Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Costruzioni geometriche e uso del software di geometria dinamica in un percorso didattico verso la dimostrazione

Relatore:
Prof. Francesco Ciraulo
Correlatore:
Prof. Luigi Tomasi

Laureanda:
Giovanna Andrigo
Matricola: **2044681**

Anno Accademico 2023/2024
19 Aprile 2024

"La geometria sola, fra le discipline
liberali, esercita e acuisce l'ingegno."
(Evangelista Torricelli)

"Forse è questo insegnare:
fare in modo che a ogni lezione
scocchi l'ora del risveglio."
(Daniel Pennac)

Indice

Introduzione

L'elaborato si propone di illustrare le potenzialità offerte dalle costruzioni con riga e compasso, sia da un punto di vista matematico che didattico. Nel dettaglio, verranno presentati un'analisi dell'origine della teoria matematica alla base delle costruzioni geometriche, un approfondimento sulle costruzioni geometriche realizzabili con l'impiego di diversi strumenti, una riflessione riguardante i vantaggi dati dal loro utilizzo nell'insegnamento e apprendimento della matematica e, infine, la presentazione di un progetto didattico innovativo volto a sperimentare l'utilizzo delle costruzioni geometriche e del software di geometria dinamica come percorso di avvicinamento al concetto di dimostrazione nel primo biennio della Scuola Secondaria di II grado.

Il *Capitolo 1* presenta un excursus storico sulla nascita della geometria come scienza assiomatico-deduttiva: dopo aver esposto le principali conoscenze geometriche dei popoli antichi, che usavano tale disciplina per soli scopi pratici, si approfondisce l'evolversi della geometria a scienza rigorosa passando in rassegna i contributi dei più famosi matematici greci e soffermandosi in particolare sulla figura di Euclide di Alessandria. Egli è infatti autore degli *Elementi*, trattato che costituisce il primo esempio di sistema assiomatico deduttivo e che consegna ai posteri un'immagine duratura di cosa sia un'esposizione scientifica della matematica. Infine, si analizza il Libro I di tale testo, riportando le dimostrazioni di alcune proposizioni ritenute rilevanti ai fini della sperimentazione didattica.

Lo scopo del *Capitolo 2* è invece quello di indagare le principali teorie sulla costruibilità: si analizzano innanzitutto alcune delle più conosciute costruzioni con riga e compasso ideali, tratte dagli *Elementi* di Euclide, per poi trattare i principali problemi di costruibilità. Si prosegue dimostrando che tutte le costruzioni con riga e compasso possono essere eseguite con il solo compasso euclideo; in tale contesto si enuncia anche il *Teorema di Mohr - Mascheroni*, secondo cui un punto è costruibile con compasso se e solo se è un punto costruibile con riga e compasso. Infine, si mostrano i più importanti risultati concernenti la teoria della costruibilità con il solo uso della riga.

Nel *Capitolo 3* si affronta invece il tema dell'introduzione del concetto di dimostrazione per mezzo delle costruzioni geometriche da un punto di vista didattico.

Dopo aver messo in evidenza quali sono i contenuti specifici e i suggerimenti proposti dalle *Indicazioni Nazionali* e *Linee Guida* relativamente all'insegnamento della geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di II grado, si analizzano alcune delle problematiche di carattere didattico-metodologico relative all'insegnamento e apprendimento di tale disciplina. In particolare, viene dapprima sottolineata l'importanza di un approccio storico alla matematica, a cui segue l'analisi di come il concetto di dimostrazione possa essere introdotto nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado, dove l'educazione all'argomentazione è un obiettivo didattico fondamentale. Infine, si mostrano le potenzialità di un software di geometria dinamica nel migliorare l'apprendimento e la motivazione degli studenti nei confronti della matematica e, specificatamente, nell'accompagnare gli studenti verso il concetto formale di dimostrazione, ritenuto essenziale all'interno della trattazione di un qualsiasi argomento matematico.

Il *Capitolo 4* e il *Capitolo 5* si propongono infine di descrivere un progetto didattico implementato in una classe prima di Liceo Scientifico Matematico del Liceo Scientifico "E. Curiel" di Padova. La sperimentazione ha avuto luogo da inizio dicembre 2023 a metà febbraio 2024, coprendo le ore curricolari di matematica e alternando le lezioni con alcune spiegazioni teoriche dell'insegnante della classe. Il progetto ha compreso principalmente attività laboratoriali a gruppi con l'uso del software GeoGebra, arricchite da qualche lezione teorica.
Nel dettaglio, nel Capitolo 4 vengono esposti obiettivi, modalità, tempi e contenuti delle varie lezioni, e viene descritta la loro implementazione in classe. Nel Capitolo 5, invece, viene fatto un bilancio generale dell'intera attività, sostenuto da uno studio dei questionari somministrati agli studenti della classe sperimentale e di una classe di controllo (che ha svolto il programma in maniera tradizionale) a inizio e fine sperimentazione, con l'obiettivo di evidenziare eventuali progressi e, in generale, le note positive tratte dal progetto.

Dopo le *Conclusioni*, in cui si propone un breve resoconto del lavoro di tesi e una riflessione di carattere personale, è inserita l'Appendice A, in cui sono raccolti i materiali utilizzati nel corso della sperimentazione.

Capitolo 1

La nascita della geometria

Le asserzioni circa le origini della geometria sono tutt'oggi incerte, dal momento che gli inizi di questa disciplina sono da collocare in età preistorica, quando ancora non si conosceva la scrittura.
Erodoto attribuiva la nascita della geometria al bisogno pratico di ripristinare i confini di proprietà periodicamente cancellati dalle esondazioni del fiume Nilo. Aristotele, invece, riteneva che lo studio della geometria fosse stato stimolato dalla presenza in Egitto di una classe sacerdotale agiata [35].
Oggi tali ipotesi risultano mal fondate, tant'è che gli storici sono più propensi a datare le origini della geometria ben prima della civiltà egizia. Tuttavia, queste due tesi richiamano molto le moderne congetture circa il primo evolversi della geometria: gli studiosi sono infatti inclini a pensare che l'uomo abbia sviluppato i primi concetti di geometria per un senso estetico per il disegno (si pensi per esempio alle decorazioni geometriche nei vasi). Un'altra ipotesi è che la geometria abbia avuto origine in pratiche rituali e religiose, vista la presenza di altari e templi dalla forma spiccatamente geometrica. Può anche essere che lo sviluppo della geometria sia stato stimolato dal bisogno pratico di costruire edifici, di regolare i cicli di agricoltura e di organizzare viaggi (per terra e per mare), congettura avvalorata anche dal significato letterale del termine geometria, che deriva dal greco e significa "misurazione della terra".

1.1 La geometria nelle civiltà antiche

1.1.1 Gli Antichi Egizi

La principale fonte diretta di informazione sulle conoscenze geometriche degli Antichi Egizi è il *papiro di Rhind* (Figura 1.1), scritto intorno al 1650 a.C. dallo scriba Ahmes e oggi conservato presso il *British Museum* di Londra [35].
Da tale papiro deduciamo che gli Egizi sapevano calcolare con buona precisione l'area di alcune figure geometriche. Nel problema 51, ad esempio, l'area del triangolo isoscele viene ricavata moltiplicando la metà di quella che per noi oggi è la base

del triangolo per la sua altezza. Ahmes giustificava questo metodo osservando che il triangolo isoscele poteva essere pensato come formato da due triangoli rettangoli, uno dei quali poteva essere spostato in modo da ottenere un rettangolo. Un'argomentazione analoga è riportata nel problema 52 nel calcolo dell'area di un trapezio isoscele. In trasformazioni come queste, in cui cioè triangolo e trapezi isosceli sono convertiti in rettangoli, possiamo ravvisare gli inizi della teoria della congruenza e l'affiorare dell'idea di dimostrazione geometrica. Tuttavia, a risultati così precisi si affiancano anche relazioni molto più approssimate. Ad esempio, in un atto notarile rinvenuto ad Edfu e risalente ad un periodo posteriore di circa 1500 anni al papiro di Rhind, l'area di un quadrilatero qualunque è calcolata come prodotto delle medie aritmetiche dei lati opposti. Seppur tale regola sia imprecisa, l'autore dell'atto notarile ne deriva un corollario, secondo cui l'area di un triangolo è pari alla metà della somma di due lati moltiplicata per la metà del terzo lato. Esso è un importante esempio della ricerca di relazioni tra figure geometriche, oltre che di un uso molto antico del concetto di zero in sostituzione di una grandezza geometrica.

Figura 1.1: Un frammento del papiro di Rhind (Fonte: https://ilpiccolofriedrich.blogspot.com)

Per quanto riguarda l'area del cerchio, la regola applicata dagli Egizi è stata considerata per molto tempo una delle maggiori conquiste scientifiche dell'epoca. Nel problema 48 del papiro di Rhind, è accennato il procedimento che conduce ad una formula per il calcolo dell'area di un cerchio del tipo

$$A = d^2 \left(\frac{8}{9}\right)^2, \tag{1.1}$$

dove A è l'area e d il diametro del cerchio. Tale formula fornisce la buona approssimazione di

$$\pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2, \tag{1.2}$$

che corrisponde a $\pi = 3{,}16$ circa e che deriva dal confronto tra l'area di un cerchio e quella di un ottagono regolare inscritti nello stesso quadrato.

Gli Antichi Egizi svilupparono un particolare interesse anche per la trigonometria e la teoria dei triangoli simili, esigenza probabilmente legata alla necessità di costruire piramidi con un'inclinazione uniforme delle facce. Infine, essi conoscevano il volume del cilindro, della piramide e del tronco di piramide (quest'ultimo era probabilmente calcolato decomponendo il solido in parallelepipedi, prismi e piramidi) [35].

In conclusione, le conoscenze geometriche degli Egizi erano perlopiù di natura pratica: il calcolo costituiva l'elemento fondamentale. Sembra che la presenza di qualche elemento teorico avesse lo scopo di facilitare le tecniche di calcolo più che la comprensione concettuale. Possiamo dunque constatare che la geometria egiziana era principalmente una branca dell'aritmetica applicata, dal momento che la presenza di relazioni elementari di congruenza era dovuta alla necessità di fornire strategie per effettuare misurazioni piuttosto che al desiderio di raggiungere una maggiore profondità concettuale [15].

1.1.2 I Babilonesi

Fino a pochi anni fa era diffusa la convinzione che i Babilonesi avessero dato scarsi contributi alla geometria. Questa considerazione si basava soltanto sulla poca accuratezza della misura del volume del tronco di piramide e dell'area del cerchio, quest'ultima calcolata moltiplicando per tre il quadrato del raggio. Tuttavia, il conteggio delle cifre decimali dell'approssimazione di π non può costituire un giudizio adeguato sullo sviluppo della geometria di una civiltà. La scoperta, poi, di un gruppo di tavolette risalenti alcune al primo periodo sumerico (2100 a.C.), altre all'era di Hammurabi (1700 - 1500 a.C.) e altre ancora al periodo più recente della civiltà babilonese (600 - 300 a.C.), e contenenti significativi risultati geometrici, ha dimostrato l'infondatezza della precedente convinzione. Una di queste tavolette, ad esempio, presenta i valori dei rapporti fra le aree e i quadrati dei lati dei poligoni regolari di tre, quattro, cinque, sei e sette lati, da cui si può dedurre la buona approssimazione di π come

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} = 3,125. \tag{1.3}$$

Questa tavoletta è un buon esempio del confronto sistematico di figure geometriche, ma è importante sottolineare che per i Babilonesi la geometria aveva un carattere algebrico: non era tanto il contesto geometrico che interessava loro, quanto piuttosto le approssimazioni numeriche usate nelle misurazioni.

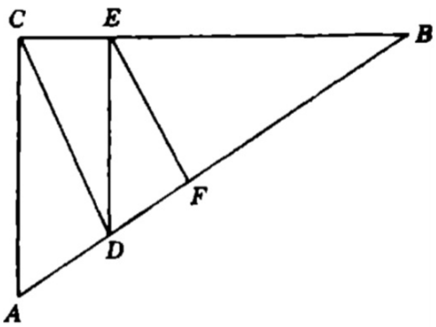


Figura 1.2: Rappresentazione di uno dei problemi presenti sulla tavoletta conservata al Museo di Bagdad (Fonte: [15])

Nelle tavolette cuneiformi compaiono anche molti problemi, concernenti la misura dei triangoli, che sembrano implicare il concetto di similitudine. In particolare, in una tavoletta conservata oggi al Museo di Bagdad, un triangolo rettangolo ABC (Figura 1.2) con lati noti, viene suddiviso in quattro triangoli rettangoli ACD, CDE, DEF e EFB [15].

Alle aree di questi triangoli sono assegnati dei valori, da cui, usando una sorta di "formula di similitudine" equivalente al teorema moderno secondo cui le aree di figure simili stanno tra loro come i quadrati dei lati corrispondenti, viene poi calcolata la lunghezza di AD, CD e BD. Applicando invece la "formula di similitudine" ai triangoli BCD e DCE si trova la lunghezza di CE, mentre il calcolo della lunghezza di DE è rimasto incompleto.

Abbiamo già accennato al fatto che i Babilonesi sapevano calcolare l'area delle principali figure geometriche, effettuando però approssimazioni piuttosto grossolane. L'area del quadrato, per esempio, veniva calcolata come prodotto delle medie aritmetiche delle coppie di lati opposti. Analogamente, il volume di un tronco di cono o di piramide era pensato come prodotto della media aritmetica delle basi superiore ed inferiore per l'altezza.

Mentre il teorema di Pitagora non compare sotto alcuna forma in nessuno dei documenti egiziani pervenuteci, in Mesopotamia esso era largamente usato [15]. In un testo cuneiforme attualmente conservato a Yale, per esempio, viene calcolato il rapporto tra la lunghezza della diagonale e quella del lato di un quadrato, corrispondente al valore di $\sqrt{2}$ sino a un milionesimo. L'accuratezza di tale risultato fu resa possibile grazie alla conoscenza del teorema di Pitagora. Al di là di tale approssimazione e dell'utilizzo di questa formula in un caso particolare, sembra però che il popolo babilonese avesse la consapevolezza di principi generali, come appunto quello secondo cui la diagonale di un qualsiasi quadrato può essere calcolata moltiplicando il lato per $\sqrt{2}$. In un altro antico testo babilonese si trova il seguente problema: una scala o una trave di lunghezza 0;30[1] è appoggiata a una parete; si chiede di quanto si allontanerà dalla parete l'estremità inferiore se l'estremità superiore scivola giù per una distanza di 0;6 unità. La risposta è trovata applicando quello che poi è stato chiamato teorema di Pitagora.

Infine, i Babilonesi erano a conoscenza anche di altre importanti relazioni geometriche. Come gli Antichi Egizi, sapevano che in un triangolo isoscele l'altezza divide la base in due parti tra loro congruenti e quindi, data la lunghezza della corda di un cerchio di raggio noto, erano in grado di trovarne l'apotema. Inoltre, a differenza del popolo egiziano, sapevano che un triangolo inscritto in un semicerchio è rettangolo.

In conclusione, le conoscenze geometriche del popolo babilonese non erano sistematiche, bensì un efficace strumento di organizzazione produttiva e sociale: i calcoli e le approssimazioni erano utili per organizzare viaggi (per terra e per mare), e per regolare i cicli dell'agricoltura.

1.1.3 I Cinesi

Sviluppatasi lungo i fiumi Yangtze e Giallo probabilmente tra il 2750 a.C. e il 1000 a.C., la civiltà della Cina fu caratterizzata da una prospera fioritura della matematica, come testimoniano anche alcune importanti opere pervenuteci.
Il più antico testo classico di argomento matematico, forse opera di parecchi scienziati di epoche differenti, è il *Chou Pei*, nome che sembra far riferimento all'uso dello gnomone nello studio della traiettoria circolare dei corpi celesti. Il libro, infatti, tratta principalmente di calcoli astronomici, anche se include un'introduzione sul triangolo rettangolo e alcune considerazioni sull'uso delle frazioni. Esso è redatto sotto forma di dialogo tra un principe e il suo ministro: quest'ultimo fa sapere al

[1] Il sistema di numerazione babilonese era quello sessagesimale e posizionale.

suo signore che l'arte dei numeri deriva dal cerchio e dal quadrato.
L'enunciato più significativo contenuto nel *Chou Pei* è il teorema di Pitagora, completo di dimostrazione geometrica. Nel testo si legge infatti:

> *"Dividiamo un rettangolo (diagonalmente) e poniamo che la larghezza sia di 3 unità e la lunghezza di 4 unità. Ora, dopo aver disegnato un quadrato su questa diagonale, circoscriviamolo con mezzi rettangoli come quello che è rimasto fuori in modo da formare una tabella quadrata. I quattro mezzi rettangoli esterni che misurano 3 unità di larghezza, 4 di lunghezza e 5 di diagonale, formano in tal modo insieme due rettangoli di area 24; quindi (quando questa viene sottratta dalla tabella quadrata di area 49) il rimanente ha area di 25 unità. Questo procedimento viene detto raggruppare rettangoli"* [35].

Nel seguito sono riportate due immagini che raffigurano il procedimento sopra descritto:

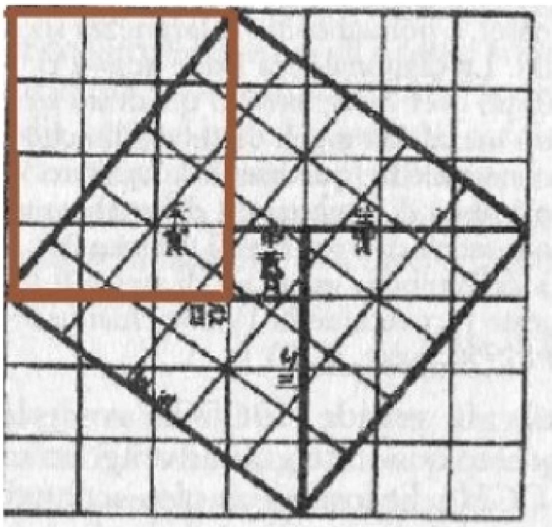


Figura 1.3: Dimostrazione geometrica del *Teorema di Pitagora* (Fonte: [35])

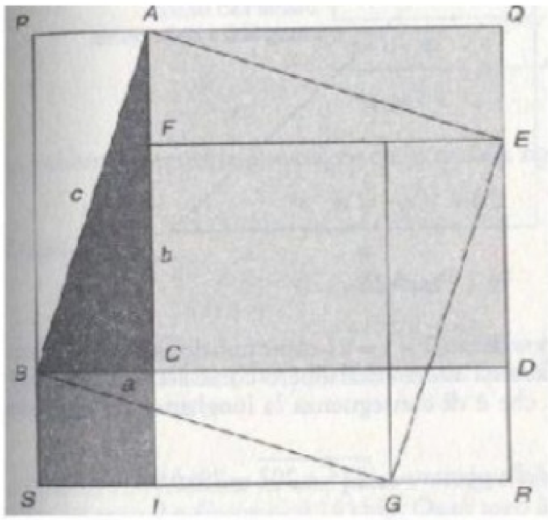


Figura 1.4: Dimostrazione geometrica del *Teorema di Pitagora* (Fonte: [35])

Tale dimostrazione, a differenza di quella euclidea, che richiede una notevole conoscenza delle proprietà geometriche relative ad aree e triangoli congruenti, permette una facile comprensione e applicazione del teorema a molti problemi pratici.

L'opera più influente per la cultura matematica cinese è però il *Chui-chang suan-shu*, ossia *Nove capitoli sull'arte matematica*; essa racchiude 246 problemi specifici riguardanti l'agrimensura, l'agricoltura, le associazioni, l'ingegneria, la tassazione, il calcolo, la soluzione delle equazioni e le proprietà dei triangoli rettangoli. Nonostante i *Nove capitoli* presentino per certi versi una forte somiglianza con la matematica egiziana, sembra che le origini della matematica cinese siano indipendenti da ogni influsso occidentale.
L'aspetto che più colpisce di tale raccolta è la giustapposizione di risultati accurati e di risultati approssimati, di procedimenti grossolani e di metodi molto precisi.

Vennero per esempio calcolate con precisione le aree di triangoli, rettangoli e trapezi. L'area del cerchio fu trovata prendendo tre quarti del quadrato costruito sul diametro o un dodicesimo del quadrato della circonferenza, risultato esatto con l'approssimazione di $\pi = 3$. Per l'area di un segmento di cerchio fu invece ricavato il risultato meno accurato di

$$\frac{s(s+c)}{2}, \tag{1.4}$$

dove s indica la misura del raggio meno l'apotema e c indica la corda (base del segmento).
Il nono e ultimo capitolo dell'opera comprende problemi sui triangoli rettangoli, alcuni dei quali sarebbero riapparsi più tardi in Europa. In uno di questi, ad esempio, si chiedeva quale fosse la profondità di una pozza d'acqua di 10 m^2 se una canna cresciuta al suo centro ed emersa dall'acqua per 30 cm raggiungeva appena la superficie se tirata verso il bordo della pozza. Un altro problema richiedeva di determinare l'altezza del punto in cui è spezzata la cima di una canna di bambù, alta 3 m, se la cima toccava il terreno a 1 m di distanza dalla radice [15].

In conclusione, anche in Cina, così come nell'Antico Egitto e in Mesopotamia, la geometria era nata dalla misurazione, ed era quindi da considerarsi essenzialmente una geometria aritmetica.

1.1.4 Gli Indiani

Gli scavi archeologici di Mohenjo Daro testimoniano l'esistenza in India di un'antica e raffinata civiltà durante il periodo dei costruttori delle piramidi egiziane, anche se non ci è pervenuto alcun documento matematico risalente a tale epoca. Più tardi il paese venne occupato da invasori ariani, che introdussero il sistema delle caste e svilupparono la letteratura sanscrita. É però a partire dal 476 a.C., anno in cui nacque *Aryabhata*, autore di uno dei più antichi testi matematici indiani, che la matematica indiana raggiunse la sua massima fioritura. Tuttavia, è importante ricordare che in tale paese vi è stata attività matematica molto prima di tale data.
L'India infatti, come l'Antico Egitto, ebbe i suoi "tenditori di corde": i più antichi risultati geometrici necessari per la costruzione di templi e altari, compresi l'orientamento, le dimensioni, la forma e le aree degli stessi, furono raccolti nel *Sulvasūtra*, corpo di regole e aforismi di carattere rituale o scientifico, da intendersi come teoremi o dimostrazioni matematiche. Per esempio, in questa raccolta si legge:

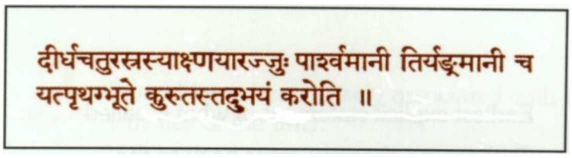


Figura 1.5: Il teorema di Pitagora nel *Sulvasūtra* (Fonte: [14])

"La diagonale di un rettangolo produce da sola entrambe le aree che i due lati del rettangolo producono separatamente" [14]. (Figura 1.5),

che corrisponde all'enunciato esplicito del teorema di Pitagora.

Nella versione più famosa dell'opera, denominata *Apastamba*, si trovano invece regole per la costruzione di angoli retti per mezzo di tre cordicelle, le cui lunghezze formano terne pitagoriche ricavabili dall'antica regola babilonese. É pertanto verosimile che la matematica mesopotamica ebbe un influsso su quella indiana. Tuttavia, in tale opera sono presenti anche regole che sembrano non essere state influenzate da altre civiltà.

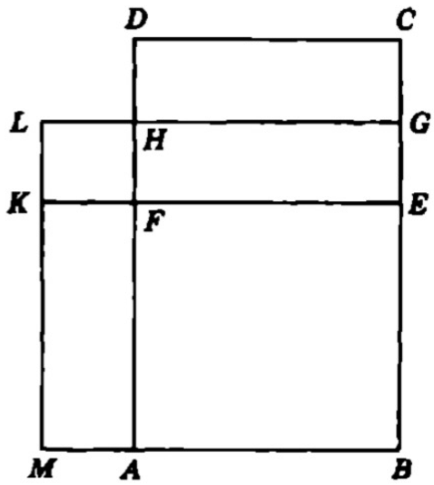


Figura 1.6: Rappresentazione del problema di costruzione di un quadrato di area pari ad ABCD (Fonte: [15])

Un esempio è dato dal problema di costruzione di un quadrato di area pari ad un rettangolo dato ABCD (Figura 1.6). Tale quesito presenta una forte somiglianza con alcune regole "dell'algebra geometrica" sviluppata nel libro II degli *Elementi* di Euclide [15]. Il problema è risolto segnando sui lati maggiori del rettangolo le lunghezze dei lati minori, cosicché AF = AB = BE = CD, e tracciando il segmento HG in modo che esso divida a metà i segmenti CE e DF. Si prolungano poi i segmenti EF fino a K, GH fino a L e AB fino a M, in modo che FK = HL = FH = AM, e si traccia la linea LKM. Infine, si costruisce un rettangolo avente la diagonale e il lato minore rispettivamente congruenti a LG e a HF. Il lato maggiore di tale rettangolo corrisponde al lato del quadrato richiesto.

Nei *Sulvasūtra* è riportata anche una selezione di costruzioni, tra cui quella di due diametri perpendicolari in un cerchio. Il procedimento proposto è il seguente: tracciando una linea si fissa uno spillo al centro. Infilando i lacci terminali su questo perno, si disegna un cerchio con il segno (il centro della corda) e si fissano i perni alle estremità del diametro. Con il capocorda prima sul perno orientale e poi su quello occidentale si disegna il cerchio con tutto il cordone. Il secondo diametro dovrebbe essere allungato attraverso i punti in cui questi cerchi si intersecano.
Un'altra costruzione presente nella raccolta è quella del quadrato dato il lato. Per farla, occorre fare dei legacci ad entrambe le estremità di una corda lunga quanto il lato desiderato e fare un segno al suo centro. Si traccia poi una linea e si fissa uno spillo al centro. Fissando i lacci su questo perno si traccia un cerchio in corrispondenza del segno centrale della corda e alle estremità del diametro si fissano i perni. Fermando una cravatta sullo spillo orientale e occidentale si disegnano due cerchi con l'altra cravatta. Attraverso i punti di intersezione dei due cerchi si traccia il secondo diametro e si fissano i perni a quest'estremità. Con le legature su ciascuno dei quattro spilli si traccia un cerchio con il segno centrale. I loro punti di intersezione esterni formano il quadrato.

Gli Indiani, poi, per rispondere all'esigenza di modificare la forma degli altari del

fuoco a seconda del beneficio cercato, erano anche in grado di trasformare alcune figure geometriche. Per esempio, sapevano trasformare un quadrato in un rettangolo e, in modo approssimato, in un cerchio.
Dall'esigenza di regolare confini territoriali o di proprietà, sembra invece che derivi la conoscenza del popolo indiano delle aree e della misurazione delle principali figure geometriche.

Anche gli Indiani, infine, conoscevano i valori approssimati di $\pi = 3{,}088$ e di $\sqrt{2} = 1{,}40972222222$.

1.2 La Geometria in Grecia

1.2.1 La Ionia e i pitagorici

Mentre, molto prima dell'Era cristiana, le civiltà dell'Antico Egitto e della Mesopotamia stavano declinando, lungo le coste del Mar Mediterraneo sbocciarono vigorose nuove culture. Tra queste, una delle più fiorenti fu sicuramente quella greca, la cui storia iniziò intorno al secondo millennio a.C., quando incolti invasori migrarono dalle regioni settentrionali assorbendo e col tempo arricchendo la cultura degli altri popoli. Si presume, ad esempio, che alcuni rudimenti del calcolo si fossero diffusi grazie alle attività mercantili. Commercianti, mercanti e uomini dotti, infatti, si aprirono ben presto dalla Grecia una via diretta verso i centri del sapere in Egitto e in Babilonia [15]. Essi, tuttavia, non si limitarono a far proprie le tradizioni di altre culture, ma fecero delle conoscenze matematiche oggetto di studio, di riflessione e di speculazione razionale, svincolandole da esigenze pratiche [10].
I due più grandi matematici dell'epoca furono Talete di Mileto e Pitagora di Samo.

Talete di Mileto

Le informazioni riguardanti la vita e le opere di Talete sono poche e incerte; probabilmente egli è nato e vissuto a Mileto[2] intorno il 600 a.C. Per certo, però, Talete fu considerato un uomo di intelligenza fuori dal comune e rappresentato come uno scienziato, distaccato dalla vita quotidiana, e insieme come un abile politico. Egli fu anche stimato come il primo filosofo, addirittura come il primo dei Sette Saggi, dal momento che fu uno dei primi indagatori delle scienze naturalistiche, matematiche e astronomiche, nell'ambito delle quali gli vennero attribuiti molti teoremi e scoperte. In particolare, in ambito matematico, a Talete venne attribuita la dimostrazione di alcuni risultati geometrici, tra cui la proposizione secondo cui un angolo inscritto in un semicerchio è retto, che Talete potrebbe aver appreso durante i suoi viaggi in Babilonia, e i seguenti quattro teoremi [15]:

- un cerchio viene bisecato dal suo diametro;
- gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti;

[2]Città costiera della Ionia d'Asia, situata nell'antica regione della Caria, in Asia Minore.

- le coppie di angoli al vertice formati da due rette che si intersecano sono congruenti;
- se due triangoli sono tali che due angoli e un lato di uno di essi siano congruenti rispettivamente a due angoli e a un lato dell'altro, allora i triangoli sono congruenti.

Nonostante non ci siano documenti antichi a conferma del fatto che egli giunse effettivamente a tali risultati, la tradizione è unanime su questo punto. La testimonianza che più si avvicina ad una prova sicura è un commento di Proclo (Costantinopoli, 412 d.C. - Atene, 485 d.C.) presente nelle prime pagine del suo *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, dove riferendosi a Talete scrisse:

> *"...andò dapprima in Egitto e da qui introdusse lo studio della geometria in Grecia. Non solo fece egli stesso numerose scoperte, ma insegnò ai suoi successori i principi che stavano alla base di molte altre, seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico"*[3] [15].

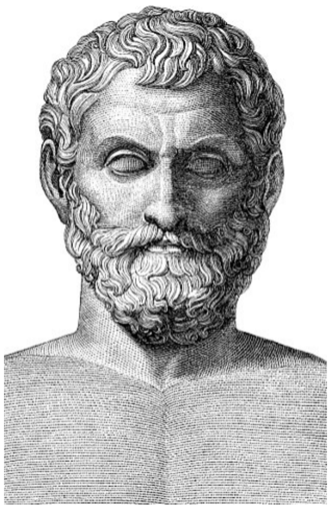


Figura 1.7: Talete di Mileto (640 a.C./625 a.C. circa - 548 a.C./545 a.C. circa), raffigurato dall'artista svedese Wilhelm Meyer (Fonte: Wikipedia)

É in gran parte su questa citazione che si basò l'indicazione secondo cui Talete fu il primo vero matematico, ossia il fondatore dell'impostazione deduttiva della matematica. Oggi sappiamo che una grande quantità di conoscenze matematiche erano note ai Babilonesi un millennio prima di Talete; tuttavia, fra i Greci era fuori discussione che Talete avesse realizzato precisi progressi. Sembrerebbe perciò ragionevole che egli abbia dato qualche contributo all'organizzazione razionale della matematica.

Pitagora di Samo

Pitagora è una figura non meno controversa di Talete, anzi essa appare ancor più fittamente avvolta nella leggenda. Di certo sappiamo che anch'egli fece viaggi in Egitto e in Babilonia, durante i quali raccolse informazioni matematiche e astronomiche e fece proprie anche molte credenze religiose. Tornato nel mondo greco, intorno al 540 a.C. lasciò Samo, isola del Dodecaneso nel quale nacque, per costruire a Crotone (nella Magna Grecia) una scuola scientifico-religiosa, con intenti di rigenerazione morale e politica. Tale setta, che oltre che segreta era anche comunitaria, ripose una notevole fiducia nel perseguire gli studi filosofici e matematici come base morale per la condotta di vita. Si suppone che i termini stessi di "filosofia" e di "matematica" fossero stati coniati dallo stesso Pitagora per descrivere la propria attività intellettuale.

[3] Questo passo è citato da T.L.Heath, *History of Greek Mathematics*, 1921, vol. 1, p. 128.

Sembra inoltre che il dogma della scuola fosse

Tutto è numero,

nel senso che "tutto si può spiegare in termini di numeri", cioè che l'essenza delle cose, sia in geometria che nella vita quotidiana, sia nelle questioni teoriche che in quelle pratiche, è spiegabile in termini di numeri interi e dei loro rapporti [10]. Tale concezione entrò poi in crisi con la scoperta delle incommensurabilità (cioè l'impossibilità di trovare sottomultipli comuni) di alcune grandezze, ad esempio del lato e della diagonale di un quadrato.

Figura 1.8: Pitagora di Samo (580 a.C./560 a.C. circa - 495 a.C. circa) raffigurato da John Augustus Knapp (Fonte: Wikipedia)

Dopo aver illustrato, nel passo precedentemente citato, l'attività svolta nel campo della geometria da Talete, Proclo continuava affermando quanto segue:

"Pitagora, venuto dopo di lui, trasformò questa scienza in una forma di educazione liberale, riconducendone i principi a idee ultime e dimostrandone i teoremi in maniera astratta e puramente intellettuale. Fu lui a scoprire la teoria delle proporzioni e la costruzione delle figure cosmiche"[4] [15].

Anche se tali affermazioni non sono da prendere alla lettera, di certo i pitagorici svolsero un ruolo cruciale nella storia della matematica. Infatti, nell'Antico Egitto e in Mesopotamia gli elementi dell'aritmetica e della geometria consistevano fondamentalmente in esercizi di procedimenti numerici applicati a problemi specifici. Mancava quindi un'impalcatura concettuale e una qualsiasi forma di discussione filosofica dei principi. Si ritiene che Talete abbia mosso i primi passi in tale direzione, anche se il nuovo orientamento dato alla matematica è tradizionalmente attribuito ai pitagorici, presso i quali la matematica era strettamente connessa più con l'amore per la scienza che con le esigenze della vita pratica. É quindi merito dei pitagorici l'aver reso la geometria una scienza deduttiva, rigorosa, separata il più possibile dalle sue origini pratiche e concrete.
Quanto alle opere, pare certo che ai pitagorici siano da attribuire, oltre che il famoso teorema di Pitagora, i seguenti risultati [15]:

- il teorema secondo cui la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli retti;
- la risoluzione geometrica delle equazioni di 2° grado;
- i primi elementi della teoria delle proporzioni e della similitudine;
- la scoperta degli incommensurabili;
- la costruzione dei cosiddetti "corpi cosmici", ossia dei cinque poliedri regolari, e la conoscenza delle loro proprietà.

[4]Questo passo è citato dd T.L.Heath, *History of Greek Mathematics*, 1921, vol. 1, p. 141.

Per quanto riguarda il teorema di Pitagora, esso probabilmente era noto anche al popolo babilonese, come è già stato osservato. Per giustificarne la denominazione, è stata avanzata l'ipotesi che i pitagorici siano stati i primi a fornirne una dimostrazione, anche se questa congettura non offre possibilità di verifica.

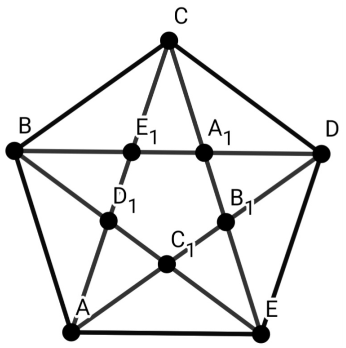


Figura 1.9: Costruzione di un pentagono stellato (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Una delle questioni più appassionanti della geometria pitagorica riguardò la costruzione di un pentagramma o pentagono stellato. Prendendo un pentagono regolare ABCDE (Figura 1.9), i pitagorici notarono che le cinque diagonali si intersecano nei punti A_1, B_1, C_1, D_1 ed E_1, vertici di un altro pentagono regolare [15].
Osservando che il triangolo BCD_1, ad esempio, è simile al triangolo isoscele BCE e notando la presenza di diverse coppie di triangoli tra loro congruenti, si vede che i punti di intersezione delle diagonali dividono ciascuna delle diagonali in due segmenti disuguali tali che il rapporto dell'intera diagonale al segmento maggiore è uguale al rapporto di questo segmento al segmento minore. Tale suddivisione rappresenta la famosa *sezione aurea* di un segmento, anche se tale nome venne usato per la prima volta soltanto duemila anni più tardi.

Il quadro della geometria pitagorica presentato si basa in larga misura su testimonianze di commentatori vissuti parecchi secoli più tardi. Anche se appare effettivamente plausibile supporre che siano stati i pitagorici a introdurre la concezione astratta e intellettuale della matematica che la trasformò in una vera e propria scienza, il livello di sottigliezza matematica raggiunto all'epoca non era forse così elevato come vorrebbe la tradizione. É inoltre evidente che il tipo di atteggiamento verso la matematica rappresentato dai pitagorici non era quasi certamente tipico del pensiero greco nel suo complesso. Gli elleni, infatti, erano anche astuti mercanti e commercianti, per cui dev'essere esistito anche un livello inferiore di matematica che soddisfaceva i bisogni di calcolo della grande maggioranza dei cittadini greci [15].

1.2.2 L'Età eroica

La storia della matematica greca si accentrò attorno alle cosiddette scuole ionica e pitagorica, i cui principali rappresentanti furono rispettivamente Talete e Pitagora. Tuttavia, nella seconda metà del V secolo a.C. sono frequenti e unanimi le testimonianze relative a un piccolo gruppo di matematici molto interessati a problemi che sarebbero stati alla base dei successivi sviluppi della geometria.
In quest'epoca l'attività matematica fiorì in quasi tutte le regioni affacciate al Mar Mediterraneo: in Italia meridionale ci furono Archita di Taranto e Ippaso di Metaponto; in Tracia Democrito; nella penisola attica Ippia di Elide; ad Atene Ippocrate di Chio, Anassagora di Clazomene e Zenone di Elea.
Il tipo di matematica abbracciato da tali personaggi era abbastanza diverso da quello degli Egizi e dei Babilonesi: la matematica non era più un'applicazione pratica

dei numeri alla vita quotidiana, quanto piuttosto una disciplina più strettamente collegata alla filosofia.

Anassagora, per esempio, rappresentò il tema tipicamente greco del desiderio di conoscenza [15]. La sua mentalità di ricercatore lo portò a studiare attivamente alcuni problemi matematici, come quello della quadratura del cerchio.

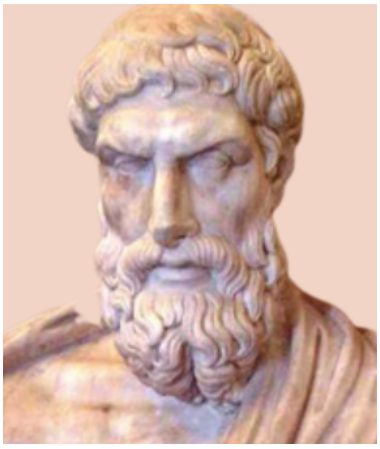


Figura 1.10: Mezzobusto di Anassagora (496 a.C. - 428 a.C. circa) (Fonte: https://isentieridellaragione.weebly.com)

Secondo la tradizione, all'origine di un altro famoso problema, quello della "duplicazione del cubo", ci fu il contagio di peste che intorno al 429 a.C. causò la morte di circa un quarto dell'intera popolazione ateniese. Sembra infatti che una delegazione venne mandata all'oracolo di Apollo a Delo per interrogarlo su come allontanare la peste, e questi replicò che si sarebbe dovuto duplicare l'altare cubico di Apollo. Gli ateniesi raddoppiarono le dimensioni dell'altare, ma con scarso risultato sulla pestilenza. Questo perché l'altare era stato aumentato di otto volte in volume invece che raddoppiato.
Nella stessa epoca, ad Atene si diffuse un terzo famoso problema: dato un angolo, costruire usando soltanto la riga e il compasso un altro angolo la cui ampiezza fosse un terzo dell'angolo dato. Questi tre problemi - la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo - da allora sono noti come i "tre problemi classici" dell'antichità. Essi furono risolti oltre 2000 anni dopo, ma gli sforzi compiuti dai matematici dell'età eroica per ottenere l'impossibile, o, di fronte l'insuccesso, per modificare le regole di costruzione, contribuì allo sviluppo del pensiero matematico posteriore.

Ippocrate di Chio, invece, nato nell'omonima isola del Dodecanneso, intorno al 430 a.C. si trasferì ad Atene per dedicarsi allo studio della geometria, dove ottenne notevoli successi. Sembra infatti che egli abbia scritto un'opera di *Elementi di geometria*, da considerarsi un'anticipazione dei primi quattro libri degli *Elementi* di Euclide, e un manuale che trattava il problema della quadratura delle lunule[5]. Tali trattati sono andati perduti; tuttavia possediamo un frammento su Ippocrate che Simplicio (attivo verso il 250 d.C.) copiò dalla *Storia della matematica* di Eudemo, dove si attribuisce ad Ippocrate il teorema secondo cui segmenti di cerchio simili stanno tra loro nello stesso rapporto che intercorre tra i quadrati costruiti sulle loro basi. Sembra che Ippocrate lo abbia dimostrato provando innanzitutto che le aree di due cerchi stanno tra loro come i quadrati costruiti sui loro diametri. Egli risentì quindi dell'influsso del pensiero pitagorico, dal momento che in tale dimostrazione adottò i concetti e il linguaggio della teoria delle proporzioni.

[5]Lunula: figura delimitata da due archi di cerchio di raggio diverso.

A partire da questo teorema, Ippocrate riuscì ad ottenere la prima rigorosa quadratura di un'area curvilinea nella storia della matematica [15]. Egli infatti, sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele inscritto in un semicerchio (Figura 1.12), costruì un segmento simile ai segmenti circolari costruiti sui lati del triangolo rettangolo. Poiché i segmenti stanno tra loro come i quadrati costruiti sulle loro basi, in virtù del teorema di Pitagora si ha che la somma dei due segmenti circolari minori risulta uguale al segmento circolare maggiore. Pertanto, la differenza tra il semicerchio AC e il segmento ADCE è uguale al triangolo ABC. La lunula ABCD è dunque esattamente uguale al triangolo ABC, e poiché quest'ultimo è uguale al quadrato costruito sulla metà di AC, si è ottenuta così la quadratura della lunula.

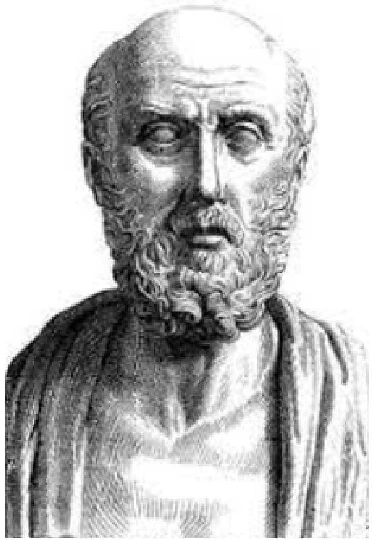


Figura 1.11: Raffigurazione di Ippocrate di Chio (470 a.C. - 410 a.C.) (Fonte: Enciclopedia Treccani, online https://www.treccani.it/enciclopedia)

Eudemo descrisse anche la quadratura ippocratica di una lunula basata su un trapezio isoscele ABCD inscritto in un cerchio (Figura 1.13) in modo che il quadrato costruito sulla base maggiore AD sia uguale alla somma dei quadrati costruiti sui tre lati AB, BC e CD, tra loro congruenti. Allora, se sul lato AD si costruisce un segmento circolare AEDF simile a quelli costruiti sui tre lati uguali, la lunula ABCDE ha area uguale a quella del trapezio ABCDF.

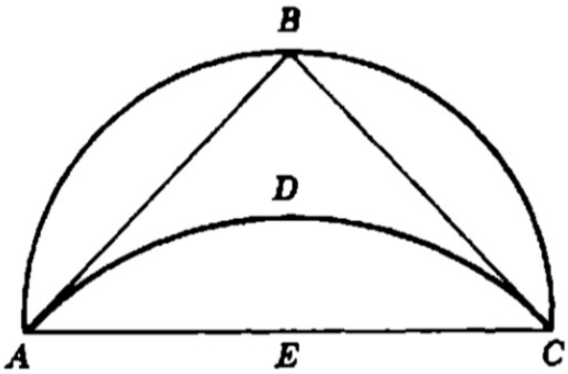


Figura 1.12: Quadratura ippocratica di una lunula basata su un triangolo rettangolo (Fonte: [15])

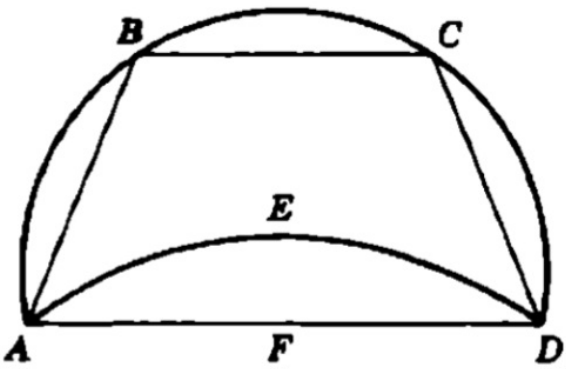


Figura 1.13: Quadratura ippocratica di una lunula basata su un trapezio isoscele (Fonte: [15])

Questi risultati sono significativi come indicazione del livello raggiunto dalla matematica greca a quel tempo. Essi mostrano infatti come i matematici ateniesi fossero esperti nel trattare le trasformazioni di aree e le proporzioni [15] e come Ippocrate abbia contribuito ai progressi sulla questione dei due problemi classici di quadratura del cerchio e di duplicazione del cubo.

Nella seconda metà del V secolo a.C., fra i sofisti che erano attivi ad Atene c'era Ippia, a cui dobbiamo l'introduzione nella matematica della prima curva, oltre il cerchio e la retta: la trisettrice, o quadratrice, di Ippia [15]. Il nome deriva dal fatto che essa può essere utilizzata per la quadratura del cerchio.

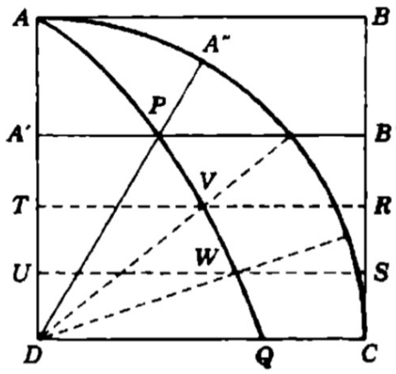


Figura 1.14: Trisettrice di Ippia (Fonte: [15])

La curva si traccia nel modo seguente: nel quadrato ABCD (Figura 1.14) si trasli verso il basso la retta AB fino a farla coincidere con DC, e tale movimento abbia luogo esattamente nello stesso intervallo in cui il lato DA ruoti uniformemente in senso orario dalla sua posizione fino a coincidere con DC. Se le posizioni delle due rette in movimento vengono rappresentate da A'B' e DA" rispettivamente, e se P è il punto di intersezione di A'B' e DA", il luogo dei punti P durante il movimento delle due rette è la trisettrice di Ippia, ossia la curva APQ. Data tale curva, è facile effettuare la trisezione dell'angolo: per esempio, se l'angolo da trisecare è PDC, si trisecano i segmenti B'C e A'D nei punti R, S, T e U. Se i segmenti TR e US tagliano la trisettrice in V e W rispettivamente, per la proprietà della trisettrice divideranno l'angolo PDC in tre parti congruenti.

Figura 1.15: Mezzobusto di Archita di Taranto (428 a.C. - 360 a.C.) (Fonte: Wikipedia)

Dopo la morte di Pitagora, il centro di Crotone venne abbandonato, ma alcuni discepoli portarono le dottrine della scuola in altre parti del mondo greco. Fra coloro che vennero educati da questi pitagorici, ci fu Filolao di Taranto, che sembra avesse posizioni estreme per quanto concerneva il culto del numero; posizioni che egli ha trasmesso ad Archita, suo allievo. Quest'ultimo attribuì un ruolo considerevole alla matematica nel suo curricolo di studi, e a lui venne attribuita la designazione delle quattro branche del quadrivio: aritmetica, geometria, musica e astronomia [15].

Archita diede inoltre contributi originali alla matematica: il risultato più notevole in tal senso fu una soluzione tridimensionale del problema della duplicazione del cubo, descritta nel seguito con un linguaggio moderno. Sia a il lato del cubo da duplicare, e sia $(a, 0, 0)$ il centro di tre cerchi di raggio a perpendicolari tra loro e giacenti in piani perpendicolari agli assi di un sistema di coordinate. Attraverso il cerchio perpendicolare all'asse delle ascisse, si costruisce un cono circolare retto con vertice nel punto $(0, 0, 0)$; attraverso il cerchio che giace nel piano determinato dagli assi delle x e delle y si fa passare un cilindro e il cerchio che giace nel piano determinato dagli assi delle x e delle z si fa ruotare attorno all'asse delle z, così da generare un toro. Queste tre superfici si intersecano nel punto di ascissa $a\sqrt[3]{2}$; la lunghezza di tale segmento rappresenta il lato del cubo desiderato.

Alla luce delle considerazioni fatte, possiamo dunque affermare che il ruolo preminente che la matematica ebbe nell'educazione classica è dovuto molto anche ad Archita.

Tra gli illustri personaggi che produsse l'Età eroica, va sicuramente annoverato anche Democrito di Adbera, famoso, oltre che per aver proposto una dottrina atomica materialistica, anche come geometra. La tradizione riferisce che per acquisire il maggior numero possibile di nuove conoscenze, egli visitò Atene, l'Egitto, la Mesopotamia e forse anche l'India. Produsse anche diversi scritti, tra cui *Sulla geometria*, *Sulle tangenti* e *Sulle proiezioni*, che però non ci sono stati tramandati [15]. La chiave della matematica di Democrito è da trovarsi nella sua dottrina fisica, l'atomismo, probabilmente suggeritogli dall'atomismo geometrico dei pitagorici. Non sorprende quindi che i problemi matematici a cui egli era maggiormente interessato fossero quelli che richiedevano una sorta di metodo infinitesimale. Gli Antichi Egizi, per esempio, sapevano ma non avevano dimostrato che il volume di una piramide è un terzo del prodotto della base per l'altezza. La dimostrazione di tale fatto richiedeva infatti un punto di vista equivalente al calcolo infinitesimale, che non era presente negli Antichi Egizi. Sembra invece che Democrito avesse mostrato che un prisma triangolare può essere diviso in tre piramidi triangolari, le quali, prese a due a due, hanno uguale altezza e uguale area di base. Da ciò dedusse, in base all'ipotesi che piramidi che hanno la stessa altezza e basi uguali sono uguali, il noto teorema egiziano. Tale ipotesi poteva essere giustificata soltanto mediante l'applicazione di tecniche infinitesimali. Un altro teorema attribuito a Democrito, e pensato come corollario del precedente risultato, è quello secondo cui il volume di un cono è un terzo del volume del cilindro ad esso circoscritto.

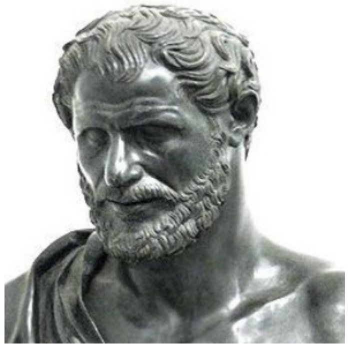


Figura 1.16: Mezzobusto di Democrito di Adbera (470 a.C./457 a.C. - 360 a.C./350 a.C) ritrovato nella *Villa dei papiri* ad Ercolano (Fonte: Wikipedia)

In conclusione, i matematici dell'Età eroica furono responsabili dell'orientamento fondamentale delle tradizioni educative occidentali, specialmente nella forma in cui esse vennero trasmesse dai filosofi del IV secolo a.C.

1.2.3 L'Età di Platone e di Aristotele

Dopo la morte di Socrate, avvenuta nel 399 a.C., si aprì nella Magna Grecia un altro importante periodo storico, durante il quale Platone e Aristotele divennero i più influenti ispiratori.

Platone

Nonostante Platone non abbia dato personalmente alcun contributo significativo alla matematica dal punto di vista strettamente tecnico, fu nondimeno il centro dell'attività matematica dell'epoca e ne guidò e ispirò lo sviluppo. Sulla porta d'ingresso della sua scuola era affisso il motto *"Nessuno entri, che non sia geometria"*[6] [49], ad evidenziare come il suo entusiasmo e la sua alta considerazione per la matematica lo avessero reso famoso come il "creatore dei matematici". A convertire Platone alla mentalità matematica fu Archita, che visitò in Sicilia nel 388 a.C.

Figura 1.17: Dettaglio della *Scuola di Atene* di Raffaello che ritrae Platone (428 - 348 a.C.) (Fonte: Wikipedia)

Fu forse in occasione di tale incontro che Platone venne a conoscenza dei cinque solidi regolari da lui poi associati ai quattro elementi di Empedocle: il caldo, il secco, il freddo e l'umido. Non è da escludere che sia stato proprio il culto pitagorico per la figura geometrica del dodecaedro a indurre il filosofo a considerare tale solido come simbolo dell'universo. Platone descrisse le sue idee concernenti i solidi regolari e il loro impiego nelle spiegazioni scientifiche dei fenomeni nel dialogo dal titolo *Timeo* [15].
Per quanto riguarda la geometria, Platone abbracciò la concezione della matematica pura, contrapponendo tale disciplina alle idee materialistiche dell'artigianato e del tecnico. Plutarco, nella *Vita di Marcello*, riferì dell'indignazione di Platone per l'impiego di mezzi meccanici nelle dimostrazioni geometriche. Di conseguenza, è plausibile che tale personaggio sia stato il principale responsabile della restrizione prevalente nella matematica greca a quelle costruzioni geometriche che potevano essere effettuate con il solo uso di riga e compasso. La filosofia platonica, infatti, attribuiva alla retta e al cerchio un ruolo privilegiato fra tutte le altre figure geometriche. Allo stesso modo, Platone glorificava il triangolo, tant'è che secondo la sua teoria unitaria della materia ogni cosa era composta da triangoli rettangoli. La crescita normale del corpo, ad esempio, veniva spiegata in questi termini:

"Quando la struttura della creatura è giovane e i triangoli dei suoi corpi costituenti sono ancora, per così dire, freschi di fabbricazione, le loro giunture sono saldamente connesse...di conseguenza, poiché i triangoli che compongono il cibo e le bevande sono tutti più vecchi e più deboli di quelli di quelli del corpo giovane, questo con i suoi freschi triangoli li vince e li taglia; in tal modo l'animale cresce e diventa più grande" [15].

Nella vecchiaia, d'altro lato, i triangoli del corpo *"non sono più in grado di tagliare a propria somiglianza i triangoli del nutrimento ingerito, ma vengono essi stessi facilmente divisi dai corpi invasori provenienti dall'esterno"*[7], e così la creatura finisce con l'esserne distrutta [15].

Con Platone la geometria divenne il modo attraverso cui si viene a conoscenza del mondo delle idee: i ragionamenti impiegati in geometria facevano riferimento alle idee assolute rappresentate dalle figure geometriche. In particolare, secondo Platone

[6] In chiave moderna si traduce "Non entri nessuno che sia ignorante di geometria" [15].
[7] I due passi citati sono la traduzione di F.M. Cornford, *Plato's Cosmology*, 1937, p. 329.

la correttezza di un teorema non derivava dalla correttezza della dimostrazione, bensì dal fatto che essa descriveva una situazione reale. Egli, quindi, non sottolineò mai particolarmente il ruolo della deduzione.
Da ultimo, il filosofo ebbe un influsso notevole sullo sviluppo della matematica: l'Accademia Platonica di Atene diventò il centro più importante per la matematica, e fu da essa che provennero i più eminenti insegnanti e studiosi attivi nel IV secolo a.C.

Aristotele

Filosofo e biologo, allievo di Platone, Aristotele è annoverato fra coloro che contribuirono allo sviluppo della matematica greca. Egli, in particolare, esaminò e descrisse le basi logiche sulle quali è possibile fondare una scienza dimostrativa, contribuendo in tal modo alla sua sistemazione assiomatica. Le discussioni aristoteliche sul concetto di infinito attuale e potenziale in geometria e in matematica esercitarono infatti un influsso sui matematici posteriori che si occuparono dei fondamenti della matematica. Aristotele si interessò più propriamente al metodo matematico. Nell'*Organon* e nella *Metafisica*, egli sistematizzò la logica come scienza del ragionamento, sostenendo che le leggi della logica sono certamente formalizzate sul modello delle dimostrazioni matematiche, ma anche che la logica dev'essere considerata indipendentemente dalla matematica, e ad essa precedente. Secondo il filosofo, in particolare, la deduzione è l'unico modo per stabilire la verità di un enunciato matematico [10]. Per quanto tuttavia Aristotele avesse elevato la matematica a disciplina rigorosa e astratta rispetto alla scienza della natura, egli la applicò per spiegare fenomeni naturali e realistici.

Figura 1.18: Dettaglio della *Scuola di Atene* di Raffaello che ritrae Aristotele (384 - 322 a.C.) (Fonte: Wikipedia)

Di certo le personalità più influenti di quest'epoca furono Platone e Aristotele, ma è doveroso ricordare che anche altri matematici contribuirono allo sviluppo della matematica in questo periodo. Ad esempio, Menecmo e il fratello Dinostrato "risolsero" rispettivamente il problema della duplicazione del cubo e della quadratura del cerchio. Autolico di Pitane, contemporaneo di Aristotele, compose invece un breve trattato dal titolo *Sul moto della sfera*, contenente teoremi elementari di geometria della sfera enunciati e dimostrati con chiarezza. Infine, Eudosso contribuì allo sviluppo della teoria delle proporzioni, ma rinforzò anche la geometria introducendo molti teoremi generali e applicando il metodo platonico dell'analisi allo studio della sezione aurea.

1.2.4 Euclide di Alessandria

Dopo la morte di Alessandro Magno, il controllo della parte egiziana del suo impero andò nelle mani di Tolomeo I, monarca che diresse la sua attenzione verso sforzi costruttivi. Egli, fra le altre cose, istituì ad Alessandria d'Egitto una Biblioteca e un Museo, scuola che *"rappresentò il trionfo della cultura specializzata: la cosiddetta cultura ellenistica."* (Geymonat[8], 1973, p. 284). Qui si svolsero rigorose ricerche su problemi particolari, che coltivarono l'interesse per l'indagine scientifica e il metodo della specializzazione.

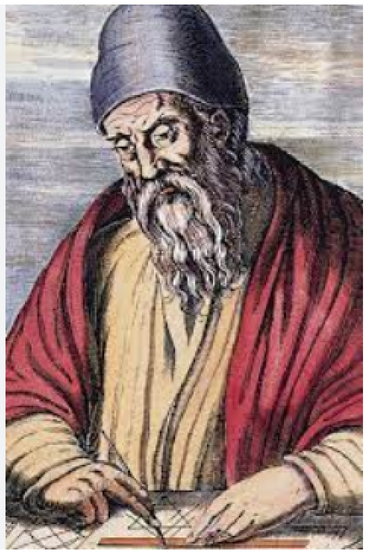


Figura 1.19: Euclide di Alessandria (IV - III secolo a.C.) raffigurato da Andre Thevet (1584) (Fonte: https://www.alamy.it)

L'antica figura del filosofo venne sostituita da quella del dotto, con proprie competenze scientifiche e in grado di formare studiosi *"sempre più ricchi di seria e sicura dottrina."* (Geymonat, 1973, p. 284). Tra gli eminenti studiosi che Tolomeo I chiamò ad insegnare nella sua accademia, c'era probabilmente anche Euclide, autore del più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto: gli *Elementi*. Nonostante la fama di cui godette Euclide, scarse sono le notizie sulla sua vita. La testimonianza più significativa su cui si basa la storiografia che lo riguarda viene da Proclo, che nel *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, scrisse:

> *"Non molto più giovane di questi* [Ermotico di Colofone e Filippo di Medma, matematici dell'Accademia platonica] *è Euclide, che raccolse gli "Elementi", ordinò molti risultati di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto, ed ancora condusse a dimostrazioni inconfutabili ciò che i suoi predecessori avevano dimostrato poco rigorosamente. Visse costui al tempo del primo Tolomeo; [...] e a dire il vero si racconta anche che Tolomeo chiese una volta a quest'ultimo* [Euclide] *se non ci fosse una strada per apprendere la geometria più breve degli "Elementi"; ed egli rispose che non ci sono vie regie per la geometria. Euclide è dunque più giovane dei discepoli di Platone, ma più anziano di Eratostene e di Archimede"* [10].

Euclide è di certo ricordato per aver composto gli *Elementi*, che approfondiremo nella prossima sezione, ma egli fu autore di una dozzina di altre opere che coprivano vari argomenti: l'ottica, l'astronomia, la musica, la meccanica e le sezioni coniche. Alcuni di questi scritti sono purtroppo andati perduti; tra questi ricordiamo [10]:

- Trattato sulle coniche, citato da Apollonio, Archimede e Pappo;
- Luoghi superficiali, citato da Pappo e da Proclo;
- False conclusioni, citato da Proclo e Michele Efesio;

[8] Ludovico Geymonat (1908-1991), matematico e storico della filosofia dell'Italia del Novecento.

- Porismi[9].

Le opere euclidee giunte fino a noi sono invece:

- gli *Elementi*;
- *I dati*, da considerarsi un'opera sussidiaria degli *Elementi* e che serviva come guida all'analisi di problemi di geometria al fine di scoprirne le dimostrazioni. Il testo si apre con quindici definizioni su grandezze e luoghi, a cui seguono novantacinque proposizioni concernenti le implicazioni di condizioni e grandezze che possono essere date in un problema. Si trovano infine semplici regole geometriche concernenti rette parallele e grandezze proporzionali.
- *La Divisione delle figure*, raccolta di trentasei proposizioni concernenti la divisione di figure piane. Ad esempio, la Proposizione 1 chiede di determinare una retta parallela alla base di un triangolo di modo che le due parti abbiano la stessa area; la Proposizione 4 è l'analogo per un trapezio; la Proposizione 6 chiede di effettuare la divisione di un parallelogramma in due parti uguali mediante una retta passante per un punto dato appartenente ad uno dei suoi lati, oppure passante per un punto dato che si trovi fuori delle figura stessa (Proposizione 10). La Proposizione 36, infine, chiede di dividere un quadrilatero secondo un rapporto dato per mezzo di una retta passante per un punto di uno dei lati del quadrilatero stesso.
- *I Fenomeni*, opera di geometria sferica ad uso degli astronomi;
- *L'Ottica*, uno dei primi trattati sulla prospettiva, ossia la geometria della visione diretta;
- *La Catottrica*, trattato sulla geometria dei raggi riflessi e forse opera di Teone di Alessandria;
- tre libri di Porismi, conservatici in un riassunto di Pappo, e che Commandino fece conoscere nel 1589 in una versione latina;
- Sezione del Canone;
- Introduzione armonica.

1.3 Gli *Elementi* di Euclide

Gli *Elementi* sono da intendersi come un manuale introduttivo che abbracciava tutta la matematica elementare, ossia la geometria sintetica (dei punti, delle rette, dei piani, dei cerchi e delle sfere, ecc.), l'aritmetica (nel senso di "teoria dei numeri") e l'algebra (nel senso di algebra geometrica, e non simbolica), anche se la presenza di questa disciplina è molto discussa tra gli storici. Si noti che l'arte del calcolo non era inclusa, dal momento che questa non faceva parte dell'educazione superiore.

[9]Pappo riferisce di un porisma come una via di mezzo tra un teorema, in cui si propone la dimostrazione di un fatto, e un problema, in cui invece si propone la costruzione di qualcosa. Altri hanno descritto un porisma come una proposizione in cui si determina una relazione tra quantità note e quantità variabili o indeterminate.

Nemmeno lo studio delle coniche o delle curve era presente, poiché esso costituiva una branca più avanzata della matematica. Il trattato euclideo non aveva uno scopo didattico-educativo, bensì costituiva una sobria esposizione, logicamente strutturata, degli elementi fondamentali della matematica elementare, comprendenti anche riferimenti ad altri autori, resoconti di ricerche recenti e informazioni informali. Euclide, infatti, attinse a piene mani dalle opere dei suoi predecessori, abbandonando la pretesa di essere originale. Tuttavia, si ritiene che la disposizione della materia e la sistemazione della geometria da un punto di vista ipotetico-deduttivo, oltre che qualche dimostrazione, siano opera sua. Possiamo dunque affermare che gli *Elementi* contengono l'eredità dei tre secoli precedenti della matematica greca e costituiscono il primo esempio di sistema assiomatico deduttivo, consegnando ai posteri un'immagine duratura di cosa sia una scienza ed un'esposizione scientifica della matematica [10].

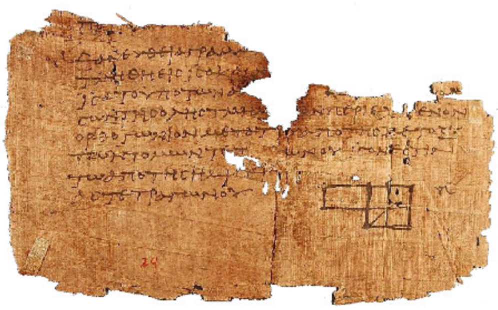


Figura 1.20: Frammento di una copia degli *Elementi* di Euclide (Fonte: [10])

Gli *Elementi* ci sono pervenuti grazie alla prima ricostruzione che ne fece nel IV secolo d.C. Teone di Alessandria, che appose deliberatamente alcune modifiche allo scopo di rendere il linguaggio "più chiaro"; egli, in particolare, interpolò alcuni passi di dimostrazioni, aggiunse dimostrazioni alternative ed inserì dei teoremi secondari nuovi [10]. Successivamente, l'opera fu tradotta da alcuni scrittori arabi, come Alhazen (965-); nel 1120, poi, Adelardo di Bath (1080-1152) tradusse una copia in latino. Nel 1270 la traduzione di Adelardo fu riveduta da Campano da Novara (1220-1296), e nel 1482 fu stampata a Venezia. In un secondo momento furono rinvenute altre copie greche della versione di Teone, ma soprattutto una versione greca degli *Elementi* anteriore a quella di costui. Su queste fonti, intorno al 1880, il filologo danese J. L. Heiberg ricostruì l'originale dell'opera, e nel 1908 T.L. Heath tradusse quest'ultima versione in lingua inglese. La prima edizione italiana, che risale al 1925, è dovuta al matematico Federigo Enriques (1871-1946) [19]. Nel 1970, poi, apparve una nuova traduzione italiana a cura di Lamberto Maccioni con i commenti di Attilio Frajese [20]. Infine, nel 2007 Fabio Acerbi tradusse tutte le opere di Euclide, compresi gli *Elementi* [1].

Gli *Elementi* sono suddivisi in tredici libri o capitoli: i primi quattro trattano della geometria del piano (in particolare, della geometria piana elementare, dell'algebra geometrica, delle proprietà fondamentali del cerchio e dei poligoni regolari), il Libro V della teoria delle proporzioni, il sesto delle similitudini nel piano, i libri VII - VIII - IX affrontano la teoria dei numeri interi e razionali, il Libro X gli irrazionali quadratici, e infine gli ultimi tre libri della geometria dello spazio.

Nel seguito approfondiremo i contenuti del Libro I, presentati attraverso le traduzioni di Attilio Frajese [20] e Fabio Acerbi [1].

Libro I

Il Libro I degli *Elementi* si apre con un elenco di ventitré **definizioni** o "termini", che servono a caratterizzare gli enti geometrici:

1. *Punto è ciò che non ha parti.*
2. *Linea è una lunghezza senza larghezza.*
3. *Estremi di una linea sono punti.*
4. *Linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su essa* (*cioè, ai suoi punti*).
5. *Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.*
6. *Estremi di una superficie sono linee.*
7. *Superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su essa* (*cioè, alle sue rette*).
8. *Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee su un piano, le quali si incontrino fra loro e non giacciano in linea retta.*
9. *Quando le linee che comprendono l'angolo sono rette, l'angolo si chiama rettilineo.*
10. *Quando una retta innalzata su una* [*altra*] *retta forma gli angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli uguali è retto, e la retta innalzata si chiama perpendicolare a quella su cui è innalzata.*
11. *Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.*
12. *Angolo acuto è quello minore di un retto.*
13. *Termine è ciò che è estremo di qualche cosa.*
14. *Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.*
15. *Cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea* [*che si chiama circonferenza*] *tale che tutte le rette, le quali cadano sulla* [*stessa*] *linea* (*,cioè sulla circonferenza del cerchio,*) *a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro.*
16. *Quel punto si chiama centro del cerchio.*
17. *Diametro del cerchio è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.*
18. *Semicerchio è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. E centro del semicerchio è quello stesso che è anche centro del cerchio.*
19. *Figure rettilinee sono quelle comprese da rette, vale a dire: figure trilatere quelle comprese da tre rette, quadrilatere quelle comprese da quattro rette, e multilatere quelle comprese da più di quattro rette.*

20. *Delle figure trilatere, è triangolo equilatero quello che ha i tre lati uguali, isoscele quello che ha soltanto due lati uguali, e scaleno quello che ha i tre lati disuguali.*

21. *Infine, delle figure trilatere, è triangolo rettangolo quello che ha un angolo retto, ottusangolo quello che ha un angolo ottuso, ed acutangolo quello che ha i tre angoli acuti.*

22. *Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti, ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi.*

23. *Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.*

Alcuni studiosi moderni criticano tale esposizione, dal momento che una definizione, per essere rigorosi, può essere data utilizzando termini primitivi indefiniti e posti esplicitamente come tali. Euclide, invece, introduce delle affermazioni (si pensi, ad esempio, a "punto è ciò che non ha parti") che non definiscono nulla, dal momento che non sono espresse in termini di concetti precedentemente definiti. Inoltre, egli fa uso di termini che sono stati successivamente criticati da un punto di vista matematico: per esempio, utilizza il termine "uguale" per caratterizzare la congruenza tra due oggetti geometrici.
Euclide, infine, sostiene che un triangolo equilatero non sia un particolare tipo di triangolo isoscele, come invece è considerato per la matematica moderna. Allo stesso modo, per lui un quadrato non è un particolare tipo di rettangolo / rombo / parallelogramma.

Dopo le definizioni, Euclide enuncia cinque **postulati** o "richieste", cioè proposizioni considerate vere senza essere dimostrate e di argomento più specificatamente geometrico, riportati di seguito:

1. *Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.*

2. [*Risulti postulato:*] *e che una retta terminata (= finita) si possa prolungare continuamente in linea retta.*

3. [*Risulti postulato:*] *e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza (= raggio).*

4. [*Risulti postulato:*] *e che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.*

5. [*Risulti postulato:*] *e che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli alterni interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).*

É importante notare che con il termine "retta", Euclide intende ciò che noi oggi chiamiamo "segmento".

Seguono poi nove **assiomi** o "nozioni comuni", ossia delle proposizioni considerate vere senza essere dimostrate e che hanno una portata estremamente generale, che sono:

1. *Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.*
2. *E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.*
3. *E se cose uguali sono sottratte a cose uguali, i resti sono uguali.*
4. *E se cose uguali sono addizionate a cose disuguali, le totalità sono disuguali.*
5. *E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.*
6. *E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.*
7. *E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.*
8. *E il tutto è maggiore della parte.*
9. *E due rette non comprendono uno spazio.*

Nonostante Euclide distingua le "richieste" dalle "nozioni comuni", i matematici moderni non fanno alcuna differenza tra postulati e assiomi. Nel seguito i due termini verranno quindi usati come sinonimi.

Seguono infine 48 **proposizioni**, dimostrate sulla base delle definizioni, dei postulati, degli assiomi sopra introdotti e di eventuali proposizioni precedentemente dimostrate. Tali proposizioni si dividono in due categorie:

- **problemi**, in cui si richiede di costruire un oggetto geometrico con determinate proprietà; il loro enunciato è seguito dalla descrizione della costruzione necessaria, che corrisponde alla dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito, e poi dalla dimostrazione che la figura così costruita soddisfa le proprietà richieste;
- **teoremi**, in cui si richiede invece di dimostrare una proprietà inerente una certa configurazione di enti geometrici.

Inoltre, le proposizioni sono ordinate deduttivamente "in avanti", nel senso che le proposizioni successive sono conseguenza di quelle precedenti o, meglio, queste ultime sono indispensabili per dimostrare le successive. Prova ne è il teorema di Pitagora (Proposizione 47), focus del Libro I: le proposizioni precedenti ad essa si possono pensare come lo sviluppo dei risultati necessari a permettere la dimostrazione del teorema, come mostra il seguente schema proposto da Odifreddi[10] [10]:

[10]Piergiorgio Odifreddi: matematico, logico e saggista italiano contemporaneo.

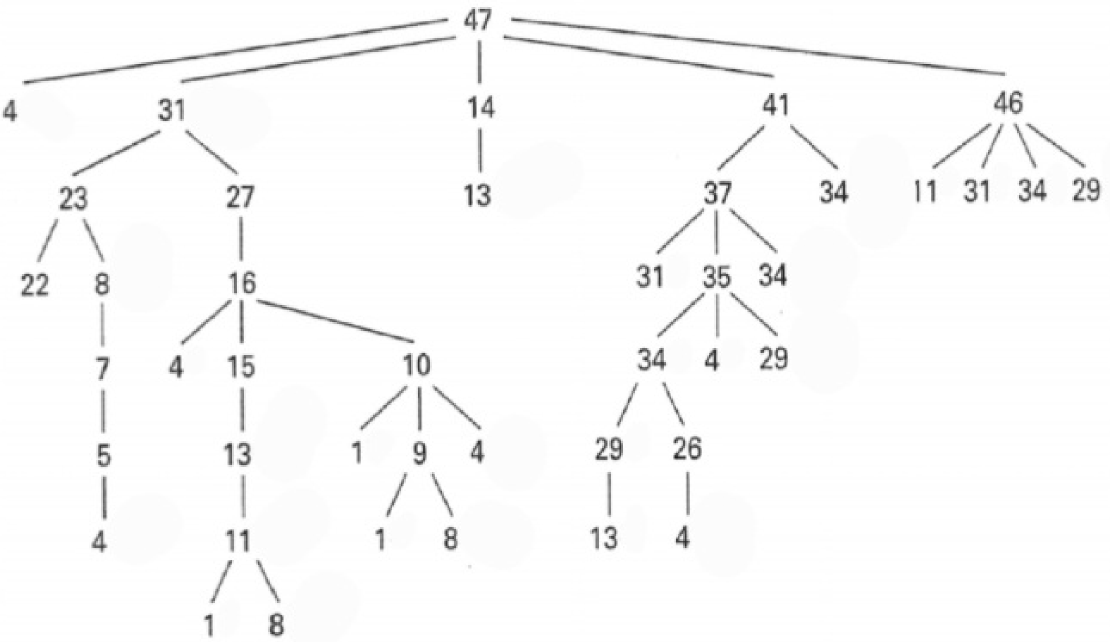


Figura 1.21: Schema di tutte le Proposizioni che servono a dimostrare il *Teorema di Pitagora* (Proposizione 47) (Fonte: [10])

Ci apprestiamo ora ad elencare tutte le proposizioni del Libro I; proporremo invece la dimostrazione soltanto di quelle che sono state discusse e/o utilizzate in classe durante l'implementazione del progetto di tesi.
Le dimostrazioni delle proposizioni saranno presentate attraverso le traduzioni di Federigo Enriques e collaboratori [19].

Proposizione 1

Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.

La retta data terminata sia la AB. Sulla retta AB si deve costruire un triangolo equilatero. Con centro A e distanza AB si descriva (P3)[11] il circolo BΓΔ, e di nuovo, con centro B e distanza BA si descriva (P3) il circolo AΓE, e dal punto Γ in cui i circoli si intersecano, si conducano (P1) ai punti A, B le rette ΓA, ΓB. E poiché il punto A è centro del circolo ΓΔB, la AΓ è uguale (T15) alla AB; di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo ΓAE, la BΓ è uguale alla BA (T15). Ma si è già dimostrato che ΓA è uguale alla AB, dunque ognuna delle ΓA, ΓB è uguale alla AB. Ma le cose eguali alla stessa cosa sono uguali tra loro (C1), dunque

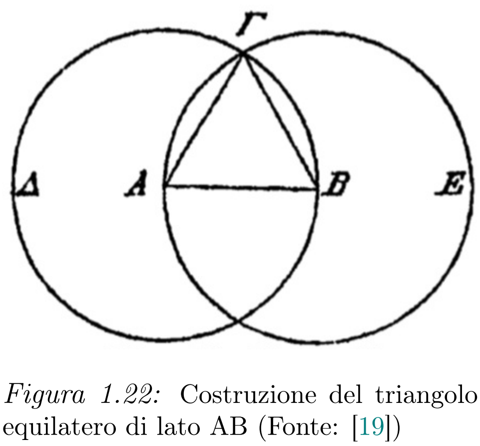


Figura 1.22: Costruzione del triangolo equilatero di lato AB (Fonte: [19])

[11] L'indicazione (P3) rimanda al terzo postulato, (T15) rimanda al termine 15, (C1) rimanda alla prima nozione comune, e così via.

la ΓA è uguale alla ΓB; perciò le tre ΓA, AB, BΓ sono uguali tra loro. Dunque il triangolo ABΓ è equilatero, ed è costruito sulla retta data terminata AB.

c. d. f.[12]

Proposizione 2
Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.

Proposizione 3
Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.

Proposizione 4
Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati ed hanno uguali gli angoli compresi fra i lati uguali, avranno anche la base uguale alla base, il triangolo sarà uguale al triangolo, e gli angoli rimanenti [del primo], opposti ai lati uguali, saranno uguali ai rispettivi angoli rimanenti [del secondo].

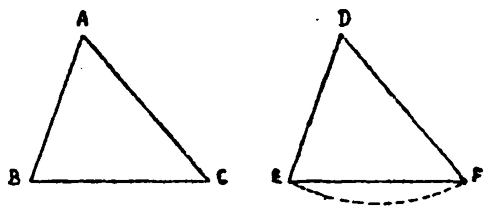


Figura 1.23: Due triangoli congruenti per il primo criterio di congruenza (Fonte: [19])

Siano ABC, DEF i due triangoli aventi i due lati AB, AC rispettivamente uguali ai lati DE, DF, cioè AB uguale a DE, ed AC a DF, e l'angolo BAC uguale all'angolo EDF. Dico che anche la base BC sarà uguale alla base EF, che il triangolo ABC sarà uguale al triangolo DEF, e che i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali, cioè l'angolo ABC uguale a $D\hat{E}F$ ed $A\hat{C}B$ uguale a $D\hat{F}E$. Infatti, se il triangolo ABC si sovrappone al triangolo DEF ponendo il punto A nel punto D, e la retta AB sulla DE, anche il punto B cadrà in E, perché AB è uguale a DE. Sovrapposta la retta AB alla DE, anche la AC si sovrapporrà alla DF, perché l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF. Perciò anche il punto C cadrà nel punto F, perché AC è uguale a DF. Ma anche B cadeva in E, perciò la base BC si sovrapporrà ad EF. Infatti, siccome B cadeva in E, e C in F, se la base CB non si sovrapponesse alla base EF, le due rette comprenderebbero uno spazio, ciò che non è possibile (C9). Così, la base BC si sovrappone alla EF, ed è uguale ad essa (C7). Perciò anche tutto il triangolo ABC si sovrappone a tutto il triangolo DEF, ed è ad esso eguale; ed i rimanenti angoli si sovrappongono ai rimanenti angoli, e sono ad essi uguali, cioè $A\hat{B}C$ a $D\hat{E}F$, ed $A\hat{C}B$ a $D\hat{F}E$. Dunque, se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed uguale l'angolo compreso dalle rette uguali, avranno anche la base eguale alla base; il triangolo sarà uguale al triangolo, e i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali.

c. d. f.

[12] abbreviazione di "come dovevasi fare".

Proposizione 5
Nei triangoli isosceli gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro.

Sia ABC il triangolo isoscele, avente il lato AB uguale al lato AC e si prolunghino, in direzione delle AB, AC, le BD, CE. Dico che l'angolo ABC è uguale all'angolo ACB, e che $C\hat{B}D$ è uguale a $B\hat{C}E$. Si prenda infatti sulla BD un punto a caso F; si tolga dalla maggiore AE la AG, uguale alla AF (Prop. 3); e si conducano le rette FC, GB. Poiché AF è uguale ad AG, e AB ad AC, le due FA, AC sono rispettivamente uguali alle due GA, AB. Esse comprendono l'angolo comune FAG, perciò la base FC sarà uguale alla base GB; il triangolo AFC sarà uguale ad AGB, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali (Prop. 4), cioè $A\hat{C}F$ ad $A\hat{B}G$, ed $A\hat{F}C$ ad $A\hat{G}B$. E poiché tutta AF è uguale a tutta AG, delle quali la parte AB è uguale alla parte AC, i resti BF e CG sono uguali (C3). Ma è stato dimostrato che anche FC è uguale a GB, perciò le due BF, FC sono rispettivamente uguali alle due CG, GB, l'angolo BFC è uguale all'angolo CGB, e la loro base BC è comune. Perciò il triangolo BFC sarà uguale al triangolo CGB, ed i rimanenti angoli saranno rispettivamente uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Quindi FBC è uguale a $G\hat{C}B$, e $B\hat{C}F$ a $C\hat{B}G$ (Prop. 4). Ma poiché è stato dimostrato che tutto l'angolo ABG è uguale a tutto l'angolo ACF, dei quali la parte $C\hat{B}G$ è uguale alla parte $B\hat{C}F$, la rimanente parte $A\hat{B}C$ sarà uguale alla rimanente $A\hat{C}B$; ed essi sono gli angoli alla base del triangolo ABC. E' stato anche dimostrato che $F\hat{B}C$ è uguale a $G\hat{C}B$, ed essi sono sotto la base. Dunque, gli angoli alla base sono uguali fra loro, e venendo prolungati i lati uguali gli angoli sotto la base saranno [pure] uguali fra loro.

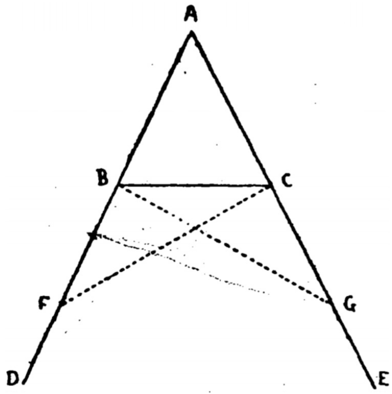


Figura 1.24: Teorema del triangolo isoscele (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 6
Se in un triangolo due angoli sono uguali fra loro, anche i lati opposti agli angoli uguali saranno uguali fra loro.

Proposizione 7
Su una retta data e da ciascun suo estremo si conducano due rette che si incontrino in un punto; non è possibile costruire con gli stessi estremi e dalla stessa parte altre due rette rispettivamente uguali a quelle prima costruite ed aventi un diverso punto d'incontro.

Proposizione 8
Se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

Siano ABC, DEF i due triangoli aventi i due lati AB, AC uguali, rispettivamente, ai due lati DE, DF, ed anche la base BC uguale alla base EF. Dico che l'angolo BAC è uguale all'angolo EDF. Infatti, sovrapposto il triangolo ABC al triangolo DEF, e posto il punto B nel punto E e la retta BC sulla EF, anche il punto C cadrà in F, perché BC è uguale ad EF. Ma, applicata la BC alla EF, anche BA, CA si sovrapporranno alle ED, DF. Infatti, se la base BC è sovrapposta alla base EF, ed i lati BA, AC non fossero sovrapposti agli ED, DF, ma cadessero fuori, come EG, GF, sulla stessa retta, a due punti diversi, dalla stessa parte, sarebbero condotte due rette rispettivamente uguali ad altre due rette, aventi gli stessi loro estremi. Ma esse non si possono costruire (Prop. 7), perciò non può accadere che, sovrapposta la base BC alla base EF, anche i lati BA, AC non si sovrappongano agli ED, DF. Dunque si sovrappongono, perciò anche l'angolo BAC si sovrapporrà all'angolo EDF, e sarà ad esso uguale (C7). Dunque, se due triangoli hanno due lati rispettivamente uguali a due lati, ed hanno anche la base uguale alla base, avranno uguali anche gli angoli compresi dai lati uguali.

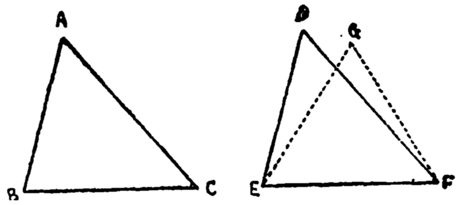


Figura 1.25: Due triangoli congruenti per il terzo criterio di congruenza (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 9
Dividere per metà un angolo rettilineo dato.

Sia BAC il dato angolo rettilineo. Bisogna dividerlo per metà. Su AB si prenda un punto qualsiasi D, e da AC si tolga AE, uguale alla AD (Prop. 3); si conduca DE, e su DE si costruisca il triangolo equilatero DEF (Prop. 1) e si conduca AF. Dico che l'angolo BAC è diviso per metà dalla retta AF. Infatti, poiché AD è uguale ad AE, ed AF è comune, le due rette DA ed AF sono rispettivamente uguali alle due EA, AF; e la base DF è uguale alla base EF. Quindi l'angolo DAF è uguale all'angolo EAF (Prop. 8). Dunque, dato un angolo rettilineo, lo si riesce a dividere per metà.

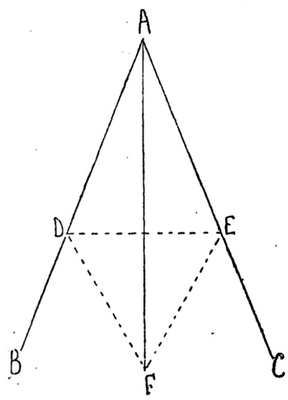


Figura 1.26: Costruzione della bisettrice di un angolo (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 10
Dividere per metà una retta terminata data.

Sia AB la data retta terminata. Bisogna dividere per metà la data retta terminata AB. Su di essa si costruisca il triangolo equilatero ABC (Prop. 1), e l'angolo ACB sia diviso per metà dalla retta CD (Prop. 9). Dico che la retta AB è divisa per metà nel punto D. Infatti, poiché AC è uguale a CB, e CD è comune, le due rette AC, CD sono rispettivamente uguali alle due BC, CD; e l'angolo ACD è uguale all'angolo BCD , perciò AD è uguale a BD (Prop. 4). Dunque, la data retta terminata, è divisa per metà dal punto D.

c. d. f.

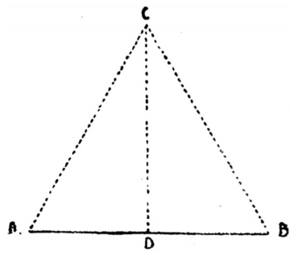


Figura 1.27: Costruzione del punto medio di un segmento (Fonte: [19])

Proposizione 11
Su una retta data, da un punto dato su di essa, innalzare una linea retta perpendicolare.

Sia AB la retta data, e C il punto dato su essa. Bisogna dal punto C condurre una linea retta ad un angolo retto con la AB. Su AC si prenda un punto a caso D, e si ponga CE uguale a CD (Prop. 2); su DE si costruisca un triangolo equilatero (Prop. 1), e si conduca FC. Dico che alla retta AB, dal punto C dato di essa, è stata condotta la linea retta FC, ad angolo retto. Infatti, poichè DC è uguale a CE, e CF è in comune, le due rette DC, CF sono rispettivamente uguali alle due rette EC, CF; e la base DF è uguale alla base FE. Così, gli angoli DCF ed ECF sono uguali (Prop. 8); e sono adiacenti. Ma quando una retta, innalzata su un'altra retta, fa gli angoli adiacenti uguali, ciascuno degli angoli uguali è retto (T10). Quindi $D\hat{C}F$, $F\hat{C}E$ sono retti. Dunque, su una retta AB da un punto dato su di essa, si può innalzare una linea retta perpendicolare.

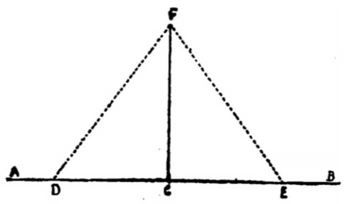


Figura 1.28: Costruzione della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un suo punto (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 12
Ad una data retta illimitata, da un punto dato ad essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare.

Sia AB la data retta infinita, ed il punto dato fuori di essa sia C. Bisogna condurre la retta perpendicolare alla AB dal punto C fuori di essa. Si prenda dall'altra parte di AB un punto a caso D, e con centro C e distanza CD si descriva il circolo EFG (C3); si divida la retta EG in due parti uguali in H (Prop. 10), e si conducano le rette CG, CH, CE. Dico che alla data retta infinita AB dal punto C dato fuori di essa, è stata condotta la perpendicolare CH. Infatti, poiché GH è uguale ad HE, e HC è comune, le due rette GH, HC sono rispettivamente uguali alle due EH, HC; e la base CG è uguale alla base CE; quindi gli angoli CHG e EHC sono uguali (Prop. 8); e sono adiacenti. Ma quando una retta innalzata su un'altra retta, forma gli angoli adiacenti uguali tra loro, ciascuno degli angoli uguali è retto, e la retta innalzata si dice perpendicolare a quella su cui è innalzata (T10). Dunque, ad una data retta illimitata, da un punto dato ad essa esterno, è possibile condurre una linea retta perpendicolare.

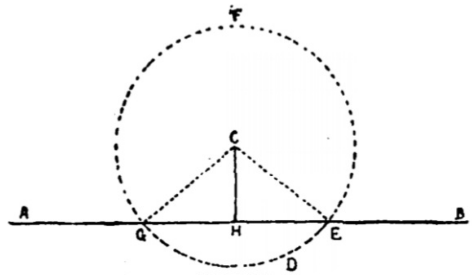


Figura 1.29: Costruzione della retta perpendicolare ad una data retta e passante per un punto esterno ad essa (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 13
Se una retta innalzata su un'altra retta forma degli angoli, essa verrà a formare o due angoli retti od angoli la cui somma è uguale a due retti.

Proposizione 14
Se per un punto di una retta, da parti opposte rispetto ad essa, si tracciano altre due rette, e queste formano con la prima angoli adiacenti la cui somma sia uguale a due retti, esse saranno per diritto fra loro.

Proposizione 15
Se due rette si tagliano fra loro, formano gli angoli opposti al vertice tra loro uguali.

Proposizione 16
In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni ed opposti.

Proposizione 17
In ogni triangolo, la somma di due angoli, comunque presi, è minore di due retti.

Proposizione 18
In ogni triangolo, a lato maggiore è opposto angolo maggiore.

Proposizione 19
In ogni triangolo, a angolo maggiore è opposto lato maggiore.

Proposizione 20
In ogni triangolo, la somma di due lati, comunque presi, è maggiore del lato rimanente.

Proposizione 21
Se su uno dei lati di un triangolo, a partire dagli estremi, si costruiscono due rette che si incontrino internamente al triangolo stesso, le rette così costruite, sommate assieme, saranno [complessivamente] minori dei due rimanenti lati del triangolo pure sommati assieme, ma verranno a comprendere un angolo maggiore.

Proposizione 22
Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente.

Proposizione 23
Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Proposizione 24
Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente, avranno anche la base maggiore della base.

Proposizione 25
Se due triangoli hanno due lati uguali rispettivamente a due lati, ma hanno la base maggiore della base, avranno anche l'angolo compreso dai lati uguali maggiore dell'angolo corrispondente.

Proposizione 26
Se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

Siano ABC, DEF due triangoli, aventi i due angoli ABC, BCA rispettivamente uguali ai due $D\hat{E}F$, $E\hat{F}D$, cioè $A\hat{B}C$ uguale a $D\hat{E}F$, e $B\hat{C}A$ uguale a $E\hat{F}D$; abbiamo anche un lato uguale ad un lato, e dapprima quello tra gli angoli uguali, cioè BC uguale ad EF. Dico che i due triangoli avranno anche i rimanenti lati rispettivamente uguali ai rimanenti lati, AB a DE, ed AC a DF; ed il restante angolo uguale al restante angolo. Se infatti AB non fosse uguale a DE, uno di essi sarebbe maggiore.

Sia maggiore AB, e si ponga BG uguale a DE, e si congiunga GC. Poiché dunque BG è uguale a DE, e BC ad EF, le due BG, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e l'angolo GBC è uguale all'angolo DEF. Dunque la base GC è uguale alla base DF, ed il triangolo GBC è uguale al triangolo DEF, i restanti angoli saranno uguali ai restanti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Quindi l'angolo GCB sarà uguale a $D\hat{F}E$. Ma $D\hat{F}E$ si è supposto uguale a $B\hat{C}A$, dunque anche $B\hat{G}C$ è uguale a $B\hat{C}A$ (C1), il maggiore al minore, il che è impossibile (C8). Dunque AB non è diseguale a DE; quindi è uguale. Ma anche BC è uguale ad EF; perciò le due AB, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e l'angolo ABC è uguale all'angolo DEF; dunque la base AC è uguale alla base DF, ed il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF (Prop. 4). Siano ora uguali i lati che sottendono angoli uguali, come AB a DE. Di nuovo dico che i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati, AC a DF, e BE ad EF, ed anche che il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF. Se infatti BC fosse disuguale da EF, uno di essi sarebbe maggiore. Sia maggiore, se è possibile, BC; si ponga BH uguale ad EF, ed AB a DE, le due AB, BH sono rispettivamente uguali alle due DE, EF; e comprendono angoli uguali; dunque la base AH è uguale alla base DF, il triangolo ABH è uguale al triangolo DEF, ed i rimanenti angoli saranno uguali ai rimanenti angoli, quelli che sottendono lati uguali. Dunque l'angolo BHA è uguale all'angolo EFD. Ma $E\hat{F}D$ è uguale a $B\hat{C}A$, cioè nel triangolo AHC l'angolo esterno BHA è uguale all'interno ed opposto $B\hat{C}A$, il che è impossibile (Prop. 16). Dunque BC non è disuguale da EF, quindi è uguale. Ma anche AB è uguale a DE, perciò le due AB, BC sono rispettivamente uguali alle due DE, EF, e comprendono angoli uguali. Quindi la base AC è uguale alla base DF; il triangolo ABC è uguale al triangolo DEF, e il rimanente angolo BAC è uguale al rimanente angolo EDF. Dunque, se due triangoli hanno due angoli uguali rispettivamente a due angoli ed un lato uguale ad un lato, o quello [adiacente] agli angoli uguali o quello che è opposto ad uno degli angoli uguali, essi avranno anche i lati rimanenti uguali rispettivamente ai lati rimanenti, e l'angolo rimanente uguale all'angolo rimanente.

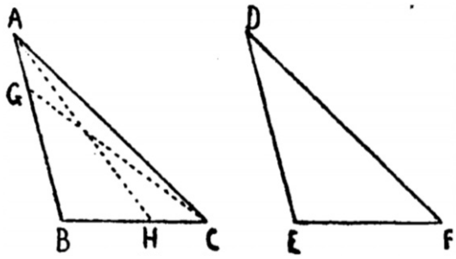


Figura 1.30: Due triangoli congruenti per il secondo criterio di congruenza (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 27
Se una retta che venga a cadere su altre due rette forma gli angoli alterni interni uguali fra loro, le due rette saranno fra loro parallele.

Proposizione 28
Se una retta che cada su due rette forma l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto e che è dalla stessa parte, oppure angoli interni, dalla stessa parte, la cui somma sia uguale a due retti, le rette saranno parallele fra loro.

Proposizione 29
Se una retta che cada su due rette forma gli angoli alterni uguali fra loro, l'angolo esterno uguale all'angolo interno ed opposto, ed angoli interni dalla stessa parte la cui somma è uguale a due retti.

Proposizione 30
Rette parallele ad una stessa retta sono parallele anche fra loro.

Proposizione 31
Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data.

Proposizione 32
In ogni triangolo, se si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, e la somma dei tre angoli interni del triangolo è uguale a due retti.

Proposizione 33
Rette che congiungano dalla stessa parte rette uguali e parallele sono anch'esse uguali e parallele.

Proposizione 34
I parallelogrammi hanno lati ed angoli opposti uguali fra loro, e sono divisi dalla diagonale in due parti uguali.

Proposizione 35
Parallelogrammi che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Proposizione 36
Parallelogrammi che siano [posti] su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Proposizione 37
Triangoli che siano [posti] sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Proposizione 38
Triangoli che siano [posti] su basi uguali e fra le stesse parallele sono uguali fra loro.

Proposizione 39
Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data.

Proposizione 40
Triangoli uguali che siano posti su basi uguali e dalla stessa parte sono anche [compresi] fra le stesse parallele.

Proposizione 41
Se un parallelogrammo ha la stessa base ed è compreso fra le stesse parallele da cui è compreso un triangolo, il parallelogrammo è il doppio del triangolo.

Proposizione 42
Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

Proposizione 43
In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi [*posti*] *intorno alla diagonale sono uguali fra loro.*

Proposizione 44
Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

Proposizione 45
Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo.

Proposizione 46
Descrivere un quadrato su una retta data.

Proposizione 47
Nei triangoli rettangoli il quadrato del lato opposto all'angolo retto è uguale alla somma dei quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.

Proposizione 48
Se in un triangolo il quadrato di uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati dei rimanenti due lati del triangolo, l'angolo che è compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto.

Alla luce di quanto finora presentato, possiamo notare che, dal punto di vista dei moderni criteri di rigore, la sistemazione euclidea della geometria è spesso inadeguata. Inoltre, nelle dimostrazioni Euclide spesso fa uso di postulati non espressi. Per esempio, nella prima proposizione egli assume, senza dimostrarlo, che due cerchi si intersechino in un punto. Per questo e altri casi simili è necessario aggiungere ai postulati euclidei un ulteriore postulato equivalente al principio di continuità. Inoltre, i primi due postulati non assicurano né l'unicità né l'infinitezza della retta passante per due punti distinti; tuttavia Euclide nelle dimostrazioni fa uso dell'unicità e dell'infinitezza di tale retta. Tuttavia, al tempo di Euclide gli *Elementi* costituivano evidentemente la più rigorosa e razionale sistemazione logica della matematica elementare che fosse mai stata elaborata, e avrebbero dovuto passare più di duemila anni prima che venisse effettuata una sistemazione più rigorosa [15]. Non a caso, la maggior parte delle proposizioni del Libro I sono tutt'oggi oggetto di studio nelle scuole secondarie di secondo grado, a prova dello straordinario contributo che diede Euclide nello sviluppo della geometria. In tal senso, anche altri grandi scienziati e matematici del passato riconobbero e venerarono il lavoro di Euclide; è molto suggestivo, per esempio, leggere quanto scrisse di lui il grande Albert Einstein nella sua raccolta di saggi intitolata *Come io vedo il mondo*, "La questione del metodo":

"Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi ulteriori. Colui che nella sua prima giovinezza non ha provato entusiasmo davanti a quest'opera non è nato per fare lo scienziato teorico [10]*."*

Capitolo 2

Le costruzioni geometriche

Uno dei più antichi "giochi" matematici è quello concernente le costruzioni geometriche. Esse sono procedure che, attraverso l'uso di riga e compasso ideali e seguendo regole stabilite (postulati), permettono di ottenere una figura geometrica [33]. In particolare, la riga (infinita e non graduata) può essere usata soltanto per disegnare linee rette passanti per due punti distinti dati, mentre il compasso (collassabile) può essere usato soltanto per disegnare una circonferenza di dato centro e dato raggio. Tuttavia, alcune costruzioni geometriche si possono fare usando soltanto la riga, dopo aver disegnato esattamente una circonferenza, o, d'altro canto, senza usare la riga. Altre restrizioni prevedono di usare un compasso di apertura fissata, oppure una riga contrassegnata ai bordi. Esistono anche costruzioni con la piegatura della carta, sviluppatesi nella didattica a partire dal Settecento con Fröeber. Nel seguito analizzeremo alcune di queste teorie sulla costruibilità.

2.1 Costruzioni euclidee

Nel precedente capitolo abbiamo annoverato Euclide come l'autore del più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto, gli *Elementi*, dove egli diede alla matematica elementare la più rigorosa per i suoi tempi e razionale sistemazione logico-deduttiva assiomatica. Come già citato, in ciascuno dei tredici libri degli *Elementi* è contenuto un certo numero di Proposizioni, suddivise in problemi e teoremi. In particolare, i problemi si presentavano nella forma costruttiva: la soluzione risiedeva nella costruzione con riga e compasso (ideali) di un oggetto geometrico e la successiva dimostrazione che l'oggetto costruito soddisfaceva le proprietà richieste. L'esistenza di questi due strumenti e le regole con cui si potevano usare era stabilita dai primi tre postulati, enunciati nel Libro I. Alla luce di tali considerazioni, possiamo affermare che le costruzioni con riga e compasso erano al centro della matematica greca. I matematici dell'epoca ed i successivi si erano infatti posti complessi problemi di costruzione con riga e compasso (basti pensare ai tre problemi classici dell'antichità) che solo nel XIX secolo, grazie alla teoria dei gruppi e dei campi sviluppata da Galois, Abel ed altri, si sono rivelati irrisolvibili.

Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione, da parte dei Greci, di usare nelle costruzioni geometriche soltanto riga e compasso. A tal proposito, Kline [1] sosteneva quanto segue:

"La linea retta e la circonferenza erano, secondo i Greci, figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici. [...]
É stata anche avanzata come spiegazione l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee" [27].

Egli inoltre riteneva l'utilizzo della riga e del compasso risolvessero il problema della dimostrazione dell'esistenza delle figure geometriche. I Greci, infatti, accettavano soltanto quei concetti che potevano essere costruiti: dimostrandone l'esistenza mediante la costruzione, erano certi della loro non contraddittorietà [25]. Similmente, Aristotele credeva che tale restrizione garantisse il distacco dalla percezione, attraverso cui non è possibile raggiungere una vera conoscenza matematica di un oggetto:

"Dato che le dimostrazioni sono universali, e che gli oggetti universali non possono venir percepiti, è evidente che non sarà possibile una conoscenza dimostrativa attraverso la sensazione. La sensazione si rivolge infatti necessariamente all'oggetto singolo, mentre la scienza consiste nel render noto l'oggetto universale" [27].

Elencheremo ora nel seguito i principali problemi di costruzione presenti negli *Elementi*. Ne riporteremo la dimostrazione soltanto di alcuni, attraverso le traduzioni di Federigo Enriques e collaboratori [19] e di George E. Martin [34].
L'elenco completo delle Proposizioni dei tredici libri degli *Elementi* è invece consultabile presso il sito https://www.scienzaatscuola.it/euclide.html [41], nella traduzione di F. Acerbi.

I Problemi di costruzione del Libro I

Proposizione 1
Su una retta terminata data costruire un triangolo equilatero.
Per la soluzione, si rimanda il lettore a pag. 31.

Proposizione 2
Applicare ad un punto dato una retta uguale ad una retta data.

Proposizione 3
Date due rette disuguali, togliere dalla maggiore una retta uguale alla minore.

Proposizione 9
Dividere per metà un angolo rettilineo dato.

[1] Morris Kline (1908-1992): matematico statunitense, interessato principalmente alla storia e alla didattica della matematica.

Per la soluzione, si rimanda il lettore a pag. 34.

Proposizione 10
Dividere per metà una retta terminata data.

Per la soluzione, si rimanda il lettore a pag. 35.

Proposizione 11
Su una retta data, da un punto dato su di essa, innalzare una linea retta perpendicolare.

Per la soluzione, si rimanda il lettore a pag. 35.

Proposizione 12
Ad una data retta illimitata, da un punto dato ad essa esterno, condurre una linea retta perpendicolare.

Per la soluzione, si rimanda il lettore a pag. 36.

Proposizione 22
Con tre rette uguali a tre rette date, costruire un triangolo: occorre dunque che la somma di due di esse, comunque prese, sia maggiore della rimanente.

Proposizione 23
Costruire su una retta data, e [con vertice] in un [dato] punto di essa, un angolo rettilineo uguale ad un angolo rettilineo dato.

Proposizione 31
Condurre per un punto dato una linea retta parallela ad una retta data.

Proposizione 42
Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

Proposizione 44
Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

Proposizione 45
Costruire un parallelogrammo uguale ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo.

Proposizione 46
Descrivere un quadrato su una retta data.

Alcuni Problemi di costruzione del Libro II

Proposizione 11

Dividere una retta in modo che il rettangolo contenuto dalla retta e da una delle parti sia uguale al quadrato della rimanente parte.

Sia AB la retta data. Bisogna dividere AB in modo che il rettangolo contenuto dalla retta e da una delle sue parti sia uguale al quadrato della rimanente parte. Si costruisca il quadrato ABCD di [lato] AB (Prop. 46, Libro I), si bisechi AC in E, si conduca EF uguale a BE, su AF si costruisca il quadrato FH, e si prolunghi GH in K. Dico che AB è divisa in H in modo che il rettangolo contenuto dalle AB, BH è uguale al quadrato di AH. Infatti, poiché la AC è bisecata in E, e ad essa è aggiunta la FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale al quadrato di EF (Prop. 6, Libro II). Ma EF è uguale ad EB, dunque il rettangolo contenuto da CF, FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale al quadrato di EB. Ma la somma dei quadrati di BA, AE è uguale al quadrato di EB, perché l'angolo in A è retto (Prop. 47, Libro I); quindi il rettangolo contenuto da CF, FA, insieme con il quadrato di AE, è uguale alla somma dei quadrati di BA, AE. Si tolga il quadrato di AE, comune, ed allora il rettangolo da CF, FA sarà uguale al quadrato di AB. Ma il rettangolo contenuto da CF, FA è FK, perché AF è uguale ad FG, ed il quadrato di AB è AD; quindi FK è uguale ad AD; si tolga AK, comune, così il rimanente FH è uguale ad HD. Ora, HD è il rettangolo contenuto da AB, BH, perché AB è uguale a BD; ed FH è il quadrato di AH, perciò il rettangolo compreso dalle AB, BH è uguale al quadrato di HA. Dunque, la retta AB è stata divisa in H in modo che il rettangolo contenuto dalle AB, BH sia uguale al quadrato di HA.

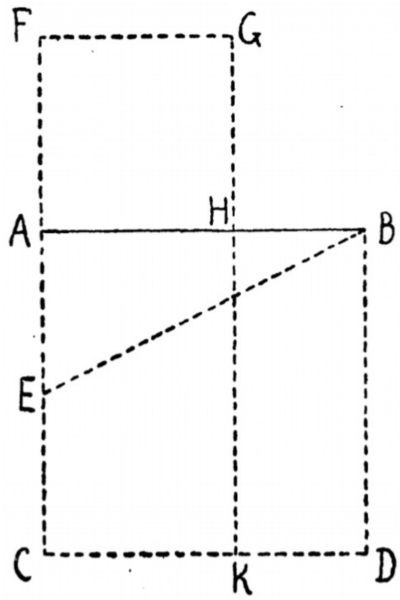


Figura 2.1: Costruzione relativa alla Proposizione 11 (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 14

Costruire un quadrato uguale ad una figura rettilinea data.

Sia data la figura rettilinea A. Si deve costruire un quadrato uguale ad A. Si costruisca il rettangolo BD, uguale ad A (Prop. 45, Libro I). Se BE fosse uguale ad ED, sarebbe compiuto ciò che era stato proposto: infatti sarebbe costruito un quadrato BD uguale alla figura rettilinea A. Se BE non è uguale ad ED, una delle due BE, ED è maggiore. Sia BE la maggiore; si prolunghi fino in F, facendo EF uguale ad ED; si bisechi BF in G (Prop. 10, Libro I), e con centro G e distanza uguale ad una delle GB, GF, si descriva il semicerchio BHF; si prolunghi DE in H, e si conduca GH.

Ora, poiché BF è divisa in parti uguali in G, ed in parti disuguali in E, il rettangolo compreso da BE, EF, insieme con il quadrato di EG, è uguale al quadrato di GF (Prop. 5, Libro II). Ma GF è uguale a GH, quindi il rettangolo di BE, EF, insieme con il quadrato di GE, è uguale al quadrato di GH. Ma anche la somma dei quadrati di HE, EG equivale al quadrato di GH (Prop. 47, Libro I); quindi il rettangolo di BE, EF insieme con il quadrato di GE, equivale alla somma dei quadrati di HE, EG. Si tolga il quadrato di GE, comune: così il rimanente rettangolo contenuto da BE, EF è uguale al quadrato di EH. Ma il [rettangolo di] BE, EF è BD, perché EF è uguale ad ED. Quindi il parallelogramma BD è equivalente al quadrato HE. Ma BD equivale ad A, perciò anche la figura rettilinea A è equivalente al quadrato che si può costruire su EH. Dunque è stato costruito un quadrato, cioè quello che si può descrivere su EH, uguale ad una data figura rettilinea A.

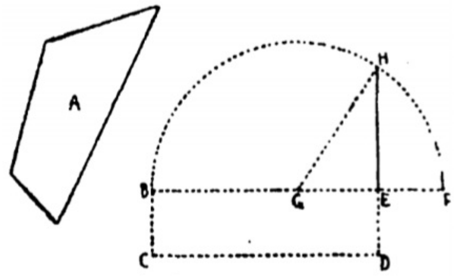


Figura 2.2: Costruzione del quadrato equivalente alla figura A (Fonte: [19])

c. d. f.

Alcuni Problemi di costruzione del Libro III

Proposizione 1

Dato un cerchio, trovarne il centro.

Sia dato il cerchio ABC di cui si voglia trovare il centro. Si conduca in esso una corda qualunque AB e se ne trovi il punto di mezzo D. Si innalzi su AB la perpendicolare dal punto D (Prop. 11, Libro I) e si prolunghi fino ad incontrare la circonferenza nei punto C ed E; infine la CE sia divisa in due parti uguali in O. Dico che O è il centro del cerchio ABC. Supponiamo, infatti, che O non sia il centro e sia H il centro: si congiunga H con i punti A, D, B, Poiché la AD è uguale alla DB, DH è comune ai due triangoli ADH e HDV, e la HA è uguale alla HB (perché raggi), verrebbero ad essere uguali i due angoli ADH e HDB (Prop. 8, Libro I). E poiché la retta che, innalzata su un'altra retta, forma con essa angoli uguali, è tale che ciascuno degli angoli da essa formato è retto (Def. 10, Libro I), l'angolo HDB è retto. Ma anche l'angolo ODB è retto, e perciò $H\hat{D}B$ è uguale a $O\hat{D}B$. Angolo maggiore sarebbe uguale ad angolo minore, ciò che è assurdo. Perciò H non è il centro del cerchio ABC. Similmente si potrebbe dimostrare che nessun altro punto può essere centro all'infuori di O. Dunque O è il centro del cerchio ABC.

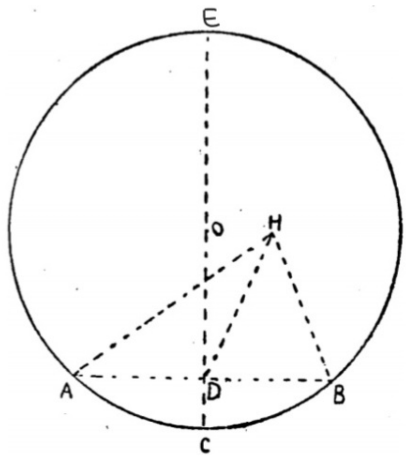


Figura 2.3: Costruzione del centro di un cerchio (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 17
Da un punto dato condurre una retta tangente a un dato cerchio.

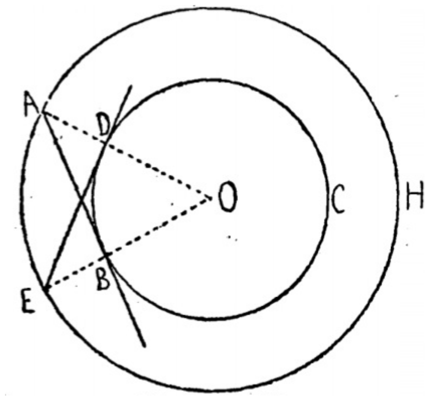


Figura 2.4: Costruzione della retta tangente al cerchio BDC e passante per il punto A (Fonte: [19])

Sia dato il punto A e il cerchio BCD. Dobbiamo dunque condurre da A una retta tangente al cerchio BCD. Si trovi il centro del cerchio: sia O, e si conduca la AO; con centro O e raggio OA si descriva il cerchio AEH e dal punto D si conduca la perpendicolare DE alla OA, indi si conducano le rette OE, AB. Dico che la retta AB condotta dal punto A è tangente al cerchio BCD. Infatti, poiché O è il centro dei cerchi BCD, AEH sarà OA uguale a OE e OD uguale a OB. Pertanto le due rette AO, OB sono rispettivamente eguali alle EO, OD. Inoltre, i due triangoli DOE, OBA hanno l'angolo in O compreso fra lati uguali, in comune, onde il triangolo DOE è uguale al triangolo OBA e i rimanenti angoli sono rispettivamente uguali (Prop. 4, Libro I). Pertanto l'angolo ODE è uguale a $O\hat{B}A$. Ma l'angolo ODE è retto. Pertanto anche l'angolo OBA è retto: OB è il raggio. Ma la perpendicolare innalzata sull'estremo del diametro del cerchio tocca la circonferenza, dunque la AB tocca il cerchio BCD (Corollario Prop. 16, Libro III). Dunque dal punto dato è stata condotta al cerchio BCD una retta tangente, come dovevasi.

c. d. f.

I Problemi di costruzione del Libro IV

Proposizione 1
Adattare in un dato cerchio una retta uguale ad una retta data, non maggiore del diametro del cerchio.

Proposizione 2
Inscrivere in un dato cerchio un triangolo equiangolo ad un triangolo dato.

Proposizione 3
Circoscrivere ad un dato cerchio un triangolo equilatero ad un triangolo dato.

Proposizione 4
In un triangolo dato inscrivere un cerchio.

Sia ABC il triangolo dato; occorre dunque inscrivere un cerchio nel triangolo ABC.

Si dividano gli angoli ABC, ACB in due parti eguali mediante le rette BD, CD (Prop. 9, Libro I) concorrenti nel punto D (P5, Libro I), e dal punto D si conducano le perpendicolari DE, DF, DG alle rette AB, BC, CA. Poiché l'angolo ABD è uguale a $\hat{CBD}$ e l'angolo retto BED è uguale all'angolo retto BFD, i due triangoli EBD, FBD hanno due angoli uguali a due angoli e un lato uguale a un lato, cioè il comune BD, che sottende angoli uguali; perciò avranno anche gli altri lati uguali agli altri lati (Prop. 26, Libro I); dunque DE è uguale a DF. Per la stessa ragione anche DG è uguale a DF e quindi le tre rette DE, DF, DG sono eguali tra loro. Allora il cerchio descritto con centro D e raggio uguale ad uno qualunque delle rette DE, DF, DG, passerà anche per i rimanenti punti e risulterà tangente alle rette AB, BC, CA, poiché gli angoli in E, F, G sono retti: infatti, se il cerchio segasse tali rette, la perpendicolare all'estremo del diametro cadrebbe entro il cerchio, ciò che si è dimostrato essere assurdo (Prop. 16, Libro III). Dunque il cerchio descritto di centro D, e avente per raggio uno qualunque dei segmenti DE, DF, DG, non segherà le rette AB, BC, CA; quindi sarà tangente ad esse e sarà inscritto nel triangolo ABC. Si descriva come EFG. Dunque nel dato triangolo ABC si è inscritto il cerchio EFG.

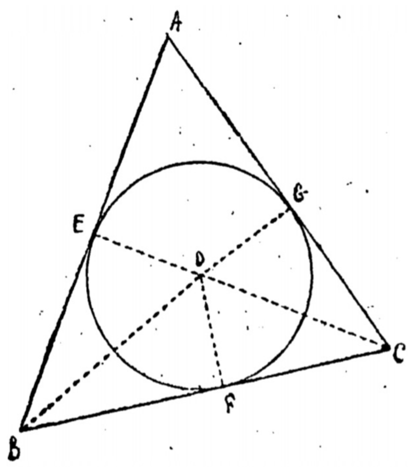


Figura 2.5: Costruzione del cerchio inscritto al triangolo ABC (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 5

Circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato.

Sia ABC il triangolo dato: bisogna dunque circoscrivere un cerchio al triangolo ABC. Si dividano le rette AB, AC in due parti eguali nei punti D ed E (Prop. 10, Libro I) e dai punti D, E si conducano le perpendicolari DF, EF alle AB, AC: esse si intersecheranno o dentro il triangolo ABC, o sulla BC, o oltre BC. Concorrano dapprima in un punto interno F, così come è fatto in figura 2.6, e si conducano le FB, FC, FA. Poiché AD è uguale a DB e DF è comune e perpendicolare, ne risulta che le basi AF e FB sono uguali (Prop. 4, Libro I). Similmente dimostreremo che anche CF e AF sono uguali, quindi è anche FB uguale a FC: le tre rette FA, FB, FC sono dunque uguali tra loro. Allora il cerchio descritto con centro in F e raggio uguale ad una qualunque delle rette FA, FB, FC, passa anche per gli altri punti e sarà circoscritto al triangolo ABC. Si circoscriva

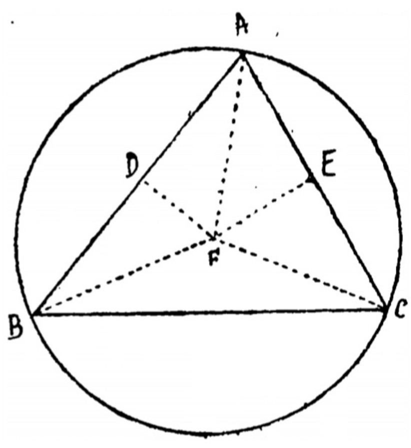


Figura 2.6: Costruzione del cerchio circoscritto al triangolo ABC (Fonte: [19])

come ABC.

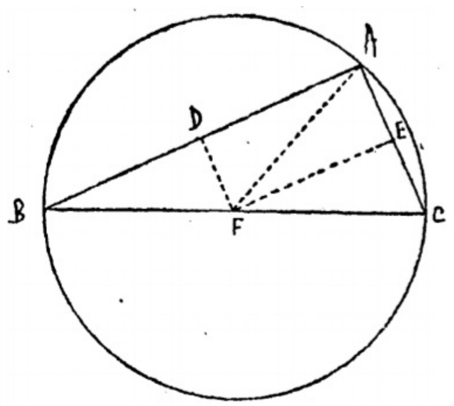


Figura 2.7: Il punto F appartiene al lato BC del triangolo ABC (Fonte: [19])

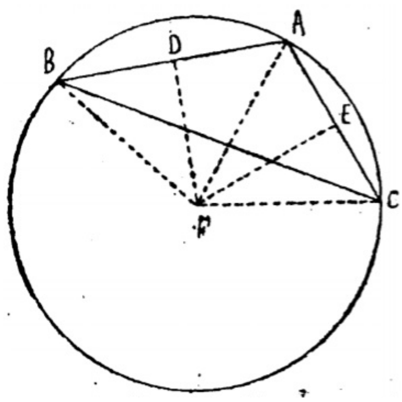


Figura 2.8: Il punto F è esterno al triangolo ABC (Fonte: [19])

Ora DF, EF concorrano in F sulla BC, così come è fatto in Figura 2.7; si tracci la AF; dimostreremo in modo analogo che il punto F è il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC.
Se invece DF ed EF concorrono in F fuori del triangolo ABC, come è in Figura 2.8, si conducano le AF, BF, CF. Poiché ancora AD è uguale a DB e DE è comune e perpendicolare (Prop. 4, Libro I), la base AF sarà uguale alla base BF. Similmente dimostreremo che anche CF e AF sono uguali e perciò lo sono anche BF e FC. Quindi il cerchio descritto con centro F e raggio uguale ad una qualunque delle rette FA, FB, FC, passa anche per gli altri punti e sarà circoscritto al triangolo ABC.
Dunque si è circoscritto al dato triangolo un cerchio.

c. d. f.

Proposizione 6
Inscrivere un quadrato in un cerchio dato.

Proposizione 7
Circoscrivere un quadrato ad un cerchio dato.

Proposizione 8
Inscrivere un cerchio in un quadrato dato.

Proposizione 9
Circoscrivere un cerchio ad un quadrato dato.

Proposizione 10
Costruire un triangolo isoscele avente ambedue gli angoli alla base doppi dell'altro angolo.

Si prenda una retta qualunque AB e la si divida nel punto C in modo che il rettangolo compreso dalle AB, BC sia uguale al quadrato costruito sulla CA; quindi, con centro A e raggio AB, si descriva il cerchio BDE. Nel cerchio BDE si adatti la retta BD eguale ad AC, che non è maggiore del diametro del cerchio BDE (Prop. 1, Libro IV); si conducano AD, AC e si circoscriva intorno al triangolo ACD il cerchio ACDE (Prop. 5, Libro IV). E poiché il rettangolo compreso dalle AB, BC è uguale al quadrato di AC, e AC è uguale a BD, il rettangolo compreso dalle AB, BC sarà uguale al quadrato di BD. Ma poiché fuori del cerchio ACD si è preso un punto B e da B giungono al cerchio le due rette BA, BD, di cui la prima lo interseca, l'altra lo raggiunge soltanto ed il rettangolo formato dalle AB, BC è uguale al quadrato di BD, la retta BD è tangente al cerchio ACD. Inoltre, poiché BD è tangente e dal punto D di contatto si è condotta la DC, l'angolo BCD sarà uguale all'angolo DAB che è posto nell'altro arco di cerchio (Prop. 37, Libro III). Giacché gli angoli BDC, DAC sono uguali, si aggiunga ad entrambi $C\hat{D}A$; così tutto $B\hat{D}A$ è uguale alla somma di $C\hat{D}A$ con $D\hat{A}C$; ma la somma di $C\hat{D}A$ e $D\hat{A}C$ è uguale all'angolo esterno BCD (Prop. 32, Libro I), per cui anche $B\hat{D}A$ è uguale a $B\hat{C}D$. Ora $B\hat{D}A$ e $C\hat{B}D$ sono uguali, perché anche i lati AD, AB sono eguali (Prop. 5, Libro I); perciò sono uguali anche $D\hat{B}A$ e $B\hat{C}D$. Dunque i tre angoli BDA, DBA, BCD sono eguali tra loro, e poiché l'angolo DBC è uguale a $B\hat{C}D$, il lato BD sarà uguale al lato DC (Prop. 6, Libro I). Ma BD lo abbiamo posto uguale a CA, e CA è uguale anche a CD, perciò l'angolo CDA è uguale all'angolo DAC (Prop. 5, Libro I). La somma quindi di $C\hat{D}A$ e $D\hat{A}C$ è uguale al doppio di $D\hat{A}C$, e poiché BCD è uguale alla somma di $C\hat{D}A$ con $D\hat{A}C$, anche $B\hat{C}D$ è il doppio di $C\hat{A}D$. Ora BCD è uguale a ciascuno degli angoli BDA, DBA, dunque ognuno degli angoli BDA, DBA è doppio dell'angolo DAB. Dunque si è costruito un triangolo isoscele ABD avente gli angoli alla base DB doppi dell'altro.

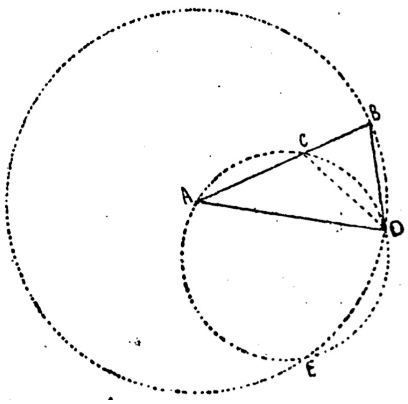


Figura 2.9: Costruzione del triangolo isoscele richiesto (Fonte: [19])

c. d. f.

Proposizione 11
Inscrivere in un dato cerchio un pentagono equilatero ed equiangolo.

Proposizione 12
Circoscrivere ad un dato cerchio un pentagono equilatero ed equiangolo.[2]

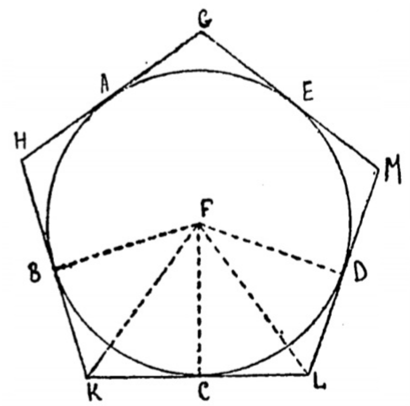


Figura 2.10: Costruzione del pentagono regolare circoscritto ad un cerchio (Fonte: [19])

Sia ABCDE il cerchio dato: occorre dunque circoscrivere al cerchio ABCDE un pentagono equilatero ed equiangolo. Supponiamo che A, B, C, D, E siano i vertici del pentagono inscritto (Prop. 2, Libro IV), di modo che gli archi AB, BC, CD, DE, EA siano eguali tra loro. Per A, B, C, D, E si conducano le GH, HK, LM, MG tangenti al cerchio (Prop. 17, Libro III) e, trovato il centro F del cerchio ABCDE (Prop. 17, Libro III), si conducano FB, FK, FC, FL, FD. Poiché la retta KL è tangente al cerchio ABCDE nel punto C e dal centro F si è condotta al punto di contatto C la FC, la FC è perpendicolare a KL (Prop. 18, Libro III); quindi ambedue gli angoli in C sono retti. Per la stessa ragione è retto anche ciascuno degli angoli posti nei punti B, D. Essendo l'angolo FCK retto, il quadrato di FK è uguale alla somma di quelli costruiti su FC, CK (Prop. 47, Libro I) e, per la stessa ragione, il quadrato di FK è uguale alla somma di quelli costruiti su FB, BK. Perciò la somma dei quadrati di FC, CK è uguale alla somma di quelli costruiti su FB, BK. Ma il quadrato di FC è uguale al quadrato di FB, per cui il quadrato rimanente di CK è uguale a quello di BK e quindi sarà la BK uguale alla CK. E perché FB è uguale alla FC ed FK è comune, i due lati BF, FK sono uguali ai due lati CF, FK e la base BK è uguale alla base CK. Quindi l'angolo BFK è uguale all'angolo KFC (Prop. 8, Libro I) e $B\hat{K}F$ è uguale a $F\hat{K}C$ (Prop. 32, Libro I); perciò $F\hat{B}C$ è doppio di $K\hat{F}C$ come $B\hat{K}C$ è doppio di $F\hat{K}C$. Per la stessa ragione $C\hat{F}D$ è doppio di $C\hat{F}L$ e $D\hat{L}C$ è doppio di $F\hat{L}C$. Ma poiché l'arco BC è uguale all'arco CD, anche l'angolo BFC sarà uguale a $C\hat{F}D$ (Prop. 27, Libro III). Ora $B\hat{F}C$ è doppio di $K\hat{F}C$ e $D\hat{F}C$ doppio di $L\hat{F}C$; quindi $K\hat{F}C$ è uguale ad $L\hat{F}C$, come pure $F\hat{C}K$ è uguale a $F\hat{C}L$. I due triangoli FKC, FLC hanno dunque due angoli uguali a due angoli ed un lato uguale ad un lato, cioè FC, comune ad ambedue; quindi essi avranno anche i rimanenti lati uguali ai rimanenti lati e l'altro angolo uguale all'altro angolo (Prop. 26, Libro I). Perciò la retta KC sarà uguale alla CL e l'angolo FKC uguale a $F\hat{L}C$; e poiché KC è uguale a CL, sarà KL doppia della KC. Per la medesima ragione dimostreremo che ciascuna delle GH, GM, ML è uguale a ciascuna delle HK, KL; quindi il pentagono GHKLM è equilatero. Dico che è anche equiangolo. Poiché l'angolo FKC è uguale all'angolo FLC e si è dimostrato che l'angolo HKL è doppio dell'angolo FKC e $K\hat{L}M$ è doppio di $F\hat{L}C$, sarà anche $H\hat{K}L$ uguale a $K\hat{L}M$. In modo analogo si dimostrerà che ciascuno degli angoli KHG, HGM, GML è uguale tanto a $H\hat{K}L$ che a $K\hat{L}M$; dunque i cinque angoli GHK, HKL, KLM, LMG, MGH sono tra loro eguali e perciò il pentagono GHKLM è equiangolo. Ma si è dimostrato che è anche equilatero, ed è circoscritto al cerchio ABCDE. Dunque al cerchio dato si è circoscritto un pentagono equilatero ed equiangolo.

[2] Euclide non utilizzava il termine "regolare" per riferirsi a un poligono equilatero ed equiangolo.

c. d. f.

Proposizione 13
Inscrivere un cerchio in un pentagono dato, equilatero ed equiangolo.

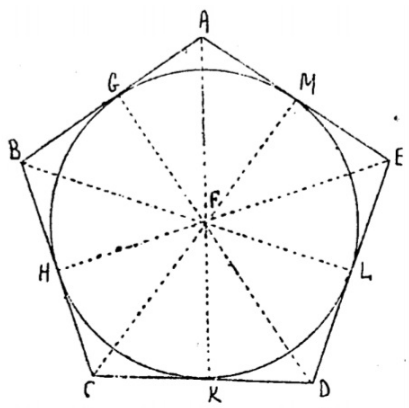


Figura 2.11: Costruzione del cerchio inscritto in un pentagono regolare (Fonte: [19])

Sia ABCDE il pentagono equilatero ed equiangolo dato: occorre dunque inscrivere un cerchio nel pentagono ABCDE. Si dividano ambedue gli angoli BCD, CDE in due parti uguali mediante le due rette FC, FD e, dal punto F dove si intersecano le rette FC, FD, si conducano le rette FB, FA, FE. Poiché BC è uguale a CD e CF è comune, i due lati BC, CF sono uguali a DC, CF e l'angolo BCF è uguale all'angolo DCF. Quindi la base BF è uguale alla base DF (Prop. 4, Libro I), il triangolo BCF è uguale al triangolo DCF (Prop. 4, Libro I) e i rimanenti angoli saranno uguali agli angoli rimanenti, quelli che sottendono lati eguali (Prop. 4, Libro I). L'angolo CBF è dunque uguale a $C\hat{D}F$. Ma poiché l'angolo CDE è doppio dell'angolo CDF, e $C\hat{D}E$ è uguale ad $A\hat{B}C$, come $C\hat{D}F$ è uguale a $C\hat{B}F$, anche l'angolo CBA sarà doppio di $C\hat{B}F$ e quindi l'angolo ABF sarà uguale a $F\hat{B}C$. L'angolo ABC è dunque diviso in due parti eguali dalla retta BF. Ugualmente dimostreremo che ambedue gli angoli BAE, AED sono divisi rispettivamente per metà dalle rette FA, FE. Si conducano allora dal punto F le perpendicolari FG, FH, FK, FL, FM alle rette AB, BC, CD, DE, EA. Poiché l'angolo HCF è uguale a $K\hat{C}F$ e $F\hat{H}C$ è uguale a $F\hat{K}C$, perché retti, i due triangoli FHC, FKC hanno due angoli uguali a due angoli e un lato uguale ad un lato, cioè il comune FC, che sottende angoli uguali: dunque anche i rimanenti lati saranno uguali ai rimanenti lati. La perpendicolare FH è quindi uguale alla perpendicolare FK. Similmente dimostreremo che anche ciascuna delle FL, FM, FG è uguale a ciascuna delle FH, FK. Dunque le cinque rette FG, FH, FK, FL, FM sono uguali tra loro. Perciò, se si descrive il cerchio di centro F e raggio uguale alla distanza da uno dei punti G, H, K, L, M, esso passerà anche per i punti rimanenti e sarà tangente alle rette AB, BC, CD, DE, EA, poiché gli angoli nei punti G, H, K, L, M sono retti. Infatti, se non fosse tangente ad esse, ma le secasse, la perpendicolare condotta all'estremo di un diametro cadrebbe nell'interno del cerchio, ciò che si è dimostrato essere assurdo. Dunque il cerchio descritto, di centro F e raggio uguale alla distanza da uno dei punti G, H, K, L, L, M, non seca le rette AB, BC, CD, DE, EA, quindi è tangente ad esse. Si descriva come GHKLM. Dunque in un dato pentagono equilatero ed equiangolo si è inscritto un cerchio.

c. d. f.

Proposizione 14
Circoscrivere un cerchio ad un dato pentagono equilatero ed equiangolo.

Proposizione 15
Inscrivere in un dato cerchio un esagono equilatero ed equiangolo.

Proposizione 16
Inscrivere in un dato cerchio un pentadecagono equilatero ed equiangolo.

Alcuni problemi di costruzione del Libro VI

Proposizione 12
Trovare una quarta proporzionale di tre rette date.

Date tre rette a, b, c, si tratta di costruire la retta x tale che $a/b = c/x$. Si fissino due rette DE e DF che comprendono un angolo come capita EDF. Si prenda DG uguale ad A, GE uguale a B, e DH uguale a C (Prop. 3, Libro I). Si congiunga GH, e si conduca EF per E parallela ad essa (Prop. 31, Libro I). E pocihè GH è parallela al lato EF del triangolo DEF, allora DG sta a GE come DH sta a HF (Prop. 2, Libro VI). Ma DG è uguale ad A e GE a B, e DH a C, A sta quindi a B come C sta a HF (Prop. 5, Libro V). Di tre rette date risulta quindi trovata una quarta proporzionale, HF.

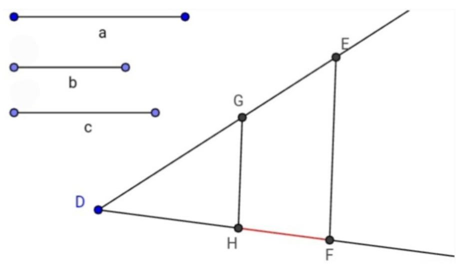


Figura 2.12: Costruzione della quarta proporzionale di tre rette date (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

c. d. f.

Proposizione 13
Trovare una media proporzionale di due rette date.

Siano AB e BC le due rette date: si deve pertanto trovare una media proporzionale di AB e BC. Siano poste in linea retta e si tracci un semicerchio ADC su AC. Si conduca BD dal punto B ad angoli retti alla retta AC (Prop. 11, Libro I), e si congiungano AD e DC. Poiché l'angolo ADC è un angolo in un semicerchio, è retto (Prop. 31, Libro III). E poiché nel triangolo rettangolo ADC, BD è stata condotta dall'angolo retto perpendicolarmente alla base, allora BD è media proporzionale tra i segmenti della base, AB e BC. Di due rette date AB, BC risulta quindi trovata una media proporzionale DB.

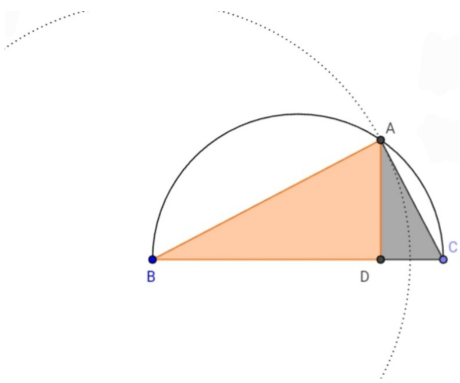


Figura 2.13: Costruzione della media proporzionale di due rette date (Fonte: https://www.scienzaatscuola.it)

c. d. f.

2.2 Costruzioni con la riga e il compasso

Abbiamo già accennato, nel capitolo precedente, ai tre problemi classici dell'antichità - la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo. Sappiamo che alcuni matematici greci risolsero tali problemi, andando oltre la riga e il compasso, com'era loro obiettivo. Non ci sono dubbi che i Greci sospettassero che tali problemi non fossero risolvibili con il solo uso della riga e del compasso; tuttavia, essi non erano a conoscenza degli strumenti algebrici necessari a dimostrarlo.
In questa sezione, formuleremo questi problemi nel linguaggio algebrico, utilizzando le coordinate cartesiane, e mostreremo appunto che essi non sono risolvibili con riga e compasso.

Innanzitutto, un qualsiasi punto del piano cartesiano dev'essere già stato costruito. D'altro canto, dobbiamo avere almeno due punti per poter utilizzare sia la riga che il compasso euclidei. Necessitiamo quindi di avere un insieme di partenza contenente almeno due punti, cosicché a partire da essi possiamo costruire tutti gli altri punti, ottenuti come intersezione di rette costruibili e cerchi costruibili a partire dai punti di tale insieme.
Alla luce di tali considerazioni, possiamo dare la seguente definizione [43]:

Definizione 2.2.1. *Un punto $P(x, y)$ del piano cartesiano è costruibile con riga e compasso se è ottenibile mediante*

- *intersezione di due rette;*
- *intersezione di una retta con una circonferenza;*
- *intersezione di due circonferenze,*

a partire da due punti dati O e U, che possiamo assumere di coordinate rispettivamente $(0, 0)$ e $(1, 0)$, estremi di un segmento unitario.
Più precisamente,

- *un segmento è costruibile con riga e compasso se i suoi estremi sono punti costruibili con riga e compasso;*
- *una retta è costruibile con riga e compasso se passa per due punti costruibili;*
- *una circonferenza è costruibile con riga e compasso se ha centro in un punto costruibile con riga e compasso e raggio un segmento costruibile con riga e compasso.*

Abbiamo così fornito una definizione ricorsiva di punto costruibile con riga e compasso, a partire dal segmento unitario.
Per non appesantire troppo la notazione, nel seguito useremo semplicemente l'aggettivo "costruibile" per riferirci ad un oggetto geometrico costruibile con riga e compasso.

Riportiamo ora nel seguito le principali proprietà di intersezione delle rette costruibili e delle circonferenze costruibili.

Teorema 2.2.1. *Se A, B, C sono tre punti costruibili, allora la circonferenza di centro A e raggio BC è costruibile.*

Proseguiamo presentando la definizione di numero reale costruibile.

Definizione 2.2.2. *Un numero reale α è costruibile se, con riga, compasso e unità di misura fissata, si riesce a costruire il segmento di misura $|\alpha|$.*

Attraverso il seguente teorema stabiliamo la relazione tra punti costruibili e numeri reali costruibili con riga e compasso.

Teorema 2.2.2. *Gli assi cartesiani sono rette costruibili. Tutti i punti del tipo $(p, 0)$, $(-p, 0)$, $(0, p)$ e $(0, -p)$ sono costruibili se p è un punto costruibile. Un numero x è costruibile se e solo se - x lo è. I numeri interi sono costruibili. Un punto (p, q) è costruibile se e solo se p e q sono entrambi numeri costruibili.*

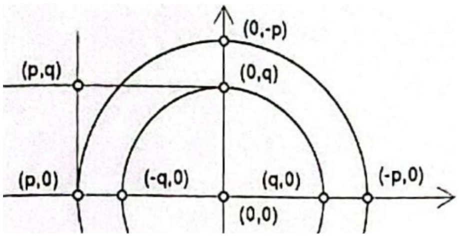


Figura 2.14: Rappresentazione dei punti costruibili (Fonte: [34])

Dimostrazione. Consideriamo i punti O(0,0) e U(1,0). Da ciò segue immediatamente che l'asse delle ascisse è una retta costruibile. Allora anche il punto (-1,0) dev'essere costruibile, in quanto intersezione fra l'asse delle x e la circonferenza di centro O e passante per U. Ma quindi tutti i punti (n,0) sono costruibili, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$. Dal momento che con riga e compasso possiamo costruire rette parallele e perpendicolari ad una retta data (Prop. 11, 12, 31, Libro I), la conclusione segue osservando la Figura 2.14. □

Diamo ora la definizione di campo euclideo.

Definizione 2.2.3. *Un sottocampo F di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ contenente 0 e 1 e tale che $a - b$, $\frac{a}{c} \in F$ per ogni a, b, $c \in F$, con $c \neq 0$.*

Definizione 2.2.4. *Un campo F si dice euclideo se $x \in F$, $x > 0$, implica $\sqrt{x} \in F$.*

Proposizione 2.2.1. *Indichiamo con $\mathbb{E}$ l'insieme dei numeri reali costruibili con riga e compasso a partire dal segmento unitario. $\mathbb{E}$ è il minimo campo euclideo contenente i razionali.*

Dimostrazione. (Cenni) A partire dal segmento unitario, si costruisce con riga e compasso l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$. Poi, dati due numeri interi a e b non nulli si costruiscono con riga e compasso a + b, a − b, $\frac{1}{a}$, a · b, $\frac{a}{b}$. □

L'insieme dei numeri reali costruibili con riga e compasso $\mathbb{E}$ è quindi un sottocampo di $\mathbb{R}$ che contiene il campo $\mathbb{Q}$, ovvero $\mathbb{Q} \subset \mathbb{E} \subset \mathbb{R}$.

Vogliamo ora introdurre una costruzione algebrica che ci servirà nel seguito della trattazione. L'idea è quella di estendere un campo in modo tale che il campo ottenuto contenga un nuovo numero, oltre a tutti quelli appartenenti al campo di partenza. In particolare, la definizione e il teorema che seguono generalizzano come estendere un dato campo della radice quadrata di un numero positivo appartenente al campo iniziale:

Definizione 2.2.5. *Dato un campo F, si dice estensione quadratica di F ogni insieme del tipo* $F(\sqrt{c}) = \{\ a + b\sqrt{c} : a,\ b \in F\ \}$*, con* $c \in F$ *e* $\sqrt{c} \notin F$*.*

Teorema 2.2.3. *L'estensione quadratica di un campo è un campo.*

A questo punto della trattazione è chiaro come attraverso lo studio dei punti costruibili sia possibile ricavare ulteriori informazioni circa i numeri reali costruibili. In particolare, si indagano le proprietà di $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, piano dei punti costruibili, lavorando con un generico sottocampo dei numeri reali F e analizzando quali nuovi punti del piano reale si possano costruire a partire dai punti del piano di F. Come si è visto in precedenza, vi sono tre modi per ottenere dei nuovi punti con costruzioni euclidee: intersecando due rette, una retta e una circonferenza oppure due circonferenze. Lo studio di queste tre situazioni permette di giungere alla seguente conclusione: posto $\alpha = \sqrt{a}$, i soli punti del piano reale costruibili in un solo passo a partire dal piano di F sono i punti le cui coordinate stanno in campi del tipo F(α), dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e α^2 $\in$ F.
Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 2.2.2. *Sia a un numero reale positivo costruibile, allora* $x = \sqrt{a}$ *è costruibile con riga e compasso.*

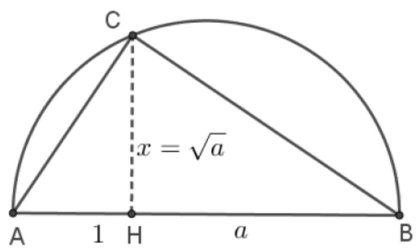


Figura 2.15: Costruzione con riga e compasso di $x = \sqrt{a}$ (Fonte: [34])

Dimostrazione. Con riferimento alla Figura 2.15, si costruisce una semicirconferenza di diametro AB = 1 + a. Si traccia la retta perpendicolare ad AB e passante per il punto H, tale che AH = 1 e BH = a. Per il Secondo Teorema di Euclide si ha che HC^2 = AH $\cdot$ HB, ossia $1 : x = x : a$. Da ciò risulta che HC = $x = \sqrt{a}$. □

Possiamo quindi dare la seguente:

Definizione 2.2.6. *I numeri reali costruibili sono quelli appartenenti al minimo campo contenente i razionali e chiuso rispetto all'estrazione di radici quadrate di elementi positivi.*

Vale allora la seguente:

Proposizione 2.2.3. *Un numero reale c è costruibile se e solo se esiste un numero finito di numeri reali $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tali che $\alpha_1^2 \in \mathbb{Q}$, $\alpha_i^2 \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})\ \forall\ i = 2, \dots, n$ e in modo che $c \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

Dimostrazione. Segue dalle considerazioni fatte in precedenza. □

Il seguente risultato stabilisce qual è il grado dell'estensione $\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ in cui si trova l'elemento c, rispetto a $\mathbb{Q}$.

Teorema 2.2.4. *Se c è un numero reale costruibile, allora esso appartiene ad un campo K che è un estensione di $\mathbb{Q}$, di grado 2^h per un qualche $h \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Per com'è stata costruita l'estensione, si ha che $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) : \mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-2})] \cdot \dots \cdot [\mathbb{Q}(\alpha_1) : \mathbb{Q}]$. Ogni fattore ha grado 1 oppure 2, per cui $[\mathbb{Q}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \mathbb{Q}] = 2^h$ per un qualche $h \in \mathbb{N}$. □

Disponiamo ora di tutti gli strumenti necessari ad enunciare i seguenti risultati.

Proposizione 2.2.4. *Se c è un numero reale costruibile, allora esso appartiene a un campo K, che è un ampliamento di $\mathbb{Q}$, di grado una potenza di 2.*

Corollario 2.2.1. *I numeri trascendenti non sono costruibili con riga e compasso.*

Proposizione 2.2.5. *Se un numero reale soddisfa un polinomio irriducibile in $\mathbb{Q}$, di grado n che non è una potenza di 2, allora tale numero non è costruibile con riga e compasso.*

Dimostrazione. Se α soddisfa a un polinomio irriducibile di grado $n \neq 2^h$, sappiamo che tale polinomio è il suo polinomio minimo; questo vuol dire che l'estensione $\mathbb{Q}(\alpha)$ è tale che $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = n \neq 2^h$. Quindi α non appartiene a un ampliamento algebrico di grado una potenza di 2, come dovrebbe invece avvenire se α fosse costruibile. □

Corollario 2.2.2. *Il numero $x = \sqrt[3]{2}$ non è costruibile con riga e compasso.*

Dimostrazione. Il numero x soddisfa al polinomio irriducibile (su $\mathbb{Q}$) $x^3 - 2 = 0$, che ha grado 3. Per la Proposizione 2.2.5, essendo $3 \neq 2^h\ \forall\ h \in \mathbb{N}$, il numero $x = \sqrt[3]{2}$ non è costruibile con riga e compasso. □

Di conseguenza, il problema della duplicazione del cubo, che dato un cubo di lato a chiede di costruire con riga e compasso un cubo di volume doppio, è impossibile da risolvere.

Anche il problema della quadratura del cerchio, che dato un segmento unitario chiede di costruire con riga e compasso un quadrato di lato π, è impossibile. Infatti, nel 1882 è stato dimostrato da Lindemann[3] che π è un numero trascendente, e perciò

[3]Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1938): matematico tedesco.

non costruibile con riga e compasso (Corollario 2.2.1).

Infine, anche il terzo problema classico, quello della trisezione di un angolo, è in generale impossibile da risolvere con riga e compasso. Per dimostrarlo, occorre prima enunciare i seguenti due risultati, attribuiti a Wantzel[4]:

Criterio 2.2.1. Le radici di un'equazione cubica a coefficienti razionali e senza radici razionali non sono costruibili.

Proposizione 2.2.6. *L'angolo di 120° non è trisecabile con riga e compasso.*

Dimostrazione. (Cenni) L'equazione di trisezione è $x^3 - 3x - 1 = 0$, che non ha soluzioni razionali, e quindi nemmeno irrazionali, costruibili. □

Possiamo dunque provare il successivo:

Corollario 2.2.3. *L'angolo di 60° non è trisecabile con riga e compasso.*

Dimostrazione. Se l'angolo di 60° fosse trisecabile con riga e compasso, allora l'angolo di 20° sarebbe costruibile con riga e compasso, e quindi per duplicazione sarebbe costruibile l'angolo di 40°, ma allora l'angolo di 120° sarebbe trisecabile: assurdo. □

Esistono tuttavia angoli che si possono trisecare, come per esempio 180°, 90° e 45°.

2.3 Costruzioni con il compasso

In questa sezione dimostreremo che tutte le costruzioni con riga e compasso possono essere eseguite con il solo compasso euclideo. Questo importante teorema fu mostrato indipendentemente e in due secoli differenti da due matematici: il danese Georg Mohr (1640-1697), che lo raccolse nella sua opera intitolata *Euclides Danicus*, e l'italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), che lo presentò nel suo scritto *Geometria del compasso*. Sembra che all'origine della teoria sulla costruibilità con compasso di Mascheroni ci sia una proposta di Napoleone Bonaparte: egli si chiese se fosse possibile dividere una circonferenza in quattro archi congruenti usando il solo compasso. Fu durante una sua campagna nel nord Italia che Napoleone conobbe Mascheroni, allora docente presso l'Università di Pavia. Quest'ultimo pubblicò il suo lavoro al quesito di Napoleone nella sua opera, che peraltro si apre con un'ode all'imperatore francese [34].

Sorprendentemente, ogni punto che può essere costruito con riga e compasso può comunque essere costruito senza l'uso della riga. In pratica, non si può disegnare una retta senza la riga, ma si possono costruire i punti della retta come intersezione di cerchi costruiti con compasso.

Per poter proseguire, è innanzitutto necessario dare la definizione di punto costruibile con compasso [34]:

[4]Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848): matematico francese.

Definizione 2.3.1. *Un punto $P(x,y)$ del piano cartesiano si dice costruibile con compasso se è uno dei due punti $O(0,0)$ o $U(1,0)$, oppure se è ottenibile mediante intersezione di due circonferenze, ciascuna delle due passante per un punto precedentemente costruito con compasso e con centro un punto precedentemente costruito con compasso.*
Più precisamente,

- *un segmento è costruibile con compasso se i suoi estremi sono punti costruibili con compasso;*
- *una retta è costruibile con compasso se passa per due punti costruibili con compasso;*
- *una circonferenza è costruibile con compasso se ha centro in un punto costruibile con compasso e raggio un segmento costruibile con compasso.*

Infine, un numero x è costruibile con compasso se $(x,0)$ è un punto costruibile con compasso.

Riportiamo ora nel seguito le principali proprietà delle rette e delle circonferenze costruibili con compasso.

Teorema 2.3.1. *Se P e Q sono due punti costruibili con compasso, allora l'asse del segmento di estremi P e Q è una retta costruibile con compasso.*

Dimostrazione. Siano A e B i due punti d'intersezione tra la circonferenza di centro P e passante per Q e la circonferenza di centro Q e passante per P. Per il teorema precedente, essi sono costruibili con compasso. Allora la retta AB, costruibile con compasso per definizione, è l'asse del segmento PQ, dal momento che per definizione l'asse di PQ è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da P e da Q. □

Notiamo che i punti P e Q del teorema appena dimostrato corrispondono ciascuno alle loro immagini tramite riflessione lungo la retta passante per i punti A e B. Ricordiamo infatti che la riflessione rispetto a una retta AB è la trasformazione geometrica che manda un punto P nel punto P' tale che la retta AB sia l'asse del segmento PP' (se P appartiene alla retta AB, allora esso viene mandato in sé stesso). A questo punto possiamo enunciare il seguente risultato, interessante per il proseguo della trattazione:

Teorema 2.3.2. *L'immagine di un punto costruibile con compasso tramite riflessione rispetto a una retta costruibile con compasso è costruibile con compasso.*

Dimostrazione. Siano P un punto costruibile con compasso e AB la retta costruibile con compasso e passante per i punti A e B (costruibili con compasso). Consideriamo la riflessione di un punto P lungo la retta AB. Se P appartiene alla retta, la sua immagine P' tramite tale riflessione coincide con P stesso, e quindi P' è un punto costruibile con compasso. Se invece P non appartiene alla retta AB, P e P' sono i due punti d'intersezione tra la circonferenza di centro A e passante per P e la circonferenza di centro B e passante per P (Figura 2.16). Poiché AP = AP' e BP = BP', A e B sono entrambi equidistanti da P e P'. Dunque la retta AB è l'asse del segmento PP', e quindi l'immagine di P tramite riflessione lungo tale retta è, per definizione, P'. Ma allora P' è costruibile con compasso. □

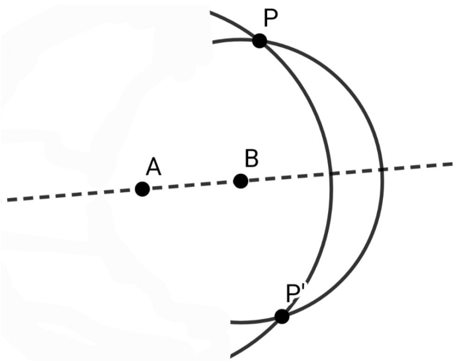


Figura 2.16: Il punto P' è costruibile con compasso in quanto immagine del punto P tramite riflessione lungo la retta AB (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Teorema 2.3.3. *Se A, B, C sono punti costruibili con compasso, allora la circonferenza di centro A e raggio BC è costruibile con compasso.*

Il teorema che segue afferma invece che una costruzione con compasso moderno può essere trasformata in una costruzione con compasso euclideo.

Teorema 2.3.4. *Se A, B, C sono tre punti costruibili con compasso, D ed E sono i punti d'intersezione della circonferenza di centro A e passante per B con la circonferenza di centro B e passante per A, e C e D sono i punti d'intersezione della circonferenza di centro D e passante per C con la circonferenza di centro E e passante per C, allora la circonferenza di centro A e raggio BC è la circonferenza* (*costruibile con compasso*) *di centro A e passante per F.*

Dimostrazione. (Cenni) Con riferimento alla Figura 2.17, il segmento BC è mandato, tramite riflessione lungo la retta passante per i punti D ed E, nel segmento AF. Allora AF e BC sono segmenti simmetrici rispetto alla retta DE, e quindi sono congruenti. La conclusione segue dal fatto che i segmenti sono mandati tramite riflessione lungo una retta in segmenti congruenti. □

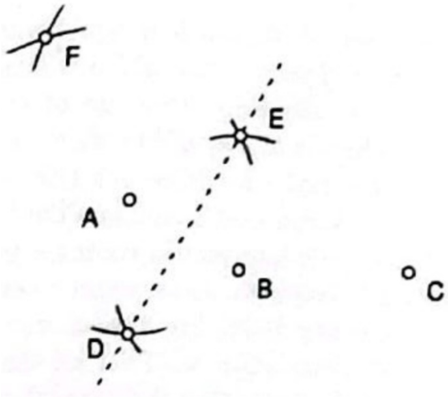


Figura 2.17: Costruzione relativa al Teorema 2.3.4 (Fonte: [34])

Teorema 2.3.5. *Se A e B sono due punti costruibili con compasso, M è il punto medio del segmento AB, e B è il punto medio del segmento MN, allora M ed N sono punti costruibili con compasso.*

Teorema 2.3.6. *Se A e B sono due punti costruibili con compasso ed n è un numero intero positivo, allora i punti P e Q, appartenenti al segmento orientato AB e tali che $AP = nAB$ e $AQ = AB/n$, sono punti costruibili con compasso.*

Teorema 2.3.7. *L'intersezione di due rette costruibili con compasso è un punto costruibile con compasso.*

Per poter dimostrare tale risultato, occorre prima enunciare il seguente:

Lemma 2.3.1. *Siano P, Q, R, S quattro punti. P, Q, R sono i vertici di un triangolo isoscele se Q è immagine di P tramite riflessione lungo la retta passante per R e S, e il segmento PQ non è perpendicolare al segmento RS.*

Possiamo ora dimostrare il **Teorema 2.3.7**:

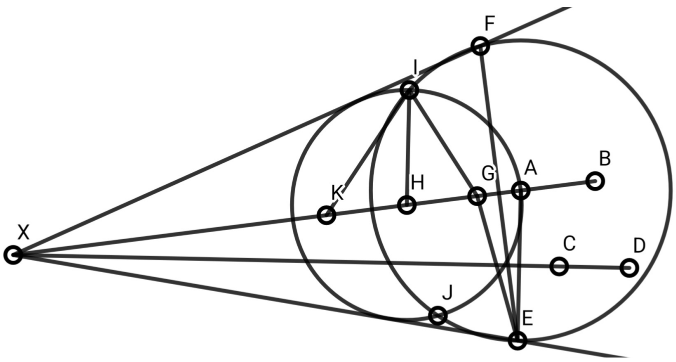


Figura 2.18: Costruzione relativa al Teorema 2.3.7 (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Dimostrazione. Siano A, B, C, D quattro punti costruibili con compasso e a tre a tre non allineati. Supponiamo inoltre che le rette AB e CD si intersechino in un unico punto X. Allora X $\neq$ A. Sia E l'immagine di A tramite riflessione lungo la retta CD. Distinguiamo due casi.
Caso 1: AB e CD sono tra loro perpendicolari. Allora X è il punto medio (costruibile con compasso) del segmento AE (costruibile con compasso).
Caso 2: AB e CD non sono tra loro perpendicolari. Sia F l'immagine (costruibile con compasso) di E tramite la riflessione lungo la retta AB. Sia invece G l'immagine (costruibile con compasso) di A tramite la riflessione lungo la retta EF. Allora i triangoli AXE e AEG sono tra loro congruenti, dal momento che sono entrambi isosceli e hanno gli angoli alla base tra loro congruenti. Allora AX/AE = AE/AG, da cui $\mathrm{AE}^2/\mathrm{AG} = \mathrm{AX}$. Ora, la circonferenza di centro G e passante per A non interseca la circonferenza di centro A e passante per E, poiché AE $<$ 2AG. Sia n un numero intero positivo tale che AE $<$ nAG (la Figura 2.18 rappresenta il caso $n =$ 2). Allora il punto H appartenente al segmento orientato AG e tale che AH $=$ nAG è costruibile con compasso. Dunque la circonferenza di centro H e passante per A interseca la circonferenza di centro A e passante per E in due punti costruibili con

compasso; chiamiamo tali punti I e J. Ancora, la circonferenza di centro I e passante per A interseca la circonferenza di centro J e passante per A in due punti costruibili con compasso, uno dei quali è A; chiamiamo l'altro punto K. Abbiamo che i triangoli AIK e AHI sono tra loro congruenti, perché entrambi isosceli e con gli angoli alla base tra loro congruenti. Perciò AK/AI = AI/AH. Da ciò deduciamo che il punto Y, appartenente al segmento orientato AK e tale che AY = nAK, è costruibile con compasso. Tuttavia, AY = nAK = $n[AI^2/\mathrm{AH}] = n[AE^2/n\mathrm{AG}] = AE^2/\mathrm{AG}$ = AX. Dunque, poiché H e Y appartengono entrambi al segmento orientato AG, vale che X = Y. Ma allora X è un punto costruibile con compasso, dal momento che Y lo è. □

I teoremi successivi garantiscono che i punti d'intersezione tra una retta costruibile con compasso e una circonferenza costruibile con compasso sono costruibili con compasso.

Teorema 2.3.8. *Se A, B, C, D sono punti costruibili con compasso tali che la retta passante per A e B interseca la circonferenza di centro C e passante per D, e C non appartiene a tale retta, allora i punti d'intersezione della retta con la circonferenza sono costruibili con compasso.*

Dimostrazione. (Cenni) Il risultato si mostra facilmente considerano le immagini dei punti C e D tramite la riflessione lungo la retta AB. □

Teorema 2.3.9. (***Problema di Napoleone***) *Se P ed O sono due punti costruibili con compasso, allora i punti P, Q, R, S appartenenti alla circonferenza di centro O e passante per P tali che PQRS è un quadrato, sono punti costruibili con compasso.*

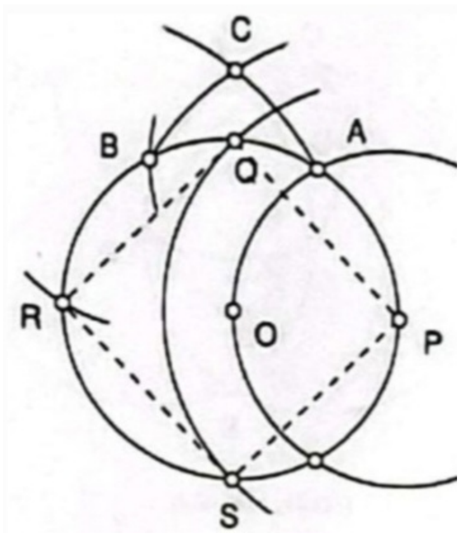


Figura 2.19: Costruzione relativa al *Problema di Napoleone* (Fonte: [34])

Dimostrazione. (Cenni) In riferimento alla Figura 2.19, per semplicità prendiamo OP = 1. Allora PR = 2 e PC = PB = $\sqrt{3}$. Poiché il segmento OC è perpendicolare al segmento OP, allora per il Teorema di Pitagora abbiamo che PQ = PS = OC = $\sqrt{PC^2 - OP^2} = \sqrt{2}$. □

Teorema 2.3.10. *Se A, B, C sono tre punti costruibili con compasso, allora i punti d'intersezione della retta passante per A e B con la circonferenza di centro A e passante per C sono punti costruibili con compasso.*

Corollario 2.3.1. *I punti d'intersezione di una retta costruibile con compasso con una circonferenza costruibile con compasso sono punti costruibili con compasso.*

Dimostrazione. Segue direttamente dai due teoremi precedenti. □

Teorema 2.3.11. *Se A, B, C, D, con $A \neq B$, sono quattro punti costruibili con compasso, allora il punto E, appartenente alla retta passante per A e B e tale che $AE = CD$, è costruibile con compasso. Inoltre, se P e Q sono punti costruibili con compasso, allora PQ è un numero costruibile con compasso.*

A questo punto possiamo enunciare il risultato più importante di questa sezione, ossia il:

Teorema 2.3.12. (***Teorema di Mohr - Mascheroni***) *Un punto è costruibile con compasso se e solo se è un punto costruibile con riga e compasso.*

In conclusione, ogni costruzione euclidea può essere realizzata con l'uso del solo compasso, anche se queste seconde costruzioni risultano meno eleganti, da un punto di vista matematico, rispetto a quelle eseguite con riga e compasso ideali.

2.4 Costruzioni con la riga

In questa sezione mostreremo i principali risultati concernenti la teoria della costruibilità con il solo uso della riga.
Il punto di partenza di tale teoria consiste nel considerare quattro punti, vertici di un trapezoide, a partire dai quali possiamo costruire tutti gli altri punti, ottenuti come intersezione di rette costruibili con riga e cerchi costruibili con riga a partire dai punti di tale insieme.
Alla luce di tali considerazioni, possiamo dare la seguente [34]:

Definizione 2.4.1. *Un punto $P(x,y)$ del piano cartesiano si dice costruibile con riga se è uno dei quattro punti $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$ o $(0,2)$, oppure se è ottenibile mediante intersezione di due rette, ciascuna delle due passante per altri due punti precedentemente costruiti con riga.*
Più precisamente,

- *un segmento è costruibile con riga se i suoi estremi sono punti costruibili con riga;*
- *una retta è costruibile con riga se passa per due punti costruibili con riga;*
- *una circonferenza è costruibile con riga se ha centro in un punto costruibile con riga e raggio un segmento costruibile con riga.*

Infine, un numero x è costruibile con riga se $(x,0)$ è un punto costruibile con riga.

Riportiamo ora nel seguito le principali proprietà delle rette e delle circonferenze costruibili con riga.

Lemma 2.4.1. *I punti* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ *sono punti costruibili con riga e vertici di un quadrato. Inoltre, i quattro punti medi dei lati del quadrato sono costruibili con riga. Infine, ciascuna retta costruibile con riga contiene tre punti tali che uno è il punto medio del segmento avente gli altri due per estremi.*

Teorema 2.4.1. *Il punto medio di un segmento AB costruibile con riga è costruibile con riga se qualche altra retta parallela alla retta AB è costruibile con riga. D'altro lato, se A, M, B, P sono quattro punti costruibili con riga e M è il punto medio del segmento AB, allora la retta parallela ad AB e passante per P è costruibile con riga.*

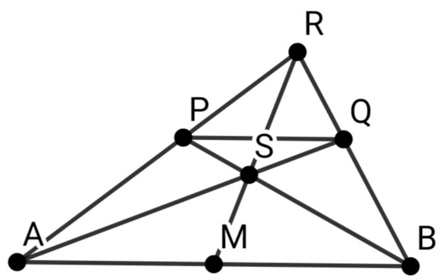


Figura 2.20: Costruzione relativa al Teorema 2.4.1 (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

La Figura 2.20 illustra entrambe le costruzioni citate nel teorema precedente e fondamentali per la teoria della riga. Data la retta AB costruibile con riga, ci sono due punti P e Q ad essa appartenenti e tali che APQB sia un trapezoide, per il Lemma 2.4.1. Allora i punti R, S, M, sono determinati nell'ordine, con M punto medio del segmento AB. D'altro canto, dati i punti A, M, B, P, costruibili con retta, con M punto medio del segmento AB e con P non appartenente alla retta AB, per il Lemma 2.4.1 esiste un punto R costruibile con riga, appartenente alla retta AP, diverso da A e P e tale che la retta MR non è parallela alla retta BP. Allora S e Q sono determinati nell'ordine, e PQ è la retta parallela desiderata.
Queste due costruzioni sono fondamentali per la teoria della costruibilità con la sola retta.

Teorema 2.4.2. *Il punto medio di un segmento costruibile con riga è costruibile con riga. La retta passante per un punto costruibile con riga e parallela ad una retta costruibile con riga è costruibile con riga.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima la seconda parte dell'enunciato. Per il Lemma 2.4.1 sappiamo che ciascuna retta costruibile con riga contiene tre punti costruibili con riga tali che uno è il punto medio del segmento che ha per estremi gli altri due. Di conseguenza, per il teorema precedente possiamo concludere che le rette passanti per un punto costruibile con riga e parallele ad una retta costruibile con riga sono costruibili con riga. La prima parte dell'enunciato è ora conseguenza della prima parte del Teorema 2.4.2. □

Dal momento che una retta costruibile con riga contiene due punti costruibili con riga e che il punto medio di due punti costruibili con riga è costruibile con riga, deduciamo che una retta costruibile con riga contiene infiniti punti costruibili con riga.

I risultati che seguono mostrano invece che è possibile "aggiungere o sottrarre" segmenti ad una di due rette parallele date.

Teorema 2.4.3. *Siano P e Q due punti costruibili con riga. Se A e B sono due punti costruibili con riga e appartenenti alla retta PQ, allora il punto X sulla retta PQ tale che PX = AB è costruibile con riga.*

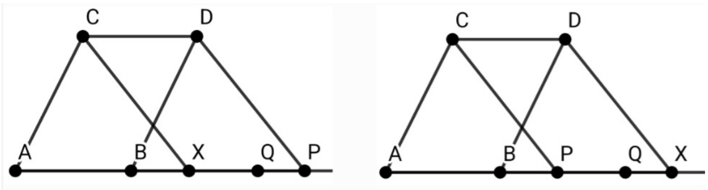


Figura 2.21: Costruzione relativa al Teorema 2.4.3 (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Dimostrazione. Sia C un punto costruibile con riga esterno alla retta PQ. Sia D il punto (costruibile con riga) d'intersezione tra la retta (costruibile con riga) passante per C e parallela alla retta PQ e la retta (costruibile con riga) passante per B e parallela alla retta AC. Allora ACDB è un parallelogramma. Con riferimento alla Figura 2.21, se P e Q sono dalla stessa parte rispetto alla retta CP, allora sia X il punto d'intersezione tra la retta PQ e la retta (costruibile con riga) passante per D e parallela alla retta CP. In questo caso, PCDX è un parallelogramma. Se invece D e Q si trovano in parti opposte rispetto alla retta CP, allora sia X il punto d'intersezione tra tra la retta PQ e la retta (costruibile con riga) passante per C e parallela alla retta DP. Allora XCDP è un parallelogramma. In ogni caso, X è un punto costruibile con riga appartenente alla retta PQ e tale che AB = CD = PX, come si voleva. □

Corollario 2.4.1. *Se p e q sono due numeri costruibili con riga, allora p + q e p - q sono numeri anch'essi costruibili con riga.*

Teorema 2.4.4. *Siano O ed A due punti costruibili con riga distinti tra loro. Se i punti B e C, costruibili con riga, appartengono al segmento orientato OA e non coincidono con O, allora il punto X sul segmento orientato OA tale che $OA/OB = OC/OX$ è costruibile con riga.*

Dimostrazione. Sia D un punto costruibile con riga esterno alla retta OA. La retta passante per D e parallela alla retta OA è costruibile con riga. Dal momento che tale retta contiene almeno tre differenti punti costruibili con riga per il Teorema 2.4.3, allora esiste un punto E costruibile appartenente alla retta e tale che le rette AE e CE non sono parallele alla retta OD. Allora, con riferimento alla Figura 2.22, sia X il punto definito come l'intersezione tra la retta HG e la retta OA. Abbiamo che X è costruibile con riga. Si conclude osservando che $OA/OB = DE/DG = OC/OX$. □

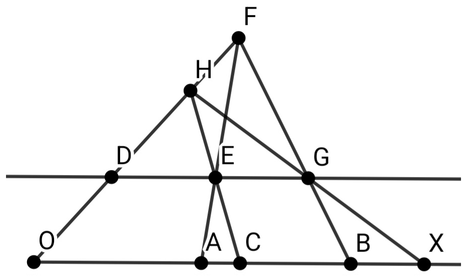


Figura 2.22: Costruzione relativa al Teorema 2.4.4 (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Corollario 2.4.2. *Se p, q, r sono numeri costruibili con riga e $r \neq 0$, allora pq e p/r sono numeri costruibili con riga.*

Teorema 2.4.5. *Un punto è costruibile con riga se e solo se le sue coordinate sono numeri razionali.*

Dimostrazione. ($\Leftarrow$) Sappiamo che (1,0) è un punto costruibile con riga. Perciò anche $(n,0)$ è un punto costruibile con riga $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, per il Corollario 2.4.1. Allora $(m/n,0)$ è un punto costruibile con riga $\forall\ m,\ n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, per il Corollario 2.4.2. Dunque $(r,0)$ è un punto costruibile con riga $\forall\ r \in \mathbb{Q}$. Ora, l'asse delle ordinate è una retta costruibile con riga. Ciò implica che il punto $(0, r)$, intersezione dell'asse y con la retta passante per il punto $(r,0)$ e parallela alla retta di equazione $\mathrm{X} + \mathrm{Y} = 1$, è costruibile con riga $\forall\ r \in \mathbb{Q}$, per il Teorema 2.4.3. Inoltre, la retta di equazione $\mathrm{X} = r$, passante per il punto $(r,0)$ e parallela all'asse y, e la retta di equazione $\mathrm{Y} = s$, passante per il punto $(0,s)$ e parallela all'asse x, sono costruibili con riga $\forall\ r,\ s \in \mathbb{Q}$, sempre per il Teorema 2.4.3. Ma allora le due rette $\mathrm{Y} = r$ e $\mathrm{X} = s$ si intersecano nel punto (r,s), che è costruibile con riga $\forall\ r,\ s \in \mathbb{Q}$.
($\Rightarrow$) La prova è lasciata al lettore. $\square$

Corollario 2.4.3. *Il campo dei numeri costruibili con riga è $\mathbb{Q}$.*

Teorema 2.4.6. *La retta perpendicolare ad una retta costruibile con riga e passante per un punto costruibile con riga è costruibile con riga.*

Infine, poiché con la riga è possibile costruire rette parallele e perpendicolari, è possibile anche "copiare" angoli; vale infatti il seguente:

Teorema 2.4.7. *Se P, Q, R sono tre punti costruibili con riga e non allineati tra di loro, e se V ed A sono due punti costruibili con riga, allora c'è un punto X costruibile con riga tale che l'angolo $A\hat{V}X$ è congruente all'angolo $P\hat{Q}R$.*

In generale, invece, con il solo uso della riga non riusciamo a "copiare" segmenti.

In conclusione, oltre alle più conosciute costruzioni euclidee eseguite con riga e compasso ideali, si possono fare anche altre costruzioni geometriche, utilizzando per esempio la riga e il compasso moderno, oppure il solo compasso, così come la sola riga.

Nel tempo sono state avvalorate anche altre teorie sulla costruibilità; ad esempio ce ne sono che prevedono l'uso di riga e divisori, di doppia riga o di riga graduata. Il lettore può consultare tali argomenti nell'opera di George E. Martin [34] sulle costruzioni geometriche, comprese quelle con la piegatura della carta (*paper folding*).

Capitolo 3

La didattica della Geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado

L'insegnamento e l'apprendimento della Geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado sono temi di grande rilievo per la Didattica della Matematica. In questo capitolo analizzeremo tali aspetti, proponendo alcune questioni didattiche di interesse per l'insegnamento della Geometria.

3.1 La Geometria nelle Indicazioni Nazionali e nelle Linee Guida

A partire dagli anni 2000 sono stati approvati dei provvedimenti al fine di aggiornare la scuola italiana e introdurre nuovi curricoli di matematica.
I vari curricoli che si sono succeduti negli anni sono stati preceduti da un lavoro realizzato da una commissione, costituita da docenti universitari e di scuola ed esperti in didattica, istituita dall'UMI (Unione Matematica Italiana).
In tale sede emerse l'idea di creare una *"Matematica per il cittadino"*, ossia *"un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell'attuale società"*.
A seguito del lavoro svolto dalla commissione, sono stati pubblicati tre volumi contenenti, oltre i suddetti curricoli, numerose attività da svolgere in classe, volte ad illustrare il significato delle scelte operate all'interno del curricolo.
Nel 2001, l'UMI ha presentato una proposta di curricoli di matematica per la scuola primaria e secondaria di primo grado, pubblicata nel volume *Matematica 2001*.
Nei volumi *Matematica 2003* e *Matematica 2004*, pubblicati rispettivamente nel 2003 e 2004, si presentano invece le competenze matematiche che un alunno di scuola secondaria di secondo grado deve acquisire, suddivise in quattro nuclei tematici:

- Numeri e algoritmi
- Spazio e figure

- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

e in tre nuclei trasversali, detti "di processo":

- Argomentare e congetturare (e dimostrare)
- Misurare
- Risolvere e porsi problemi.

Per quanto concerne l'ambito geometrico, in tali testi è quindi ribadita la centralità dell'argomentazione, della congettura e della dimostrazione.

Nella tesi vogliamo indagare l'insegnamento e l'apprendimento, attraverso l'uso delle costruzioni geometriche e la presentazione di alcuni problemi aperti, del concetto di dimostrazione in geometria. Il nucleo tematico di nostro interesse è perciò quello intitolato "Spazio e figure". In particolare, nelle *Indicazioni Nazionali* (2010) per i licei si legge quanto segue[1]:

"Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica. [...]
La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (*in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea*), *sia mediante programmi informatici di geometria* [37]. *[...]"* (*Indicazioni Nazionali*, 2010, pp. 338-339)

Notiamo innanzitutto che nell'insegnamento della geometria è evidenziata l'importanza di inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e di acquisire il senso e la portata dei principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico.
Si invita inoltre l'insegnante a proporre la realizzazione di costruzioni geometriche anche mediante l'uso di un software di geometria dinamica, con lo scopo di stimolare la curiosità dell'allievo e agevolarne l'apprendimento.
Tale suggerimento è presente anche nelle *Linee Guida* (2010 e 2012) per gli istituti tecnici e gli istituti professionali, dove, in merito alle conoscenze e abilità richieste di geometria nel primo biennio, è riportato quanto segue [38] [39]:

[1] Il lettore interessato alla precisa formulazione relativa ad ogni indirizzo liceale può consultare [36].

Conoscenze	Abilità
Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio. Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà.	Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando sia la riga e il compasso, sia strumenti informatici. [...] Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche [...]. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.

Figura 3.1: Conoscenze e abilità richieste di geometria nel primo biennio degli istituti tecnici e istituti professionali (Fonte: [35], [36])

3.2 Questioni didattiche nell'insegnamento della Geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado

In questa sezione affronteremo alcune tematiche concernenti l'insegnamento e l'apprendimento della geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado. Innanzitutto, tratteremo dell'importanza ricoperta dalla storia nella didattica della matematica; poi discuteremo di quali percorsi didattici sia preferibile seguire per introdurre il concetto di dimostrazione; infine vedremo come l'utilizzo di un software di geometria dinamica possa contribuire a migliorare e stimolare negli alunni l'apprendimento della geometria.

3.2.1 L'importanza della storia nell'insegnamento della Matematica

Per quanto riguarda la Matematica, nella sezione intitolata "linee generali e competenze" delle *Indicazioni Nazionali* relative al liceo scientifico, si legge:

"Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente (...) *saprà* ***inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale****. Lo studente avrà acquisito una* ***visione storico-critica*** *dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico:* ***la matematica nella civiltà greca****, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi* (*tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche*) *e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica"* [36].

Nei programmi ministeriali, dunque, si evidenzia l'importanza di connettere le varie teorie matematiche studiate con le problematiche storiche che le hanno originate, approfondendone il significato. Inoltre, si riconosce la matematica nella civiltà greca come uno dei punti di snodo dello sviluppo della matematica moderna, tanto da essere citato come uno dei tre momenti principali di caratterizzazione del pensiero matematico.

L'approccio storico all'insegnamento della matematica fu incentivato già alla fine del diciottesimo secolo da Joseph Louis Lagrange, che, nelle sue *Lezioni elementari sulle matematiche* del 1795, fece ricco uso di riferimenti storici e di riflessioni critiche ed epistemologiche sui metodi e sui diversi settori delle matematiche. Egli stesso descrisse le sue lezioni come momenti in cui esporre *"il percorso analitico degli inventori e gli artifici che hanno impiegato per vincere le difficoltà che potevano fermarli"* [23]. La storia serviva dunque a rendere la teoria meno astratta, ad esplicitare le problematiche in gioco e ad illustrare il cammino percorso dai matematici nella risoluzione dei problemi. Per Lagrange il passato era davvero fonte d'ispirazione, tant'è che egli antepose spesso ai suoi articoli introduzioni storiche.

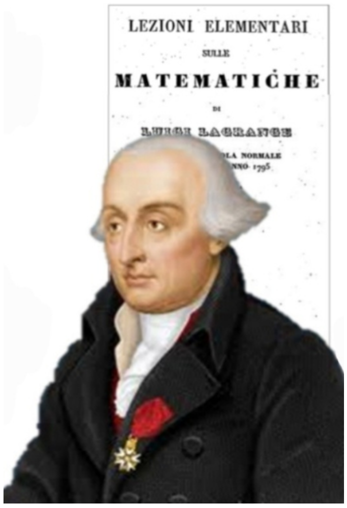


Figura 3.2: J. L. Lagrange (Torino, 1736 - Parigi, 1813) (Fonte: [23])

Figura 3.3: F. Klein (Düsseldorf, 1849 - Gottinga, 1925) (Fonte: Wikipedia)

Poi, negli anni novanta dell'Ottocento, Felix Klein[2] elaborò il suo celebre programma di riforma dell'insegnamento della matematica, fra i cui assunti metodologici vi era quello di adottare il *metodo genetico*, che consisteva nel presentare la teoria seguendo il modo con cui essa si era sviluppata nella storia e non a partire dalla sua formulazione finale.
Nello stesso periodo, anche in Italia si capì l'importanza della storia nella scienza. Per esempio, Giovanni Vailati [3] sosteneva che la storia ricoprisse un ruolo educativo e formativo e che fosse un punto di raccordo tra la cultura umanistica e quella scientifica [23]. Egli era inoltre convinto che arricchire le spiegazioni teoriche con considerazioni storiche rendesse l'insegnamento *"più proficuo e nello stesso tempo più gradevole, più efficace e insieme più attraente"* [23]. Vailati stesso accompagnava gli allievi ad accostarsi alla storia della scienza proponendo loro letture commentate di passi classici, come alcuni frammenti tratti dagli *Elementi* di Euclide.
Gino Loria[4], invece, propose di creare cattedre universitarie appositamente pensate

[2]Felix Klein: matematico tedesco conosciuto soprattutto per i suoi contributi alla geometria non euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e per alcuni risultati sulla teoria delle funzioni. Egli è stato anche il primo descrittore della "Bottiglia di Klein", figura geometrica dell'iperspazio.

[3]Giovanni Vailati (Crema, 1863 - Roma, 1909): matematico, filosofo, educatore ed insegnante negli istituti medi superiori.

[4]Gino Loria (Mantova, 1862 - Genova, 1954): storico della matematica.

per la formazione degli insegnanti, dove a temi più tradizionali si affiancavano lezioni sulla storia della matematica.

Il tema fu trattato anche da un altro matematico italiano, Federigo Enriques, il quale sosteneva che un bravo insegnante avrebbe dovuto presentare ai suoi allievi *"le origini, le connessioni, il divenire, non un qualsiasi assetto statico"* [23] di ogni teoria studiata, prestando attenzione agli errori che hanno fatto progredire la scienza, alle questioni aperte e ai diversi metodi usati per discuterle. Egli era dunque convinto che l'uso della storia nell'insegnamento della matematica giocasse un ruolo tutt'altro che marginale, tanto da affermare che *"se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi. ... La storia della scienza viene qui in soccorso, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati [...]"* [23].

Figura 3.4: F. Enriques (Livorno, 1871 - Roma, 1946) (Fonte: [23])

In conclusione, Enriques riteneva che gli sviluppi scientifici acquistassero pieno significato solo nella loro concatenazione storica, affermando che *"una visione dinamica della scienza porta naturalmente sul terreno della storia, ... dunque la storia diviene parte integrante della scienza"* [23].
Anche Francesco Severi[5] era convinto che, per facilitare la comprensione di alcuni concetti matematici da parte degli studenti di scuola secondaria, fosse utile partire dalla loro origine storica, sostenendo che *"occorre ispirarsi al principio che nell'apprendimento di nozioni nuove l'intelletto tende a seguire un processo analogo a quello con cui si è storicamente sviluppata la scienza"*. Egli invitava quindi i discenti a *"non dimenticare i maestri, perché un'idea geniale vale in potenza creatrice più di tutte le sue conseguenze"* [23].
Questa idea della storia come motivo di riflessione sia sugli oggetti matematici che sul modo di introdurli in classe, la ritroviamo negli scritti del didatta della matematica Louis Radford, il quale, nel 1997, sostenne come *"il modo in cui un'antica idea è stata forgiata può aiutarci a ritrovare quegli antichi significati che, con un'opportuna opera di adattamento didattico, possono probabilmente essere ridisegnati e resi compatibili con i moderni programmi scolastici"* [23].
In tempi più recenti, altri studiosi di didattica della matematica hanno avvalorato la tesi secondo cui la storia rende l'insegnamento della disciplina più piacevole e stimolante per gli allievi, i quali possono così migliorare il loro atteggiamento nei confronti della materia. La storia, inoltre, conferisce alla matematica una dimensione culturale ed interculturale.

[5]Francesco Severi (Arezzo, 1879 - Roma, 1961): matematico fra i più grandi esponenti della Scuola italiana di geometria algebrica e presidente di Mathesis nel 1909-1910.

In occasione dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Study sul Ruolo della Storia della Matematica nell'Insegnamento e nell'Apprendimento della Matematica, tenutosi a Luminy (Marsiglia) nell'aprile 1998, Lucia Grugnetti, sotto la guida di Francesco Speranza, scrisse una nota, pubblicata nella Rivista Matematica dell'Università di Parma del 2000[6], nella quale sosteneva la tesi secondo cui *"nella formazione, didattica, storia ed epistemologia* (*della matematica*) *devono costituire un «circolo virtuoso» nel quale ognuna di esse giustifica e rafforza le altre"*, aggiungendo che *"nell'insegnamento della matematica a livello di scuola secondaria superiore deve esserci una componente storico-epistemologica e, simmetricamente, deve esserci una componente matematica nell'insegnamento della filosofia"* [24].
In risposta ad alcune domande del documento preparatorio dell'ICMI Study, secondo i due matematici, *"gli allievi che si confrontano esplicitamente con questi problemi dovrebbero essere, o diventare, capaci di capire «il valore culturale» della matematica."* La geometria, in particolare, *"può offrire molti spunti di riflessione in virtù della sua lunga storia e dei cambiamenti avvenuti nel corso dei secoli.* [...] *Il ruolo della dimensione storica ed epistemologica è fondamentale per un «ritorno alla geometria»."* É principalmente grazie alla geometria, infatti, che gli alunni *"potrebbero capire i problemi principali connessi alla costruzione storica della matematica e il suo ruolo nella cultura."* Infine, per enfatizzare l'importanza assunta dalla storia nell'insegnamento della matematica, Grugnetti e Speranza si rifanno all'aforisma kantiano *"La didattica senza la storia e la filosofia è cieca"* [24].

Dalle considerazioni fatte finora emerge come sia importante collocare la matematica in un contesto generale della conoscenza [7], in cui la storia può essere usata per motivare e stimolare gli studenti ad apprendere alcuni concetti matematici, come strumento cognitivo o strumento pedagogico.
A questo punto della trattazione, il lettore potrebbe chiedersi quali siano le modalità preferibili per inserire la storia nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica.
Giorgio Tomaso Bagni[8], per esempio, proponeva come prima scelta possibile quella di un *uso a priori della storia nella trasmissione del sapere matematico* [6], che prevede l'impiego degli elementi storici come introduzione all'argomento di riferimento. Tali elementi potrebbero quindi essere proposti all'inizio della trattazione, in ordine cronologico. Tale approccio si collega anche ad un'altra questione didatticamente rilevante, ossia se l'introduzione di un concetto debba sempre seguire o meno l'evoluzione storica degli eventi e se l'accostamento alla storia debba anticipare o seguire la presentazione di un concetto.
Sempre secondo Bagni, una possibile alternativa per inserire la storia può essere un *uso a posteriori* della stessa *nella trasmissione del sapere matematico* [6]. In tal caso, il ruolo degli elementi storici si collega all'approfondimento e alla chiarificazione

[6]Una versione in inglese è stata pubblicata in Philosophy of Mathematics Education Journal 11, 1999.

[7]Purtroppo oggi è frequente la scelta contraria: il lettore interessato può consultare, a titolo di esempio, l'introduzione di Bourbaki agli *Éléments de Mathématique*.

[8]Giorgio Tomaso Bagni (Milano, 1958 - Treviso, 2009): docente di matematica attivo nell'ambito della ricerca e dell'insegnamento universitario.

degli argomenti trattati.
É importante prendere coscienza del fatto che le due modalità dell'impiego della storia sopra descritte, pur basandosi su due diverse impostazioni epistemologiche, potrebbero comunque essere considerate complementari nell'insegnamento della matematica. Tuttavia, qualsiasi sia la scelta da parte dell'insegnante, è indispensabile mantenere un rigoroso atteggiamento su alcune questioni metodologiche. In particolare, ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato, cioè presentato con riferimento al periodo in esame.

A conclusione di questa sezione, è comunque bene sottolineare come le figure dello storico e del matematico siano ben distinte e non debbano essere superficialmente confuse: lo storico mira a ricostruire l'evoluzione della ricerca matematica nel tempo dall'interno, cioè collocandosi idealmente nel momento esaminato e senza particolari riferimenti alla successiva sistemazione concettuale della materia; il didatta della matematica, invece, la ripercorre e la propone dall'esterno, interpretandola anche alla luce del sapere che sta trasmettendo, senza tuttavia trascurare la corretta contestualizzazione storica, sociale e culturale dei riferimenti impiegati [6].[9]

3.2.2 Introduzione al concetto di dimostrazione in Geometria

Da un punto di vista didattico, la dimostrazione viene spesso considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di un argomento matematico [5]. Talvolta, questa impostazione porta ad attribuire alla dimostrazione un ruolo preponderante nell'insegnamento e apprendimento della matematica. Come osservò Francesco Speranza, infatti, *"siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema di enunciati-dimostrazioni"* [5]. Tale tesi fu abbracciata anche da Vinicio Villani[10], il quale riteneva che il ragionamento ipotetico-deduttivo sia il cuore della disciplina, in quanto aiuta ad una comprensione più profonda del significato dell'enunciato di un teorema e dà la certezza della sua validità all'interno di una teoria. Egli sosteneva che, rappresentando la geometria euclidea il prototipo e l'esempio emblematico del metodo di tale ragionamento, sia naturale che essa sia utilizzata come *"palestra per abituare i giovani a ragionare con coerenza logica, a comprendere il ruolo dei termini primitivi, dei postulati, delle definizioni, delle ipotesi e delle tesi dei teoremi, a confutare eventuali deduzioni errate esibendo opportuni controesempi, ecc."* [50].
La geometria rappresenta quindi l'ambito disciplinare in cui tradizionalmente si introducono teoremi e dimostrazioni [33]. D'altro canto, occorre che il lettore prenda comunque coscienza di quanto sarebbe limitativo e sbagliato confinare le dimostrazioni alla sola geometria [50], anche perché il sistema logico ipotetico-deduttivo è stato poi preso come modello per dare alle altre discipline sperimentali (come l'ingegneria, la fisica, la medicina, ...) un assetto teorico coerente. La dimostrazione,

[9] Per maggiori approfondimenti si può consultare Grugnetti & Rogers *History in Mathematics Education*, The ICMI Study,39-62, Dodrecht,Kluwer, 2000.
[10] Vinicio Villani (1935-2018): matematico e geometra italiano particolarmente attivo nell'ambito della Didattica della Matematica.

quindi, assume una valenza ben più ampia che in geometria (e in matematica), dal momento che essa favorisce lo sviluppo del ragionamento anche in altri contesti: non a caso, secondo Villani, essa *"rappresenta un patrimonio culturale per tutti i futuri cittadini"* [50].

Alla luce di tali considerazioni, possiamo affermare che la dimostrazione è una parte essenziale del fare matematica e che l'educazione all'argomentazione è un obiettivo didattico fondamentale nell'insegnamento della geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado. In particolare, sono due gli obiettivi didattici significativi nel trattare il concetto di dimostrazione [4]:

1. far comprendere agli allievi *che cosa* sia una dimostrazione, e dunque focalizzarsi sulla dimostrazione come *oggetto*;
2. insegnare agli alunni a *produrre* dimostrazioni, e quindi pensare ad esse come *processo.*

Tuttavia, in classe molto spesso si perdono di vista questi due obiettivi, in quanto il docente si propone principalmente di far conoscere agli studenti dimostrazioni eseguite da altri. Occorre però sottolineare quanto sia importante che gli alunni comprendano e apprezzino le diverse funzioni assunte dalla dimostrazione e i motivi fondamentali per cui essa viene introdotta.
In particolare, Michael De Villiers identifica come primarie le seguenti cinque funzioni della dimostrazione[11] [4]:

- *Convincere* sé stessi e gli altri sulla verità o meno di un fatto. Tale convinzione è spesso la spinta che porta il matematico a dimostrare un teorema, come sosteneva Polya:

  > *"La fase induttiva ci permette di superare i nostri sospetti iniziali e ci fornisce una forte fiducia nella validità del teorema. Senza tale fiducia, molto probabilmente non troveremmo il coraggio di imbarcarci in una dimostrazione che non ci sia evidente. Quando hai convinto te stesso che il teorema è vero, allora parti a provare a dimostrarlo"* [4].

  In tal senso, la dimostrazione può quindi essere un importante strumento di validazione di una congettura.

- *Spiegare*, nel senso che la dimostrazione può contribuire a far comprendere agli studenti perché una certa congettura sia vera.

- *Sistematizzare.* La dimostrazione, infatti, è coinvolta nel processo matematico di assiomatizzazione a posteriori, in quanto permette di organizzare i vari tipi di risultato all'interno di un sistema logico ipotetico-deduttivo. Essa, inoltre, può aiutare ad identificare inconsistenze in una teoria, argomenti circolari oppure assunzioni non esplicitate.

[11] Per maggiori approfondimenti si può consultare *The role and function of proof in mathematics*, in «Pythagoras», 24, pp. 17-24.

- *Scoprire*, in quanto la dimostrazione può diventare l'occasione per esplorare e analizzare proprietà aggiuntive oltre a quella da provare.
- *Comunicare*. La dimostrazione si può infine considerare un processo sociale: essa può essere una forma di discussione grazie alla quale si può condividere un certo bagaglio culturale e tramandare il sapere matematico.

Secondo De Villiers, l'approccio alla dimostrazione è didatticamente educativo se l'insegnante condivide con gli alunni tutte queste funzioni ricoperte dalla dimostrazione; in caso contrario si rischia di non riuscire a convincere gli allievi della necessità di dimostrare quei teoremi che appaiono evidenti o di cui essi sono già convinti sulla base di ripetute prove.
Le prime due funzioni della dimostrazione proposte dal matematico, sono fondamentali anche per Maria Alessandra Mariotti[12], che sintetizza nelle seguenti due domande i motivi principali per cui si introduce la dimostrazione [33]:

- un certo fatto, *è vero*?;
- *perché* un certo fatto *è vero*?

Per quanto concerne la prima domanda, la dimostrazione ha proprio lo scopo di convincere sé stessi e gli altri sulla verità o meno di un fatto, portando un'argomentazione a sostegno di tale verità. Per quanto riguarda invece la seconda domanda, la verità del fatto è indiscutibile ma va validata, ossia fondata, all'interno di un sistema teorico.
Sempre secondo la Mariotti, un altro aspetto rilevante nell'introdurre agli allievi il concetto di dimostrazione è il *"come trattare la delicata relazione tra la base di conoscenze geometriche intuitive che i ragazzi hanno e un nuovo approccio a queste conoscenze secondo una prospettiva teorica"* [33]. Alla Scuola Secondaria di primo grado, infatti, gli alunni hanno acquisito un certo bagaglio di conoscenze geometriche secondo un approccio intuitivo: essi, ad esempio, conoscono il nome delle principali figure geometriche e alcune loro proprietà, che risultano però evidenti e assumono un carattere assoluto di verità; in altre parole, agli studenti non viene quasi mai richiesta la giustificazione di tali nozioni. Nel passaggio alla Scuola Secondaria di secondo grado, gli alunni devono invece apprendere un nuovo approccio teorico, rigoroso e formale, dove il sistema logico ipotetico-deduttivo e la dimostrazione giocano un ruolo cruciale.
Tuttavia, questo passaggio dal piano intuitivo a quello teorico è molto delicato, motivo per cui quello dell'introduzione al concetto di dimostrazione è uno dei problemi didattici più dibattuti tra gli studiosi. Una delle strategie adottabili per accompagnare gli studenti all'attività dimostrativa è quella di far precedere alla dimostrazione formale una *"fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano"* [5], allo scopo di portare gli alunni ad un livello di accettazione intuitiva, complementare dell'accettazione dell'universalità di una proposizione formalmente provata. In tal modo, gli allievi sono maggiormente coinvolti da un'argomentazione più vicina all'esperienza e da una procedura ripetibile nella pratica. L'idea è perciò

[12]Maria Alessandra Mariotti: docente e ricercatrice in didattica della matematica all'Università di Siena.

quella di utilizzare l'argomentazione come base per lo sviluppo della dimostrazione, promuovendo un'evoluzione del significato di giustificazione.

A tal proposito, le **costruzioni geometriche** possono rappresentare il contesto problematico in cui tale significato evolve verso la concezione teorica di dimostrazione matematica, ed essere quindi un valido strumento attraverso cui avviare gli studenti alla geometria come sistema teorico [33]. Innanzitutto, ricordiamo che una costruzione geometrica è una procedura che, attraverso l'uso di riga e compasso ideali e seguendo regole stabilite (postulati, teoremi o costruzioni precedentemente eseguite), produce un disegno. Nel dettaglio, tali regole validano la costruzione geometrica in esame, in quanto esse giustificano i vari passaggi della costruzione stessa. Quest'ultima corrisponde dunque alla dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito a partire dai postulati di Euclide. In tal senso, i problemi di costruzione geometrica sono un'ottima palestra per preparare l'allievo all'attività dimostrativa, tant'è che la scelta da parte dell'insegnante di riservare ad esso un ruolo sempre più marginale nell'insegnamento della geometria potrebbe rivelarsi controproducente [48].

Abbiamo già accennato all'idea per cui favorire lo sviluppo, da parte degli studenti, di intuizioni e congetture prima di procedere alla dimostrazione rigorosa di un risultato possa agevolare l'introduzione al concetto di dimostrazione stessa. A questo proposito, alcuni studi italiani hanno evidenziato come l'inserimento dell'argomentazione come attività didattica in cui si elaborino una o più congetture, possa rendere il processo dimostrativo più avvicinabile per gli allievi: *"l'insegnamento della dimostrazione, che spesso è basato principalmente su apprendimento «ri-produttivo»* (*le dimostrazioni sono presentate agli studenti direttamente, senza che ne debbano produrre di nuove*)*, sembra essere poco efficace; mentre sembra più efficace l'uso di* ***problemi aperti*** *adeguati, in cui è necessario anche produrre congetture"* [4].
La presentazione di qualche problema aperto, infatti, ha il potere di stimolare gli studenti ad argomentare e congetturare, sia individualmente che collettivamente. Tali problemi favoriscono dunque un approccio graduale alla dimostrazione; prima di imparare a dimostrare, è difatti opportuno chiarire cosa significhi questo concetto, che cosa esso presupponga (una teoria, dei postulati, delle definizioni ecc.) e quale importanza ricopra per la matematica e, più specificatamente, per la geometria. Un tale percorso didattico permette inoltre di *"dare alle attività scolastiche un senso che altrimenti evapora velocemente nella routine degli esercizi"* [31], in quanto si dà voce agli alunni, permettendo loro di discutere sui *perché* delle affermazioni che incontrano e dando loro l'opportunità di sperimentare un'attività simile a quella del matematico-ricercatore.
In quest'ottica, un problema aperto è tale per cui:

- l'enunciato è abbastanza breve e non contiene esplicitamente tutte le informazioni, né tutte le ipotesi e tantomeno la tesi;
- non induce automaticamente a uno specifico metodo risolutivo;
- la soluzione non si riduce mai all'applicazione diretta di risultati già enunciati;
- si colloca in un ambito concettuale familiare per l'alunno.

La soluzione di un problema aperto, quindi, passa innanzitutto per la ricerca e la successiva formulazione di una possibile risposta che risulti convincente per sé stessi e gli altri; in tale contesto, risulta perciò fondamentale la discussione collettiva. Infine, tale congettura va verificata e validata all'interno della teoria di riferimento per mezzo di una dimostrazione formale.

In conclusione, i versi seguenti sintetizzano in maniera molto suggestiva ed enfatica il ruolo cruciale che assume l'argomentazione in matematica:

"la matematica (...) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. [...] Tali competenze sono rilevanti per la formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, in cui ogni persona è disponibile all'ascolto attento e critico dell'altro e a un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti e rilevanti" [31]. (Miur 2018, p. 12)

Nel paragrafo successivo analizzeremo come il software di geometria dinamica possa essere un valido supporto didattico nel processo sia di sviluppo di un senso teorico del problema di costruzione geometrica sia di produzione di argomentazioni e congetture tramite la presentazione di qualche problema aperto.

3.2.3 Uso del software dinamico nella didattica della Geometria

Un altro aspetto metodologico innovativo nell'insegnamento della matematica è l'uso degli strumenti tecnologici che, se usati opportunamente, possono migliorare l'apprendimento e la motivazione degli studenti nei confronti della matematica.
In particolare, nelle *Indicazioni Nazionali* per i licei, si legge che:

"Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti)" [36].

Anche nelle *Linee Guida* per gli istituti tecnici e per gli istituti professionali viene incentivato l'uso di strumenti informatici:

"Analizzare dati e interpretarli ... usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. [...] Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina)" [38] [39].

È chiaro che, a seconda dell'approccio pedagogico di riferimento, l'uso delle tecnologie nell'insegnamento - apprendimento della matematica assume ruoli e funzioni differenti.

A tal proposito, diverse ricerche didattiche sull'uso dei software di geometria dinamica nell'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria di secondo grado hanno evidenziato come l'applicazione di un modello costruttivista, in cui lo studente diventa protagonista nel processo di apprendimento e gli strumenti informatici contribuiscono ad elaborare un avvicinamento alla geometria in accordo con la matematica sviluppata dagli Antichi Greci, diventa essenziale nel processo di insegnamento - apprendimento. Tali strumenti, infatti, stimolano un approccio esplorativo e creativo alla disciplina, riducendo così l'esposizione assiomatica introduttiva della teoria.

Il software di geometria dinamica attualmente più diffuso è GeoGebra, progettato in linguaggio Java dallo studente universitario austriaco Markus Hohenwarter nel 2001 presso l'Università di Salisburgo. Esso è un software per l'insegnamento - apprendimento della matematica che fornisce strumenti per lo studio, oltre che della geometria, anche dell'algebra e dell'analisi. Nel dettaglio, GeoGebra permette di eseguire costruzioni geometriche con riga e compasso e di metterle in movimento per mezzo del trascinamento di uno qualsiasi dei punti da cui dipendono le costruzioni stesse [16]. La peculiarità di GeoGebra è dunque la dinamicità: le figure, costruite usando gli opportuni comandi, possono essere trascinate e manipolate mantenendone comunque invariato il protocollo di costruzione. Una tale ricchezza di "esperienze" sulle figure, impossibili con il solo uso degli strumenti tradizionali, rende particolarmente interessante questo software da un punto di vista didattico [45]. GeoGebra, oltre che essere semplice ed intuitivo da usare, permette quindi una facile interazione con le figure e consente anche una buona gestione simbolica degli oggetti geometrici e l'integrazione con l'ambiente numerico. Infine, questo software ha il vantaggio di essere gratuito e ben supportato da una comunità attiva di sviluppatori e utenti.

Il software di geometria dinamica può essere sfruttato a diversi livelli scolastici, anche se una delle sue utilizzazioni più significative è possibile, in particolare, nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado. In tale contesto, infatti, questo strumento tecnologico può risultare efficace per affrontare:

- problemi di costruzione, che consistono nel costruire figure geometriche con riga e compasso basandosi su definizioni, postulati e teoremi della geometria euclidea;
- problemi di "esplorazione" di proprietà e formulazione di congetture;
- problemi presentati in forma "aperta", che danno l'opportunità all'allievo di esplorare una certa situazione geometrica e di formulare e successivamente validare una congettura. In tal senso, i problemi aperti posso essere usati come avvio alla dimostrazione in geometria.

Tuttavia, GeoGebra può anche essere un supporto alle lezioni frontali, come quelle di dimostrazione di risultati teorici. Il software, infatti, può agevolare la comprensione della figura geometrica relativa a un teorema e favorire l'emergere di un'idea di dimostrazione convincente per l'alunno; tale pratica può migliorare l'apprendimento della geometria, coerentemente con quanto sosteneva Bertrand Russell nella sua opera *Misticismo e logica*:

> *"... Quando i teoremi sono difficili, bisognerebbe insegnarli inizialmente come esercizi di disegno geometrico, finché la figura è diventata del tutto familiare; allora sarà un passo avanti piacevole apprendere i legami logici tra le varie linee o i vari circoli. E' anche desiderabile che la figura illustrante un teorema venga disegnata in tutti i casi e in tutte le forme possibili, di modo che le relazioni astratte di cui la geometria si occupa possano venire in luce da sé stesse, come portato logico delle somiglianze esistenti tra situazioni apparentemente diverse. Le dimostrazioni astratte dovrebbero rappresentare dunque soltanto una piccola parte dell'istruzione, e dovrebbero essere date quando, attraverso la familiarità acquisita con gli esempi concreti, esse possono essere accolte come generalizzazioni naturali di fatti visibili ..."* [2]

Nel seguito approfondiremo le proposte didattiche che utilizzano i problemi di costruzione e i problemi aperti per introdurre gli enti primitivi e i primi postulati della geometria euclidea e il concetto di dimostrazione.

Nella precedente sezione abbiamo già accennato al fatto che gli strumenti (riga e compasso ideali) e le regole prestabilite (postulati, definizioni, costruzioni precedentemente effettuate, ecc.) che permettono di effettuare una **costruzione geometrica**, abbiano una controparte negli assiomi e nei teoremi della geometria euclidea. Ogni costruzione, completa di giustificazione della procedura eseguita, corrisponde infatti alla dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto costruito. Le costruzioni geometriche, quindi, risultano un valido strumento per avviare gli alunni alla geometria come sistema teorico e per preparare all'attività dimostrativa.
Eseguire poi tali costruzioni con il software di geometria dinamica dà un valore aggiunto alla loro utilità didattica, in quanto vi è innanzitutto un'integrazione della costruzione con la funzione di trascinamento: la figura costruita è accettabile dal punto di vista matematico se tramite trascinamento essa conserva le proprietà richieste. Un altro aspetto molto interessante di GeoGebra è che c'è un esplicito collegamento tra il menu delle costruzioni e la presentazione assiomatico-deduttiva della geometria euclidea [16]. Per mezzo del software, quindi, il docente può introdurre gradualmente gli studenti ad una geometria deduttiva, costruendo una corrispondenza tra la logica di GeoGebra e la teoria, ossia tra le costruzioni geometriche e i teoremi della geometria euclidea. In tal senso, questa attività laboratoriale risulta per gli studenti molto stimolante da un punto di vista culturale. Tuttavia, per superare i problemi di ambiguità tra assiomi e teoremi, è opportuno non usare direttamente il menu prestabilito di GeoGebra, ma costruirlo passo passo con gli alunni. Il sistema geometrico viene così costruito gradualmente, di modo che la complessità aumenti di costruzione in costruzione: lo scopo è quello di fornire livelli successivi di complessità che siano dominabili per gli allievi; se tutto il sistema è presente fin dall'inizio, c'è il rischio che gli studenti non siano in grado di controllare tutte le relazioni in gioco, in particolare le relazioni tra ciò che è dato e ciò che si deve dimostrare [33]. É dunque preferibile iniziare la trattazione con un menu contenente soltanto i comandi corrispondenti agli enti primitivi e ai primi tre postulati

della geometria euclidea, discutendo con la classe tale scelta. A questo punto è bene far notare agli alunni che le costruzioni di base corrispondono proprio ai primi tre postulati di Euclide: disegnare un segmento avente come estremi due punti dati (Postulato I); prolungare un segmento "continuamente", cioè infinitamente (Postulato II); disegnare la circonferenza avente come centro un punto dato e passante per un altro punto dato (Postulato III). Per eseguire quest'ultima costruzione, è più appropriato utilizzare lo strumento "Compasso" di GeoGebra, più aderente al Postulato III dal momento che si chiede di specificare il raggio in forma "geometrica" (gli altri due comandi richiedono invece che il raggio sia indicato in forma "numerica") [16]. La comprensione delle regole che governano le prime costruzioni induce perciò gli allievi a mettere a fuoco, concretamente, la necessità dei postulati della geometria euclidea. Successivamente, a mano a mano che gli allievi realizzano le nuove costruzioni, si introducono nel menu i comandi corrispondenti a tali costruzioni. In tal senso, GeoGebra permette anche la creazione di nuovi strumenti, che consentono di salvare oltre che una data figura anche il suo procedimento costruttivo e che si possono aggiungere al menu degli strumenti predefiniti. Procedendo in tal modo, gli scolari ricoprono un ruolo attivo nell'apprendimento, diventando partecipi della realizzazione della geometria come sistema teorico.

Come già notato, il software di geometria dinamica può anche essere usato come avvio alla dimostrazione in geometria. A tal scopo, l'introduzione di qualche **problema aperto** può stimolare gli alunni a produrre congetture che devono poi essere validate tramite dimostrazione formale. Queste attività sono quindi volte ad evidenziare l'importanza e la necessità di produrre una prova rigorosa, contribuendo a motivare l'allievo all'attività dimostrativa.
A tal proposito, l'utilizzo di GeoGebra contribuisce positivamente a far emergere i processi argomentativi e ad introdurre e consolidare in classe la *cultura del perché*. Nel risolvere un problema in forma aperta tramite il software, infatti, le congetture emergono naturalmente dall'esplorazione della figura costruita tramite trascinamento di uno qualsiasi dei suoi punti. Più dettagliatamente, l'uso di GeoGebra per generare congetture si basa sull'interiorizzazione della funzione di trascinamento come controllo logico capace di trasformare i dati del problema in una relazione condizionale tra ipotesi e tesi dell'enunciato stesso. Tale tesi è sostenuta anche da Jean-Marie Laborde e Colette Laborde, autori del software Cabri-géomètre, che affermarono quanto segue:

" ... i cambiamenti nel processo risolutivo portati dalle possibilità dinamiche di un software di geometria dinamica provengono da una visualizzazione attiva e ragionata, da quello che chiamiamo processo interattivo tra ragionamento induttivo e deduttivo" [32].

La presentazione di problemi aperti tramite un software di geometria dinamica sembra quindi essere molto efficace per migliorare il controllo teorico da parte dell'alunno su una data figura, oltre che per imparare a riconoscere le proprietà geometriche della stessa. Inoltre, tale strumento può essere sfruttato per creare maggiore consapevolezza di aspetti teorici che altrimenti lo studente avrebbe faticato a notare.

A titolo di esempio, riportiamo nel seguito due problemi aperti simili a quelli proposti durante la sperimentazione didattica.

Problema 1 (esposto dall'UMI in *Matematica 2003*) [44]:
Dato un triangolo, costruire le bisettrici di due angoli interni. Con l'uso di un software, trascinando opportunamente i vertici del triangolo, puoi rendere queste bisettrici tra esse perpendicolari? Se sì, costruire un triangolo che abbia questa proprietà; altrimenti spiega perché è impossibile ottenere questa configurazione.

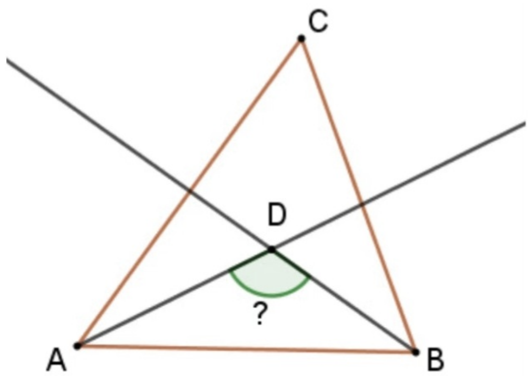


Figura 3.5: Rappresentazione grafica del *Problema 1* (Fonte: [44])

Problema 2 [4]:
Dato un quadrilatero, costruire il quadrilatero che ha per vertici i punti medi dei suoi lati. Che proprietà ha il quadrilatero ottenuto?

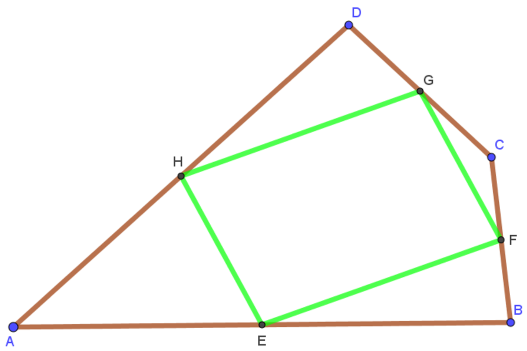


Figura 3.6: Rappresentazione grafica del *Teorema di Varignon* (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Capitolo 4

Sperimentazione del progetto nella Scuola Secondaria di secondo grado

Nel presente capitolo descriveremo le attività svolte durante il progetto di sperimentazione didattica rivolto agli studenti di una classe prima della Scuola Secondaria di II grado e riguardante l'introduzione del concetto di dimostrazione in geometria. Per ciascuna attività sono state indicate la durata, le modalità di lavoro, le finalità, i materiali occorrenti per la sua realizzazione e la risposta degli studenti.
I materiali cui si farà riferimento sono stati inseriti in Appendice A.

4.1 Presentazione iniziale

La classe

Il progetto didattico di introduzione al concetto di dimostrazione è stato proposto in una classe prima di liceo scientifico, contesto che si è ritenuto preferibile per effettuare la prima sperimentazione sul campo. Tuttavia, le attività proposte possono essere rimodulate e attuate in una classe prima di un qualsiasi altro indirizzo liceale, tecnico o professionale di Scuola Secondaria di secondo grado.
Nello specifico, la sperimentazione si è svolta nella classe prima H liceo scientifico matematico del Liceo Scientifico "E. Curiel" di Padova: la Dirigente dell'Istituto si è mostrata interessata al progetto, accolto poi con fiducia dalla prof.ssa Sandra Bortolami che ha accettato di proporlo nella propria classe. Le attività, alternate con qualche lezione teorica tenuta dall'insegnante della classe, sono state proposte a partire da inizio dicembre 2023 fino a metà febbraio 2024 durante le ore curricolari di matematica.
Per quanto concerne la classe, essa era composta da 25 studenti, di cui 17 maschi e 8 femmine[1]. Tra questi c'era un alunno ipovedente, che necessitava di un supporto individuale: talvolta affiancato dall'insegnante di sostegno, egli si serviva di un computer per aumentare il carattere di scrittura dei questionari e delle presentazioni in

[1]Nel seguito si farà riferimento agli allievi utilizzando il maschile: questa scelta è adottata con il solo scopo di rendere più scorrevole la lettura.

PowerPoint proposte nelle varie attività e per svolgere le esperienze laboratoriali su GeoGebra. Quando invece si è sfruttata la lavagna, si è cercato di scrivere in modo chiaro e ingrandito. Nonostante le difficoltà riscontrate in matematica, dovute alla perdita di rigore e precisione a discapito di un uso preponderante dell'intuizione e dell'immaginazione, l'alunno si è mostrato attento, interessato e motivato durante le lezioni, partecipando attivamente alle attività di gruppo e alle discussioni collettive.

Infine, per poter valutare la buona riuscita del progetto, si è reso necessario confrontare i risultati ottenuti dalla classe sperimentale con quelli di una classe di controllo, che ha invece svolto il programma in maniera tradizionale. A tal proposito, un altro docente si è mostrato aperto a somministrare i questionari iniziale e finale nella propria classe prima liceo scientifico matematico.

Obiettivi del progetto

La crescita culturale degli studenti è uno degli obiettivi fondamentali che la scuola si prefigge. A tal scopo, giocano un ruolo importante tutte le discipline, sia umanistiche che scientifiche. Tuttavia, il binomio discipline umanistiche-cultura è quasi scontato, nel senso che si è più propensi ad immaginare come tali materie possano inserirsi in questo processo di crescita dell'alunno, mentre il binomio matematica-cultura può erroneamente apparire stonato o inconsistente [22]. Nonostante ciò, l'importanza culturale rivestita dalla matematica viene sottolineata, come già discusso nel Capitolo 3, anche dall'Unione Matematica Italiana, che evidenzia come la matematica debba diventare un vero e proprio strumento nelle mani del cittadino. In tal senso, la sperimentazione didattica vuole prendere un piccolo spazio all'interno di questo grande obiettivo, cercando di mettere in luce agli allievi il valore culturale e concreto della matematica, contestualizzata nel nostro caso al concetto di dimostrazione in geometria.

Nel dettaglio, il progetto ha avuto origine dalle seguenti tre domande di ricerca, a partire dalle quali si sono poi organizzate le diverse attività:

1. Può la storia della matematica rivestire un ruolo nel processo di insegnamento e apprendimento della geometria euclidea? In particolare, essa può agevolare gli studenti a raggiungere un più profondo livello di comprensione della sua natura logico-deduttiva?
2. L'utilizzo di un software di geometria dinamica può aiutare gli alunni a raggiungere un più profondo livello di comprensione della natura logico-deduttiva della geometria euclidea, stimolando in loro l'interesse e la partecipazione attiva?
3. L'utilizzo di un software di geometria dinamica può aiutare gli studenti a comprendere l'importanza e la necessità della dimostrazione?

Tali quesiti sono stati oggetto di indagine della sperimentazione, che si proponeva anche di stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti verso la geometria, cercando di favorire il confronto e la discussione collettiva.

Struttura del progetto

Il progetto, della durata complessiva di 15 ore e basato prevalentemente su attività laboratoriali e discussioni collettive, era strutturato in quattro fasi:

1. Introduzione storica alla geometria, in cui si sono sinteticamente esposte le sue origini e si è presentata la figura di Euclide. La scelta di un tale approccio ha valenza culturale ed è volta a motivare e incuriosire gli allievi verso la nuova disciplina, in accordo con quanto analizzato nel Capitolo 3.
2. Scoperta e comprensione degli enti primitivi e dei primi tre postulati della geometria euclidea, introdotti con il supporto del software di geometria dinamica.
3. Introduzione al concetto di dimostrazione (in geometria). Le attività proposte in questa fase prevedono l'esecuzione di alcune costruzioni geometriche e la risoluzione di due problemi aperti per mezzo di GeoGebra, al fine di comprendere che cosa significhi e perché sia necessario dimostrare. Lo scopo di tali lezioni è arrivare a dare la definizione rigorosa dei concetti di teorema e dimostrazione, oltre che chiarire che cosa si intenda con ragionamento ipotetico-deduttivo.
4. Produzione di dimostrazioni (in geometria). L'obiettivo di quest'ultima parte di sperimentazione è far acquisire agli studenti le abilità e le competenze necessarie a svolgere le prime dimostrazioni in modo autonomo e consapevole.

La sperimentazione si presentava quindi come un'integrazione del programma di geometria presente nei primi due capitoli del libro di testo di matematica in adozione [9] e tradizionalmente svolto secondo l'ordine riportato in Figura 4.1:

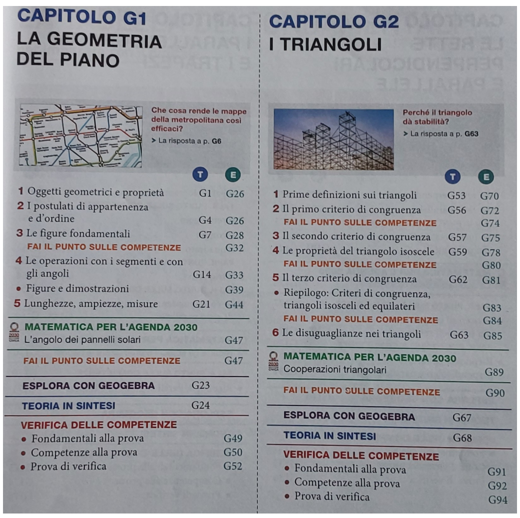


Figura 4.1: Sommario relativo ai primi due capitoli di geometria tradizionalmente svolti in una classe prima liceo scientifico (Fonte: [9])

In particolare, dopo la parte di introduzione storica alla geometria, del Capitolo "La geometria del piano" si è scelto in un primo momento di presentare soltanto gli enti primitivi e i primi tre postulati di Euclide. Si è poi passati alle attività laboratoriali sulle costruzioni geometriche e sui problemi aperti, a cui è seguita un'altra presentazione volta ad introdurre formalmente i concetti di teorema e dimostrazione. A questo punto della trattazione l'insegnante della classe, svolgendo il programma in maniera tradizionale, ha completato la spiegazione del Capitolo G1 del libro di testo e affrontato il Capitolo G2 fino al secondo criterio di congruenza dei triangoli. Successivamente, si è svolta l'ultima parte del progetto, in cui si è enunciato e dimostrato il teorema del triangolo isoscele e si sono svolti alcuni esercizi teorici di applicazione di tale risultato.

Nel seguito della tesi saranno presentati i contenuti di ciascuna attività del progetto, fornendo precise indicazioni rispetto ai tempi di realizzazione e i materiali impiegati. Le seguenti schede delineano la programmazione delle attività in cui è strutturato il percorso didattico, e possono essere impiegate da qualunque docente desideri riproporre tale sperimentazione in una propria classe. In Appendice A è possibile consultare i file con i materiali necessari per la realizzazione delle varie attività.

4.2 Il progetto

Attività 1: Somministrazione del Questionario iniziale

Durata: 1 ora

Modalità di lavoro: Individuale

Struttura e Obiettivi: Dopo una breve presentazione del progetto alla classe, viene somministrato un questionario, in forma cartacea e anonima, costituito da domande a risposta multipla, vero/falso e domande aperte. Esso è svolto dagli studenti, interamente in aula, con l'obiettivo di verificare le loro conoscenze pregresse in geometria e il loro atteggiamento nei confronti di questa disciplina. In questo modo si può capire il livello generale della classe e vedere se gli alunni hanno delle misconcezioni riguardo i temi che si andranno a trattare, in modo tale da sviluppare il percorso nella maniera più proficua possibile.

Materiali utilizzati: Questionario iniziale consultabile in Appendice A.

Attività 2: Introduzione storica alla geometria, scoperta e comprensione degli elementi su cui si fonda la geometria euclidea e primo approccio alle costruzioni geometriche

Durata: 2 ore

Modalità di lavoro: Lezione frontale e attività a gruppi

Struttura e Obiettivi: La prima lezione può essere suddivisa in tre parti:

- Introduzione alla geometria euclidea con un approccio storico: la spiegazione viene accompagnata da una presentazione in PowerPoint, durante la quale gli studenti possono prendere appunti e rispondere ai quesiti posti con lo scopo di coinvolgere gli stessi e attirare la loro attenzione. Con tale scelta si vuole ricreare la motivazione e l'entusiasmo che storicamente si ebbero con la nascita della geometria come vera e propria scienza. Si ritiene inoltre che questa presentazione possa far comprendere più a fondo agli alunni i problemi principali connessi alla costruzione storica della geometria e il suo ruolo nella cultura.

- Scoperta e comprensione degli enti primitivi e dei primi tre postulati della geometria euclidea. Chiarito che l'obiettivo primario è "costruire" la geometria euclidea passo passo ripercorrendo il ragionamento fatto proprio da Euclide, si utilizza "l'interrogazione" come percorso di introduzione al concetto di ente primitivo. Nel dettaglio, si chiede alla classe di dare la definizione di un ente geometrico a piacere e la si riporta sulla lavagna (o, se si preferisce, sulla LIM[2]). A questo punto si fa notare agli allievi come tale definizione non sia accettabile dal punto di vista matematico, dal momento che essa contiene termini non precedentemente definiti. Per superare questo problema occorre dunque dare altre definizioni, che però a loro volta comprenderanno termini che devono prima essere definiti. Si fa quindi osservare che, per poter proseguire, è necessario interrompere questo"loop" fissando alcuni enti primitivi.
  Per introdurre invece i primi tre postulati di Euclide, si apre il file GeoGebra denominato "piano_base.ggb", in cui si sono nascosti gli assi e la griglia e come strumenti del menu si tengono soltanto quelli corrispondenti agli enti primitivi e a tali assiomi (ossia gli strumenti "Punto", "Segmento", "Retta" e "Compasso", oltre che lo strumento "Muovi"):

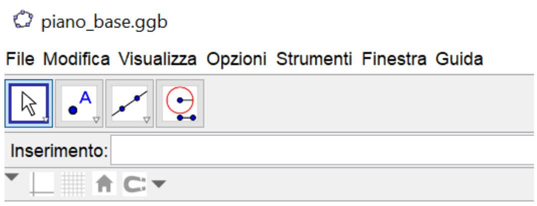


Figura 4.2: Menu del file "piano_base.ggb" (Fonte: file GeoGebra personale)

  Innanzitutto, si fanno riflettere gli studenti sul fatto che la presenza di questi strumenti sia necessaria per poter partire con la "costruzione" della geometria euclidea. Successivamente, si presentano i primi tre postulati di Euclide mostrando nell'ordine la costruzione di un segmento, di una retta e di una circonferenza di centro un punto dato e passante per un punto assegnato, e sottolineando che l'esistenza di tali oggetti geometrici sia intuitiva e accettata da tutti. In tale contesto si specifica il fatto che Euclide con il termine "retta" intendesse il moderno "segmento" e che egli distinguesse tra I e II postulato, cosa ora superata.
  Infine, sfruttando una presentazione in PowerPoint durante la quale gli studenti possono prendere appunti, si formalizzano i concetti di ente primitivo e

[2]Lavagna interattiva multimediale.

postulato e si introdocono rigorosamente i primi tre postulati della geometria euclidea, ponendoli a confronto con le formulazioni attuali.

- Introduzione all'attività laboratoriale sulle costruzioni geometriche. Lo scopo dell'ultima parte della lezione è far comprendere agli alunni il ruolo fondamentale ricoperto dalle costruzioni geometriche in matematica, ossia quello di garantire che l'oggetto costruito esista e conservi per trascinamento tutte le sue proprietà. Si chiede quindi ad uno studente di disegnare "ad occhio" un triangolo equilatero nel file GeoGebra "piano_base.gbb", e si mostra poi che trascinando uno dei suoi tre vertici esso perde le proprietà caratterizzanti dell'essere equilatero. Si sottolinea dunque che ciò è un limite dal punto di vista matematico, dal momento che in un problema geometrico si deve poter essere sicuri che l'oggetto in esame conservi le sue proprietà. Domandato quale sia la soluzione a tale mancanza, gli allievi comprendono che essa consiste nella costruzione con riga e compasso del triangolo equilatero, dato il lato. A questo punto uno studente esegue tale costruzione per l'intera classe, sotto la guida dell'insegnante, nel file GeoGebra precedentemente aperto (al momento dell'inizio della sperimentazione la classe aveva già svolto in disegno tecnico le principali costruzioni geometriche con riga e compasso, per cui gli studenti avevano già familiarità con il procedimento di costruzione). Si fa quindi osservare alla classe che il triangolo ottenuto è effettivamente equilatero (i suoi tre lati sono raggi di due circonferenze che per costruzione hanno raggi congruenti) e che conserva le sue proprietà per trascinamento, specificando che il ragionamento fatto è lo stesso seguito da Euclide nella Proposizione 1 del Libro I degli *Elementi*. Si fa inoltre notare che, a differenza degli estremi della base del triangolo colorati di blu, il terzo vertice è rappresentato dal software in nero: ciò è dovuto al fatto che quest'ultimo punto possiede zero gradi di libertà, essendo ottenuto per intersezione di due circonferenze. Infine si invitano gli alunni, suddivisi a coppie, a giustificare i singoli passaggi della costruzione. In tal contesto, essi utilizzano la "Scheda di lavoro 1" come guida. Al termine dell'attività si discutono con la classe le risposte date e si fa notare che grazie a tale lavoro si è dimostrata l'esistenza del triangolo equilatero. A conclusione della lezione, si è assegnata come compito per casa la "Scheda di lavoro 2".

Materiali utilizzati: Un pc per l'insegnante dotato di GeoGebra versione 5 e collegato a un proiettore, presentazioni in PowerPoint dal titolo "Introduzione alla geometria euclidea" e "Gli enti primitivi e i primi postulati" consultabili in Appendice A, lavagna e Scheda di lavoro 1 consultabile in Appendice A.

Implementazione del progetto in classe: Durante la breve presentazione iniziale del progetto, fatta all'inizio dell'Attività 1, gli studenti sono apparsi molto poco entusiasti nel sapere che di lì a poco avrebbero iniziato lo studio della geometria del piano. Per spronarli ed incuriosirli allo studio di questa disciplina si è dunque scelto, come si evince dalla presentazione, di aprire la trattazione con la seguente frase motivazionale di Evangelista Torricelli:

"La geometria sola, fra le discipline liberali, esercita e acuisce l'ingegno."

Essa è l'occasione per incoraggiare gli studenti a non demordere di fronte alle dif-

ficoltà che la geometria inevitabilmente porterà e per far loro prendere coscienza del fatto che sarà proprio grazie a tali scogli che essi svilupperanno la capacità di ragionamento e il pensiero critico. Gli alunni hanno apprezzato molto tale esordio, perché si sono sentiti compresi.
Per proseguire, si è preferito innanzitutto specificare cosa si intende con il termine "geometria" ed evidenziare il fatto che tale disciplina ha avuto origine da scopi pratici, per diventare poi una scienza rigorosa soltanto nel periodo ellenistico dell'antica Grecia. Tale esposizione è servita a contestualizzare in maniera concisa ma chiara la nuova disciplina introdotta, in modo da far comprendere agli allievi come si sia sviluppata la geometria euclidea studiata ancor'oggi. Per rendere gli studenti più partecipi, si è poi chiesto loro (in accordo con l'insegnante della classe) di reperire informazioni riguardo la vita e le opere di Euclide usando i telefoni cellulari.
A conclusione di questa parte introduttiva, si è letto un passo molto suggestivo tratto da uno scritto di Albert Einstein, in cui lo scienziato elogia Euclide e i suoi *Elementi*. L'intenzione era quella di far capire agli allievi che, se anche un grande fisico come Einstein riconosce in Euclide il creatore del sistema logico ipotetico-deduttivo su cui attualmente si fonda la geometria presentata a scuola, allora forse questo personaggio ha veramente rivoluzionato il pensiero matematico e merita di essere ricordato e onorato.

Successivamente, nel chiedere alla classe di dare la definizione di un oggetto geometrico a piacere e nello spiegare la necessità, da un punto di vista matematico, di definire i diversi termini utilizzati, gli alunni sono apparsi molto coinvolti. Inoltre, essi hanno immediatamente compreso che ad ogni nuova definizione data ne dovevano seguire delle altre, per cui hanno intuito la necessità di introdurre alcuni enti primitivi.
Aperto poi il file GeoGebra e chiesto alla classe che cosa si potesse fare dati due punti, un allievo ha risposto:

"posso disegnare la retta passante per quei due punti."

Un altro studente ha fatto seguito esclamando:

"posso disegnare il segmento che ha per estremi quei due punti."

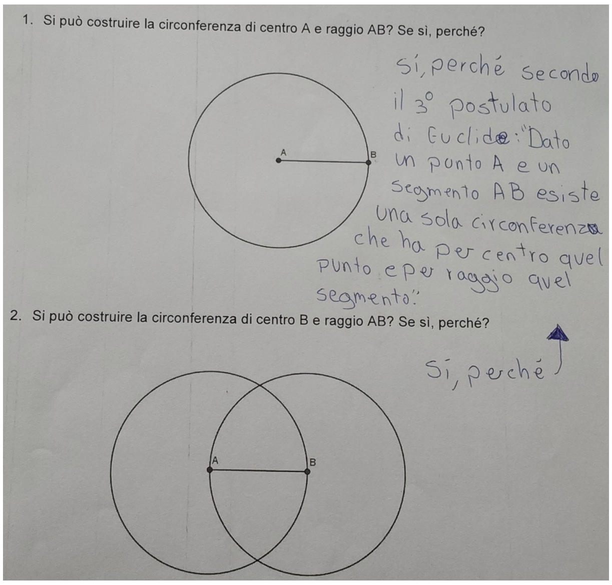
In tale contesto, si è chiesto anche quante rette potevano passare per i due punti assegnati: gli alunni hanno notato che la risposta corretta fosse "una". Queste tre risposte hanno permesso quindi di introdurre il I e il II postulato di Euclide e l'assioma moderno ad essi corrispondente.
La classe ha invece avuto maggiori difficoltà nel visualizzare il III postulato, per cui si è preferito sfruttare più volte il comando "Compasso" di GeoGebra, ripetendo di volta in volta a voce l'assioma.
Durante la successiva presentazione in PowerPoint in cui si sono formalizzati i concetti di ente primitivo e postulato, si è ribadito più volte agli studenti l'importanza di prendere appunti, dal momento che la maggior parte di loro ascoltava senza annotare nulla. Probabilmente, questo atteggiamento è dovuto alla mancata abitudine di riportare nel quaderno ciò che l'insegnante dice ma non scrive alla lavagna e al fatto di non avere il libro di testo su cui seguire la spiegazione. Per ovviare a questo problema, si sarebbe potuto scrivere alla lavagna i concetti fondamentali e utilizzare la

presentazione soltanto per un ripasso conclusivo. Tuttavia, si è preferito continuare la spiegazione con le slides per stimolare gli studenti all'ascolto attivo e abituarli ad una nuova tipologia di insegnamento.

Compresi i limiti del disegno a mano libera di una figura geometrica, una studentessa in particolare ha colto che la soluzione risiede nella sua costruzione con riga e compasso. Inoltre, dopo aver costruito il triangolo equilatero di lato AB e aver trattato il discorso sui gradi di libertà e sulle dipendenze di alcuni punti da altri oggetti precedentemente costruiti, un alunno ha posto la seguente domanda:

"costruendo il triangolo equilatero ABC a partire dal lato BC invece che dalla base AB, sarà allora il punto A ad avere zero gradi di libertà?"

Per rispondere, si è costruito il triangolo richiesto e mostrato con un esempio concreto che GeoGebra introduce un quarto punto D di colore nero (a zero gradi di libertà) coincidente con A, che invece rimane libero.
Si è dopo passati all'attività a coppie di giustificazione dei passaggi della costruzione del triangolo equilatero. Si riportano nel seguito due esempi di risposte corrette date dagli studenti:



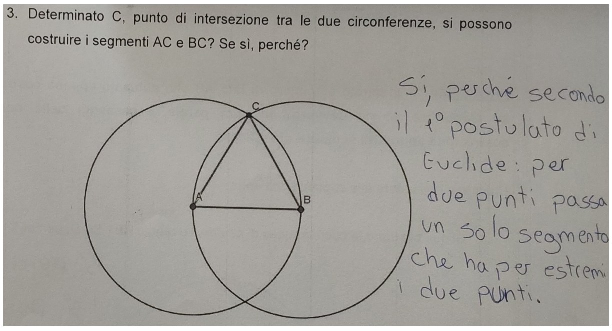


Figura 4.3: Esempio di risposta corretta (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 1". Per questa e tutte le successive scannerizzazioni è stata richiesta l'autorizzazione a pubblicare tali contenuti in modo anonimo.)

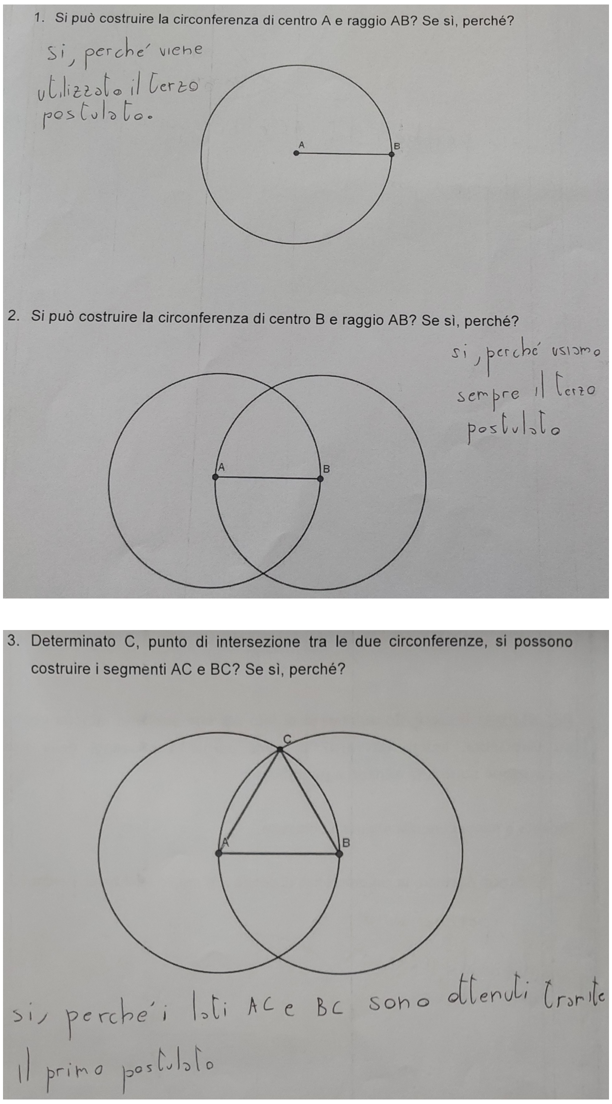


Figura 4.4: Esempio di risposta corretta (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 1")

Invece soltanto due coppie hanno risposto in maniera superficiale e/o imprecisa; si riporta di seguito ciò che ha scritto una delle due:

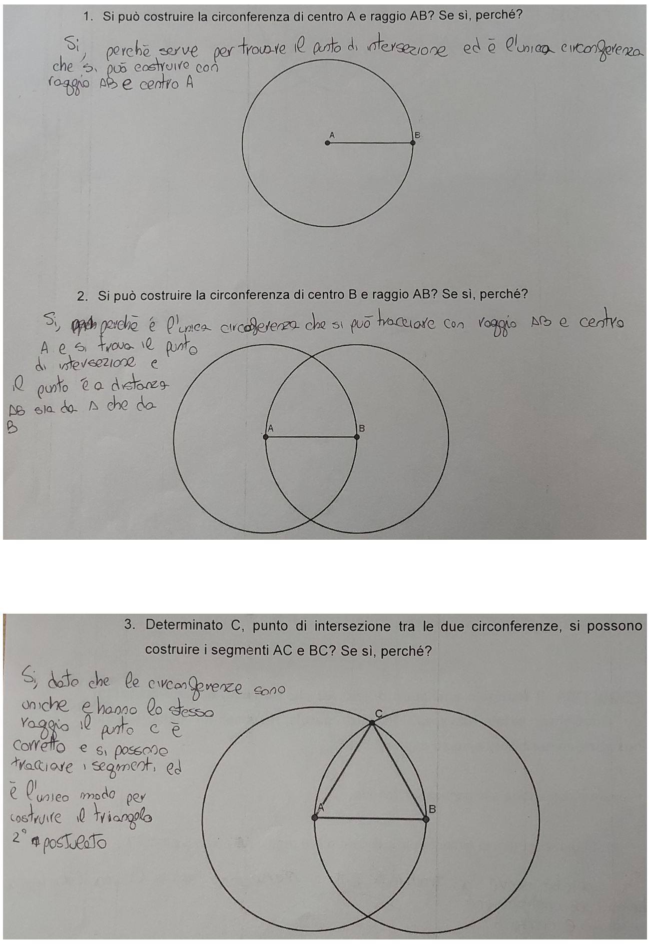


Figura 4.5: Esempio di risposta errata (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 1")

Nonostante gli errori commessi, in fase di discussione collettiva gli alunni hanno compreso quali erano le risposte corrette e alla fine tutti sono rimasti molto sorpresi e soddisfatti nello scoprire di aver svolto la loro prima dimostrazione (in questo caso, di esistenza del triangolo equilatero).

Avendo gli allievi ben intuito le modalità di utilizzo del software, a conclusione della lezione si è assegnata loro come compito per casa la "Scheda di lavoro 2", condividendo su Classroom i file GeoGebra utili al suo svolgimento.

Attività 3: Le costruzioni geometriche

Durata: 5 ore

Modalità di lavoro: Lezione frontale e attività laboratoriale a gruppi

Struttura e Obiettivi: La terza attività ha l'obiettivo di "costruire" gradualmente la geometria del piano, ripercorrendo il ragionamento assiomatico-deduttivo svolto da Euclide negli *Elementi*, cosicché siano forniti agli alunni livelli successivi di complessità che siano da essi dominabili. Inoltre, come osservato nel Capitolo 3, le costruzioni geometriche sono un'ottima palestra per introdurre agli studenti il concetto di dimostrazione. L'esperienza proposta assume quindi un'importante valenza culturale.
L'attività può essere suddivisa in due parti:

- Correzione in classe della "Scheda di lavoro 2", assegnata come compito per casa al termine della lezione precedente (1 ora). Per coinvolgere maggiormente la classe, si accettano come volontari tre studenti che, utilizzando il pc dell'insegnante collegato al proiettore, eseguono su GeoGebra le tre costruzioni presenti nella Scheda di lavoro. I compagni al posto sono invitati ognuno a giustificare un passaggio di costruzione, di modo che tutti si sentano partecipi dell'attività. É bene, prima di svolgere una costruzione geometrica, dare alla classe la definizione dell'oggetto geometrico da costruire. Questo passaggio è fondamentale sia dal punto di vista teorico, sia da quello della costruzione: se gli alunni conoscono la definizione dell'ente geometrico da costruire, essi sono anche in grado di verificare che esso conservi le sue proprietà dopo la costruzione.
  Nel dettaglio, nella costruzione della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto esterno ad essa, si coglie l'occasione per spiegare alla classe come Euclide desse per scontata l'esistenza di un punto qualsiasi nel piano e del punto di intersezione tra due oggetti geometrici precedentemente costruiti. In tale contesto si introduce quindi la figura di David Hilbert[3] come "sistematore" della geometria euclidea, sottolineando che egli introdusse altri assiomi (come quelli di ordinamento) necessari a giustificare quei passaggi di costruzione che Euclide assumeva per veri senza legittimarli. Tuttavia, si chiarisce agli allievi che questa precisazione rappresenta un breve excursus storico e non è necessario sia ricordata. Nelle costruzioni che seguiranno, infatti, non si pretenderà che essi giustifichino i suddetti passaggi con l'opportuno assioma di Hilbert.
  Dopo la costruzione del punto medio e asse di un segmento e della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un punto esterno ad essa (eseguite nel file denominato "piano_base.ggb" usato anche nella scorsa lezione), si informano gli studenti che una volta eseguita una costruzione, essa può essere successivamente riprodotta tramite l'opportuno strumento di GeoGebra senza doverla svolgere nuovamente daccapo. La prima occasione per mettere in

[3]David Hilbert (1862-1943): matematico tedesco che assiomatizzò in modo rigoroso la geometria euclidea, la quale presentava alcune lacune e mancanze.

pratica tale accorgimento è data dalla costruzione della retta perpendicolare ad una retta data e passante per un suo punto: in un passaggio occorre disegnare l'asse di un segmento. A tal proposito, si invitano gli alunni a svolgere la costruzione nel file "piano_retta_perpendicolare" (Figura 4.6), in cui agli strumenti presenti anche nel file precedente è stato aggiunto proprio l'"Asse di un segmento":

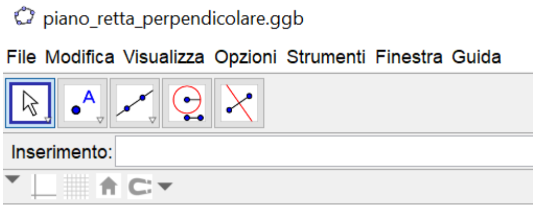


Figura 4.6: Menu del file "piano_retta_perpendicolare.ggb" (Fonte: file GeoGebra personale)

Costruita tale retta perpendicolare, si puntualizza come anch'essa d'ora in avanti si potrà eseguire direttamente tramite l'opportuno strumento di GeoGebra.
Si fa infine notare che questa precisazione ha carattere generale: una volta dimostrato "qualcosa" (non è stato ancora introdotto agli alunni il concetto di teorema), questo "qualcosa" può essere preso per vero e utilizzato in altri contesti senza doverlo ridimostrare.

- Svolgimento della "Scheda di lavoro 3" come esperienza laboratoriale (4 ore). In tale attività la classe è divisa in gruppi di tre studenti; ciascun gruppo ha a disposizione la scheda di lavoro in forma cartacea e un iPad dotato di connessione ad Internet. L'intenzione è che ogni membro del gruppo esegua su GeoGebra una delle tre costruzioni presenti nella scheda di lavoro e gli altri due partecipanti giustifichino per iscritto i vari passaggi. In tal modo tutti gli alunni si confrontano sia con la parte pratica (utilizzo del software) sia con quella teorica (applicazione dei primi tre postulati di Euclide oppure costruzioni precedentemente eseguite).
  Prima di dare avvio all'attività, si mostra su GeoGebra alla classe un triangolo isoscele e si chiede di definirlo. Successivamente, può essere utile domandare quali proprietà e simmetrie esso abbia. Così facendo, si applica l'apprendimento cosiddetto "a spirale", introdotto dallo psicologo americano Jerome Bruner (1915-2016): si anticipano dei concetti che si enunceranno e dimostreranno in maniera formale più avanti. In tale contesto si specifica anche che, a differenza del pensiero moderno, per Euclide un triangolo equilatero non è isoscele.
  Dopo la costruzione del triangolo isoscele dati la base e l'altezza nell'apposito file (Figura 4.7), tramite il comando "Crea nuovo strumento" di GeoGebra si fa salvare la costruzione stessa. Così facendo, gli alunni potranno in seguito disegnare il triangolo senza doverlo ricostruire daccapo.

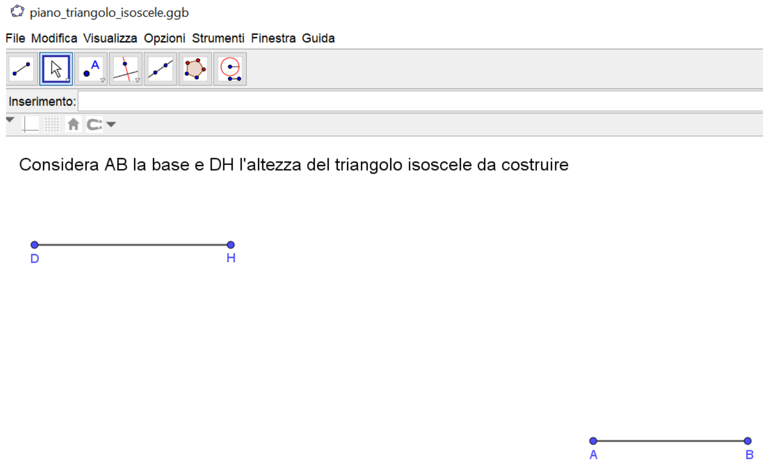


Figura 4.7: File "piano_triangolo_isoscele.ggb" (Fonte: file GeoGebra personale)

Infine, si fa loro notare che ci sono altre due costruzioni del triangolo isoscele possibili: una dati la base e il lato obliquo e l'altra data la base e considerato un punto sul suo asse. Infine, si domanda alla classe se il triangolo costruito esista sempre, in modo da mostrare loro il caso degenere.

Si passa poi alla costruzione del triangolo rettangolo dati i due cateti, nel file "piano_triangolo_rettangolo.ggb" riportato di seguito:

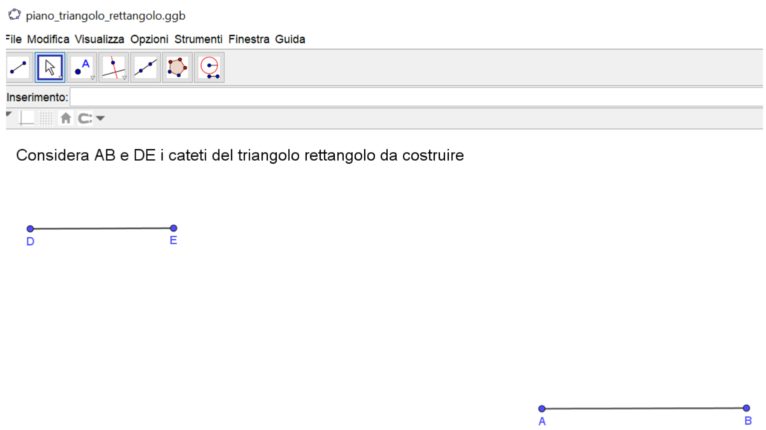


Figura 4.8: File "piano_triangolo_rettangolo.ggb" (Fonte: file GeoGebra personale)

Una volta costruito il triangolo, tramite il comando "Crea nuovo strumento" di GeoGebra si fa salvare la costruzione stessa.
A questo punto si coglie l'occasione per condividere con la classe un tema ritenuto appassionante e di grande rilevanza, ossia quello di una didattica interdisciplinare. La matematica, in particolare, offre molti collegamenti con le altre materie di studio: il triangolo rettangolo, ad esempio, giocherà un ruolo cruciale anche in fisica nella trattazione del piano inclinato. Le stesse costruzioni geometriche erano già state affrontate dagli studenti in disegno tecnico, seppur con altri scopi. La consapevolezza che è possibile creare interazioni di

questo tipo tra le diverse materie di studio può aiutare gli alunni ad interpretare la realtà da più punti di vista e a comprendere l'immenso valore culturale dello studio trasversale, rendendo l'apprendimento più efficace e stimolante.

Si passa poi alla costruzione della bisettrice di un angolo, da eseguirsi nel file "piano_bisettrice.ggb":

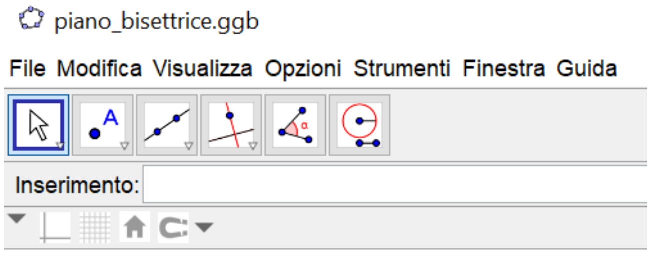


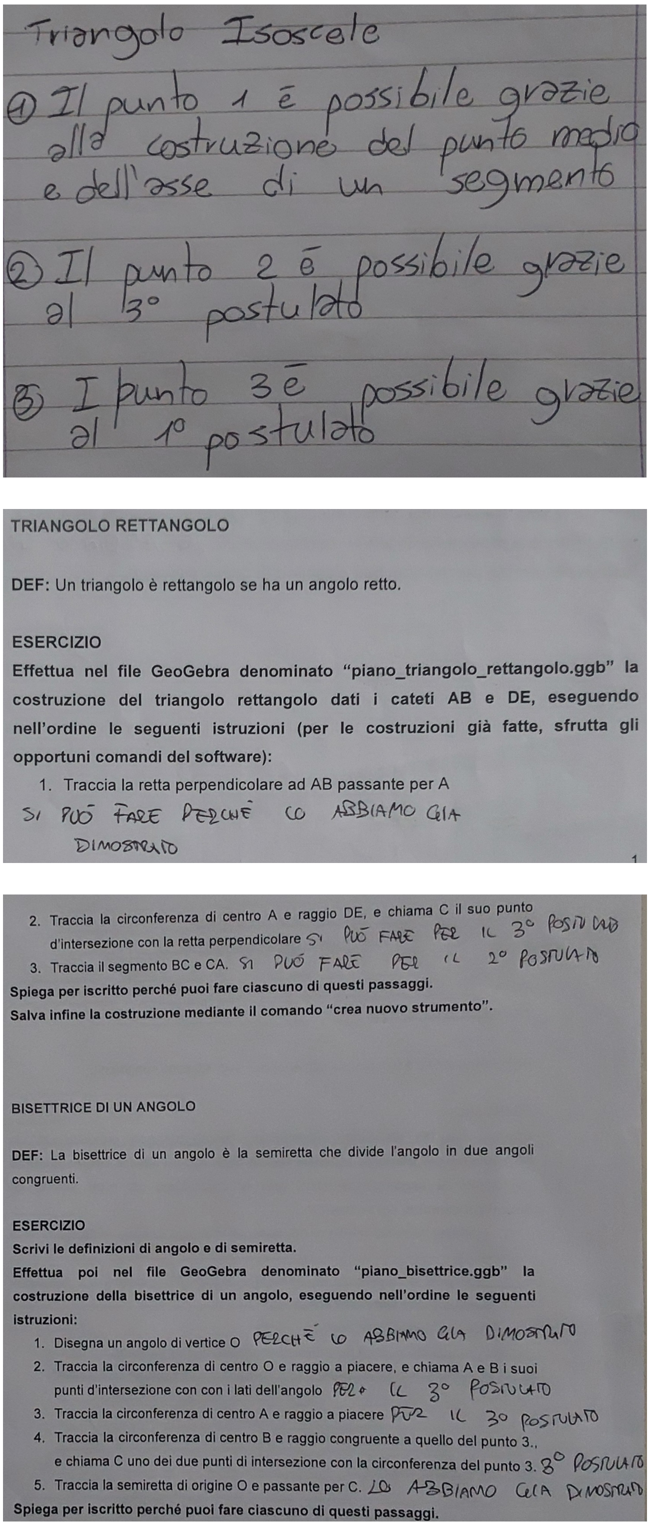
Figura 4.9: Menu del file "piano_bisettrice.ggb" (Fonte: file GeoGebra personale)

Tuttavia, prima di procedere si chiedono agli alunni le definizioni di angolo e di semiretta mostrando tali oggetti sul file sopra citato e specificando che la loro esistenza è garantita dagli opportuni postulati di Euclide. A questo punto anche la definizione di bisettrice di un angolo è accettabile e si può procedere alla sua costruzione rigorosa. Fatto ciò, è opportuno mettere in luce come lo strumento "Bisettrice" di GeoGebra disegni una retta invece che una semiretta. Con un esempio grafico si giustifica agli studenti il motivo di tale scelta. Si specifica poi che il software, se si indica l'angolo tramite le due semirette che lo definiscono, disegna addirittura le bisettrici dei quattro angoli che si formerebbero prolungando i lati dell'angolo considerato.
A conclusione dell'attività laboratoriale sulle costruzioni geometriche, si spiega in maniera formale che cos'è una costruzione con riga e compasso e se ne evidenziano i motivi per cui essa è un concetto importante in matematica. Tale spiegazione è accompagnata da una presentazione in PowerPoint, durante la quale gli studenti possono prendere appunti, rispondere ai quesiti posti ed intervenire.

Materiali utilizzati: Un pc per l'insegnante dotato di GeoGebra versione 5 e collegato a un proiettore, iPad per gli studenti dotati di collegamento ad Internet, Scheda di lavoro 2 e Scheda di lavoro 3 consultabili in Appendice A, presentazione in PowerPoint dal titolo "Le costruzioni geometriche" consultabile anch'essa in Appendice A.

Implementazione del progetto in classe: La maggior parte degli studenti non ha svolto la "Scheda di lavoro 2" come compito per casa a causa della difficoltà nell'aprire i file GeoGebra forniti loro. Nella correzione della scheda, quindi, per coinvolgere maggiormente soprattutto questi alunni, si invitano tre di loro a svolgere ciascuno una costruzione tramite il pc dell'insegnante, collegato al proiettore di modo che tutta la classe possa seguire la correzione. Agli allievi al posto si chiede invece di giustificare i passaggi delle singole costruzioni.
In particolare, prima di eseguire su GeoGebra la costruzione del punto medio e del-

l'asse di un segmento AB dato, si preferisce far disegnare agli studenti sul quaderno tali oggetti, dal momento che essi non ne conoscevano già la definizione. In tal modo si dà una visualizzazione intuitiva di cosa si sta andando a costruire.
In generale, durante la correzione, la classe è apparsa meno attenta e motivata rispetto alle lezioni precedenti, probabilmente perché per alcuni allievi si trattava di una ripetizione di quanto già svolto a casa. Tuttavia, qualche alunno ha ascoltato la discussione in modo attento e partecipativo. Un'alunna ha anche molto apprezzato la funzione di trascinamento applicata alla costruzione della retta perpendicolare ad una retta data e passante per suo punto per evidenziare come la scelta iniziale del punto fosse casuale.
In vista delle successive attività laboratoriali in classe, ci si è infine assicurati che negli iPad in dotazione della scuola si riuscisse a lavorare con file precedentemente creati.
Nonostante ciò, nella prima attività a gruppi si sono riscontrati alcuni problemi tecnici nello scaricare e aprire negli iPad i file GeoGebra forniti agli studenti. Ciò ha comportato pesanti rallentamenti e importanti disparità tra i diversi gruppi di lavoro (alcuni hanno concluso la costruzione del triangolo isoscele quando altri non l'avevano ancora iniziata). Tali difficoltà si sono poi comunque superate e gli studenti sono riusciti a svolgere tutte le attività, durante le quali in alcuni gruppi qualche componente non partecipava attivamente o appariva distratto. Tuttavia, la maggior parte di loro ha portato a termine la scheda di lavoro con serietà e diligenza: un gruppo ha addirittura "nascosto" tutti i passaggi intermedi della costruzione del triangolo isoscele, lasciando appunto soltanto il triangolo. Qualche studente ha invece trovato difficoltà nell'eseguire con il software alcuni passaggi delle costruzioni o nel rinominare i punti come richiesto nella scheda di lavoro. Tutti i gruppi, poi, faticavano a creare il nuovo strumento di GeoGebra per salvare la costruzione del triangolo isoscele e rettangolo: alcuni non separavano correttamente gli oggetti iniziali e finali, altri non riuscivano a selezionarli tutti, altri ancora eseguivano scorrettamente qualche passaggio della costruzione e conseguentemente creavano uno strumento che non rispettava le richieste. Tuttavia, questi problemi si sono tutti superati supportando gli allievi durante l'attività.
Al termine di ogni costruzione, si discute con la classe la giustificazione dei singoli passaggi.
A tal proposito, si riporta nel seguito un esempio di risposta corretta, data dalla maggior parte degli studenti:



Triangolo Isoscele

1. Il punto 1 è possibile grazie alla costruzione del punto medio e dell'asse di un segmento
2. Il punto 2 è possibile grazie al 3° postulato
3. Il punto 3 è possibile grazie al 1° postulato

TRIANGOLO RETTANGOLO

DEF: Un triangolo è rettangolo se ha un angolo retto.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_triangolo_rettangolo.ggb" la costruzione del triangolo rettangolo dati i cateti AB e DE, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni (per le costruzioni già fatte, sfrutta gli opportuni comandi del software):

1. Traccia la retta perpendicolare ad AB passante per A
SI PUÒ FARE PERCHÈ LO ABBIAMO GIA DIMOSTRATO

1

2. Traccia la circonferenza di centro A e raggio DE, e chiama C il suo punto d'intersezione con la retta perpendicolare SI PUÒ FARE PER IL 3° POSTULATO
3. Traccia il segmento BC e CA. SI PUÒ FARE PER IL 2° POSTULATO

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

Salva infine la costruzione mediante il comando "crea nuovo strumento".

BISETTRICE DI UN ANGOLO

DEF: La bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due angoli congruenti.

ESERCIZIO

Scrivi le definizioni di angolo e di semiretta.

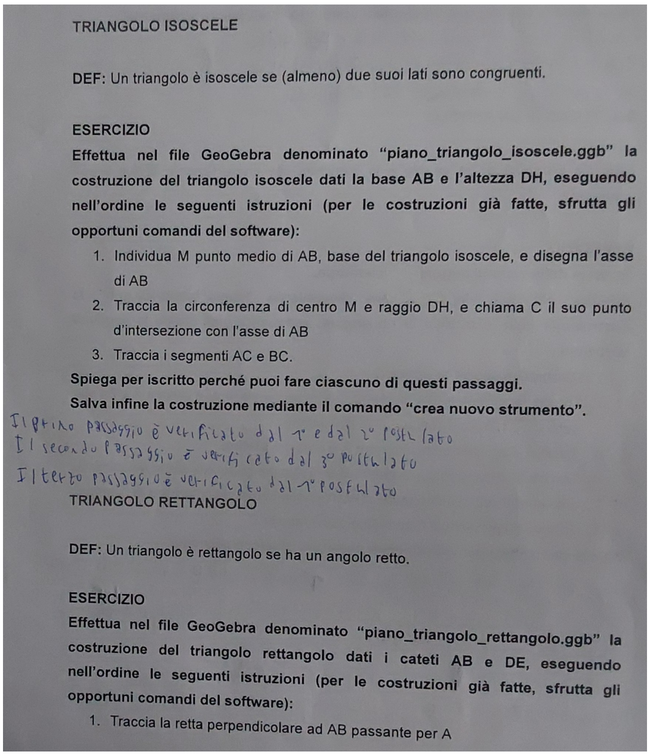
Effettua poi nel file GeoGebra denominato "piano_bisettrice.ggb" la costruzione della bisettrice di un angolo, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna un angolo di vertice O PERCHÈ LO ABBIAMO GIA DIMOSTRATO
2. Traccia la circonferenza di centro O e raggio a piacere, e chiama A e B i suoi punti d'intersezione con con i lati dell'angolo PER IL 3° POSTULATO
3. Traccia la circonferenza di centro A e raggio a piacere PER IL 3° POSTULATO
4. Traccia la circonferenza di centro B e raggio congruente a quello del punto 3., e chiama C uno dei due punti di intersezione con la circonferenza del punto 3. 3° POSTULATO
5. Traccia la semiretta di origine O e passante per C. LO ABBIAMO GIA DIMOSTRATO

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

Figura 4.10: Esempio di risposta corretta (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 3")

Tuttavia, come si legge in Figura 4.11, per giustificare l'utilizzo di oggetti geometrici precedentemente costruiti, alcuni alunni hanno ripercorso la loro costruzione invece di darla per dimostrata:



TRIANGOLO ISOSCELE

DEF: Un triangolo è isoscele se (almeno) due suoi lati sono congruenti.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_triangolo_isoscele.ggb" la costruzione del triangolo isoscele dati la base AB e l'altezza DH, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni (per le costruzioni già fatte, sfrutta gli opportuni comandi del software):

1. Individua M punto medio di AB, base del triangolo isoscele, e disegna l'asse di AB
2. Traccia la circonferenza di centro M e raggio DH, e chiama C il suo punto d'intersezione con l'asse di AB
3. Traccia i segmenti AC e BC.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.
Salva infine la costruzione mediante il comando "crea nuovo strumento".

Il primo passaggio è verificato dal 1° e dal 2° postulato
Il secondo passaggio è verificato dal 3° postulato
Il terzo passaggio è verificato dal 1° postulato

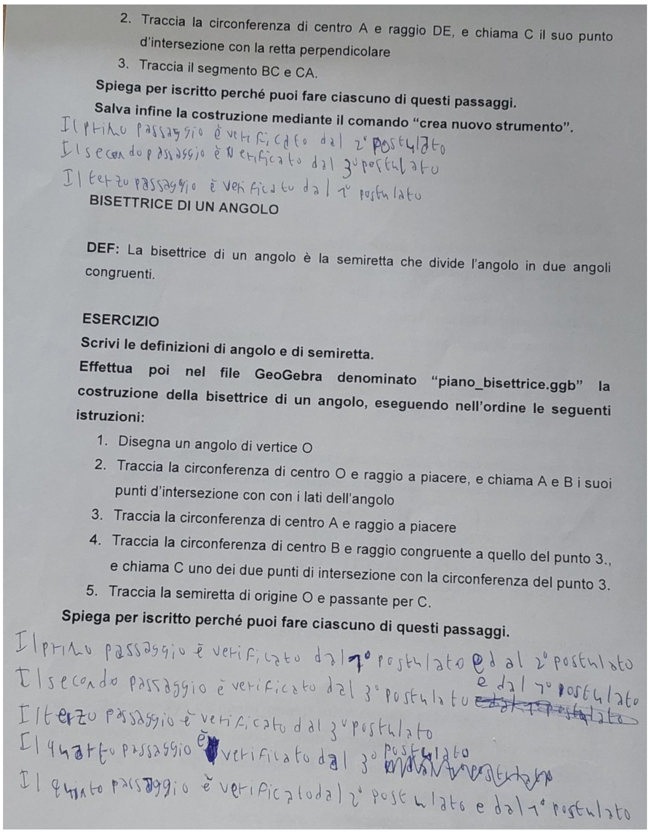
TRIANGOLO RETTANGOLO

DEF: Un triangolo è rettangolo se ha un angolo retto.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_triangolo_rettangolo.ggb" la costruzione del triangolo rettangolo dati i cateti AB e DE, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni (per le costruzioni già fatte, sfrutta gli opportuni comandi del software):

1. Traccia la retta perpendicolare ad AB passante per A



2. Traccia la circonferenza di centro A e raggio DE, e chiama C il suo punto d'intersezione con la retta perpendicolare
3. Traccia il segmento BC e CA.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.
Salva infine la costruzione mediante il comando "crea nuovo strumento".

Il primo passaggio è verificato dal 2° postulato
Il secondo passaggio è verificato dal 3° postulato
Il terzo passaggio è verificato dal 1° postulato

BISETTRICE DI UN ANGOLO

DEF: La bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due angoli congruenti.

ESERCIZIO

Scrivi le definizioni di angolo e di semiretta.
Effettua poi nel file GeoGebra denominato "piano_bisettrice.ggb" la costruzione della bisettrice di un angolo, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna un angolo di vertice O
2. Traccia la circonferenza di centro O e raggio a piacere, e chiama A e B i suoi punti d'intersezione con con i lati dell'angolo
3. Traccia la circonferenza di centro A e raggio a piacere
4. Traccia la circonferenza di centro B e raggio congruente a quello del punto 3., e chiama C uno dei due punti di intersezione con la circonferenza del punto 3.
5. Traccia la semiretta di origine O e passante per C.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

Il primo passaggio è verificato dal 1° postulato e dal 2° postulato
Il secondo passaggio è verificato dal 3° postulato e dal 1° postulato
Il terzo passaggio è verificato dal 3° postulato
Il quarto passaggio è verificato dal 3° postulato
Il quinto passaggio è verificato dal 2° postulato e dal 1° postulato

Figura 4.11: Esempio di risposta errata (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 3")

Questo errore evidenzia la difficoltà nel comprendere che un teorema già dimostrato può essere preso per vero e sfruttato senza doverlo riprovare. Si è ritenuto dunque opportuno ribadire più volte, anche nelle successive lezioni, tale concetto.

Attività 4: I problemi in forma aperta

Durata: 2 ore

Modalità di lavoro: Lezione frontale e attività laboratoriale a gruppi

Struttura e Obiettivi: La quarta attività, che contribuisce assieme a quella sulle costruzioni geometriche ad introdurre gradualmente il concetto di dimostrazione, ha in particolare l'obiettivo di far comprendere agli studenti l'importanza e la necessità di produrre dimostrazioni. Essa prevede lo svolgimento della "Scheda di lavoro 4" come esperienza laboratoriale.
Poiché nelle lezioni precedenti era frequente che uno dei tre componenti del gruppo fosse poco partecipativo (gli iPad hanno uno schermo piuttosto ridotto ed è complicato lavorare in tre), si sceglie di suddividere la classe a coppie. In tal modo, entrambi gli studenti sono coinvolti attivamente nell'attività e possono sperimentare l'utilizzo di GeoGebra. Ciascun gruppo ha a disposizione la scheda di lavoro in forma cartacea e un iPad dotato di connessione ad Internet. Nel dettaglio, si chiede agli studenti di risolvere due problemi aperti[4], ossia posti sotto forma di domanda. L'idea è quella di utilizzare liberamente la funzione di trascinamento del software di geometria dinamica con lo scopo di esplorare le figure coinvolte e rispondere ai due quesiti della scheda di lavoro.
Al termine dell'attività, segue una discussione con l'intera classe in cui si raccolgono le risposte date da tutti i gruppi. Lo scopo di questa parte è sottolineare come le giustificazioni degli studenti alle congetture prodotte durante l'esperienza laboratoriale non possano essere considerate una spiegazione formale di quanto da loro affermato. Emerge quindi la necessità di fornire una dimostrazione per giustificare in maniera rigorosa tali congetture e per convincere sé stessi e gli altri della veridicità delle risposte. Per enfatizzare questo concetto e generalizzarlo, si sceglie di concludere il discorso leggendo e commentando brevemente la seguente frase di Euclide:

"Ciò che è affermato senza prova, può essere negato senza prova."

Si spiega poi agli alunni che in questo momento dell'anno scolastico essi non possiedono ancora le competenze per comprendere la dimostrazione dei due problemi proposti, ma che nei mesi successivi le affronteranno con l'insegnante della classe.
A conclusione dell'attività, servendosi di una presentazione in PowerPoint durante la quale gli alunni possono prendere appunti e intervenire, si formalizzano i concetti di teorema e dimostrazione, specificando perché quest'ultima sia necessaria in matematica.

Materiali utilizzati: Un pc per l'insegnante dotato di GeoGebra versione 5 e collegato a un proiettore, iPad per gli studenti dotati di collegamento ad Internet, Scheda di lavoro 4 consultabile in Appendice A e presentazione in PowerPoint dal

[4]la classe non è a conoscenza che sono due teoremi.

titolo "La dimostrazione in geometria" consultabile anch'essa in Appendice A.

Implementazione del progetto in classe: Durante l'attività la classe si è mostrata molto coinvolta e partecipativa: gli alunni erano incuriositi e motivati nel cercare una risposta convincente ai due quesiti; soltanto un gruppo non ha portato a termine l'attività nei tempi previsti.
Per quanto concerne il primo problema aperto, quasi tutti gli alunni hanno risposto correttamente, affermando che le bisettrici di due angoli interni di un triangolo non possono essere tra loro perpendicolari, a meno che il triangolo non sia degenere.
A tal proposito, si riportano nel seguito alcuni esempi di motivazioni date dagli studenti a tale affermazione:

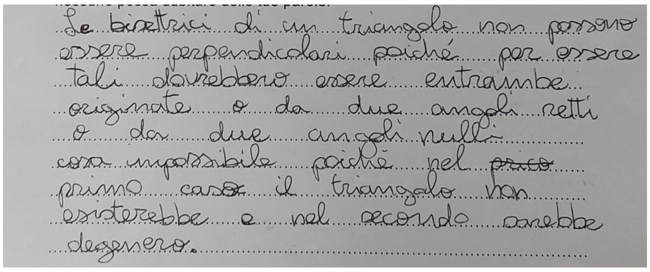

Le bisettrici di un triangolo non possono
essere perpendicolari poiché per essere
tali dovrebbero essere entrambe
originate o da due angoli retti
o da due angoli nulli
cosa impossibile poiché nel ~~prico~~
primo caso il triangolo non
esisterebbe e nel secondo sarebbe
degenero.

Figura 4.12: Esempio di motivazione alla risposta del Problema 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")

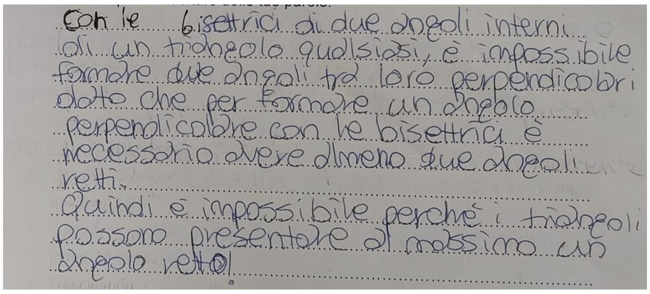
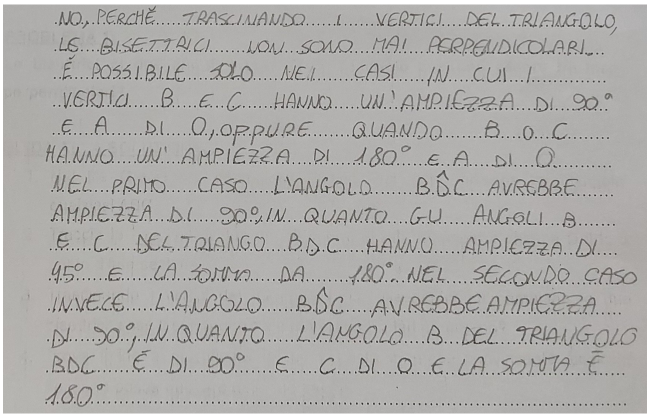

Con le bisettrici di due angoli interni
di un triangolo qualsiasi, è impossibile
formare due angoli tra loro perpendicolari
dato che per formare un angolo
perpendicolare con le bisettrici è
necessario avere almeno due angoli
retti.
Quindi è impossibile perché i triangoli
possono presentare al massimo un
angolo retto.

Figura 4.13: Esempio di motivazione alla risposta del Problema 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")



NO, PERCHÈ TRASCINANDO I VERTICI DEL TRIANGOLO, LE BISETTRICI NON SONO MAI PERPENDICOLARI. È POSSIBILE SOLO NEI CASI IN CUI I VERTICI B E C HANNO UN'AMPIEZZA DI 90° E A DI 0, OPPURE QUANDO B O C HANNO UN'AMPIEZZA DI 180° E A DI 0. NEL PRIMO CASO L'ANGOLO B$\hat{D}$C AVREBBE AMPIEZZA DI 90°, IN QUANTO GLI ANGOLI B E C DEL TRIANGO BDC HANNO AMPIEZZA DI 45° E LA SOMMA DA 180°. NEL SECONDO CASO INVECE L'ANGOLO B$\hat{D}$C AVREBBE AMPIEZZA DI 90°, IN QUANTO L'ANGOLO B DEL TRIANGOLO BDC È DI 90° E C DI 0 E LA SOMMA È 180°

Figura 4.14: Esempio di motivazione alla risposta del Problema 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")

Come si può osservare, alcuni allievi si sono limitati a distinguere il caso generale da quello degenere, mentre altri hanno provato a giustificare la loro risposta, pur mancando di rigore e commettendo imprecisioni.

Nel secondo problema (*Teorema di Varignon*), invece, qualche gruppo ha commesso errori di impostazione, congiungendo i punti medi del quadrilatero generico come riportato nella figura seguente:

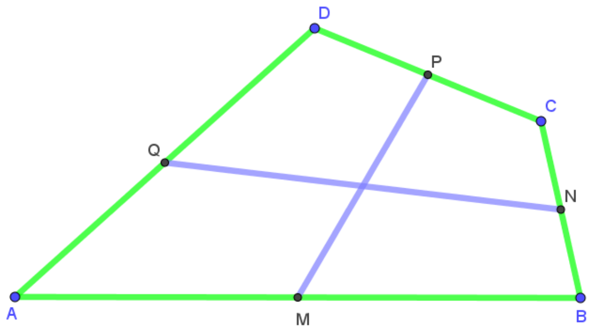


Figura 4.15: Errore nell'interpretazione del *Teorema di Varignon* (Fonte: rappresentazione personale realizzata con GeoGebra)

Un'altra coppia ha disegnato come quadrilatero di partenza un rettangolo o un quadrato invece che un quadrilatero generico. Questo tipo di errore evidenzia come gli alunni tendano a disegnare figure con particolari simmetrie piuttosto che triangoli o quadrilateri generici, probabilmente perché essi sono convinti sia più semplice ragionare con figure che godono di particolari proprietà. Si coglie quindi l'occasione per ribadire i rischi che tale scelta comporta quando si affronta un problema geometrico. Tuttavia, queste imprecisioni si sono corrette supportando gli allievi nei diversi passaggi della costruzione della figura, e alla fine quasi tutte le coppie sono riuscite a concludere che il quadrilatero di Varignon è un parallelogramma.

Nel seguito si possono leggere due esempi di buona giustificazione data dagli alunni a tale affermazione:

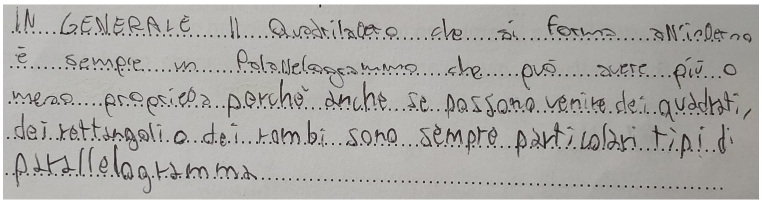

IN GENERALE il quadrilatero che si forma all'interno è sempre un parallelogramma che può avere più o meno proprietà perché anche se possono venire dei quadrati, dei rettangoli o dei rombi sono sempre particolari tipi di parallelogramma

Figura 4.16: Esempio di buona giustificazione alla risposta del Problema 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")

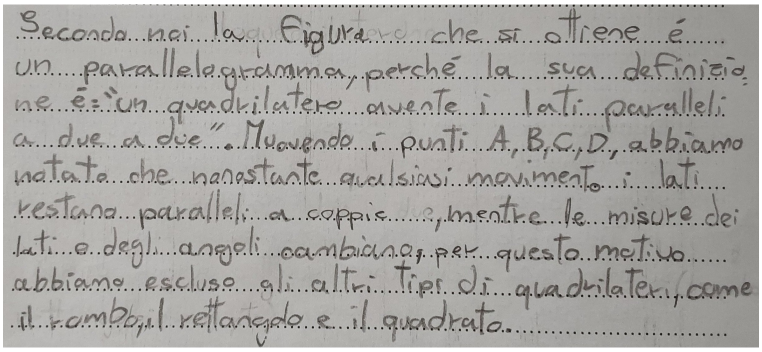

Secondo noi la figura che si ottiene è un parallelogramma, perché la sua definizione è: "un quadrilatero avente i lati paralleli a due a due". Muovendo i punti A, B, C, D, abbiamo notato che nonostante qualsiasi movimento i lati restano paralleli a coppie, mentre le misure dei lati e degli angoli cambiano, per questo motivo abbiamo escluso gli altri tipi di quadrilateri, come il rombo, il rettangolo e il quadrato.

Figura 4.17: Esempio di buona giustificazione alla risposta del Problema 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")

Alcuni studenti non hanno invece portato alcuna motivazione alla loro risposta, limitandosi ad affermare che il quadrilatero di Varignon è un parallelogramma.

Due coppie, infine, hanno concluso che il quadrilatero di Varignon è un rombo o un rettangolo, o comunque un particolare parallelogramma:

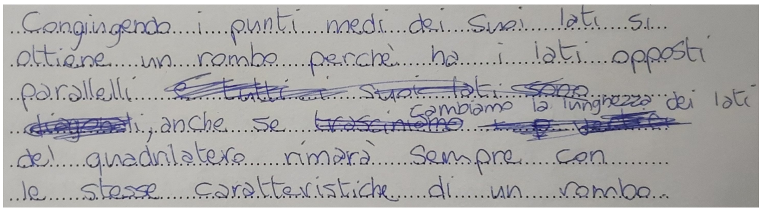
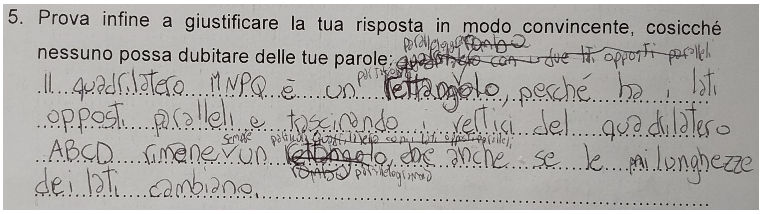

Congiungendo i punti medi dei suoi lati si ottiene un rombo perchè ha i lati opposti paralleli ~~e tutti i suoi lati sono~~ ~~diagonali~~, anche se ~~trasciniamo~~ cambiamo la lunghezza dei lati del quadrilatero rimarrà sempre con le stesse caratteristiche di un rombo.

Figura 4.18: Esempio di giustificazione errata alla risposta del Problema 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")



5. Prova infine a giustificare la tua risposta in modo convincente, cosicché nessuno possa dubitare delle tue parole: ~~quadrilatero con i due lati opposti paralleli~~

Il quadrilatero MNPQ è un ~~rettangolo~~ perché ha i lati opposti paralleli e trascinando i vertici del quadrilatero ABCD rimane sempre un ~~rettangolo~~ ~~rombo~~ parallelogrammo che anche se le lunghezze dei lati cambiano.

Figura 4.19: Esempio di giustificazione errata alla risposta del Problema 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti alla "Scheda di lavoro 4")

Essi non sono dunque riusciti a generalizzare le osservazioni fatte su GeoGebra e a congetturare la proprietà corretta.

In fase di discussione delle risposte, poi, un alunno ha subito domandato se ci sia un perché delle affermazioni o se si debbano accettare come vere: per non anticipare che il perché risiede proprio nella dimostrazione, si preferisce post-porre la risposta, motivando allo studente tale scelta.
Dopo aver raccolto le giustificazioni date da tutti i gruppi, si sottolinea che essi hanno congetturato la risposta sulla base di un numero finito di prove, eseguite tramite la funzione di trascinamento di GeoGebra; a questo punto si chiede alla classe quante prove si dovrebbero fare per essere certi delle risposte date; diversi alunni hanno risposto immediatamente:

"infinite".

Fatti riflettere gli studenti sul fatto che produrre infinite prove è irrealizzabile, si domanda quale sia "l'ingrediente" matematico che permette di validare una congettura. Due studenti rispondono:

"è il postulato".

Chiaramente la risposta è sbagliata; si coglie quindi l'occasione per riprendere la definizione di assioma e ricordare che esso è un'affermazione vera a prescindere.
Dopo qualche minuto di riflessione, in cui si cerca di accompagnare la classe verso la risposta corretta, uno studente dichiara:

"l'ingrediente magico è la dimostrazione",

che è la risposta voluta.
Si conclude quindi il discorso confermando che produrre dimostrazioni è necessario in matematica per convincere sé stessi e gli altri sulla verità o meno di un fatto e per motivare la verità di un certo enunciato. Si riprende inoltre la domanda fatta dall'alunno in precedenza e gli si risponde che il perché delle affermazioni da lui congetturate risiede proprio nella dimostrazione.

Infine, si introducono in maniera formale i concetti di teorema e dimostrazione, ribadendo un'ultima volta la sua importanza. Durante la spiegazione, supportata da una presentazione in PowerPoint, gli alunni sono apparsi molto attenti e concentrati e hanno preso appunti.

Attività 5: Produzione di dimostrazioni

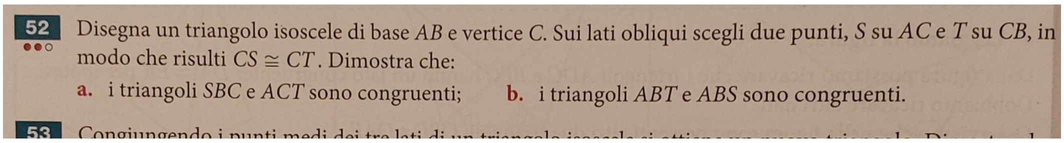
Durata: 4 ore

Modalità di lavoro: Lezione frontale

Struttura e Obiettivi: L'attività ha lo scopo di far apprendere agli allievi come effettuare una dimostrazione di un risultato teorico, accompagnandoli verso una graduale autonomia nel produrre dimostrazioni.
Essa è suddivisa in due parti:

- Dimostrazione del *Teorema del triangolo isoscele*. Innanzitutto, si è scelto di riprendere la breve discussione impostata in una delle lezioni precedenti, in cui prima di costruire il triangolo isoscele si era chiesto alla classe di darne la definizione e di riconoscerne alcune proprietà e simmetrie. Mostrando tale triangolo su GeoGebra e chiedendo alla classe di partecipare in modo attivo, si sono quindi ripassate la sua definizione e la proprietà per cui gli angoli alla base sono tra loro congruenti. A questo punto si è enunciato in maniera rigorosa il teorema del triangolo isoscele. Si è poi disegnato alla lavagna un triangolo isoscele e si sono scritte le ipotesi e la tesi; utilizzando poi diversi simboli e/o colori si sono riportate le ipotesi nel disegno. A questo punto è importante specificare che questa è l'impostazione da seguire in tutti gli esercizi dimostrativi (di geometria). Successivamente, si è passati alla dimostrazione vera e propria: innanzitutto osservando il disegno si è data agli alunni, cercando di coinvolgerli, l'idea del percorso che porta alla tesi; soltanto in un secondo momento si è riportata la dimostrazione per iscritto.
  Nello svolgere questa prima dimostrazione formale, si è ritenuto doveroso insistere su alcuni concetti chiave: l'importanza di fare un disegno della figura in questione e di segnare su di essa le ipotesi, di modo che tale rappresentazione possa suggerire l'idea di soluzione; il fatto che le ipotesi siano insite nel testo del teorema o dell'esercizio, e che ogni altra deduzione fatta a partire da esse vada inserita soltanto nella dimostrazione; il fatto che nella dimostrazione generalmente si debbano utilizzare tutte le ipotesi presenti nel testo; il fatto che la dimostrazione debba apparire come una sorta di "tema di matematica" (tutte le deduzioni devono essere giustificate in modo rigoroso); il fatto che ogni passaggio si deduca, e dunque dipenda, da quelli precedenti (in tal senso, le deduzioni di una dimostrazione sono ordinate); il fatto che l'ordine delle richieste di un problema sia generalmente importante (ad esempio, per dimostrare la seconda parte dell'esercizio è molto probabile che occorra sfruttare la prima, e così via).

- Esercizi dimostrativi di applicazione del teorema del triangolo isoscele. Più precisamente, per fissare meglio l'enunciato di tale teorema, immediatamente dopo la sua dimostrazione si è scelto di svolgere in classe l'esercizio numero 52 a pagina G78 del libro di testo in adozione:

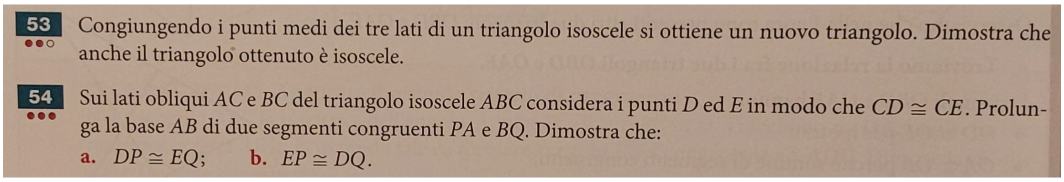


52 Disegna un triangolo isoscele di base AB e vertice C. Sui lati obliqui scegli due punti, S su AC e T su CB, in modo che risulti $CS \cong CT$. Dimostra che:

a. i triangoli SBC e ACT sono congruenti; **b.** i triangoli ABT e ABS sono congruenti.

Figura 4.20: Esercizio 52 pag. G78 del libro di testo (Fonte: [9])

Al termine della prima lezione si sono infine assegnati come compito per casa gli esercizi numero 53, 54 e 55 a pagina G78, corretti poi durante l'ultima lezione del progetto:

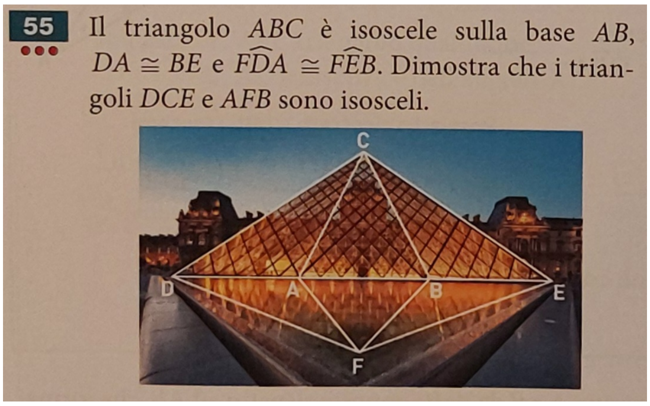


53 Congiungendo i punti medi dei tre lati di un triangolo isoscele si ottiene un nuovo triangolo. Dimostra che anche il triangolo ottenuto è isoscele.

54 Sui lati obliqui AC e BC del triangolo isoscele ABC considera i punti D ed E in modo che $CD \cong CE$. Prolunga la base AB di due segmenti congruenti PA e BQ. Dimostra che:

a. $DP \cong EQ$; **b.** $EP \cong DQ$.

Figura 4.21: Esercizi 53 e 53 pag. G78 del libro di testo (Fonte: [9])



55 Il triangolo ABC è isoscele sulla base AB, $DA \cong BE$ e $F\widehat{D}A \cong F\widehat{E}B$. Dimostra che i triangoli DCE e AFB sono isosceli.

Figura 4.22: Esercizio 55 pag. G78 del libro di testo (Fonte: [9])

In particolare, gli esercizi si sono svolti alla lavagna cercando di rendere la classe partecipe della soluzione: ad esempio, in quelli assegnati come compito per casa si sono anche ascoltate e discusse le proposte di soluzione degli studenti. Inoltre, prima di dimostrare formalmente i diversi esercizi, si sono disegnate le figure di riferimento nel software e si è sfruttata la funzione di trascinamento al fine di comprendere la coerenza delle richieste e di intuire l'idea di dimostrazione.

Materiali utilizzati: Un pc per l'insegnante dotato di GeoGebra versione 5 e collegato a un proiettore, lavagna (o, se si preferisce, LIM) e il libro di testo in adozione.

Implementazione del progetto in classe: In queste lezioni frontali gli studenti si sono mostrati molto partecipi e interessati: alcuni di loro hanno posto domande di carattere tecnico o teorico, mentre altri hanno proposto volontariamente una soluzione alternativa agli esercizi chiedendo se fosse anch'essa corretta; sono addirittura intervenuti allievi generalmente poco collaborativi.

Un alunno ad esempio ha chiesto:

"nel disegno della figura riferita al testo di un esercizio, devo segnare con simboli e/o colori solo le ipotesi oppure anche la tesi?"

Si è chiarito che nel disegno vanno rappresentate soltanto le ipotesi, ossia il "punto di partenza" di una dimostrazione. Segnare anche la tesi potrebbe trarre in inganno l'alunno, il quale potrebbe scambiarle per ipotesi e utilizzarle in un passaggio della dimostrazione, commettendo a quel punto un grave errore.
Un'alunna ha invece esposto la sua soluzione all'esercizio 53, in cui aveva utilizzato il teorema inverso del triangolo isoscele e il teorema secondo cui la bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è anche mediana e altezza relativa alla base. Tuttavia, questi due risultati non sono ancora stati enunciati e dimostrati, per cui non possono essere sfruttati. La studentessa li ha ricordati dalla scuola secondaria di I grado e ha ritenuto di poterli comunque applicare. Un altro studente ha commesso un errore simile: guardando il disegno della figura ha dedotto e utilizzato il fatto che due segmenti fossero paralleli, pur non avendo ancora dimostrato i criteri di parallelismo. Si è colta quindi l'occasione per sottolineare come un risultato teorico possa essere usato nel ragionamento ipotetico-deduttivo di una dimostrazione soltanto dopo che è stato dimostrato rigorosamente. In tale contesto, si è notato che diversi studenti faticavano a comprendere questo concetto, probabilmente perché per loro era insensato non poter sfruttare un teorema conosciuto e dato fino a quel momento per vero anche senza averlo dimostrato.
Un altro alunno ha posto il seguente quesito:

"tra le ipotesi posso aggiungere che gli angoli alla base del triangolo isoscele sono congruenti?"

Si è risposto che farlo è un errore, dal momento che il testo non fa alcun riferimento al teorema del triangolo isoscele, bensì soltanto al fatto che appunto il triangolo sia isoscele, il che si traduce nell'ipotesi per cui i due suoi lati obliqui sono congruenti. Tale teorema è una deduzione che discende dalle ipotesi, e quindi si dovrà citare soltanto all'interno della dimostrazione. Un altro studente ha poi chiesto se il fatto che due segmenti siano congruenti per differenza di segmenti congruenti sia da scrivere nelle ipotesi oppure nella dimostrazione. Anche in questo caso, si è evidenziato come questo fatto sia una deduzione e non un'ipotesi presente nel testo dell'esercizio, e che vada quindi inserito nella dimostrazione.

Infine, in merito all'esercizio 55 (vedi Figura 4.21), un allievo ha contestato che l'ipotesi per cui i punti D, A, B, E sono allineati si dovesse dedurre osservando il disegno del libro. L'intervento è stato molto apprezzato, in quanto ha evidenziato che lo studente stava affrontando gli esercizi dimostrativi con rigore e precisione, cercando di non dare nulla per scontato. Si è però motivata la scelta degli autori di inserire alcuni disegni in sostituzione di una consegna più corposa con la necessità di condensare molti esercizi in uno spazio limitato di pagine. Si è dunque precisato di

fare affidamento al disegno, qualora presente, per ricavare tutte le ipotesi necessarie a svolgere l'esercizio.
Nel rispondere alla seconda richiesta dell'esercizio, poi, si sono riscontrate molte difficoltà: esso è inserito tra gli esercizi di applicazione del teorema del triangolo isoscele, quindi prima della sezione sul teorema inverso. Tuttavia, nessuno tra studenti, ricercatrice e insegnante è riuscito a risolverlo senza applicare quest'ultimo teorema, non ancora però visto a lezione. In effetti, controllando nell'edizione precedente del libro di testo [8], si è notato che questo esercizio è inserito tra quelli di applicazione del teorema inverso del triangolo isoscele. L'insegnante ha quindi provveduto ad informare i colleghi e poi il rappresentante della Casa Editrice Zanichelli dell'errore di stampa.

Attività 6: Questionario finale e chiusura del progetto

Durata: 1 ora

Modalità di lavoro: Individuale

Materiali utilizzati: Questionario finale, consultabile in Appendice A.

Struttura e Obiettivi: A conclusione della sperimentazione viene somministrato un questionario, in forma cartacea e anonima, costituito da domande a risposta multipla e domande aperte. Esso è svolto dagli studenti interamente in aula con l'obiettivo di valutare le competenze raggiunte e gli eventuali progressi a seguito del progetto messo in atto. Si desidera inoltre sondare l'opinione degli studenti riguardo ad alcuni aspetti della geometria, così da scoprire cosa li avesse maggiormente colpiti e in che misura le attività proposte potessero aver eventualmente favorito la comprensione dei diversi argomenti, ma anche quali aspetti avrebbero potuto eventualmente essere migliorati.

Capitolo 5

Analisi dei dati relativi alla Sperimentazione didattica

Il Capitolo seguente propone uno studio dei Questionari iniziale e finale, somministrati alla classe sperimentale e ad una classe di controllo allo scopo di evidenziare eventuali progressi e, in generale, le note positive tratte da questo progetto.

5.1 Raccolta e analisi dei dati

Durante il primo incontro con la classe sperimentale è stato somministrato il **Questionario iniziale** (consultabile in Appendice A), allo scopo di verificare le conoscenze pregresse degli studenti sui concetti strettamente collegati agli argomenti previsti dal percorso e l'atteggiamento degli stessi nei confronti della geometria. Grazie a questo test si può quindi capire il livello generale della classe e vedere se gli alunni hanno delle misconcezioni riguardo i temi che si andranno a trattare.
Nel dettaglio, il questionario, costituito da domande a risposta multipla, vero/falso e domande aperte, è stato somministrato anche ad una classe di controllo al fine di confrontare le risposte date dalla classe sperimentale con una che ha invece svolto il programma in maniera tradizionale. Al momento dello svolgimento, la classe sperimentale vedeva presenti 24 studenti su 25, mentre la classe di controllo 25 allievi su 26.

Analizziamo ora nel seguito i risultati emersi nella prima parte del test, ossia quella che sondava i contenuti.
Una prima indagine sulle domande a risposta chiusa ha rilevato una preparazione migliore della classe di controllo rispetto a quella sperimentale, dovuta al fatto che al momento della somministrazione del questionario il docente aveva già accennato ai suoi studenti alcuni concetti fondamentali della geometria euclidea. Tuttavia, in qualche domanda le risposte date dalle due classi sono sostanzialmente simili, come nella prima e nella decima domanda. Anche nella seconda parte della domanda 5 (non riportata negli istogrammi), in cui si chiedeva di scrivere un assioma della geometria euclidea, si sono riscontrate le medesime difficoltà; nella classe sperimentale infatti un solo alunno ha enunciato correttamente il I postulato di Euclide, mentre

nella classe di controllo 6 studenti (comunque un numero molto ristretto) sono riusciti nell'intento.
Si riportano nel seguito gli istogrammi in cui si confrontano dapprima tutte le risposte date dalle due classi, e poi la percentuale di risposte corrette ed errate:

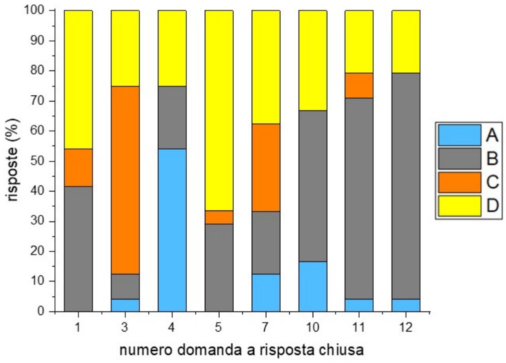


Figura 5.1: Risposte domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

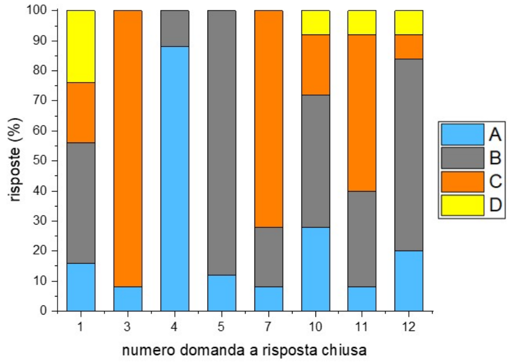


Figura 5.2: Risposte domande chiuse classe di controllo (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

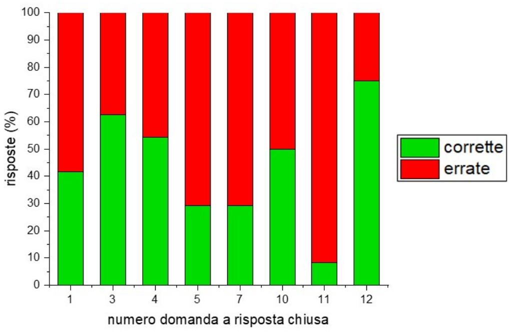


Figura 5.3: Risposte corrette/errate domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

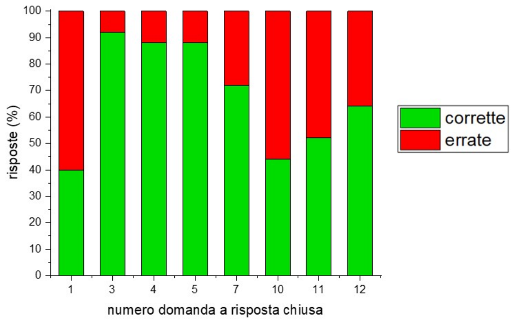


Figura 5.4: Risposte corrette/errate domande chiuse classe di controllo (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

Approfondiamo ora le domande aperte, le cui risposte si sono rivelate un utile riscontro per le indagini didattiche affrontate nel Capitolo 3.
La seconda domanda, che chiedeva di citare il nome di un personaggio influente per la fioritura della geometria, ha evidenziato come la maggior parte degli allievi della classe sperimentale non riconoscesse in *Euclide* la figura di riferimento: molti hanno citato *Pitagora*, come riportato in Figura 5.5, ritenendo erroneamente questo personaggio e l'omonimo teorema il fulcro della geometria piana.

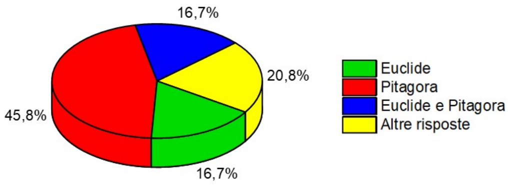


Figura 5.5: Risposte domanda 2 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

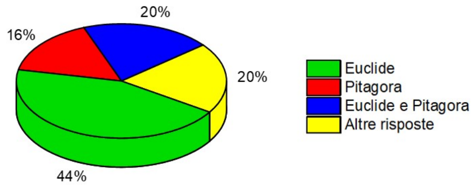


Figura 5.6: Risposte domanda 2 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Per quanto riguarda invece la domanda 6, in cui si chiedeva agli alunni cosa fosse per loro una dimostrazione, si sono ottenuti risultati simili nelle due classi: in entrambe qualche studente ha dato l'idea corretta di cosa sia una dimostrazione, seppur non dandone la definizione formale.

Nel seguito sono riportate le risposte più significative date da tre studenti della classe sperimentale:

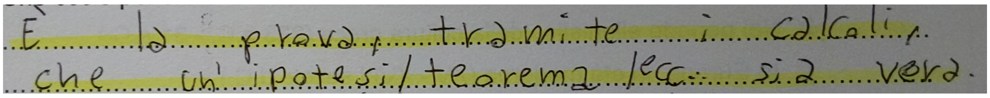

È la prova, tramite i calcoli, che un'ipotesi/teorema/ecc. sia vera.

Figura 5.7: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

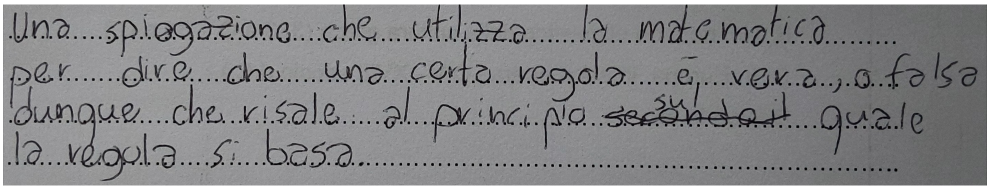

Una spiegazione che utilizza la matematica per dire che una certa regola è vera o falsa dunque che risale al principio ~~secondo il~~ su quale la regola si basa.

Figura 5.8: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

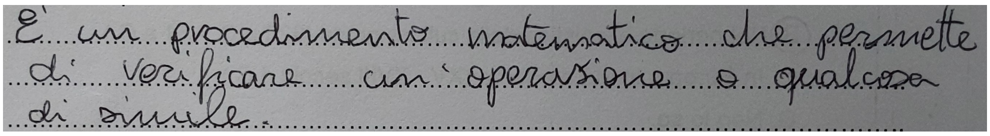
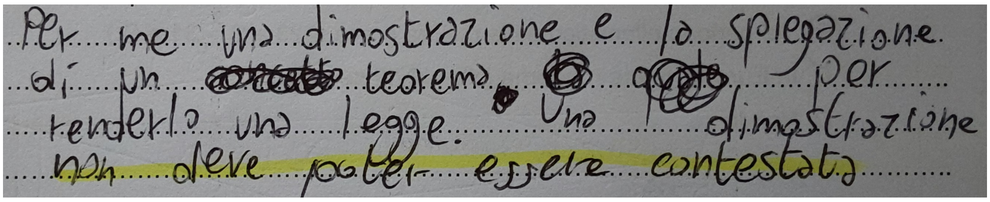

È un procedimento matematico che permette di verificare un'operazione o qualcosa di simile.

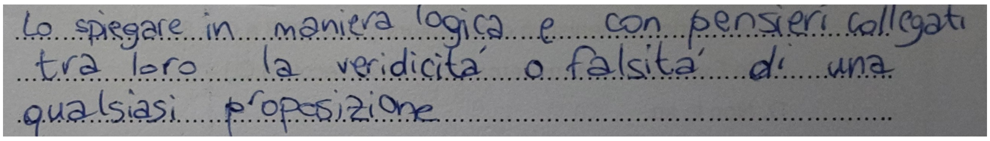
Figura 5.9: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Si mostrano ora le risposte più rilevanti date da tre alunni della classe di controllo:



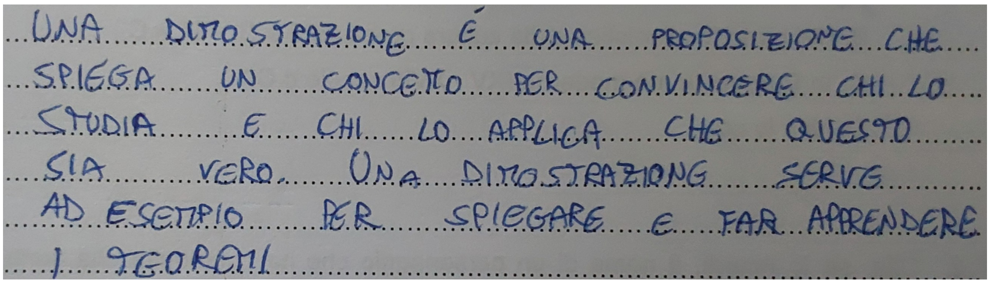
Per me una dimostrazione è la spiegazione di un teorema. per renderlo una legge. Una dimostrazione non deve poter essere contestata

Figura 5.10: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)



Lo spiegare in maniera logica e con pensieri collegati tra loro la veridicitá o falsitá di una qualsiasi proposizione

Figura 5.11: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)



UNA DIMOSTRAZIONE É UNA PROPOSIZIONE CHE SPIEGA UN CONCETTO PER CONVINCERE CHI LO STUDIA E CHI LO APPLICA CHE QUESTO SIA VERO. UNA DIMOSTRAZIONE SERVE AD ESEMPIO PER SPIEGARE E FAR APPRENDERE I TEOREMI

Figura 5.12: Esempio di idea corretta di cosa sia una dimostrazione (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Molti studenti invece, soprattutto nella classe sperimentale, nel definire una dimostrazione ha utilizzato termini come "che dimostra", "dimostrare" ecc.; sappiamo tuttavia che una definizione matematica rigorosa deve contenere al suo interno come unico termine nuovo quello da definire.

Per quanto concerne poi le domande 8 e 9, in cui si chiedeva rispettivamente di disegnare e costruire con riga e compasso un triangolo equilatero esplicitando i passaggi fatti, quasi tutti gli studenti di entrambe le classi hanno eseguito correttamente le consegne: in effetti, essi avevano già affrontato la costruzione in disegno tecnico. Infine, la differenza tra disegno e costruzione è stata giustificata dalla maggioranza degli alunni con il fatto che la costruzione restituisce un triangolo più preciso rispetto a quello disegnato a mano libera. Un allievo della classe sperimentale ha affermato che con la costruzione con riga e compasso si ha la certezza che il triangolo equilatero conservi tutte le sue proprietà, cosa che non avviene con il disegno, comprendendo appieno il ruolo ricoperto dalle costruzioni geometriche in matematica.

Analizziamo ora le risposte date dagli allievi alla domanda 13, dove era richiesto di individuare il quadrilatero che ha per vertici i punti medi di un generico quadrilatero.
Nella classe sperimentale tre studenti hanno risposto correttamente, mentre nella classe di controllo nessun allievo è arrivato a concludere che il quadrilatero di Varignon è un parallelogramma. Diversi altri alunni hanno concluso che esso è un rombo oppure un quadrato: essi sono partiti da un particolare quadrilatero e non sono riusciti a generalizzare la congettura. Qualcuno infine non ha dato alcuna risposta oppure ne ha fornito una di errata: in Figura 5.13 è riportato un esempio di errore commesso da diversi studenti delle due classi nella costruzione del quadrilatero di Varignon:

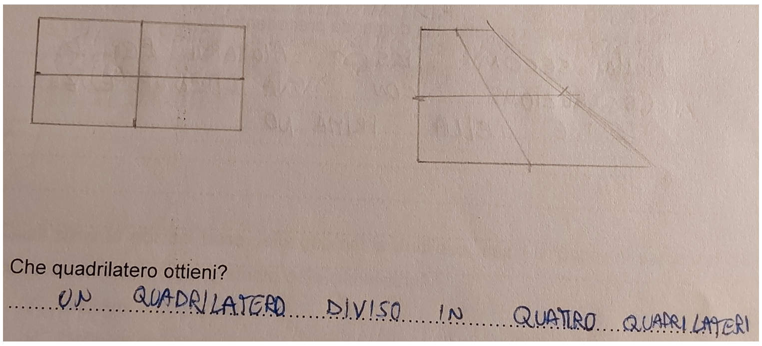


Figura 5.13: Errore di costruzione: lo studente ha congiunto i punti medi del quadrilatero di partenza in modo non consecutivo (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Per quanto riguarda la seconda parte della domanda, in cui si chiedeva se il procedimento seguito fosse o no una dimostrazione del fatto che il quadrilatero di Varignon è sempre un parallelogramma, si riportano di seguito le risposte date dalle due classi:

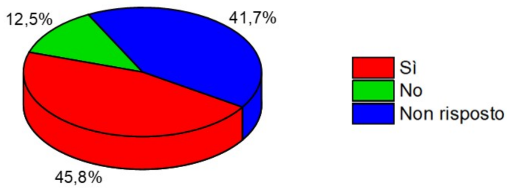


Figura 5.14: Risposte domanda 13 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

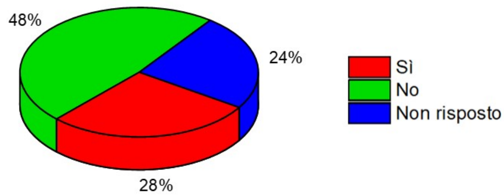


Figura 5.15: Risposte domanda 13 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Tuttavia, tra gli alunni che hanno risposto di no, soltanto uno per classe ha fornito un'ottima giustificazione, che si riporta nel seguito:

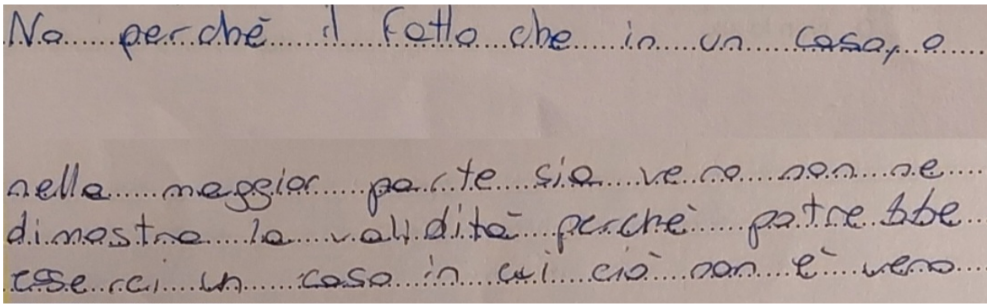

No perchè il fatto che in un caso, e nella maggior parte sia vero non ne dimostra la validità perchè potrebbe esserci un caso in cui ciò non è vero

Figura 5.16: Giustificazione corretta data dallo studente della classe sperimentale (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

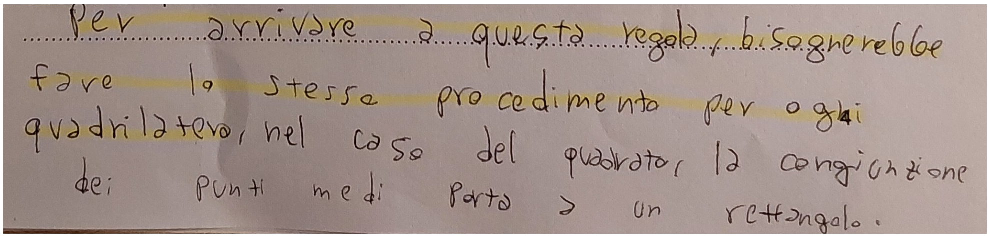

Per arrivare a questa regola, bisognerebbe fare lo stesso procedimento per ogni quadrilatero, nel caso del quadrato, la congiunzione dei punti medi porta a un rettangolo.

Figura 5.17: Giustificazione corretta data dallo studente della classe di controllo (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Esaminiamo ora i risultati emersi nella seconda parte del questionario, ossia quella che sondava l'atteggiamento degli alunni nei confronti della matematica e la loro propensione a tale disciplina.
Riportiamo innanzitutto gli istogrammi in cui si confrontano le risposte date dalle due classi alle domande chiuse:

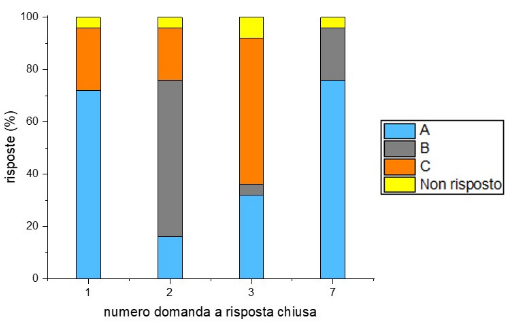


Figura 5.18: Risposte domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

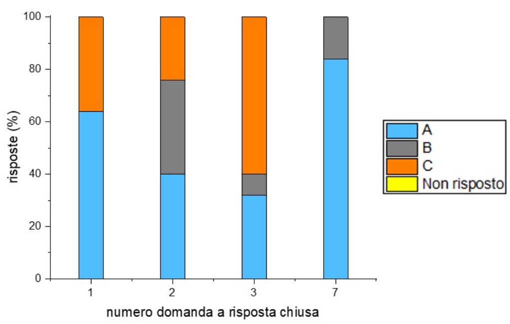


Figura 5.19: Risposte domande chiuse classe di controllo (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

Come si evince dai grafici, alla maggior parte degli studenti di entrambe le classi piace la matematica; essi poi reputano l'algebra la disciplina più facile e la geometria quella più difficile, dal momento che a detta loro lo studio di quest'ultima richiede molte capacità mnemoniche, osservative, astrattive e di ragionamento.
Tra le risposte date a tali domande, si trovano in particolare rilevanti le giustifi-

cazioni date da alcuni alunni della classe sperimentale al fatto che a loro piace la matematica:

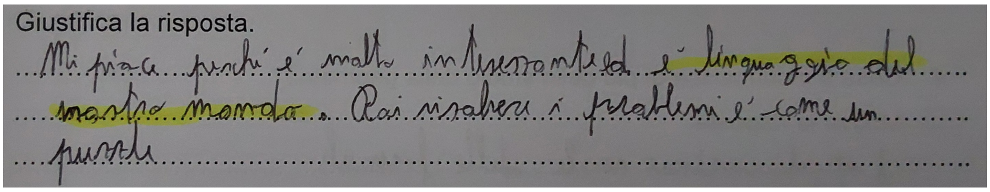

Giustifica la risposta.
Mi piace perché è molto interessante ed è linguaggio del nostro mondo. Poi risolvere i problemi è come un puzzle

Figura 5.20: Giustificazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

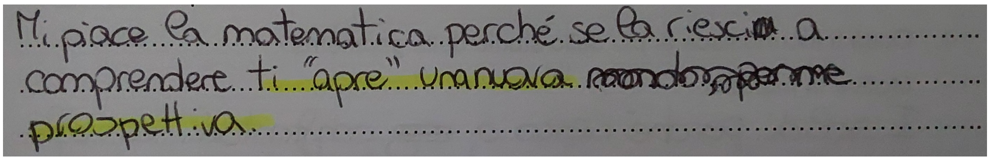

Mi piace la matematica perché se la riesci a comprendere ti "apre" una nuova prospettiva

Figura 5.21: Giustificazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

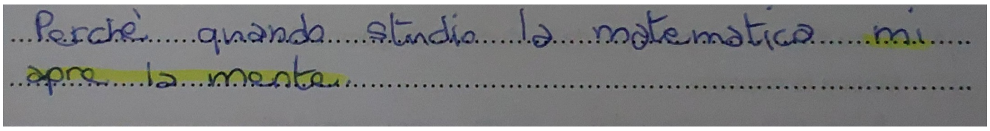

Perché quando studio la matematica mi apre la mente.

Figura 5.22: Giustificazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Per quanto concerne la domanda 7, si può notare come alla grande maggioranza degli alunni di entrambe le classi interesserebbe approfondire gli aspetti storici di alcuni argomenti affrontati in matematica; a tal proposito, di seguito si riportano alcune delle motivazioni più significative date dagli allievi:

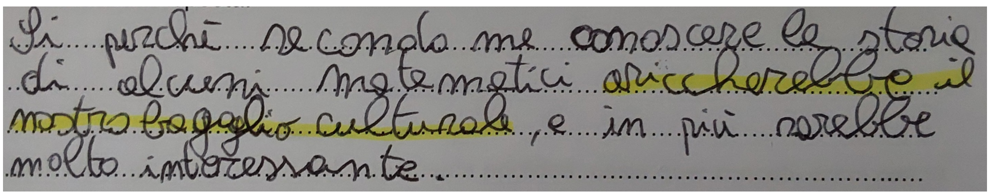

Sì perché secondo me conoscere le storie di alcuni matematici arricchirebbe il nostro bagaglio culturale, e in più sarebbe molto interessante.

Figura 5.23: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 7 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

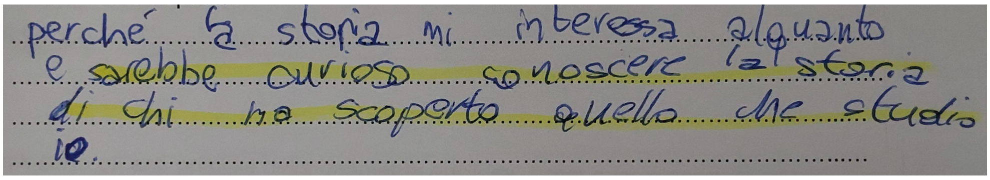

perché la storia mi interessa alquanto e sarebbe curioso conoscere la storia di chi ha scoperto quello che studio io

Figura 5.24: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 7 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

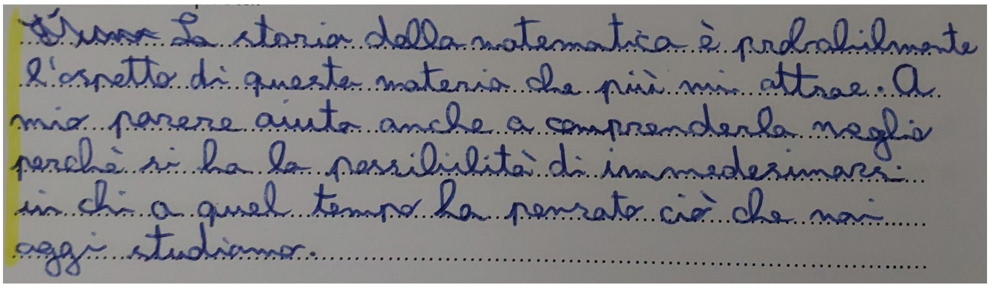

La storia della matematica è probabilmente l'aspetto di questa materia che più mi attrae. A mio parere aiuta anche a comprenderla meglio perché si ha la possibilità di immedesimarsi in chi a quel tempo ha pensato ciò che noi oggi studiamo.

Figura 5.25: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 7 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

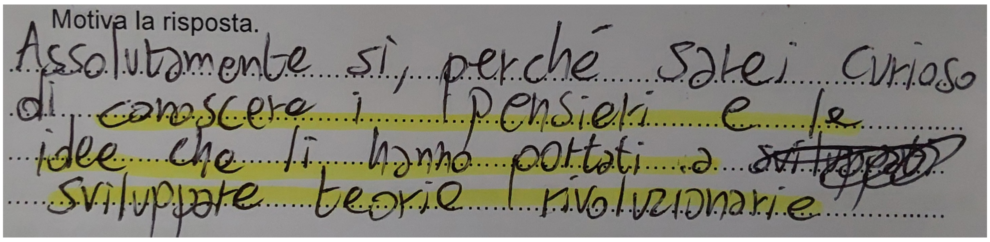

Motiva la risposta.
Assolutamente sì, perché sarei curioso di conoscere i pensieri e le idee che li hanno portati a sviluppare teorie rivoluzionarie

Figura 5.26: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 7 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Analizziamo ora le risposte date dalle due classi alla domanda 6, che mirava a sondare se gli studenti avessero già utilizzato per scopi didattici un software di geometria dinamica e se, a prescindere, fossero curiosi di farlo:

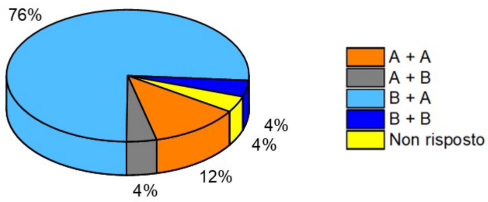


Figura 5.27: Risposte domanda 6 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

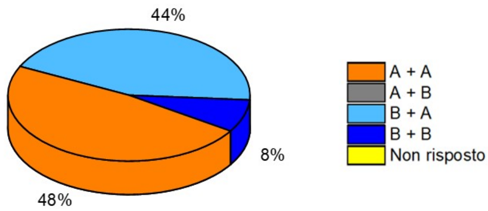


Figura 5.28: Risposte domanda 6 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Si osserva appunto che la maggioranza degli alunni della classe sperimentale durante gli studi precedenti non aveva mai sfruttato il software ma era curiosa di sperimentarlo; nella classe di controllo, invece, i diversi alunni che avevano già usato GeoGebra alla scuola secondaria di I grado erano comunque interessati ad adoperarlo ancora, in quanto tutti lo hanno ritenuto un valido strumento per migliorare l'apprendimento e la motivazione nei confronti della matematica.

Esaminiamo infine le due domande aperte della seconda parte del test.
La domanda 3 chiedeva agli studenti di scrivere cosa li incuriosisse maggiormente dello studio della geometria; le risposte più rimarchevoli sono riportate nel seguito:

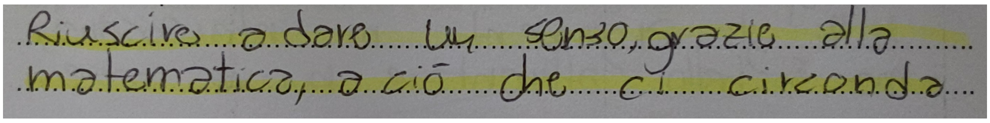

Riuscire a dare un senso, grazie alla matematica, a ciò che ci circonda

Figura 5.29: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

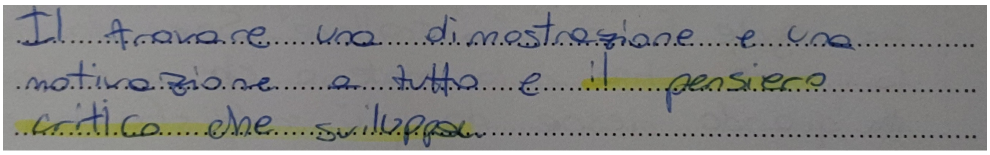

Il trovare una dimostrazione e una motivazione a tutto e il pensiero critico che sviluppa

Figura 5.30: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

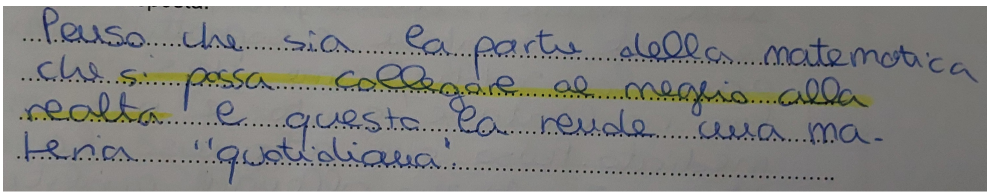

Penso che sia la parte della matematica che si possa collegare al meglio alla realtà e questo la rende una materia "quotidiana"

Figura 5.31: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

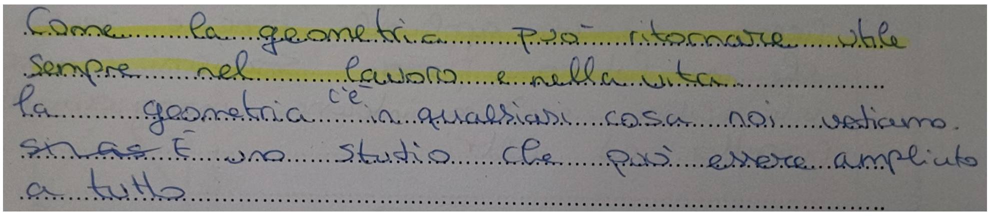


Figura 5.32: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

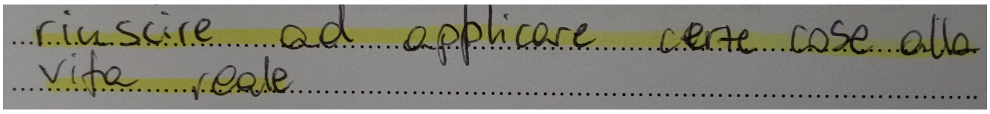


Figura 5.33: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

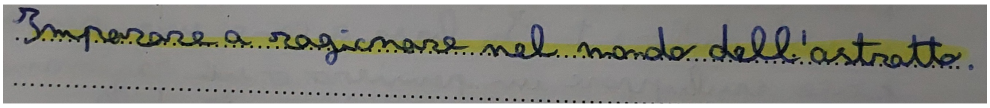


Figura 5.34: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

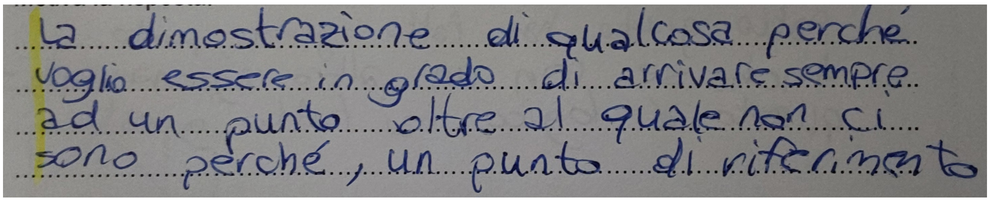


Figura 5.35: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario iniziale)

Da tali risposte si evince che gli alunni sono consapevoli di quanto la geometria possa contribuire a sviluppare le capacità mnemoniche e di ragionamento e il pensiero critico, e di come il suo studio offra molti collegamenti con la vita reale. Si trova infine la risposta in Figura 5.35 molto suggestiva: l'alunno è cosciente che grazie alla dimostrazione potrà convincersi in modo definitivo della veridicità o meno di un certo fatto, e che essa potrà rispondere a tutti i suoi "perché" della matematica.

Infine, nella domanda 4 si domandava agli alunni cosa li spaventasse maggiormente dello studio della geometria. In entrambe le classi, le risposte più diffuse sono state le seguenti:

- dover memorizzare, ricordare e infine utilizzare opportunamente definizioni, risultati teorici e formule;
- il livello di astrazione richiesto;
- comprendere e saper utilizzare autonomamente le diverse tecniche dimostrative e, più in generale, saper applicare correttamente i risultati teorici agli esercizi pratici;

- le difficoltà dovute al fatto che al liceo scientifico si tratterà la disciplina in maniera molto più approfondita rispetto a quanto fatto alla scuola secondaria di I grado e con un uso preponderante di simboli e termini tecnici.

Ulteriori informazioni circa gli esiti della sperimentazione didattica sono state reperite attraverso il **Questionario finale**, somministrato al termine del progetto sia nella classe sperimentale sia in quella di controllo con l'obiettivo di valutare le competenze raggiunte e gli eventuali progressi fatti a seguito del progetto messo in atto. Con tale test si desidera inoltre sondare l'opinione degli studenti riguardo ad alcuni aspetti della geometria, così da scoprire cosa li avesse maggiormente colpiti e in che misura le attività proposte potessero aver eventualmente favorito la comprensione dei diversi argomenti. In particolare, il giorno in cui è stato somministrato il questionario, i presenti erano 22 su 25 nella classe sperimentale e 26 su 26 nella classe di controllo.
Analizziamo dunque nel dettaglio i dati raccolti, che mostrano come la classe che ha svolto la sperimentazione abbia raggiunto complessivamente un più profondo livello di comprensione degli argomenti trattati.
Si riportano innanzitutto gli istogrammi relativi alle domande chiuse della prima parte del test, ossia quella che sondava i contenuti: dapprima si confrontano le risposte date dalle due classi, e poi la percentuale di risposte corrette ed errate:

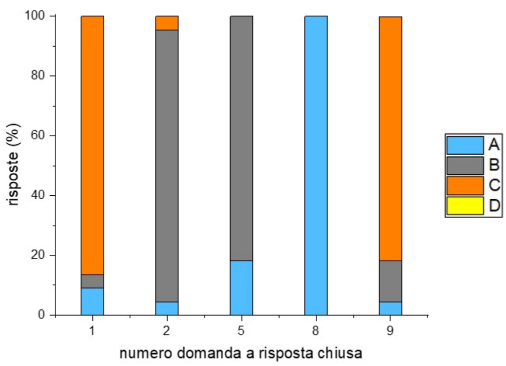


Figura 5.36: Risposte domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

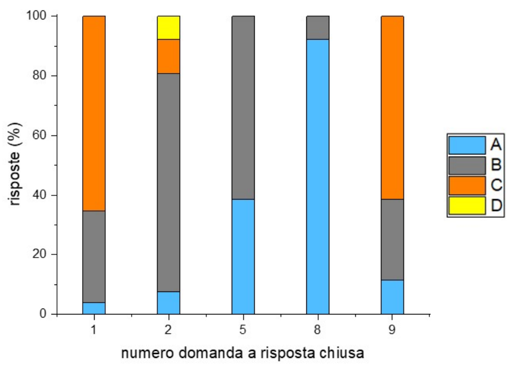


Figura 5.37: Risposte domande chiuse classe di controllo (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

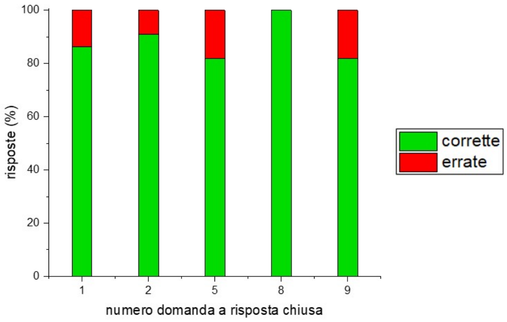


Figura 5.38: Risposte corrette/errate domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

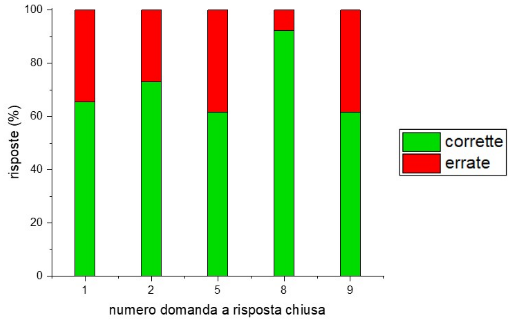


Figura 5.39: Risposte corrette/errate domande chiuse classe di controllo (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

Da tali grafici si evince come nelle domande 1, 2, 8 e 9, la grande maggioranza degli studenti abbia risposto correttamente in entrambe le classi, seppur con un risultato leggermente migliore nella classe sperimentale.
Nella domanda 5 poi, in cui si chiedeva se la dimostrazione proposta del fatto che due mediane di un triangolo non possano essere tra loro perpendicolari fosse corretta, si nota ancora un esito leggermente migliore della classe sperimentale rispetto a quella di controllo. Tuttavia, il dato che fa più riflettere è che, tra gli studenti che hanno risposto correttamente, ben 15 della classe sperimentale hanno portato un'ottima giustificazione (la dimostrazione non è corretta in quanto annovera un unico caso; per affermare con certezza un tale fatto occorrerebbe provarlo in infiniti triangoli), contro gli 8 della classe di controllo. Tale ottimo risultato porta a una promozione della presentazione di problemi in forma aperta e dell'uso del software di geometria dinamica, che tramite la funzione di trascinamento permette di esplorare figure e produrre congetture che devono poi essere validate tramite dimostrazione formale.

Esaminiamo ora i risultati riguardanti le domande aperte proposte.
La terza domanda aveva lo scopo di verificare che gli alunni sapessero cos'è un teorema; si riportano nel seguito le percentuali di risposte corrette, parzialmente corrette o incomplete ed errate date dalle due classi:

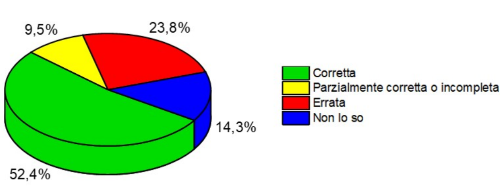


Figura 5.40: Risposte domanda 3 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

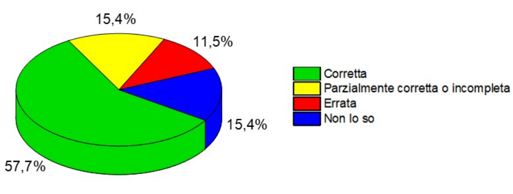


Figura 5.41: Risposte domanda 3 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Come si può notare, in questa domanda ha avuto risultati migliori, seppur di poco, la classe di controllo: 15 studenti hanno risposto correttamente, 4 in maniera superficiale ma comunque accettabile e 3 in modo errato, contro gli 11 alunni della classe sperimentale che hanno risposto correttamente, i 9 che hanno dato una risposta incompleta e i 5 che hanno sbagliato.

Passiamo ora ad analizzare i risultati della domanda 4, in cui si chiedeva agli allievi di dire cosa si intendesse con dimostrazione e le cui risposte sono riportate di sotto:

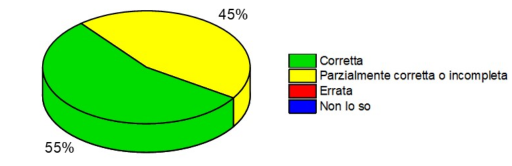


Figura 5.42: Risposte domanda 4 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

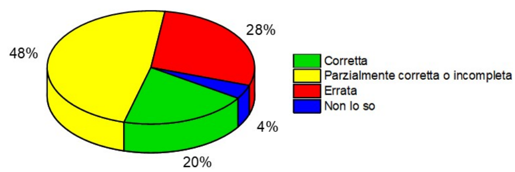


Figura 5.43: Risposte domanda 4 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

L'esito migliore delle risposte della classe sperimentale evidenzia come un approccio graduale alla dimostrazione, introdotta attraverso l'uso delle costruzioni geometriche, di qualche problema aperto e di un software di geometria dinamica, possa favorire una più proficua comprensione di tale concetto e stimolare l'interesse degli studenti verso la produzione di dimostrazioni formali.

Riportiamo poi i risultati relativi alla domanda 6, che voleva indagare il motivo per cui secondo gli studenti è importante dimostrare:

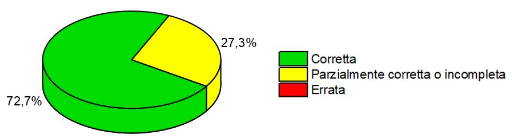


Figura 5.44: Risposte domanda 6 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

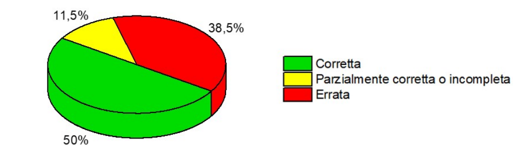


Figura 5.45: Risposte domanda 6 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Come si può osservare, un'ottima maggioranza di studenti della classe sperimentale ha compreso che dimostrare in matematica è necessario per convincere sé stessi e gli altri sulla veridicità di un fatto e per avere la certezza che un certo enunciato è vero. A tal scopo, la presentazione dei problemi aperti può aver aiutato gli alunni a comprendere questo importante messaggio. Nella classe di controllo, invece, soltanto l'11,5 % degli studenti ha dato tale risposta; la metà degli alunni ha comunque compreso l'utilità della dimostrazione, ma più come solo mezzo per sviluppare il pensiero critico e il ragionamento.

Indaghiamo infine le risposte, riportate nel seguito, date dagli allievi alla domanda 7, in cui si domandava loro di spiegare cosa si intendesse con sistema logico ipotetico-deduttivo:

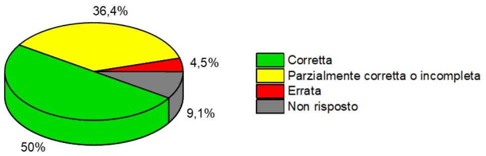


Figura 5.46: Risposte domanda 7 classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

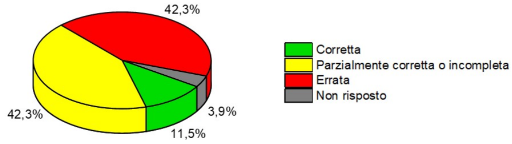


Figura 5.47: Risposte domanda 7 classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

La percentuale più alta di risposte corrette nella classe sperimentale, dove peraltro soltanto un alunno ha risposto in maniera errata contro gli 11 della classe di controllo, mette in luce come sia opportuno far comprendere questo tipo di ragionamento agli studenti ed evidenziare loro come esso sia alla base dello sviluppo della geometria piana: in tal senso, le costruzioni geometriche possono giocare un ruolo cruciale.

Passiamo ora ad investigare gli esiti della seconda parte del questionario, ossia quella che indagava l'atteggiamento degli alunni nei confronti della geometria e le loro opinioni riguardo il dimostrare.
Si riportano innanzitutto gli istogrammi relativi alle risposte date da entrambe le classi:

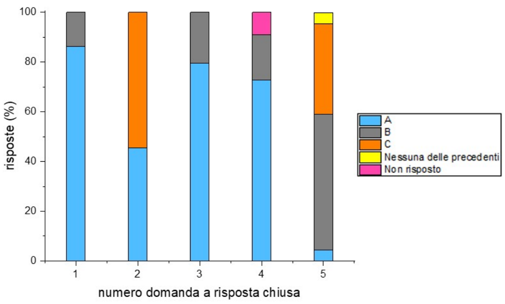


Figura 5.48: Risposte domande chiuse classe sperimentale (Fonte: grafico realizzato con Origin)

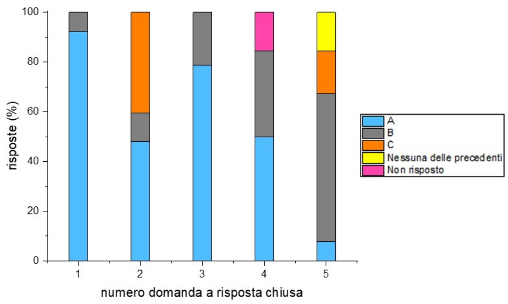


Figura 5.49: Risposte domande chiuse classe di controllo (Fonte: grafico realizzato con Origin)

Si può notare come le risposte siano pressoché simili in tutte le domande per gli studenti delle due classi.
In generale, molti di loro sono interessati ad approfondire lo studio della geometria, in quanto la reputano una disciplina stimolante, divertente, che offre spunti per collegamenti interdisciplinari e che apre la mente, favorendo il ragionamento. A tal proposito, si riporta la motivazione a questa domanda data da un alunno della classe sperimentale e ritenuta molto interessante da un punto di vista didattico:

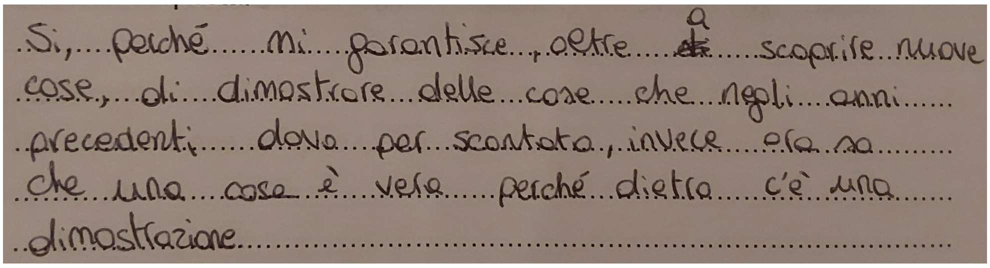

Si, perché mi garantisce, oltre a scoprire nuove cose, di dimostrare delle cose che negli anni precedenti dava per scontato, invece ora so che una cosa è vera perché dietro c'è una dimostrazione

Figura 5.50: Motivazione data da un alunno della classe sperimentale alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

L'allievo dimostra di aver compreso che i molti risultati che alla Scuola Secondaria di I grado erano soltanto stati enunciati come veri senza essere stati giustificati, debbano in realtà essere validati da una dimostrazione.

Per quanto concerne la domanda successiva, che mirava ad indagare quale aspetto della geometria euclidea gli studenti trovassero più difficile, si può osservare che in entrambe le classi essi faticano principalmente a memorizzare risultati teorici e a svolgere autonomamente esercizi dimostrativi. Tra le motivazioni più diffuse, ci sono la difficoltà nel ricordare molte definizioni e teoremi e di comprendere come utilizzarli opportunamente negli esercizi applicativi, oltre il problema di disegnare correttamente la figura.

Le risposte alla domanda 3 evidenziano che alla maggior parte degli alunni di entrambe le classi piace dimostrare; nel seguito si riportano alcune delle più interessanti motivazioni date a tal proposito:

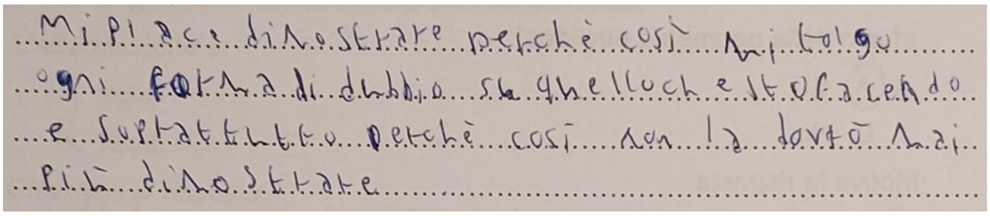

Mi piace dimostrare perchè così mi tolgo ogni forma di dubbio su quello che sto facendo e soprattutto perchè così non la dovrò mai più dimostrare

Figura 5.51: Motivazione data da un alunno della classe sperimentale alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

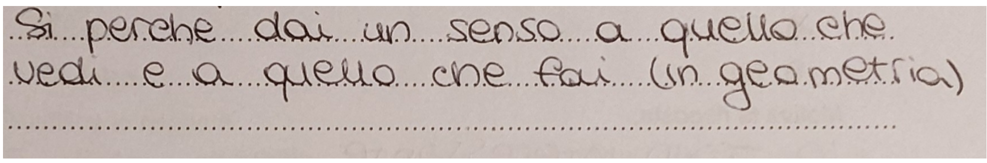
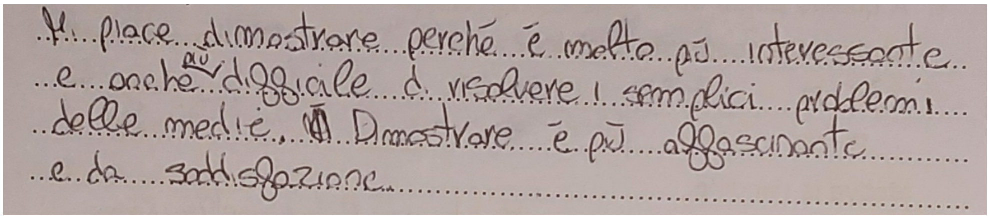
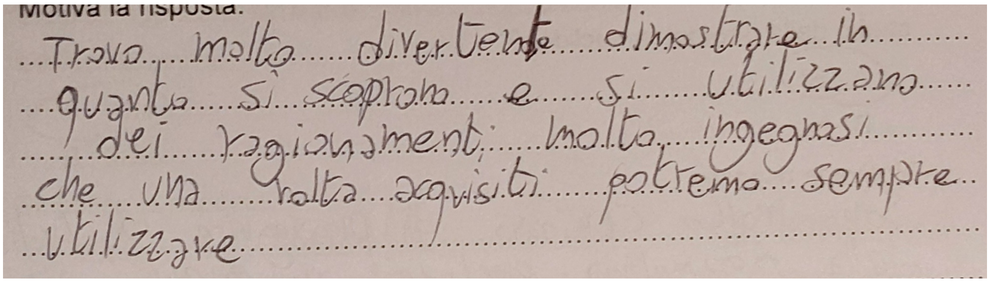

Si perche dai un senso a quello che vedi e a quello che fai (in geometria)

Figura 5.52: Motivazione data da un alunno della classe sperimentale alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Mi piace dimostrare perché è molto più interessante e anche più difficile di risolvere i semplici problemi delle medie. Dimostrare è più affascinante e da soddisfazione.

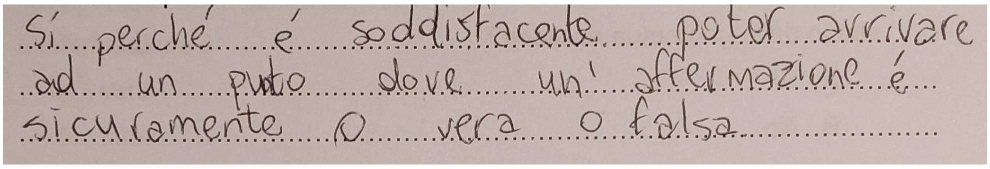
Figura 5.53: Motivazione data da un alunno della classe sperimentale alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Motiva la risposta.

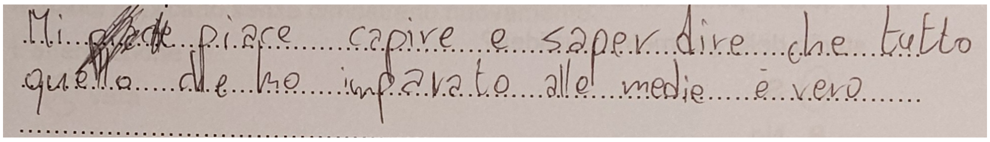
Trovo molto divertente dimostrare in quanto si scoprono e si utilizzano dei ragionamenti molto ingegnosi che una volta acquisiti potremo sempre utilizzare

Figura 5.54: Motivazione data da un alunno della classe di controllo alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Sì perché è soddisfacente poter arrivare ad un punto dove un' affermazione è sicuramente o vera o falsa

Figura 5.55: Motivazione data da un alunno della classe di controllo alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Mi piace capire e saper dire che tutto quello che ho imparato alle medie è vero

Figura 5.56: Motivazione data da un alunno della classe di controllo alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

La quarta domanda mirava poi a scoprire se per gli allievi fosse sempre utile dimostrare una proposizione: come emerge dagli istogrammi in Figura 5.48 e 5.49, nelle risposte si nota un esito migliore della classe sperimentale rispetto a quella di controllo. Inoltre, 8 studenti della classe sperimentale, contro i 4 della classe di controllo, hanno giustificato la risposta affermativa con il fatto che la dimostrazione valida un enunciato e convince sé stessi e gli altri di tale verità. In tal senso, possiamo affermare che la presentazione di qualche problema aperto tramite l'utilizzo di un software di geometria dinamica può aiutare gli allievi a comprendere questo concetto fondamentale.

Infine, la domanda 5 si proponeva di comprendere quale aspetto del dimostrare gli studenti ritenessero più difficoltoso: alla maggior parte di loro risulta complicato capire quali "ingredienti" sono da sfruttare nella dimostrazione, dal momento che i molti risultati sono da applicare ciascuno in un preciso contesto. Inoltre, alcuni alunni faticano a comprendere che i teoremi dati per veri alla Scuola Secondaria di I grado, ora non possono essere sfruttati se non sono stati prima dimostrati.

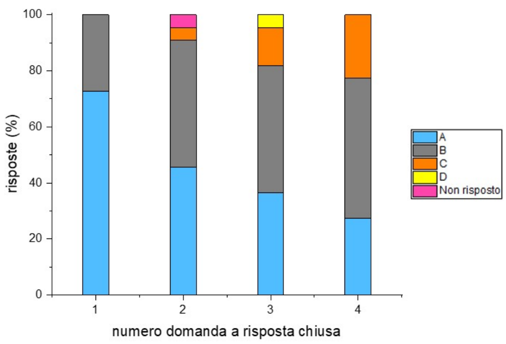


Figura 5.57: Risposte domande chiuse classe sperimentale (Fonte: istogramma realizzato con Origin)

Da ultimo, nell'istogramma a fianco raccogliamo le risposte date dalla classe sperimentale alla terza parte del test, inserita come una sorta di questionario di gradimento con lo scopo di raccogliere l'opinione degli allievi riguardo gli argomenti trattati durante il progetto e le modalità con cui questi sono stati introdotti loro.

In merito alla prima domanda, si può notare come la maggioranza degli studenti abbia apprezzato l'approccio storico alla geometria euclidea, potendo in questo modo raggiungere una comprensione più profonda delle origini di tale disciplina rispetto a coloro che hanno svolto il programma in maniera tradizionale, senza alcuna trattazione storica. A tal proposito, nel seguito si riportano le motivazioni portate da alcuni alunni:

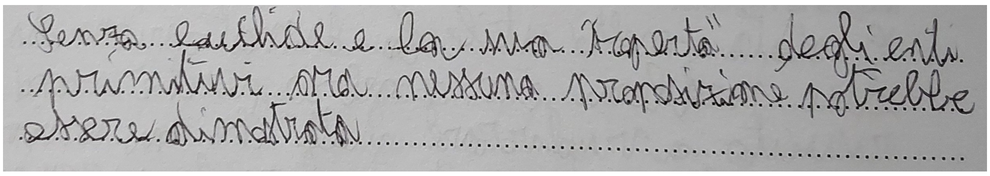


Figura 5.58: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

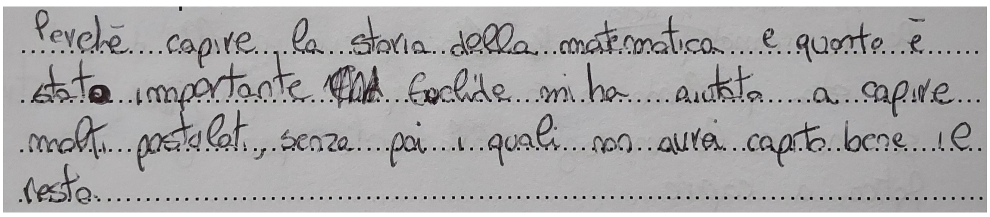
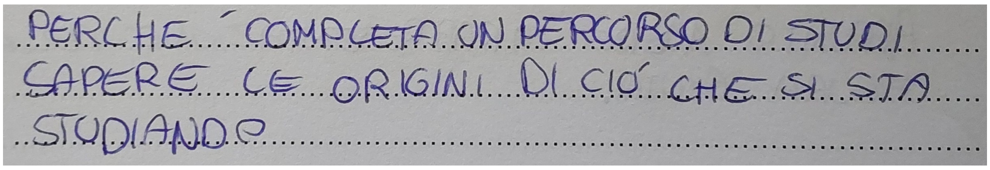
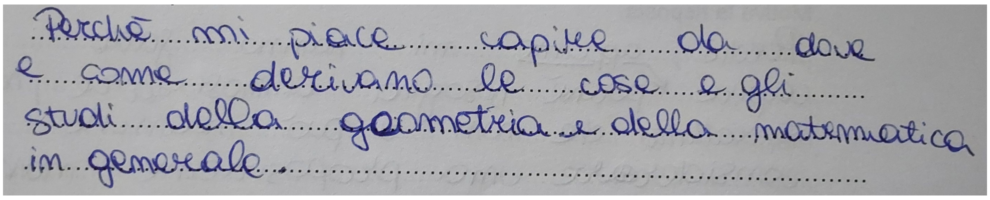


Figura 5.59: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



PERCHE´ COMPLETA UN PERCORSO DI STUDI SAPERE LE ORIGINI DI CIO´ CHE SI STA STUDIANDO

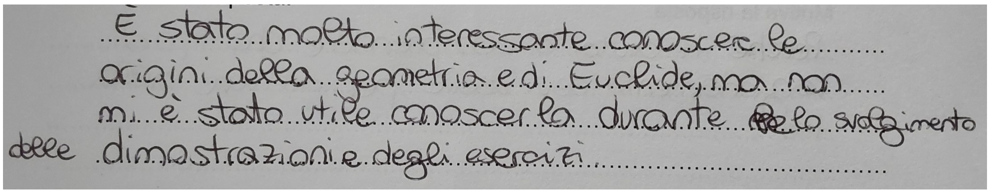
Figura 5.60: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Perchè mi piace capire da dove e come derivano le cose e gli studi della geometria e della matematica in generale.

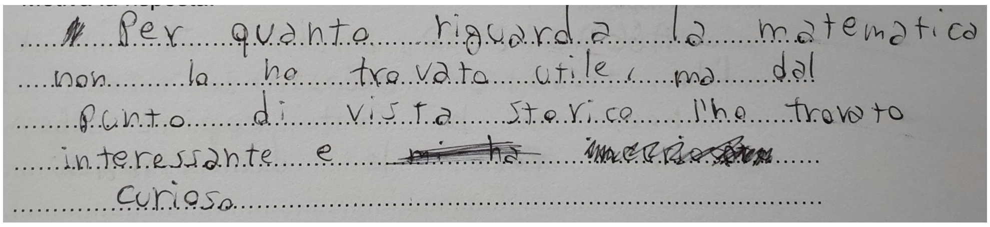
Figura 5.61: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

Cinque alunni non hanno invece trovato utile questo tipo di approccio, sostenendo comunque che la lezione storica introduttiva è apparsa interessante, come si evince da alcune delle loro motivazioni:



È stato molto interessante conoscere le origini della geometria e di Euclide, ma non mi è stato utile conoscerla durante lo svolgimento delle dimostrazioni e degli esercizi

Figura 5.62: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)



Per quanto riguarda la matematica non la ho trovato utile, ma dal punto di vista storico l'ho trovato interessante e ~~mi ha~~ curioso

Figura 5.63: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 1 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

Per incentivare maggiormente l'uso della storia si potrebbe pensare ad un suo utilizzo più frequente nella didattica della matematica, in modo tale da convincere anche gli studenti più scettici di come essa possa rappresentare un'arma in più a loro favore per comprendere la ragione di alcuni ragionamenti matematici.

Gli esiti delle successive tre domande evidenziano invece come l'impiego delle costruzioni geometriche e dei problemi aperti per mezzo del software di geometria dinamica abbia avuto gli esiti sperati: gli studenti, oltre ad aver apprezzato le diverse attività

laboratoriali, sono stati aiutati nella visualizzazione di concetti fondamentali e nello svolgimento degli esercizi. Soltanto una stretta minoranza ha trovato poco utile e un alunno per nulla necessario l'uso di GeoGebra a tal scopo, affermando che essi avrebbero compreso gli argomenti anche se si fossero affrontati in maniera tradizionale, pur riconoscendo le potenzialità del software.
Si ritiene dunque interessante riportare le motivazioni date da alcuni alunni a queste ultime domande del questionario:

Quanto hai trovato utile l'uso delle costruzioni geometriche e di GeoGebra per introdurre gli enti primitivi, i postulati e il concetto di dimostrazione in geometria?

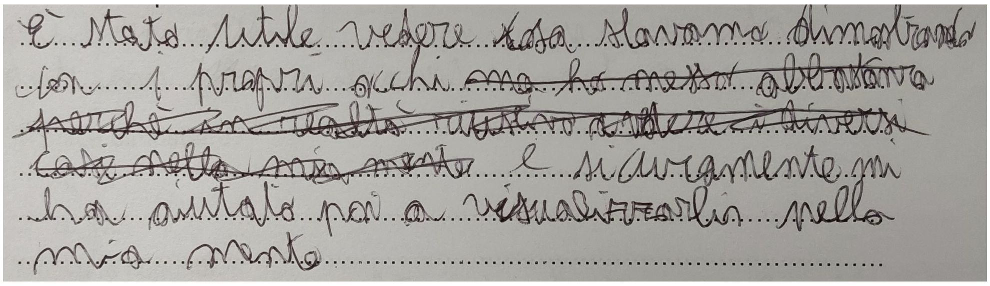

È stato utile vedere cosa stavamo dimostrando con i propri occhi ~~ma ho messo all'ottava perché in realtà riuscivo a vedere i diversi casi nella mia mente~~ e sicuramente mi ha aiutato poi a visualizzarli nella mia mente

Figura 5.64: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

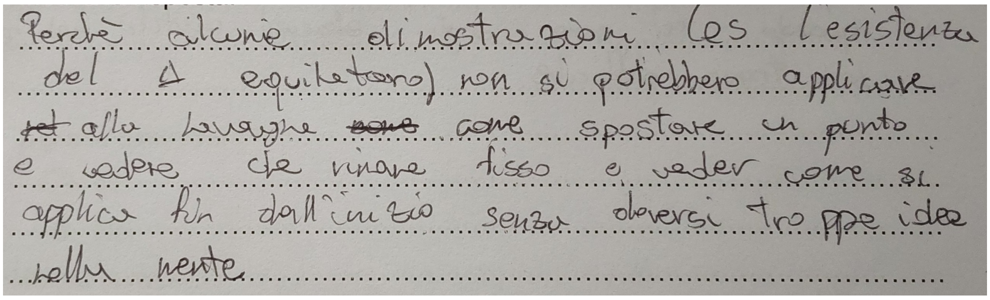

Perché alcune dimostrazioni (es l'esistenza del △ equilatero) non si potrebbero applicare ~~ret~~ alla lavagna ~~come~~ come spostare un punto e vedere che rimane fisso e veder come si applica fin dall'inizio senza doversi troppe idee nella mente

Figura 5.65: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

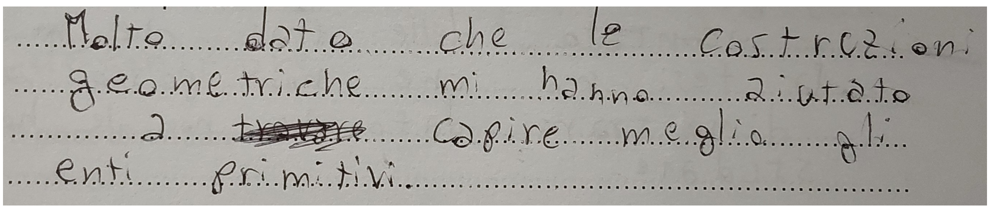

Molto dato che le costruzioni geometriche mi hanno aiutato a ~~trovare~~ capire meglio gli enti primitivi.

Figura 5.66: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

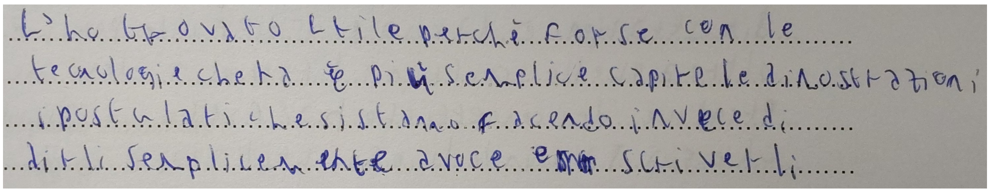

L'ho trovato utile perché forse con le tecnologie che ta è più semplice capire le dimostrazioni i postulati che esistono facendo invece di dirli semplicemente a voce e scriverli

Figura 5.67: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

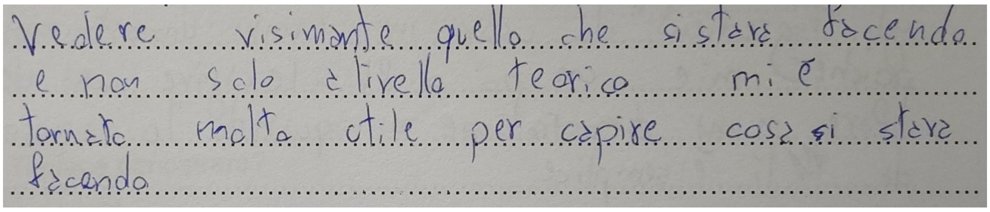

Vedere visimante quello che si stava facendo e non solo a livello teorico mi è tornato molto utile per capire cosa si stava facendo

Figura 5.68: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

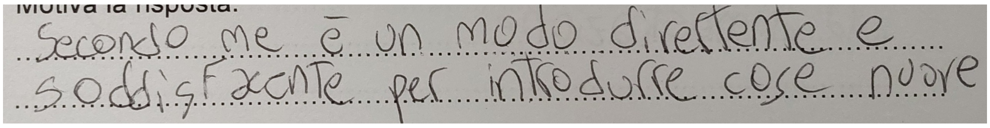

Motiva la risposta:
Secondo me è un modo direttente e soddisfacente per introdurre cose nuove

Figura 5.69: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 2 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

Quanto hai trovato utile la presentazione dei due problemi aperti con l'uso di GeoGebra allo scopo di comprendere l'importanza della dimostrazione?

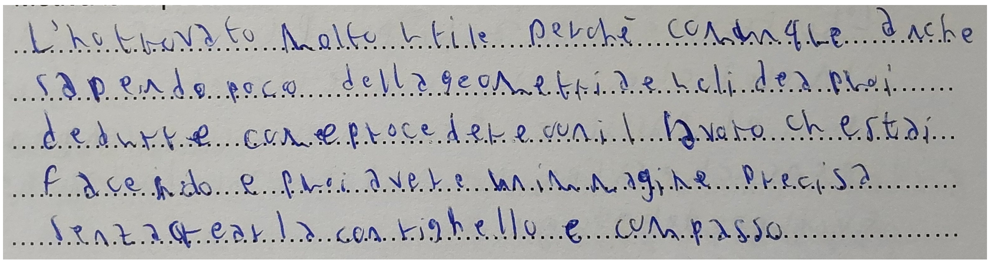

L'ho trovato molto utile perché comunque anche sapendo poco della geometria euclidea puoi dedurre come procedere con il lavoro che stai facendo e puoi avere un'immagine precisa senza farla con righello e compasso

Figura 5.70: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

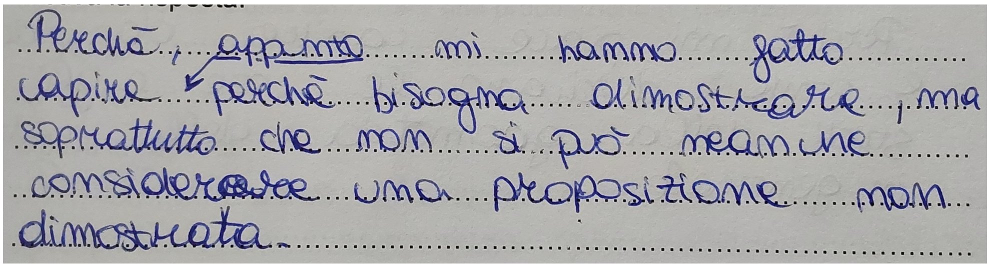

Perché, appunto, mi hanno fatto capire perché bisogna dimostrare, ma soprattutto che non si può neanche considerare una proposizione non dimostrata.

Figura 5.71: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

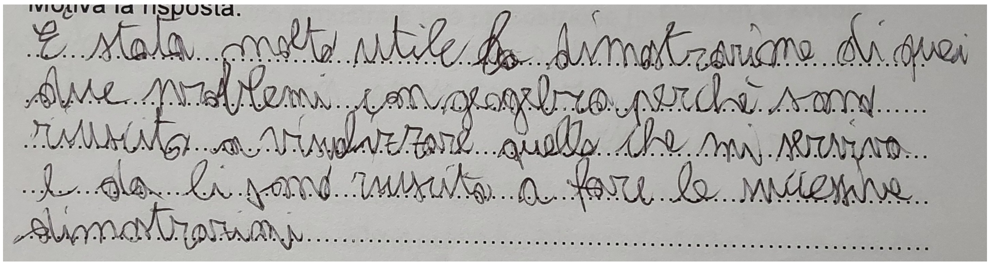

Motiva la risposta.
È stata molto utile la dimostrazione di quei due problemi con geogebra perché sono riuscita a visualizzare quello che mi serviva e da lì sono riuscita a fare le necessarie dimostrazioni

Figura 5.72: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

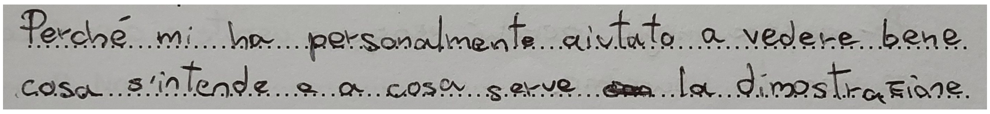

Perché mi ha personalmente aiutato a vedere bene cosa s'intende e a cosa serve la dimostrazione.

Figura 5.73: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

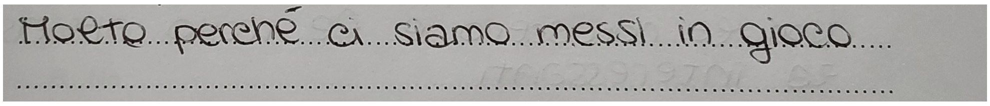

Molto perché ci siamo messi in gioco

Figura 5.74: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

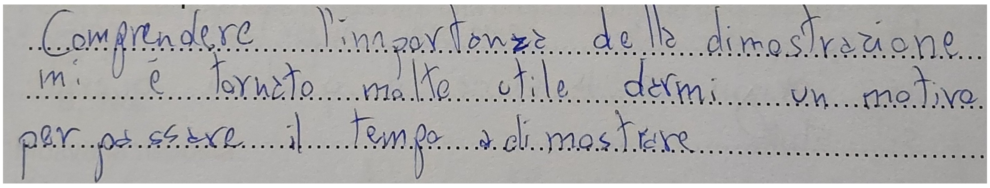

Comprendere l'importanza della dimostrazione mi è tornato molto utile darmi un motivo per passare il tempo a dimostrare

Figura 5.75: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

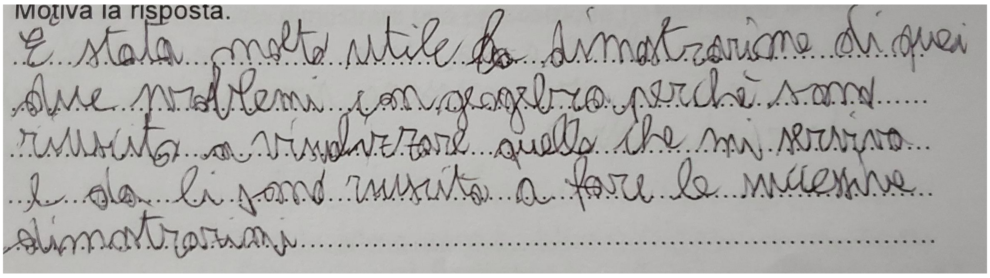

Motiva la risposta.
È stata molto utile ~~la~~ dimostrazione di quei due problemi con geogebra perchè sono riuscita a visualizzare quello che mi serviva e da lì sono riuscita a fare le successive dimostrazioni

Figura 5.76: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 3 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

Quanto hai trovato utile l'uso di GeoGebra per intuire le dimostrazioni del teorema del triangolo isoscele e degli esercizi di applicazione?

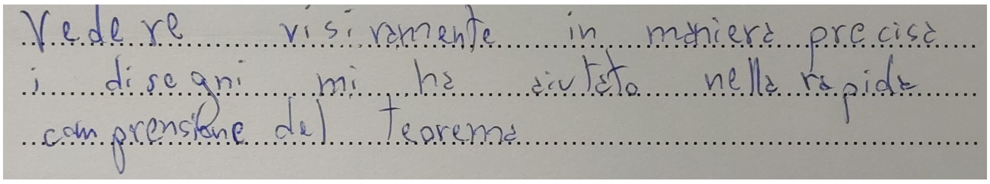

Vedere visivamente in maniera precisa i disegni mi ha aiutato nella rapida comprensione del teorema

Figura 5.77: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 4 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

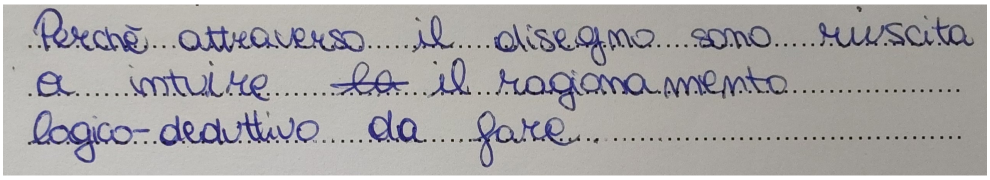

Perchè attraverso il disegno sono riuscita a intuire ~~la~~ il ragionamento logico-deduttivo da fare.

Figura 5.78: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 4 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

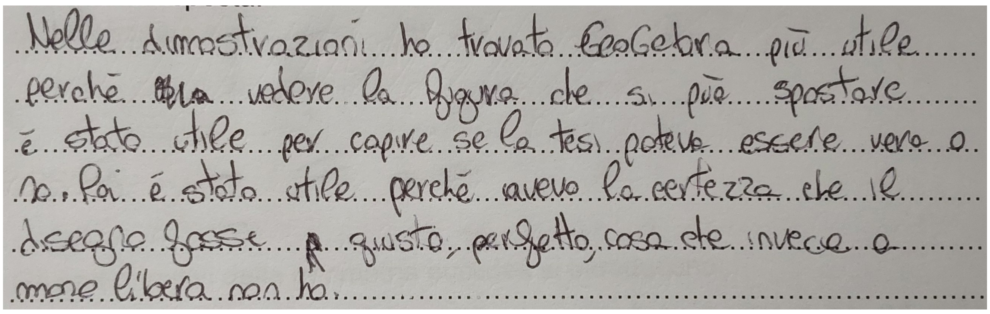

Nelle dimostrazioni ho trovato GeoGebra più utile perchè vedere la figura che si può spostare è stato utile per capire se la tesi poteva essere vera o no. Poi è stato utile perchè avevo la certezza che il disegno fosse giusto, perfetto, cosa che invece a mano libera non ho.

Figura 5.79: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 4 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

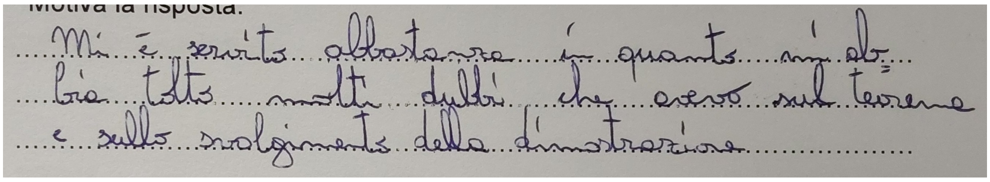

Motiva la risposta:
Mi è servito abbastanza in quanto mi ab-
bia tolto molti dubbi che avevo sul teorema
e sullo svolgimento della dimostrazione

Figura 5.80: Motivazione data da un alunno alla risposta alla domanda 4 (Fonte: scannerizzazione delle risposte degli studenti al questionario finale)

5.2 Osservazioni e riflessioni finali

Alla luce dei risultati conseguiti nel questionario finale e i dati più generici raccolti, possiamo affermare che il progetto di sperimentazione didattica si è rivelato efficace e ha restituito l'immagine di una classe che ha appreso i contenuti dell'unità didattica e ha sviluppato competenze fondamentali per il proseguimento del percorso scolastico, e che è rimasta particolarmente interessata al tema della dimostrazione in geometria.

In relazione alla prima domanda di ricerca, ossia se la storia della matematica potesse rivestire un ruolo nel processo di insegnamento e apprendimento della geometria euclidea, possiamo dirci abbastanza soddisfatti: dai risultati emersi nel questionario finale, essa sembra aver avuto una grande valenza culturale e aver agevolato gli alunni a raggiungere un più profondo livello di comprensione della natura logico-deduttiva di tale disciplina, come testimoniano anche le risposte date da alcuni allievi e riportate in Figura 5.58, 5.59, 5.60 e 5.61.
Molto positive si sono invece rivelate le osservazioni effettuate durante le attività laboratoriali, che hanno favorito negli studenti l'apprendimento e la comprensione degli argomenti trattati. Possiamo quindi concludere che la seconda e la terza domanda di ricerca che ci eravamo posti, ossia se il software di geometria dinamica potesse aiutare gli alunni a raggiungere un più profondo livello di comprensione della natura logico-deduttiva della geometria euclidea e a comprendere l'importanza e la necessità della dimostrazione, ha avuto una risposta più che positiva: GeoGebra infatti, oltre ad aumentare la motivazione e stimolare l'interesse per la disciplina, ha permesso agli studenti di acquisire maggior consapevolezza di cosa significhi e del perché sia necessario dimostrare in matematica.

Si ritiene infine opportuno riflettere brevemente sul riscontro molto positivo avuto dallo studente ipovedente della classe sperimentale: pur avendo avuto numerose difficoltà in matematica, tanto da presentare un voto insufficiente in pagella alla fine del primo periodo, egli ha partecipato attivamente alle attività laboratoriali, durante le quali ha utilizzato un pc per ingrandire le immagini e le schede di lavoro, ed è apparso coinvolto e motivato. Questo atteggiamento propositivo ha poi trovato corrispondenza nelle risposte del questionario finale, tutte corrette o parzialmente corrette. Egli ha inoltre trovato molto utile l'uso del software per gli scopi sopra descritti, dal momento che grazie a GeoGebra è riuscito a visualizzare concetti che altrimenti sarebbero risultati per lui troppo astratti e quindi difficilmente comprensibili.

Va comunque tenuto presente che la sperimentazione è stata svolta su un piccolo campione di studenti, per cui non è stato possibile valutare il progetto nelle molteplici realtà scolastiche esistenti.
Sarebbe interessante allargare la sperimentazione ad indirizzi di studio differenti, al fine di verificare se le conclusioni cui si giunge sono le medesime: alla luce dell'esperienza vissuta, sarebbe ad esempio importante presentare tale progetto in classi in cui sono inseriti alunni con disturbi dell'apprendimento, per vedere se effettivamente l'utilizzo del software di geometria dinamica possa aiutarli a comprendere concetti teorici altrimenti difficilmente assimilabili.

Conclusioni

In questo elaborato si è cercato di approfondire la tematica relativa all'introduzione del concetto di dimostrazione nell'insegnamento e apprendimento della geometria nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado.
In particolare, si è innanzitutto presentato un excursus storico volto ad indagare le origini della geometria nelle civiltà antiche e come essa nel periodo ellenistico della cultura greca si sia elevata a scienza rigorosa. Ci si è poi soffermati sulla figura di Euclide, a cui va appunto il merito di aver reso tale disciplina una scienza assiomatico-deduttiva, i cui enunciati *si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio*. [10] In tale contesto si è in particolare approfondito il Libro I degli *Elementi*, presentando la dimostrazione di alcune proposizioni ritenute interessanti ai fini didattici della sperimentazione.
Nel capitolo successivo si sono dimostrate alcune proposizioni, tratte dai primi sei Libri degli *Elementi* di Euclide, che si presentano come problemi in forma costruttiva. Si è poi analizzata la teoria della costruibilità con riga e compasso, mostrando che i tre problemi classici dell'antichità, ossia la quadratura del cerchio, la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo, non sono risolvibili con riga e compasso. Si è proseguito esaminando la teoria della costruibilità con il solo compasso, con lo scopo di provare che tutte le costruzioni con riga e compasso possono essere eseguite con il solo uso del compasso euclideo. Infine, si sono presentati i principali risultati concernenti la teoria della costruibilità con l'uso della sola riga.
Questi primi due capitoli sono da considerarsi una sorta di impalcatura matematica grazie alla quale poter sviluppare un progetto didattico, che occupa la seconda parte della tesi e che si è implementato in una classe prima liceo scientifico matematico del Liceo Scientifico E. Curiel di Padova.
Prima di descrivere nei dettagli tale progetto, si è evidenziata l'importanza del ruolo ricoperto dalla geometria euclidea in ambito disciplinare e all'interno delle *Indicazioni Nazionali/Linee Guida*, proponendo una breve trattazione delle questioni didattico-metodologiche relative a un'introduzione efficace del concetto di dimostrazione nel primo biennio della Scuola Secondaria di II grado.
La sperimentazione didattica, le cui domande di ricerca trovano la loro origine proprio all'interno delle questioni didattiche approfondite nel Capitolo 3, vuole infatti proporre un approccio innovativo all'introduzione del concetto di dimostrazione a scuola.
Nel dettaglio, si è inizialmente scelto di introdurre la geometria piana agli studenti con un approccio storico, riconoscendone la valenza culturale. Il progetto è poi

continuato, per la durata complessiva di circa due mesi e mezzo, alternando lezioni frontali ad attività laboratoriali di gruppo con l'uso del software di geometria dinamica.
Complessivamente, la sperimentazione didattica si è rivelata molto efficace: i dati raccolti attraverso il questionario finale e le osservazioni svolte nel corso del progetto hanno evidenziato un aumentato interesse degli studenti nei confronti dell'attività dimostrativa e una maggiore consapevolezza della necessità della dimostrazione, raggiunta anche grazie alla presentazione di qualche problema in forma aperta tramite GeoGebra. Questa attività laboratoriale sembra essere infatti un ottimo strumento per rendere più motivante e stimolante il processo dimostrativo, dal momento che facilita l'esplorazione e la produzione di congetture. L'impiego delle costruzioni geometriche eseguite con il software ha invece favorito la comprensione da parte degli allievi dei concetti di ente primitivo, di postulato e di dimostrazione. Al termine della sperimentazione gli alunni sembrano quindi aver riconosciuto le potenzialità e i vantaggi dell'utilizzo del software di geometria dinamica per visualizzare e conoscere più approfonditamente i concetti presentati.
È infine emerso che l'uso della storia ha portato in alcuni studenti una comprensione più approfondita e consapevole degli argomenti trattati. Questo risultato potrebbe essere indice della necessità di incentivare l'uso della storia all'interno dell'insegnamento della matematica: in tal senso l'insegnante potrebbe pensare ad un utilizzo più frequente di essa all'interno delle sue lezioni, in modo tale da convincere anche gli studenti più scettici di come essa possa rappresentare un'arma in più a loro favore per comprendere la ragione di alcuni fondamentali ragionamenti matematici.
Alla luce di questi dati, possiamo quindi affermare che la sperimentazione ha avuto un esito positivo, portando in generale a dei miglioramenti. La stessa docente della classe, la professoressa Sandra Bortolami, si è mostrata entusiasta dello svolgimento della sequenza didattica, avendo potuto apprezzare un ottimo livello di partecipazione da parte degli studenti e un loro atteggiamento molto propositivo nell'affrontare autonomamente gli esercizi dimostrativi.

Alla luce di tali considerazioni, possiamo affermare che le costruzioni geometriche e i problemi proposti in forma aperta con l'uso di un software di geometria dinamica rappresentano un importante strumento didattico per introdurre il concetto di dimostrazione in geometria, e per questo meriterebbero maggior spazio nella realtà scolastica odierna.

Si desidera concludere questo elaborato con una riflessione di carattere personale. La sperimentazione didattica ha sicuramente permesso di raccogliere importanti informazioni e dati utili ai fini di questa tesi di Laurea Magistrale, ma essa non ha assunto soltanto una valenza accademica. É stata infatti anche un'esperienza molto formativa dal punto di vista professionale, in quanto ci si è potuti approcciare al mondo dell'insegnamento mettendosi in gioco in prima persona e comprendendo che *"imparare è esperienza"*, come sosteneva il grande Albert Einstein. Insegnare è inoltre un continuo scambio tra dare e ricevere: tu fornisci nozioni e insegnamenti agli studenti, che ricambiano donando a te sé stessi, la loro voglia di vivere, la loro energia e una sana vivacità che ti riempiono d'amore e ti spronano ad apprezzare l'unicità insita in ognuno di loro. Implementare il progetto in classe è stato quindi molto arricchente anche dal punto di vista umano, oltre che un'occasione per comprendere più profondamente sé stessi e prendere maggiore consapevolezza dei propri punti di forza e qualità, così come dei propri limiti e debolezze.
È in quest'ottica che si è scelta come una delle due citazioni introduttive a questa tesi la frase dello scrittore Daniel Pennac: *"Forse è questo insegnare: fare in modo che a ogni lezione scocchi l'ora del risveglio"*. Si condividono appieno queste parole, che vogliono essere un augurio affinché durante le ore di lezione sia studenti sia docenti possano assistere ad una sorta di risveglio interiore, grazie al quale maturare e crescere insieme a livello professionale e, soprattutto, umano.
La prima citazione è invece la frase del matematico e fisico Evangelista Torricelli con cui si è scelto di aprire il progetto in classe, allo scopo di motivare gli alunni allo studio della geometria: *"La geometria sola, fra le discipline liberali, esercita e acuisce l'ingegno"*. Le parole sono un invito a prendere coscienza del fatto che questa materia contribuisce a sviluppare un'attitudine al ragionamento attraverso esercizi dimostrativi che per essere risolti richiedono capacità intuitive e astrattive. Agli allievi non si è nascosto il fatto che tale disciplina porta con sé alcune difficoltà, ma si è cercato di far comprendere loro che sarà proprio grazie a tali scogli che essi forgeranno un pensiero critico che potranno poi utilizzare anche nella vita quotidiana.

Appendice A

Materiali utilizzati per il progetto

La presente Appendice raccoglie i materiali utilizzati durante la sperimentazione del progetto in una classe Prima Liceo Scientifico matematico del Liceo Scientifico E. Curiel di Padova.

In ordine è possibile consultare i seguenti file:

- *Questionario iniziale*, somministrato alla classe sperimentale durante la prima attività;
- *Presentazione in Power Point di introduzione storica alla geometria euclidea*, utilizzato nella prima parte della seconda attività;
- *Presentazione in Power Point per introdurre gli enti primitivi e i primi tre postulati della geometria euclidea*, utilizzato sempre nella seconda attività;
- *Scheda di lavoro 1*, utilizzata per il lavoro a gruppi a conclusione della seconda attività;
- *Scheda di lavoro 2*, assegnata agli studenti come compito per casa e successivamente corretta in classe (terza attività);
- *Scheda di lavoro 3*, utilizzata nella terza attività come esperienza laboratoriale con l'uso del software GeoGebra;
- *Presentazione Power Point sulle costruzioni geometriche*;
- *Scheda di lavoro 4*, utilizzata nella quinta attività come lavoro a gruppi con l'uso GeoGebra;
- *Presentazione in Power Point sulla dimostrazione* (*in geometria*);
- *Questionario finale*, somministrato alla classe sperimentale come ultima attività del progetto.

Seguono i file sopra indicati, secondo l'ordine in cui sono stati presentati alla classe.

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Dipartimento di Matematica Tullio Levi Civita - Università degli Studi di Padova

PROGETTO DI TESI DIDATTICA

STUDENTESSA: ANDRIGO GIOVANNA

QUESTIONARIO INIZIALE

Rispondi alle seguenti domande.

N.B. Il questionario è anonimo.

<u>PARTE PRIMA</u>

1. In che epoca la geometria raggiunge il suo massimo sviluppo?
   A. Nell'Antico Egitto, in età egizia (3900 a.C. - 343 a.C.)
   B. Nel periodo ellenistico della cultura greca (323 a.C. - 31 a.C.)
   C. In Europa, in età moderna (XV - XVIII secolo d.C.)
   D. Non lo so.

2. Cita, se lo ricordi, il nome di un personaggio che ha contribuito alla fioritura della geometria:
   ……………………………………………………………………………………………………..

3. Quali sono gli enti primitivi della geometria euclidea, ossia quei concetti di cui non si dà la definizione?
   A. Retta, piano, spazio
   B. Assioma, teorema, dimostrazione
   C. Punto, retta, piano
   D. Non lo so.

4. Cos'è un teorema?
   A. Una proposizione vera, che va dimostrata
   B. Una proposizione vera, che non serve dimostrare
   C. Una proposizione falsa
   D. Non lo so.

5. Che cos'è un assioma (postulato)?
   A. Una proposizione vera, che va dimostrata
   B. Una proposizione vera, che non serve dimostrare
   C. Una proposizione falsa
   D. Non lo so.

   Scrivi nel seguito almeno un assioma della geometria euclidea che ricordi:
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..

6. Che cos'è per te una dimostrazione?
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..
   ……………………………………………………………………………………………..

7. Quali sono le nozioni base della geometria euclidea, ossia il "punto di partenza" da cui poi si sviluppa tutto lo studio della geometria?
   A. Teoremi e dimostrazioni
   B. Definizioni
   C. Concetti primitivi e assiomi (postulati)
   D. Non lo so.

8. **Disegna** a mano libera il triangolo equilatero di lato il segmento AB, esplicitando e giustificando a fianco tutti i passaggi che fai.

9. **Costruisci** con riga e compasso (come faresti in disegno tecnico) il triangolo equilatero di lato il segmento AB, esplicitando e giustificando a fianco tutti i passaggi che fai.

Qual è la differenza rispetto alla domanda precedente?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

10. La proposizione "L'asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB" è:
    A. Un assioma (postulato)
    B. Una definizione
    C. Un teorema
    D. Non lo so.

11. La proposizione "Un triangolo è isoscele se (almeno) due suoi **angoli** sono congruenti" è:
    A. Un assioma (postulato)
    B. Una definizione
    C. Un teorema
    D. Non lo so.

12. La proposizione "Un triangolo è isoscele se (almeno) due suoi **lati** sono congruenti" è:
    A. Un assioma (postulato)
    B. Una definizione
    C. Un teorema
    D. Non lo so.

13. Esegui le seguenti istruzioni:

Step 1: disegna un quadrilatero qualsiasi.

Step 2: individua i punti medi del quadrilatero e congiungili.

Che quadrilatero ottieni?

……………………………………………………………………………………………

Il procedimento che hai seguito è una dimostrazione del fatto che congiungendo i punti medi di un quadrilatero si ottiene sempre quel tipo di quadrilatero?

A. Sì
B. No.

Giustifica la risposta.

……………………………………………………………………………………………...
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..
……………………………………………………………………………………………..

PARTE SECONDA

1. Ti piace la matematica?
    A. Sí
    B. No
    C. Dipende dall'argomento.

    Giustifica la risposta.

    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..

2. Quale parte della matematica trovi più facile?
    A. Algebra
    B. Aritmetica
    C. Geometria

    Giustifica la risposta.

    ………………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..
    ……………………………………………………………………………………………..

3. Quale parte della matematica trovi più difficile?
    A. Algebra
    B. Aritmetica
    C. Geometria

 Giustifica la risposta.

....

....

....

....

....

....

....

4. Cosa ti incuriosisce di più dello studio della geometria?
   Motiva la risposta.

....

....

....

....

....

....

....

5. Cosa ti spaventa di più dello studio della geometria?
   Motiva la risposta.

....

....

....

....

....

....

....

6. Nel tuo percorso scolastico, i docenti di matematica hanno mai utilizzato strumenti informatici (software come GeoGebra o simili) nelle loro lezioni?
   A. Sí
   B. No

   Se sí, pensi che il loro uso abbia facilitato o complicato la comprensione della materia? Motiva la risposta.

   ……………………………………..………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………

   In ogni caso, saresti curioso/a di sperimentare (ancora) l'uso del software durante le spiegazioni di matematica?
   A. Sí
   B. No.

7. Ti piacerebbe conoscere la storia di alcuni argomenti di matematica e dei matematici che vi hanno contribuito?
   A. Sí
   B. No

   Motiva la risposta.

   ……………………………………..……………………………………………………...
   ……………………………………………………………………………………………..…
   …………………………………………………………………………………………...…
   …………………………………………………………………………………………...…
   …………………………………………………………………………………………...…
   …………………………………………………………………………………………...…
   ………………………………………………………………………………………...

Presentazione: Introduzione storica alla geometria euclidea

Introduzione alla geometria euclidea

Progetto di tesi didattica
Andrigo Giovanna

Dicembre 2023

"La geometria sola, fra le discipline liberali, esercita e acuisce l'ingegno."

E. Torricelli

Che cos'è la geometria?

Geometria

branca della matematica che studia le forme nel piano e nello spazio e le loro relazioni

"misurazione della terra", dal greco

Le origini della geometria

- **Sumeri e Assiri** sapevano calcolare l'area delle principali figure geometriche
- Gli **Antichi Egizi** sapevano costruire angoli retti e conoscevano il teorema di Pitagora

↓

scopi pratici:

organizzare viaggi (per terra e per mare), regolare i cicli di agricoltura, ripristinare confini di proprietà

- Nella **Magna Grecia** la geometria diventa una **scienza** rigorosa

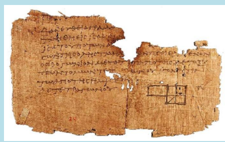
Euclide

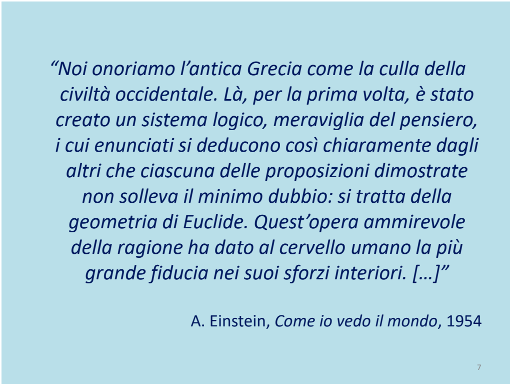
Alessandria d'Egitto,

300 a.C. circa

Gli *Elementi* di Euclide

- Manuale introduttivo della matematica del tempo
- 13 libri, che trattano anche di geometria del piano e dello spazio




"Noi onoriamo l'antica Grecia come la culla della civiltà occidentale. Là, per la prima volta, è stato creato un sistema logico, meraviglia del pensiero, i cui enunciati si deducono così chiaramente dagli altri che ciascuna delle proposizioni dimostrate non solleva il minimo dubbio: si tratta della geometria di Euclide. Quest'opera ammirevole della ragione ha dato al cervello umano la più grande fiducia nei suoi sforzi interiori. […]"
A. Einstein, *Come io vedo il mondo*, 1954
7

Presentazione: Gli enti primitivi e i primi postulati della geometria euclidea

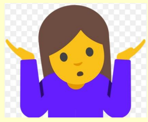
Gli enti primitivi e i primi postulati della geometria euclidea

Progetto di tesi didattica
Andrigo Giovanna

Dicembre 2023

Cosa sono gli enti primitivi?

Oggetti geometrici che non vengono definiti, e che quindi si accettano come noti.



2

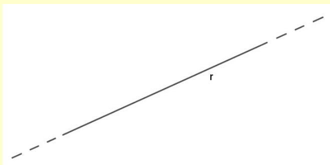
Quali sono gli enti primitivi?

PUNTO → A, B, C, …

3

Quali sono gli enti primitivi?

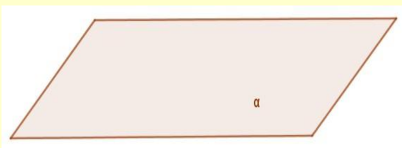
RETTA → r, s, t, …



4

Quali sono gli enti primitivi?

PIANO → α, β, π, …

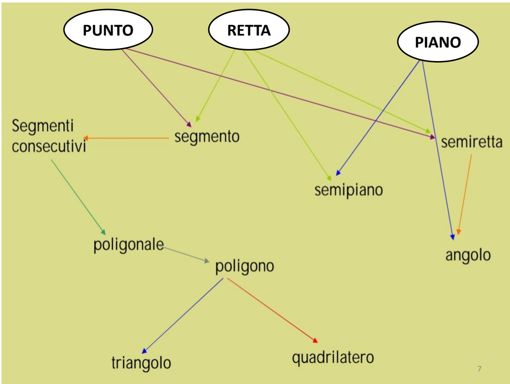


5

A cosa servono gli enti primitivi?

A partire dagli enti primitivi possiamo definire tutti gli altri oggetti geometrici!

6



Che cosa sono i postulati?

Affermazioni intuitive accettate da tutti

↓

Non serve dimostrarle

A cosa servono i postulati?

- I postulati descrivono caratteristiche e proprietà degli enti primitivi;
- Per scoprire un'altra importante applicazione dei postulati … stay tuned!

I primi postulati della geometria negli *Elementi* di Euclide

- 1° postulato, Libro I: "risulti postulato che si possa condurre una linea retta da ogni punto ad ogni altro punto."

I primi postulati della geometria negli *Elementi* di Euclide

- 2° postulato, Libro I: "risulti postulato che si possa prolungare una retta finita continuamente in linea retta."

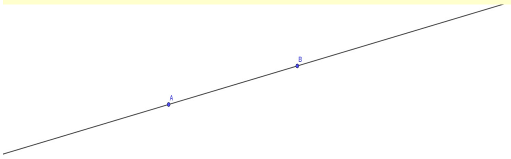
N.B. Con "**retta**" Euclide intende quello che per noi oggi è il **segmento**!!!

I primi postulati della geometria negli *Elementi* di Euclide

- 3° postulato, Libro I: "risulti postulato che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza."
- 4° postulato, Libro I: "risulti postulato che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro"
- …

I primi postulati della geometria euclidea oggi

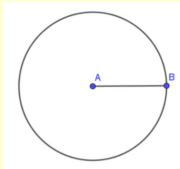
- Dati due punti distinti A e B, *esiste una e una sola* retta passante per A e B



13

I primi postulati della geometria euclidea oggi

- Dati nel piano un punto e un segmento, esiste una sola circonferenza che ha per centro quel punto e per raggio quel segmento



14

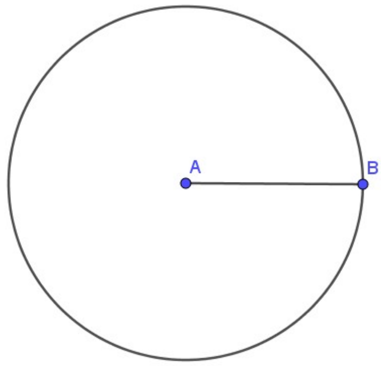
SCHEDA DI LAVORO:

COSTRUZIONE DEL TRIANGOLO EQUILATERO

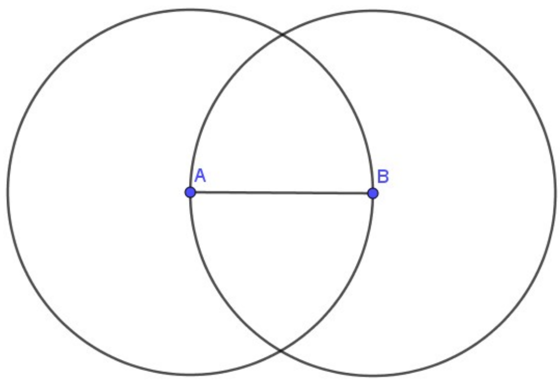
PROBLEMA: Il triangolo equilatero di lato AB che abbiamo appena costruito su GeoGebra, esiste davvero? In altre parole, i passaggi della nostra costruzione sono tutti sensati e giustificati?

Provate a rispondere alle seguenti domande.

1. Si può costruire la circonferenza di centro A e raggio AB? Se sì, perché?

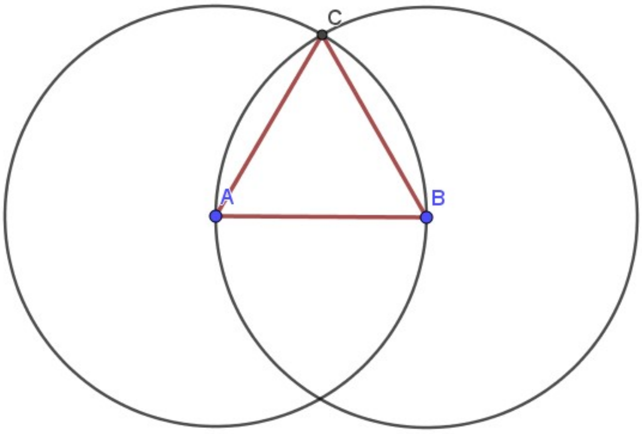


2. Si può costruire la circonferenza di centro B e raggio AB? Se sì, perché?



1

3. Determinato C, punto di intersezione tra le due circonferenze, si possono costruire i segmenti AC e BC? Se sì, perché?



2

SCHEDA DI LAVORO:
LE COSTRUZIONI GEOMETRICHE

PUNTO MEDIO E ASSE DI UN SEGMENTO

DEF: Il punto medio di un segmento AB è il punto che divide AB in due segmenti congruenti.

DEF: Due rette incidenti sono tra loro perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli retti.

DEF: L'asse di un segmento AB è la retta passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_base.ggb" la costruzione del punto medio di un segmento, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna un segmento AB
2. Traccia la circonferenza di centro A e raggio a piacere (qual è la lunghezza minima che deve avere tale raggio?)
3. Traccia la circonferenza di centro B e stesso raggio scelto per il punto 2.
4. Traccia la retta passante per i punti di intersezione delle due circonferenze
5. Individua il punto di intersezione tra tale retta e il segmento AB.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

RETTA PERPENDICOLARE AD UNA RETTA DATA E PASSANTE PER UN PUNTO ESTERNO AD ESSA

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_base.ggb" la costruzione della retta perpendicolare a una retta data e passante per un punto esterno ad essa, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna la retta passante per due punti A e B
2. Scegli un punto P esterno alla retta
3. Traccia la circonferenza di centro A e raggio AP
4. Traccia la circonferenza di centro B e raggio BP
5. Chiama C il secondo punto di intersezione delle due circonferenze (il primo è P)
6. Traccia la retta passante per P e C.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

RETTA PERPENDICOLARE AD UNA RETTA DATA E PASSANTE PER UN SUO PUNTO

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_retta_perpendicolare.ggb" la costruzione della retta perpendicolare a una data retta e passante per un suo punto, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna la retta passante per due punti A e B
2. Scegli un punto P appartenente alla retta
3. Traccia la circonferenza di centro P e raggio a piacere, e chiama C e D i suoi punti di intersezione con la retta AB
4. Traccia l'asse del segmento CD.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

SCHEDA DI LAVORO:
LE COSTRUZIONI GEOMETRICHE

TRIANGOLO ISOSCELE

DEF: Un triangolo è isoscele se (almeno) due suoi lati sono congruenti.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_triangolo_isoscele.ggb" la costruzione del triangolo isoscele dati la base AB e l'altezza DH, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni (per le costruzioni già fatte, sfrutta gli opportuni comandi del software):

1. Individua M punto medio di AB, base del triangolo isoscele, e disegna l'asse di AB
2. Traccia la circonferenza di centro M e raggio DH, e chiama C il suo punto d'intersezione con l'asse di AB
3. Traccia i segmenti AC e BC.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.
Salva infine la costruzione mediante il comando "crea nuovo strumento".

TRIANGOLO RETTANGOLO

DEF: Un triangolo è rettangolo se ha un angolo retto.

ESERCIZIO

Effettua nel file GeoGebra denominato "piano_triangolo_rettangolo.ggb" la costruzione del triangolo rettangolo dati i cateti AB e DE, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni (per le costruzioni già fatte, sfrutta gli opportuni comandi del software):

1. Traccia la retta perpendicolare ad AB passante per A

2. Traccia la circonferenza di centro A e raggio DE, e chiama C il suo punto d'intersezione con la retta perpendicolare
3. Traccia il segmento BC e CA.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

Salva infine la costruzione mediante il comando "crea nuovo strumento".

BISETTRICE DI UN ANGOLO

DEF: La bisettrice di un angolo è la semiretta che divide l'angolo in due angoli congruenti.

ESERCIZIO

Scrivi le definizioni di angolo e di semiretta.

Effettua poi nel file GeoGebra denominato "piano_bisettrice.ggb" la costruzione della bisettrice di un angolo, eseguendo nell'ordine le seguenti istruzioni:

1. Disegna un angolo di vertice O
2. Traccia la circonferenza di centro O e raggio a piacere, e chiama A e B i suoi punti d'intersezione con con i lati dell'angolo
3. Traccia la circonferenza di centro A e raggio a piacere
4. Traccia la circonferenza di centro B e raggio congruente a quello del punto 3., e chiama C uno dei due punti di intersezione con la circonferenza del punto 3.
5. Traccia la semiretta di origine O e passante per C.

Spiega per iscritto perché puoi fare ciascuno di questi passaggi.

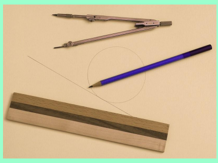
Presentazione: Le costruzioni geometriche

Le costruzioni geometriche

Progetto di tesi didattica
Andrigo Giovanna

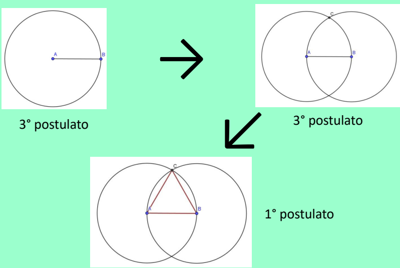
Dicembre 2023

Cos’è una costruzione geometrica?



Procedura che, attraverso l’uso di riga e compasso **ideali** e seguendo regole stabilite (postulati), permette di ottenere una figura geometrica.

Esempio: costruzione del triangolo equilatero dato il lato AB

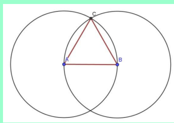


3° postulato → 3° postulato → 1° postulato

Perché le costruzioni geometriche sono importanti?

- Le proprietà di un oggetto costruito con riga e compasso sono tutte rispettate e conservate (per trascinamento).

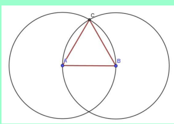
Esempio:



Il triangolo ABC è effettivamente equilatero: ha tutti i lati e gli angoli tra loro congruenti.

- Ogni costruzione con riga e compasso equivale alla **dimostrazione** dell’esistenza dell’oggetto costruito.

Esempio:



Costruendo il triangolo equilatero abbiamo dimostrato che tale figura geometrica esiste!

- Grazie alle costruzioni geometriche possiamo introdurre il **ragionamento ipotetico – deduttivo**: si assume che valgano i postulati e da essi si deduce l’esistenza degli oggetti geometrici costruiti.

Esempio:

Deduzione:

1° postulato + 3° postulato → il triangolo equilatero esiste

SCHEDA DI LAVORO:
PROBLEMI IN FORMA APERTA

PROBLEMA 1:

Le bisettrici di due angoli interni di un triangolo possono essere tra loro perpendicolari?

GUIDA ALLA SOLUZIONE:

1. Nel file GreoGebra denominato “piano_finale.ggb”, disegna un triangolo qualsiasi ABC
2. Traccia le bisettrici di due angoli interni di tale triangolo e chiama D il loro punto d’intersezione
3. Trascinando i vertici del triangolo ABC, osserva come cambiano le due bisettrici: esse ti sembrano tra loro perpendicolari oppure no?
4. Prova infine a giustificare la tua risposta in modo convincente, cosicché nessuno possa dubitare delle tue parole:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

<u>PROBLEMA 2</u>: Dato un quadrilatero generico, congiungendo i punti medi dei suoi lati che quadrilatero si ottiene?

<u>GUIDA ALLA SOLUZIONE</u>:

1. Nel file GreoGebra denominato “piano_finale.ggb”, disegna un quadrilatero qualsiasi ABCD
2. Traccia il punto medio di ogni lato di ABCD: chiama M il punto medio del lato AB, N il punto medio del lato BC, P il punto medio del lato CD e Q il punto medio del lato DA
3. Unisci i punti M, N, P, Q ed individua quindi il quadrilatero MNPQ
4. Trascinando i vertici del quadrilatero ABCD, osserva come cambia il quadrilatero MNPQ: che tipo di quadrilatero è?
5. Prova infine a giustificare la tua risposta in modo convincente, cosicché nessuno possa dubitare delle tue parole:

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Presentazione: La dimostrazione in geometria

La dimostrazione in geometria

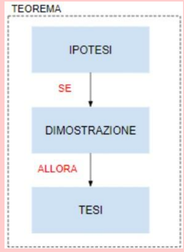
Progetto di tesi didattica
Andrigo Giovanna

Gennaio 2024

Che cos'è un teorema?

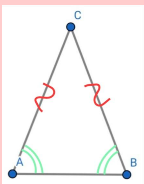
DEF: Un **teorema** è una proposizione vera che viene dimostrata.

Ogni teorema è composto da:
Ipotesi → ciò che si suppone vero;
Tesi → ciò che si vuole dimostrare.



Esempio

Teorema: **Se** un triangolo ha due angoli congruenti, **allora** è isoscele.



Ipotesi: ABC triangolo
angoli in A e B congruenti

Tesi: ABC isoscele

Dim: la vedremo!

3

Che cos'è una dimostrazione?

DEF: Una **dimostrazione** è una sequenza finita e ordinata di deduzioni logiche (ipotesi, postulati, teoremi precedenti) che termina con la tesi.

↓

ragionamento **ipotetico - deduttivo**

Esempio: la costruzione con riga e compasso di un oggetto geometrico è la dimostrazione che esso esiste.

4

A cosa serve la dimostrazione?

- convincere sé stessi e gli altri sulla verità o meno di un enunciato

↓

"Un certo fatto è vero?"

- Motivare la verità di un enunciato

↓

"Perché un certo fatto è vero?"

"Ciò che è affermato senza prova, può essere negato senza prova."

Euclide

6

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Dipartimento di Matematica Tullio Levi Civita - Università degli Studi di Padova

PROGETTO DI TESI DIDATTICA

STUDENTESSA: ANDRIGO GIOVANNA

QUESTIONARIO FINALE

Rispondi alle seguenti domande.

N.B. Il questionario è anonimo.

PARTE PRIMA

1. Gli enti primitivi della geometria euclidea si introducono:
   A. per poter intuire ad “occhio” se un risultato è vero o no, ed evitare quindi di dimostrare i teoremi;
   B. perchè, senza assumere come vere alcune proposizioni “non dimostrate”, non si potrebbero dimostrare gli altri teoremi;
   C. perchè, senza introdurre alcuni enti geometrici come “non definiti”, non si potrebbe dare la definizione degli altri enti geometrici;
   D. non lo so.

2. I postulati della geometria euclidea si introducono:
   A. per poter intuire ad “occhio” se un risultato è vero o no, ed evitare quindi di dimostrare i teoremi;
   B. perchè, senza assumere come vere alcune proposizioni “non dimostrate”, non si potrebbero dimostrare gli altri teoremi;
   C. perchè, senza introdurre alcuni enti geometrici come “non definiti”, non si potrebbe dare la definizione degli altri enti geometrici;
   D. non lo so.

3. Scrivi nel seguito cosa si intende con teorema.

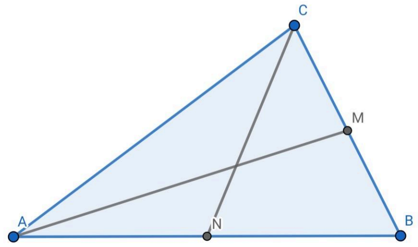
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

4. Scrivi nel seguito cosa si intende con dimostrazione (in geometria).

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

5. Considera la seguente proposizione e la dimostrazione proposta sotto: "Due mediane di un triangolo possono essere tra loro perpendicolari?".

   Dimostrazione: Disegno un triangolo qualunque ABC e traccio due mediane AM e CN.

   Poiché dal disegno vedo che le due mediane AM e CN non sono tra loro perpendicolari, concludo che in generale due mediane di un triangolo non possono essere tra loro perpendicolari. c.v.d.

   La dimostrazione proposta è corretta?

   A. Sì
   B. No.

   Giustifica la risposta.

   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………………

6. Perché pensi sia importante dimostrare (in geometria)? Giustifica la risposta.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

7. Scrivi nel seguito cosa si intende con “sistema logico ipotetico - deduttivo”.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

8. “Una volta dimostrato un teorema, posso successivamente considerarlo vero e quindi applicarlo senza dimostrarlo nuovamente.”

   L’affermazione è:

   A. vera
   B. falsa.

   Giustifica la risposta.

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

9. Se ti viene chiesto di disegnare un triangolo qualunque, quale faresti?
    A. equilatero;
    B. isoscele;
    C. scaleno.

    Perché è importante disegnarlo proprio in questo modo?

    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………

<u>PARTE SECONDA</u>

1. A questo punto della trattazione, sei curioso di continuare e approfondire lo studio della geometria euclidea?
    A. Sì
    B. No.

    Motiva la risposta.

    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………

2. Quale aspetto della geometria euclidea trovi più difficile?
    A. memorizzare postulati, definizioni, teoremi ecc.;
    B. capire le dimostrazioni dei teoremi visti in classe;
    C. fare in autonomia gli esercizi dimostrativi.

    Motiva la risposta.

    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………

3. Ti piace dimostrare?
    A. Sì
    B. No.

    Motiva la risposta.

    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………
    ……………………………………………………………………………………………

4. Pensi sia sempre utile dimostrare una proposizione (in geometria)?
   A. Sì
   B. No.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

5. Quale aspetto del dimostrare trovi più difficile?
   A. Individuare ipotesi e tesi;
   B. capire quali “ingredienti” usare nella dimostrazione;
   C. applicare il ragionamento ipotetico - deduttivo.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

PARTE TERZA (solo per la classe sperimentale)

1. Hai trovato utile conoscere le origini della geometria e l'importanza che ebbe Euclide per il suo sviluppo?
   A. Sì
   B. No.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

2. Quanto hai trovato utile l'uso delle costruzioni geometriche e di GeoGebra per introdurre gli enti primitivi, i postulati e il concetto di dimostrazione in geometria?
   A. Molto
   B. Abbastanza
   C. Poco
   D. Per nulla.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

3. Quanto hai trovato utile la presentazione dei due problemi aperti con l'uso di GeoGebra allo scopo di comprendere l’importanza della dimostrazione?
    A. Molto
    B. Abbastanza
    C. Poco
    D. Per nulla.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

4. Quanto hai trovato utile l’uso di GeoGebra per intuire le dimostrazioni del teorema del triangolo isoscele e degli esercizi di applicazione?
    A. Molto
    B. Abbastanza
    C. Poco
    D. Per nulla.

   Motiva la risposta.

   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………
   ……………………………………………………………………………………………

Bibliografia

[1] ACERBI FABIO, *Euclide, tutte le opere*, Milano, Bompiani, 2007.

[2] ACCOMAZZO PIERANGELA, BELTRAMINO SILVIA, SARGENTI ADA, *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*, Piano Lauree Scientifiche Piemonte 2013, in collaborazione con il GeoGebra Institute of Torino e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 2013.

[3] ARZARELLO FERDINANDO, OLIVERO FEDERICA, PAOLA DOMINGO, ROBUTTI ORNELLA, *I problemi di costruzione geometrica con l'aiuto di Cabrì*, Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Torino, disponibile in http://www.matematica.it/paola/Costruzioni,%20articolo%20possagno%20finale.pdf.

[4] BACCAGLINI FRANK ANNA, DI MARTINO PIETRO, NATALINI ROBERTO, ROSOLINI GIUSEPPE, *Didattica della matematica*, Milano, Mondadori Università, 2018.

[5] BAGNI GIORGIO TOMASO, *Dimostrare e convincere*, Nucleo di ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Bollettino dei Docenti di Matematica 36, pp. 53-60, 1998.

[6] BAGNI GIORGIO TOMASO, *Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche*, Dipartimento di Matematica, Università di Roma La Sapienza, La matematica e la sua didattica, 3, pp. 51-74, 2004.

[7] BAZZA EMMA, *Paper folding: teoria matematica e insegnamento della geometria nella scuola secondaria*, Tesi di laurea magistrale - relatore Prof. Luigi Tomasi e correlatore Prof. Francesco Ciraulo, Università degli Studi di Padova, 2022.

[8] BERGAMINI MASSIMO, BAROZZI GRAZIELLA, *Matematica multimediale.blu*, Edizione per l'insegnante, Seconda edizione, Zanichelli Editore, Bologna, 2019.

[9] BERGAMINI MASSIMO, BAROZZI GRAZIELLA, TRIFONE ANNA, *Matematica.blu*, Terza edizione, Zanichelli Editore, Bologna, 2022.

[10] BONOTTO CINZIA, Appunti del corso *Fondamenti della matematica*, Università degli Studi di Padova, A.A. 2019/2020.

[11] BONOTTO CINZIA, *E se (ri)partissimo a giocare (anche) da Euclide?*, disponibile in https://matematica.unibocconi.eu/articoli/e-se-ripartissimo-giocare-anche-da-euclide.

[12] BONOTTO CINZIA, *Per Euclide non esiste una via regia*, Università degli Studi di Padova, Aprile 2013, disponibile in https://matematica.unibocconi.eu/sites/default/files/media/attach/Bonotto.pdf?VersionId=3KhNs3r4LF7UPfyw0kwcX_iTzfz3e7T1.

[13] BORSERO MASSIMO, CASI RAFFAELE, PIZZARELLI CHIARA, TASSONI SAVERIO, *Andiamo a dimostrare. Futuri matematici alla prova*, Piano Lauree Scientifiche Piemonte in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, 2016.

[14] BOTTACIN FRANCESCO, *Fondamenti di Geometria. Cenni storici*, Università degli Studi di Salerno, A.A. 2005/2006.

[15] BOYER CARL B., *Storia della matematica*, Introduzione di Lucio Lombardo Radice, Milano, Mondadori, 2007.

[16] BRIGAGLIA ALDO, RASPANTI MARIA ANNA, ROGORA ENRICO, *L'uso di un software di Geometria Dinamica nella formazione dei futuri insegnanti*, 2020, disponibile in arXiv:2012.05881[math.HO] https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.05881

[17] CIRAULO FRANCESCO, TOMASI LUIGI, Appunti del corso *Matematiche complementari*, Università degli Studi di Padova, A.A. 2020/2021.

[18] DEMATTE' ADRIANO, *La storia della matematica nell'insegnamento*, Liceo "Rosmini" Trento, Ottobre 2012, disponibile in https://www.researchgate.net/publication/271199185_La_storia_della_matematica_nell'insegnamento/link/54c0ac230cf28eae4a696d9b/download

[19] ENRIQUES FEDERIGO, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna. Libri I-IV*, Alberto Stock - editore, Roma, 1925.

[20] FANTINI ROBERTO, *Geometria con riga e compasso*, Liceo "Righi", Cesena, A.S. 2009/2010.

[21] FRAJESE ATTILIO, MACCIONI LAMBERTO, *Gli Elementi di Euclide*, Unione tipografico-editrice torinese, 1998.

[22] GALANTE GIULIA, *Il calcolo infinitesimale e il concetto di derivata: aspetti storici, logici e didattici nella scuola secondaria di secondo grado*, Tesi di laurea magistrale - relatore Prof. Francesco Ciraulo e correlatore Prof. Luigi Tomasi, Università degli Studi di Padova, 2023.

[23] GIACARDI LIVIA, *La Storia della matematica nell'insegnamento. «Far interagire la matematica con la cultura»*, Università degli Studi di Roma, 2013.

[24] GRUGNETTI LUCIA, SPERANZA FRANCESCO, *Riflessioni sul problema della Storia e Didattica della matematica*, Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Parma, nota redatta in occasione dell'ICMI Study sul

Ruolo della Storia della Matematica nell'insegnamento e nell'apprendimento della Matematica, 2000.

[25] KLINE MORRIS, *Storia del pensiero pensiero matematico*, Vol. 1, Torino, Einaudi, 1991.

[26] KONG SUSANNA, *Sulbasūtra Geometry*, University of British Columbia, Aprile 2001, disponibile in https://personal.math.ubc.ca/~cass/courses/m309-01a/kong/sulbasutra_geometry.htm.

[27] *La geometria della riga e compasso: Primo incontro*, Università degli Studi di Firenze, 2010, disponibile in https://web.math.unifi.it/users/ricci/pls/compasso/materiale/Primo%20incontro.pdf.

[28] LUISON GLORIA, *La dimostrazione nell'insegnamento e apprendimento della matematica nella scuola secondaria di II grado*, Tesi di laurea magistrale - relatore Prof.ssa Cinzia Bonotto e correlatore Prof. Luigi Tomasi, Università degli Studi di Padova, 2022.

[29] MANARA CARLO F., LUCCHINI GABRIELE, *Momenti del pensiero matematico. Letture su aspetti e problemi delle scienze matematiche*, Milano, Mursia editore, 1976.

[30] MARACCHIA SILVIO, *Aristotele e la matematica*, Università degli Studi di Roma, disponibile in https://fundacionorotava.org/media/web/files/page83__cap10_web.pdf.

[31] MARIOTTI MARIA ALESSANDRA, *Argomentare e dimostrare come problema didattico*, Milano, UTET Università, 2022.

[32] MARIOTTI MARIA ALESSANDRA, *Introduction to proof. The mediation of a dynamic software enviroment*, Educational Studies in Mathematics, Dicembre 2000, pp. 25-53.

[33] MARIOTTI MARIA ALESSANDRA, *Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore*, Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Pisa, 1998.

[34] MARTIN GEORGE E., *Geometric constructions*, New York, Springer, 1998.

[35] *Matematiche elementari da un punto di vista superiore. Parlando di storia e fondamenti della matematica...*, online https://matematichelementaripvs.files.wordpress.com/2012/12/lavoro-matelpvs.pdf.

[36] MIUR., *Decreto ministeriale n° 211 del 7 ottobre 2010* , Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali, 2010, disponibile in https://www.gazzettaufficiale.it.

[37] MIUR., *Indicazioni nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei*, 2010, disponibile in http://nuovilicei.indire.it/.

[38] MIUR., *Istituti Tecnici. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento*, 2010, disponibile in http://nuovitecnici.indire.it/.

[39] MIUR., *Istituti Professionali. Linee Guida per il passaggio al nuovo ordinamento*, 2010, disponibile in https://nuoviprofessionali.indire.it/linee-guida-prof/.

[40] MIUR., *Matematica2004*, Direzione Generale Ordinamenti Scolastici, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica. Ciclo secondario: quinta classe. Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale "G.Ricci Curbastro", 2004.

[41] SCIENZA A SCUOLA, *Elementi di Euclide*, online https://www.scienzaatscuola.it/euclide.html.

[42] SCIMEMI BENEDETTO, *Geometria Sintetica. Trasformazioni, triangoli, coniche*, Padova, Cleup, 2017.

[43] TOMASI LUIGI, Appunti del corso *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Università degli Studi di Padova, A.A. 2021/2022.

[44] TOMASI LUIGI, *Argomentare, congetturare e dimostrare: cosa cambia con l'uso di un software?*, in L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 42 A-B, n. 5, Novembre-Dicembre 2019, pp. 660-671.

[45] TOMASI LUIGI, *La dimostrazione e il software di matematica, alcuni esempi*, in AA.VV., Matematica 2021. Nuove proposte didattiche, Atti del Congresso FIM 2021, Palermo University Press, 2022, pp. 149-164.

[46] TRECCANI, *Dizionario di filosofia* (*2009*), online https://www.treccani.it/enciclopedia/talete-di-mileto_%28Dizionario-di-filosofia%29/.

[47] TRECCANI, *Enciclopedia dei ragazzi* (*2005*), online https://www.treccani.it/enciclopedia/geometria_(Enciclopedia-dei-ragazzi)/.

[48] TRECCANI, *Enciclopedia online*, online https://www.treccani.it/enciclopedia/pitagora/.

[49] TRECCANI, *Enciclopedia online*, online https://www.treccani.it/enciclopedia/platone-e-l-accademia_(Storia-della-civilt%C3%A0-europea-a-cura-di-Umberto-Eco)/

[50] VILLANI VINICIO, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica* (*Geometria*), Bologna, Pitagora Editrice Bologna, 2006.

Ringraziamenti

"Siamo angeli con un'ala soltanto e riusciremo
a volare solo restando l'uno accanto all'altro."
(Mr Rain)

Giunta alla conclusione del mio percorso universitario, desidero ringraziare coloro che hanno condiviso con me tutto o una parte di questo viaggio, perché, se oggi taglio questo importante traguardo, è anche merito del loro supporto.

Grazie ai miei genitori per essere stati presenti durante tutta la mia carriera scolastica.

Grazie a mia sorella Vittoria per essere sempre stata un fondamentale punto di riferimento e per aver sempre tifato per me. Grazie perché so che potrò sempre contare su di te.

Grazie ai miei tre gatti per donarmi ogni giorno amore puro e incondizionato: grazie a Ketty per averci scelto come famiglia e per averci reso partecipi del miracolo della vita; grazie a Maya per insegnarmi ogni giorno che si può amare anche nella riservatezza; grazie a Sansone per aver spesso rallentato la stesura di questa tesi perché desideroso di coccole...sappi che in fondo non aspettavo altro che trovare le tue pelose zampette sul pc.

Grazie alle mie compagne di corso per aver condiviso importanti momenti di questa esperienza universitaria. Grazie in particolare a Giulia per i preziosi consigli dati sul progetto didattico e la stesura di questo elaborato, e per il sostegno e la generosità dimostratami. Sono certa che la nostra amicizia non si esaurirà con questo traguardo, ma che continueremo a supportarci e confrontarci anche da colleghe.
Grazie a Melissa per i pranzi e le pause caffè condivise tra le aule del dipartimento.
Grazie a Sara per la vicinanza dimostratami, anche se non abbiamo condiviso il Corso di Laurea Magistrale.

Grazie al Prof. Francesco Ciraulo e al Prof. Luigi Tomasi per avermi accompagnata nella stesura di questa tesi con grande professionalità e umanità, mostrando grande apertura all'ascolto e dando fiducia al mio progetto e alle mie idee.

Grazie alla Prof.ssa Sandra Bortolami per la disponibilità e la gentilezza mostrate nell'accogliermi in classe per implementare la sperimentazione didattica e per i preziosi consigli, che torneranno molto utili nella mia futura carriera da insegnante.

Grazie a tutti i 25 studenti della classe prima H Liceo Scientifico Matematico del Liceo E. Curiel di Padova per aver accolto con entusiasmo e motivazione il mio progetto didattico.

Grazie al Prof. Filippo Scarso e alla sua prima I Liceo Scientifico Matematico per essersi prestata come classe di controllo.

Grazie a tutto il personale del Liceo E. Curiel per avermi accolto come se fossi stata a tutti gli effetti una docente.