)*r1,180,0

```

```

122
123   aovlap,all
124
125   lsel,s,loc,x,kx(centroSed)+rSed-i*r1,kx(centroSed)+rSed-(i-1)*r1
126
127   lsel,r,loc,y,0,(rSed-(divisioni-1)*r1)*sin(alfa/2)
128
129   asll,s,0
130
131   adele,all
132
133   ksll,s
134
135   lslk,s,0
136
137   ldele,all,,1
138
139   allsell,all
140
141 *enddo
142
143 !Incollaggio delle aree e delle linee
144
145 aglue,all
146
147 lglue,all
148
149 !Mesh
150
151 amesh,all
152
153 !Definizione simmetria lato sinistro
154
155 lsel,s,loc,x,0
156
157 dl,all,,symm
158
159 !Definizione simmetria lato inferiore
160
161 lsel,s,loc,y,0
162
163 lsel,r,loc,x,0,sezioneNetta
164
165 dl,all,,symm
166
167 allsel,all
168
169 !Definizione carico
170
171 lsel,s,loc,y,altezza
172
173 lsel,r,loc,x,0,sezioneNetta
174
175 sfl,all,pres,tensNom
176
177 allsell,all
178
179 FINISH
180
181 /SOL
182
183 /STATUS,SOLU

```

```
184
185 SOLVE
186
187 EPLOTT
188
189 FINISH
```

### A3 - File SelezioneRaggi.txt

```
1 !SelezioneRaggi.txt
2
3 !/POST1
4
5 !--Leggo l'energia per ogni divisione
6
7 *do,i,1,divisioni
8
9     lsel,s,loc,x,sezioneNetta-i*r1,sezioneNetta
10
11     lsel,r,loc,y,0
12
13     asll,s,0
14
15     esla,s
16
17     AVPRIN,0, ,
18
19     ETABLE,energia,SENE,
20
21     SSUM
22
23     *GET,ene,SSUM,0,ITEM,energia
24
25     AVPRIN,0, ,
26
27     ETABLE,volume,VOLU,
28
29     SSUM
30
31     *GET,vol,SSUM,0,ITEM,volume
32
33     !Apro il file e scrivo il risultato
34
35     *cfopen,%Materiale%\%nomi(1,riga)%,lis,,append
36
37     !Nella riga dei descrittori non deve esserci il rientro
38
39     *VWRITE,i*r1,ene,vol,ene/vol
40(f12.8,f18.8,f18.8,f18.8)
41
42     *cfclose
43
44     !--Cancello le tabelle
45
46     ETABLE,,ERASE,1
47
48     ETABLE,,ERASE,2
49
50     !--Scrivo l'energia in funzione della distanza dall'apice
51
52     temp4(1)=nomi(1,riga)
```

```

53
54 *dim,tempNome,char,4
55
56 tempNome(1) = chrval(i*r1)
57
58 *c fopen,%Materiale%\%tempNome(1)%,txt,,append
59
60 *VWRITE,temp4(1),temp4(9),temp4(17),i*r1,ene/vol
61(a8,a8,a8,f17.8,f24.8)
62
63 *c fclose
64
65 !Cancello La variabile tempNome
66
67 tempNome =
68
69 *enddo
70
71 /eof

```

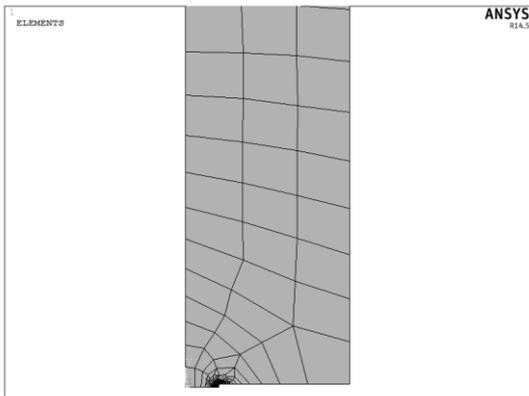


Figura A1:  $a = 20$  mm,  $\rho = 0.5$  mm,  $2\alpha = 0^\circ$ .

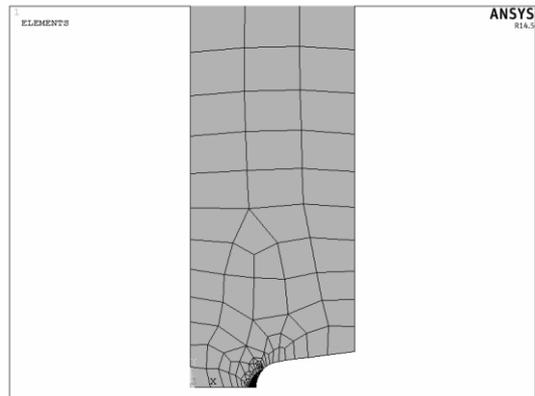


Figura A2:  $a = 15$  mm,  $\rho = 4$  mm,  $2\alpha = 15^\circ$ .

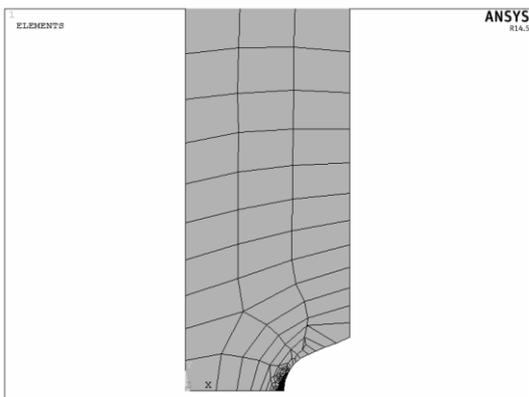


Figura A3:  $a = 10$  mm,  $\rho = 6$  mm,  $2\alpha = 45^\circ$ .

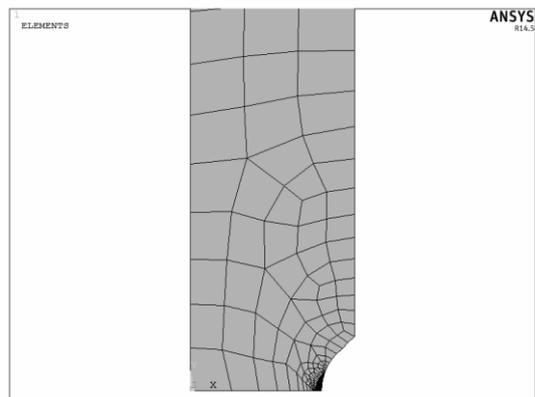


Figura A4:  $a = 5$  mm,  $\rho = 8$  mm,  $2\alpha = 90^\circ$ .

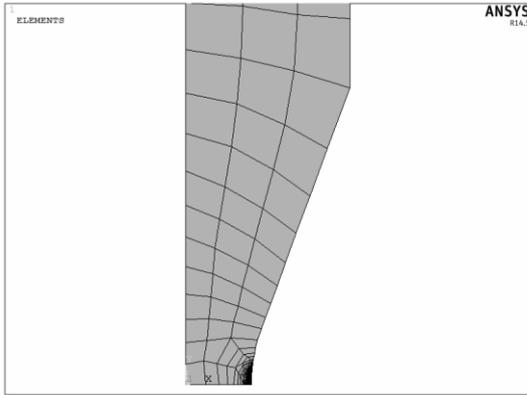


Figura A5:  $a = 15 \text{ mm}$ ,  $\rho = 15 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 110^\circ$ .

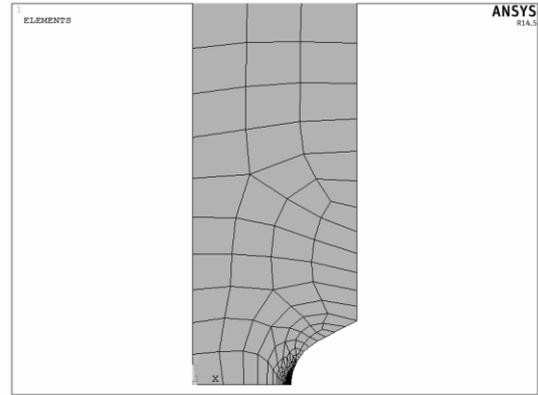


Figura A6:  $a = 10 \text{ mm}$ ,  $\rho = 7.5 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 55^\circ$ .

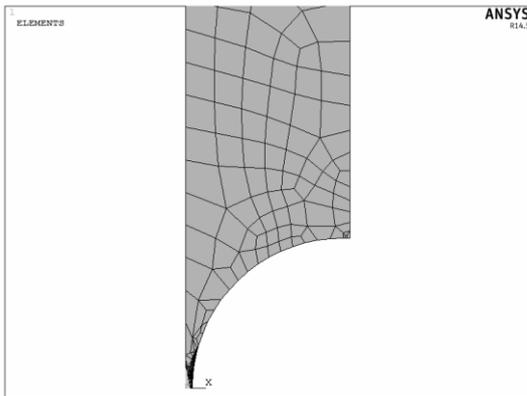


Figura A7:  $a = 24 \text{ mm}$ ,  $\rho = 23 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 0^\circ$ .

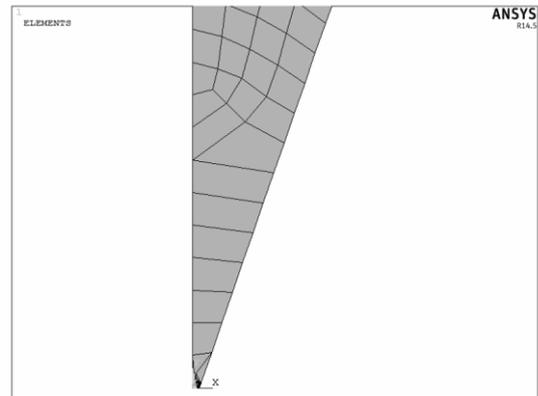


Figura A8:  $a = 24 \text{ mm}$ ,  $\rho = 0 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 142^\circ$ .

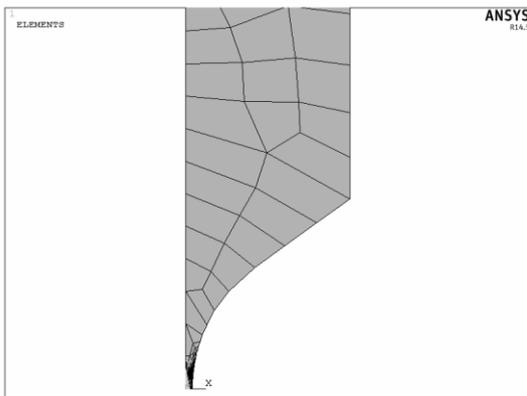


Figura A9:  $a = 24 \text{ mm}$ ,  $\rho = 23 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 72^\circ$ .

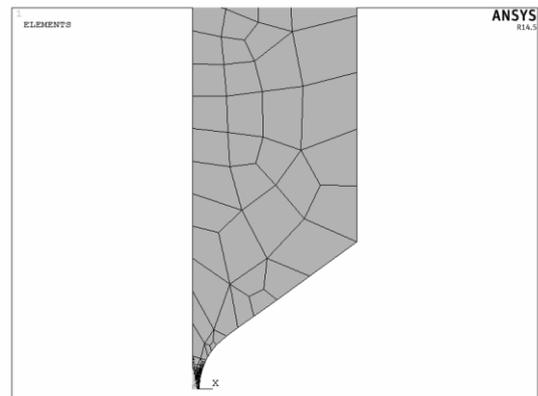


Figura A10:  $a = 24 \text{ mm}$ ,  $\rho = 10 \text{ mm}$ ,  $2\alpha = 72^\circ$ .



# Bibliografia

## Testi:

- Allan F. Bower (2009) Applied Mechanics of Solids, CRC Press, Florida.
- Atzori Bruno (2001) - Appunti di Costruzione di Macchine, Ed. Cortina, Padova.
- Dietmar Gross, Thomas Seelig (2011) Fracture Mechanics - With an Introduction to Micromechanics, Springer, Berlino.
- Lazzarin Paolo (2006) - Fondamenti di Costruzione di Macchine, Ed. Cortina, Padova.

## Articoli:

- Arfaoui M., Mansouri K., Rezgui A., *An asymptotic finite plane deformation analysis of the elastostatic fields at a notch vertex of an incompressible hyperelastic material*, Elsevier, Amsterdam.
- Berto F., Lazzarin P. (2014), *Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches* in “Materials Science and Engineering R”, Elsevier, Amsterdam.
- Rodney A. Stephenson (1980), *The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials*, in “Journal of Elasticity”, Springer, Berlino.
- Roland J.(2010), *Analysis of Hyperelastic Materials with Mechanics*, PTC Global Service, pp. 5-31.

## Dispense:

- Lazzarin P., Berto F., Zappalorto M. (2015), Dispensa di meccanica dei materiali.

## Siti WEB

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic\\_material](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperelastic_material)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Strain\\_energy\\_density\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Strain_energy_density_function)

<http://www.xansys.org/forum/index.php>

<https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/17.0/en-us/help/>

<http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/>

<http://www.excelvba.it/>