



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

---

DIPARTIMENTO DI TECNICA E GESTIONE DEI SISTEMI INDUSTRIALI

*Corso di Laurea Magistrale in*  
**INGEGNERIA MECCATRONICA**

**PIANIFICAZIONE OTTIMA DEL MOTO  
IN SISTEMI SOTTOATTUATI**

*Relatore:* **Prof. Dario Richiedei**

*Laureanda:* **Irene Granata**

*Matricola:* **1189772**

---

ANNO ACCADEMICO 2019/2020



*Alla mia famiglia, alla quale devo tutto.  
A Matteo e Giulia, che mi hanno insegnato a rinascere.*

Finché possiamo dire: “quest’è il peggio”,  
vuol dir che il peggio ancora può venire.

*William Shakespeare*



# Indice

<b>SOMMARIO</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUZIONE</b>	<b>3</b>
<b>1 MODELLO</b>	<b>5</b>
1.1 Modello con ingresso in forza . . . . .	6
1.2 Modello ridotto con ingresso in accelerazione . . . . .	8
<b>2 INPUT SHAPING</b>	<b>11</b>
2.1 Generalità sull'Input Shaping . . . . .	11
2.2 Zero Vibration Shaper . . . . .	12
2.3 Zero Vibration and Derivative Shaper . . . . .	13
2.4 Zero Vibration and Double Derivative Shaper . . . . .	14
2.5 Curve di sensibilità . . . . .	15
<b>3 MODIFICA INPUT SHAPING</b>	<b>17</b>
3.1 Riferimenti Armonici . . . . .	18
3.2 Riferimenti non armonici . . . . .	20
<b>4 WAVE BASED CONTROL</b>	<b>23</b>
4.1 Generalità sul Wave Based Control . . . . .	23
4.2 Wave Based Control in catena aperta . . . . .	26
4.3 Modifica Wave Based Control . . . . .	28
<b>5 CONTROLLO OTTIMO</b>	<b>31</b>
5.1 Controllo ottimo in catena aperta . . . . .	31
5.2 Algoritmi numerici per il controllo ottimo . . . . .	33
<b>6 SIMULAZIONI</b>	<b>35</b>
6.1 Input Shaping . . . . .	36
6.1.1 Traiettoria circolare . . . . .	36

6.1.2	Traiettoria ad 8 . . . . .	41
6.1.3	Cardioide . . . . .	45
6.1.4	ZVD Shaper . . . . .	49
6.2	Controllo ottimo . . . . .	52
6.2.1	Traiettoria circolare . . . . .	52
6.2.2	Traiettoria ad 8 . . . . .	55
6.3	Wave Based Control . . . . .	59
6.3.1	Traiettoria circolare . . . . .	59
6.3.2	Traiettoria ad 8 . . . . .	62
6.3.3	Cardioide . . . . .	65
6.3.4	Traiettoria rettangolare . . . . .	67
6.4	Comparazione tra i metodi . . . . .	69
6.4.1	Robustezza . . . . .	71
<b>7</b>	<b>RISULTATI SPERIMENTALI</b>	<b>75</b>
7.1	Determinazione dei parametri sperimentali . . . . .	78
7.2	Pianificazione con Input Shaping . . . . .	78
7.3	Pianificazione con Wave Based Control . . . . .	82
	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>85</b>
	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>87</b>
<b>A</b>	<b>Stima Parametrica</b>	<b>89</b>

# Elenco delle figure

1.1	Schema del sistema in analisi . . . . .	5
2.1	Risposta ad impulso con input shaping . . . . .	11
2.2	Schema di funzionamento dell'input shaping . . . . .	13
2.3	Zero Vibration and Derivative Shaper . . . . .	14
2.4	Esempi di curve di sensibilità . . . . .	15
3.1	Modulo della funzione di trasferimento $G(s)$ . . . . .	18
3.2	Fase della funzione di trasferimento $G(s)$ . . . . .	20
3.3	Modulo della funzione di trasferimento correttiva $G'(s)$ . . . . .	22
4.1	Modello di propagazione delle onde . . . . .	24
4.2	Modello d'onda all'estremità dell'attuatore . . . . .	24
4.3	Schema del sistema complessivo . . . . .	26
4.4	Diagramma di Bode di $G'(s)$ . . . . .	27
4.5	Diagramma di Bode di $G''(s)$ . . . . .	28
4.6	Schema del sistema complessivo con correzione . . . . .	29
5.1	Approssimazione lineare . . . . .	33
6.1	Modello Simulink per sistema con ingresso in accelerazione e ZV shaper 36	
6.2	Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato 37	
6.3	Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS . . . . .	38
6.4	Definizione di errore di tracking e di contornatura . . . . .	38
6.5	Errore di contornatura per una traiettoria circolare . . . . .	39
6.6	Errore di contornatura . . . . .	39
6.7	Andamento di posizione del carico . . . . .	40
6.8	Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato 42	
6.9	Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS . . . . .	43
6.10	Errore di contornatura . . . . .	44
6.11	Andamento di posizione del carico . . . . .	44

6.12	Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato	46
6.13	Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS	47
6.14	Errore di contornatura	48
6.15	Andamento di posizione del carico	48
6.16	Confronto ZVD e ZV shaper modificati	50
6.17	Confronto ZVD modificato e tradizionale	51
6.18	Andamento di posizione di carrello e carico con controllo ottimo	52
6.19	Errore di contornatura	53
6.20	Confronto andamento di posizione con IS e CO	54
6.21	Errore di contornatura	55
6.22	Andamento di posizione di carrello e carico con controllo ottimo	56
6.23	Errore di contornatura	57
6.24	Confronto andamento di posizione con IS e CO	58
6.25	Errore di contornatura	59
6.26	Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato	60
6.27	Errore di contornatura	61
6.28	Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato	61
6.29	Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato	63
6.30	Errore di contornatura	64
6.31	Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato	64
6.32	Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato	65
6.33	Errore di contornatura	66
6.34	Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato	67
6.35	Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato	68
6.36	Errore di contornatura	69
6.37	Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato	69
6.38	Andamento di posizione del carico con IS, WBC e CO	70
6.39	Errore di contornatura	71
7.1	Schema del setup sperimentale	75
7.2	Schema del robot <i>Adept Quattro<sup>TM</sup>s650H</i> e del controller real-time <i>Adept SmartController<sup>TM</sup> CX</i>	76
7.3	Dettaglio del sistema di visione utilizzato nel setup sperimentale	77
7.4	Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria circolare	79



7.5	Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria ad otto . . .	80
7.6	Confronto tra no IS, IS non modificato e IS modificato . . . . .	81
7.7	Confronto tra no IS, IS non modificato e IS modificato . . . . .	81
7.8	Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria circolare .	82
7.9	Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria ad otto . .	83
7.10	Confronto tra no WBC, WBC non modificato e WBC modificato . .	84
7.11	Confronto tra no WBC, WBC non modificato e WBC modificato . .	84
A.1	Evoluzione libera di un sistema smorzato . . . . .	90



# Elenco delle tabelle

6.1	Massimo errore di contornatura . . . . .	40
6.2	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	40
6.3	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	41
6.4	Massimo errore di contornatura . . . . .	43
6.5	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	45
6.6	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	45
6.7	Massimo errore di contornatura . . . . .	47
6.8	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	49
6.9	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	49
6.10	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	53
6.11	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	56
6.12	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	62
6.13	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	62
6.14	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	63
6.15	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	65
6.16	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $r$ . . . . .	66
6.17	Variazione massimo errore di contornatura al variare di $\omega$ . . . . .	67
6.18	Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro $h$ . . . . .	72
6.19	Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro $h$ . . . . .	72
6.20	Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro $h$ . . . . .	73



# SOMMARIO

La presente tesi si pone l'obiettivo di studiare la dinamica di un sistema composto da più membri, sottoattuato, non lineare e tempo variante, in ordine di definire gli ingressi ottimi di controllo per inseguire una determinata traiettoria.

Uno dei principali problemi è la mancanza di controllo in retroazione, con il quale sarebbe sufficiente correggere l'errore di inseguimento.

Il sistema preso in analisi è composto da un carrello e da un pendolo, quindi risulta a più gradi di libertà, quindi abbastanza complesso da controllare con solo gli ingressi disponibili.

L'idea iniziale era di procedere con un'analisi teorica e simulativa per poter poi validare i risultati sperimentalmente, tuttavia, a causa dell'attuale pandemia in corso, non è stato possibile effettuare la sperimentazione in modo approfondito.



# INTRODUZIONE

Le pagine di tesi qui presentate, si inseriscono nell'ambito del controllo e inseguimento di traiettorie, molto importante nelle moderne macchine automatiche o sistemi di automazione, che per qualche motivo, non possono montare un controllore integrato; senza contare il fatto che, se con la "semplice" pianificazione ottima degli ingressi si riuscisse a far inseguire dal sistema il percorso desiderato, i costi verrebbero ridotti (sia fisici che dovuti al funzionamento).

Si svilupperanno principalmente tre tecniche per la definizione dell'ingresso ottimo:

- Input Shaping
- Wave Based Control
- Controllo ottimo per inseguimento di traiettorie

Nel Capitolo 1, si analizzerà il sistema in analisi, che risulta essere un esempio emblematico di sistemi sottoattuati, con la definizione di quello che è il suo modello dinamico.

Nel Capitolo 2, si descrivono le principali tecniche di individuazione parametrica per i coefficienti di smorzamento. Si tratta poi dell'Input Shaping con le relative curve di sensibilità.

Nel Capitolo 3, si tratterà una modifica all'attuale input shaping noto in letteratura, al fine di eliminare gli errori di inseguimento che si manifestano, sia per riferimenti armonici che non.

Nel Capitolo 4, si tratta il Wave Based Control, con una modifica rispetto a quello tradizionale: esso viene utilizzato in catena aperta, con le opportune correzioni, al fine di ottenere il miglior inseguimento della traiettoria di riferimento.

Nel Capitolo 5, si tratta il controllo ottimo, inteso come pianificazione ottima, al fine di individuare quali siano gli ingressi necessari per far sì che il sistema inseguia una determinata traiettoria con lo scopo di minimizzare l'errore di contornatura.

Nel Capitolo 6, si effettuano alcune simulazioni, al fine di verificare l'efficacia dei metodi descritti nei capitoli precedenti, per verificarne i limiti e l'intervallo di validità.

Nel Capitolo 7, si effettuano alcune prove sperimentali al fine di validare i risultati teorici e simulativi, mediante un setup sperimentale che va a rappresentare il modello studiato nei capitoli precedenti.



# Capitolo 1

## MODELLO

Il sistema da analizzare rientra nella categoria di sistemi sottoattuati, ossia sistemi con più gradi di libertà rispetto alle variabili attuate. Esso è composto da un carrello che può traslare in due direzioni  $(x_p, y_p)$  e da un pendolo ad esso collegato che può oscillare con un angolo  $(\theta_x, \theta_y)$ . Per analizzare la correttezza della traiettoria seguita dal pendolo saranno utili le sue componenti lineari:  $(x_L, y_L)$ , come rappresentato in Figura 1.1.

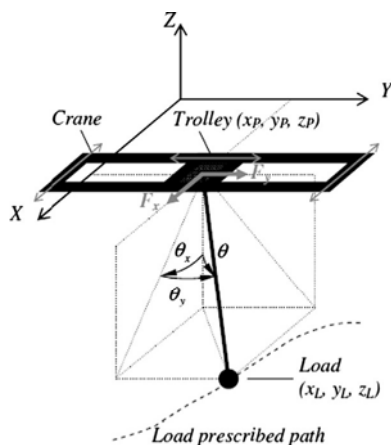


Figura 1.1: Schema del sistema in analisi

Ricordando che agisce la forza di gravità  $g$  e definendo  $h$  la distanza tra il carrello e il pendolo si può ricavare il modello del sistema sfruttando l'equazioni di Lagrange: il Lagrangiano  $L = T - U$  è dato dalla differenza dell'energia cinetica totale del sistema meno la sua energia potenziale e vale che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1.1)$$

dove  $q_i$  sono le coordinate libere del sistema e  $Q_i$  sono le forze o coppie applicate. L'energia cinetica totale, è data dalla somma delle energie cinetiche dei singoli membri ossia:

$$T = \frac{1}{2}M (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2}m (\dot{x}_L^2 + \dot{y}_L^2 + \dot{z}_L^2) \quad (1.2)$$

dove  $M$  è la massa del carrello,  $m$  è la massa del pendolo,  $(\dot{x}_p, \dot{y}_p)$  sono le velocità del carrello e  $(\dot{x}_L, \dot{y}_L)$  sono le velocità del pendolo ricavabili come segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}_L &= \frac{\partial}{\partial t} (x_p + h \sin \theta_x \cos \theta_y) \\ \dot{y}_L &= \frac{\partial}{\partial t} (y_p + h \sin \theta_x \sin \theta_y) \\ \dot{z}_L &= \frac{\partial}{\partial t} (-h \cos \theta_x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

L'energia potenziale risulta:

$$U = -mgh \sin \theta_x \quad (1.4)$$

di conseguenza il Lagrangiano è:

$$L = T - U = \frac{1}{2}M (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2}m (\dot{x}_L^2 + \dot{y}_L^2 + \dot{z}_L^2) + mgh \cos \theta_x \quad (1.5)$$

Sfruttando la (1.1) si ricavano le seguenti equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} F_x &= (M + m) \ddot{x}_p + mh\ddot{\theta}_x \cos \theta_x \cos \theta_y - mh\dot{\theta}_x^2 \sin \theta_x \cos \theta_y - mh\dot{\theta}_y^2 \sin \theta_x \cos \theta_y + \\ &\quad - 2mh\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \cos \theta_x \sin \theta_y \\ F_y &= (M + m) \ddot{y}_p + mh\ddot{\theta}_y \cos \theta_y - mh\dot{\theta}_y^2 \sin \theta_y \\ 0 &= mh\ddot{x}_p \cos \theta_x \cos \theta_y + mh^2\ddot{\theta}_x \cos^2 \theta_y + mgh \sin \theta_x \cos \theta_y - 2mh^2\dot{\theta}_x \dot{\theta}_y \sin \theta_y \cos \theta_y \\ 0 &= -mh\ddot{x}_p \sin \theta_x \sin \theta_y + mh\ddot{y}_p \cos \theta_y + mh^2\ddot{\theta}_y + mgh \cos \theta_x \sin \theta_y + \\ &\quad + mh^2\dot{\theta}_x^2 \sin \theta_y \cos \theta_y \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

## 1.1 Modello con ingresso in forza

Tramite (1.6) si ottiene il modello completo del sistema che prevede come ingressi le due forze  $(F_x, F_y)$  applicate al carrello.

Riscrivendo le equazioni in forma matriciale si ottiene:

$$[M] [\ddot{x}_p \ \ddot{y}_p \ \ddot{\theta}_x \ \ddot{\theta}_y]^T + [C] [\dot{x}_p \ \dot{y}_p \ \dot{\theta}_x \ \dot{\theta}_y]^T + [G] = [F_x \ F_y \ 0 \ 0]^T \quad (1.7)$$

con

$$\begin{aligned}
 [M] &= \begin{bmatrix} M+m & 0 & mh \cos \theta_x \cos \theta_y & -mh \sin \theta_x \sin \theta_y \\ 0 & M+m & 0 & mh \cos \theta_y \\ mh \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 & mh^2 \cos^2 \theta_y & 0 \\ -mh \sin \theta_x \sin \theta_y & mh \cos \theta_y & 0 & mh^2 \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mh\dot{\theta}_x \sin \theta_x \cos \theta_y - 2mh\dot{\theta}_y \cos \theta_x \sin \theta_y & -mh\dot{\theta}_y \sin \theta_x \cos \theta_y \\ 0 & 0 & 0 & -mh\dot{\theta}_y \sin \theta_y \\ 0 & 0 & -2mh^2\dot{\theta}_y \sin \theta_y \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & mh^2\dot{\theta}_x \sin \theta_y \cos \theta_y & 0 \end{bmatrix} \\
 [G] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgh \sin \theta_x \cos \theta_y \\ mgh \cos \theta_x \sin \theta_y \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Tali equazioni, possono essere linearizzate attorno al punto di equilibrio al fine di ottenere il modello lineare, valido in condizioni di *piccoli spostamenti*. Tale ipotesi, consente di confondere la tra traiettoria con lo spostamento stesso, ossia spostamenti e deformazioni sono così piccoli da non influenzare il modo con cui l'equilibrio si instaura. E' pertanto possibile imporre le condizioni di equilibrio nella configurazione iniziale. In tale caso la condizione di equilibrio corrisponde a:

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

di conseguenza si ha:

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_x &= \dot{\theta}_y \simeq 0 \\
 \sin \theta_x &\simeq \theta_x, \quad \sin \theta_y \simeq \theta_y \\
 \cos \theta_x &= \cos \theta_y \simeq 1
 \end{aligned}$$

da cui il modello linearizzato risulta:

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 & mh & 0 \\ 0 & M+m & 0 & mh \\ mh & 0 & mh^2 & 0 \\ 0 & mh & 0 & mh^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \\ \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mgh \\ mgh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

## 1.2 Modello ridotto con ingresso in accelerazione

Concentrandosi solo sul comportamento del pendolo, lo si tratta come un carico da muovere: le sue equazioni possono essere riscritte in forma matriciale come segue:

$$[M] [\ddot{\theta}] + [C] [\dot{\theta}] + [G] = [K] [u] \quad (1.11)$$

con

$$\begin{aligned} [\theta] &= \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} & [u] &= \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \end{bmatrix} \\ [M] &= \begin{bmatrix} mh^2 \cos^2 \theta_y & 0 \\ 0 & mh^2 \end{bmatrix} & [C] &= \begin{bmatrix} -2mh^2 \dot{\theta}_y \sin \theta_y \cos \theta_y & 0 \\ mh^2 \dot{\theta}_x \sin \theta_y \cos \theta_y & 0 \end{bmatrix} \\ [G] &= \begin{bmatrix} mgh \sin \theta_x \cos \theta_y \\ mgh \cos \theta_x \sin \theta_y \end{bmatrix} & [K] &= \begin{bmatrix} -mh \cos \theta_x \cos \theta_y & 0 \\ mh \sin \theta_x \sin \theta_y & mh \cos \theta_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Anche in tal caso è possibile effettuarne la linearizzazione con la medesima condizione di equilibrio (1.9), ottenendo:

$$\begin{aligned} mh^2 \ddot{\theta}_x + mgh \theta_x + mh \ddot{x}_p &= 0 \\ mh^2 \ddot{\theta}_y + mgh \theta_y + mh \ddot{y}_p &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

che in forma matriciale risulta:

$$\begin{aligned} [M'] [\ddot{\theta}] + [K'] [\theta] &= [F] \\ \begin{bmatrix} mh^2 & 0 \\ 0 & mh^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mgh & 0 \\ 0 & mgh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} mh & 0 \\ 0 & mh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Per un sistema lineare, tempo invariante (LTI), la rappresentazione in spazio di stato è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.15)$$

dove  $x(t)$  rappresenta lo stato del sistema ed è un vettore che  $\in \mathbb{R}^n$ , con  $n$  numero di coordinate libere del sistema;  $u(t)$  è il vettore degli ingressi del sistema che  $\in \mathbb{R}^m$ , con  $m$  numero degli ingressi;  $y(t)$  è il vettore delle uscite del sistema ed  $\in \mathbb{R}^p$ , con  $p$  variabili di cui si vuole valutare la dinamica. Di conseguenza,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $D$  che è la matrice di trasferimento diretta tra ingresso e uscita  $\in \mathbb{R}^{p \times m}$ .

L'equazione (1.13) può essere riscritta nella forma:

$$[\ddot{\theta}] = [M']^{-1} (-[K'][\theta] + [F]) \quad (1.16)$$

definendo quindi

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

si ottiene il seguente modello in spazio di stato:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -M'^{-1}K' \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M'^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} F \\ y = [C] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.18)$$

per cui, particolarizzandolo per il pendolo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{g}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{h} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{y}_p \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (1.19)$$

Tale sistema presenta una *pulsazione naturale* di oscillazione pari a

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{h}} \quad (1.20)$$

ed è la pulsazione alla quale oscilla il sistema se eccitato da un impulso.

Definito  $\xi$  il coefficiente di smorzamento, si definisce la *pulsazione naturale smorzata*:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (1.21)$$

È possibile, ora, applicare diverse tecniche di pianificazione, effettuare dei confronti tra queste e verificare in quali condizioni il modello linearizzato rimane valido.

# Capitolo 2

## INPUT SHAPING

### 2.1 Generalità sull'Input Shaping

L'input shaping è una tecnica di pianificazione in feedforward che può essere applicata a diversi sistemi, tra cui quello descritto nel Capitolo 1.

Essa permette di ottenere una determinata traiettoria da eseguire in un tempo di azionamento fissato, riducendo o, addirittura, eliminando le oscillazioni indesiderate che si generano nel momento in cui un sistema oscillante deve inseguire un tragitto.

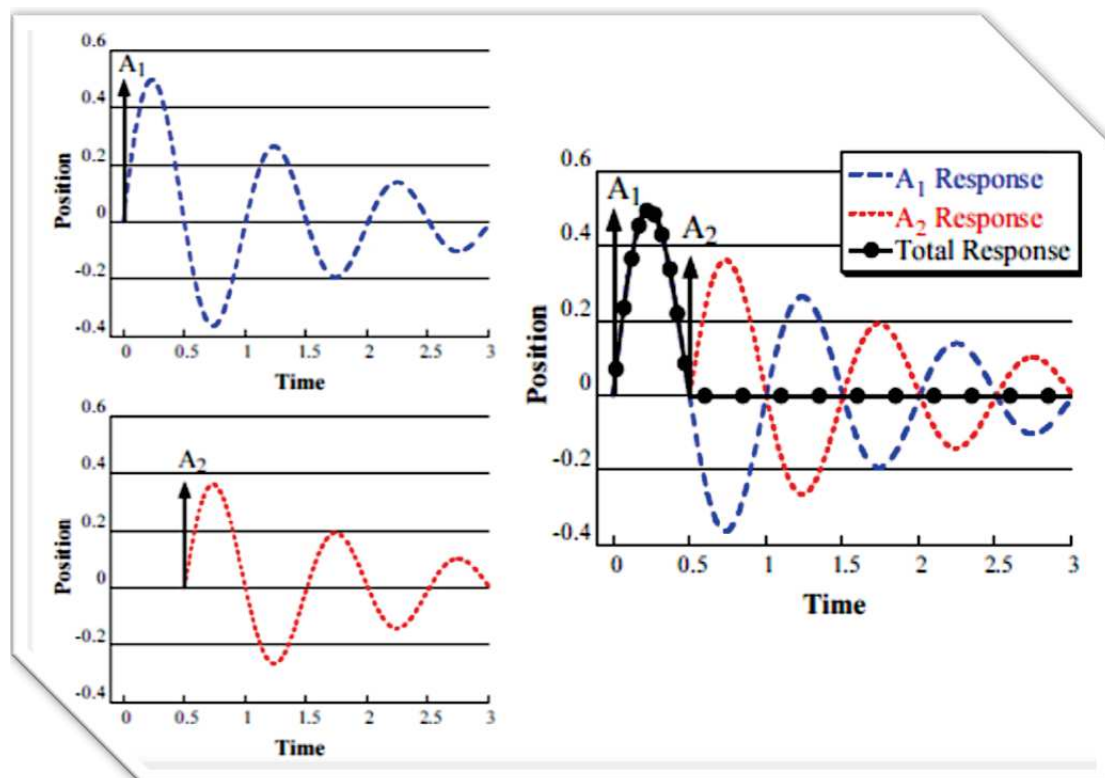


Figura 2.1: Risposta ad impulso con input shaping

L'idea di base è quella di applicare una serie di impulsi ad istanti precisi, la cui convoluzione, con la legge di moto di riferimento, porta il sistema a muoversi in modo tale che il carico segua il riferimento imposto, con vibrazioni residue nulle.

Inizialmente, si può provare ad inseguire un comando semplice: un impulso di ampiezza  $A_1$  applicato all'istante  $t_1 = 0$  s. Tale comando, applicato, ad esempio, a un robot flessibile o al sistema carrello - pendolo, genera un'oscillazione alla frequenza  $\omega_d$  (1.21). Applicando un secondo impulso, di ampiezza  $A_2$  all'istante  $t_2$ , si genera una seconda oscillazione, che se l'impulso è di ampiezza corretta ed è applicato all'istante giusto, si somma in controfase alla prima, andando quindi a compensare le oscillazioni, che risulteranno essere nulle, come rappresentato in Figura 2.1

Analogamente all'impulso, tale metodo può essere applicato per qualunque traiettoria di riferimento, adattando le ampiezze dei segnali e gli istanti di applicazione di essi, ottenendo uno *Zero Vibration (ZV) shaper*.

Si tratta dunque, di determinare il numero, le ampiezze e la distribuzione temporale degli impulsi da applicare, in modo tale che la loro convoluzione con il segnale di comando porti ad interferenza distruttiva delle risposte del sistema.

Tuttavia, questo è fattibile se è nota alla perfezione la pulsazione naturale smorzata  $\omega_d$ , quindi  $\omega_n$  e  $\xi$ . Tali parametri, al fine di poter attuare la compensazione devono essere costanti.

## 2.2 Zero Vibration Shaper

Noti i parametri, la vibrazione residua si ottiene dal tempo dell'ultimo impulso  $t_n$  secondo:

$$V_{(\xi,\omega)} = e^{-\xi\omega_n t_n} \sqrt{C_{(\xi,\omega)}^2 + S_{(\xi,\omega)}^2} \quad (2.1)$$

con

$$\begin{aligned} C_{(\xi,\omega)} &= \sum_{j=1}^n A_j e^{\xi\omega_n t_j} \cos(\omega_d t_j) \\ S_{(\xi,\omega)} &= \sum_{j=1}^n A_j e^{\xi\omega_n t_j} \sin(\omega_d t_j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'ampiezza degli impulsi deve essere unitaria:  $\sum_{j=1}^n A_j = 1$  in modo tale che lo spostamento che si ottiene applicando l'input shaping sia uguale a quello che si otterrebbe con la legge di moto non modificata.

Per ottenere una risposta con oscillazione nulla è necessario che le equazioni in (2.2) siano nulle.



Uno schema semplificativo del processo di applicazione di modifica del comando di ingresso è riportato in Figura 2.2.

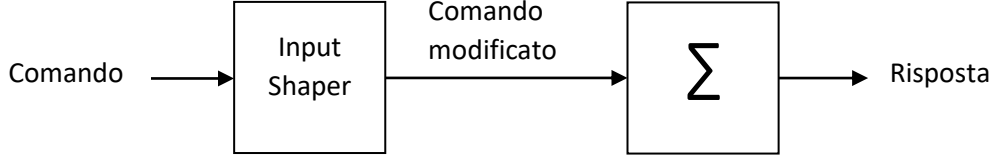


Figura 2.2: Schema di funzionamento dell'input shaping

Considerando due impulsi applicati, rispettivamente in  $t = 0$  s e in  $t = t_2$  si ottiene che lo ZV shaper ha la seguente struttura:

$$ZV = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+K} & \frac{K}{1+K} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

con:

$$K = e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (2.4)$$

di conseguenza il segnale di riferimento da applicare è:

$$x(t) = A_1 x_{ref}(t) + A_2 x_{ref}(t - t_2) \quad (2.5)$$

## 2.3 Zero Vibration and Derivative Shaper

L'inseguimento perfetto si avrà solo se il sistema si muove esattamente come pianificato cioè se  $x = x_{des}$ . Nel caso in cui ciò non avvenisse, o se si presenta un errore notevole a causa dell'incertezza sui parametri si può irrobustire il tutto, realizzando uno *Zero Vibration and Derivative* (ZVD) shaper, che aumenti il numero di impulsi applicati. Una rappresentazione è riportata in Figura 2.3.

In questo caso i valori di  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  si trovano imponendo nulle le derivate delle equazioni (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{dC_{(\xi,\omega)}}{d\omega_n} &= \sum_{j=1}^n -A_j t_j e^{\xi\omega_n t_j} \sin(\omega_d t_j) = 0 \\ \frac{dS_{(\xi,\omega)}}{dt} &= \sum_{j=1}^n A_j t_j e^{\xi\omega_n t_j} \cos(\omega_d t_j) \end{aligned} \quad (2.6)$$

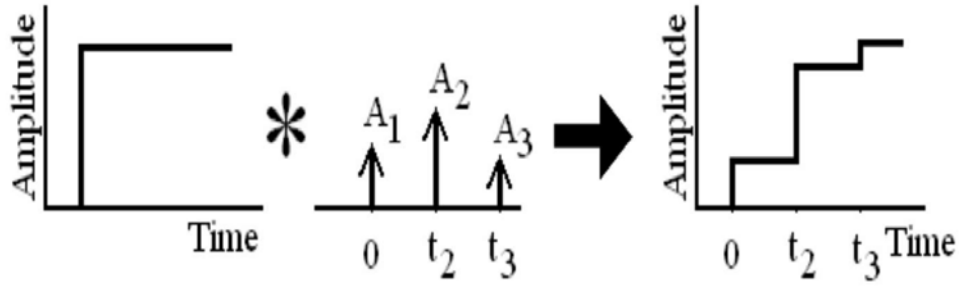


Figura 2.3: Zero Vibration and Derivative Shaper

Si ottengono, dunque, i seguenti coefficienti:

$$ZVD = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+2K+K^2} & \frac{2K}{1+2K+K^2} & \frac{K^2}{1+2K+K^2} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Il comando modificato risulta quindi:

$$x(t) = A_1 x_{ref}(t) + A_2 x_{ref}(t - t_2) + A_3 x_{ref}(t - t_3) \quad (2.8)$$

## 2.4 Zero Vibration and Double Derivative Shaper

Volendo sempre minor vibrazione residua, si procede annullando la derivata seconda delle equazioni (2.2), ottenendo il cosiddetto *Zero Vibration and Double Derivative shaper* (ZVDD).

La sua struttura è del tipo:

$$ZVDD = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & t_2 & t_3 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+3K+3K^2+K^3} & \frac{3K}{1+3K+3K^2+K^3} & \frac{3K^2}{1+3K+3K^2+K^3} & \frac{K^3}{1+3K+3K^2+K^3} \\ 0 & \frac{\pi}{\omega_d} & \frac{2\pi}{\omega_d} & \frac{3\pi}{\omega_d} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

ed è stata ottenuta tramite:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 C_{(\xi, \omega)}}{d\omega_n^2} &= 0 \\ \frac{d^2 S_{(\xi, \omega)}}{d\omega_n^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tale shaper, dunque prevede l'applicazione di quattro impulsi negli istanti  $t = 0, t_2, t_3$  e  $t_4$ , scalati con le rispettive ampiezze. Il comando modificato risulta:

$$x(t) = A_1 x_{ref}(t) + A_2 x_{ref}(t - t_2) + A_3 x_{ref}(t - t_3) + A_4 x_{ref}(t - t_4) \quad (2.11)$$

In generale, è possibile aumentarne la robustezza, annullando le derivate successive alla prima, ottenendo ZVDD, ZVDDD etc, con un numero crescente di impulsi. Tale tecnica, tuttavia, introduce un ritardo nell'esecuzione pari alla distanza temporale tra il primo e l'ultimo impulso, a causa, appunto della modifica del comando: maggiore è la robustezza, più è necessario aumentare il tempo di azionamento, altrimenti non si riesce a raggiungere il riferimento desiderato.

## 2.5 Curve di sensibilità

La robustezza dello shaper esprime quanta vibrazione residua rimane nella risposta del sistema, a fronte di errori noti sulla frequenza di oscillazione e sullo smorzamento.

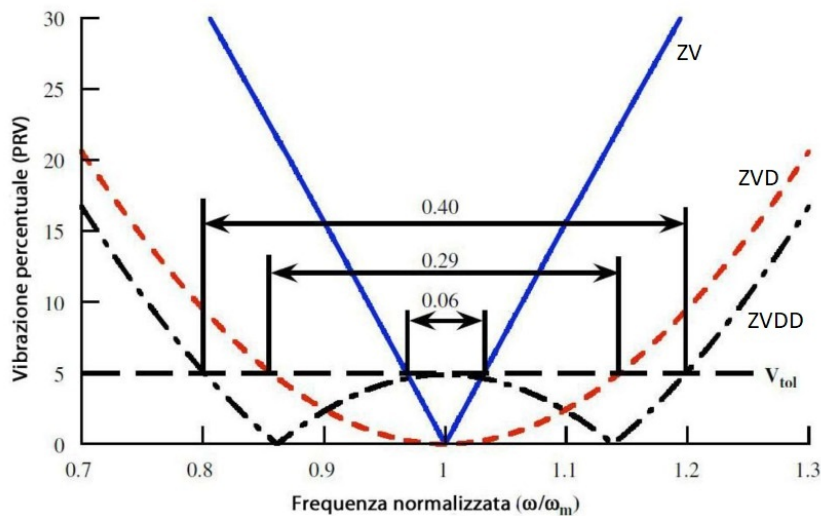


Figura 2.4: Esempi di curve di sensibilità

È possibile valutare tale parametro basandosi sulla curva di *sensibilità*, di cui un esempio è riportato in Figura 2.4. Nell'asse delle ascisse è rappresentata la frequenza nominalizzata, cioè il rapporto tra la frequenza attuale  $\omega$  e la frequenza nominale di oscillazione del modello  $\omega_n$ ; nell'asse delle ordinate, invece, è rappresentata la vibrazione residua percentuale (PRV), descritta tramite  $V_{(\xi,\omega)}$ , in (2.1). Tale PRV è il rapporto tra l'ampiezza della vibrazione residua, al termine dell'applicazione del comando modificato, rispetto alla vibrazione che si avrebbe senza modifiche del segnale di riferimento.

Si può definire anche l'*insensibilità*  $I$ , che è la base della curva di sensibilità ad un valore di vibrazione residua tollerabile  $V_{tol}$ . Per lo ZV shaper, in Figura 2.4, la vibrazione residua tollerabile è  $V_{tol} = 5\%$ , che corrisponde a 0.06, mentre per lo ZVD shaper è pari a 0.29 e per lo ZVDD 0.40. Si vede che all'aumentare della robustezza dello shaper, maggiore è il valore di insensibilità. Si ricorda comunque, che all'aumentare della robustezza, è richiesto un maggior tempo di azionamento, per cui se sono presenti vincoli su di esso è necessario un trade off.

## Capitolo 3

# MODIFICA INPUT SHAPING

Quando si applica tale tecnica, la traiettoria eseguita viene distorta, al fine di eliminare le vibrazioni e aver un miglior inseguimento del riferimento. Tuttavia, sia sperimentalmente che analiticamente si può verificare che c'è una distorsione in ampiezza: ciò significa che l'input shaping permette di ottenere la forma della traiettoria desiderata ma con un modulo minore e con un ritardo in fase.

Al fine di valutare tale riduzione si può analizzare la funzione di trasferimento tra posizione reale e quella di riferimento del pendolo.

Partendo dal sistema linearizzato (1.19), si può ricavare il modello in posizione che come ingressi ha le coordinate spaziali del carrello  $(x_p, y_p)$  e come uscite quelle del pendolo  $(x_L, y_L)$ , che risulta:

$$\begin{cases} \ddot{x}_L + \frac{g}{h}x_L = \frac{g}{h}x_p \\ \ddot{y}_L + \frac{g}{h}y_L = \frac{g}{h}y_p \end{cases} \quad (3.1)$$

quindi in spazio di stato si ottiene:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \ddot{x}_L \\ \ddot{y}_L \\ \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{g}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{h} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \\ x_L \\ y_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{g}{h} & 0 \\ 0 & \frac{g}{h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = A'x + B'u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \\ x_L \\ y_L \end{bmatrix} = Cx \end{cases} \quad (3.2)$$

La funzione di trasferimento del sistema fisico risulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = C(sI - A')^{-1}B' = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \quad (3.3)$$

per cui, ricordando lo schema di Figura 2.2, che include lo shaper, si ottiene la funzione di trasferimento tra il riferimento e l'uscita in posizione del sistema, con uno ZV shaper:

$$\frac{Y(s)}{Y_{ref}(s)} = G(s) = W(s) \cdot (A_1 + A_2 \cdot e^{-st_2}) \quad (3.4)$$

. Tale funzione di trasferimento è riportata in Figura 3.1.

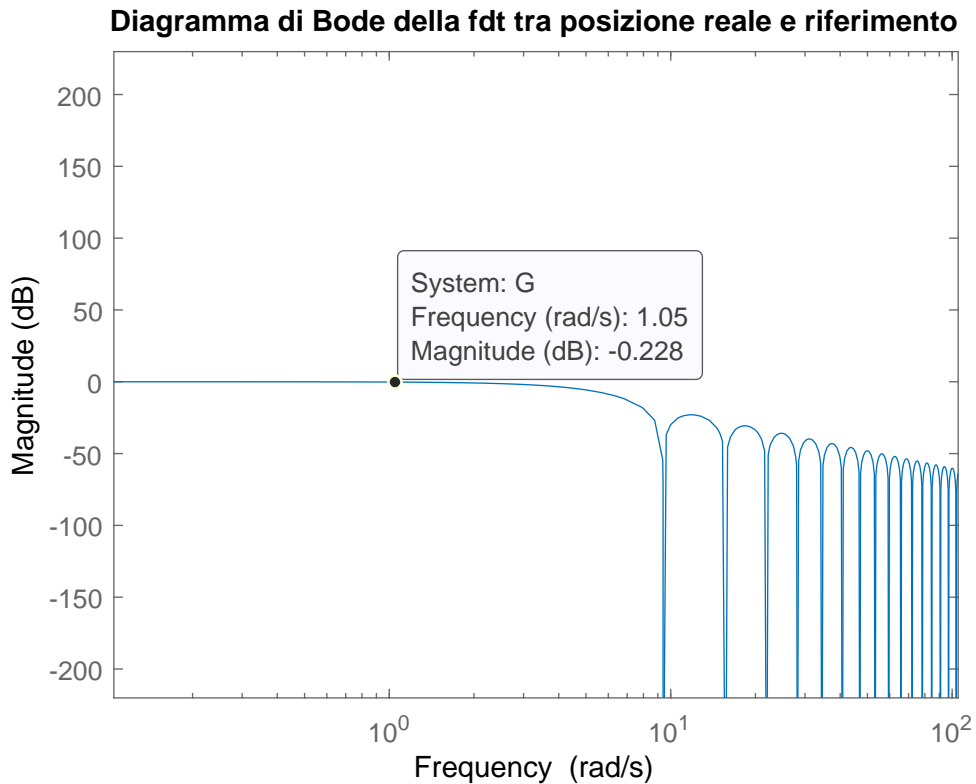


Figura 3.1: Modulo della funzione di trasferimento  $G(s)$

### 3.1 Riferimenti Armonici

Supponendo di avere come riferimento una funzione armonica, ad esempio una circonferenza di raggio  $r$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , si vede che alla pulsazione di interesse il modulo non è unitario (quindi a  $0 \text{ dB}$ ) ma vale circa  $-0.225 \text{ dB}$ , il che implica che si ottiene un cerchio di raggio minore, pari a circa  $10^{-0.225/20} = 0.908$ ,

che quindi presenta un errore di oltre il 10% rispetto al raggio di riferimento. È sufficiente quindi, correggere i coefficienti dell'input shaping (2.3), moltiplicandoli per l'inverso del modulo di  $G(s)$  alla frequenza di interesse. I nuovi coefficienti, per lo ZV shaper, risultano dunque:

$$A_1 = \frac{1}{1+K} \cdot \frac{1}{|G(j\omega)|} \quad A_2 = \frac{K}{1+K} \cdot \frac{1}{|G(j\omega)|} \quad (3.5)$$

Tali coefficienti, risultano dunque variabili con la frequenza con cui si sollecita il segnale e rimangono validi entro i limiti di validità dell'input shaping stesso, che verranno discussi in seguito.

Tramite questa modifica si ha infatti che il modulo della funzione di trasferimento alla frequenza di interesse è unitario, il che implica che si ha un perfetto inseguimento, seppur in ritardo, del riferimento imposto.

Se si desidera anche avere una compensazione della fase e del ritardo introdotti dallo shaper stesso è possibile introdurre uno sfasamento o una rete anticipatrice di fase. La funzione di trasferimento permette anche di ottenere quanto deve essere sfasato il riferimento in modo tale da eliminare il ritardo. In particolare esso deve presentare una compensazione (in anticipo) pari a:

$$\phi = \angle G(j\omega) \quad (3.6)$$

che data la struttura del sistema risulta essere sempre negativa per  $\omega < \omega_n$ , come rappresentato in Figura 3.2.

Si ottiene quindi, sempre per la circonferenza in esempio, un comando di posizione pari a:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 r \cos(\omega t - \phi) + A_2 r \cos(\omega(t - t_2) - \phi) \\ y(t) &= A_1 r \sin(\omega t - \phi) + A_2 r \sin(\omega(t - t_2) - \phi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nel caso di shaper più robusti (ZVD, ZVDD, etc), è sufficiente correggere tutti i coefficienti come in (3.5) e applicare la medesima compensazione di fase.

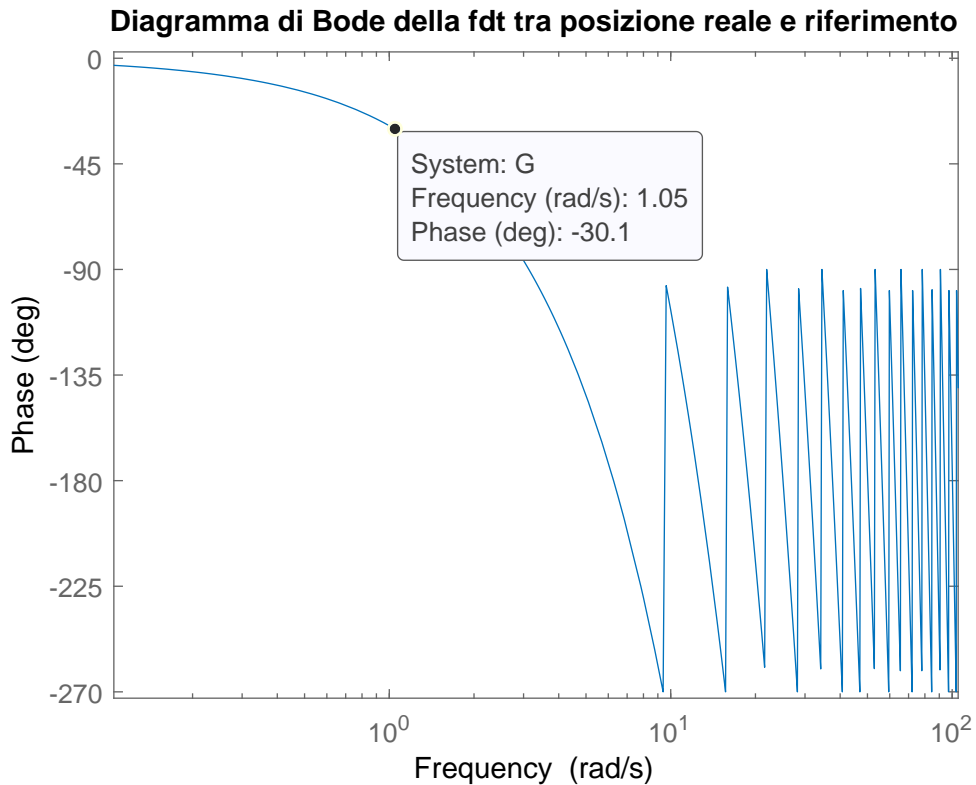


Figura 3.2: Fase della funzione di trasferimento  $G(s)$

Già dalle Figure 3.1 e 3.2, si vede quale sia un possibile primo limite di tale metodo: innanzitutto, tale metodo non è applicabile se la frequenza del riferimento è nell'intorno della pulsazione di risonanza poiché il modulo risulta essere infinito. Successivamente, inizia una zona dove si perde la linearità per cui il modello non è più valido.

## 3.2 Riferimenti non armonici

Tale modifica appena descritta è estendibile nel caso si dovessero inseguire traiettorie non riconducibili direttamente ad una combinazione di funzioni armoniche.

È necessario ricorrere all'*Approssimazione di Padé* per rappresentare correttamente la funzione di trasferimento dello shaper, a causa del (o dei) ritardo che introduce.

Un ritardo  $T$  è rappresentabile mediante la funzione trascendente  $e^{-Ts}$ ; tale funzione non è razionale e lo scopo di questa approssimazione è quello di rappresentarla con una razionale, valida in bassa frequenza, che comunque è l'intervallo di validità del sistema lineare.

È possibile eguagliare lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione di ritardo con lo



sviluppo in serie di una funzione razionale con a numeratore un polinomio di ordine  $p$  e a denominatore un polinomio di ordine  $q$ . Il risultato viene definito *approssimante*  $(p, q)$  di Padé.

Risulta quindi necessario, nel caso di approssimante  $(1, 1)$ , individuare i coefficienti del  $a_0, b_0, b_1$  tali che l'errore

$$\epsilon = e^{-Ts} - \frac{b_0s + b_1}{a_0s + 1} \quad (3.8)$$

sia piccolo.

Sviluppando in serie entrambe le funzioni si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{-Ts} &= 1 - Ts + \frac{Ts^2}{2!} + \dots + (-1)^i \frac{(Ts)^i}{i!} \\ \frac{b_0s + b_1}{a_0s + 1} &= b_1 + (b_0 - a_0b_1)s - a_0(b_0 - a_0b_1)s^2 + \dots + (-1)^{i-1} a_0^{i-1} (b_0 - a_0b_1)s^i \end{aligned} \quad (3.9)$$

e uguagliando i primi tre termini si ottiene:

$$e^{-Ts} \simeq \frac{1 - Ts/2}{1 + Ts/2} \quad (3.10)$$

Nel caso di uno ZV shaper, il ritardo introdotto risulta:

$$e^{t_2s} \simeq \frac{1 - t_2s/2}{1 + t_2s/2} \quad (3.11)$$

per cui la funzione di trasferimento approssimata, tra il riferimento e l'uscita in posizione del sistema (3.4) diventa:

$$G = W(s) \cdot \left( A_1 + A_2 \cdot \frac{1 - t_2s/2}{1 + t_2s/2} \right) \quad (3.12)$$

Per poter effettuare una correzione, è necessario quindi, utilizzare l'inversa di  $G(s)$  come funzione di trasferimento correttiva, tuttavia  $W(s)$  risulta avere grado relativo (differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore)  $d = 2$ , per cui si otterrebbe una funzione impropria. Si aggiungono, pertanto, a  $G(s)$  due zeri in alta frequenza, i quali, una volta invertita la funzione risulteranno essere due poli che non influiscono sulla dinamica del sistema. Si ottiene dunque:

$$G^*(s) = G(s) \cdot (s + \tau)^2 \quad (3.13)$$

con  $\tau \gg \omega_n$ , da cui la funzione di trasferimento correttiva:

$$G'(s) = |G^*(j \cdot 0)| \cdot \frac{1}{G^*(s)} \quad (3.14)$$

dove è stato necessario moltiplicarla per il guadagno in continua di  $G(s)$  in modo da ottenere guadagno complessivo unitario per  $\omega < \omega_n$ .

Si riporta in Figura 3.3 il digramma di Bode di  $G'(s)$ .

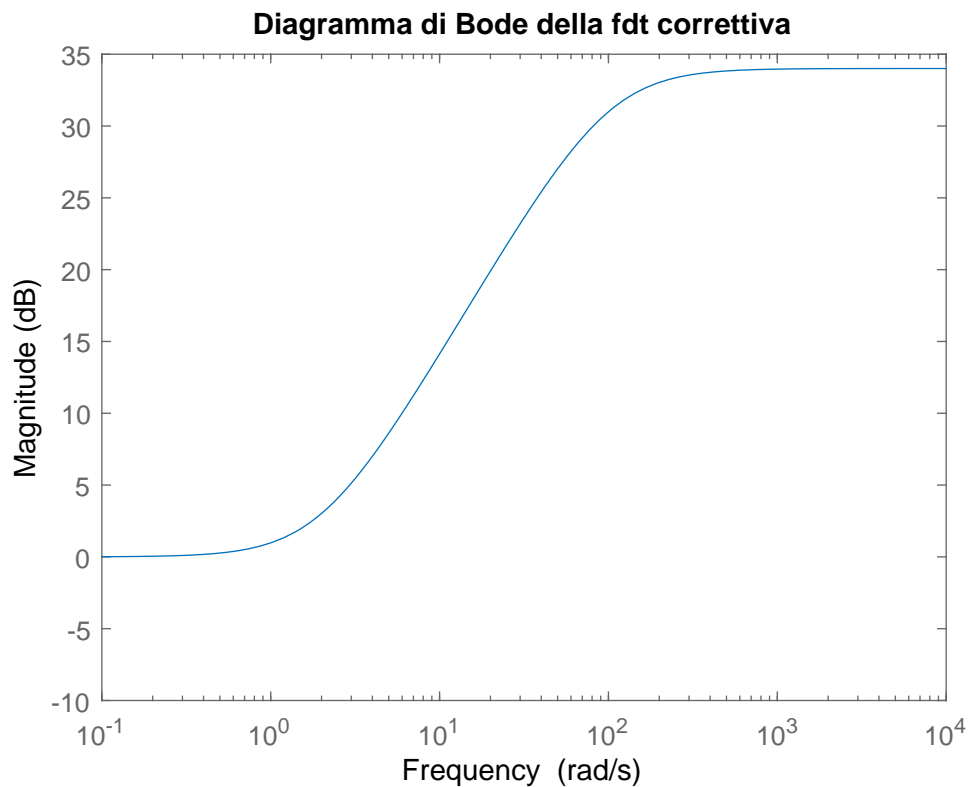


Figura 3.3: Modulo della funzione di trasferimento correttiva  $G'(s)$

# Capitolo 4

## WAVE BASED CONTROL

### 4.1 Generalità sul Wave Based Control

Il Wave Based Control permette di ottenere un rapido e accurato posizionamento di un sistema, soddisfacendo anche alla necessità di ridurre le vibrazioni residue.

Tale metodo è applicabile a una grande classe di sistemi e consente di ottenere un rapido, accurato e quasi del tutto privo di vibrazioni posizionamento del sistema e quindi del carico.

L'idea è di considerare il movimento dell'attuatore come lancio ed assorbimento di onde di spostamento che escono ed entrano contemporaneamente nel sistema.

Con il termine *wave* (onda), si intende, non solo la componente oscillatoria del moto, bensì anche ogni perturbazione rispetto allo stato stazionario.

Tale tipo di controllo si focalizza sull'interfaccia tra l'attuatore e il membro flessibile (e.g. il pendolo), interpretandola come la sovrapposizione di due onde di propagazione: la prima entra nel sistema, quindi è propagata dall'attuatore verso il membro flessibile, la seconda è quella di ritorno, quindi si muove in direzione opposta e può essere riflessa o assorbita, totalmente o parzialmente.

Facendo riferimento alla Figura 4.1, l'onda di lancio viene trasmessa al carico tramite la funzione di trasferimento  $G$  e successivamente, ritorna all'attuatore tramite la  $H$ . Quando lo raggiunge, viene lanciata nuovamente al sistema flessibile, iniziando un nuovo movimento di propagazione. La posizione di ogni massa quindi viene definita tramite la somma di queste due componenti:

$$X_i = A_i + B_i \quad (4.1)$$

Tale equazione è valida sia nel dominio delle funzioni di trasferimento (dominio di Laplace) che nel tempo.



da cui, moltiplicando ambo i membri della seconda equazione per  $G$  e riarrangiando opportunamente, si ottiene:

$$\begin{aligned} B_0 &= G(X_1 - GA_0) \\ A_0 &= X_0 - G(X_1 - GA_0) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tale funzione di trasferimento  $G$  può essere approssimata con una relazione del secondo ordine del tipo:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n s + \omega_n^2} \tag{4.4}$$

e permette di ottenere buoni risultati.

L'attuatore quindi compie due importanti lavori: lancia l'onda meccanica nel sistema e assorbe quella di ritorno. La presenza della componente di assorbimento  $B_0$ , muove il sistema verso lo spostamento richiesto, portando alla condizione di steady-state, smorzando inoltre le vibrazioni grazie alla cancellazione dei poli del sistema.

Se la stima di quest'onda di ritorno è accurata, essa rivela al controllore tutte le informazioni del sistema, necessarie al controllo stesso. In pratica, consente di abbinare l'ordine del controllore a quello del sistema.

Il WBC ha molti vantaggi che ne hanno consentito l'applicazione con successo, tra cui:

- è un controllore robusto, in grado di compensare le limitazioni dell'attuatore, le incertezze sul sistema o le non linearità e gli errori di computazione;
- permette di ottenere minime vibrazioni residue;
- non richiede la conoscenza precisa del modello del sistema;
- è un metodo generale, applicabile a un arbitrario numero di masse con modi di vibrare differenti;
- consente una formulazione molto semplice, misurando solo la forza all'interfaccia.

## 4.2 Wave Based Control in catena aperta

Il WBC si può estendere ai sistemi che non prevedono la retroazione, come il carrello - pendolo di Figura 1.1.

Ricordando che le coordinate del carrello sono  $z_p = (x_p, y_p)$  e quelle del carico sono  $z_L = (x_L, y_L)$  è possibile scrivere la relazione tra i riferimenti di queste mediante la funzione di trasferimento  $G$ , che rappresenta appunto la propagazione d'onda:

$$G(s) = \frac{Z_p^{ref}(s)}{Z_L^{ref}(s)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - G_2^2}{1 - G_2 \cdot \frac{Z_L(s)}{Z_p^{ref}(s)}} \simeq \frac{s^2 + \omega_n^2}{\sqrt{\alpha}s^2 + 2\xi_d \frac{\omega_n}{\sqrt{\alpha}}s + \omega_n^2} \quad (4.5)$$

dove il parametro  $\alpha = 3.84$ , suggerito da *O'Connor* (uno dei maggiori esponenti per lo studio di tale metodo) anche per la versione in catena chiusa, permette di ottenere, in alta frequenza, un'attenuazione come quella del tradizionale WBC.

Il riferimento al carrello  $Z_p^{ref}$  viene generato quindi, filtrando il segnale  $Z_L^{ref}$  che è la traiettoria desiderata.

Il nuovo termine di smorzamento, è dato dal rapporto  $\frac{\xi_d}{\sqrt{\alpha}}$  e poiché si vogliono attenuare le vibrazioni il più possibile, senza però rendere il sistema sovrasmorzato, è necessario che tale rapporto tenda al valore di smorzamento criticamente smorzato, cioè deve tendere al valore unitario.

Lo schema che viene dunque ad essere implementato è rappresentato in Figura 4.3. dove  $W(s)$  è la funzione di trasferimento in (3.3).

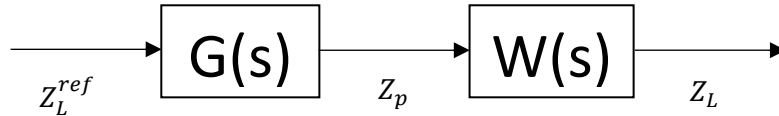


Figura 4.3: Schema del sistema complessivo

La funzione di trasferimento complessiva risulta dunque:

$$G'(s) = \frac{Z_L(s)}{Z_L^{ref}(s)} = G(s) \cdot W(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{\sqrt{\alpha}s^2 + 2\xi_d \frac{\omega_n}{\sqrt{\alpha}}s + \omega_n^2} \cdot \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \quad (4.6)$$

il cui diagramma di Bode è riportato in Figura 4.4.

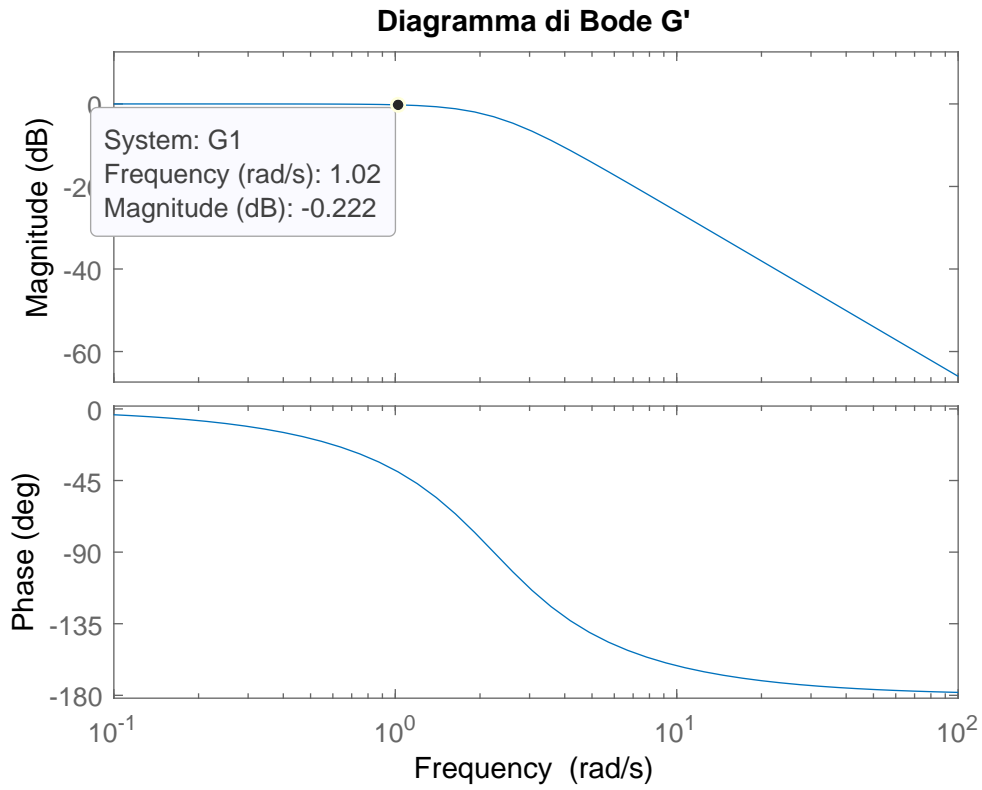


Figura 4.4: Diagramma di Bode di  $G'(s)$

È immediato notare che è necessaria una modifica a tale controllo poiché il modulo non presenta guadagno unitario a tutte le frequenze, per cui, nel caso la traiettoria di riferimento fosse ad una pulsazione  $\omega$  per la quale  $|G'(j \cdot \omega)| \neq 1$  si avrebbe una distorsione nell'inseguimento.

### 4.3 Modifica Wave Based Control

Al fine di compensare la non unitarietà del modulo, è necessario introdurre una correzione come per l'Input Shaping: si definisce quindi una funzione di trasferimento correttiva del tipo:

$$G'''(s) = |G^*(j \cdot 0)| \cdot \frac{1}{G^*(s)} \quad (4.7)$$

dove

$$G^*(s) = G'(s) \cdot (s + \tau)^2 \quad (4.8)$$

ossia la funzione di trasferimento complessiva alla quale vengono aggiunti due zeri in alta frequenza, in modo tale da renderne l'inversa propria e quindi fisicamente realizzabile.

Il diagramma del modulo di tale funzione correttiva è riportato in Figura 4.5. Quindi

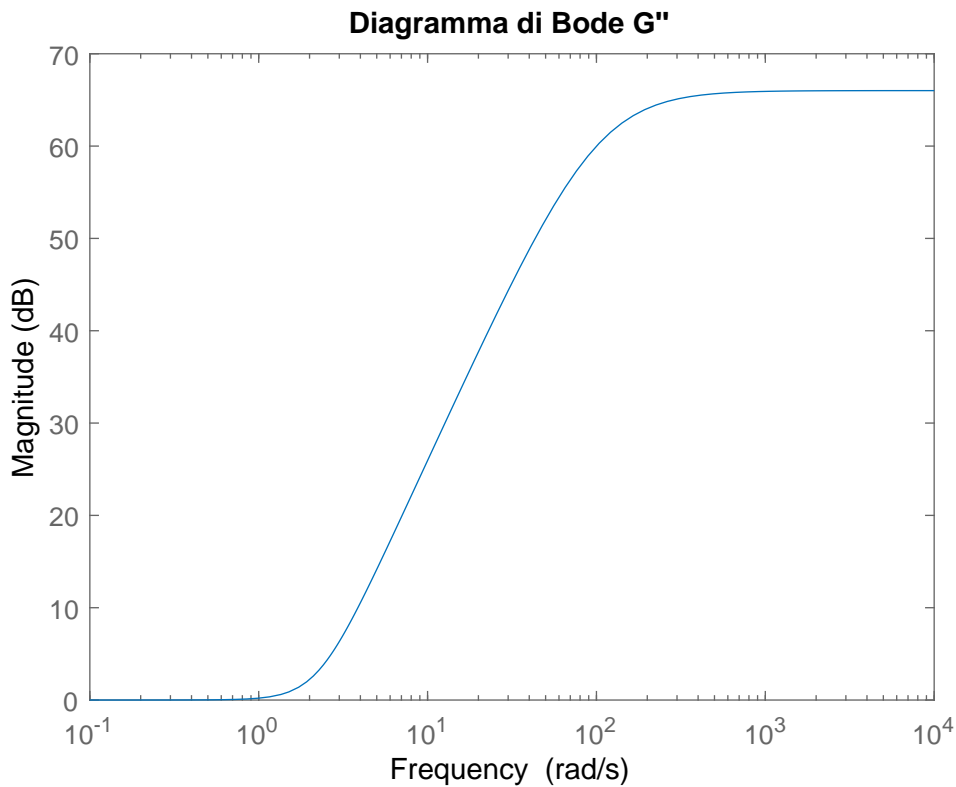


Figura 4.5: Diagramma di Bode di  $G'''(s)$

il nuovo schema di definizione degli ingressi risulta quello di Figura 4.6.

Se si confrontano l'Input Shaping modificato e il Wave Based Control in catena aperta modificato, si vede come quest'ultimo non presenti oscillazioni in alta frequenza, per cui i limiti sulla pulsazione del riferimento risultano essere meno stringenti.



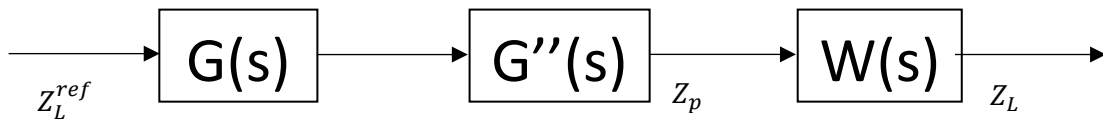


Figura 4.6: Schema del sistema complessivo con correzione

Tuttavia, anche con tale metodo di pianificazione, è necessario non andare oltre la pulsazione di risonanza se si vuole mantenere la linearità del modello del sistema.



# Capitolo 5

## CONTROLLO OTTIMO

La teoria del controllo ottimo è stata ampiamente studiata e sviluppata negli ultimi quarant'anni, con una diffusione sempre crescente grazie al miglioramento delle tecniche computazionali che hanno permesso l'ampliamento di metodi numerici per la risoluzione di molti problemi.

L'obiettivo del controllo ottimo è quello di determinare i segnali di controllo o di comando, al fine di soddisfare i vincoli fisici e al tempo stesso di minimizzare o massimizzare un indice necessario a misurare le performance del sistema.

Al fine di formulare e risolvere correttamente un problema di controllo ottimo è necessario definire alcune caratteristiche:

- il modello dinamico del sistema da controllare;
- l'indice di comportamento  $J$ , definito anche *criterio di ottimalità* o *funzionale di costo*, che considera le specifiche e le esigenze desiderate;
- i vincoli presenti, cioè le condizioni al contorno e i limiti sugli stati del sistema e del controllo stesso.

### 5.1 Controllo ottimo in catena aperta

Si deve far riferimento al modello dinamico del sistema, che per quello in analisi è descritto mediante le equazioni (1.10) o (1.19). In generale esso può essere scritto come:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (5.1)$$

dove  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  è il vettore che rappresenta lo stato del sistema, quindi la posizione e la velocità del pendolo, mentre  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  sono gli ingressi da applicare per inseguire la traiettoria desiderata  $z_{des}(t)$ , che corrispondono alle coordinate da imporre al

carrello:  $z_p = \begin{bmatrix} x_p & y_p \end{bmatrix}$ .

Si definisce il funzionale di costo quadratico da minimizzare:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \alpha \|z_p - z_L\|^2 + \beta \Phi^2 dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \alpha \left( \begin{bmatrix} x_p & y_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_L & y_L \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \end{bmatrix} \right) + \beta \Phi^2 dt \quad (5.2)$$

con il vincolo in (5.1) e le condizioni al contorno:

$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f \quad (5.3)$$

e  $\Phi(x, y) = 0$  traiettoria da minimizzare.

Il problema del controllo ottimo, consiste dunque, nel determinare la funzione  $u^*(t), \forall t \in [t_0, t_f]$  tale da minimizzare  $J$ .

Si definisce la matrice *Hamiltoniana*  $H$ :

$$H(x, \lambda, u) = (z_p - z_L)^2 + \lambda^T f(x, u) \quad (5.4)$$

dove  $\lambda_{nx1}$  è detto *co-stato* o *vettore delle variabili aggiunte*.

Affinché il problema si risolva, cioè  $\exists u^*(t)$  ottimo, si deve introdurre una condizione necessaria, oltre a soddisfare il vincolo in (5.1). Tale condizione prevede che il seguente sistema di equazioni differenziali sia risolvibile e determinato:

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

La prima equazione viene definita *equazione di co-stato*, mentre la seconda *equazione di controllo*.

Minimizzando la matrice  $H$  rispetto agli ingressi:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (5.6)$$

si trova il valore di  $u^*(t)$  che minimizza il funzionale  $J$  (5.2).

$$u^*(t) = h(x, \lambda) \rightarrow H^* = H(x, h, \lambda) \quad (5.7)$$

quindi quello che si ottiene è:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u^*(t)) = \frac{\partial H^{*T}}{\partial \lambda} \quad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H^{*T}}{\partial x} \quad (5.8)$$

Ottenuti tali valori, si sostituiscono in  $u^*(t)$  ottenendo dunque gli ingressi cercati che vanno a minimizzare la distanza tra il riferimento desiderato e la posizione reale.

## 5.2 Algoritmi numerici per il controllo ottimo

Spesso, la soluzione analitica sopra descritta, può essere complessa da risolvere. Tuttavia esistono diversi metodi numerici che permettono di trovare una soluzione al problema di controllo ottimo con una tolleranza fissata. Uno di questi metodi è l'algoritmo di *Kelley-Bryson*, i cui passi principali sono:

- inizializzazione di un contatore di iterazioni  $i$ ;
- inizializzazione dell'errore di tolleranza  $\varepsilon$ ;
- definizione di  $u_0(t)$ , cioè una supposizione iniziale degli ingressi;
- definizione di  $x_0(t)$ , cioè l'integrale nel tempo di (5.1);
- finché  $\|J(u^{i+1}) - J(u^i)\| < \varepsilon$  si deve ripetere la seguente procedura:
  - calcolare  $\lambda^i(t)$ , tramite integrazione di (5.5)
  - definizione dell'*Hamiltoniana*  $H$  e ricerca di  $\alpha^i$  tale che  $u^{i+1}(t) = u^i(t) - \alpha^i H$ ;
  - calcolare  $x^i(t)$
  - aggiornare il contatore:  $i = i + 1$ .

In alternativa è possibile utilizzare un metodo diretto che prevede la discretizzazione della traiettoria di controllo  $u(t)$ . Innanzitutto, l'intervallo temporale  $[t_0, t_f]$  deve essere suddiviso in un numero sufficiente di sotto intervalli  $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_f]$ . Per ognuno di questi intervalli si definisce  $u_i(\tau)$ , descrivibile come una funzione lineare se l'intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$  è sufficientemente piccolo, come rappresentato in Figura 5.1.

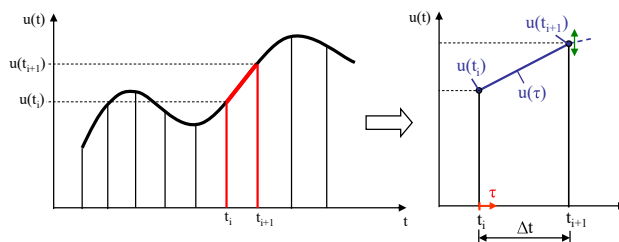


Figura 5.1: Approssimazione lineare

In tal caso risulta:

$$u(\tau) = u_i + v_i \tau \quad v_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{t_{i+1} - t_i} \quad \tau \in [t_i, t_{i+1}] \quad (5.9)$$

Il termine  $v_i$ , calcolato mediante rapporto incrementale, rappresenta la pendenza di tale funzione.

Misurando l'output del sistema  $z(t)$  e confrontandolo con il riferimento  $z_{des}(t)$ , è possibile definire il funzionale di costo  $J$  (5.2) in ogni intervallo di tempo  $[t_i, t_{i+1}]$ .

Essendo questo sufficientemente piccolo, il funzionale può essere approssimato mediante approssimazione trapezoidale:

$$J_i(v_i) \simeq \frac{1}{2} [\|z_p(x(t_i)) - z_L(t_i)\|^2 - \|z_p(x(t_{i+1})) - z_L(t_{i+1})\|^2] \quad (5.10)$$

Inoltre, la pendenza  $v_i$  non influenza lo stato all'inizio dell'intervallo,  $x(t_i)$ , e di conseguenza, solo la seconda parte di (5.10), deve essere minimizzata.

$$\min : \hat{J}(v_i) = \frac{1}{2} \|z_p(x(t_{i+1})) - z_L(t_{i+1})\|^2 \quad (5.11)$$

# Capitolo 6

## SIMULAZIONI

Il sistema in analisi presenta le seguenti caratteristiche:

- Massa equivalente del carrello:  $M = 32 \text{ Kg}$
- Massa del carico sospeso:  $m = 0.7 \text{ Kg}$
- Lunghezza fune:  $h = 1 \text{ m}$
- Fattore di smorzamento:  $\xi = 0.001$

In questo caso la frequenza di oscillazione (1.20) vale:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{h}} = 3.3121 \text{ rad/s}$$

di conseguenza il periodo risulta:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2 \text{ s}$$

Si ricorda dunque che il tempo totale di azionamento, nel caso di ZV shaper che introduce un ritardo pari a  $t_2/2$ , deve essere pari ad almeno

$$T_{az} = T + t_2/2$$

Le simulazioni vengono effettuate mediante software *Simulink*, sfruttando o il modello in forma di stato nel caso di sistema linearizzato, oppure tramite *S-function* nel caso di sistema non lineare. I segnali di ingresso vengono passati mediante strutture tramite blocchi *From Workspace*, mentre i segnali di uscita vengono salvati sempre in strutture mediante blocchi *To Workspace*.

## 6.1 Input Shaping

Il modello implementato in *Simulink* è riportato in Figura 6.1.

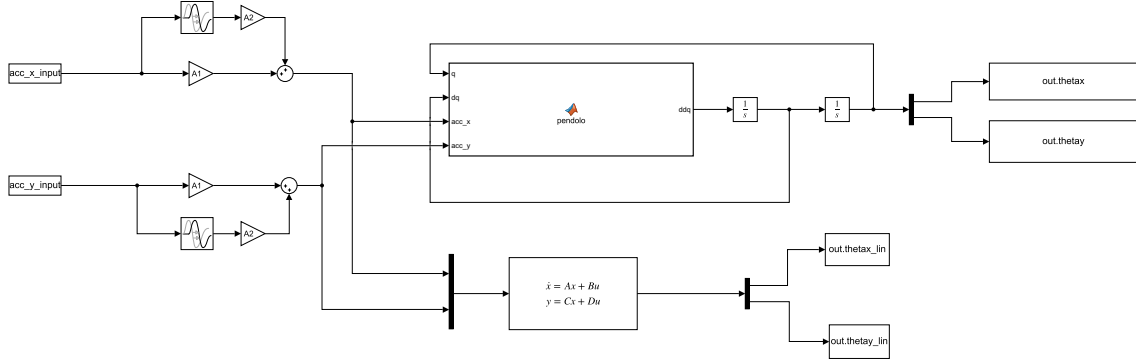


Figura 6.1: Modello Simulink per sistema con ingresso in accelerazione e ZV shapr

Concentrandosi sul sistema linearizzato (1.19) si decide di verificarne il comportamento quando si hanno diverse traiettorie di riferimento:

- una circonferenza di raggio  $r = 1 \text{ m}$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;
- una traiettoria ad 8 di ampiezza  $r = 1 \text{ m}$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ ;
- una cardioide di ampiezza  $r = 0.1 \text{ m}$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ .

Per ognuno di questi casi si effettuerà il confronto tra sistema senza Input Shaping applicato, con Input Shaping tradizionale e con Input Shaping modificato.

Si procederà poi, variando ampiezze e raggi per verificare entro quali limiti questa modifica rimane applicabile e infine si includerà uno ZVD shaper al fine di garantire una maggior robustezza nel caso di incertezza dei parametri (e.g.  $h$ ).

### 6.1.1 Traiettoria circolare

L'equazione della traiettoria di riferimento è:

$$x_{ref}^2 + y_{ref}^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_{ref}(t) = r \cos(\omega t) \\ y_{ref}(t) = r \sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.1)$$

Di conseguenza le accelerazioni in input al carrello risultano:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_p = -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.2)$$



Imponendo come condizioni iniziali:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x(0) \\ \dot{\theta}_y(0) \\ \theta_x(0) \\ \theta_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

mediante ZV shaper modificato, l'andamento di posizione che si ottiene è riportato in Figura 6.2.

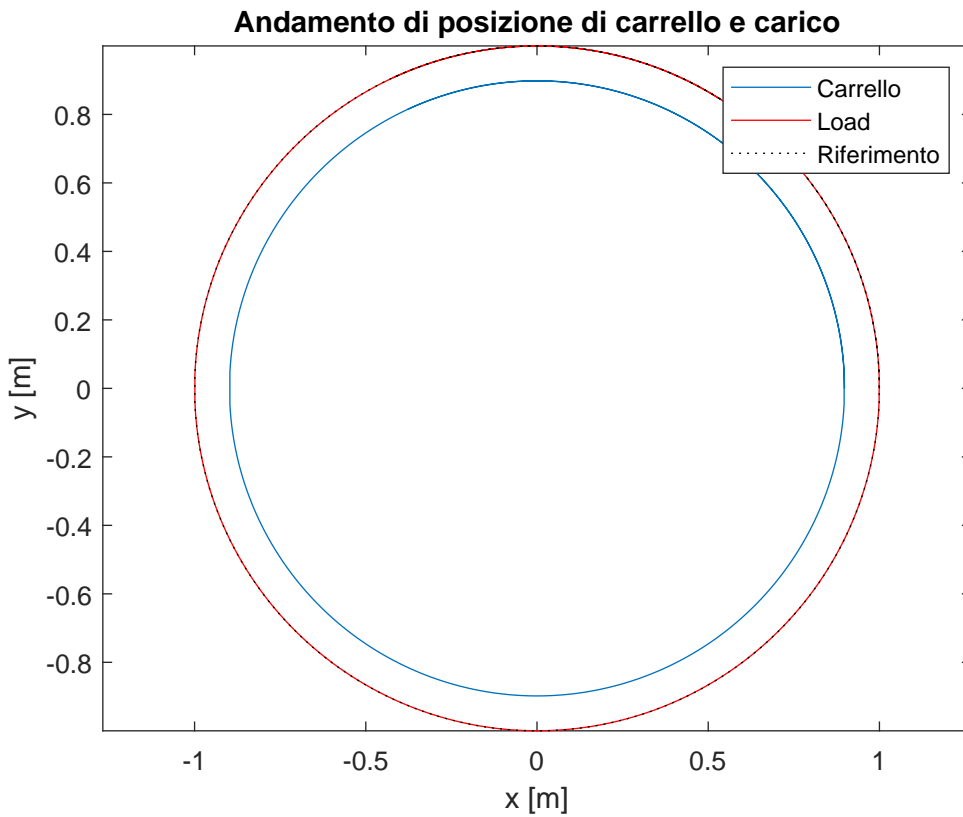


Figura 6.2: Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato

Si vede che la traiettoria eseguita è perfettamente sovrapposta a quella di riferimento. Risulta, tuttavia, molto più utile il confronto tra sistema senza Input Shaping applicato, con Input Shaping tradizionale e con Input Shaping modificato, in Figura 6.3. In questo caso, essendo la circonferenza descrivibile mediante una funzione armonica per l'asse  $x$  e una per l'asse  $y$  la correzione applicata è data dalle equazioni (3.5) e (3.6).

Si è valutato inoltre l'errore di contornatura  $\varepsilon$ : cioè la minima distanza tra la posizio-

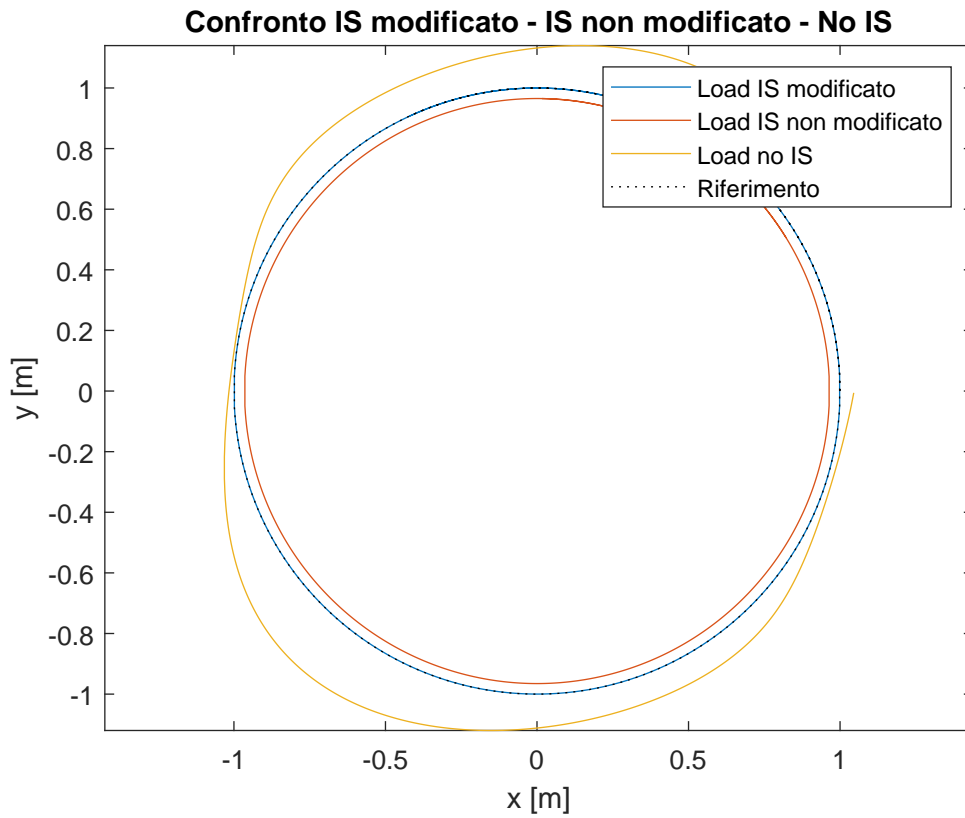


Figura 6.3: Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS

ne desiderata e quella reale, indipendentemente dal tempo necessario a raggiungerla. Tramite la Figura 6.4 è immediato notare la differenza tra gli errori di trackin ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ ) e quello di contornatura  $\varepsilon$ .

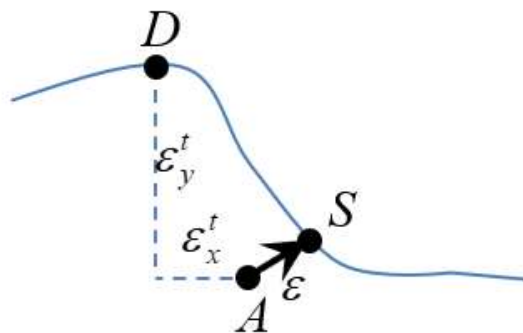


Figura 6.4: Definizione di errore di tracking e di contornatura

Detto  $C$  il centro, per la circonferenza, il calcolo risulta immediato ottenendo:

$$\varepsilon = r - \sqrt{(C_x - A_x)^2 + (C_y - A_y)^2} \quad (6.4)$$

con la coppia di punti  $(C, A)$  rappresentata in Figura 6.5.

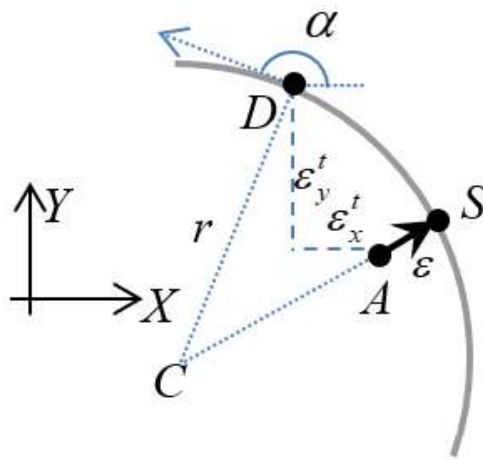


Figura 6.5: Errore di contornatura per una traiettoria circolare

Si vede, in Figura 6.6 che tale errore cala notevolmente con l'applicazione dell'Input Shaping e cala ulteriormente con quello modificato.

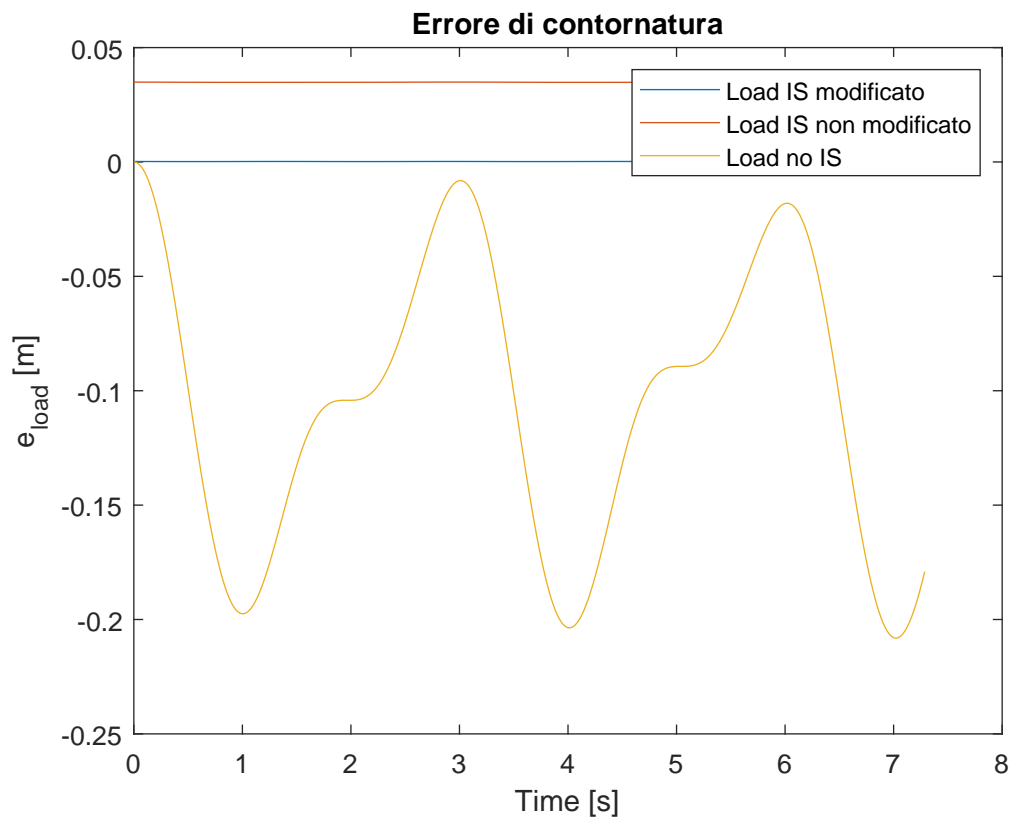


Figura 6.6: Errore di contornatura

I valori massimi (in modulo) sono riportati in Tabella 6.1.

	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\varepsilon$ [m]	0.2	0.035	$2.2 \cdot 10^{-4}$

Tabella 6.1: Massimo errore di contornatura

Si può inoltre notare che, l'inseguimento, grazie alla compensazione di fase non risulta in ritardo, per cui sia la componente  $x_L$  che la componente  $y_L$  inseguono perfettamente il riferimento, come riportato in Figura 6.7, per cui viene a mancare la necessità di incrementare il tempo di azionamento  $T_{az}$ .

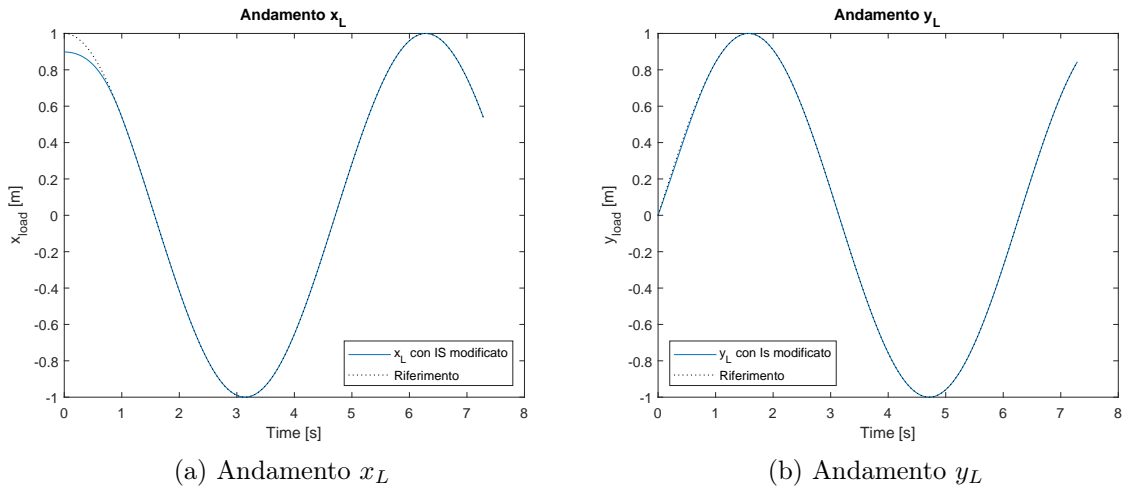


Figura 6.7: Andamento di posizione del carico

Si procede ora variando il raggio della traiettoria circolare mantenendo costante la pulsazione, si ottengono i risultati riportati in Tabella 6.2 per l'errore di contornatura:

$\varepsilon$ [m]	No IS	IS non modificato	IS modificato
$r = 0.1$ [m]	0.021	0.0035	$4.7 \cdot 10^{-7}$
$r = 1.1$ [m]	0.2285	0.0385	$2.9 \cdot 10^{-4}$
$r = 1.5$ [m]	0.3083	0.0528	$7.4 \cdot 10^{-4}$
$r = 3$ [m]	0.5762	0.1105	0.0059
$r = 5$ [m]	0.8163	0.2027	0.0270

Tabella 6.2: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

Da tale tabella, si può notare che nel caso di assenza di Input Shaping e di Input

Shaping tradizionale il massimo errore di contornatura, al variare di  $r$ , si mantiene sullo stesso ordine di grandezza, invece con Input Shaping modificato, risulta essere meno di un decimo rispetto agli altri.

Si mantiene ora costante  $r = 1\text{ m}$  e si varia la pulsazione  $\omega$ : i risultati che si ottengono, in termini di variazione del massimo errore di contornatura sono analoghi al caso precedente.

$\varepsilon [m]$	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\omega = 0.1 [rad/s]$	0.002	$2.4 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$
$\omega = 1.1 [rad/s]$	0.2370	0.0447	$3.9 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.5 [rad/s]$	0.4371	0.1014	0.0025
$\omega = 2 [rad/s]$	0.8761	0.2120	0.0139

Tabella 6.3: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

Oltre i valori di  $r$  riportati in Tabella 6.2 e ai valori di  $\omega$  in Tabella 6.3 è consigliato non andare: l'Input Shaping risulta non essere più efficace in quanto si esce dall'intervallo di piccoli spostamenti, ed essendo esso un metodo appunto lineare, non garantirebbe un buon inseguimento, soprattutto avvicinandosi alla pulsazione di risonanza  $\omega_n$ .

### 6.1.2 Traiettoria ad 8

L'equazione della traiettoria di riferimento è:

$$x_{ref}^2 + 4y_{ref}^4 = 4y_{ref}^2 r^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_{ref}(t) = r \sin(2\omega t) \\ y_{ref}(t) = r \sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.5)$$

Di conseguenza le accelerazioni in input al carrello risultano:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = -4r\omega^2 \sin(2\omega t) \\ \ddot{y}_p = -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.6)$$

Imponendo come condizioni iniziali:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x(0) \\ \dot{\theta}_y(0) \\ \theta_x(0) \\ \theta_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

mediante ZV shaper modificato, l'andamento di posizione che si ottiene è riportato in Figura 6.8. Come per la traiettoria circolare l'inseguimento risulta davvero buono,

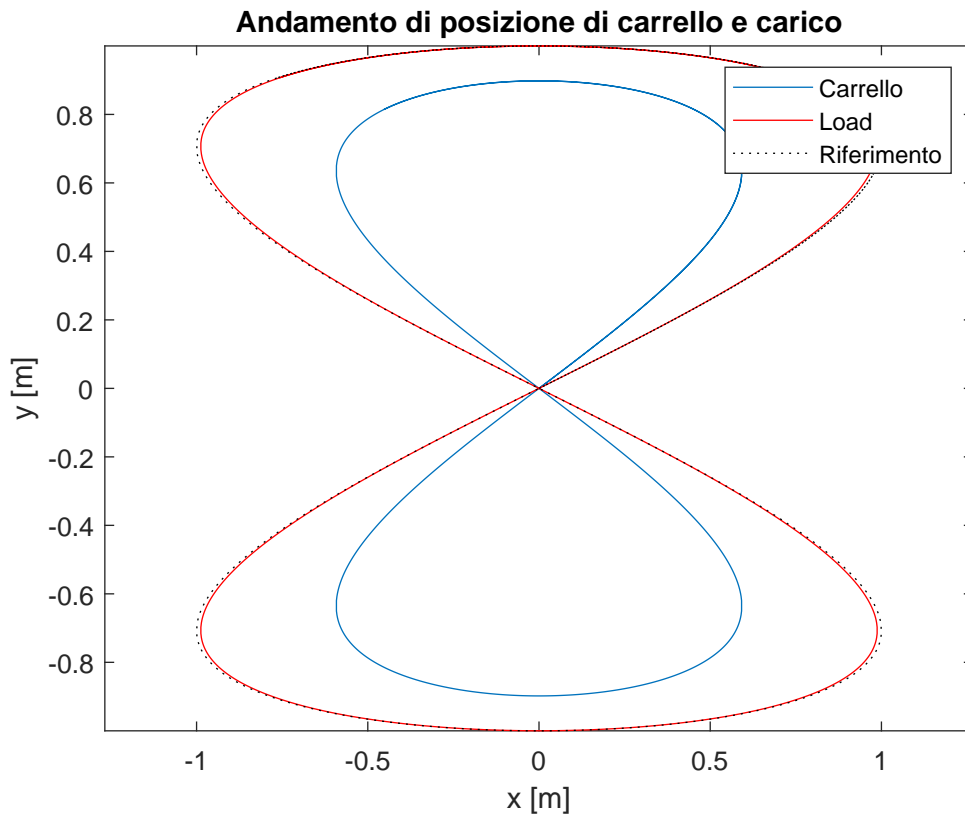


Figura 6.8: Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato

ma è più esplicitivo il confronto tra i tre metodi, riportato in Figura 6.9.

Si nota, che senza l'applicazione dello ZV shaper, la traiettoria risulta molto distorta rispetto al riferimento, con ZV shaper tradizionale essa mantiene la forma di riferimento ma risulta più piccola, mentre con ZV shaper modificato si ha il miglior inseguimento.

In questo caso, essendo la anche la traiettoria ad 8 descrivibile mediante una funzione armonica per l'asse  $x$  e una per l'asse  $y$  la correzione applicata è data sempre dalle

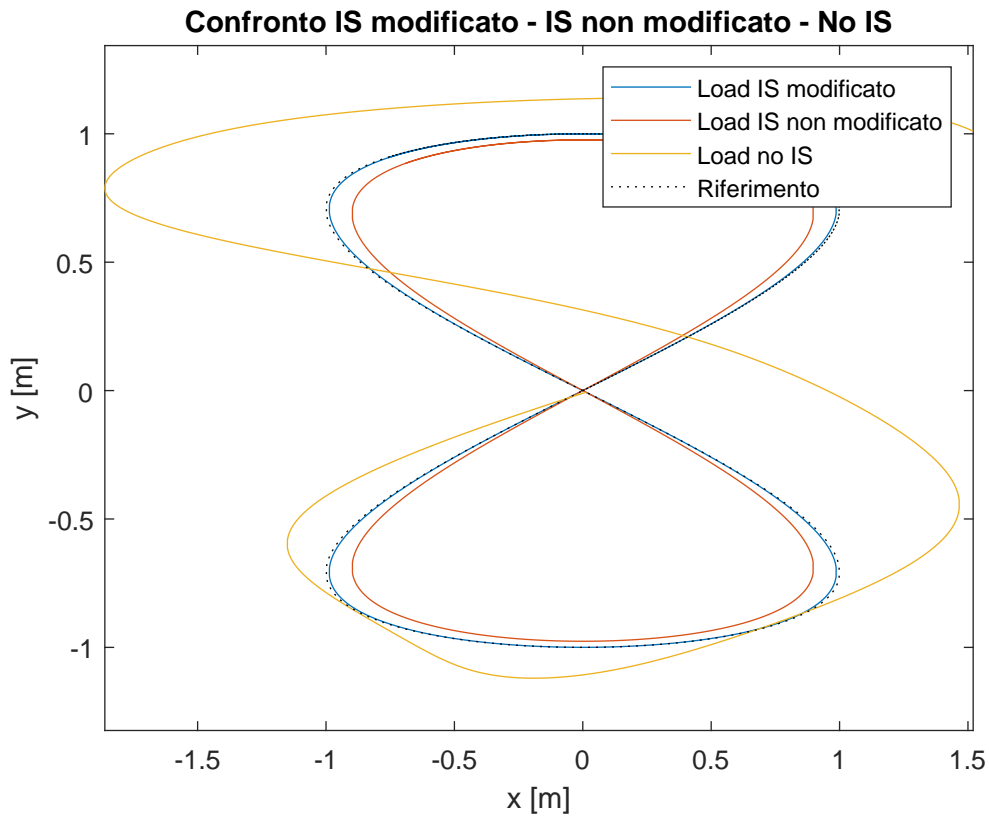


Figura 6.9: Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS

equazioni (3.5) e (3.6).

Si è valutato inoltre l'errore di contornatura  $\varepsilon$ ; in tal caso non esiste una formulazione analitica per il calcolo di questo che quindi è stato ottenuto numericamente mediante il calcolo della distanza tra la curva di riferimento e quella ottenuta. I risultati sono rappresentati in Figura 6.10, mentre i valori massimi (in modulo) di  $\varepsilon$  sono riportati in Tabella 6.4.

	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\varepsilon [m]$	1.7195	0.1853	0.0169

Tabella 6.4: Massimo errore di contornatura

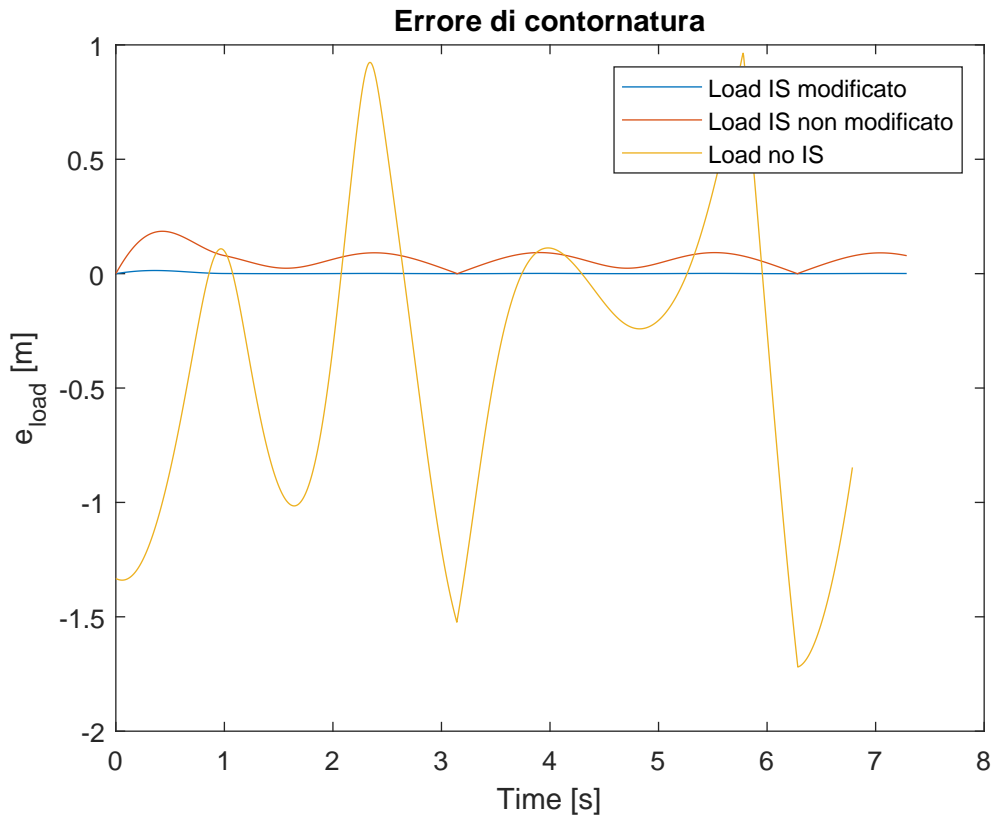
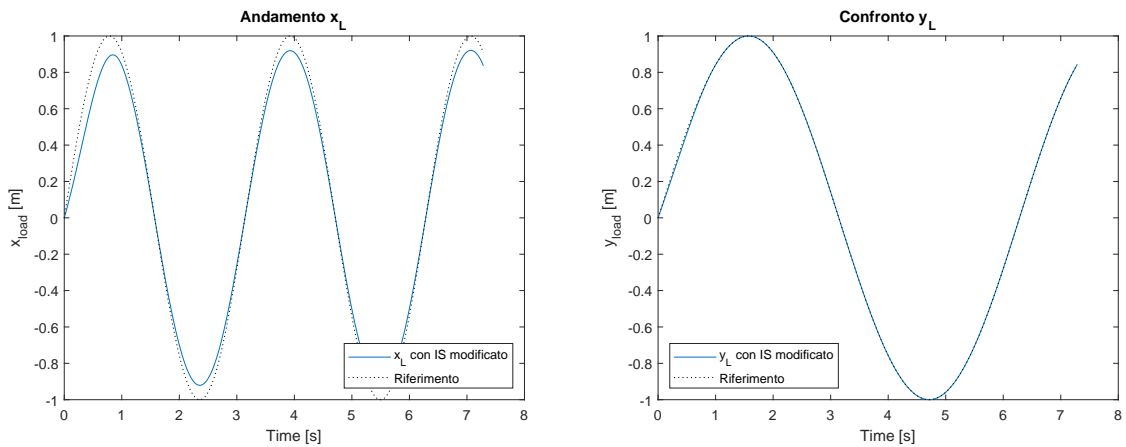


Figura 6.10: Errore di contornatura

Si può inoltre notare che, l'inseguimento, grazie alla compensazione di fase non risulta in ritardo, per cui sia la componente  $x_L$  che la componente  $y_L$  inseguono perfettamente il riferimento, come riportato in Figura 6.11, per cui viene a mancare la necessità di incrementare il tempo di azionamento  $T_{az}$ , come per la circonferenza.



(a) Andamento  $x_L$

(b) Andamento  $y_L$

Figura 6.11: Andamento di posizione del carico



Si procede ora variando il raggio della traiettoria ad 8, come fatto per la circonferenza, mantenendo costante la pulsazione, si ottengono i risultati riportati in Tabella 6.5 per l'errore di contornatura: Si possono fare considerazioni analoghe al caso della

$\varepsilon [m]$	No IS	IS non modificato	IS modificato
$r = 0.1 [m]$	0.1835	0.0185	0.0014
$r = 1.1 [m]$	1.8671	0.2039	0.0152
$r = 1.5 [m]$	2.3920	0.2788	0.0207

Tabella 6.5: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

traiettoria circolare, sottolineando che con IS modificato si ha un errore massimo di contornatura di due ordini di grandezza inferiori rispetto al caso senza shaper.

Si mantiene ora costante  $r = 1 m$  e si varia la pulsazione  $\omega$ : i risultati che si ottengono, in termini di variazione del massimo errore di contornatura sono analoghi al caso precedente: Anche in questo caso, è stato possibile individuare i valori massimi

$\varepsilon [m]$	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\omega = 0.1 [rad/s]$	0.1129	0.0008	$5.4 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.1 [rad/s]$	1.9705	0.2387	0.0182
$\omega = 1.3 [rad/s]$	1.9177	0.3641	0.0295

Tabella 6.6: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

di raggio e ampiezza utilizzabili, come riportato in Tabella 6.5 e in Tabella 6.6. Rispetto alla traiettoria circolare, essi risultano inferiori in quanto la componente in  $x$  viene sollecitata con una frequenza doppia rispetto a  $\omega$  imposta, per cui il sistema raggiunge più facilmente la pulsazione di risonanza.

### 6.1.3 Cardioide

L'equazione della traiettoria di riferimento è:

$$(x_{ref}^2 + y_{ref}^2)^2 = -4rx_{ref}(x_{ref}^2 + y_{ref}^2) + 4r^2y_{ref}^2 \rightarrow \begin{cases} x_{ref}(t) = 2r(1 - \cos(\omega t)) \cos(\omega t) \\ y_{ref}(t) = 2r(1 - \cos(\omega t)) \sin(\omega t) \end{cases} \quad (6.8)$$

Di conseguenza le accelerazioni in input al carrello risultano:

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = 2r\omega^2(\cos(\omega t)(2\cos(\omega t) - 1) - 2\sin(\omega t)^2) \\ \ddot{y}_p = 2r\omega^2\sin(\omega t)(4\cos(\omega t) - 1) \end{cases} \quad (6.9)$$

Imponendo come condizioni iniziali:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x(0) \\ \dot{\theta}_y(0) \\ \theta_x(0) \\ \theta_y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

mediante ZV shaper modificato, l'andamento di posizione che si ottiene è riportato in Figura 6.12.

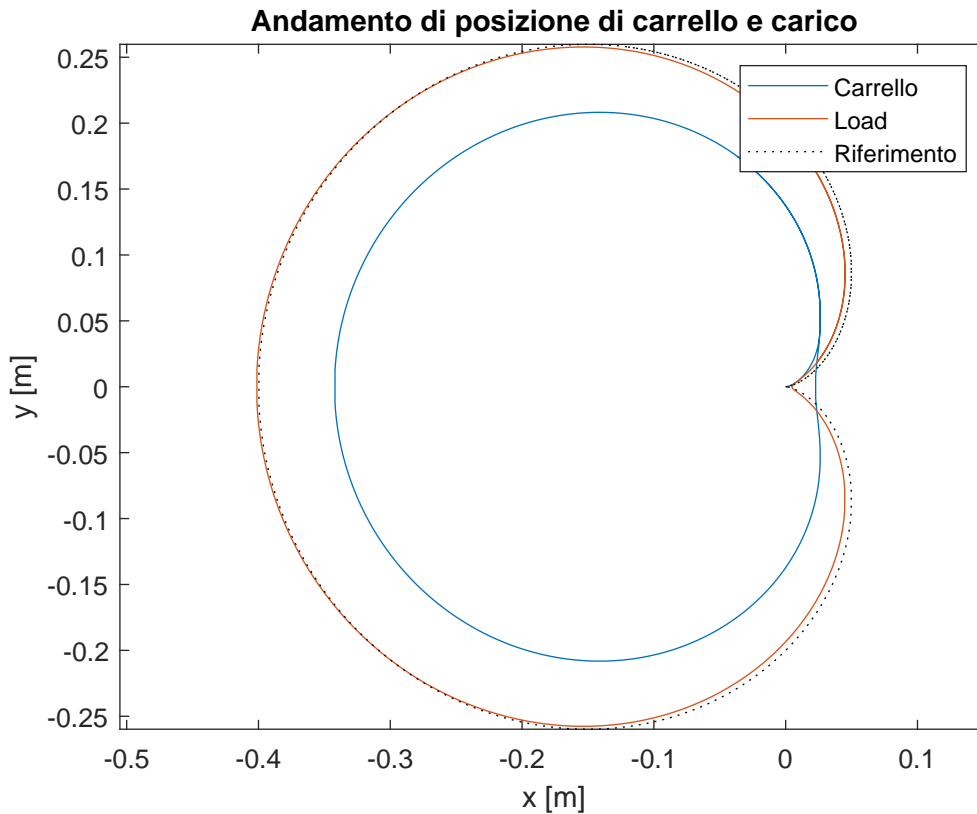


Figura 6.12: Andamento di posizione di carrello e carico con ZV shaper modificato

Si può, come nei casi precedenti, effettuare il confronto tra i tre diversi metodi di definizione degli ingressi, ottenendo gli andamenti in Figura 6.13.

In questo caso, la funzione non risulta immediatamente riconducibile ad una somma

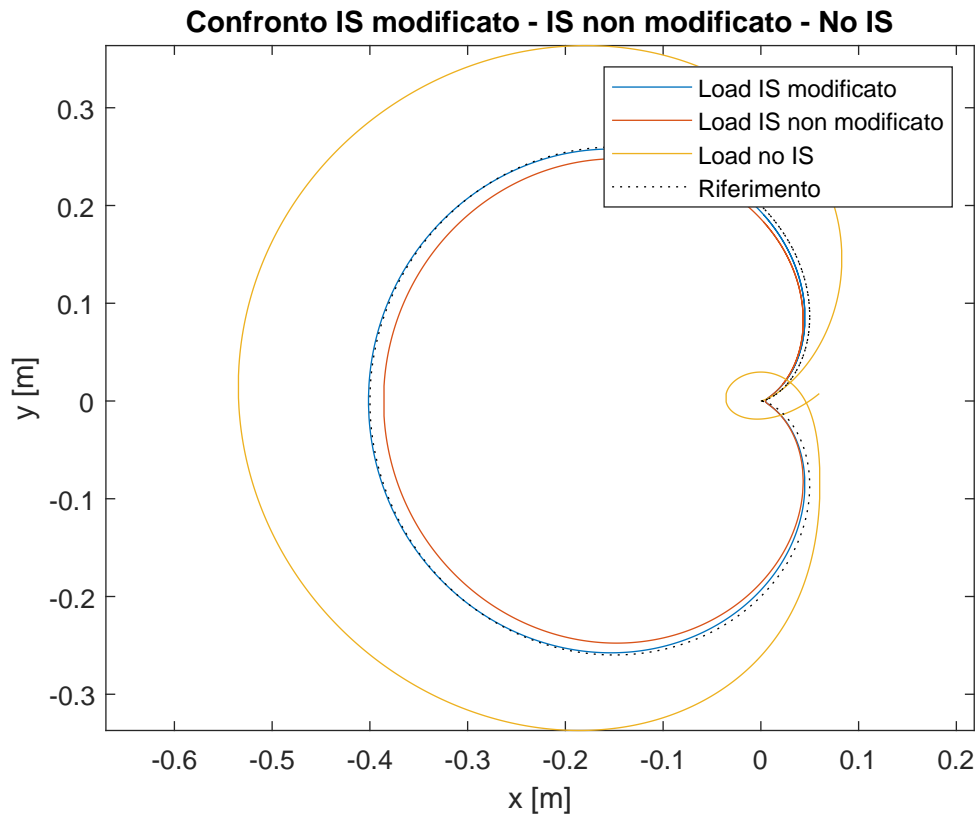


Figura 6.13: Confronto tra IS modificato, IS non modificato e no IS

di armoniche, se non tramite *trasformata di Fourier*, per cui è necessario modificare l'Input Shaping mediante la funzione di trasferimento correttiva in (3.14), con un'opportuna scelta dei poli in alta frequenza al fine di renderla propria ma non introdurre perturbazioni. Tale funzione permette di ottenere una correzione sia in modulo che in fase, migliorando notevolmente l'inseguimento.

L'errore di contornatura, come per la traiettoria ad 8 viene calcolato mediante la distanza tra le curve e si ottengono gli andamenti in Figura 6.14.

Si vede già che viene ridotto di un ordine di grandezza nel caso di applicazione di ZV shaper e cala ulteriormente con la versione modificata. I valori massimi sono riportati in Tabella 6.7.

	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\varepsilon$ [m]	0.1426	0.014	0.01

Tabella 6.7: Massimo errore di contornatura

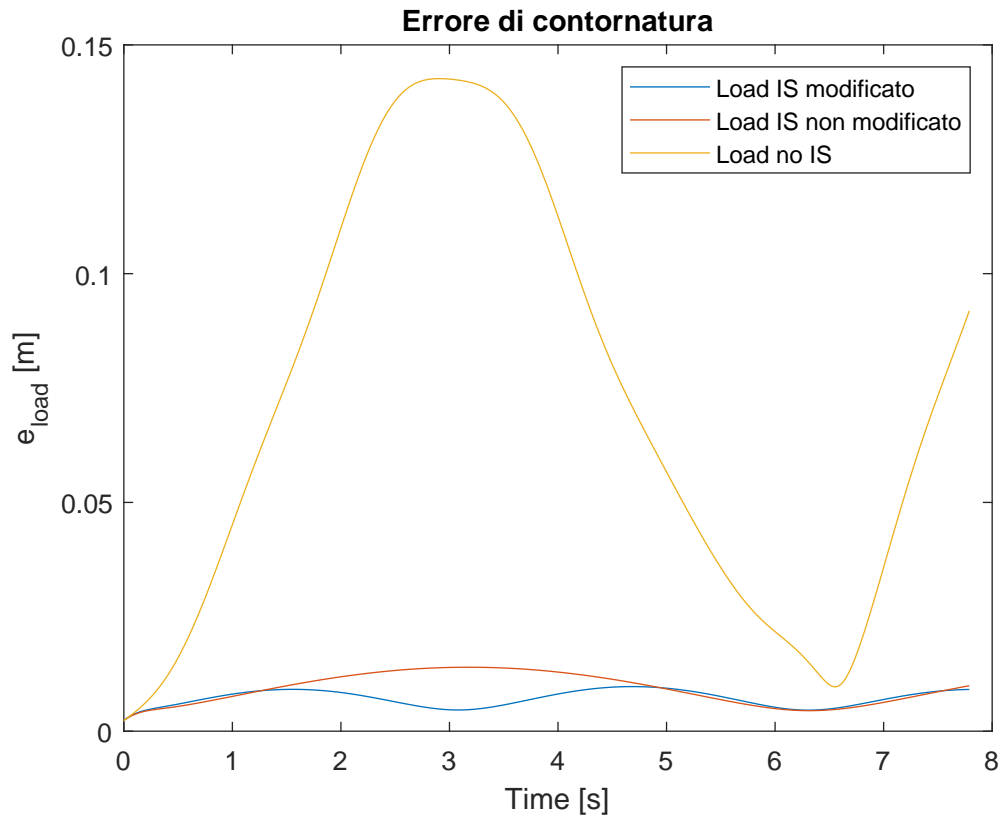
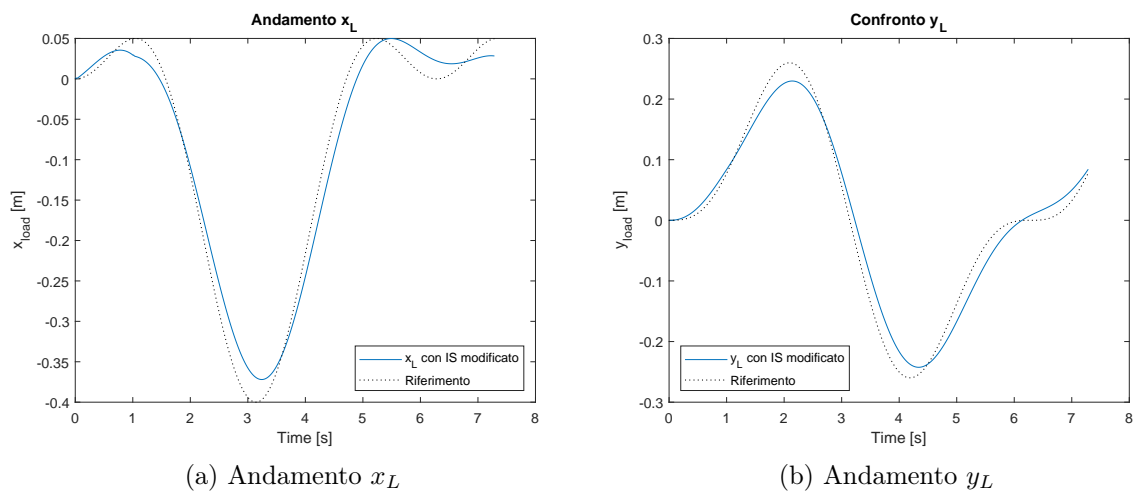


Figura 6.14: Errore di contornatura

Come detto precedentemente, si nota anche una riduzione del ritardo di inseguimento, ciò è dovuto alla compensazione della fase nell'Input Shaping modificato. È possibile visualizzare ciò in Figura 6.15.



(a) Andamento  $x_L$

(b) Andamento  $y_L$

Figura 6.15: Andamento di posizione del carico

Si procede ora variando il raggio della traiettoria ad 8, come fatto per la circonferenza,

mantenendo costante la pulsazione, si ottengono i risultati riportati in Tabella 6.8 per l'errore di contornatura: All'aumentare di  $r$  si nota che nel caso di assenza di

$\varepsilon [m]$	No IS	IS non modificato	IS modificato
$r = 0.5 [m]$	0.7026	0.0738	0.0523
$r = 1 [m]$	1.3541	0.1735	0.1216
$r = 1.5 [m]$	1.9333	0.3252	0.2205

Tabella 6.8: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

Input Shaping tale errore è sempre un ordine di grandezza maggiore rispetto agli altri casi, mentre quello dell'Input Shaping tende ad essere il doppio rispetto a quello modificato.

Si mantiene ora costante  $r = 0.1 m$  e si varia la pulsazione  $\omega$ : i risultati che si ottengono, in termini di variazione del massimo errore di contornatura sono analoghi al caso precedente: Anche in questo caso, è stato possibile individuare i valori massimi

$\varepsilon [m]$	No IS	IS non modificato	IS modificato
$\omega = 0.1 [rad/s]$	0.01	0.0002	0.0001
$\omega = 1.1 [rad/s]$	0.1756	0.0168	0.0116
$\omega = 1.3 [rad/s]$	0.2485	0.0230	0.00158

Tabella 6.9: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

di raggio e ampiezza utilizzabili, come riportato in Tabella 6.8 e in Tabella 6.9, oltre i quali l'Input Shaping non risulta più efficace.

#### 6.1.4 ZVD Shaper

Si decide di utilizzare uno ZVD shaper, i cui coefficienti sono dati da (2.7). Esso, come descritto nella Sezione 2.3, permette di una maggior robustezza (a discapito dell'aumento del tempo di azionamento) alle variazioni parametriche.

La lunghezza nominale è  $h = 1 m$ , quindi si decide di valutare i coefficienti correttivi con una riduzione del 10% di essa, considerandola dunque pari a  $h = 0.9 m$ . Questo significa che anche la stima della frequenza di risonanza  $\omega_n$  risulta non corretta. Si vuole, dunque, testare fino a che incertezza è possibile applicare la combinazione di Input Shaping modificato con uno ZVD shaper, confrontandolo con lo ZV shaper.

Utilizzando come riferimento la traiettoria circolare (6.1), con raggio  $r = 1$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , si ottengono gli andamenti in Figura 6.16.

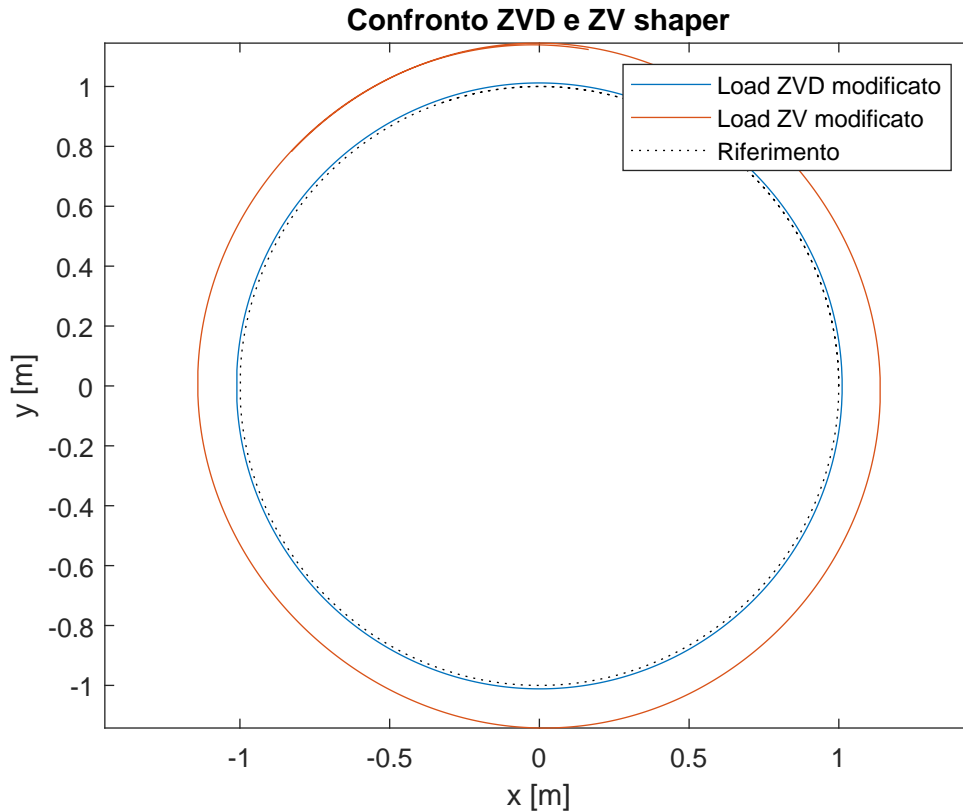


Figura 6.16: Confronto ZVD e ZV shaper modificati

Si nota che l'andamento del carico con ZV shaper presenta un errore di contornatura, dovuto all'incertezza su  $h$  pari a  $\varepsilon = 0.1530 \text{ m}$ , mentre quello con ZVD shaper risulta essere di un ordine di grandezza inferiore, cioè pari a  $\varepsilon = 0.0111 \text{ m}$ , il che conferma la robustezza di quest'ultimo.

Aumentando ulteriormente l'incertezza sul parametro  $h$ , ossia riducendolo del 20% rispetto al valore nominale, si nota ancora, che lo ZVD shaper modificato è in grado di fornire un buon inseguimento con un errore di contornatura massimo pari a  $\varepsilon = 0.0168 \text{ m}$  contro lo ZV shaper che presenta  $\varepsilon = 0.1598$ .

Lo ZVD shaper modificato, risulta ovviamente migliore anche dello ZVD shaper tradizionale, il quale di solito è sufficientemente robusto a variazioni parametriche del 3 ÷ 4%. Con una variazione di  $h$  del 10% infatti, i risultati che fornisce l'Input Shaping non corretto non sono soddisfacenti, come si può visualizzare in Figura 6.17.

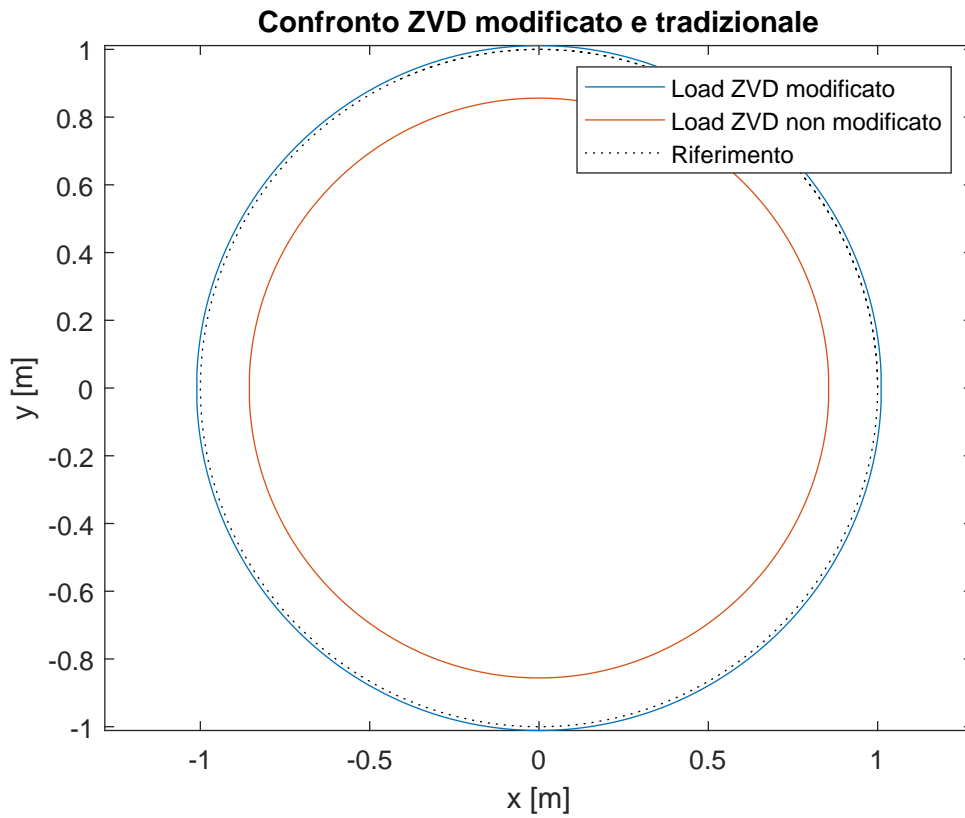


Figura 6.17: Confronto ZVD modificato e tradizionale

Il massimo errore di contornatura nel caso di ZVD shaper tradizionale risulta pari a  $\varepsilon = 0.1538 \text{ m}$ , cioè circa dieci volte più grande rispetto a quello dello shaper robusto con modifica inserita.

Si ottengono risultati analoghi nel caso di traiettorie differenti (e.g. traiettoria ad 8, cardioidi).

## 6.2 Controllo ottimo

Sfruttando alcune delle traiettorie implementate per l'analisi dell'Input Shaping, si procede a verificare la bontà del controllo ottimo, evidenziando gli errori di contornatura che si ottengono ed effettuando un confronto con il metodo precedente.

### 6.2.1 Traiettoria circolare

Si sfrutta la traiettoria circolare descritta mediante (6.1), mantenendo  $r = 1 \text{ m}$  e  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . L'andamento di posizione che si ottiene è riportato in Figura 6.18.

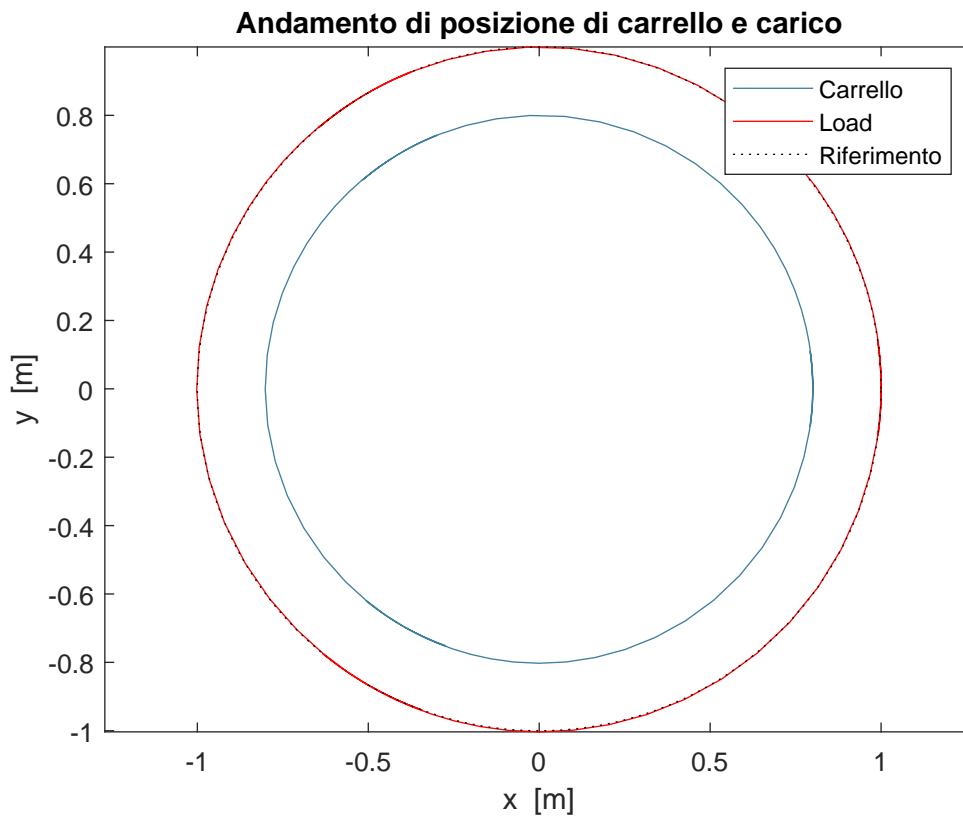


Figura 6.18: Andamento di posizione di carrello e carico con controllo ottimo

L'errore di contornatura, in Figura 6.19, è stato ottenuto mediante (6.4) e il suo valore massimo in modulo risulta:  $\varepsilon = 3.45 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

Mantenendo costante  $r = 1 \text{ m}$  e variando  $\omega$ , il che significa far muovere il sistema a velocità differenti, si ottengono i seguenti errori massimi di contornatura, in Tabella 6.10:



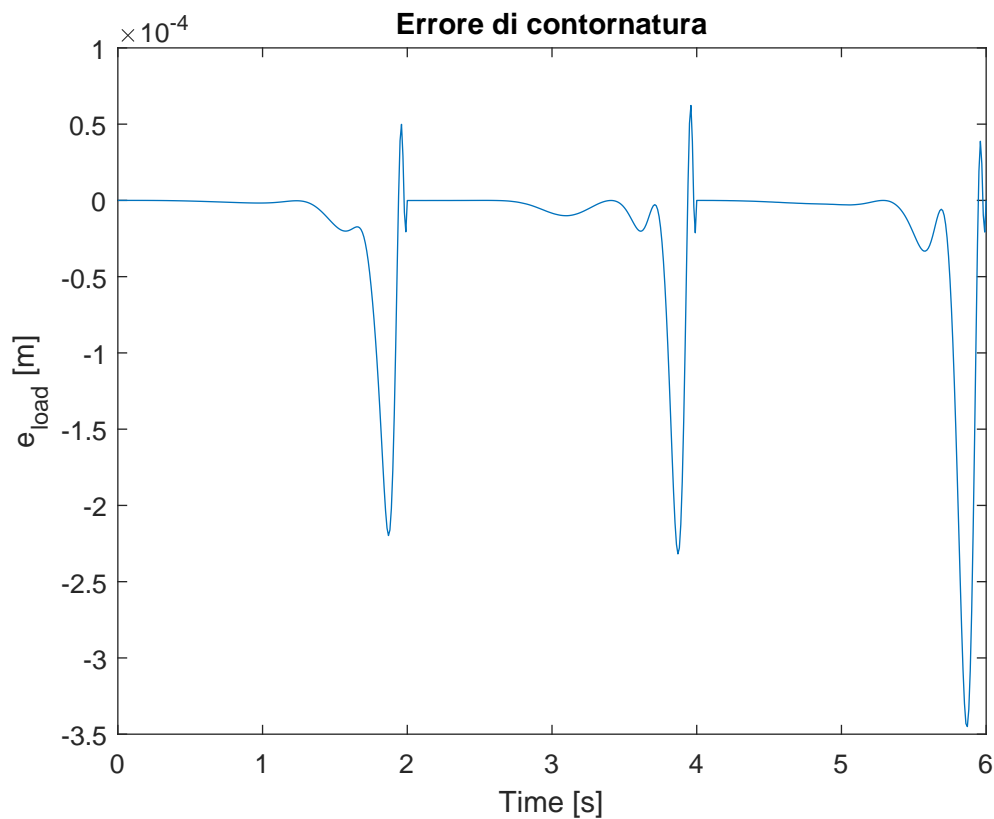


Figura 6.19: Errore di contornatura

	$\varepsilon [m]$
$\omega = 0.1 [rad/s]$	$6.9 \cdot 10^{-6}$
$\omega = 1.1 [rad/s]$	$4.1 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.5 [rad/s]$	0.0043
$\omega = 2 [rad/s]$	0.0597

Tabella 6.10: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

Risulta interessante ora, effettuare un confronto tra i due metodi che permettono di ottenere i risultati migliori: l'input shaping modificato e il controllo ottimo. Imponendo le medesime condizioni iniziali, si ottengono tali andamenti di posizione, in Figura 6.20.

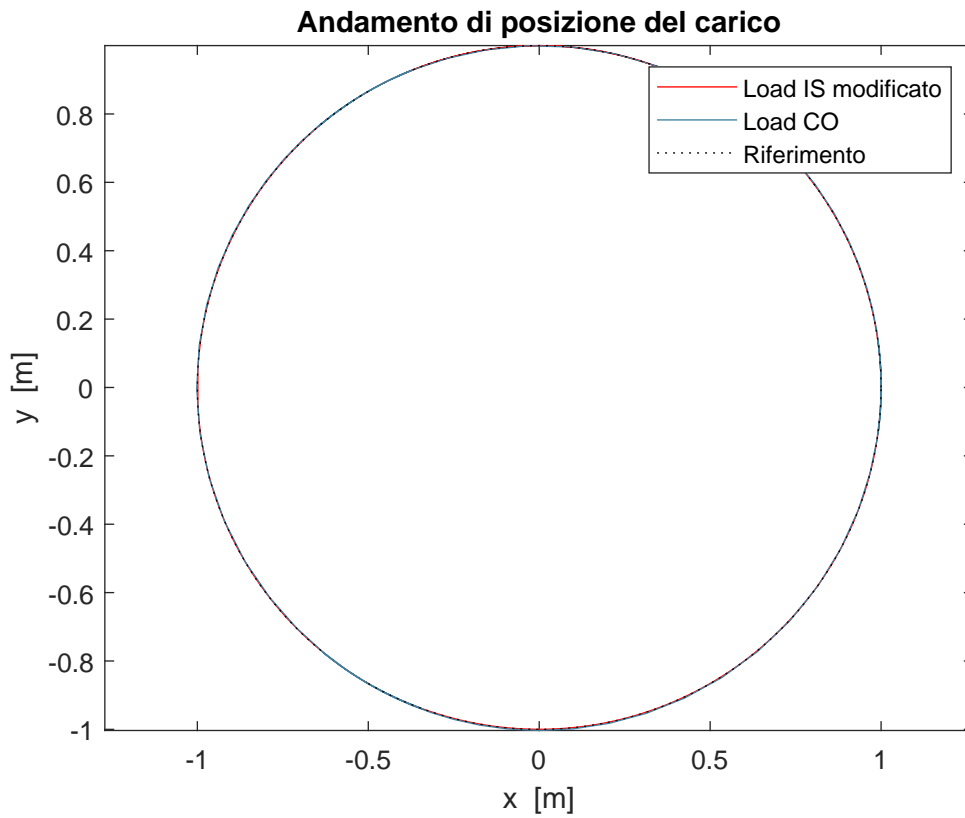


Figura 6.20: Confronto andamento di posizione con IS e CO

I due metodi, sono pressoché equivalenti, tuttavia, tramite il confronto sull'errore di contornatura, in Figura 6.21 è possibile notare che l'Input Shaping risulta migliore in quanto  $\varepsilon_{maxIS} = 2.2 \cdot 10^{-4} m$ , quindi circa tre volte più piccolo rispetto a quello che si ottiene con il controllo ottimo.

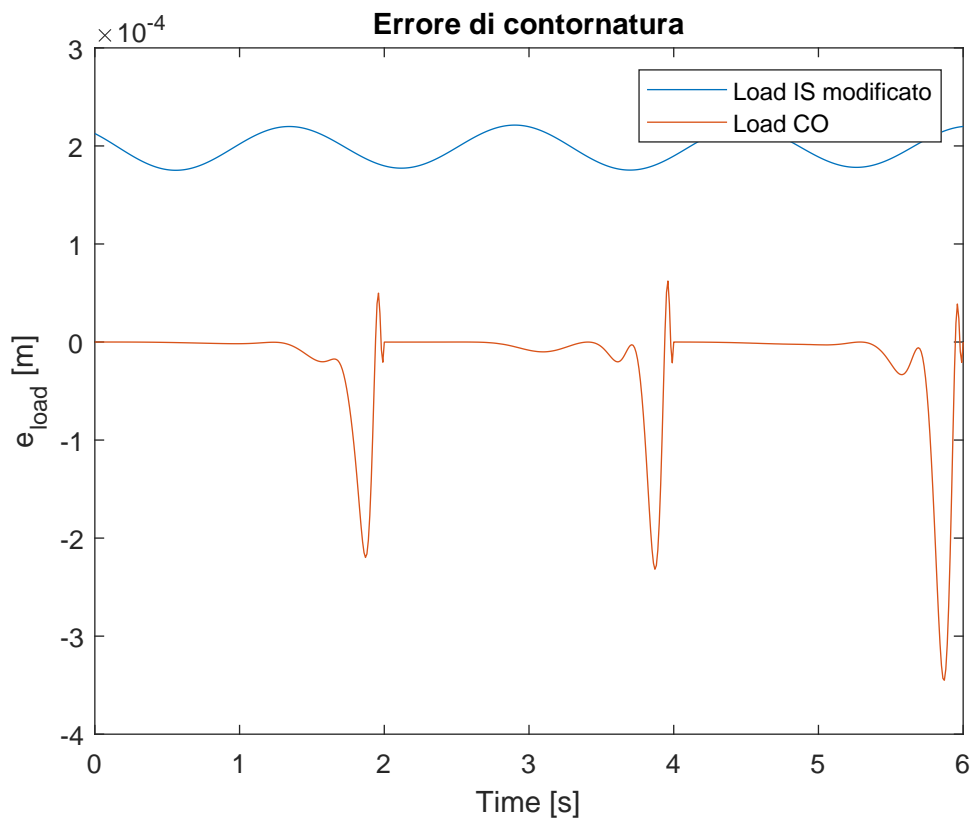


Figura 6.21: Errore di contornatura

### 6.2.2 Traiettoria ad 8

Si sfrutta la traiettoria ad 8 descritta mediante (6.5), mantenendo  $r = 1 \text{ m}$  e  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . L'andamento di posizione che si ottiene è riportato in Figura 6.22. L'errore di contornatura, in Figura 6.23, è stato ottenuto numericamente, calcolando la distanza tra due curve come nel caso di Input Shaping e il suo valore massimo in modulo risulta:  $\varepsilon = 0.021 \text{ m}$ .

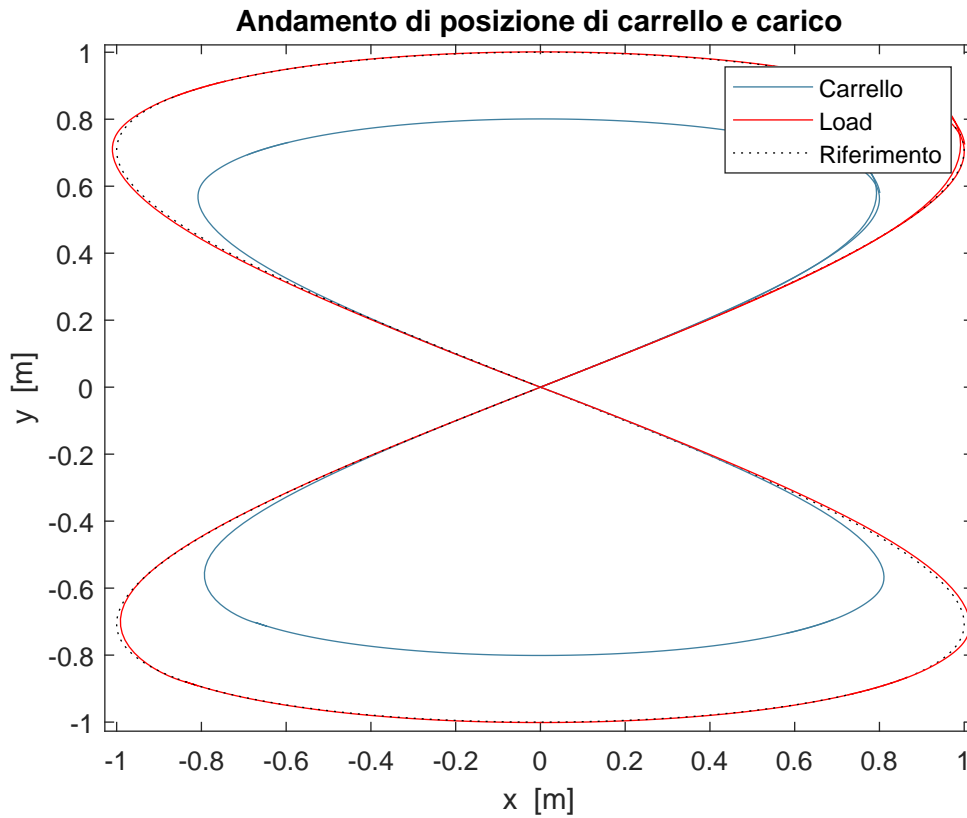


Figura 6.22: Andamento di posizione di carrello e carico con controllo ottimo

Mantenendo costante  $r = 1 \text{ m}$  e variando  $\omega$ , il che significa far muovere il sistema a velocità differenti, si ottengono i seguenti errori massimi di contornatura, in Tabella 6.11:

	$\varepsilon \text{ [m]}$
$\omega = 0.1 \text{ [rad/s]}$	$5.4 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.1 \text{ [rad/s]}$	0.3126
$\omega = 1.3 \text{ [rad/s]}$	0.04871

Tabella 6.11: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

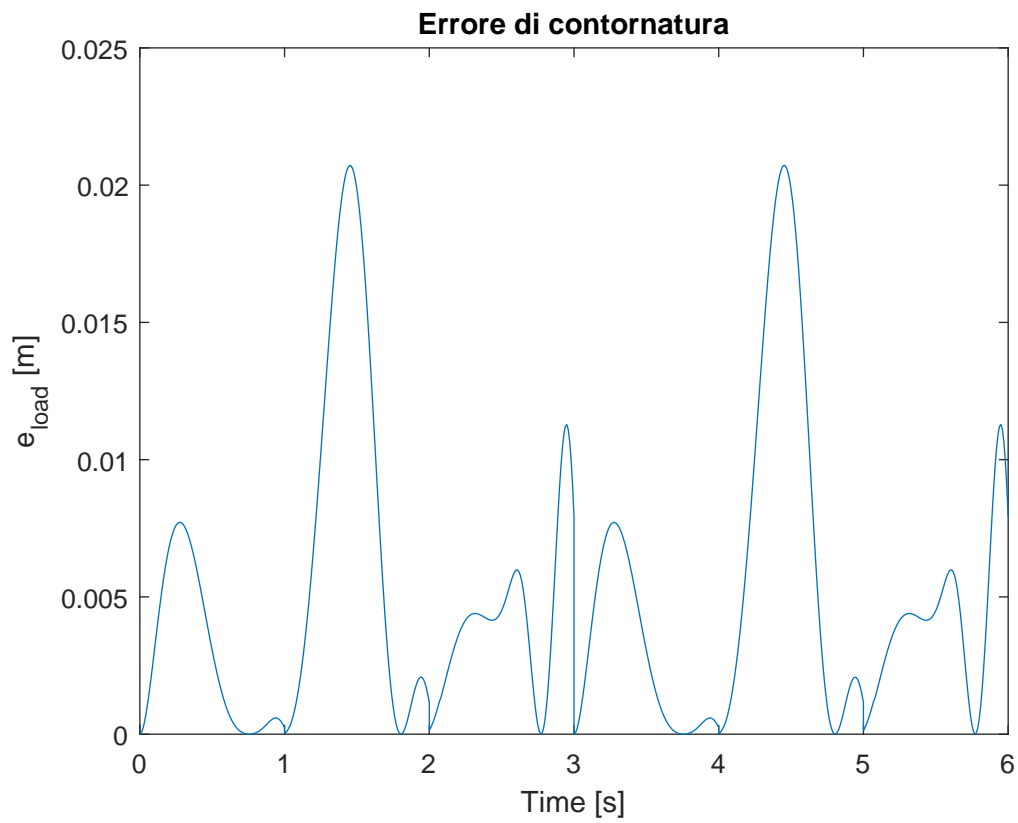


Figura 6.23: Errore di contornatura

Effettuando un confronto tra i due metodi che permettono di ottenere i risultati migliori: l'input shaping modificato e il controllo ottimo, si ottengono gli andamenti di posizione in Figura 6.24.

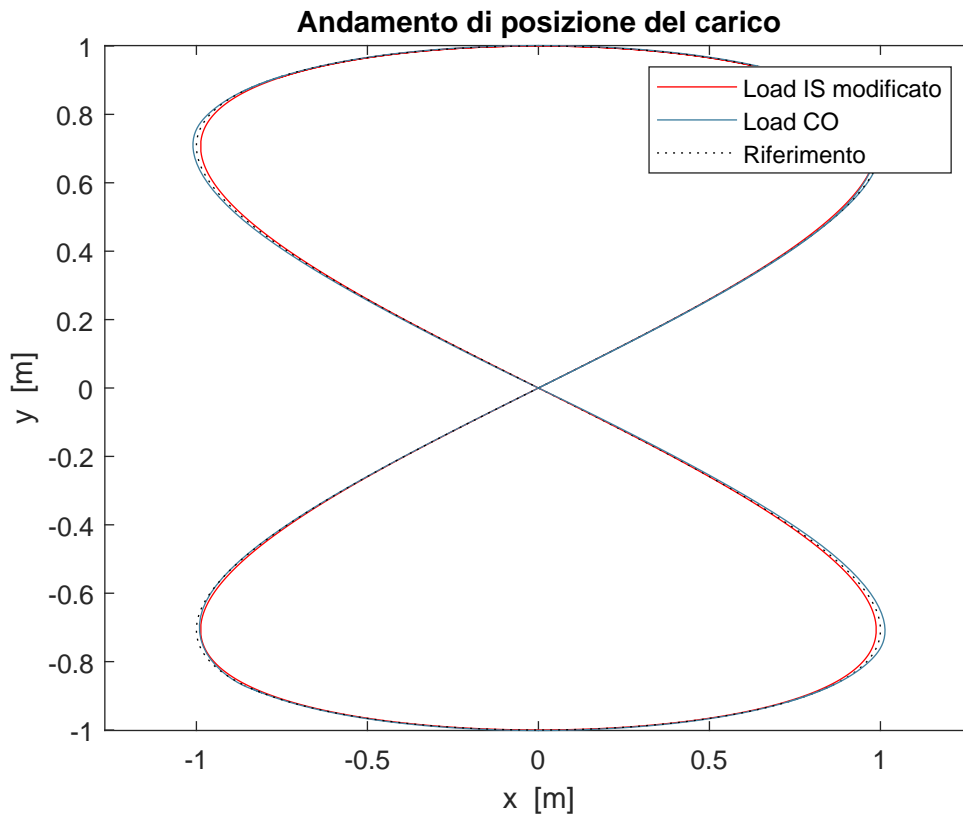


Figura 6.24: Confronto andamento di posizione con IS e CO

Come nel caso della traiettoria circolare, è possibile capire quale metodo permetta un inseguimento migliore, tramite il confronto degli errori di contornatura, in Figura 6.25.

Anche in questo caso, l'Input Shaping modificato risulta essere migliore, in quanto permette di ottenere  $\varepsilon_{max_{IS}} = 0.0169 \text{ m}$ , cioè quasi la metà rispetto al valore massimo ottenuto con il controllo ottimo.

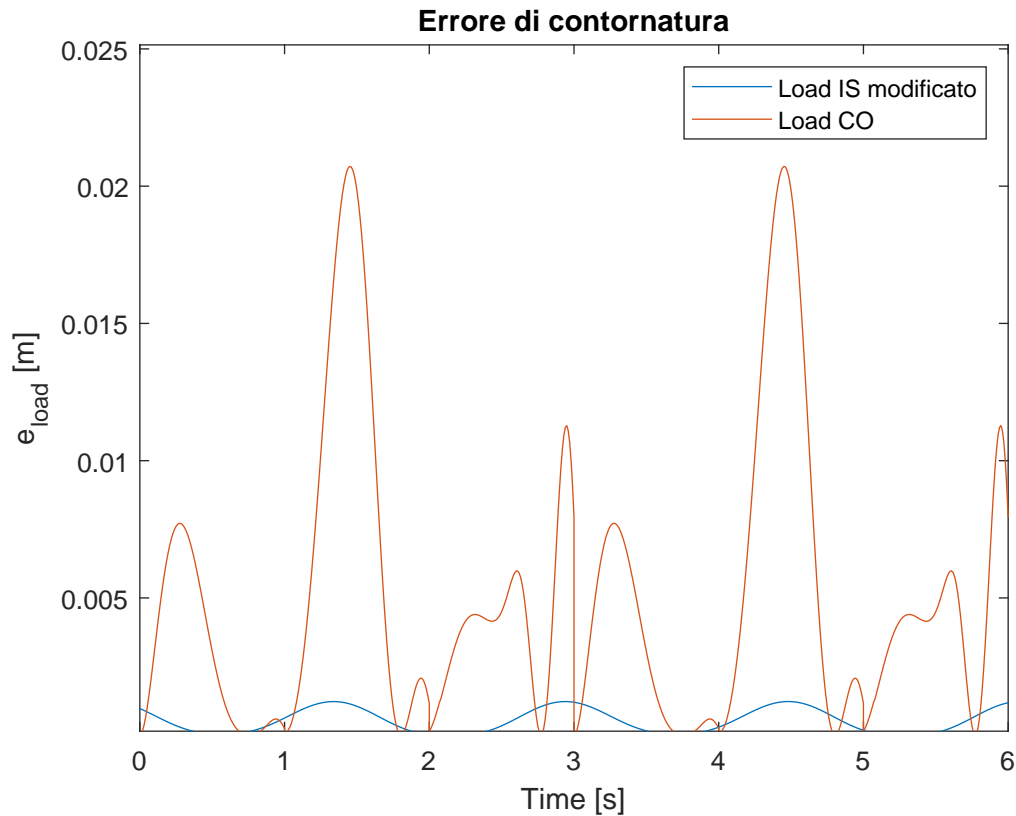


Figura 6.25: Errore di contornatura

## 6.3 Wave Based Control

Come fatto nelle sezioni precedenti, si procede all'analisi di alcune traiettorie esplicative, al fine di analizzare la bontà del metodo descritto nelle Sezioni 4.2 e 4.3.

In particolare, si analizzerà la traiettoria circolare, quella ad 8 e la cardioide. Per ognuna di queste si valuteranno diverse ampiezze e diverse pulsazioni, al fine di determinare quale sia l'intervallo di validità di questo metodo. Come ulteriore esempio si riporterà anche la traiettoria rettangolare.

Infine verrà effettuato un confronto tra i tre metodi descritti per determinarne il migliore.

### 6.3.1 Traiettoria circolare

La traiettoria di riferimento ha equazione (6.1), mantenendo  $r = 1 \text{ m}$  e  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ . L'andamento di posizione di carrello e carico che si ottiene mediante WBC in catena aperta modificato è riportato in Figura 6.26.

L'errore di contornatura, valutato mediante (6.4), riportato in Figura 6.27, risulta aver valore massimo in modulo pari a  $\varepsilon = 5.6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ .

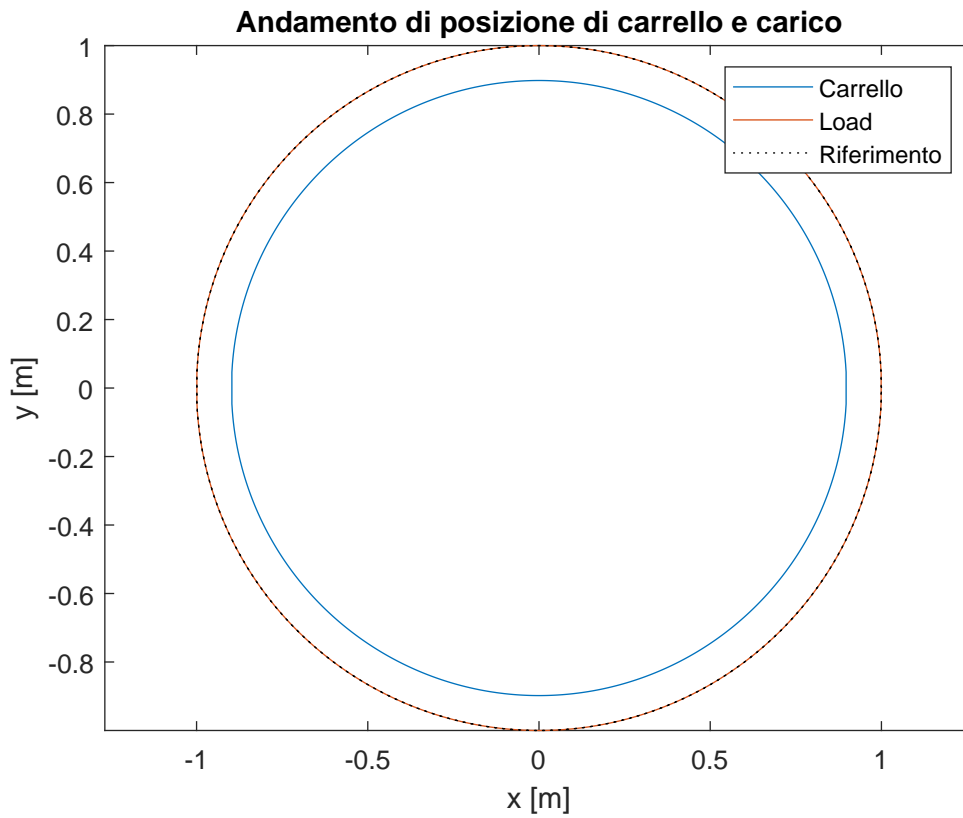


Figura 6.26: Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato

Esso risulta molto inferiore rispetto al medesimo controllo non corretto che porta ad avere come valore massimo in modulo  $\varepsilon = 0.0232 \text{ m}$ .

Dalla Figura 6.28 si vede come tale modifica permetta di ottenere risultati decisamente migliori in termini di inseguimento della traiettoria.



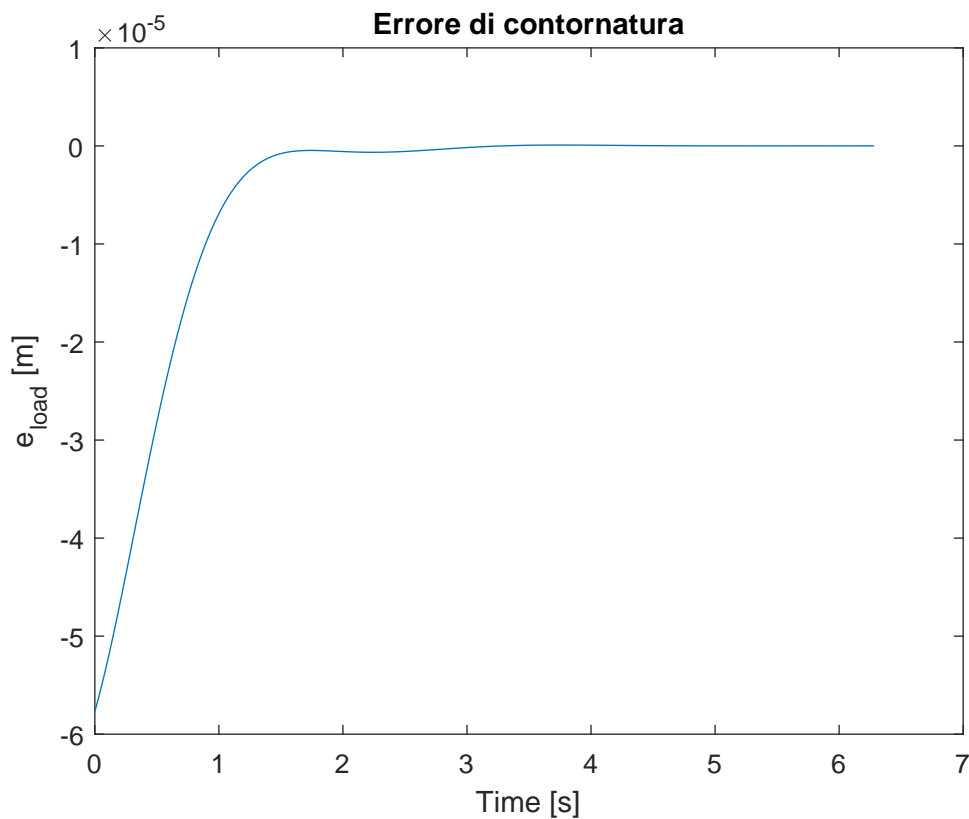
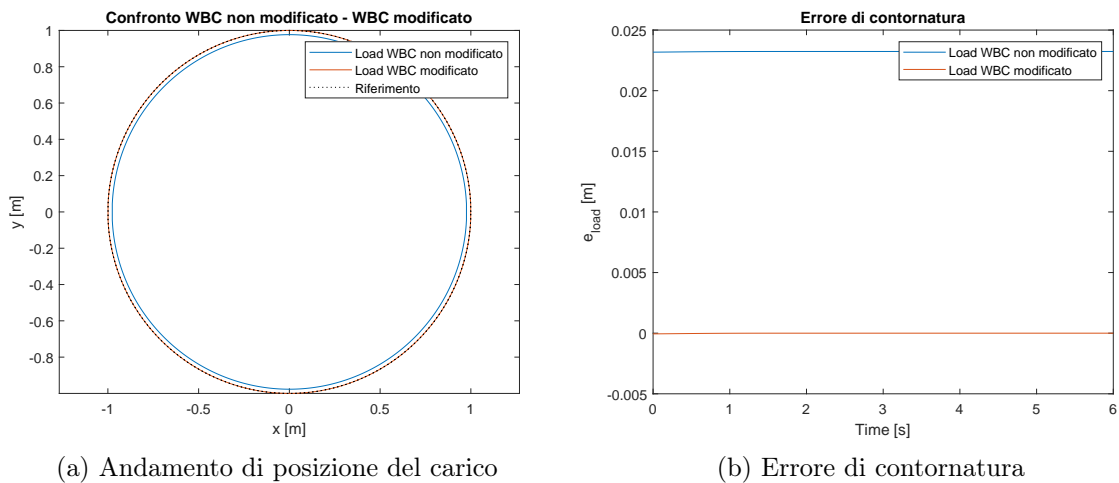


Figura 6.27: Errore di contornatura



(a) Andamento di posizione del carico

(b) Errore di contornatura

Figura 6.28: Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato

Mantenendo costante la pulsazione  $\omega$  e variando il raggio  $r$ , si ottengono i valori di  $\varepsilon_{max}$  riportati in Tabella 6.12.

Si nota quindi che con la modifica attiva, l'errore risulta almeno tre ordini di grandezza minore.

$\varepsilon$ [m]	WBC non modificato	WBC modificato
$r = 0.1$ [m]	0.0023	$5.8 \cdot 10^{-6}$
$r = 1.1$ [m]	0.0255	$6.4 \cdot 10^{-5}$
$r = 1.5$ [m]	0.0348	$8.7 \cdot 10^{-5}$
$r = 3$ [m]	0.0695	$1.7 \cdot 10^{-4}$
$r = 5$ [m]	0.1159	$2.9 \cdot 10^{-4}$

Tabella 6.12: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

Analogamente, mantenendo costante  $r = 1$  m e variando la pulsazione  $\omega$ , si ottengono i seguenti errori massimi di contornatura:

$\varepsilon$ [m]	WBC non modificato	WBC modificato
$\omega = 0.1$ [rad/s]	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$8.4 \cdot 10^{-12}$
$\omega = 1.1$ [rad/s]	0.0325	$6.2 \cdot 10^{-5}$
$\omega = 1.5$ [rad/s]	0.09624	0.0015
$\omega = 2$ [rad/s]	0.2265	0.0053

Tabella 6.13: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

### 6.3.2 Traiettoria ad 8

La traiettoria di riferimento ha equazione (6.5), mantenendo  $r = 1$  m e  $\omega = 1$  rad/s. L'andamento di posizione di carrello e carico che si ottiene mediante WBC in catena aperta modificato è riportato in Figura 6.29.

L'errore di contornatura, valutato tramite il calcolo della distanza tra due curve, riportato in Figura 6.30, risulta aver valore massimo in modulo pari a  $\varepsilon = 4.5 \cdot 10^{-3}$  m.

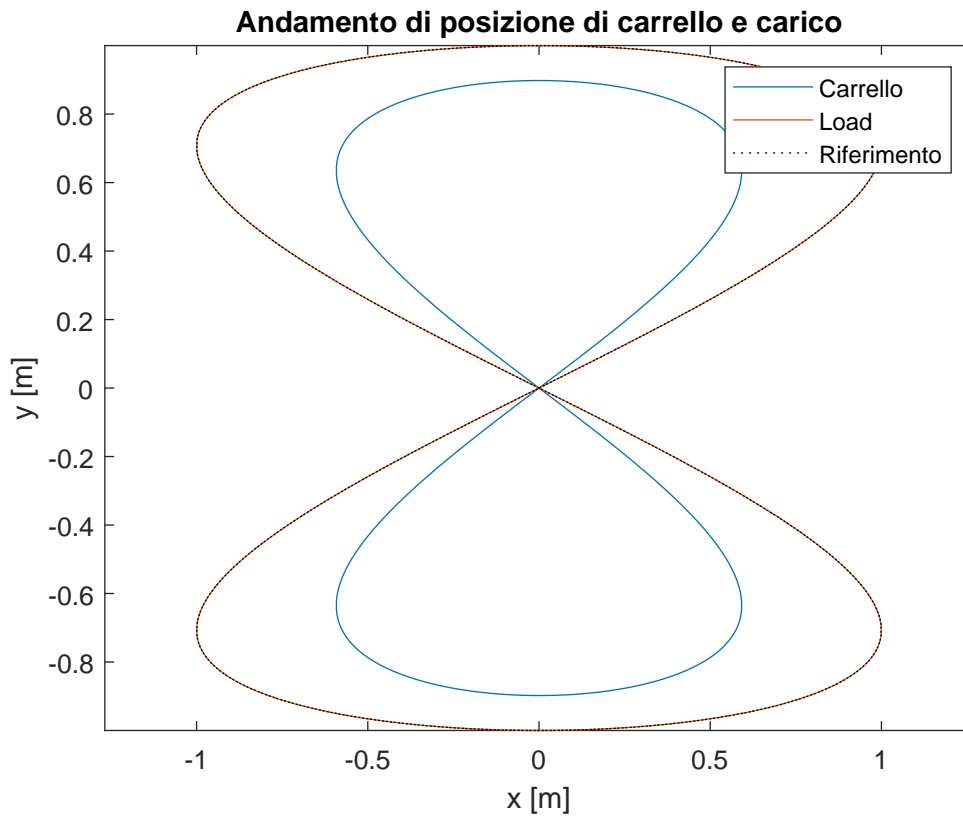


Figura 6.29: Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato

Esso risulta molto inferiore rispetto al medesimo controllo non corretto che porta ad avere come valore massimo in modulo  $\varepsilon = 0.1336 \text{ m}$ .

Dalla Figura 6.31 si vede come tale modifica permetta di ottenere risultati decisamente migliori in termini di inseguimento della traiettoria.

Mantenendo costante la pulsazione  $\omega$  e variando il raggio  $r$ , si ottengono i valori di  $\varepsilon_{max}$  riportati in Tabella 6.14.

$\varepsilon \text{ [m]}$	WBC non modificato	WBC modificato
$r = 0.1 \text{ [m]}$	0.01343	$4.5 \cdot 10^{-4}$
$r = 1.1 \text{ [m]}$	0.1469	$4.9 \cdot 10^{-3}$
$r = 1.5 \text{ [m]}$	0.2003	$6.7 \cdot 10^{-3}$

Tabella 6.14: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

Si nota quindi che con la modifica attiva, l'errore risulta almeno due ordini di grandezza minore.

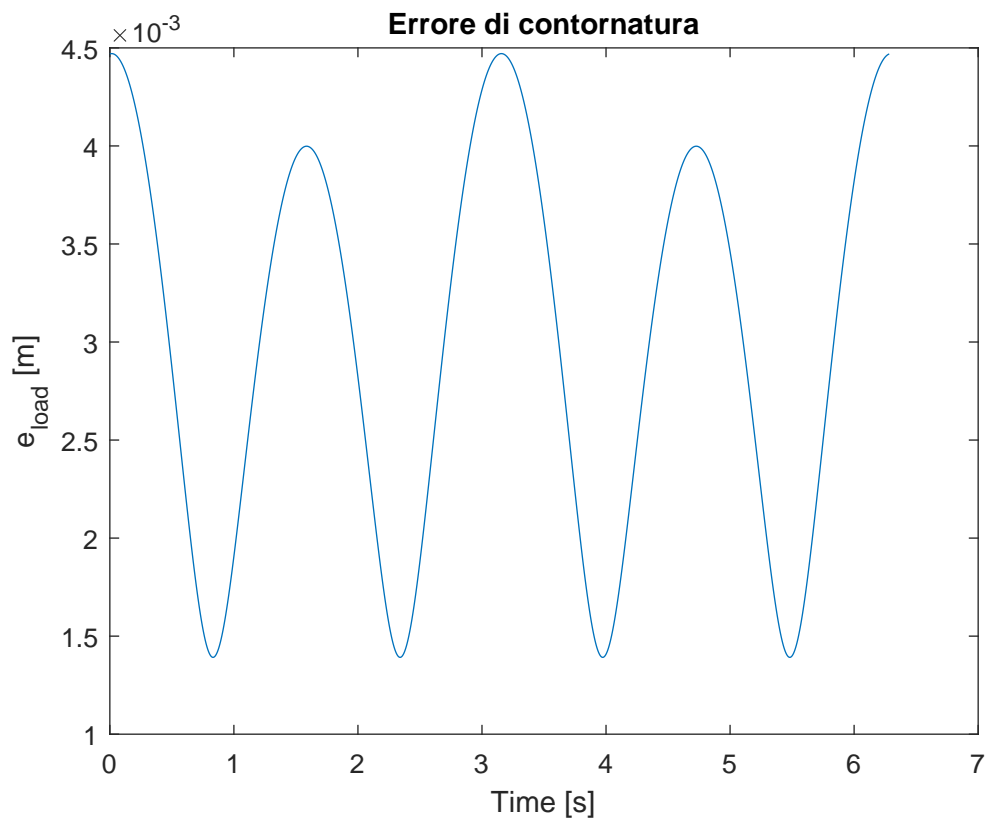
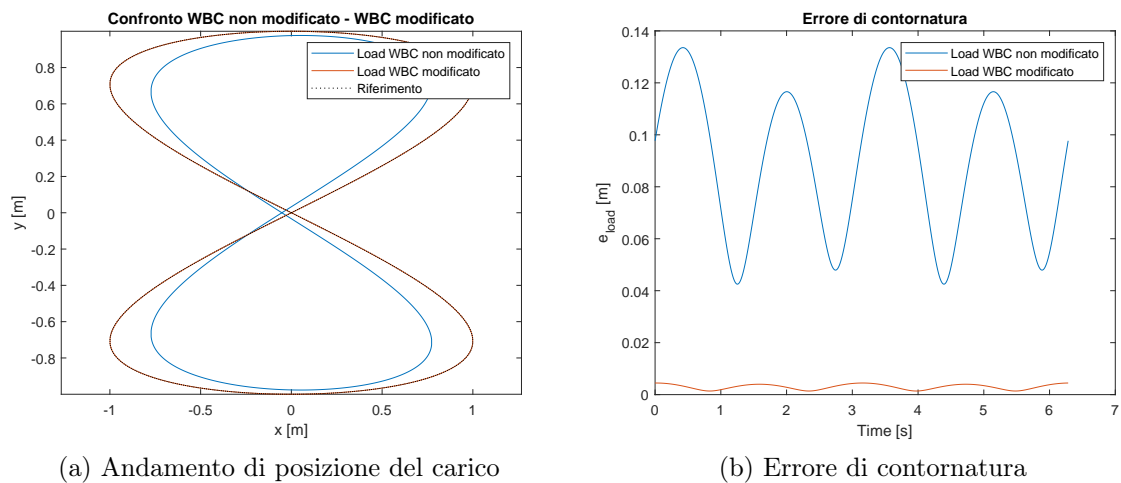


Figura 6.30: Errore di contornatura



(a) Andamento di posizione del carico

(b) Errore di contornatura

Figura 6.31: Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato

Analogamente, mantenendo costante  $r = 1 \text{ m}$  e variando la pulsazione  $\omega$ , si ottengono i seguenti errori massimi di contornatura:

$\varepsilon$ [m]	WBC non modificato	WBC modificato
$\omega = 0.1$ [rad/s]	0.0149	$4.5 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.1$ [rad/s]	0.1412	$4.9 \cdot 10^{-3}$
$\omega = 1.3$ [rad/s]	0.1523	$5.8 \cdot 10^{-3}$

Tabella 6.15: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

### 6.3.3 Cardioide

La traiettoria di riferimento ha equazione (6.8), mantenendo  $r = 0.1$  m e  $\omega = 1$  rad/s. L'andamento di posizione di carrello e carico che si ottiene mediante WBC in catena aperta modificato è riportato in Figura 6.32.

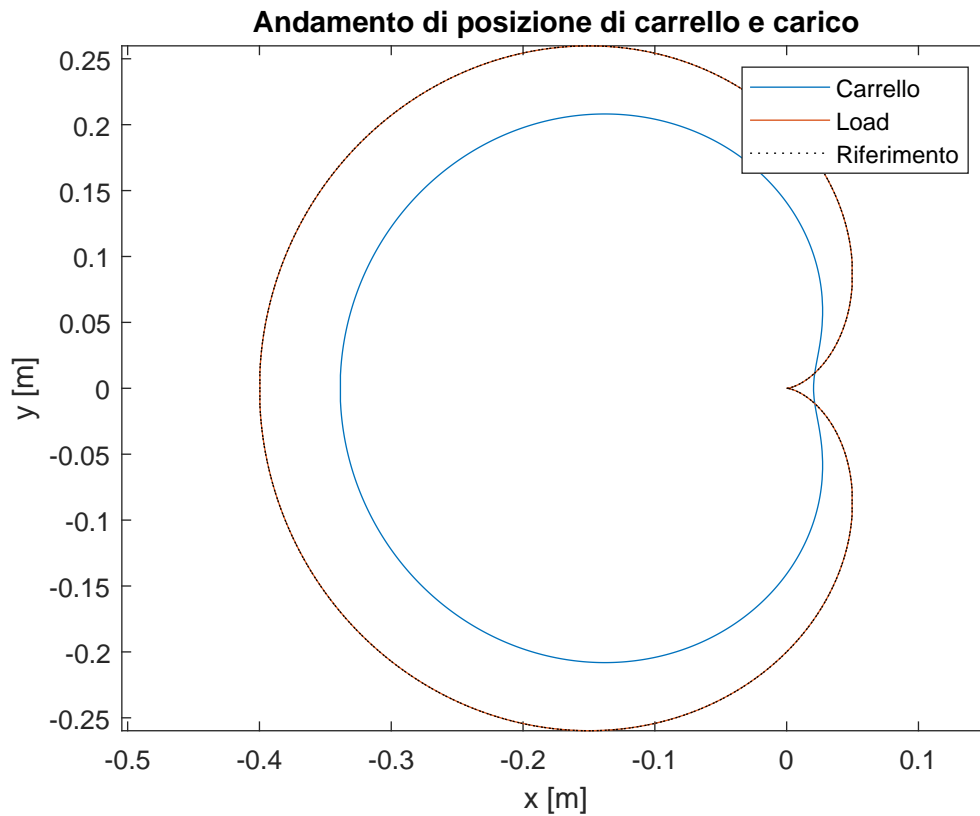


Figura 6.32: Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato

L'errore di contornatura, valutato tramite il calcolo della distanza tra due curve, riportato in Figura 6.33, risulta aver valore massimo in modulo pari a  $\varepsilon = 7.9 \cdot 10^{-4}$  m.

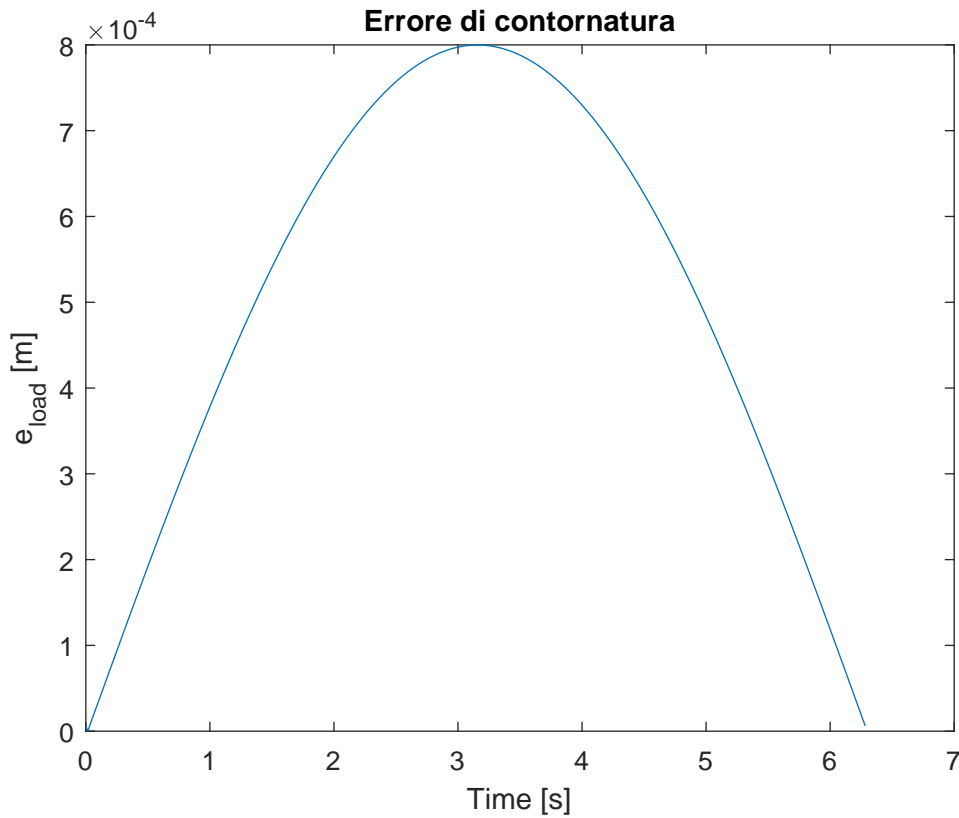


Figura 6.33: Errore di contornatura

Esso risulta molto inferiore rispetto al medesimo controllo non corretto che porta ad avere come valore massimo in modulo  $\varepsilon = 0.0247 \text{ m}$ .

Dalla Figura 6.34 si vede come tale modifica permetta di ottenere risultati decisamente migliori in termini di inseguimento della traiettoria.

Mantenendo costante la pulsazione  $\omega$  e variando il raggio  $r$ , si ottengono i valori di  $\varepsilon_{max}$  riportati in Tabella 6.16.

$\varepsilon [m]$	WBC non modificato	WBC modificato
$r = 0.5 [m]$	0.01343	$4.0 \cdot 10^{-3}$
$r = 1 [m]$	0.1469	$8.0 \cdot 10^{-3}$
$r = 1.5 [m]$	0.2003	0.0120

Tabella 6.16: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $r$

Si nota quindi che con la modifica attiva, l'errore risulta almeno due ordini di grandezza minore.

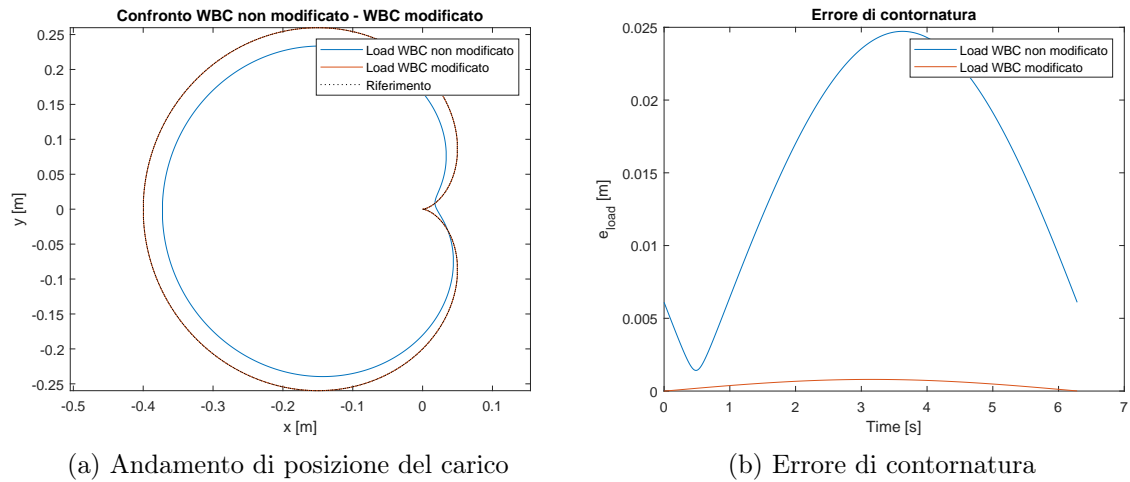


Figura 6.34: Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato

Analogamente, mantenendo costante  $r = 0.1 \text{ m}$  e variando la pulsazione  $\omega$ , si ottengono i seguenti errori massimi di contornatura:

$\varepsilon$ [m]	WBC non modificato	WBC modificato
$\omega = 0.1$ [rad/s]	0.0026	$8.0 \cdot 10^{-5}$
$\omega = 1.1$ [rad/s]	0.0265	$8.8 \cdot 10^{-4}$
$\omega = 1.3$ [rad/s]	0.0295	$1.0 \cdot 10^{-3}$

Tabella 6.17: Variazione massimo errore di contornatura al variare di  $\omega$

### 6.3.4 Traiettoria rettangolare

La traiettoria di riferimento è un rettangolo di dimensioni  $x_L^{ref} = 0.4 \text{ m}$  e  $y_L^{ref} = 0.25 \text{ m}$ . La velocità degli spostamenti è stata definita secondo una legge di moto di tipo rampa con tempi di percorrenza calcolati in modo tale da mantenere costante la velocità media su tutti i lati.

L'andamento di posizione di carrello e carico che si ottiene mediante WBC in catena aperta modificato è riportato in Figura 6.35.

L'errore di contornatura del carico dalla traiettoria di riferimento può essere visualizzato tramite la curva della deviazione  $\Delta y$  mentre è in corso la movimentazione lungo i lati paralleli all'asse  $x$ , e, viceversa, dalla curva  $\Delta x$  quando il carrello si sta muovendo lungo i lati paralleli all'asse  $y$ . Il suo andamento viene riportato in Figura 6.36 e risulta aver valore massimo in modulo pari a  $\varepsilon = 5.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

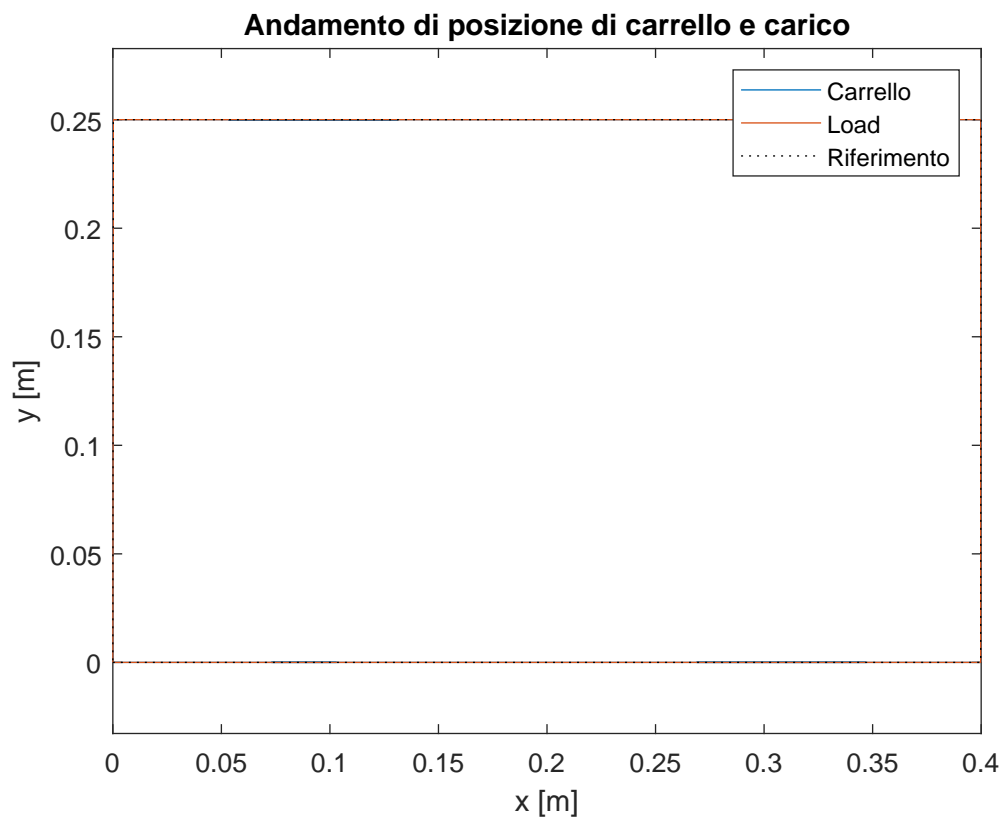


Figura 6.35: Andamento di posizione di carrello e carico con WBC open loop modificato

Esso risulta molto inferiore rispetto al medesimo controllo non corretto che porta ad avere come valore massimo in modulo  $\varepsilon = 0.0181 m$ .

Dalla Figura 6.37 si vede come tale modifica permetta di ottenere risultati decisamente migliori in termini di inseguimento della traiettoria.

Si nota quindi che con la modifica attiva, l'errore risulta almeno due ordini di grandezza minore.



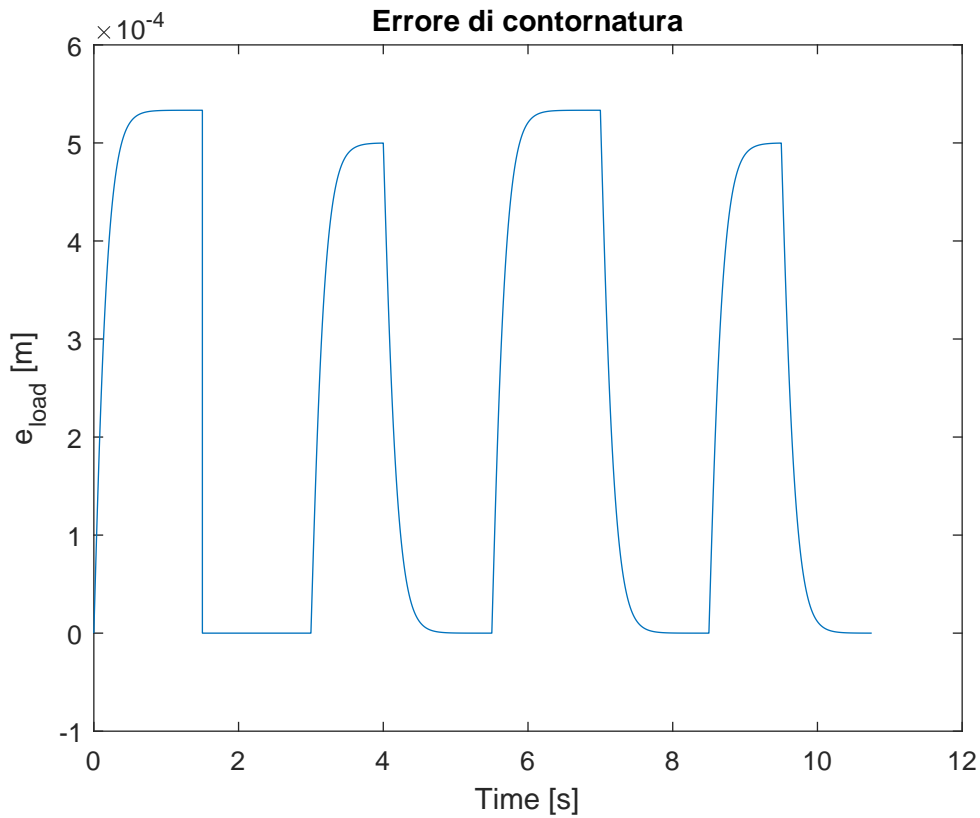
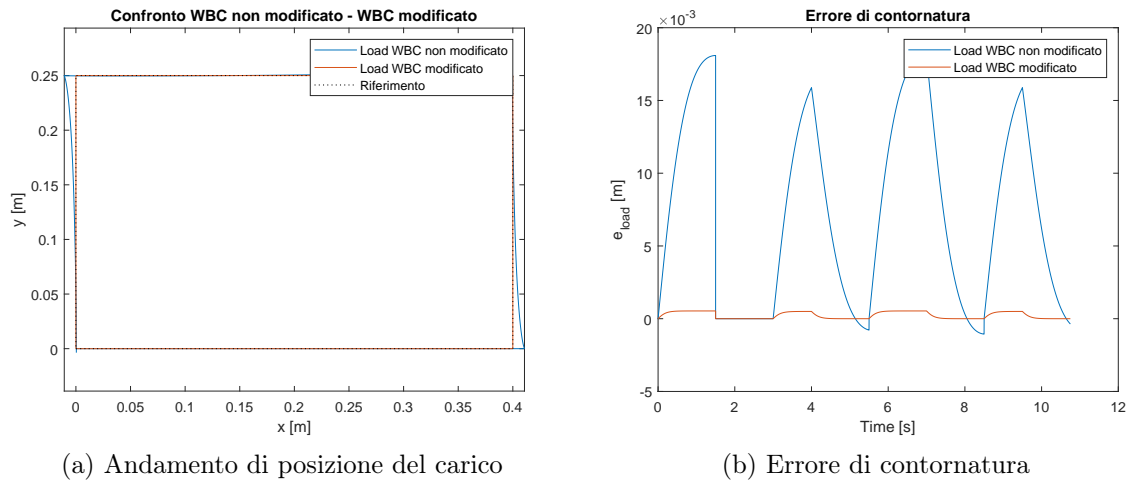


Figura 6.36: Errore di contornatura



(a) Andamento di posizione del carico

(b) Errore di contornatura

Figura 6.37: Confronto tra WBC non modificato e WBC modificato

## 6.4 Comparazione tra i metodi

Prendendo come riferimento due traiettorie, in particolare quella circolare (6.1) e quella ad 8 (6.5), è possibile confrontare i tre metodi descritti precedentemente, al fine di valutare quale offra un miglior inseguimento.

Gli andamenti di posizione del carico, per l'inseguimento della traiettoria circolare, sono riportati in Figura 6.38.

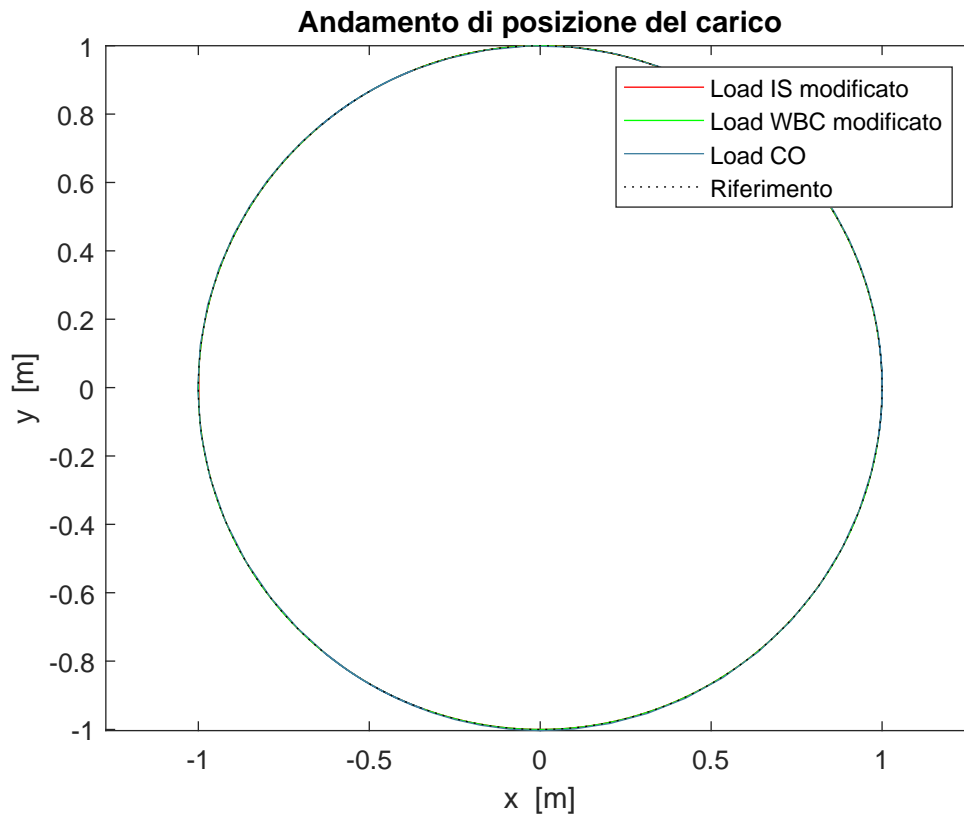


Figura 6.38: Andamento di posizione del carico con IS, WBC e CO

Di fatto i tre metodi sembrano equivalenti, realizzando tutti un buon inseguimento; tuttavia se si analizza l'errore di contornatura, riportato in Figura 6.39, si vede come il Wave Based Control in catena aperta modificato, sia quello che lo rende minimo. Analogamente per la traiettoria ad 8, il cui andamento di posizione è riportato in Figura 6.40a e il cui errore di contornatura in Figura 6.40b.

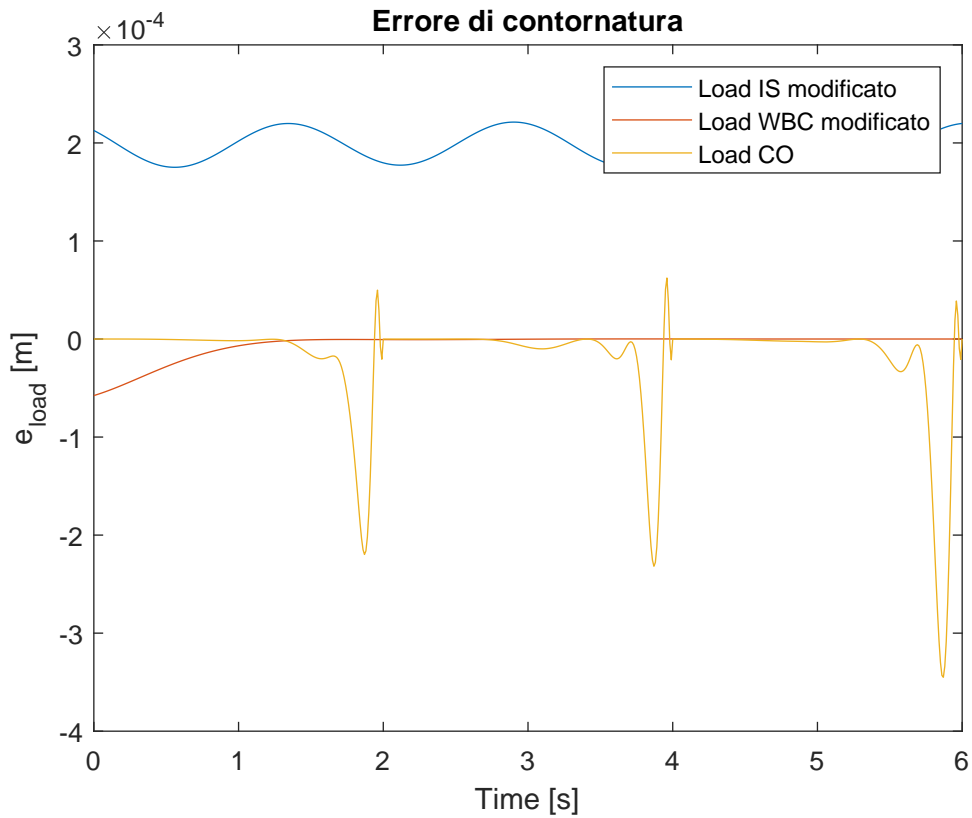
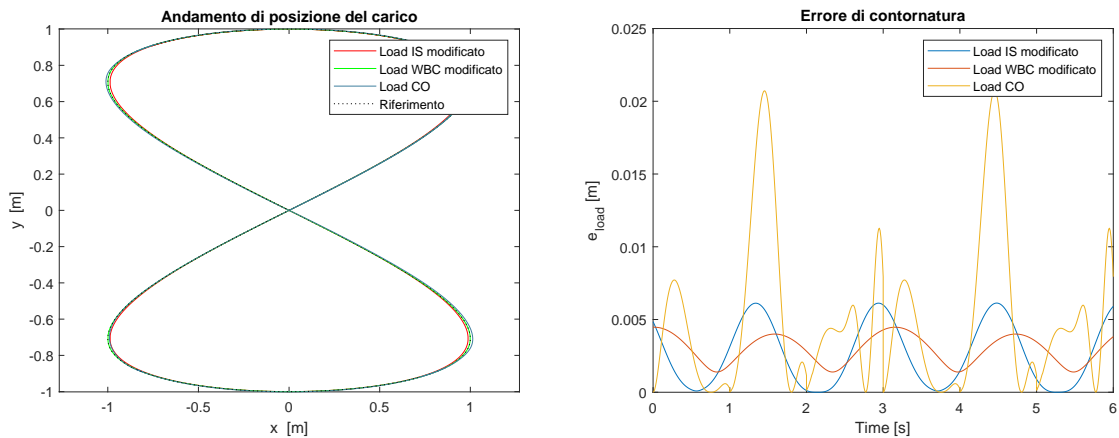


Figura 6.39: Errore di contornatura



(a) Andamento di posizione del carico con IS, WBC e CO

(b) Errore di contornatura

### 6.4.1 Robustezza

È possibile ora verificare quale tra i metodi risulta più robusto, prendendo come casi esplicativi alcune delle traiettorie sopra analizzate.

A tal fine è necessario, nel calcolo delle correzioni, utilizzare un valore della lunghezza  $h$  diverso da quello nominale che si ricorda essere  $h = 1 \text{ m}$ .

I risultati che si ottengono, per le diverse traiettorie sono riportati nelle Tabelle 6.18, 6.19 e 6.20.

Circonferenza	ZV modificato		ZVD modificato		WBC modificato	
	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$
$h = 0.99 m$	0.1457	0.1262	0.0043	$8.1 \cdot 10^{-5}$	0.0038	$9.3 \cdot 10^{-4}$
$h = 0.98 m$	0.1375	0.1397	0.0042	$7.2 \cdot 10^{-4}$	0.0044	0.0019
$h = 0.97 m$	0.1362	0.1394	0.0041	0.0012	0.0117	0.0028
$h = 0.96 m$	0.1392	0.1349	0.0039	0.0024	0.0157	0.0037
$h = 0.95 m$	0.1336	0.1389	0.0038	0.0036	0.0199	0.0047

Tabella 6.18: Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro  $h$

Otto	ZV modificato		ZVD modificato		WBC modificato	
	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$
$h = 0.99 m$	0.1593	0.1437	0.0069	0.0037	0.0056	0.0031
$h = 0.98 m$	0.1571	0.1456	0.0080	0.0054	0.0069	0.0035
$h = 0.97 m$	0.1535	0.1503	0.0095	0.0701	0.0081	0.0039
$h = 0.96 m$	0.1502	0.1524	0.0116	0.0090	0.0093	0.0045
$h = 0.95 m$	0.1478	0.1596	0.0144	0.0109	0.0108	0.0051

Tabella 6.19: Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro  $h$

Cardioide	ZV modificato		ZVD modificato		WBC modificato	
	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$	$\varepsilon_{max} [m]$	$\bar{\varepsilon} [m]$
$h = 0.99 m$	0.2579	0.1793	0.0168	0.0091	0.0078	0.0052
$h = 0.98 m$	0.2547	0.1802	0.0167	0.0098	0.0081	0.0055
$h = 0.97 m$	0.2516	0.1855	0.0167	0.0103	0.0089	0.0058
$h = 0.96 m$	0.2486	0.1868	0.0165	0.0103	0.0099	0.0061
$h = 0.95 m$	0.2456	0.1871	0.0164	0.0104	0.0109	0.0066

Tabella 6.20: Variazione errore di contornatura massimo e medio all'aumentare dell'incertezza sul parametro  $h$

Si vede che all'aumentare dell'incertezza talvolta l'errore di contornatura massimo cala, tuttavia quello medio cresce, a causa del fatto che la funzione di trasferimento di correzione è fortemente influenzata dalla frequenza di risonanza che si ricorda essere:  $\omega_n = \sqrt{g/h}$ . Essendo incerta la lunghezza  $h$ , la modifica introdotta non è in grado di attuare una completa compensazione e quindi è prevedibile l'aumento dell'errore.

Tra i metodi proposti, anche in questo caso, il Wave Based Control in catena aperta modificato risulta essere il migliore dal punto di vista di minimizzazione di  $\bar{\varepsilon}$ ; l'unica accortezza necessaria è quella di posizionare i poli aggiuntivi, per rendere la funzione di trasferimento di correzione propria, sufficientemente in alta frequenza, in modo tale che eventuali riduzioni della lunghezza, rispetto al valore nominale, non vadano a spostare la frequenza di risonanza troppo vicina a questi e quindi a interferire con la correzione.



# Capitolo 7

## RISULTATI SPERIMENTALI

Al fine di validare i risultati, si possono ora applicare le tecniche pianificazione, precedentemente descritte, al sistema fisico in Figura 7.1.

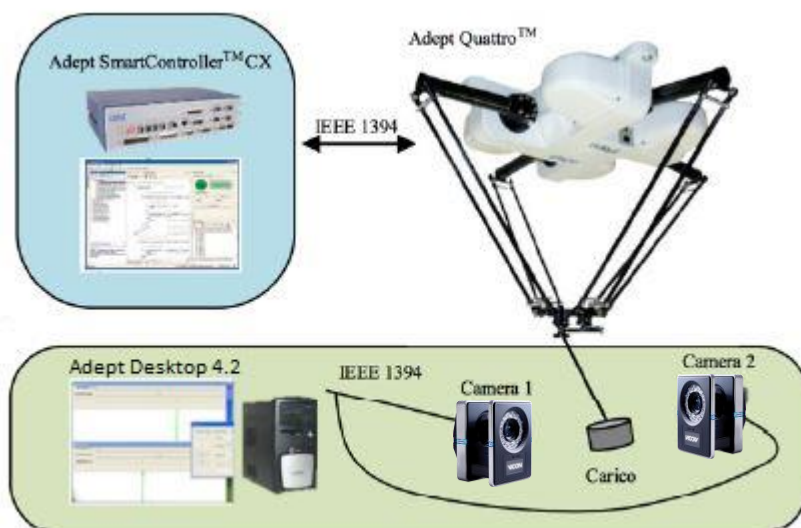


Figura 7.1: Schema del setup sperimentale

Esso è composto principalmente da quattro elementi:

- Un robot *Adept Quattro™ s650H*, il cui schema è riportato in Figura 7.2. Si tratta di un robot industriale parallelo, anche chiamato "delta robot", adatto a lavorare ad alta velocità per applicazioni quali impacchettamento, assemblaggio, produzione e spostamento di materiale.

Il robot è movimentato da quattro motori identici e quindi presenta quattro assi in grado di effettuare movimentazioni lungo gli assi X, Y e Z e anche la rotazione attorno all'asse Z. La comunicazione avviene mediante il suo

controllore real-time, *Adept SmartController<sup>TM</sup> CX*. Tale componente, che altro non è che un PID modificato, non è adatto a intraprendere azioni di controllo delle oscillazioni. Anche esso è rappresentato in Figura 7.2.

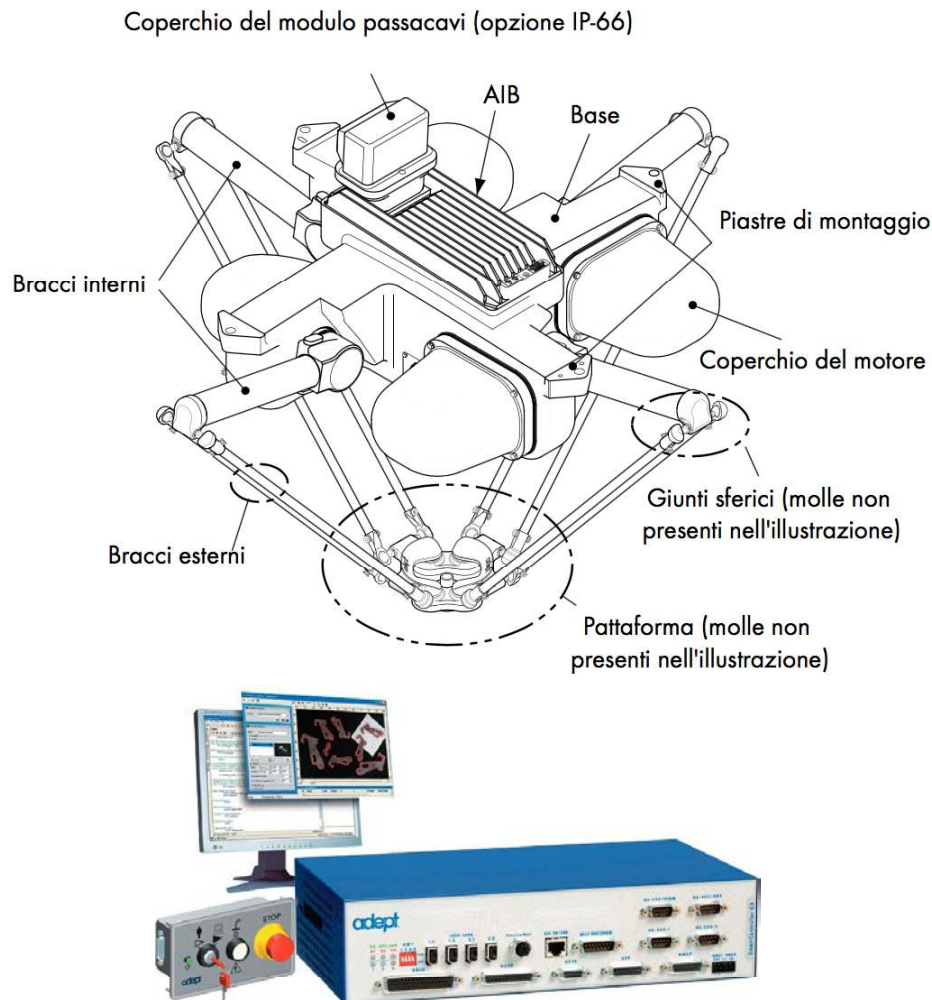


Figura 7.2: Schema del robot *Adept Quattro<sup>TM</sup> s650H* e del controller real-time *Adept SmartController<sup>TM</sup> CX*

- Un sistema di visione, comandato mediante software *Vicon Tracker* con 6 camere optoelettroniche aventi le seguenti caratteristiche:
  - Risoluzione: il sensore che equipaggia le camere optoelettroniche ha risoluzione maggiore a 4.8 MPixel.
  - La frequenza di acquisizione massima raggiungibile a campo intero è superiore a 400 fps (frame per secondi).
  - La frequenza di acquisizione massima raggiungibile a campo ridotto è maggiore di 1800 fps.



abbinare a camere ottiche con campo visivo stretto con le seguenti caratteristiche tecniche:

- Campo visivo orizzontale compreso tra  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .
- Campo visivo verticale compreso tra  $35^\circ$  e  $60^\circ$ .

Un dettaglio di tale sistema è mostrato in Figura 7.3.



Figura 7.3: Dettaglio del sistema di visione utilizzato nel setup sperimentale

Al fine di ottenere una configurazione analoga al modello teorico, alla piattaforma viene collegato un cavo in nylon di lunghezza prestabilita con un carico di massa nota, costituito da un cilindro. Velocità di oscillazione e angoli di deviazione rispetto alla posizione di equilibrio sono valutati mediante la determinazione dell'inclinazione del filo.

Per gestire il moto del robot, la visione della telecamera e il controllo del riferimento da applicare, vengono implementate due task real-time, gestite dal controller *Adept SmartController<sup>TM</sup> CX*. Tali task sono:

- *Communication task*, con priorità maggiore, gestisce le comunicazioni del target PC mediante protocollo UDP. Durante tale task il robot può accettare il riferimento generato.
- *Control task*, con priorità intermedia, si occupa di interpolare i riferimenti provenienti dalla task precedente e quindi di comandare gli attuatori del robot.

## 7.1 Determinazione dei parametri sperimentali

Prima di procedere con le prove sperimentali, è necessario determinare quali sono i parametri reali del sistema fisico, al fine di procedere con le corrette valutazioni delle traiettorie e delle modifiche da applicare.

Le principali caratteristiche sono quattro:

- la frequenza di oscillazione naturale del carico sospeso, che tramite valutazione della risposta in evoluzione libera del sistema risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{h}} = 3.1927 \text{ rad/s} \quad (7.1)$$

- la lunghezza del filo, la quale invertendo la 7.1, risulta:

$$h = 0.9624 \text{ m} \quad (7.2)$$

- il fattore di smorzamento, mediante il metodo del decremento logaritmico descritto nell'Appendice A, che risulta:

$$\xi \simeq 0.001 \quad (7.3)$$

- la massa del carico oscillante pari a:

$$m = 0.201 \text{ Kg} \quad (7.4)$$

Ci si tiene a sottolineare, fin da ora, che eventuali scostamenti rispetto dall'idealità sono attribuibili anche ad uno scostamento rispetto al piano orizzontale del piano del robot.

## 7.2 Pianificazione con Input Shaping

Effettuando le prove descritte nella Sezione 6.1, considerando dunque una traiettoria circolare (6.1) e una ad otto (6.5), entrambe di raggio  $r = 0.15 \text{ m}$  e pulsazione  $\omega = 1 \text{ rad/s}$ , si ottengono gli andamenti in Figura 7.4 e in Figura 7.5. Si riportano in particolare, gli andamenti di posizione senza Input Shaping applicato, con Input Shaping non modificato e con Input Shaping modificato.

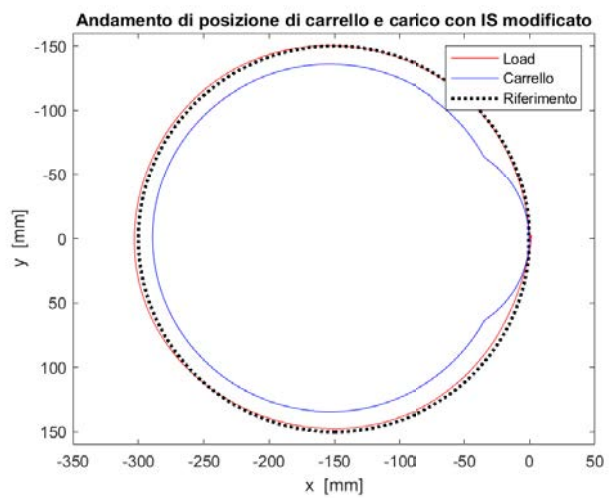
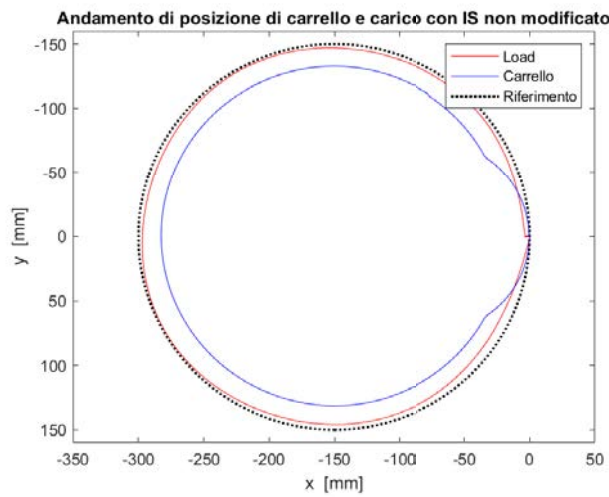
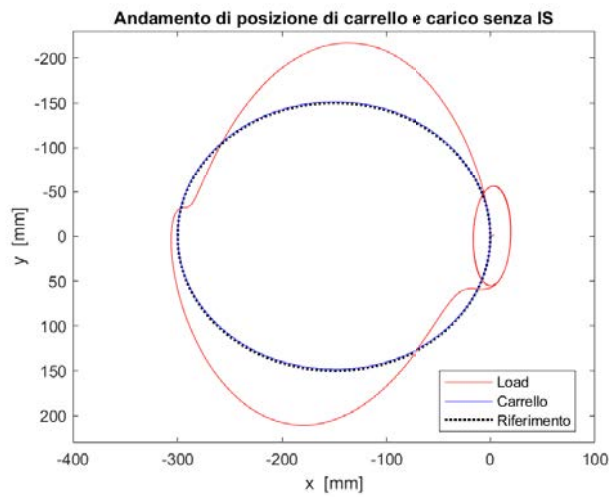
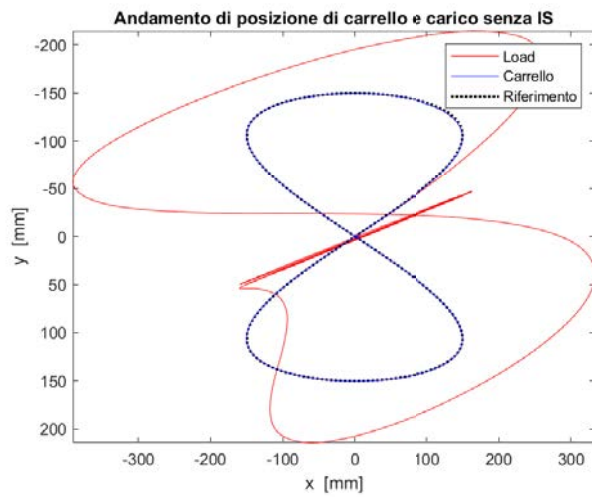
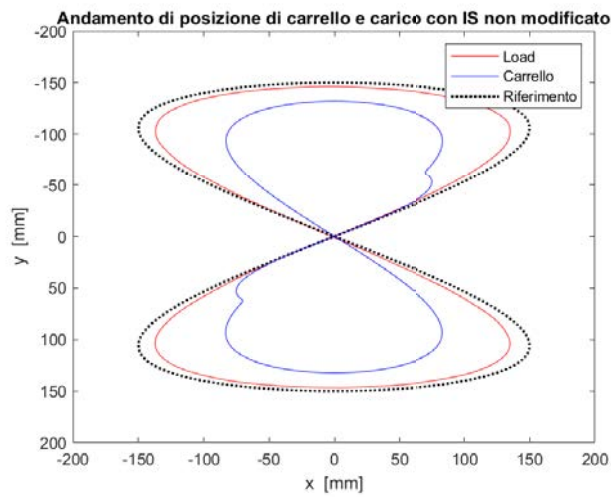


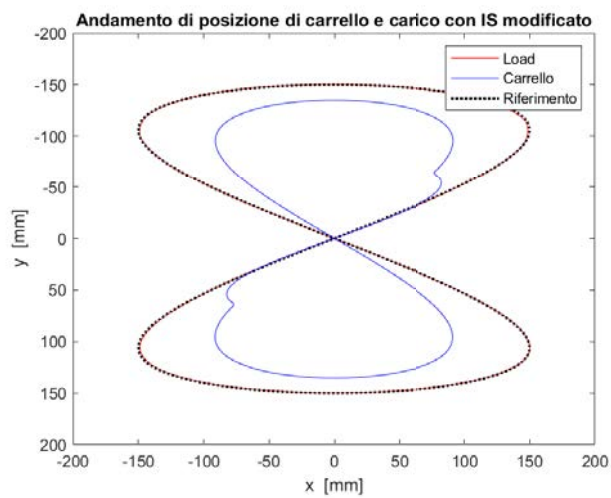
Figura 7.4: Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria circolare



(a) Unshaped



(b) Input Shaping non modificato



(c) Input Shaping modificato

Figura 7.5: Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria ad otto

Dal confronto tra i metodi, in Figura 7.6 per la circonferenza e in Figura 7.7, si ottiene una conferma dei risultati simulativi: l'Input Shaping modificato risulta essere molto più efficace nell'inseguimento della traiettoria di riferimento, riducendo quindi l'errore di contornatura e permettendo pertanto una miglior movimentazione.

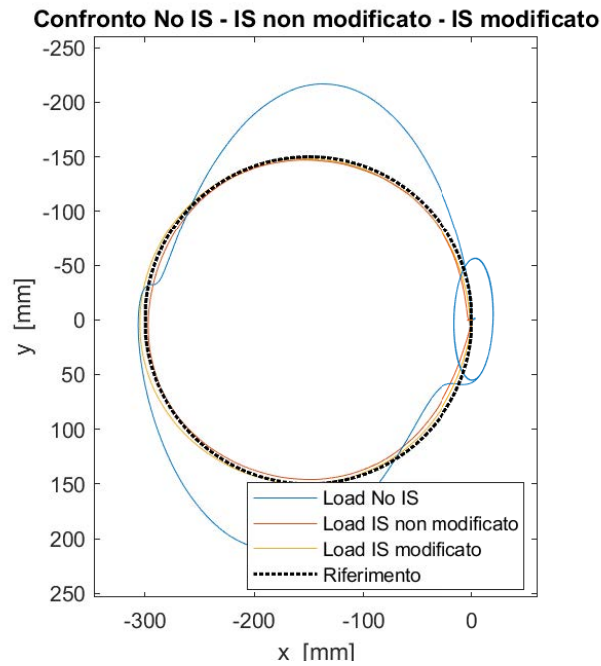


Figura 7.6: Confronto tra no IS, IS non modificato e IS modificato

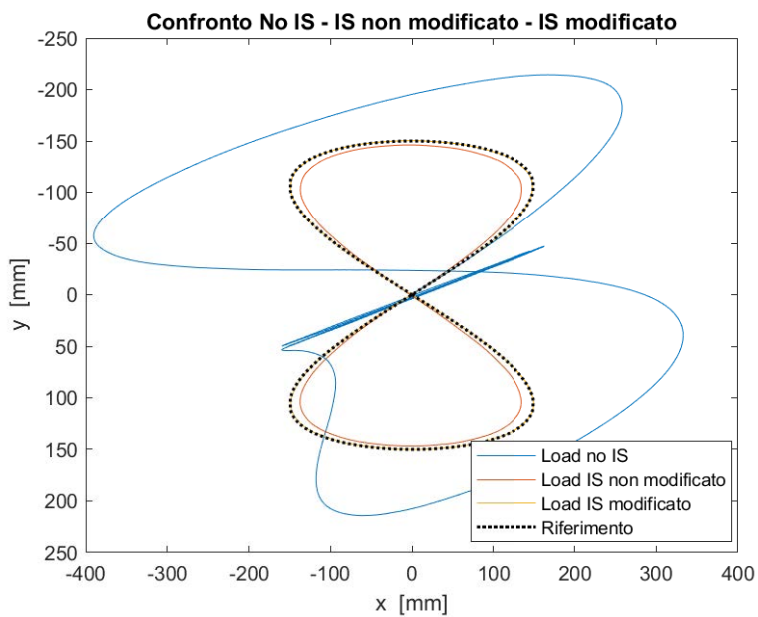
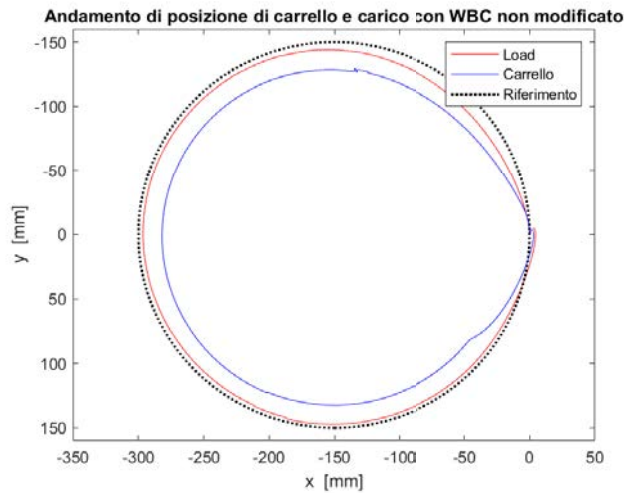


Figura 7.7: Confronto tra no IS, IS non modificato e IS modificato

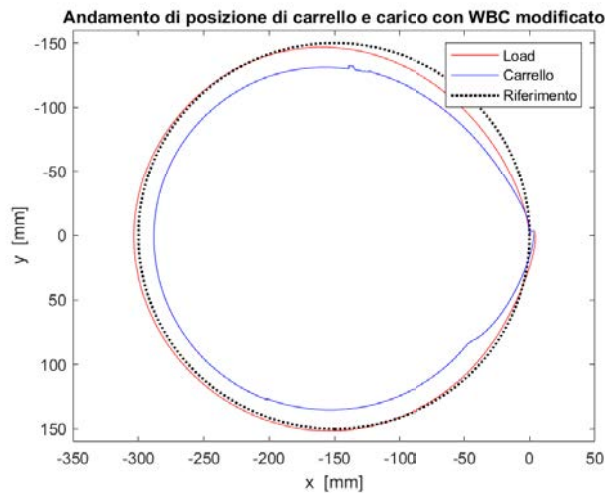
### 7.3 Pianificazione con Wave Based Control

Analogamente a quanto fatto nella sezione precedente, si effettuano le verifiche sperimentali con pianificazione mediante Wave Based Control in catena aperta modificato e non.

Si riportano in Figura 7.8 e in Figura 7.9, gli andamenti di posizione, per la traiettoria circolare e per quella ad otto, con Wave Based Control non modificato e modificato (le traiettorie senza WBC applicato sono uguali a quelle Unshaped di Figura 7.4a e di Figura 7.5a).

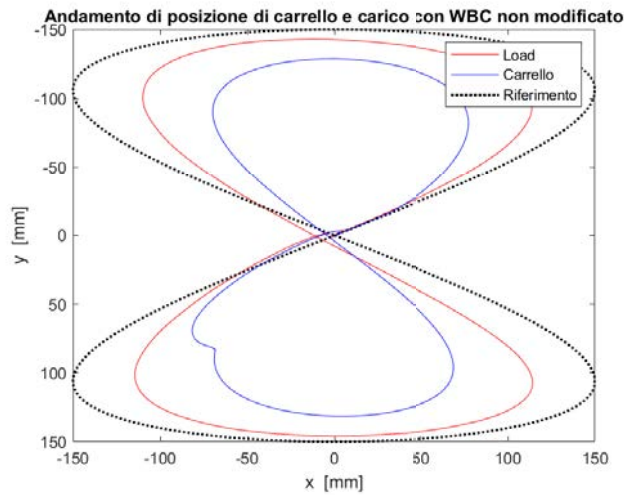


(a) Wave Based Control non modificato

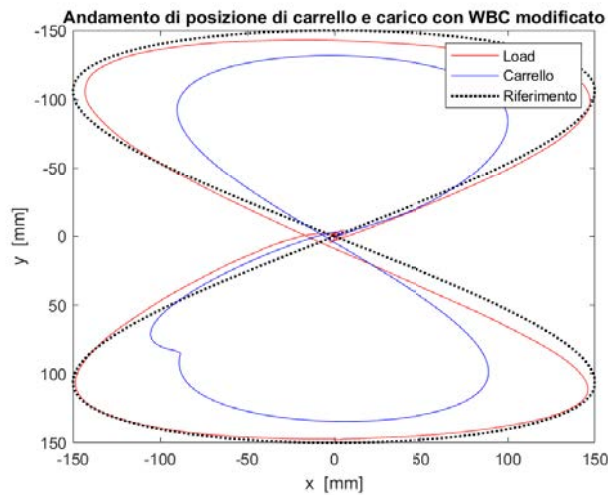


(b) Wave Based Control modificato

Figura 7.8: Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria circolare



(a) Wave Based Control non modificato



(b) Wave Based Control modificato

Figura 7.9: Andamento di posizione di carrello e carico con traiettoria ad otto

Si sottolinea che le correzioni con funzione di trasferimento determinano accelerazioni e dinamiche che non sono realizzabili con il setup sperimentale a disposizione, per cui le correzioni vengono ricondotte ad un semplice guadagno con il quale si è cercato di approssimare al meglio tali dinamiche. Dal confronto tra i metodi, in Figura 7.10 per la circonferenza e in Figura 7.11, si ottiene una conferma dei risultati simulativi: l'Input Shaping modificato risulta essere più efficace nell'inseguimento della traiettoria di riferimento, riducendo quindi l'errore di contornatura e permettendo pertanto una miglior movimentazione. Tale risultato sarebbe ancora più visibile se non fosse stato necessario utilizzare un'approssimazione della modifica introdotta.

**Confronto No WBC - WBC non modificato - WBC modificato**

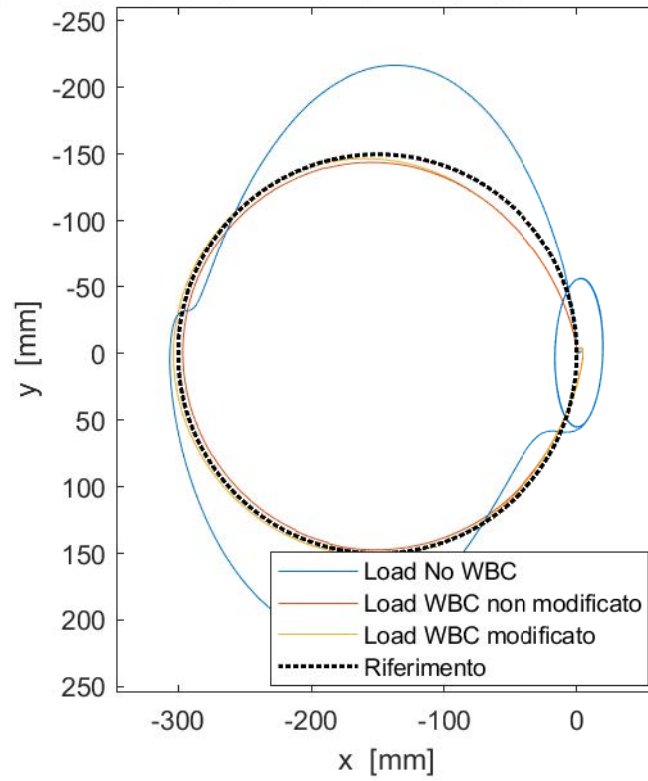


Figura 7.10: Confronto tra no WBC, WBC non modificato e WBC modificato

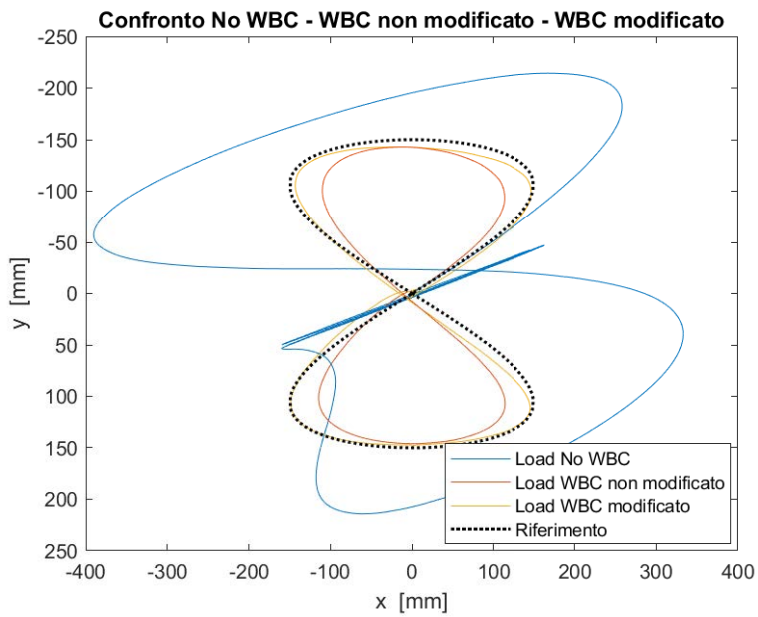


Figura 7.11: Confronto tra no WBC, WBC non modificato e WBC modificato



# CONCLUSIONI

Il seguente lavoro di tesi si è proposto di studiare e analizzare l'applicazione di alcune tecniche di pianificazione ottima del moto per sistemi sottoattuati.

Ci si è concentrati, in particolare, sulla dinamica oscillatoria di un sistema carroponte che risulta essere un esempio esplicativo di sistema con più gradi di libertà rispetto al numero di ingressi.

Le principali tecniche analizzate sono l'Input Shaping, il Wave Based Control e il Controllo Ottimo.

Per la prima, la conoscenza della risposta del sistema ad un impulso ha consentito di poter realizzare diversi shaper. Ne sono stati studiati quindi i principali, riportandone le caratteristiche di robustezza e di insensibilità alla presenza di errori nella stima dei parametri che caratterizzano una dinamica oscillatoria, ovvero frequenza e smorzamento.

Rispetto ai tradizionali shaper, da molto noti in letteratura, si sono apportate le modifiche necessarie a minimizzare il più possibile l'errore di contornatura del carico rispetto alla traiettoria di riferimento, generando pertanto una nuova tecnica. Essa prevede di compensare sia in modulo che in fase quello che viene tolto dal sistema complessivo, quindi dalla presenza dello shaper e del sistema fisico stesso. Tale correzione è stata applicata a traiettorie di diverso genere, armoniche e non.

Per la seconda tecnica, si è esteso il controllo ottimo a tale sistema che non presenta retroazione, definendo quindi un funzionale di costo in grado di tenere conto di quanto si discostasse il movimento del carico dalla traiettoria della piattaforma di movimentazione e quindi, minimizzare tale distanza. Sono stati sfruttati a tal proposito metodi numerici che hanno permesso la risoluzione di tale problema.

L'ultima tecnica invece, è un'estensione in catena aperta del tradizionale Wave Based Control. Tale controllo, un po' meno diffuso rispetto all'Input Shaping, prevede la generazione del segnale di movimento alla piattaforma mediante filtraggio tramite una funzione di trasferimento in grado di eliminare le vibrazioni residue.

Tuttavia, anche questa come l'Input Shaping, presentava errori di contornatura non indifferenti, pari anche al 15%. È stato necessario introdurre una correzione a questa,

andando nuovamente a compensare ciò che il sistema complessivo toglieva, al fine di avere modulo unitario della funzione di trasferimento tra la posizione effettiva del carico e quella desiderata.

Al fine di valutare la bontà di queste tecniche, sono state analizzate alcune traiettorie. Si è partiti con la traiettoria circolare, funzione armonica di facile implementazione. Per questa si è giunti a una riduzione significativa dell'errore di contornatura e tramite ZVD shaper anche a una buona robustezza, oltre il 10%, rispetto alla variazione parametrica. Si è visto inoltre, come il WBC modificato sia il miglior controllo dal punto di vista dell'inseguimento.

Per tutte le tecniche è stata analizzato anche come cambiava l'inseguimento al variare dei parametri del riferimento, ottenendo risultati più che soddisfacenti entro i limiti di validità del modello e delle tecniche stesse.

Analoghe simulazioni sono state fatte con la traiettoria ad otto, la quale risulta essere una combinazione di due funzioni armoniche, una alla frequenza doppia dell'altro. Anche in questo caso l'inseguimento risulta presentare un errore minimo.

Si è passati poi a traiettorie non direttamente riconducibili a funzioni armoniche, se non mediante l'uso di trasformata di Fourier. In particolare si è visto che la tecnica dell'Input Shaping e del Wave Based Control, entrambi modificati, sono efficaci anche per cardioidi e/o traiettorie rettangolari.

Tra le tecniche analizzate, il Controllo Ottimo, risulta quella che porta a risultati meno soddisfacenti a causa del fatto che non esiste una formulazione analitica per questo e che non è stato considerato il tempo come variabile.

Il Wave Based Control, invece, risulta essere quello più efficace sia dal punto di vista dell'inseguimento che della robustezza.

Si è poi, effettuata una sperimentazione sulle due tecniche che hanno portato a risultati migliori (sia per inseguimento che per robustezza) che ha portato alla validazione della correttezza delle modifiche proposte.

In conclusione, le modifiche qui descritte, analizzate e studiate, risultano essere un'evoluzione rispetto alle classiche trattazioni note in letteratura e hanno consentito di ottenere risultati molto validi rispetto all'obiettivo imposto.

# BIBLIOGRAFIA

- [1] S.Reichi, W. Steiner, (2011), *Trajectory Tracking of Underactuated Multibody Systems*, Whashington DC, Usa.
- [2] G. Bastos, R. Seifried, O. Bruls, (2017), *Analysis of stable model inversion methods for constrained underactuated mechanical systems*, University of Liège, Belgium.
- [3] X.Wang, *Solving optimal control problems with MATLAB - Indirect methods*, NCSU.
- [4] P. Boscariol, D. Richiedei, (2018), *Robust point-to-point trajectory planning for nonlinear underactuated systems: Theory and experimental assessment*, Università degli Studi Di Padova, Vicenza, Italia.
- [5] G. Boschetti, R. Caracciolo, D. Richiedei, A. Trevisani, (2014), *Moving the suspended load of an overhead crane along a pre-specified path: A non-time based approach*, Università degli Studi Di Padova, Vicenza, Italia.
- [6] D.E.Kirk, (2004), *Optimal Control Theory: An Introduction*, Dover Publications, New York, Usa.
- [7] D.S. Naudy, (2003), *Optimal Control Systems*, CRC Press, New York, Usa.
- [8] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, G. Oriolo, (2009), *Robotica, Modellistica, Pianificazione e Controllo*, McGraw-Hill, Roma, Italia.
- [9] W. J. O'Connor, F. Ramos de la Flor, D. J. McKeown, V. Feliu, (2008), *Wave-based control of non-linear flexible mechanical systems*, Springer Science.



# Appendice A

## Stima Parametrica

Per il sistema in analisi, la frequenza naturale è data dal rapporto di due parametri costanti e noti (1.20), poiché  $g$  è l'accelerazione di gravità e vale:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

mentre, il coefficiente di smorzamento è valutabile tramite due diverse strategie. La prima prevede la definizione del modello di un sistema dinamico oscillante che è nella forma:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = Fu(t) \quad (\text{A.1})$$

la cui funzione di trasferimento tra ingresso  $u(t)$  e uscita  $x(t)$  è del tipo:

$$G(s) = \frac{x(t)}{u(t)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{A.2})$$

da cui si è ricavato:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (\text{A.3})$$

dove  $c$  è il coefficiente di attrito viscoso.

In alternativa è possibile utilizzare il metodo del *decremento logaritmico*: si considera il sistema in (A.1) e lo si lascia evolvere in evoluzione libera, quindi con  $u(t) = 0$ , rappresentato in Figura A.1.

Si valutano due picchi consecutivi  $x_1 = x(\bar{t})$  e  $x_2 = x(\bar{t} + T)$ , distanti temporalmente di:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

che corrisponde al periodo di oscillazione.

Vale che

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t} (B_1 \cos(\omega_d t) + B_2 \sin(\omega_d t)) \quad (\text{A.4})$$

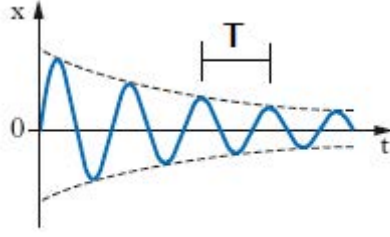


Figura A.1: Evoluzione libera di un sistema smorzato

da cui

$$\begin{aligned} x_1 &= x(\bar{t}) = e^{-\xi\omega_n\bar{t}} (B_1 \cos(\omega_d\bar{t}) + B_2 \sin(\omega_d\bar{t})) \\ x_2 &= x(\bar{t} + T) = e^{-\xi\omega_n(\bar{t}+T)} (B_1 \cos(\omega_d(\bar{t} + T)) + B_2 \sin(\omega_d(\bar{t} + T))) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Essendo, le funzioni  $\cos(\cdot)$  e  $\sin(\cdot)$  periodiche di periodo  $T$ , vale che:

$$\begin{aligned} \cos(\omega_d\bar{t}) &= \cos(\omega_d(\bar{t} + T)) \\ \sin(\omega_d\bar{t}) &= \sin(\omega_d(\bar{t} + T)) \end{aligned}$$

per cui, facendo il rapporto tra i due valori di  $x(t)$  in (A.5) si ottiene:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\xi\omega_n\bar{t}}}{e^{-\xi\omega_n(\bar{t}+T)}} = \frac{1}{e^{-\xi\omega_n T}} = e^{\xi\omega_n T} \quad (\text{A.6})$$

segue che

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \xi\omega_n T = \xi\omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\text{A.7})$$

Ipotizzando che il sistema sia molto poco smorzato si ottiene:

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \simeq 2\pi\xi \quad (\text{A.8})$$

da cui si ricava il coefficiente di smorzamento:

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \quad (\text{A.9})$$