



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**Il Modello Geometrico
dell'Universo a Grande Scala**

Relatore:
Prof.sso Paolo Rossi

Laureando:
Giulia Pomari
Matricola:
1222691

30 giugno 2023

Anno Accademico 2022-23

*Ed anche stavolta,
è andata così.*

A Maya.

Indice

Introduzione	vii
1 Lo Spaziotempo	1
1.1 Equivalenza Fisica	1
1.2 Struttura Causale	1
1.3 Orientabilità Temporale	4
1.4 Spaziotempo	5
1.4.1 Esempi di Spaziotempo	6
1.5 Osservatori	7
1.6 Isotropia Spaziale	11
1.7 Sistemi di Riferimento	12
2 Elettromagnetismo, materia e spaziotempo	17
2.1 Particelle	17
2.2 Tensore stress-energia	19
2.3 Elettromagnetismo	20
2.4 Modelli di materia e modelli relativistici	21
2.4.1 Esempi di modelli di materia	24
2.5 Tensori stress-energia normali	25
2.6 Fluidi perfetti	25
2.7 Equazioni di campo di Einstein	28
2.7.1 Spaziotempo Ricci flat	28
3 Cosmologia	29
3.1 Concetti preliminari	29
3.2 Le equazioni di Friedmann	31
3.3 Evoluzione della densità di energia	34
3.4 Redshift cosmologico	37
3.5 Quantità misurabili e legge di Hubble	38
3.6 Modelli cosmologici	40
3.6.1 Universo vuoto	40
3.6.2 Universo statico di Einstein	41
3.6.3 Considerazioni iniziali sui modelli con costante cosmologica nulla	42

3.6.4	Soluzioni esatte per universi dominati da materia	43
3.6.5	Soluzioni esatte per universi dominati da radiazione	45
3.6.6	Soluzioni esatte per universi dominati dalla costante cosmologica .	47
3.6.7	Il modello Lambda-CDM semplice	50

Bibliografia**61**

Introduzione

Che forma ha il nostro universo? Di cosa è composto? Ha avuto un'origine o è sempre esistito? Quale sarà il suo destino? Da sempre gli esseri umani hanno mostrato estremo interesse nello studio del cielo stellato e, successivamente, del cosmo intero. Il desiderio di sapere com'è fatto lo spazio in cui viviamo e di come potrebbe evolvere in futuro è intrinseco nella nostra natura. È proprio per trovare risposta a queste domande che nacque la cosmologia, inizialmente come branca della filosofia, per poi acquisire un autonomo statuto epistemologico in seguito alla Rivoluzione scientifica avviata nel XVI secolo. I primi modelli astronomici, tra cui quello più famoso, ovvero il modello *aristotelico-tolomaico*, pur proponendosi come descrizioni razionali delle leggi e delle strutture che presiedono alla regolarità dei fenomeni osservabili, traevano origine da un contesto prevalentemente religioso. Secondo Aristotele (il cui modello cosmologico, successivamente corretto e integrato dall'astronomo egiziano Claudio Tolomeo, ebbe un'enorme influenza nella cultura occidentale antica, medievale e oltre) il nostro universo, in quanto perfetto, deve essere sferico e limitato, per quanto riguarda la dimensione spaziale, nonché eterno ed immutabile, per quanto riguarda la dimensione temporale. Questa visione del cosmo era talmente diffusa e radicata, da costituire la cornice cosmologica del poema dantesco. Essa lascia la sua traccia perfino nel primo modello cosmologico einsteiniano di universo statico.

La cosmologia contemporanea nasce tra gli anni 1915, con la pubblicazione da parte di Einstein del primo articolo sulla relatività generale, e 1929, con la scoperta della legge di Hubble che comporta un universo attualmente in espansione. La formalizzazione matematica delle idee di Einstein e della struttura dello spaziotempo, nonché lo studio delle sue proprietà, è stato reso possibile grazie al contributo di Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita e del loro calcolo differenziale assoluto. Nel primo capitolo ci concentreremo sullo studio dello spaziotempo come una varietà Lorentziana quadridimensionale che gode di particolari proprietà, tra cui l'orientabilità temporale, e su cui è possibile definire una struttura causale. Vedremo, inoltre, che cosa si intende con "osservatore" e come definire un sistema di riferimento su tale varietà.

Il secondo capitolo è dedicato allo studio dei tensori stress-energia di materia e radiazione elettromagnetica, grazie ai quali è possibile ottenere le *equazioni di campo di Einstein*, che si riveleranno fondamentali nell'ultima parte della nostra trattazione. Oltre a ciò, daremo anche la definizione di fluido perfetto e vedremo le sue principali proprietà. Questo perché il contenuto del nostro universo può essere ben rappresentato da un corpo continuo composto da tre componenti principali, ognuna delle quali può essere descritta da un modello di fluido perfetto. Esse sono: materia, radiazione ed energia del vuoto (nota con il nome di "energia oscura").

Mentre i primi due capitoli sono dedicati ai concetti preliminari ed agli strumenti matematici necessari per lo studio dei modelli cosmologici, nel terzo ed ultimo capitolo entreremo nel vivo dell'argomento. Partendo dall'assunzione del *Principio Cosmologico*, secondo cui l'universo appare omogeneo ed isotropo su scale sufficientemente grandi, vedremo che è possibile modellizzare il nostro universo con uno spaziotempo dotato di una metrica specifica: la *metrica di Robertson-Walker*. Affiancando a quest'ultima le *equazioni di campo di Einstein*, si ottengono le *equazioni di Friedmann*, le quali, insieme ad opportune equazioni di stato per i fluidi perfetti, ci permettono di studiare l'evoluzione del fattore di scala dell'universo nel corso del tempo. Osserveremo che a seconda di quali siano le componenti predominanti tra materia, radiazione, energia oscura e curvatura, si possono ottenere modelli cosmologici differenti: alcuni prevedono l'esistenza di una singolarità iniziale, chiamata *Big Bang*, altri invece ne sono sprovvisti. Allo stesso modo, secondo alcuni di questi modelli l'universo, dopo una prima fase di espansione, tornerà a contrarsi terminando con una seconda singolarità, il *Big Crunch*, mentre secondo altri modelli esso continuerà ad espandersi all'infinito, divenendo troppo freddo per poter consentire la sopravvivenza a qualsiasi forma di vita. Quest'ultimo scenario è conosciuto come *Big Chill* o *Big Freeze*. Alla fine del capitolo, come ultimo modello analizzeremo quello che ad oggi riesce a soddisfare al meglio i dati raccolti, il *modello Lambda-CDM*, da cui ricaveremo una stima dell'età dell'universo e del raggio della porzione di universo osservabile.

Capitolo 1

Lo Spaziotempo

In questo capitolo, dopo aver introdotto i concetti di causalità e orientabilità temporale su varietà di Lorentz, andremo a definire il concetto di spaziotempo e analizzeremo i tre esempi più importanti per la nostra trattazione.

1.1 Equivalenza Fisica

Indichiamo con (M, g) una varietà Riemanniana (o semi-Riemanniana) di dimensione n e con $T_x M$ il suo spazio tangente nel punto $x \in M$. Un campo tensoriale di tipo (p, q) su M è una sezione del fibrato $T_q^p(TM)$.

Definiamo una relazione di equivalenza tra i campi tensoriali su M come segue. Per ogni $x \in M$, il prodotto interno g_x sullo spazio $T_x M$ induce un isomorfismo ϕ_x tra lo spazio stesso ed il suo duale, definito da $(\phi_x v)(w) = g_x(v, w)$, per ogni $v, w \in T_x M$. Per ogni coppia di interi r, s non negativi, ϕ_x si può estendere in modo unico a un isomorfismo $\phi_s^r: T_s^r(T_x M) \rightarrow T_{r+s}^0(T_x M)$, dove $\phi_s^r(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s) = \phi(v_1) \otimes \cdots \otimes \phi(v_r) \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s$. Sia p, q un'altra coppia di interi non negativi tali che $p + q = a = r + s$, dati due tensori $A \in T_q^p(T_x M)$ e $B \in T_s^r(T_x M)$, diremo che A è equivalente a B (in simboli $A \sim B$) se e solo se $\phi_{xq}^p(A) = \phi_{xs}^r(B)$.

Siano ora A e B due campi tensoriali definiti su un aperto $\mathcal{U} \subset M$, diremo che A è *fisicamente equivalente* a B se e solo se $A(x) \sim B(x)$, per ogni $x \in \mathcal{U}$. Per esempio, un campo vettoriale X ed una 1-forma ω sono fisicamente equivalenti se e solo se $\omega = g(X, \cdot)$. In relatività tutti i campi tensoriali che appartengono alla medesima classe di equivalenza secondo la relazione appena introdotta, hanno la stessa interpretazione fisica.

1.2 Struttura Causale

Sia (V, g) uno spazio vettoriale Lorentziano di dimensione n .

Definizione 1.2.1. Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale.

Il *carattere causale* di W è:

- (a) *spacelike* se e solo se g è definita positiva su W ;
- (b) *lightlike* se e solo se g è semidefinita positiva, ma non è definita positiva su W ;
- (c) *timelike* altrimenti.

Sia $v \in V$, il suo *carattere causale* è quello del sottospazio $\langle v \rangle$. Il vettore v si dice *causale* se e solo se non è spacelike.

Osservazione 1.2.2. (a) *il vettore nullo è spacelike; un vettore non nullo $v \in V$ è spacelike se e solo se $g(v, v) > 0$, lightlike se e solo se $g(v, v) = 0$ ed è timelike se e solo se $g(v, v) < 0$.*

(b) *un sottospazio $W \subset V$ è:*

- *spacelike se e solo se tutti i suoi vettori sono spacelike;*
- *lightlike se e solo se contiene un vettore lightlike, ma non contiene vettori timelike;*
- *timelike se e solo se contiene un vettore timelike.*

(c) *nessuno dei precedenti sottospazi è vuoto.*

Proposizione 1.2.3. *Sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora:*

- (a) W è timelike $\iff W^\perp$ è spacelike,
 (b) W è spacelike $\iff W^\perp$ è timelike,
 (c) W è lightlike $\iff W \cap W^\perp \neq 0 \iff W^\perp$ è lightlike.

Dimostrazione. (a) W è timelike, quindi per l'osservazione 1.2.2 (b) si ha che W contiene un vettore timelike e di conseguenza contiene un vettore timelike unitario. Consideriamo la base ortonormale $\{e_1, \dots, e_{n-1}, w\}$. Siccome $W^\perp \subset \text{span}\{e_i | i = 1, \dots, n-1\}$ e siccome g è definita positiva su tale span, segue che W^\perp è spacelike. Viceversa, supponiamo che W^\perp sia spacelike e consideriamo un vettore $v \in V$ timelike. Poiché $V = W \oplus W^\perp$, è possibile scrivere $v = w + \hat{w}$ per qualche $w \in W$ e $\hat{w} \in W^\perp$. Ma allora $g(w, w) = g(v, v) - g(\hat{w}, \hat{w}) < 0$, ovvero w è timelike e quindi, sempre per l'osservazione 1.2.2 (b), W è timelike.

(b) segue dal fatto che $W^{\perp\perp} = W$.

(c) Se w è lightlike, allora contiene un vettore w_0 lightlike, ma non contiene vettori timelike. Allora dalla definizione 1.2.1, per ogni $a \in \mathbb{R}$ e per ogni $w \in W$, si ha che $g(w + aw_0, w + aw_0) = g(w, w) + 2ag(w, w_0) \geq 0$. Poiché $a \in \mathbb{R}$ è arbitrario, deve necessariamente essere $g(w, w_0) = 0$ per ogni $w \in W$, questo vuol dire che $w_0 \in W^\perp$ e quindi $W \cap W^\perp \neq \{0\}$. Viceversa, se $w_0 \in W \cap W^\perp$ con $w_0 \neq 0$, allora w_0 dev'essere lightlike. Dal punto (a) segue che W non può contenere un vettore timelike (altrimenti W sarebbe timelike, per il punto (a) W^\perp sarebbe spacelike e quindi tutti i suoi vettori sarebbero spacelike), perciò W risulta essere lightlike sempre per l'osservazione 1.2.2 (b). Analogamente, W^\perp è lightlike. La dimostrazione del punto (c) si conclude ricordando che $W^{\perp\perp} = W$.

□

Corollario 1.2.4. $w \in W$ è *timelike* se e solo se $w^\perp \subset V$ è *spacelike*.

Corollario 1.2.5. Due vettori *lightlike* sono ortogonali se e solo se sono proporzionali.

Dimostrazione. Siano $v, w \in V$ *lightlike*, sia $e \in V$ un vettore *timelike* e supponiamo $g(v, w) = 0$. Per il corollario 1.2.4, v e w non possono essere ortogonali ad e , ovvero $g(e, v) \neq 0$ e $g(e, w) \neq 0$. Quindi esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $g(e, w + av) = 0$ e sempre per il corollario 1.2.4 si ha che $w + av$ è *spacelike*. Ma $g(w + av, w + av) = g(w, w) + 2ag(w, v) + g(v, v) = 0$, perciò dev'essere $w + av = 0$ e quindi v e w sono proporzionali.

Viceversa, siano $v, w \in V$ vettori *lightlike* tali che $w = av$ per qualche $a \in \mathbb{R}$, allora $g(w, v) = g(av, v) = ag(v, v) = 0$ e questo conclude la dimostrazione. \square

Definizione 1.2.6. Sia (M, g) una varietà Lorentziana e sia $\phi: N \rightarrow M$ l'immersione della varietà N . Se $d\phi_x(T_x N) \subset T_{\phi(x)} M$ ha lo stesso carattere causale per ogni $x \in N$, tale carattere viene assegnato all'immersione ϕ e alla sua immagine $\phi(N)$. Questa definizione ci aiuterà più avanti per definire il carattere causale delle curve in M e dei campi vettoriali su M .

In particolare, un campo vettoriale X definito su un aperto $\mathcal{U} \subset M$ è *timelike* (rispettivamente *spacelike*, *lightlike*) se e solo se per ogni $x \in \mathcal{U}$, $X(x)$ è *timelike* (rispettivamente *spacelike*, *lightlike*).

Definizione 1.2.7. Sia ω una 1-forma definita su $\mathcal{U} \subset M$ e sia X il campo vettoriale fisicamente equivalente ad ω . Se X presenta un carattere causale, tale carattere è assegnato anche ad ω . Per esempio, se X è un campo vettoriale *timelike*, allora $\omega = g(X, \cdot)$ è una 1-forma *timelike*.

Definizione 1.2.8. L'insieme $\mathcal{L}_0 \subset V$ di tutti i vettori *lightlike* in V prende il nome di *cono di luce* in V .

Sia (V, g) una varietà Lorentziana [9, p.5].

Proposizione 1.2.9. Il cono di luce \mathcal{L}_0 è una sottovarietà *lightlike*.

Dimostrazione. Sia $v \in \mathcal{L}_0$, quindi $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$. Sia \mathcal{U} un intorno di v che non contiene l'origine e definiamo $\tilde{g}: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ come $\tilde{g}(w) = g(w, w)$, per ogni $w \in \mathcal{U}$. L'insieme $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{U}$ è definito da $\tilde{g} = 0$. Inoltre, $d\tilde{g}$ non è mai nulla su \mathcal{U} perché g è non degenere. Perciò, per il teorema della funzione implicita, \mathcal{L}_0 è una sottovarietà di V . Dimostriamo adesso che \mathcal{L}_0 è *lightlike*. Supponiamo che esista $v \in \mathcal{L}_0$ tale per cui $w \in T_v V$ e sia $\phi_v: T_v V \rightarrow V$ l'isomorfismo canonico. Allora

$$\begin{aligned} w \in T_v(\mathcal{L}_0) &\iff w(\tilde{g}) = 0 \\ &\iff d\tilde{g}(w) = g(\phi_v(w), v) = 0 \\ &\iff g(w, \phi_v^{-1}(v)) = 0. \end{aligned}$$

Quindi $T_v(\mathcal{L}_0) = (\phi_v^{-1}(v))^\perp \subset T_v V$, ma $\phi_v^{-1}(v) \in T_v V$ è vettore *lightlike* perché $g(\phi_v^{-1}(v), \phi_v^{-1}(v)) = g(v, v) = 0$, perciò $(\mathcal{L}_0)_v$ è *lightlike* per l'osservazione 1.2.2 (b). Siccome questo vale per ogni $v \in \mathcal{L}_0$, si ha che \mathcal{L}_0 è una sottovarietà *lightlike*. \square

Osservazione 1.2.10. In generale, per uno spazio vettoriale Lorentziano (V, g) di dimensione n , l'insieme \mathcal{T}_0 dei vettori timelike è una sottovarietà aperta composta da due componenti connesse, che indichiamo con \mathcal{T}_0^+ e \mathcal{T}_0^- , ognuna di esse è diffeomorfa a \mathbb{R}^n . Se $e \in V$ è un vettore timelike, possiamo definire $\mathcal{T}_0^+ = \{v \in \mathcal{T}_0 | g(e, v) < 0\}$ e $\mathcal{T}_0^- = \{v \in \mathcal{T}_0 | g(e, v) > 0\}$.

Quando $n \geq 3$, anche il cono di luce è composto da due componenti connesse $\mathcal{L}_0^+ = \{v \in \mathcal{L}_0 | g(e, v) < 0\}$ e $\mathcal{L}_0^- = \{v \in \mathcal{L}_0 | g(e, v) > 0\}$, ognuna diffeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{n-2}$.

Se $n \geq 2$, siano $v, w \in \mathcal{L}_0^+ \cup \mathcal{T}_0^+$, allora $g(v, w) \leq 0$. Vale l'uguaglianza se e solo se $v \in \mathcal{L}_0^+$ e w è proporzionale a v .

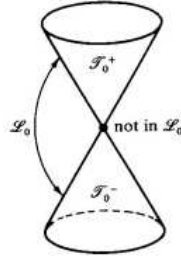


Figura 1.1

1.3 Orientabilità Temporale

In questo paragrafo andremo ad introdurre i concetti di "passato" e "futuro" su una varietà (M, g) Lorentziana connessa. Indichiamo con TM il suo fibrato tangente dotato della proiezione $\Pi: TM \rightarrow M$, definita da $\Pi(x, X) = x$. La struttura causale di $(x, X) \in TM$ coincide con la struttura causale del vettore $X \in T_x M$.

Proposizione 1.3.1. L'insieme $\mathcal{T} \subset TM$ dei punti timelike del fibrato tangente è una sottovarietà aperta di (M, g) . Inoltre, \mathcal{T} è composto o da una o da due componenti connesse.

Dimostrazione. Definiamo la mappa $K: TM \rightarrow \mathbb{R}$ data da $K(x, X) = g(X, X)$. K è C^∞ . Essendo \mathcal{T} l'antimmagine di $(-\infty, 0)$ tramite K , ne consegue che \mathcal{T} è un aperto. Indichiamo con \mathcal{A} una componente di \mathcal{T} . Se consideriamo l'omeomorfismo $\psi: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ definito da $\psi(x, X) = (x, -X)$, abbiamo che $\psi(\mathcal{A})$ è sempre una componente di \mathcal{T} . Vogliamo dimostrare che $\mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \psi(\mathcal{A})$. Chiamiamo $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \psi(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C} = \mathcal{T} - \mathcal{B}$, siccome \mathcal{B} è sia chiuso che aperto in \mathcal{T} , anche \mathcal{C} lo è. Per quanto visto all'inizio, si ha che \mathcal{B} e \mathcal{C} sono aperti di TM .

Claim: $\Pi(\mathcal{B}) \cap \Pi(\mathcal{C}) = \emptyset$. Se così non fosse, esisterebbero $(x, Z) \in \mathcal{B}$ e $(x, W) \in \mathcal{C}$, per qualche punto $x \in M$. Indichiamo con $\mathcal{Y} \subset T_x M$ la componente del sottospazio vettoriale $T_x M \cap \mathcal{T}$ a cui (x, W) appartiene (cfr. osservazione 1.2.10), per cui abbiamo

$\mathcal{C} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$. Siccome \mathcal{C} è unione di componenti di \mathcal{T} , segue che $\mathcal{Y} \subset \mathcal{C}$. Dall'altra parte abbiamo che o $(x, Z) \in \mathcal{Y}$, oppure $(x, -Z) \in \mathcal{Y}$, ma entrambi gli elementi stanno in \mathcal{B} . Per cui $\mathcal{B} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset$ e di conseguenza $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$, perché anche \mathcal{B} è unione di componenti di \mathcal{T} . Otteniamo così che $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, assurdo.

Ora sappiamo che $\Pi(\mathcal{B}) \cap \Pi(\mathcal{C}) = \emptyset$ e che $\Pi(\mathcal{B}) \cup \Pi(\mathcal{C}) = M$, ma siccome M è connesso, dev'essere necessariamente $\Pi(\mathcal{C}) = \emptyset$, da cui $\mathcal{C} = \emptyset$. Quindi $\mathcal{T} = \mathcal{A} \cup \psi(\mathcal{A})$. Se $\mathcal{A} \cup \psi(\mathcal{A}) = \emptyset$, \mathcal{T} ha due componenti, altrimenti $\mathcal{A} = \psi(\mathcal{A})$. \square

Definizione 1.3.2. La varietà Lorentziana connessa (M, g) si dice *orientabile temporalmente* se \mathcal{T} è formato da esattamente due componenti connesse.

Supponiamo ora che (M, g) sia una varietà orientabile temporalmente.

Definizione 1.3.3. (M, g) è *orientata temporalmente* se una componente viene indicata con \mathcal{T}^+ ed è chiamata *futuro*. La componente complementare di \mathcal{T}^+ in \mathcal{T} viene indicata con \mathcal{T}^- ed è chiamata *passato*.

Definizione 1.3.4. Sia $\psi : \mathcal{T} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ una funzione suriettiva $C^\infty(M)$ definita da $\psi(x, W) = g(W, X)$, con X un campo vettoriale causale su (M, g) . Di conseguenza \mathcal{T} non è connesso e (M, g) è orientabile temporalmente. Se identifichiamo $\psi^{-1}(-\infty, 0)$ come \mathcal{T}^+ , possiamo dire che (M, g) è orientata temporalmente da X . Il futuro \mathcal{T}^+ è la componente connessa di \mathcal{T} la cui chiusura contiene i vettori $X(x)$, per ogni $x \in M$.

Definizione 1.3.5. Sia (M, g) una varietà Lorentziana orientata temporalmente di dimensione ≥ 3 e sia $\Pi : TM \rightarrow M$ la proiezione definita ad inizio paragrafo. Per ogni $x \in M$, definiamo $\mathcal{T}_x^+ = \mathcal{T}^+ \cap \Pi^{-1}(x) \subset T_x M$ e \mathcal{L}_x^+ la componente corrispondente del cono di luce in $T_x M$, chiamata *cono di luce futuro* in $T_x M$. Un vettore $W \in T_x M$ è detto *rivolto verso il futuro* se appartiene a $\mathcal{T}_x^+ \cup \mathcal{L}_x^+$. Un campo vettoriale X definito su $\mathcal{U} \subset M$ è detto *rivolto verso il futuro* se $X(x) \in T_x M$ è rivolto verso il futuro, per ogni $x \in \mathcal{U}$. Una 1-forma differenziale ω definita su $\mathcal{U} \subset M$ è detta *rivolta verso il futuro* se e solo se il campo vettoriale ad essa fisicamente equivalente è rivolto verso il futuro.

Il *cono di luce passato* in $T_x M$ ed i vettori, campi vettoriali e 1-forme *rivolte verso il passato* sono definite dualmente.

1.4 Spaziotempo

Definizione 1.4.1. Si definisce *spaziotempo* la terna (M, g, ∇) , dove (M, g) è una varietà Lorentziana orientata, orientata temporalmente, connessa e di dimensione $n = 4$, mentre ∇ è la connessione di *Levi-Civita* di g su M .

Talvolta è solito indicare uno spaziotempo con (M, g) invece che con (M, g, ∇) . Siano ora (M, g) e (N, h) due spaziotempi diversi.

Definizione 1.4.2. Diciamo che (N, h) contiene (M, g) se e solo se M è una sottovarietà aperta di N , $h|_M = g$ ed (M, g) presenta l'orientazione e l'orientazione temporale indotte da (N, h) .

Uno spaziotempo (M, g) è detto *massimale* se ogni spaziotempo che contiene (M, g) coincide con (M, g) stesso.

La seguente proposizione ci permette di caratterizzare uno spaziotempo massimale come una varietà in cui da fuori non è possibile osservare dentro di essa e viceversa, ovvero dal suo interno non è possibile osservare cosa c'è al di fuori.

Proposizione 1.4.3. Siano (N, h) e (M, g) due spaziotempi tali per cui (N, h) contiene (M, g) . Se, per ogni geodetica lightlike $\lambda : \mathcal{E} \rightarrow N$ tale che $(\lambda(\mathcal{E})) \cap M \neq \emptyset$, si ha che $\lambda(\mathcal{E}) \subset M$, allora $M = N$.

1.4.1 Esempi di Spaziotempo

In questo paragrafo definiremo in modo matematico i tre esempi più importanti di spaziotempo in fisica.

Esempio 1.4.1. SPAZIOTEMPO DI MINKOWSKI. Su \mathbb{R}^4 definiamo il tensore metrico $g = \sum_{\mu=1}^3 du^\mu \otimes du^\mu - du^4 \otimes du^4$, la varietà (\mathbb{R}^4, g) è orientata temporalmente da ∂_4 , mentre \mathbb{R}^4 è orientato dalla 4-forma $du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \wedge du^4$. La connessione di Levi-Civita rispetto a g è definita dall'uguaglianza $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$, per ogni $i, j = 1, \dots, 4$. La terna $(\mathbb{R}^4, g, \nabla)$ è uno spaziotempo, chiamato spazio di Minkowski

Esempio 1.4.2. SPAZIOTEMPO DI SCHWARZSCHILD Consideriamo la 2-sfera unitaria $(\mathcal{S}^2, h, \zeta)$, dove $\mathcal{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$, h è la metrica standard indotta su \mathcal{S}^2 e ζ l'elemento di volume standard su \mathcal{S}^2 . Dato $\mu \in (0, +\infty)$, definiamo $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ come $\mathcal{A} = (u^1)^{-1}[(0, 2\mu) \cup (2\mu, +\infty)]$, dove $u^1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione sul primo fattore. Di conseguenza \mathcal{A} è aperto ed è formato da due componenti connesse. Definiamo anche $M = \mathcal{S}^2 \times \mathcal{A}$, dotato delle proiezioni $\pi_S : M \rightarrow \mathcal{S}^2$ e $\pi_A : M \rightarrow \mathcal{A}$, e definiamo le mappe $r = u^1 \circ \pi_A : M \rightarrow (0, 2\mu) \cup (2\mu, +\infty)$ e $t = u^2 \circ \pi_A : M \rightarrow \mathbb{R}$. Ne consegue che $(1 - \frac{2\mu}{r})$ è una funzione C^∞ da M in $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Definiamo su M una metrica Lorentziana g nel seguente modo: $g = (1 - \frac{2\mu}{r})^{-1} dr \otimes dr + r^2 \pi_S^* h - (1 - \frac{2\mu}{r}) dt \otimes dt$. Infine definiamo, sempre su M , due campi vettoriali $\partial/\partial t$ e $\partial/\partial r$ tali che: $d\pi_S(\partial/\partial t) = 0 = d\pi_S(\partial/\partial r)$, $d\pi_A(\partial/\partial t) = \partial_1$ e $d\pi_A(\partial/\partial r) = \partial_2$.

Definiamo $N = r^{-1}(2\mu, +\infty) \subset M$. Quindi N è connesso e $g|_N$ è una metrica Lorentziana. Il campo vettoriale $(\partial/\partial t)|_N$ è timelike (relativamente a $g|_N$). La varietà $(N, g|_N)$ orientata temporalmente da $\partial/\partial t|_N$ ed orientata dalla 3-forma di volume $(dr \wedge \pi_S^* \zeta \wedge dt)|_N$ prende il nome di spaziotempo normale di Schwarzschild di massa attiva $\bar{m} = 8\pi\mu$.

Un'interpretazione fisica sommaria di N è la seguente: se si considera una stella stabile, a simmetria sferica, di raggio r_0 e massa attiva \bar{m} tale che $r_0 \gg \bar{m}$, allora la sottovarietà aperta \mathcal{U} di N definita da $r > r_0$ è un ottimo modello per descrivere la

storia completa dell'esterno della stella.

Adesso definiamo $B = r^{-1}(0, 2\mu) \subset M$. Di conseguenza B è connesso e $g|_B$ è una metrica Lorentziana su B . Il campo vettoriale $(\partial/\partial r)|_B$ è timelike (relativamente a $g|_B$). La varietà $(B, g|_B)$ orientata temporalmente da $\partial/\partial r|_B$ ed orientata dalla 3-forma di volume $(dr \wedge \pi_S^* \zeta \wedge dt)|_B$ è uno spaziotempo che prende il nome di buco nero di Schwarzschild di massa attiva $\bar{m} = 8\pi\mu$.

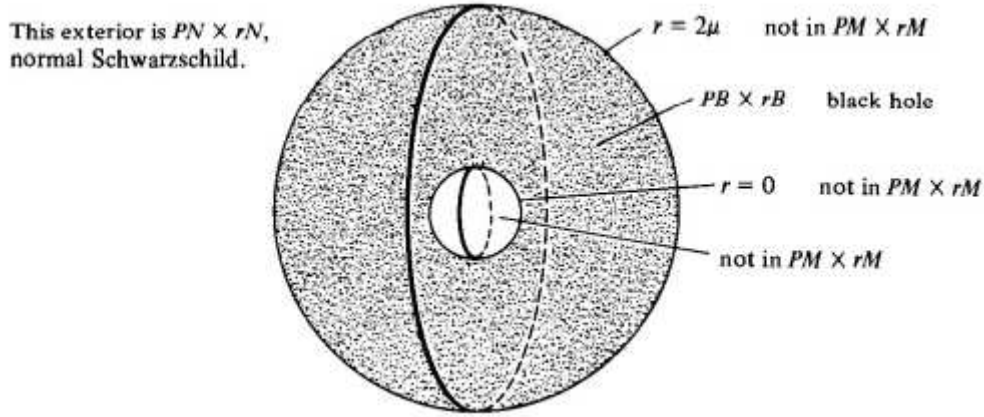


Figura 1.2: Disegno di $\pi_S(M) \times r(M)$, è stato necessario rimuovere una dimensione

Esempio 1.4.3. SPAZIOTEMPO DI EINSTEIN-DE SITTER Definiamo $M = \mathbb{R}^3 \times \mathcal{F}$, dove \mathcal{F} indica un intervallo aperto in \mathbb{R} . Sia $R : \mathcal{F} \rightarrow (0, +\infty)$ una funzione, se consideriamo M come un sottinsieme di \mathbb{R}^4 possiamo definire il tensore metrico g su M come

$$g = \left\{ (R \circ u^4)^2 \sum_{\mu=1}^3 du^\mu \otimes du^\mu \right\} - du^4 \otimes du^4.$$

Tale g è una metrica Lorentziana su M , mentre ∂_4 è un campo vettoriale timelike su (M, g) . La terna (M, g, ∇) orientata temporalmente da ∂_4 ed orientata dalla 4-forma $du^1 \wedge du^2 \wedge du^3 \wedge du^4$ è uno spaziotempo detto spaziotempo cosmologico semplice. Se invece si ha che $\mathcal{F} = (0, +\infty)$ e R è data da $R(u) = u^{2/3}$, allora (M, g, ∇) prende il nome di spaziotempo di Einstein-de Sitter.

1.5 Osservatori

Indicheremo con M, N due varietà C^∞ .

Definizione 1.5.1. Sia $\phi : N \rightarrow M$ una funzione C^∞ e sia $T_s^r(TM)$ il fibrato tensoriale di tipo (r, s) su M , dotato della proiezione $\pi : T_s^r(TM) \rightarrow M$ definita da $\pi(Q, t) = Q$,

per ogni $Q \in M$ e per ogni $t \in T_s^r(T_Q M)$. Un *campo tensoriale di tipo* (r, s) su ϕ è una mappa $A : N \rightarrow T_s^r(TM)$ tale per cui $\pi \circ A = \phi$. Due casi di particolare interesse sono i seguenti:

- (a) se $N = M$ e $\phi = \text{identità}$, in questo caso un campo tensoriale su ϕ coincide con la classica definizione di campo tensoriale;
- (b) se $\phi : N \rightarrow M$ fosse una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$, con $N = \mathcal{E}$, allora si indica con $\gamma_* : \mathcal{E} \rightarrow TM$ il campo vettoriale tangente di γ .

Definizione 1.5.2. Una *funzione su* ϕ è una funzione $f : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Definizione 1.5.3. Una *derivazione di campi tensoriali su* ϕ è l'assegnazione di un campo tensoriale DA su ϕ ad ogni campo tensoriale A su ϕ tale che:

- (a) DA è dello stesso tipo di A ;
- (b) $D(C \otimes A) = DC \otimes A + c \otimes DA$, per ogni campo tensoriale C su ϕ ;
- (c) $D(aA + bB) = aDA + bDB$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni campo tensoriale B su ϕ .

Definizione 1.5.4. Sia $\phi : N \rightarrow M$ una funzione C^∞ . Una *connessione* D su ϕ è l'assegnazione, ad ogni campo vettoriale X su N , di una derivazione D_X di campi tensoriali su ϕ tale che:

1. se f è una funzione su ϕ , allora $D_X f = X(f)$;
2. D_X è lineare in X rispetto alle funzioni C^∞ su N ;
3. D_X commuta con le contrazioni.

Osservazione 1.5.5. (a) Se $N = M$ e $\phi = \text{identità}$, allora una connessione su ϕ è semplicemente una connessione su M ;

- (b) se $\phi : N \rightarrow M$ è una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$, sia \bar{D} una connessione su M e sia $\phi : N \rightarrow M$ la funzione considerata nella definizione precedente. Tramite \bar{D} è possibile definire una connessione su ϕ come segue: la connessione indotta $\phi^*(\bar{D})$ è l'unica connessione su ϕ tale per cui vale

$$(\phi^*(\bar{D}))_X(A \circ \phi) = \bar{D}_{d\phi(Q)}(A)$$

per ogni $X \in N_Q$, per ogni $Q \in N$ e per ogni campo tensoriale A su M .

Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo e $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ una curva. Per rendere più fruibile il testo, introduciamo la seguente notazione:

$$D_{\gamma_*} A \quad \text{al posto di} \quad (\gamma^*(D))_{d/du}(A \circ \gamma),$$

dove A è campo tensoriale su M ,

$$D_{\gamma_*} X \quad \text{al posto di} \quad (\gamma^*(D))_{d/du} X,$$

con X campo tensoriale su γ ,

$$g(\gamma_*, X) \quad \text{al posto di} \quad (g \circ \gamma)(\gamma_*, X \circ \gamma),$$

e

$$|\gamma_*|^2 \quad \text{al posto di} \quad |(g \circ \gamma)(\gamma_*, \gamma_*)|.$$

Definizione 1.5.6. Con queste notazioni, definiamo l'*accelerazione* A_γ di γ come il campo vettoriale su γ tale che $A_\gamma = D_{\gamma_*} \gamma_*$.

Definizione 1.5.7. Dalla definizione precedente segue che γ è una geodetica se e solo se $A_\gamma = 0$.

Arriviamo finalmente alla definizione chiave di questo paragrafo:

Definizione 1.5.8. Un *osservatore* su M è una curva timelike $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$, rivolta verso il futuro e tale per cui $|\gamma_*| = 1$.

Segue dalla definizione 1.2.6 che una curva $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è timelike se lo è il suo campo vettoriale tangente γ_* in ogni punto di \mathcal{E} . Il fatto che un osservatore sia timelike, equivale a dire che esso viaggia con velocità minore di quella della luce, mentre dev'essere diretto verso il futuro per il fatto che un osservatore fisico si muove avanti nel tempo in modo continuo.

Definizione 1.5.9. L'immagine $\gamma(\mathcal{E})$ rappresenta una parte di storia dell'osservatore, per questo motivo viene chiamata *linea di universo* (oppure *world line*).

Il parametro $u \in \mathcal{E}$ viene detto *tempo proprio* dell'osservatore γ e rappresenta il tempo misurato da un orologio la cui storia coincide con $\gamma(\mathcal{E})$.

Il tempo proprio di un osservatore può essere misurato come una lunghezza d'arco

$$\int_a^u |\gamma_* s| ds = \int_a^u ds = u - a,$$

mentre γ_* rappresenta la 4-velocità dell'osservatore e di conseguenza A_γ è la sua 4-accelerazione.

Definizione 1.5.10. Un osservatore si dice che è in *caduta libera* se γ è una geodetica.

Osservazione 1.5.11. In fisica, un osservatore è in caduta libera se non subisce l'effetto di forze esterne, fatta al più eccezione per la forza di gravità.

Spesso è sufficiente conoscere il vettore tangente all'osservatore in un punto. Perciò risulta utile introdurre il concetto di "osservatore istantaneo".

Definizione 1.5.12. Si definisce *osservatore istantaneo* la coppia ordinata (z, Z) , con $z \in M$ e $Z \in T_z M$ vettore timelike diretto verso il futuro.

Esempio 1.5.1. Sia (N, g) lo spaziotempo di Schwarzschild normale (cfr. esempio 1.4.2). Se W è un campo vettoriale unitario, timelike, diretto verso il futuro e proporzionale a $\partial/\partial t$ in ogni punto, allora una curva integrale di W è detta *osservatore stazionario*. Inoltre, la coppia $(x, W(x))$, per ogni $x \in N$, prende il nome di *osservatore stazionario istantaneo*.

Esempio 1.5.2. Sia (M, g) lo spaziotempo di Einstein-de Sitter (cfr. esempio 1.4.3). Abbiamo già visto che il campo vettoriale unitario $Z = \partial_4$ è timelike e diretto verso il futuro. Si ha che una curva integrale di Z è detta *osservatore comoving*, mentre le coppie $(x, Z(x))$, per ogni $x \in M$, vengono indicate con il nome di *osservatori comoving istantanei*.

Supponiamo adesso che (z, Z) sia un osservatore istantaneo e sia $X \in T_z M$ un vettore causale diretto verso il futuro (potrebbe anche essere $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore differente tale che $\gamma(u) = z$ e $\gamma_*(u) = X$). Allora si avrebbe un'unica decomposizione ortogonale $X = eZ + p$, dove $p \in Z^\perp$, mentre $e = -g(Z, X) \in \mathbb{R}^+$.

Definizione 1.5.13. Il vettore p/e è la *velocità Newtoniana* (di X o di γ) osservata da (z, Z) di modulo $|p|/e$.

Definizione 1.5.14. Il sottospazio $T := \text{Span}(Z) \subset T_z M$ timelike di dimensione uno, prende il nome di *asse temporale locale* dell'osservatore istantaneo (z, Z) . Mentre $R := Z^\perp$ è il suo *spazio locale in quiete*. Infine, chiameremo *decomposizione ortogonale associata all'osservatore istantaneo* (z, Z) la somma diretta $Z^\perp \oplus \text{Span}(Z) = T_z M$.

Indichiamo con $p : T_z M \rightarrow R$ la proiezione ortogonale. Se $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ è un osservatore, le definizioni precedenti si applicano all'osservatore istantaneo $(\gamma(u), \gamma_*(u))$, per cui $R_u = (\gamma_*(u))^\perp$ è il suo spazio locale in quiete e $T_u = \text{Span}(\gamma_*(u))$.

Osservazione 1.5.15. La 4-accelerazione $A_\gamma(u)$ appartiene allo spazio locale in quiete R_u , per ogni $u \in \mathcal{E}$.

Definizione 1.5.16. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo e $p : T_z M \rightarrow R$ la proiezione ortogonale di cui sopra. È possibile definire il *tensore proiezione* h associato a (z, Z) come segue

$$h(X, Y) = g_z(p(X), p(Y)),$$

per ogni $X, Y \in T_z M$.

Proposizione 1.5.17. Il tensore h è una forma bilineare simmetrica su $T_z M$ che gode delle seguenti proprietà:

- $h|_R = g(z)|_R$;

- $h(Z, \cdot) = 0$;
- $h(Z, \cdot) = g_z(X, \cdot)$ se e solo se $g_z(X, Z) = 0$;
- $C_1^1(\tilde{h}) = 3$, dove \tilde{h} è il tensore di tipo $(1, 1)$ fisicamente equivalente a h ;
- $\tilde{h} = p$.

Definizione 1.5.18. L'angolo Newtoniano θ tra due vettori $X, Y \in T_z M$ osservato da (z, Z) si ottiene da

$$\cos(\theta) = \frac{h(X, Y)}{[h(X, X)h(Y, Y)]^{1/2}},$$

ovvero, prima si proiettano i vettori sul sottospazio $R = Z^\perp$ e poi si usano le note formule di geometria euclidea.

Osservazione 1.5.19. L'angolo θ dipende non solo dai vettori X e Y , ma anche dal vettore Z .

Analogamente si definisce

Definizione 1.5.20. la lunghezza Newtoniana di X osservata da (z, Z) la quantità $[h(X, X)]^{1/2}$.

1.6 Isotropia Spaziale

Sia (z, Z) un osservatore istantaneo. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{O}^3 = \{\psi : T_z M \longrightarrow T_z M \mid \psi(Z) = Z, g_z(X, Y) = g_z(\psi(X), \psi(Y)), \forall X, Y \in T_z M\}.$$

Sia $\psi \in \mathcal{O}^3$ e sia $T_z M = R \oplus T$ la decomposizione ortogonale associata di $T_z M$. Poiché $\psi|_T = \text{identità}$, si ha che ψ è completamente determinata da $\psi|_R$. Di conseguenza \mathcal{O}^3 è isomorfo al gruppo degli automorfismi di R che conserva il prodotto interno definito positivo $g_z|_R$, ovvero \mathcal{O}^3 è isomorfo al gruppo delle rotazioni di \mathbb{R}^3 .

Per ogni $\psi \in \mathcal{O}^3$, sia $\psi_s^r : T_s^r(T_z M) \longrightarrow T_s^r(T_z M)$ l'unica estensione di ψ ad un isomorfismo di $T_s^r(T_z M)$ tale per cui

$$(\psi_s^r A)(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = A(\psi^*(\omega^1), \dots, \psi^*(\omega^r), \psi(v_1), \dots, \psi(v_s)),$$

per ogni $A \in T_s^r(T_z M)$, per ogni $\omega^1, \dots, \omega^r \in T_z^* M$ e per ogni $v_1, \dots, v_s \in T_z M$, con $\psi^* : T_z^* M \longrightarrow T_z^* M$ isomorfismo aggiunto di ψ .

Definizione 1.6.1. Il tensore $T \in T_s^r(T_z M)$ è detto *spazialmente isotropo* per (z, Z) se $\psi_s^r(T) = T$, per ogni $\psi \in \mathcal{O}^3$.

Supponiamo adesso di avere $\phi : M \longrightarrow M$ un'isometria che preserva l'orientamento e l'orientamento temporale, tale per cui $\phi(z) = z$ e $\phi_*(Z) = Z$. Ne consegue che $\phi_* \in \mathcal{O}^3$.

Definizione 1.6.2. La varietà (M, g) si dice *spazialmente isotropa* per (z, Z) se dati due versori $X_1, X_2 \in R$ qualsiasi, esiste un'isometria $\phi : M \longrightarrow M$ come sopra tale che $\phi_*(X_1) = X_2$.

1.7 Sistemi di Riferimento

In questo paragrafo daremo la definizione matematica del concetto di "famiglia di osservatori". Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo.

Definizione 1.7.1. Un *sistema di riferimento* Q su uno spaziotempo M è un campo vettoriale tale per cui ogni sua curva integrale è un osservatore. Esse prendono il nome di *osservatori in* Q .

Per cui un campo vettoriale Q su uno spaziotempo M è un sistema di riferimento se e solo se $g(Q, Q) = -1$ e Q è rivolto verso il futuro.

Definizione 1.7.2. Il sistema di riferimento Q si dice *geodetico* se $\nabla_Q Q = 0$.

Osservazione 1.7.3. *Tutti gli osservatori in un sistema di riferimento geodetico sono in caduta libera.*

Per il resto del paragrafo Q sarà un sistema di riferimento. Sia, invece, ω la 1-forma fisicamente equivalente a Q . Indichiamo con $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore in Q , allora si ha che $du = -\gamma^*(\omega)$ poiché $(\gamma^*(\omega))(d/du) = \omega(\gamma_*) = g(Q, \gamma_*) = g(\gamma_*, \gamma_*) = -1$. Quindi le proprietà geometriche di γ possono essere messe in relazione con i tempi propri degli osservatori in Q come segue.

Definizione 1.7.4. Q si dice:

- *localmente sincronizzabile* se $\omega \wedge d\omega = 0$;
- *localmente sincronizzabile secondo il tempo proprio* se $d\omega = 0$;
- *sincronizzabile* se esistono due funzioni $h, t : M \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tali che $h > 0$ e $\omega = -hdt$;
- *sincronizzabile secondo il tempo proprio* se $\omega = -dt$.

Osservazione 1.7.5. *Siccome $-hdt \wedge d(-hdt) = 0$, un sistema di riferimento sincronizzabile è anche localmente sincronizzabile. In modo analogo si ha che se $\omega = -dt$, allora $d\omega = d(-dt) = 0$. Quindi un sistema di riferimento sincronizzabile secondo il tempo proprio è anche localmente sincronizzabile secondo il tempo proprio.*

Viceversa, se Q è localmente sincronizzabile (rispettivamente, localmente sincronizzabile secondo il tempo proprio), allora la restrizione di Q ad ogni insieme aperto sufficientemente piccolo è un sistema di riferimento sincronizzabile (rispettivamente, sincronizzabile secondo il tempo proprio).

Definizione 1.7.6. Se Q è sincronizzabile (rispettivamente, sincronizzabile secondo il tempo proprio), allora la funzione t di cui sopra prende il nome di *funzione tempo* (rispettivamente, *funzione tempo proprio*).

Osservazione 1.7.7. *Se esiste una funzione tempo, essa non è unica. Se esiste una funzione tempo proprio, allora vale $du = \gamma^*(dt)$, per ogni osservatore γ in Q .*

Il nostro prossimo obiettivo sarà quello di formalizzare il concetto di "osservatori vicini" in un sistema di riferimento Q . Sia $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore in Q e siano $p_u : T_{\gamma(u)}M \rightarrow R_u$ e $q_u : T_{\gamma(u)}M \rightarrow T_u$ le proiezioni rispettivamente su $R_u = (\gamma_*(u))^\perp$ e $T_u = \text{Span}(\gamma_*(u))$, con $(\gamma(u), \gamma_*(u))$ osservatore istantaneo al tempo u . Se X è un campo vettoriale su γ , allora anche $p(X)$ e $q(X)$ sono campi vettoriali su γ definiti da: $p(X)(u) = p_u(X(u))$ e $q(X)(u) = q_u(X(u))$.

Definizione 1.7.8. Un campo vettoriale W su γ è detto *vicino di γ in Q* se esiste un campo vettoriale W' su γ tale che $p(W') = W$ e $\mathcal{L}_Q W' = 0$.

Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo.

Proposizione 1.7.9. *Esiste esattamente una connessione F su γ tale che*

$$F_Y X = [p(\gamma^*(\nabla))_Y p + q(\gamma^*(\nabla))_Y q]X$$

per ogni campo vettoriale Y su \mathcal{E} e per ogni campo vettoriale X su γ .

Dimostrazione. La connessione $F_Y X$ è \mathbb{R} -lineare in X ed è C^∞ -lineare (rispetto alle funzioni su γ) in Y per le proprietà di ∇ . Inoltre, se f è una funzione su γ di classe C^∞ , allora, sempre dalle proprietà di ∇ , segue che

$$F_Y(fX) = fF_Y X + Y(f)(p \circ p + q \circ q)(X) = fF_Y X + Y(f)X,$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene dal fatto che $R_u \oplus T_u$. Per concludere, se vogliamo che valga $F_Y(f) = Y(f)$, allora esiste un'unica estensione di F ad una derivazione di campi tensoriali su γ che commuta con le contrazioni [9, 2.0.1]. \square

La connessione F prende il nome di *connessione di Fermi-Walker* su γ . Useremo la notazione F_{γ_*} al posto di $F_{d/du}$. Riassumiamo le principali proprietà di F nella seguente proposizione.

Proposizione 1.7.10. *Siano X, Y campi vettoriali su γ . La connessione di Fermi-Walker F soddisfa alle seguenti:*

- (a) $F_{\gamma_*} X = \nabla_{\gamma_*} X + g(\gamma_*, X)A_\gamma - g(A_\gamma, X)\gamma_*$, dove A_γ indica la 4-accelerazione di γ .
In particolare, $F = \gamma^*(\nabla)$ se e solo se γ è in caduta libera.
- (b) $\frac{d}{du}g(X, Y) = g(F_{\gamma_*} X, Y) + g(X, F_{\gamma_*} Y)$.
- (c) $F_{\gamma_*} \gamma_* = 0$.

(d) Se $X(u) \in R_u$ e $Y(u) \in R_u$ per ogni $u \in \mathcal{E}$, allora

$$(F_{\gamma_*} X)(u) \in R_u, \quad (F_{\gamma_*} Y)(u) \in R_u \quad \forall u \in \mathcal{E},$$

e vale

$$g(F_{\gamma_*} X, Y) = g(\nabla_{\gamma_*} X, Y).$$

Definizione 1.7.11. Sia W un vicino di γ in Q e F la connessione di *Fermi-Walker*. $F_{\gamma_*} W$ è la *3-velocità* di W relativa a γ , mentre $F_{\gamma_*}^2 W \equiv F_{\gamma_*}(F_{\gamma_*}(W))$ è la *3-accelerazione* di W relativa a γ .

Osservazione 1.7.12. Sia $(F_{\gamma_*} W)(u)$ che $(F_{\gamma_*}^2 W)(u)$ appartengono allo spazio locale in quiete R_u di $(\gamma(u), \gamma_*(u))$ per la proposizione 1.7.10 (d).

Per proseguire nella trattazione abbiamo bisogno di introdurre alcune notazioni. Sia (z, Z) un osservatore istantaneo e $T_z M = R \oplus T$ la sua decomposizione ortogonale associata. Indichiamo con \tilde{R} il tensore curvatura associato allo spaziotempo (M, g, ∇) e definiamo la trasformazione lineare $\psi_Z : R \rightarrow R$ come la trasformazione che associa ogni vettore $X \in R$ al vettore $\psi_Z(X) = \tilde{R}_{ZX} Z$. Il fatto che $\psi_Z(R) \subset R$ segue dalla proprietà di antisimmetria di \tilde{R} rispetto a g , infatti $g(\psi_Z(X), Z) = g(\tilde{R}_{ZX} Z, Z) = 0$, per ogni $X \in R$. Inoltre, ψ_Z è simmetrica rispetto a $g_{z|R}$ perché $g(\psi_Z(X), Z) = g(\tilde{R}_{ZX} Z, Y) = g(\tilde{R}_{ZY} Z, X) = g(\psi_Z(Y), X)$, per ogni $X, Y \in R$.

Proposizione 1.7.13. Sia Q un sistema di riferimento geodetico e W un vicino di un osservatore $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ in Q . Allora la *3-accelerazione* di W relativa a γ soddisfa $F_{\gamma_*}^2 W = \psi(W)$, dove $(\psi(W))(u) = \psi_{\gamma_*(u)}(W(u))$, per ogni $u \in \mathcal{E}$.

Osservazione 1.7.14. La proposizione precedente ci permette di verificare se un sistema di riferimento in caduta libera si trova in uno spaziotempo isometrico a quello di Minkowski oppure no. Infatti, se consideriamo due corpi in caduta libera in tale sistema di riferimento, se le loro *3-accelerazioni* reciproche sono non nulle, segue che la curvatura $\tilde{R} \neq 0$ e quindi lo spaziotempo non è isometrico a quello di Minkowski.

Proposizione 1.7.15. Sia Q un sistema di riferimento e $\gamma : \mathcal{E} \rightarrow M$ un osservatore in Q . La trasformazione lineare $A_Q : R_u \rightarrow R_u$ data da $A_Q(X) = -\nabla_X Q$, assegna ad ogni vicino di γ in Q l'opposto della sua *3-velocità* relativa a γ .

Definizione 1.7.16. Un sistema di riferimento Q si dice:

- *irrotazionale* in $x = \gamma(u)$ se A_Q è simmetrica rispetto a $g_{x|R_u}$;
- *rigido* in $x = \gamma(u)$ se A_Q è antisimmetrica rispetto a $g_{x|R_u}$;
- *irrotazionale (o rigido)* se è irrotazionale (o rigido) in ogni punto $x \in M$.

Osservazione 1.7.17. *Dalla proposizione 1.7.15 segue che $A_Q : R_u \rightarrow R_u$ è un oggetto algebrico che ci fornisce una descrizione infinitesimale completa in $x = \gamma(u)$ del comportamento degli osservatori vicini a γ in Q , relativamente a γ stesso. Per esempio, supponiamo che Q sia irrotazionale in x , quindi, data un'opportuna base ortonormale di R_u , la matrice di A_Q è una matrice diagonale. Di conseguenza, in un intorno di x , gli osservatori in Q vicini a γ non presentano rotazioni.*

D'altra parte, supponiamo Q rigido in x , allora la matrice di A_Q , relativa ad un'opportuna base ortonormale $\{X_1, X_2, X_3\}$ di R_u , è

$$\begin{bmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Questa matrice è il generatore infinitesimale di una rotazione di R_u attorno al terzo asse. Pertanto, in un intorno di x , gli osservatori in Q ruoteranno in modo rigido attorno a γ , ma senza avvicinarsi o allontanarsi dall'osservatore.

Proposizione 1.7.18. *Un sistema di riferimento è irrotazionale se e solo se è localmente sincronizzabile.*

Dimostrazione. Sia Q un sistema di riferimento ed ω la 1-forma fisicamente equivalente a Q . In un intorno sufficientemente piccolo, siano X, Y campi vettoriali tali che $g(Q, X) = g(Q, Y) = 0$ in ogni punto. Allora in questo intorno, per ogni coppia di campi vettoriali X, Y così definiti, si ha che $\omega \wedge d\omega = 0 \iff d\omega(X, Y) = 0 \iff \omega([X, Y]) = 0 \iff g(Q, [X, Y]) = 0$. Dalle proprietà della connessione di Levi-Civita ∇ otteniamo $g(Q, [X, Y]) = 0 \iff g(\nabla_X Y) = g(\nabla_Y X) \iff g(A_Q X, Y) - g(X, A_Q Y) = 0$. \square

Capitolo 2

Elettromagnetismo, materia e spaziotempo

In questo capitolo analizzeremo l'elettromagnetismo, la materia, la loro mutua interazione e l'influenza che lo spaziotempo ha su di loro. Sia (M, g, ∇) uno spaziotempo.

2.1 Particelle

Data $m \in [0, \infty)$, definiamo:

Definizione 2.1.1. una particella con massa a riposo m come una curva $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow M$ rivolta verso il futuro tale per cui $g(\dot{\gamma}_*, \dot{\gamma}_*) = -m^2$.

Qui m è l'analogo della massa inerziale newtoniana. Talvolta si è soliti usare anche la notazione (γ, m) per indicare una particella con massa a riposo pari ad m .

Osservazione 2.1.2. *Nel caso in cui γ fosse una particella con massa a riposo non nulla, esisterebbe una riparametrizzazione γ' tale per cui γ' risulta essere un osservatore. Per questo motivo possiamo adottare la stessa terminologia del paragrafo 1.5 anche per le particelle.*

Definizione 2.1.3. Il vettore tangente $\dot{\gamma}_*$ è detto vettore energia-momento della particella γ .

Osservazione 2.1.4. *Consideriamo ora un osservatore istantaneo (z, Z) tale per cui $z = \gamma(u)$, con $u \in \mathcal{E}$. Come osservato nel paragrafo 1.5, abbiamo la seguente scomposizione ortogonale del vettore energia-momento $\dot{\gamma}_*(u) = eZ + p$, dove $p \in Z^\perp$ è il 3-momento di γ misurato da (z, Z) , mentre $e = -g(\dot{\gamma}_*(u), Z) \in \mathbb{R}$ è l'energia di γ misurata da (z, Z) . Si osservi che $e > 0$, anche quando $m = 0$. Inoltre, indichiamo con $\vec{v} = p/e$ la velocità newtoniana di $\dot{\gamma}_*(u)$ misurata da (z, Z) .*

È possibile assegnare ad ogni particella una carica elettrica $e \in \mathbb{R}$. Talvolta scriveremo (γ, m, e) per indicare una particella di massa a riposo m e carica elettrica e . Empiricamente troviamo che la carica elettrica è nulla quando $m = 0$, come, ad esempio, nel caso dei fotoni.

Supponiamo ora di aver un gran numero di particelle, tutte con la stessa massa a riposo $m \in [0, \infty)$ e supponiamo che tutti i vettori energia-momento attorno ad un qualsiasi punto siano uguali.

Definizione 2.1.5. Definiamo un flusso di particelle di massa a riposo m come la coppia (P, η) , dove $\eta: M \rightarrow [0, \infty)$ è una funzione su M detta densità di universo e $P: M \rightarrow TM$ è il campo vettoriale energia-momento tale per cui ogni sua curva integrale è una particella con massa a riposo m . Segue che P è rivolto verso il futuro e vale $g(P, P) = -m^2$ in ogni punto della varietà.

Facciamo ora una breve digressione per introdurre alcuni strumenti matematici. Consideriamo la forma di volume Ω e un campo vettoriale X su M e definiamo

Definizione 2.1.6. l'operatore prodotto interno $i(X)$ come: per ogni ω q -forma su M , con $q > 0$, allora $i(X)\omega$ è una $(q - 1)$ -forma tale che

$$i(X)\omega(Z_1, \dots, Z_{q-1}) = q\omega(X, Z_1, \dots, Z_{q-1}),$$

per ogni Z_1, \dots, Z_{q-1} campi vettoriali su M .

Sia \mathcal{N}_0 il cilindro standard nello spaziotempo di Minkowski $(\mathbb{R}^4, g, \nabla)$ definito come $\mathcal{N}_0 = \{(u^1, \dots, u^4) \mid \sum_{\nu=1}^3 u^\nu u^\nu \leq 1, |u^4| \leq 1\}$.

Definizione 2.1.7. Una causal box su M è un embedding $\phi: \mathcal{N}_0 \rightarrow M$, con $\phi \in \mathcal{C}^\infty$, che preserva l'orientazione, l'orientazione temporale e la struttura causale di ogni varietà di bordo di \mathcal{N}_0 .

Si usa il termine *causal box* anche per indicare l'immagine di \mathcal{N}_0 tramite ϕ . Infine,

Definizione 2.1.8. una space section \mathcal{D} è la varietà con bordo orientata $\bar{\mathcal{B}}_2 := \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{C}_2$, dove $\mathcal{B}_2 = \{(u^1, u^2, u^3, 1) \mid \sum_{\nu=1}^3 u^\nu u^\nu < 1\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{(u^1, u^2, u^3, 1) \mid \sum_{\nu=1}^3 u^\nu u^\nu = 1\}$.

Data una space section \mathcal{D} , possiamo definire la quantità $N = \int_{\mathcal{D}} i(\eta P)\Omega$ come il numero totale di particelle presenti nella regione \mathcal{D} .

Definizione 2.1.9. Definiamo la divergenza del campo vettoriale X come l'unica funzione \mathcal{C}^∞ , che indichiamo con $\text{div}X: M \rightarrow \mathbb{R}$, tale che $d[i(X)\Omega] = (\text{div}X)\Omega$.

Definizione 2.1.10. Diremo che un campo vettoriale X soddisfa:

1. una legge di conservazione differenziale se e solo se $\text{div}X = 0$;
2. una legge di conservazione integrale se e solo se $\int_{\partial \mathcal{N}} i(X)\Omega = 0$, per ogni causal box \mathcal{N} .

Proposizione 2.1.11. *Il campo vettoriale X soddisfa una legge di conservazione differenziale se e solo se soddisfa una legge di conservazione integrale.*

Dato un flusso di particelle (P, η) , se non vi è né creazione né distruzione di particelle, si dice che il flusso soddisfa la legge di conservazione integrale $\int_{\partial \mathcal{N}} i(\eta P)\Omega = 0$ per ogni causal box \mathcal{N} oppure, equivalentemente, la legge di conservazione differenziale $\text{div}(\eta P) = 0$. In particolare, se vale quest'ultima, allora si dice che la densità di universo η delle particelle si conserva.

D'ora in poi ogni particella in (P, η) avrà la stessa carica elettrica $e \in \mathbb{R}$, talvolta indicheremo un flusso di particelle anche con la quattro-upla (m, e, P, η) .

2.2 Tensore stress-energia

In fisica ci si trova spesso a lavorare con tensori fisicamente equivalenti, quindi risulta utile specificare alcune convenzioni. In generale, sia S un campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ sullo spaziotempo M . Sia $x \in M$, $X, Y \in T_x M$ e $\chi, \psi \in T_x^* M$ forme fisicamente equivalenti rispettivamente a X ed a Y . Sia poi X_1, \dots, X_4 una base per $T_x M$ e $\omega^1, \dots, \omega^4$ la sua base duale. Il campo tensoriale \tilde{S} di tipo $(1, 1)$ fisicamente equivalente a S soddisfa la conzione $(\chi, Y) = S(X, Y)$.

Dato Z campo vettoriale su M , indichiamo con $\tilde{S}Z$ il campo vettoriale tale per cui $\chi(Z) = (\chi, Z)$, per ogni $\chi \in T_x^* M$ e per ogni $x \in M$.

Il campo tensoriale \hat{S} di tipo $(2, 0)$ fisicamente equivalente a S e a \tilde{S} soddisfa la relazione $\hat{S}(\chi, \psi) = S(X, Y)$. Osserviamo che \hat{S} è simmetrica (rispettivamente anti-simmetrica) se e solo se S è simmetrica (rispettivamente anti-simmetrica).

Definizione 2.2.1. Definiamo la traccia dei campi tensoriali S, \tilde{S} e \hat{S} nel seguente modo: $tr(S) = tr(\tilde{S}) = tr(\hat{S}) = C_1^1(\tilde{S})$, dove C_1^1 indica la contrazione di tipo $(1, 1)$. Quindi risulta $tr(\tilde{S})(x) = \sum_{i=1}^4 \tilde{S}(\omega^i, X_i)$.

Fatta questa introduzione, possiamo proseguire dando la definizione di tensore stress-energia.

Definizione 2.2.2. Un tensore stress-energia sullo spaziotempo M è un campo tensoriale simmetrico \hat{E} su M di tipo $(2, 0)$ tale che $\hat{E}(\omega, \omega) \geq 0$, per ogni $\omega \in T_x^* M$ forma causale (ossia non spacelike) e per ogni $x \in M$.

Un tensore stress-energia sostituisce ed allo stesso tempo unifica i seguenti concetti pre-relativistici: l'energia elettromagnetica e/o della materia per unità di volume in \mathbb{R}^3 , la quantità di moto per unità di volume in \mathbb{R}^3 , il flusso di energia ed il flusso di quantità di moto.

Sia (z, Z) un osservatore istantaneo,

Definizione 2.2.3. definiamo $E(Z, Z)$ è la densità di energia misurata da (z, Z) per \hat{E} nel suo spazio locale in quiete Z^\perp .

Proposizione 2.2.4. Siano E ed E' dua campi tensoriali simmetrici su M di tipo $(0, 2)$ e supponiamo che $E(Z, Z) = E'(Z, Z)$ per ogni osservatore istantaneo (z, Z) . Allora $\hat{E} = \hat{E}'$.

Dimostrazione. Fissiamo un osservatore istantaneo (z, Z) . Per ogni vettore $X \in T_z M$ timelike diretto verso il futuro si ha che $E(X, X) = E'(X, X)$, poiché $(z, X/|X|)$ è un osservatore istantaneo nel punto $z \in M$. L'insieme $\mathcal{T}_z^+ \subset T_z M$ di tutti i vettori $X \in T_z M$ appena descritti, è un insieme aperto che contiene Z . Perciò per ogni $W \in T_z M$, esiste $b \in (0, \infty)$ tale per cui $Z + uW \in \mathcal{T}_z^+$, per ogni $u \in [0, b)$. Di conseguenza vale $E(Z + uW, Z + uW) = E'(Z + uW, Z + uW)$. Differenziando due volte rispetto a u , otteniamo $E(W, W) = E'(W, W)$, per ogni $W \in T_z M$. Dalla simmetria dei campi tensoriali segue che $E_z = E'_z$, con $z \in M$ arbitrario. \square

Definizione 2.2.5. Sia (P, η) un flusso di particelle sullo spaziotempo M , il suo tensore stress-energia è $\hat{T} = \eta P \otimes P$.

Osservazione 2.2.6. (a) Il tensore \hat{T} appena definito è simmetrico e \mathcal{C}^∞ . Inoltre, per ogni $\omega \in T_x^*M$ 1-forma causale, $\hat{T}(\omega, \omega) = \eta(x)[\omega(P)]^2 \geq 0$. Ne consegue che \hat{T} è un tensore stress-energia.

(b) Sia (z, Z) un osservatore istantaneo e siano $X_1, X_2, X_3 \in Z^\perp$ linearmente indipendenti. Indichiamo con $K \subset Z^\perp$ il parallelepipedo definito da questi tre vettori e con

$V = |\Omega(X_1, X_2, X_3, Z)| > 0$ il suo 3-volume. Come osservato nel paragrafo 2.1, il numero di particelle presenti in K è $N = \int_K i(\eta P)\Omega = \eta(z) |\Omega(X_1, X_2, X_3, P)| \geq 0$. Sempre per quanto visto nello stesso paragrafo, si ha che $e = -g(P, Z) > 0$ è l'energia che (z, Z) misura per ogni particella, perciò la densità di energia misurata in K è Ne/V .

Sia $P(z) = eZ + p$, con $p \in \text{span}\{X_1, X_2, X_3\} = Z^\perp$, la scomposizione ortogonale del vettore $P(z)$. Ricordando che la forma di volume Ω è antisimmetrica, segue che $\Omega(X_1, X_2, X_3, p) = 0$, perciò, utilizzando tale scomposizione, ci resta $|\Omega(X_1, X_2, X_3, P)| = e |\Omega(X_1, X_2, X_3, Z)| = eV$. Si conclude che

$$Ne/V = \eta(z)e^2 = \eta(z)[g(P, Z)]^2.$$

Osserviamo che tale densità di energia misurata è indipendente dal parallelepipedo K .

D'altra parte, dato $\hat{T} = \eta P \otimes P$, si ha $T(Z, Z) = \eta(z)[g(P, Z)]^2$. Concludiamo, utilizzando la proposizione 2.2.4, che la definizione 2.2.5 risulta ben motivata. Inoltre, questo spiega perché $T(Z, Z)$ corrisponde alla densità di energia misurata dall'osservatore istantaneo (z, Z) .

2.3 Elettromagnetismo

La densità di carica-corrente sullo spaziotempo M è un campo vettoriale J su M che sostituisce ed unifica due concetti pre-relativistici: la quantità di carica elettrica per unità di volume in \mathbb{R}^3 e la densità di corrente elettrica. Un osservatore istantaneo (z, Z) misurerà una carica elettrica per unità di 3-volume di Z^\perp pari a $-g(Z, J)$.

Definizione 2.3.1. Sia (m, e, P, η) un flusso di particelle. La densità di carica-corrente di tale flusso è $J = e\eta P$.

Osservazione 2.3.2. Se la densità di universo η si conserva, allora anche J soddisfa la legge di conservazione differenziale $\text{div}J = 0$. Ovvero, non vi è dispersione di carica elettrica.

Definizione 2.3.3. Un campo elettromagnetico F sullo spaziotempo M è una 2-forma antisimmetrica su M .

Il campo elettromagnetico sostituisce ed unifica le seguenti quantità pre-relativistiche: campo elettrico \vec{E} e campo magnetico \vec{B} . Infatti, considerando l'osservatore istantaneo (z, Z) , il vettore $E = \tilde{F}Z$ prende il nome di vettore elettrico misurato da (z, Z) per il tensore F . Essendo F antisimmetrico, si ha che $\tilde{F}Z \in Z^\perp$. Inoltre, esiste un unico vettore $B \in Z^\perp$ tale che $4!\Omega(X, Y, B, Z) = F(X, Y)$, per ogni coppia di vettori $X, Y \in Z^\perp$. B è il vettore magnetico che (z, Z) misura per F .

2.4 Modelli di materia e modelli relativistici

Tra gli oggetti di interesse della relatività generale abbiamo i modelli relativisti.

Definizione 2.4.1. Un modello relativistico è una tripla (M, \mathcal{M}, F) , dove M è uno spaziotempo, F è un campo elettromagnetico e \mathcal{M} è un modello di materia su M .

Per quanto riguarda la materia, non esiste un modello preciso, universale, prevalente. Per questo noi ora daremo una definizione di modello di materia che può essere generalizzata in diversi contesti.

Definizione 2.4.2. Un modello di materia è una collezione di N flussi di particelle su M , che indichiamo con $\mathcal{M} = \{(m_A, e_A, P_A, \eta_A) | A = 1, \dots, N\}$, dove N è intero non negativo.

Altri modelli di materia, come ad esempio i fluidi perfetti, possono essere ottenuti da quest'ultimo appena definito per astrazione (vedi paragrafo 2.6). Supponiamo ora che \mathcal{M} sia una collezione finita di flussi di particelle su M .

Definizione 2.4.3. Si dice che $\hat{T} = \sum_{A=1}^N \eta_A P_A \otimes P_A$ è il tensore stress-energia di \mathcal{M} , mentre $J = \sum_{A=1}^N e_A \eta_A P_A$ è la densità di carica-corrente di \mathcal{M} .

Proposizione 2.4.4. Sia (M, \mathcal{M}, F) un modello relativistico, con \mathcal{M} sia una collezione finita di flussi di particelle su M , e sia \hat{T} il tensore stress-energia di \mathcal{M} . Allora si ha che $T(Z, Z) = 0$ per un osservatore istantaneo (z, Z) se e solo se $\hat{T}(z) = 0$ se e solo se vale $\eta_A(z) = 0$ per la densità di universo η_A di ogni flusso di particelle.

Dimostrazione. Ricordiamo dall'osservazione 2.2.6 che vale:

$$T(Z, Z) = \sum_{A=1}^N \eta_A(z) [g(P_A, Z)]^2.$$

Per concludere è sufficiente ricordare che, per ogni $A = 1, \dots, N$, la quantità $\eta_A(z)$ è non negativa per definizione e che $e_A = -g(P_A, Z) > 0$, come visto nell'osservazione 2.1.4. \square

Possiamo interpretare la condizione $\eta_A(z) = 0$, per ogni A , come assenza di particelle in $z \in M$ e la condizione $\hat{T}(z) = 0$ come assenza di qualsiasi forma di materia in z , eccetto per eventuali particelle test, le quali non influenzano la regione circostante.

Arrivati a questo punto, abbiamo abbastanza elementi per poter descrivere come lo spaziotempo M e la materia influiscono sull'elettromagnetismo. Sia (M, \mathcal{M}, F) un modello relativistico e J la densità di carica-corrente del modello di materia \mathcal{M} .

Definizione 2.4.5. Diremo che (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di Maxwell se e solo se valgono le seguenti:

1. F è una 2-forma chiusa, ovvero $dF = 0$;
2. $\operatorname{div} \hat{F} = 4\pi J$.

Sotto queste condizioni si dice che J è la sorgente di F e talvolta si usa anche dire che la tripla (M, F, J) soddisfa le equazioni di Maxwell.

Come abbiamo fatto in precedenza con i flussi di particelle, definiamo ora il tensore stress-energia E di un campo elettromagnetico F su M .

Definizione 2.4.6. Il campo tensoriale E di tipo $(0, 2)$ su M dato da

$$E_{ij} = \frac{1}{4\pi} [F_{im} F_m^j - \frac{1}{4} g_{ij} F^{mn} F_{mn}]$$

è il tensore stress-energia associato al campo elettromagnetico F .

Proposizione 2.4.7. Il campo tensoriale E gode delle seguenti proprietà:

- (a) \hat{E} è simmetrico e $\operatorname{tr}(\hat{E}) = 0$;
- (b) $\hat{E}(\omega, \omega) \geq 0$ per ogni 1-forma causale ω ;
- (c) Se la tripla (M, F, J) soddisfa le equazioni di Maxwell, allora $\operatorname{div} \hat{E} = -\tilde{F}J$.

Osservazione 2.4.8. Segue dai punti (a) e (b) della proposizione precedente il fatto che \hat{E} è un tensore stress-energia su M .

Consideriamo ora una particella $\gamma: \mathcal{E} \rightarrow M$ sullo spaziotempo (M, g, ∇) . Come osservato nella sezione 2.3, $\tilde{F}\gamma_*$ è un campo vettoriale su γ tale che $\tilde{F}\gamma_*(u) \in (\gamma_*(u))^\perp$ per ogni $u \in \mathcal{E}$. Poiché $g(\gamma_*, \gamma_*) = -m^2$, si ha che $(\nabla_{\gamma_*} \gamma_*)(u) \in (\gamma_*(u))^\perp$ per ogni $u \in \mathcal{E}$. L'influenza di (M, g, ∇) e di F sulla particella γ è descritta dalla seguente legge:

Definizione 2.4.9. una particella (γ, m, e) su M soddisfa legge della forza di Lorentz rispetto al campo elettromagnetico F se e solo se $e\tilde{F}\gamma_* = \nabla_{\gamma_*} \gamma_*$.

Questa legge riveste lo stesso ruolo della seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. Si osservi che nel caso in cui la carica elettrica e fosse nulla, si avrebbe un particella in caduta libera.

Abbiamo appena visto in che modo materia e spaziotempo influiscono sull'elettromagnetismo. Per descrivere, invece, l'influenza dello spaziotempo, elettromagnetismo e materia sulla materia, abbiamo bisogno delle equazioni di materia. Sia (M, \mathcal{M}, F) un modello relativistico con $\mathcal{M} = \{(m_A, e_A, P_A, \eta_A) | A = 1, \dots, N\}$ una collezione finita di flussi di particelle. In questo elaborato tratteremo solo particelle che soddisfano la legge della forza di Lorentz, perciò per ogni $A = 1, \dots, N$ ogni particella dell' A -esimo flusso soddisfa tale legge. Ne consegue che ogni curva integrale dei campi vettoriali P_A soddisfa la seguente relazione:

$$\nabla_{P_A} P_A = e_A \tilde{F} P_A, \quad (2.1)$$

per ogni $A = 1, \dots, N$.

Supponiamo inoltre che non ci siano né creazione né distruzione di particelle in nessuno dei flussi e che non ci siano nemmeno collisioni, decadimenti, o, più in generale, che non ci sia alcuna interazione diretta tra la materia stessa. Sotto questa ipotesi è lecito supporre che sia soddisfatta l'equazione:

$$\text{div}(\eta_A P_A) = 0, \quad (2.2)$$

per ogni $A = 1, \dots, N$.

Definizione 2.4.10. Diremo che (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di materia semplici se e solo se valgono le relazioni (2.1) e (2.2).

Proposizione 2.4.11. Siano \hat{T} il tensore stress-energia di \mathcal{M} e \hat{E} il tensore stress-energia di F . Se (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di materia semplici e le equazioni di Maxwell, allora

$$\text{div}(\hat{T} + \hat{E}) = 0.$$

Dimostrazione. Dalla proposizione 2.4.7.(c) e dalla definizione 2.3.1 segue che

$$\text{div}\hat{E} = -\tilde{F}J = -\tilde{F} \sum_{A=1}^N e_A \eta_A P_A = - \sum_A \eta_A e_A \tilde{F} P_A$$

Mentre, dalla definizione 2.2.5 si ha

$$\begin{aligned} \text{div}\hat{T} &= \text{div}\left(\sum_{A=1}^N \eta_A P_A \otimes P_A\right) \\ &= \sum_{A=1}^N [\text{div}(\eta_A P_A)] P_A + \eta_A \nabla_{P_A} P_A \\ &= \sum_A \eta_A e_A \tilde{F} P_A, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, per ipotesi, valgono le equazioni di materia semplici. Da qui si conclude. \square

2.4.1 Esempi di modelli di materia

Qui di seguito andiamo a definire alcuni modelli di materia standard.

Esempio 2.4.1 (POLVERE). Sia $(m, 0, P, \eta)$ un flusso di particelle su M , con $m \neq 0$ e η mai nulla. Definiamo il sistema di riferimento $Z = \frac{1}{m}P$ su M e la funzione $\rho = m^2\eta$, con $\rho: M \rightarrow (0, \infty)$. La terna (M, \mathcal{M}, F) prende il nome di polvere se sono soddisfatte le seguenti:

- (a) $\mathcal{M} = (Z, \rho)$;
- (b) $\hat{T} = \rho Z \otimes Z$ e $J = 0$;

Z è detto *comoving reference frame* e per ogni $z \in M$ l'osservatore istantaneo $(z, Z(z))$ misurerà una densità di energia pari a $T(Z, Z)(z) = \rho(z)$, per cui ρ prende il nome di *comoving energy density*. Osserviamo che (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di materia della polvere se e solo se

$$\operatorname{div}(\rho Z) = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\nabla_Z Z = 0. \quad (2.4)$$

Esempio 2.4.2 (COMPLETE MATTER VACUUM). L'esempio del modello di polvere si ottiene partendo da una collezione di flussi di particelle nel caso $N = 1$. Il modello che prende il nome di *complete matter vacuum* (M, \mathcal{M}, F) può essere visto come un'estensione al caso $N = 0$, ovvero con zero flussi di particelle. In questo caso \mathcal{M} è l'insieme vuoto, $\hat{T} = 0$ ed anche $J = 0$. Le equazioni di materia rimarcano il fatto che nessuna materia può essere generata dalla gravità o dall'elettromagnetismo. Questo modello descriva l'assenza di qualsiasi tipo di materia, anche delle particelle test. Quando anche $F = 0$ si ha il vuoto completo.

Esempio 2.4.3 (SOVRAPPOSIZIONE DI MODELLI). Dati due modelli relativistici (M, \mathcal{M}_1, F) e (M, \mathcal{M}_2, F) , definiamo la loro sovrapposizione (M, \mathcal{M}, F) come segue: \mathcal{M} è dato dalla coppia $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$, mentre $\hat{T} = \hat{T}_1 + \hat{T}_2$ e $J = J_1 + J_2$. La tripla (M, \mathcal{M}, F) è ancora un modello relativistico e i modelli di materia \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 sono detti componenti di \mathcal{M} . Inoltre, (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le stesse equazioni di materia che soddisfano (M, \mathcal{M}_1, F) e (M, \mathcal{M}_2, F) .

La sovrapposizione di modelli relativistici è definita considerandola priva di collisioni, ciò vuol dire che non vi è interazione tra i due modelli \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 .

Si può generalizzare la sovrapposizione anche ad un numero finito $N \geq 1$ di modelli relativistici.

Esempio 2.4.4 (QUASI-GAS). Diremo che \mathcal{M} è un *quasi-gas* su M se e solo se \mathcal{M} è una sovrapposizione finita di flussi di particelle su M che soddisfa le seguenti condizioni:

- (a) l'insieme \mathcal{M} non è vuoto;
- (b) per ogni flusso di particelle in \mathcal{M} , la densità di universo η_A non si annulla in alcun punto di M .

Si usa il termine "quasi-gas" perché un gas è descritto da una collezione infinita di flussi di particelle.

2.5 Tensori stress-energia normali

In questa sezione mostreremo come un tensore stress-energia è in grado di individuare un sistema di riferimento in modo naturale. Sia \hat{T} un tensore stress-energia su M e $x \in M$.

Definizione 2.5.1. Il tensore \hat{T} si dice normale in $x \in M$ se e solo se $\tilde{T}X$ è timelike, per ogni $X \in T_xM$ causale.

Osservazione 2.5.2. Il tensore stress-energia del modello della polvere è normale in ogni punto $x \in M$.

Definizione 2.5.3. Un vettore $X \in T_xM$ non nullo si dice che è un autovettore di \hat{T} in x se e solo se $\tilde{T}X = aX$, esiste $a \in \mathbb{R}$.

Proposizione 2.5.4. Se un tensore stress-energia \hat{T} è normale in $x \in M$, allora possiede un autovettore timelike unico a meno di multipli non nulli.

Definizione 2.5.5. Il tensore \hat{T} si dice normale se è normale in ogni punto $x \in M$.

Definizione 2.5.6. Un campo vettoriale X su M che non si annulla in alcun punto, si dice campo autovettoriale di \hat{T} se e solo se esiste una funzione f su M tale che $\tilde{T}X = fX$. Tale funzione prende il nome di autofunzione di \hat{T} corrispondente a X .

Corollario 2.5.7. Un tensore stress-energia \hat{T} normale su M possiede un unico campo autovettoriale timelike, unitario e diretto verso il futuro.

Osservazione 2.5.8. Nel modello della polvere, l'unico campo autovettoriale è Z .

2.6 Fluidi perfetti

Come ultimo modello di materia andiamo ad analizzare quello del fluido perfetto, che si ottiene partendo dal modello dei *quasi-gas* (cf. esempio 2.4.4).

Definizione 2.6.1. Un tensore stress-energia \hat{T} su M si dice spazialmente isotropo in $z \in M$ se esiste un osservatore istantaneo (z, Z) per cui T è spazialmente isotropo.

Proposizione 2.6.2. Sia \mathcal{M} un quasi-gas su M cui tensore stress-energia \hat{T} è spazialmente isotropo in ogni punto della varietà. Allora si ha che:

(a) il tensore \hat{T} è normale;

(b) $\hat{T} = \rho Z \otimes Z + p(\hat{g} + Z \otimes Z)$, dove il sistema di riferimento Z è un campo auto-vettoriale per T , \hat{g} è il campo tensoriale di tipo $(0, 2)$ fisicamente equivalente a g , mentre ρ e p sono due funzioni su M tali che $\rho > 0$ e $0 \leq 3p \leq \rho$. Inoltre, T è spazialmente isotropo per l'osservatore istantaneo $(z, Z(z))$ se e solo se $Z = Z(z)$;

(c) le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) $\rho(z) = 3p(z)$, esiste $z \in M$;

(2) $\rho = 3p$;

(3) ogni componente di \mathcal{M} ha massa a riposo nulla.

Dimostrazione. Fissiamo un punto $z \in M$ e sia $(z, Z(z))$ un osservatore istantaneo per il quale T è spazialmente isotropo. Allora esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tale per cui $T(z) = ag(z) + bh$ (cf. [9, p.49]), dove h è il tensore proiezione. Segue che:

$$\hat{T}(z) = aZ \otimes Z + b\hat{h}, \quad (2.5)$$

dove \hat{h} è il tensore fisicamente equivalente ad h .

Siccome $h(Z, Z) = 0$, risulta che $T(Z, Z) = a$. Inoltre, dalla definizione 2.2.2 sappiamo che $T(Z, Z) \geq 0$, mentre per la proposizione 2.4.4, $T(Z, Z) = 0$ se e solo se $\eta_A = 0$ per ogni flusso di particelle in \mathcal{M} . Ma, come osservato nell'esempio 2.4.4, η_A non si annulla in alcun punto. Si conclude che

$$a = T(Z, Z) > 0. \quad (2.6)$$

Per quanto riguarda la traccia di $T(z)$, da una parte abbiamo $\text{tr}(T(z)) = -a + 3b$, essendo $\text{tr}(h) = 3$ (cf. proposizione 1.5.17). D'altra parte, ricordando che $\hat{T} = \sum_{A=1}^N \eta_A P_A \otimes P_A$, abbiamo $\text{tr}(T(z)) = \sum_A \eta_A (-m_A^2)$. Per cui

$$-a + 3b = \text{tr}(T(z)) = - \sum_A \eta_A (m_A^2) \quad (2.7)$$

e poiché, per definizione, $\eta_A(z) > 0$ per ogni $A = 1, \dots, N$, si ha che $a \geq 3b$ (vale l'uguaglianza se e solo se $m_A = 0$ per ogni A). Infine, calcolando $h^{ij}T_{ij}$ otteniamo:

$$ah^{ij}Z_i Z_j + bh^{ij}h_{ij} = 0 + 3b = h^{ij}T_{ij} = \sum_A \eta_A(z) h^{ij}(P_A)_i (P_A)_j = \sum_A \eta_A(z) h(P_A, P_A). \quad (2.8)$$

Poiché Z^\perp è spacelike, dall'ultima uguaglianza segue che $b \geq 0$.

Adesso abbiamo tutti gli elementi necessari per concludere la dimostrazione. Sia $X \in T_z M$, dall'equazione (2.5) si ottiene $\tilde{T}X = (a+b)g_z(X, Z)Z + bX$. Supponiamo ora che X sia un vettore causale, allora

$$g(\tilde{T}X, \tilde{T}X) = (-a^2 + b^2)[g_z(X, Z)]^2 - b^2 |X|^2 < 0$$

poiché $a > b$ e $g(X, Z)$ è non nullo (cf. sezione 1.5). Per cui, per ogni vettore causale X , il vettore $\tilde{T}X$ è timelike. Quindi, per definizione, \hat{T} è normale in z , per ogni $z \in M$. Questo dimostra il punto (a). Grazie al corollario 2.5.7 sappiamo che \hat{T} possiede un unico campo autovettoriale W , il quale è un sistema di riferimento. Ma se consideriamo l'osservatore istantaneo $(z, Z(z))$, dalla relazione (2.5) segue che $\tilde{T}Z(z) = -aZ(z)$, ovvero $Z(z)$ è un autovettore di \hat{T} in z unitario, timelike e diretto verso il futuro. Dall'unicità si ha necessariamente che $W = Z(z)$, ma siccome vale per ogni $z \in M$, dalla relazione (2.5) otteniamo

$$\hat{T} = \rho Z \otimes Z + p(\hat{g} + Z \otimes Z), \quad (2.9)$$

dove ρ e p sono funzioni su M tali che $\rho(z) = a$ e $p(z) = b$, per ogni $z \in M$. Osserviamo che, siccome $\tilde{T}Z = -\rho Z$, si ha che $-\rho$ è l'autofunzione di \hat{T} corrispondente a Z e quindi è \mathcal{C}^∞ . Inoltre, dall'equazione (2.7) abbiamo che $\text{tr}(T(z)) = -\rho + 3p$, per cui anche p è \mathcal{C}^∞ . Dalle considerazioni fatte all'inizio segue che:

- $\rho > 0$;
- $\rho \geq 3p \geq 0$;
- $\rho = 3p$ se e solo se $m_A = 0$ per ogni $A = 1, \dots, N$.

Questo non solo conclude la dimostrazione del punto (b), ma mostra anche che vale la relazione (c.1) \iff (c.3). La relazione (c.2) \implies (c.1) è immediata. Si conclude ricordando che $\rho(z) = a$ e $p(z) = b$, per ogni $z \in M$. \square

Definizione 2.6.3. Definiamo $\rho(z) = T(Z(z), Z(z))$ come la densità di energia di \hat{T} misurata da $(z, Z(z))$, per ogni $z \in M$. La funzione ρ prende anche il nome di densità di energia del quasi-gas \mathcal{M} , mentre p è detta pressione del quasi-gas \mathcal{M} .

Definizione 2.6.4. Un modello relativistico (M, \mathcal{M}, F) è un modello di fluido perfetto se e solo se valgono le seguenti affermazioni:

- (a) $\mathcal{M} = (Z, \rho, p)$, dove Z è un sistema di riferimento su M , mentre ρ, p sono funzioni \mathcal{C}^∞ su M tali per cui $\rho > 0$ e $\rho \geq 3p \geq 0$;
- (b) $J = 0$ e $\hat{T} = \rho Z \otimes Z + p(\hat{g} + Z \otimes Z)$.

Sotto queste condizioni diremo che \mathcal{M} è un fluido perfetto su M , Z è il comoving reference frame, ρ, p sono rispettivamente la densità di energia e la pressione di \mathcal{M} .

Osservazione 2.6.5. \mathcal{M} ha massa a riposo nulla se e solo se $\rho = 3p$.

Osservazione 2.6.6. Il modello della polvere 2.4.1 è un fluido perfetto con $p = 0$.

Definizione 2.6.7. Diremo che (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di materia dei fluidi perfetti se e solo se $\text{div } \hat{T} = 0$.

2.7 Equazioni di campo di Einstein

Concludiamo il capitolo mostrando le equazioni che ci permettono di descrivere l'influenza della materia e dell'elettromagnetismo sullo spaziotempo. Einstein ipotizzò che lo stress-energia di materia ed elettromagnetismo influiscono sullo spaziotempo M . Il suo postulato si può riassumere nella seguente definizione.

Definizione 2.7.1. Il modello relativistico (M, \mathcal{M}, F) soddisfa le equazioni di campo di Einstein se e solo se

$$G = T + E, \quad (2.10)$$

con $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$ tensore di Einstein dello spaziotempo M , Ric è il tensore curvatura di Ricci di M , g il tensore metrico di tipo $(0, 2)$ di M e S la curvatura scalare.

2.7.1 Spaziotempo Ricci flat

Osserviamo un caso particolare in cui le equazioni di campo di Einstein rappresentano la condizione geometrica affinché lo spaziotempo M sia Ricci flat, ossia abbia tensore di Ricci nullo.

Proposizione 2.7.2. *Supponiamo che (M, \mathcal{M}, F) soddisfi le equazioni di campo di Einstein. Allora M è Ricci flat se e solo se $T = 0 = F$.*

Dimostrazione. Se per ipotesi $T = 0 = F$, allora $E = 0$ e quindi anche $G = 0$. Questo implica $Ric = 0$. Viceversa, supponiamo che $Ric = 0$. Di conseguenza anche $G = 0$. Dalle ipotesi otteniamo $G = T + E = 0$. Sia $x \in M$ e sia $\omega \in T_x^*M$ una forma causale, consideriamo la seguente uguaglianza:

$$\hat{T}(\omega, \omega) + \hat{E}(\omega, \omega) = 0. \quad (2.11)$$

Dalla definizione 2.2.2 segue che $\hat{T}(\omega, \omega) \geq 0$, mentre dalla proposizione 2.4.7(b) si ha $\hat{E}(\omega, \omega) \geq 0$. Per cui la relazione (2.11) implica $\hat{T}(\omega, \omega) = 0 = \hat{E}(\omega, \omega)$, per ogni forma causale $\omega \in T_x^*M$. Per la proposizione 2.2.4 deduciamo che $T = 0 = E$ per ogni $x \in M$. Si conclude che $T = 0 = F$ (cf. [9, p.87]). \square

Osservazione 2.7.3. *L'annullamento del tensore di Ricci in una regione dello spaziotempo corrisponde all'annullamento del tensore stress-energia nella medesima regione, oltre che ad un'influenza trascurabile di materia ed elettromagnetismo sullo spaziotempo. I modelli che meglio rappresentano questa condizione sono i modelli di vuoto che soddisfano le equazioni di campo di Einstein, descritti nell'esempio 2.4.2. Perciò definiamo uno spaziotempo vuoto se e solo se il tensore di Ricci è identicamente nullo.*

Esempio 2.7.1. *Lo spaziotempo di Minkowski (esempio 1.4.1) è uno spazio piatto e quindi anche Ricci flat. Lo spaziotempo di Schwarzschild (esempio 1.4.2) è Ricci flat, ma non è piatto.*

Capitolo 3

Cosmologia

Ad oggi tutti i modelli cosmologici presenti si basano sul *principio copernicano*, secondo cui l'universo, se osservato su larga scala, risulta essere uguale ovunque. Di conseguenza in esso non esistono direzioni o punti privilegiati. Tale principio si ricollega a due precise proprietà matematiche che una varietà può presentare: l'isotropia e l'omogeneità.

Definizione 3.0.1. Una varietà M si dice isotropa in $x \in M$ se per ogni coppia di vettori $V, W \in T_x M$ esiste un'isometria ϕ di M , che tiene fisso x , tale per cui $\phi_*(W) = V$.

Definizione 3.0.2. Una varietà M è omogenea se dati due punti $x, y \in M$, esiste un'isometria che manda x in y .

3.1 Concetti preliminari

Per quanto riguarda il nostro universo, in seguito alle numerose osservazioni che confermano la validità del principio copernicano su larga scala, siamo legittimati ad assumere che lo spazio sia omogeneo ed isotropo in ogni punto.

Inoltre, se andiamo a studiare le galassie lontane, noteremo che esse si stanno progressivamente allontanando da noi. Ne deduciamo che il nostro universo non è statico, ma cambia nel tempo. Alla luce di quanto detto fin'ora, iniziamo la costruzione di un modello cosmologico considerando un universo omogeneo ed isotropo nello spazio, ma non nel tempo. Il che significa che il nostro universo può essere descritto da una varietà quadridimensionale che ammette una foliazione, le cui foglie sono a loro volta varietà spacelike tridimensionali, omogenee ed isotrope. Tale spaziotempo sarà quindi dato da $R \times \Sigma$, dove R rappresenta la direzione temporale, mentre Σ una varietà tridimensionale omogenea ed isotropa. Isotropia ed omogeneità implicano che Σ dev'essere uno spazio massimamente simmetrico, perciò la metrica dell'intero spaziotempo sarà nella forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}du^i du^j, \quad (3.1)$$

dove t è la coordinata temporale, (u^1, u^2, u^3) le coordinate su Σ , γ_{ij} è la metrica massimalmente simmetrica su Σ . La funzione $a(t)$ è detta *fattore di scala* e ci dà informazioni sull'estensione della foglia Σ all'istante t . Le coordinate utilizzate sono dette *coordinate comoventi*, esse ci permettono di avere una metrica priva di termini misti $dt du^i$ e con le componenti spacelike proporzionali ad una singola funzione in t . Gli osservatori che presentano coordinate del tipo $u^i = \text{costante}$ sono detti *comoventi*.

Cosideriamo ora la metrica γ_{ij} . Essendo massimalmente simmetrica, soddisfa alla relazione:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (3.2)$$

con k costante, detto *parametro di curvatura*. L'apice "(3)" sul tensore di Riemann indica che è il tensore associato alla metrica γ_{ij} e non a quella di tutto lo spaziotempo. Segue che il tensore di Ricci è:

$$R_{ij} = 2k\gamma_{ij}. \quad (3.3)$$

Essendo lo spazio Σ simmetrico massimale, esso dev'essere a simmetria sferica. Confrontandoci con la soluzione di Schwarzschild alle equazioni di Einstein, abbiamo che la metrica di tale spazio può essere scritta nella forma:

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.4)$$

Le componenti non nulle del tensore di Ricci per questa metrica sono:

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{11} &= \frac{2}{r}\partial_1\beta(r) \\ {}^{(3)}R_{22} &= e^{-2\beta(r)}(r\partial_1\beta(r) - 1) + 1 \\ {}^{(3)}R_{22} &= [e^{-2\beta(r)}(r\partial_1\beta(r) - 1) + 1] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Utilizzando la (3.3), si ottiene:

$$\beta(r) = -\frac{1}{2} \ln(1 - kr^2). \quad (3.6)$$

Riportando quanto ottenuto nella (3.1), la metrica dell'intero spaziotempo diventa

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.7)$$

che prende il nome di *metrica di Robertson-Walker*.

Siccome le sostituzioni

$$\begin{aligned} k &\longrightarrow \frac{k}{|k|} \\ r &\longrightarrow \sqrt{|k|}r \\ a &\longrightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

lasciano invariata la (3.7), segue che l'unico parametro rilevante risulta essere $k/|k|$, che può assumere soltanto tre valori: $\{\pm 1, 0\}$. Perciò abbiamo che l'ipersuperficie Σ è una varietà tridimensionale a curvatura costante per cui ci sono soltanto tre possibilità¹:

¹Ricordiamo inoltre che le varietà isotrope tridimensionali hanno curvatura sezionale costante. Gli spazi con curvatura sezionale costante, in qualsiasi dimensione n , sono classificati come segue: se la curvatura è positiva, tale spazio è isometrico a \mathbb{S}^n ; se la curvatura è nulla, abbiamo uno spazio isometrico a \mathbb{R}^n ; infine, se la curvatura è negativa, abbiamo uno spazio isometrico allo spazio iperbolico \mathbb{H}^n [10].

- **CASO PIATTO:** $k = 0$, lo spazio Σ ha curvatura nulla. In questo caso la relazione (3.6) mi restituisce $\beta(r) = 0$ e quindi dalla (3.4) segue che

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned} \quad (3.9)$$

con $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Tale metrica può descrivere uno spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 , oppure una varietà più complicata come il 3-toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

- **CASO CHIUSO:** $k = +1$, lo spazio Σ ha curvatura costantemente positiva. Definiamo $r := \sin(\chi)$, in modo da ottenere $dr^2/(1-r^2) = d\chi^2$. La metrica si può così riscrivere nella forma

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2(\chi) d\Omega^2 \quad (3.10)$$

e l'ipersuperficie da essa descritta è una 3-sfera;

- **CASO APERTO:** $k = -1$, lo spazio Σ ha curvatura costantemente negativa. In questo caso definiamo $r := \sinh(\psi)$ ed otteniamo la seguente forma per la metrica

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2(\psi) d\Omega^2. \quad (3.11)$$

Quest'ultima può descrivere uno spazio tridimensionale con curvatura costantemente negativa che potrebbe estendersi per sempre. Oppure, potrebbe descrivere uno spazio compatto, non semplicemente connesso.

È quindi possibile riscrivere la metrica di Robertson-Walker (3.7) nella forma più compatta:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[d\chi^2 + S_k(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (3.12)$$

dove

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin(\chi) & \text{se } k = +1 \\ \chi & \text{se } k = 0 \\ \sinh(\chi) & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (3.13)$$

3.2 Le equazioni di Friedmann

Torniamo a considerare l'intero spaziotempo. Dalla metrica di Robertson-Walker (3.7), ponendo $\dot{a} := da/dt$, è possibile ricavare i coefficienti di Christoffel e successivamente le componenti non nulle del tensore di Ricci, che sono:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)\sin^2(\theta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sia g il tensore metrico dato dalla (3.7), osserviamo che $R_{ii} = a^{-2}g_{ii}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)$ per $i = 1, 2, 3$, mentre la curvatura scalare di Ricci è

$$R = \frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k). \quad (3.15)$$

Come modello per descrivere la materia e l'energia presente nel nostro universo utilizzeremo quello del fluido perfetto descritto nel paragrafo 2.6. Indicando con U^μ la quadrivelocità del fluido, possiamo scrivere il suo tensore stress-energia come

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

dove ricordiamo che ρ e p sono rispettivamente densità di energia e pressione del fluido misurati nel sistema di riferimento in cui esso è a riposo.

Per un osservatore comovente a tale fluido, la cui quadrivelocità è quindi data dal quadrivettore $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, il tensore stress-energia assume la seguente forma:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Consideriamo adesso le equazioni di campo di Einstein dotate di un termine aggiuntivo, detto *termine cosmologico*, che sono:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Esplicitando il tensore di Einstein $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ ed osservando che la curvatura scalare R è collegata alla traccia T del tensore stress-energia tramite la relazione $R = -8\pi GT$, si può riscrivere la (3.18) nella forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}) + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (3.19)$$

Per $\mu = 0$ e $\nu = 0$, ricordando le componenti (3.14) del tensore di Ricci, otteniamo l'equazione:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.20)$$

mentre per $\mu, \nu = i, j$, otteniamo:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) + \Lambda. \quad (3.21)$$

Usiamo la (3.20) per rimuovere la derivata seconda nella (3.21), in modo da rimanere con le equazioni:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (3.23)$$

Quest'ultime sono note come *equazioni di Friedmann* e le metriche nella forma della (3.7) che soddisfano tali equazioni definiscono gli *universi di Friedmann-Robertson-Walker* (FRW). Indicando con t_0 il tempo presente, i valori $a(t_0) := a_0 = 1$, $\rho(t_0) := \rho_0$ e $p(t_0) := p_0$ rappresentano rispettivamente l'estensione dell'universo, la densità di energia e la pressione del fluido cosmologico nell'istante attuale. Altri parametri spesso utilizzati in cosmologia sono:

- **parametro di Hubble:** è il rapporto tra la velocità di espansione dell'universo e la sua estensione, perciò si esprime come

$$H(t) := \frac{\dot{a}}{a}(t). \quad (3.24)$$

Il suo valore al tempo presente $H(t_0) := H_0$ prende il nome di *costante di Hubble*;

- **parametro di decelerazione:** misura la variazione della velocità di espansione ed è definito come

$$q(t) := -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}; \quad (3.25)$$

- **parametro densità:** è definito come il rapporto

$$\begin{aligned} \Omega &:= \frac{8\pi G}{3H^2}\rho \\ &= \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove $\rho_{\text{crit}} := 3H^2/8\pi G$ è una quantità variabile nel tempo, detta *densità critica*. Tale nome è dovuto al fatto che se si considera l'equazione (3.23) con $\Lambda = 0$ e la si riscrive nel seguente modo

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}, \quad (3.27)$$

si può osservare che il segno della curvatura k è determinato dal valore di Ω , in particolare

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{\text{crit}} &\iff \Omega < 1 \iff k = -1 \\ \rho = \rho_{\text{crit}} &\iff \Omega = 1 \iff k = 0 \\ \rho > \rho_{\text{crit}} &\iff \Omega > 1 \iff k = 1. \end{aligned}$$

Inoltre, proprio per questo motivo, osserviamo che conoscere il valore del parametro densità equivale a sapere quale delle tre metriche di Robertson-Walker (3.12) descrive il nostro universo.

Osservazione 3.2.1. *Nel caso in cui Λ avesse valore non nullo, la relazione (3.27) diverrebbe:*

$$\Omega + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.28)$$

dove $\Omega_\Lambda := \Lambda/3H^2$. Si osservi che in questo caso la curvatura k dipende dal valore della somma $\Omega + \Omega_\Lambda$:

$$\begin{aligned} \Omega + \Omega_\Lambda < 1 &\iff \text{universo aperto} \\ \Omega + \Omega_\Lambda = 1 &\iff \text{universo piatto} \\ \Omega + \Omega_\Lambda > 1 &\iff \text{universo chiuso.} \end{aligned}$$

3.3 Evoluzione della densità di energia

Le equazioni di Friedmann da sole non sono sufficienti per determinare le quantità $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$. È necessario introdurre un'equazione di stato per mettere in relazione densità di energia e pressione del fluido. Tutti i fluidi rilevanti in cosmologia seguono la seguente relazione:

$$p = w\rho, \quad (3.29)$$

con w costante indipendente dal tempo. Se consideriamo ora la componente $\nu = 0$ della legge di conservazione dell'energia, ovvero:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T_0^\mu \\ &= \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu 0}^\mu T_0^0 - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu \\ &= -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p), \end{aligned} \quad (3.30)$$

ponendo $\dot{\rho} := \partial_0 \rho$ otteniamo

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.31)$$

che integrata ci porta ad avere

$$\rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (3.32)$$

I modelli di fluidi cosmologici più utilizzati sono la *polvere* e la *radiazione*.

- **Polvere:** rappresenta la materia non relativistica, è priva di collisioni e soddisfa la relazione (3.32) per $w = 0$. Per cui la sua densità di energia si evolve nel tempo come

$$\rho_m \propto a^{-3}. \quad (3.33)$$

Descrive oggetti come stelle e galassie, per i quali il valore della pressione p è trascurabile rispetto a quello della densità di energia ρ . Talvolta al posto del termine "polvere" si usa il termine "materia" e gli universi in cui la densità di energia è dovuta in gran parte alla polvere, sono detti ***matter-dominated***.

- **Radiazione:** è il modello utilizzato per descrivere sia la radiazione elettromagnetica, che corpi dotati di massa che si muovono a velocità prossime a quella della luce (tanto da diventare indistinguibili dai fotoni). Essendo un fluido perfetto, il suo tensore stress-energia è dato dalla (3.16), ma, come osservato nella sezione 2.4, il tensore stress-energia della radiazione si può anche esprimere nella forma $T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}[F^{\mu\lambda}F_{\lambda}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}]$ (cf. definizione 2.4.6), cui traccia è pari a zero. Uguagliando le tracce dei due tensori, si ottiene l'equazione di stato

$$p = \frac{1}{3}\rho. \quad (3.34)$$

Per cui $w = 1/3$ e la densità di energia si evolve come

$$\rho_{\gamma} \propto a^{-4}. \quad (3.35)$$

Un universo la cui densità di energia è data in gran parte dalla radiazione è detto *radiation-dominated*.

Oltre a queste, vi è un'altra forma di densità di energia da tenere in considerazione ed è quella del vuoto.

- **Vuoto:** si suppone che anche lo spazio privo di materia e radiazione possieda energia. Può essere visto come un fluido perfetto cui tensore stress-energia è dato da

$$T_{\mu\nu}^{(\text{vac})} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

e quindi la relazione tra pressione e densità di energia è

$$\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (3.37)$$

Segue che $w = -1$ e dalla relazione (3.32) risulta che densità di energia $\rho_{\Lambda}(t) = \rho_{\Lambda,0}$. Un universo in cui questa densità domina su quella di materia e radiazione, viene detto *vacuum-dominated*.

Osservazione 3.3.1. *Da quanto appena detto emerge che le diverse componenti dell'intero fluido cosmologico hanno avuto una rilevanza diversa durante l'evoluzione dell'universo stesso. Per un primo periodo, immediatamente dopo il Big Bang, abbiamo una prevalenza della radiazione, per poi entrare in una fase di passaggio matter-dominated, iniziata 47.000 anni dopo il Big Bang e conclusasi 9,8 miliardi di anni dopo il Big Bang. L'ultima fase del nostro universo, quella in cui ci troviamo attualmente, risulta dominata dalla densità di energia oscura, rappresentata dalla costante cosmologica Λ .*

Dai dati raccolti risulta che, ad oggi, la densità di energia della radiazione assume valori molto bassi, tanto da divenire trascurabile rispetto a quella delle altre componenti.

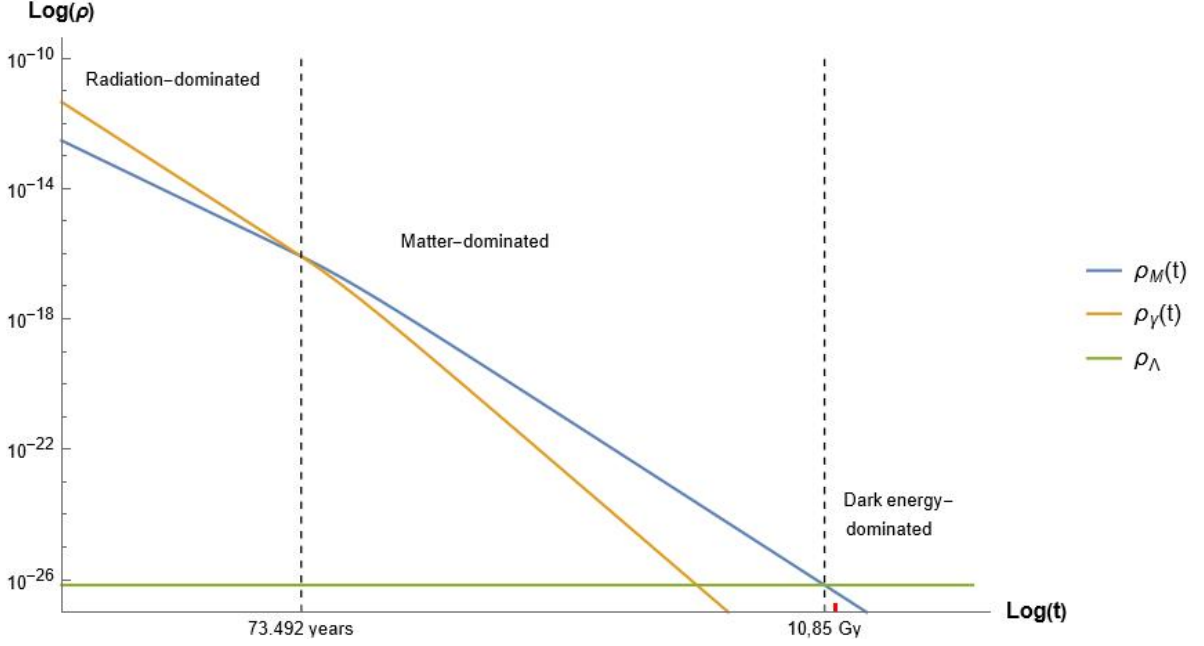


Figura 3.1: Evoluzione delle tre densità di energia presenti nel nostro universo. La discrepanza tra gli istanti di passaggio tra un'era e l'altra qui ottenuti rispetto ai valori ufficiali (47000 anni per il passaggio da radiation-dominated a matter-dominated e 9,8 miliardi di anni per il passaggio da matter-dominated a dark energy-dominated) è dovuta al fatto che i modelli utilizzati in questa tesi non tengono conto dell'inflazione cosmologica [8].

Concludiamo questo paragrafo osservando che l'equazione di Friedmann (3.23) può essere riscritta nella forma:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-3}(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2(t)} \quad (3.38)$$

da cui si ottengono le seguenti uguaglianze:

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-1}(t) + \frac{\Lambda}{3} a^2(t) - k \quad (3.39)$$

e

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0} a^{-3}(t) + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - \frac{k}{a^2(t)H_0^2}. \quad (3.40)$$

L'ultima equazione può essere riscritta come:

$$H^2(a) = H_0^2 \Omega_{m,0} a^{-3} + H_0^2 \Omega_{\Lambda,0} + H_0^2 \Omega_{k,0} a^{-2}, \quad (3.41)$$

dove abbiamo definito $\Omega_k := -k/a^2 H^2$.

3.4 Redshift cosmologico

Nella prima metà del secolo scorso si scoprì che le linee spettrali osservate appartenenti ai corpi celesti più lontani risultano traslate verso il rosso. Tale fenomeno prende il nome di redshift cosmologico ed è dovuto all'espansione dell'universo, inoltre si è osservato che il suo effetto si fa più intenso con l'aumentare della distanza della sorgente luminosa. Per poterlo descrivere in termini matematici, consideriamo la traiettoria di due fotoni emessi negli istanti t_e e $t_e + dt_e$. Supponiamo per semplicità che la traiettoria percorsa sia radiale (i.e. $d\Omega = 0$), inoltre supponiamo che vengano emessi dal punto di coordinata $r = 0$. Sia, invece, l'osservatore posto nel punto $r = R$ e chiamiamo t_0 e $t_0 + dt_0$ i due istanti in cui i fotoni raggiungono l'osservatore. Siccome per i fotoni vale $ds^2 = 0$, segue che

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^R \frac{1}{(1 - kr^2)^{1/2}} dr. \quad (3.42)$$

Siccome la distanza percorsa da entrambi è la stessa, vale l'uguaglianza:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{1}{a(t)} dt. \quad (3.43)$$

Per cui abbiamo:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{1}{a(t)} dt \\ &= \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{1}{a(t)} dt + \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{1}{a(t)} dt \\ &= \int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{1}{a(t)} dt - \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{1}{a(t)} dt. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Supponendo che la variazione di $a(t)$ sia trascurabile negli intervalli di tempo dt_e e dt_0 , otteniamo

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_0}{a(t_0)}. \quad (3.45)$$

Indichiamo con ω_e la frequenza emessa e con ω_0 quella osservata, vale la relazione

$$\frac{\omega_0}{\omega_e} = \frac{dt_e}{dt_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \quad (3.46)$$

e poiché il redshift z è definito come la differenza tra lunghezza d'onda emessa e osservata, più precisamente

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.47)$$

dalla (3.46) possiamo concludere che

$$z + 1 = \frac{\omega_e}{\omega_0} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (3.48)$$

Osservazione 3.4.1. *Dalla definizione di redshift z si osservi che:*

- se $z > 0$ allora $\lambda_0 > \lambda_e$ e quindi abbiamo uno spostamento verso il rosso delle linee spettrali;
- se $z < 0$ allora $\lambda_0 < \lambda_e$ ed in questo caso abbiamo uno spostamento verso il violetto (*blueshift*).

Siccome dalle osservazioni astronomiche risulta $z > 0$, deduciamo dalla (3.48) che $a(t_0) > a(t_e)$, ovvero che il nostro universo è in espansione.

3.5 Quantità misurabili e legge di Hubble

Per determinare il modello cosmologico che descrive il nostro universo, abbiamo bisogno di conoscere un numero sufficiente di parametri cosmologici, come ad esempio H_0 , che è legato all'età dell'universo, oppure il valore del parametro densità Ω , che, come già osservato nel paragrafo 3.2, può darci informazioni sul valore della curvatura k .

Purtroppo non è affatto semplice misurare le quantità $H(t)$ e $\rho(t)$ al tempo presente, ma è possibile mettere in relazione il parametro Ω con il parametro q tramite la relazione (3.22):

$$\begin{aligned} q &= -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \\ &= -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a} \\ &= \frac{4\pi G}{3H^2} (\rho + 3p) \\ &= \frac{4\pi G}{3H^2} \rho (1 + 3w) \\ &= (1 + 3w) \frac{\Omega}{2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Quindi possiamo ricavarci il valore di Ω conoscendo w e q .

Per quanto riguarda i parametri H_0 e q_0 , è possibile conoscere il loro valore grazie alla *legge di Hubble*. Ricordiamo che, in astronomia, la radiazione elettromagnetica è la fonte principale per ricavare informazioni sull'universo che ci circonda. Perciò l'osservazione astronomica si basa principalmente sulla propagazione dei fotoni nello spazio-tempo. Il problema è che in un universo in continua espansione, la distanza percorsa da un fotone in un intervallo di tempo dt non è semplicemente data dal valore di tale intervallo per

la velocità della particella. Esistono in realtà diverse nozioni di distanza. Supponiamo di avere una sorgente luminosa situata in un punto dello spazio di coordinata $r = 0$ e supponiamo che l'osservatore sulla Terra abbia coordinata r . Si definisce la *distanza di luminosità* d_L tramite il rapporto

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (3.50)$$

dove con L indichiamo la luminosità assoluta della sorgente, mentre F è il flusso misurato dall'osservatore sulla Terra. Quando vogliamo osservare sorgenti luminose molto distanti da noi, dobbiamo tenere conto del fatto che il flusso misurato ad una *distanza fisica* pari ad $a_0 r$ risulta attenuato a causa di due fenomeni:

- ogni fotone perde energia in modo proporzionale alla quantità $(1 + z)$;
- due fotoni emessi con un intervallo di tempo δt di distanza, raggiungeranno una distanza fisica $a_0 r$ con un intervallo di tempo di differenza pari a $(1 + z)\delta t$.

Perciò, mentre per oggetti relativamente vicini si ha che il rapporto $F/L = 1/4\pi(a_0 r)^2$, in un universo FRW, a grandi distanze, tale rapporto diventa

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2 (1 + z)^2}, \quad (3.51)$$

da cui

$$d_L = a_0 r (1 + z). \quad (3.52)$$

Esistono degli oggetti nel nostro universo la cui luminosità assoluta è nota, essi vengono chiamati "candele standard". Perciò è possibile misurare la distanza di luminosità di questi oggetti, ma non è possibile misurare r . Perciò dobbiamo rimuoverlo dall'ultima equazione ottenuta. Per poterlo fare consideriamo la traiettoria di un raggio luminoso, supponendo, per semplicità, che si propaghi radialmente (i.e. $d\Omega = 0$) dal punto $r = 0$, all'istante $t = t_1$, al punto r , all'istante $t = t_0$. Per esso vale che:

$$0 = ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{1 - kr^2} dr^2. \quad (3.53)$$

Da quest'ultima si ricava

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^r \frac{1}{(1 - k(r')^2)^{1/2}} dr'. \quad (3.54)$$

Per le galassie non troppo distanti è possibile sviluppare il fattore di scala in serie di Taylor centrata sul suo valore al tempo presente a_0 ed ottenere:

$$a(t_1) = a_0 + \dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (3.55)$$

Quindi sviluppando entrambi i lati della (3.54) si arriva ad avere:

$$r = \frac{1}{a_0} \left[(t_1 - t_0) + \frac{1}{2} H_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots \right]. \quad (3.56)$$

Dalla relazione (3.48) e dallo sviluppo di Taylor del fattore di scala appena visto si ottiene

$$\frac{1}{1+z} = 1 + H_0 (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots \quad (3.57)$$

tale relazione, per piccoli valori di $H_0(t_1 - t_0)$, può essere invertita per ottenere

$$(t_1 - t_0) = \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (3.58)$$

Sostituendo quest'ultima in (3.56) si arriva alla seguente equazione per r :

$$r = \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (3.59)$$

È così possibile rimuovere r dalla (3.52) e si ottiene la "legge di Hubble":

$$d_L = \frac{1}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]. \quad (3.60)$$

In conclusione, misurare le distanze di luminosità e i redshifts di un numero sufficiente di galassie ci permetterebbe di determinare i valori di H_0 e q_0 . Per esempio, si possono utilizzare oggetti relativamente vicini a noi, quindi con redshift molto basso, di cui è nota la distanza di luminosità, per ricavare il valore della costante di Hubble .

3.6 Modelli cosmologici

In questo paragrafo andremo ad analizzare alcuni modelli cosmologici. Inizieremo da quelli che trascurano il contributo della costante cosmologica, che avrà quindi valore nullo, come ad esempio il *modello di universo vuoto*, di *universo statico di Einstein* e il *modello di Einstein- de Sitter* (EdS). Successivamente andremo a studiare modelli in cui Λ assume valore non nullo, tra cui *l'universo di de Sitter* ed il *modello Λ CDM*.

3.6.1 Universo vuoto

Il *modello di universo vuoto*, o *modello di Milne* [2], descrive un universo privo di qualsiasi forma di materia. Di conseguenza le quantità Λ , ρ e p risultano essere nulle. Per quanto visto in (3.27), la curvatura dello spazio Σ dev'essere negativa ($k = -1$), mentre l'*equazione di Friedmann* (3.23) diventa $\dot{a} = 1$, che integrata restituisce una funzione

$a(t)$ lineare nel tempo. Delle tre metriche di *Robertson-Walker* (cf. (3.12), quella che descrive questo spazio-tempo è:

$$ds^2 = -dt^2 + t^2(d\chi^2 + \sinh^2(\chi)d\Omega^2). \quad (3.61)$$

Inoltre, secondo tale modello, l'età dell'universo è data dal reciproco della costante di Hubble, infatti

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{t} \quad (3.62)$$

da cui

$$t_0 = \frac{1}{H_0}. \quad (3.63)$$

Tale modello risulta incompatibile con le osservazioni, in particolare esso non prevede la presenza della radiazione cosmica di fondo.

3.6.2 Universo statico di Einstein

La costante cosmologica Λ venne introdotta per la prima volta da Einstein a causa dell'impossibilità di trovare una soluzione statica alle equazioni di Friedmann prive del termine correttivo Λ . Infatti, determinare una soluzione statica per le equazioni

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (3.64)$$

e

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (3.65)$$

vuol dire trovare una soluzione per cui vale $\dot{a} = 0$ (e quindi anche $\ddot{a} = 0$). Se consideriamo un universo non vuoto (i.e. $\rho \neq 0$), questo è possibile solo se la pressione è $p = -1/3\rho$ e la curvatura è non nulla. Queste condizioni non si possono essere soddisfatte né dalla polvere (per cui abbiamo $p = 0$), né dalla radiazione (dove $p = 1/3\rho$). Questo risultato indusse Einstein ad introdurre un termine correttivo alle sue equazioni.

Il modello di *universo statico di Einstein* presenta una densità di energia $\rho > 0$, che viene bilanciata da quella del vuoto ρ_Λ . Supponendo, per semplicità, che tale universo sia dominato dalla materia, per cui si ha $p = 0$, dalle equazioni di Friedmann (3.22) e (3.23) si ottiene che $\Lambda = 4\pi G\rho_m$ (e quindi il rapporto tra le densità è $\rho_\Lambda = 1/2\rho_m$) e che $k/a^2 = 4\pi G\rho_m$, da cui risulta una curvatura positiva.

Ad ogni modo, questo modello risulta inadatto per descrivere l'universo reale, che sappiamo essere attualmente in espansione. Inoltre, fu presto riconosciuto come modello altamente instabile, nel senso che è sufficiente una minima perturbazione nel valore di anche solo uno dei parametri di densità di energia per far sì che l'universo inizi ad espandersi (o a contrarsi).

3.6.3 Considerazioni iniziali sui modelli con costante cosmologica nulla

Consideriamo ora un universo in cui $\rho > 0$ e $p \geq 0$. Dalla (3.22) si ha che $\ddot{a} < 0$, mentre sappiamo che $\dot{a} > 0$ perché dall'osservazione delle galassie lontane l'universo risulta essere in espansione. Queste due informazioni ci dicono che l'universo sta decelerando, perciò in passato l'universo si dev'essersi espanso ancor più velocemente. Se ripercorriamo la sua evoluzione indietro nel tempo, arriviamo alla singolarità $a = 0$. Tale singolarità prende il nome di *Big Bang*, che rappresenta la creazione dell'universo da un singolo stato e non da un'esplosione di materia avvenuta in uno spazio-tempo preesistente. I teoremi sulle singolarità prevedono che qualsiasi modello di universo caratterizzato da $\rho > 0$ e $p \geq 0$ ha inizio da una singolarità.

L'evoluzione del fattore di scala dipende dal valore di k . Per $k \leq 0$, la (3.23) ci porta ad avere

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2(t) + |k| > 0 \quad (3.66)$$

e siccome abbiamo detto che oggi sappiamo essere $\dot{a}(t_0) > 0$, concludiamo che $\dot{a}(t)$ è sempre positiva. Il che vuol dire che gli universi aperti e quelli piatti (con $\rho > 0$ e $p \geq 0$) sono in continua espansione. È possibile anche calcolare la velocità di espansione. Derivando la quantità ρa^3 rispetto al tempo e ricordando la relazione (3.30) sulla conservazione dell'energia, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho a^3) &= a^3\left(\dot{\rho} + 3\rho\frac{\dot{a}}{a}\right) \\ &= -3pa^2\dot{a} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Siccome ρa^3 è una funzione non negativa e decrescente nel tempo, segue che per un universo in continua espansione (ovvero con $a \rightarrow \infty$) la quantità ρa^2 tende a zero. Utilizzando questo risultato nella (3.66), si arriva alla conclusione che $\dot{a}^2 \rightarrow |k|$. Perciò se la curvatura fosse $k = -1$, la velocità di espansione tenderebbe al valore limite 1, mentre se l'universo fosse piatto, esso continuerebbe comunque ad espandersi, ma più lentamente del caso precedente.

Invece, per un universo chiuso ($k = 1$) la (3.23) diventa:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - 1. \quad (3.68)$$

Poiché, come nel caso precedente, abbiamo che per un universo in continua espansione (i.e. $a \rightarrow \infty$) la quantità ρa^2 tende a zero, ne consegue che \dot{a}^2 tende al valore -1 , il che non è possibile. Questo vuol dire che un universo chiuso non si potrà espandere per sempre e che quindi $a(t)$ possiede un limite superiore a_{\max} . Man mano che a si avvicina a questo limite, la (3.22) ci dice che la sua derivata seconda tende al valore $-\frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)a_{\max} < 0$. Perciò, una volta raggiunto il valore a_{\max} , l'universo comincia a contrarsi e siccome $\ddot{a}(t) < 0$, continuerà a farlo fino a ritornare al valore zero, chiamato *Big Crunch*. Quindi, se $k = 1$, ritroviamo un universo chiuso sia nel tempo che nello spazio.

3.6.4 Soluzioni esatte per universi dominati da materia

Vediamo alcune soluzioni esatte alle equazioni di Friedmann nel caso di universi *matter-dominated*, quindi con $p = 0$. Introducendo la costante $C := 8\pi G\rho_{m,0}/3$, l'equazione da risolvere diventa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{k}{a^2}.$$

Per convenzione poniamo il *Big Bang* all'istante $t = 0$, ovvero $a(0) = 0$. Al variare del parametro di curvatura, troviamo le seguenti soluzioni:

- per $k = 0$, integrando per separazione di variabili si ottiene

$$a(t) = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (3.69)$$

Questo è il *modello di Einstein-de Sitter*. Calcolando la derivata del fattore di scala è possibile risalire alla formula per conoscere l'età dell'universo secondo tale modello, infatti:

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3} \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{-1/3},$$

quindi il parametro di Hubble diventa

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a} = \frac{2}{3t}$$

da cui ricaviamo l'età dell'universo:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Questo modello fornisce una buona descrizione dell'universo nell'era in cui la densità di energia della polvere prevaleva su quella delle altre componenti.

- Nel caso $k > 0$, definendo $u^2 = a/C$ e risolvendo l'equazione differenziale per separazione di variabili si arriva ad avere la seguente uguaglianza:

$$\int_0^u \frac{(u')^2}{\sqrt{1 - k(u')^2}} du = \frac{t}{2C}.$$

Effettuando una seconda sostituzione $\sqrt{k}u = \sin \alpha$, il membro di sinistra diventa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^{3/2}} \int_0^\alpha \sin^2 \alpha d\alpha &= \frac{1}{2k^{3/2}} [\alpha - \sin \alpha \cos \alpha] \\ &= \frac{1}{4k^{3/2}} [2\alpha - \sin 2\alpha]. \end{aligned}$$

Definendo l'angolo di sviluppo $\phi = 2\alpha$, alla fine si ottiene che

$$\begin{aligned} t(\phi) &= \frac{C}{2k^{3/2}} [\phi - \sin \phi] \\ &= \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)^{3/2}} [\phi - \sin \phi]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Si può ricavare $a(\phi)$ dalla relazione $\sin \frac{\phi}{2} = \sin \alpha = \sqrt{ku} = \sqrt{ka/C}$ utilizzando le formule di bisezione, ottenendo così l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} a(\phi) &= \frac{C}{2k} [1 - \cos \phi] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0} - 1)} [1 - \cos \phi]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Nel caso di $k = +1$ si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} a(\phi) = \frac{C}{2}(1 - \cos \phi) \\ t(\phi) = \frac{C}{2}(\phi - \sin \phi). \end{cases} \quad (3.72)$$

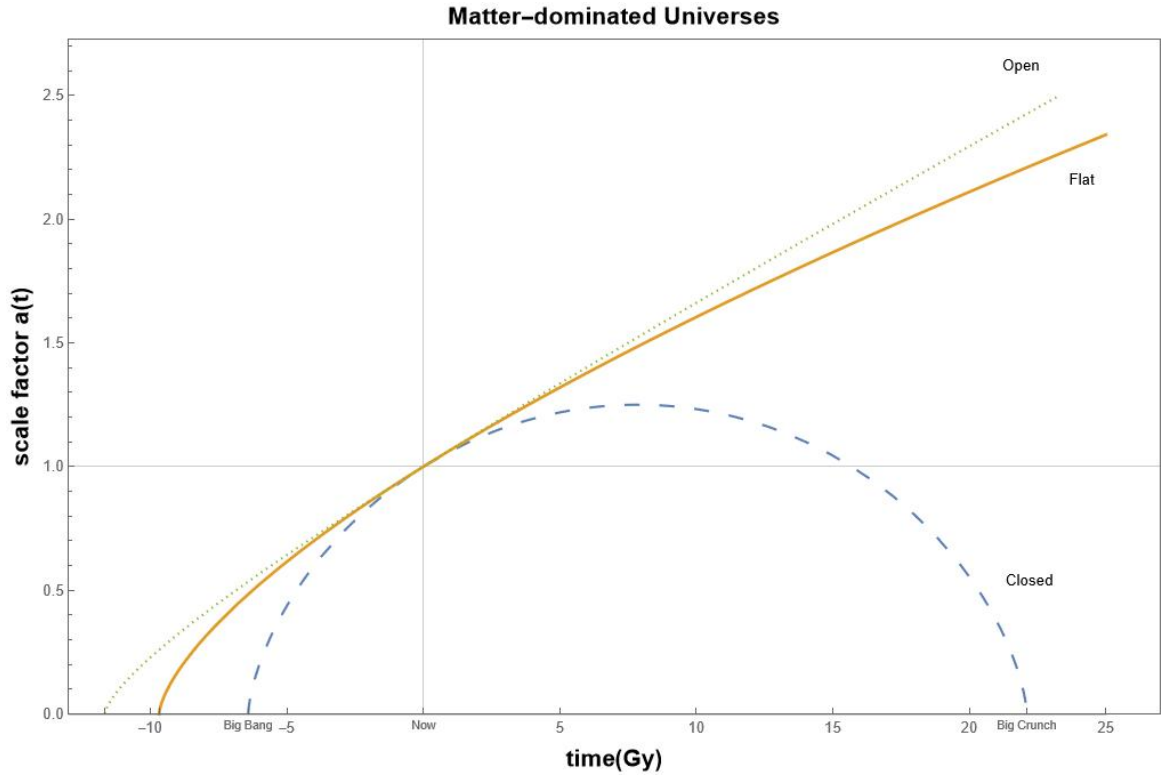


Figura 3.2: Andamento del fattore di scala al variare della curvatura per universi dominati da materia. Nel caso di universo aperto il valore del parametro densità di materia è $\Omega_{m,0} = 0,3$, nel caso di universo piatto abbiamo $\Omega_{m,0} = 1$, infine nel caso di universo chiuso abbiamo $\Omega_{m,0} = 5$. Inoltre in questo grafico si è preferito confrontare l'andamento delle varie soluzioni facendo coincidere l'istante di tempo $t = 0$ con il momento attuale, per cui si ha $a(0) = 1$.

- per $k < 0$ la soluzione si ottiene in modo analogo al caso precedente. Essa è:

$$\begin{cases} a(\phi) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)} [\cosh \phi - 1] \\ t(\phi) = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_{m,0}}{(\Omega_{m,0}-1)^{3/2}} [\phi - \sinh \phi] \end{cases} \quad (3.73)$$

e quando $k = -1$ diventano

$$\begin{cases} a(\phi) = \frac{C}{2} (\cosh \phi - 1) \\ t(\phi) = \frac{C}{2} (\sinh \phi - \phi). \end{cases} \quad (3.74)$$

3.6.5 Soluzioni esatte per universi dominati da radiazione

Nel caso di un universo *radiation-dominated*, tale per cui $p = \frac{1}{3}\rho$, l'equazione di Friedmann diventa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\gamma,0} a^{-4} - k a^{-2}.$$

Anche in questo caso poniamo $a(0) = 0$, come nel paragrafo precedente. Definendo la costante $C' := 8\pi G \rho_{\gamma,0}/3$ e integrando per separazione di variabili, otteniamo le seguenti soluzioni:

- per $k = 0$, dall'equazione

$$\int_0^a a' da' = \int_0^t \sqrt{C'} dt'$$

si ricava la funzione

$$a(t) = (4C')^{1/4} t^{1/2}. \quad (3.75)$$

Questo modello descrive l'universo nelle primissime fasi della sua creazione, prima dell'era dominata dalla materia.

- Per $k > 0$, l'integrale da risolvere è:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{\frac{C'}{(a')^2} - k}} da' = \int_0^t dt'.$$

Lo riscriviamo nella forma

$$\frac{1}{\sqrt{C'}} \int_0^a \frac{a'}{\sqrt{1 - \frac{k(a')^2}{C'}}} da' = t,$$

da cui si ottiene

$$t = -\frac{\sqrt{C'}}{k} \left[\sqrt{1 - \frac{ka^2}{C'}} - 1 \right].$$

Quindi la soluzione è:

$$a(t) = \sqrt{\frac{C'}{k}} \left[1 - \left(1 - \frac{kt}{\sqrt{C'}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.76)$$

che si può riscrivere con i parametri densità di energia, ricordando che nel caso di universo dominato da radiazione vale la relazione $\Omega_{\gamma,0} = 1 - \Omega_{k,0}$:

$$a(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{\gamma,0}}{\Omega_{\gamma,0} - 1}} \left[1 - \left(1 - \frac{H_0(\Omega_{\gamma,0} - 1)t}{\sqrt{\Omega_{\gamma,0}}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.77)$$

Nel caso $k = 1$, la soluzione diventa:

$$a(t) = \sqrt{C'} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{C'}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.78)$$

- Per $k < 0$, l'equazione da risolvere è:

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{\frac{C'}{(a')^2} + |k|}} da' = \int_0^t dt'.$$

Con un procedimento analogo al caso precedente, si ottiene:

$$t = \frac{\sqrt{C'}}{|k|} \left[\sqrt{1 + \frac{|k|a^2}{C'}} - 1 \right],$$

da cui la soluzione

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{C'}{|k|}} \left[\left(1 + \frac{|k|}{\sqrt{C'}} t \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\Omega_{\gamma,0}}{1 - \Omega_{\gamma,0}}} \left[\left(1 + \frac{H_0(1 - \Omega_{\gamma,0})t}{\sqrt{\Omega_{\gamma,0}}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nel caso di $k = -1$, la soluzione diventa:

$$a(t) = \sqrt{C'} \left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{C'}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}. \quad (3.80)$$

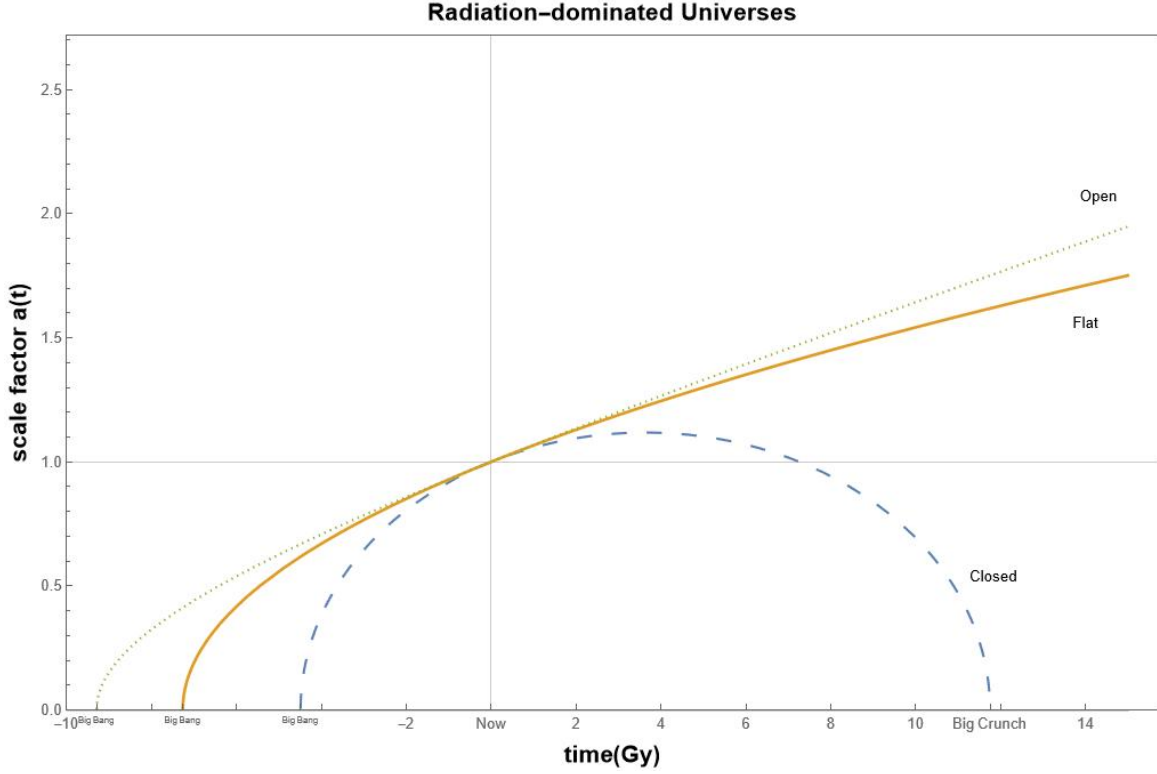


Figura 3.3: Andamento del fattore di scala al variare della curvatura per universi dominati da radiazione. Il valore del parametro densità di radiazione è $\Omega_{\gamma,0} = 0,317$ nel caso di universo aperto, $\Omega_{\gamma,0} = 1$ nel caso di universo piatto, infine $\Omega_{\gamma,0} = 5$ nel caso di universo chiuso. Anche in questo grafico si è preferito far coincidere l'istante di tempo $t = 0$ con il momento attuale, per cui si ha $a(0) = 1$.

3.6.6 Soluzioni esatte per universi dominati dalla costante cosmologica

Quando a dominare è la densità di energia del vuoto, con densità $\rho_{\Lambda} = -p_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$, si ha che Λ potrebbe assumere valori sia positivi che negativi. Dobbiamo quindi fare distinzione tra i due casi. In questo caso l'equazione di Friedmann (3.23) da risolvere è:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \\ &= \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda} - \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Come vedremo, per $\Lambda > 0$ troveremo che alcune soluzioni descrivono modelli di universi che non prevedono una singolarità iniziale (il *Big Bang*), perciò in questo paragrafo poniamo $a(0) = 1$, ovvero l'istante $t = 0$ coincide con il tempo presente. Al variare di k troviamo le seguenti soluzioni:

- per $k = 0$, risolvendo

$$\int_1^a \frac{1}{a'} da' = \int_0^t \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} dt',$$

si ottiene

$$a(t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t\right). \quad (3.82)$$

Ad oggi sappiamo che la curvatura dell'universo è prossima a zero, perciò quest'equazione descrive la crescita del fattore di scala nell'ultima fase, quella dominata dalla costante cosmologica, iniziata circa 4 miliardi di anni fa.

- Per $k > 0$, dobbiamo risolvere l'equazione

$$\int_1^a \frac{1}{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}(a')^2 - k}} da' = \int_0^t dt'.$$

Riscrivendolo nella forma

$$\int_1^a \left[\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3k}} a' \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} da' = \int_0^t \sqrt{k} dt',$$

si ottiene

$$\sqrt{kt} = \sqrt{\frac{3k}{\Lambda}} \left[\cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3k}} a \right) - \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3k}} \right) \right]$$

ed infine

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{3k}{\Lambda}} \cosh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3k}} \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda - 1}{\Omega_\Lambda}} \cosh \left(H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t + \cosh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda - 1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

- Per $k < 0$, abbiamo invece l'equazione

$$\int_1^a \left[\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3|k|}} a' \right)^2 - 1 \right]^{-1/2} da' = \int_0^t \sqrt{k} dt',$$

cui soluzione è:

$$\sqrt{kt} = \sqrt{\frac{3|k|}{\Lambda}} \left[\sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3|k|}} a \right) - \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3|k|}} \right) \right].$$

Si ricava la seguente funzione per $a(t)$:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{3|k|}{\Lambda}} \sinh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t + \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3|k|}} \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{1-\Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda}} \sinh \left(H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} t + \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Tutte e tre le soluzioni rappresentano lo *spaziotempo di de Sitter* in coordinate differenti.

Nel caso di $\Lambda < 0$, si ha che anche $\Omega_\Lambda < 0$ e sappiamo che questo è possibile se e solo se $k < 0$, per l'osservazione 3.2.1. L'equazione di Friedmann si può scrivere nella forma

$$(\dot{a})^2 = -\frac{|\Lambda|}{3} a^2 + |k|.$$

Risolviamo per separazione di variabili:

$$\int_1^a \left(\frac{-|\Lambda|}{3|k|} (a')^2 + 1 \right)^{-1/2} da' = \int_0^t \sqrt{k} dt',$$

definiamo $a = \sqrt{\frac{3|k|}{|\Lambda|}} \sin w$ ed il membro di sinistra dell'equazione precedente diventa

$$\int \sqrt{\frac{3|k|}{|\Lambda|}} \frac{\cos w}{\sqrt{1-\sin^2 w}} dw = \sqrt{\frac{3|k|}{|\Lambda|}} w.$$

Risostituendo la variabile di integrazione, otteniamo come soluzione

$$\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t = \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3|k|}} a \right) - \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3|k|}} \right)$$

da cui otteniamo la seguente soluzione all'equazione di Friedmann:

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{3|k|}{|\Lambda|}} \sin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3}} t + \arcsin \left(\sqrt{\frac{|\Lambda|}{3|k|}} \right) \right) \\ &= \sqrt{\frac{-(1-\Omega_\Lambda)}{\Omega_\Lambda}} \sin \left(H_0 \sqrt{-\Omega_\Lambda} t + \arcsin \left(\sqrt{\frac{-\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.85)$$

la quale rappresenta lo *spaziotempo anti-de Sitter*.

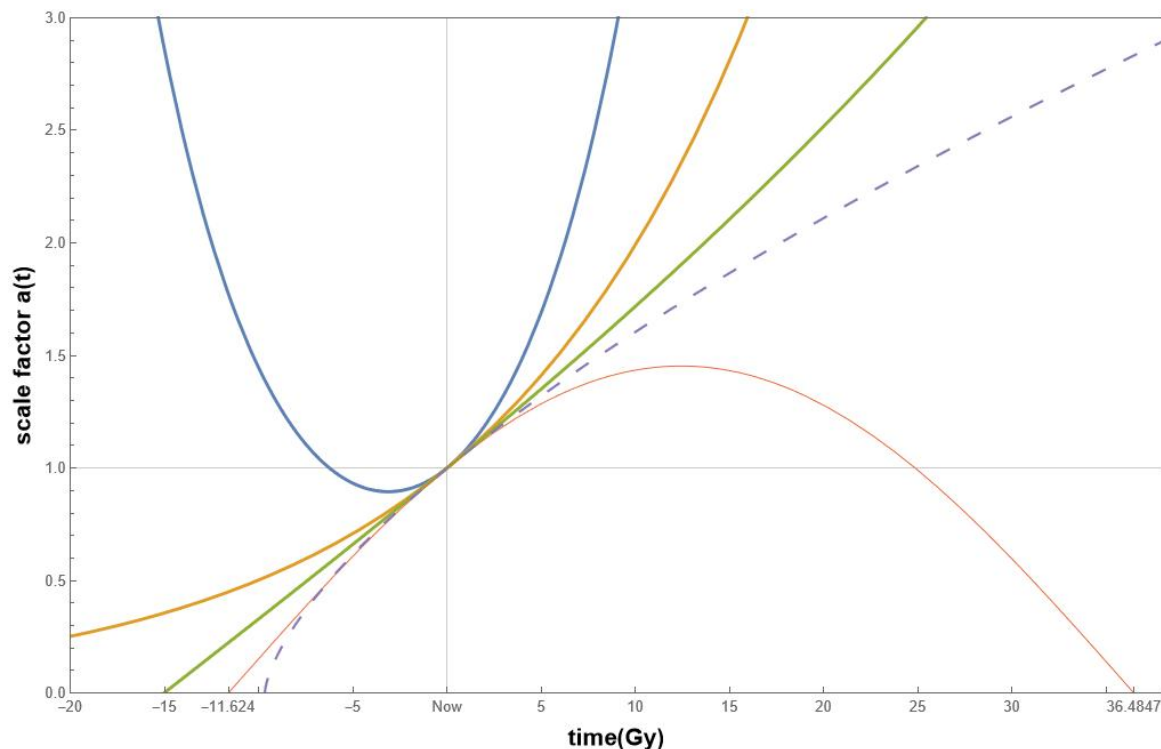


Figura 3.4: La linea tratteggiata rappresenta l'andamento del fattore di scala in un universo piatto dominato da materia, mentre le altre rappresentano (dall'alto verso il basso): in blu "closed universe ($\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{k,0} = (0, 5, -4)$ ", in giallo "flat universe ($\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{k,0} = (0, 1, 0)$ ", in verde "open universe ($\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{k,0} = (0, 0.1, 0.9)$ ", in rosso "open universe ($\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}, \Omega_{k,0} = (0, -0.9, 1.9)$ ".

3.6.7 Il modello Lambda-CDM semplice

Il *modello Λ CDM*, o *modello cosmologico standard*, è quello più in accordo con i dati raccolti sino ad oggi. Secondo tale modello le tre componenti principali che costituiscono il nostro universo sono: energia oscura (associata alla costante cosmologica Λ), materia ordinaria e materia oscura fredda (o CDM, dall'inglese *cold dark matter*). Mentre la prima è una forma di energia sconosciuta, responsabile dell'espansione dell'universo, la materia oscura fredda è un ipotetico tipo di materia, detta "oscura" perché non interagisce con i campi elettromagnetici e "fredda" perché formata da particelle che si muovono con velocità di molto inferiore a quella della luce.

Osservazione 3.6.1. *Come abbiamo già visto nell'osservazione 3.3.1, al tempo attuale il parametro densità di energia della radiazione assume valori molto bassi, circa $8,4 \cdot 10^{-5}$, mentre, secondo il modello cosmologico del Big Bang, nei primi istanti di vita dell'universo era proprio questa forma di energia a prevalere sulle altre. In questo paragrafo analizzeremo una versione semplificata del modello Λ CDM, secondo la quale il contributo del termine Ω_{γ} si può considerare trascurabile.*

La curvatura dello spazio

Secondo questo modello la curvatura k delle foglie tridimensionali Σ è nulla. Tale risultato è stato raggiunto sfruttando i dati di un particolare tipo di candele standard, le *supernovae* di tipo *Ia*, di cui si conoscono distanza di luminosità e redshift. Come abbiamo già visto nel paragrafo 3.5, queste due quantità sono legate dalla relazione (3.52). Sempre nello stesso paragrafo, si è dimostrato come per un segnale luminoso che viaggia in direzione radiale valga l'uguaglianza:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \int_0^r \frac{1}{(1 - k(r')^2)^{1/2}} dr', \quad (3.86)$$

da cui si ottiene

$$r = S_k \left(\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt \right), \quad (3.87)$$

dove S_k è la funzione definita in (3.13). Quindi la relazione (3.52) si può riscrivere come

$$d_L = a_0(1+z) S_k \left(\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt \right). \quad (3.88)$$

Utilizzando la relazione (3.48) tra redshift e fattore di scala, si può cambiare la variabile di integrazione da t a z , infatti:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{1}{H(z')} dz', \quad (3.89)$$

dove $H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2 \right)$ si ottiene dalla formula (3.41).

Definiamo

$$E(z) := \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2} \quad (3.90)$$

e sostituiamo in (3.89) per ottenere

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz'. \quad (3.91)$$

Segue che la distanza di luminosità è data anche dalla relazione:

$$d_L = a_0(1+z) S_k \left(\frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz' \right). \quad (3.92)$$

Siccome che dall'osservazione (3.2.1) si ha che $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$ e che dalla definizione di $\Omega_{k,0}$ otteniamo $a_0 = 1/H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}$, conoscendo il valore della costante di Hubble, con la relazione (3.92) abbiamo ottenuto una formula che lega distanza di luminosità e redshift con le densità di materia e energia oscura al tempo presente t_0 . A questo punto, variando

i valori dei parametri k , $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$ all'interno di tale formula, sono stati ricavati diversi grafici che descrivono la distanza di luminosità in funzione del redshift e confrontandoli con i dati delle supernovae Ia a disposizione, siamo stati in grado di terminare quello che meglio approssima le osservazioni. Da questo lavoro risulta che $k = 0$, Ω_m è circa il 30% della densità di energia totale, di cui solo il 15% circa è dato dalla materia ordinaria, e Ω_Λ è circa il 70%.

I valori più recenti ed attendibili dei parametri cosmologici sono forniti dal satellite *Planck* [11]:

Parametro	Simbolo	Valore
Costante di Hubble	H_0	67,4 km s ⁻¹ Mpc ⁻¹
Parametro di densità di energia oscura	Ω_Λ	0,683
Parametro densità di materia	Ω_m	0,317
Parametro densità di materia oscura	Ω_{CDM}	0,268
Parametro densità di materia ordinaria	Ω_b	0,049

Soluzione esatta

I dati raccolti fino ad ora ci conducono verso un modello in cui l'universo risulta essere in espansione ($\dot{a} > 0$), le foglie tridimensionali che lo compongono hanno curvatura nulla ($k = 0$), la densità di energia della materia diminuisce all'aumentare del fattore di scala secondo la legge $\rho_m = \rho_{m,0}a^{-3}$, mentre la densità di energia del vuoto $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} = \Lambda/8\pi G$ rimane costante.

Dall'equazione di Friedmann (3.38), integrando per separazione di variabili, possiamo ottenere l'espressione di $a(t)$. Infatti, l'equazione da risolvere è:

$$\dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_{m,0}a^{-1} + \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda,0}a^2}, \quad (3.93)$$

per brevità rinominiamo i coefficienti $M_0 := \frac{8\pi G}{3}\rho_{m,0}$ e $L_0 := \frac{8\pi G}{3}\rho_{\Lambda,0}$. Separiamo le variabili e riscriviamo l'equazione nella forma:

$$\int \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{M_0 + L_0 a^3}} da = t, \quad (3.94)$$

effettuiamo la sostituzione $\sqrt{a^3} = u$, così il membro di sinistra diventa

$$\frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{M_0 + L_0 u^2}} du = \frac{2}{3\sqrt{M_0}} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L_0}{M_0} u^2}} du.$$

Cambiamo un'altra volta variabile di integrazione ponendo $\sqrt{\frac{L_0}{M_0}}u = v$, in modo da ottenere

$$\frac{2}{3\sqrt{L_0}} \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} dv.$$

Quest'ultimo integrale può essere risolto ponendo $v = \sinh z$, dando come risultato $2/3\sqrt{L_0}z$. Perciò dalla (3.94) si ottiene $t = 2/3\sqrt{L_0}z$ e ripristinando tutte le sostituzioni effettuate durante la risoluzione si ricava:

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{\rho_{m,0}}{\rho_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} t \right) \\ &= \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{3H_0\sqrt{\Omega_{\Lambda}}}{2} t \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Questa soluzione mostra come l'andamento del fattore di scala sia proporzionale a $t^{2/3}$ nell'era dominata dalla polvere e come la sua crescita inizi a seguire un andamento esponenziale nell'era dominata dall'energia oscura.

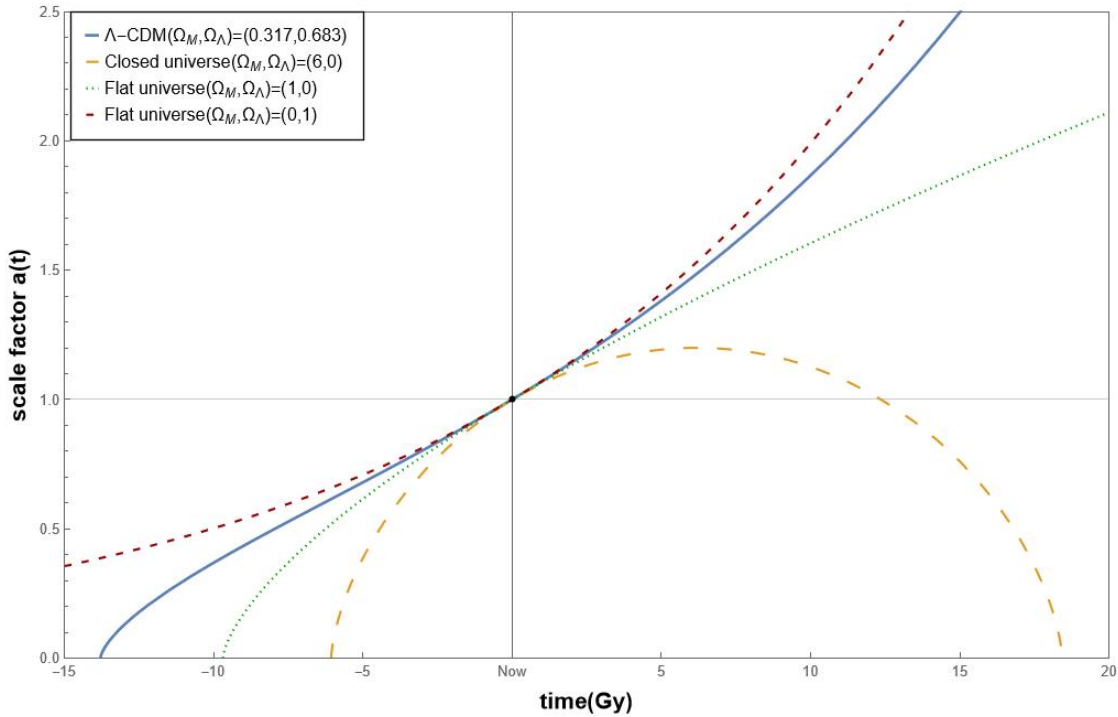


Figura 3.5: Confronto tra diverse soluzioni per l'equazione di Friedmann al variare delle densità di energia e della curvatura.

Età dell'universo e raggio dell'universo osservabile

La soluzione ottenuta al paragrafo precedente ci permette di calcolare l'età del nostro universo. Infatti, sapendo che al tempo presente t_0 si ha che $a(t_0) = 1$, ne consegue che l'età dell'universo è data dalla formula

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} \right). \quad (3.96)$$

Sostituendo i valori dei parametri, i quali si possono ricavare da quelli riportati nella tabella del sottoparagrafo 3.6.7, risulta che secondo il *modello* Λ CDM il nostro universo ha un'età di 13,79 miliardi di anni.

Per quanto riguarda l'estensione, sappiamo che il fattore di scala $a(t)$ rappresenta le dimensioni dell'intero universo all'istante di tempo t . Però per un osservatore sulla Terra non è possibile ricevere segnali elettromagnetici provenienti da ogni punto dello spazio, questo a causa di due fenomeni: la continua espansione dell'universo stesso unita al fatto che la velocità con cui viaggia un'onda elettromagnetica ha valore finito. Si parla quindi di *universo osservabile* ed *universo non osservabile*. Il confine che separa queste due regioni è detto *orizzonte cosmologico*.

Siccome l'universo è in espansione, la distanza tra noi e l'*orizzonte cosmologico* non è data semplicemente dalla velocità della luce moltiplicata per l'età dell'universo. C'è bisogno di tenere in considerazione il fatto che nel frattempo l'universo si è espanso. Consideriamo ancora una volta la distanza percorsa da una fotone (che viaggia in direzione radiale) da quando è stato emesso, nell'istante di tempo t_1 nel punto di coordinata $r = 0$, a quando è arrivato a noi, all'istante di tempo presente t_0 nel punto di coordinata r . Il suo vettore tangente è

$$\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dr}{dt} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3.97)$$

ed essendo un vettore *lightlike*, calcolando la sua norma (ricordando che in questo modello la curvatura è nulla) otteniamo

$$0 = 1 - a^2(t) \frac{dr^2}{dt^2}. \quad (3.98)$$

Integrando quest'equazione otteniamo

$$r = \int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt, \quad (3.99)$$

dove la quantità a destra è detta *distanza comovente* d_C . Abbiamo già dimostrato che per un segnale luminoso radiale vale la relazione (3.91), che riscriviamo qui di seguito

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{E(z')} dz', \quad (3.100)$$

ottenuta utilizzando la relazione tra redshift e fattore di scala $1 + z = a_0/a(t)$. Al tempo presente corrisponde un redshift $z = 0$, mentre tornando indietro fino all'istante del *Big Bang*, ovvero il punto di singolarità $a(0) = 0$, osserviamo che il redshift z tende all'infinito. Per cui il raggio dell'*orizzonte cosmologico* è dato dal valore che assume l'integrale

$$\int_0^{t_0} \frac{1}{a(t)} dt = \frac{1}{a_0 H_0} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{\Lambda,0}}} dz' \quad (3.101)$$

facendo tendere z all'infinito. Utilizzando un qualsiasi programma di calcolo, come ad esempio *Wolfram Mathematica*, risulta che la regione di universo che possiamo osservare oggi ha un raggio di 46,95 miliardi di anni-luce.

Considerazioni finali

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto come l'evoluzione del fattore di scala $a(t)$ è determinata dai valori dei parametri $\Omega_{m,0}$, Ω_{Λ} e $\Omega_{k,0}$ (anche qui considereremo trascurabile il contributo di $\Omega_{\gamma,0}$). È quindi possibile costruire un piano $\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda}$ (figura 3.6) e suddividerlo in regioni che contengono informazioni sulla curvatura e sul comportamento del fattore di scala. Le curve di demarcazione tra una regione e l'altra che si vanno a considerare sono le seguenti:

- sulla retta $\Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_{m,0}$ sono presenti tutti i modelli con curvatura nulla (cf. relazione 3.28). Segue che nel semipiano superiore sono contenuti tutti i modelli che prevedono un universo chiuso ($k > 0$), mentre in quello inferiore ci sono i modelli con universo aperto ($k < 0$);
- un'altra retta che si va a considerare è quella data da $q_0 = \frac{\Omega_{m,0}}{2} - \Omega_{\Lambda} = 0$. Su di essa giacciono i modelli secondo cui, attualmente, l'universo ha accelerazione nulla e la sua equazione si può ottenere derivando rispetto alla variabile temporale l'equazione

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{m,0} a^{-1}(t) + \Omega_{\Lambda} 3a^2(t) - \frac{k}{H_0^2}$$

per poi valutarla in $t = 0$ (ricordando la convenzione $a(0) = 1$);

- restano da determinare: la curva che separa i modelli che possiedono un *Big Bang* da quelli che ne sono sprovvisti e quella che separa i modelli che prevedono un ricollasso dell'universo in un tempo finito (il *Big Crunch*) da quelli che prevedono un'espansione infinita (detta *Big Freeze*). Iniziamo con una breve considerazione: in un universo piatto, per cui vale $\Omega_{\Lambda} = 1 - \Omega_{m,0}$, dall'equazione (3.38) otteniamo

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + (1 - \Omega_{m,0}). \quad (3.102)$$

osserviamo che, essendo sempre $\Omega_{m,0} \geq 0$, se $\Omega_{m,0} \leq 1$, allora il termine destro dell'equazione risulta positivo e questo vuol dire che, se all'istante $t = t_0$ l'universo

è in espansione, allora esso manterrà questa tendenza all'infinito. Invece, quando $\Omega_{m,0} > 1$, si ha che Ω_Λ assume valore negativo, il che significa che l'energia oscura contrasta la forza repulsiva dovuta alla presenza di materia, facendo ricollassare l'universo su se stesso.

Nel caso in cui la curvatura non fosse necessariamente nulla, si avrebbe $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda$ e dall'equazione (3.38) seguirebbe

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda}{a^2} + \Omega_\Lambda. \quad (3.103)$$

Osserviamo che per valori di Ω_Λ negativi, l'universo può essere sia chiuso che aperto, ma sarà comunque destinato a ricollassare perché la forza attrattiva dovuta alla costante cosmologica, essendo costante nel tempo, ad un certo punto prenderà il sopravvento sulle altre costanti (che possono dominare solo per valori di $a(t)$ piccoli). Invece, come abbiamo già visto in precedenza, se $\Lambda = 0$ e $\Omega_{m,0} < 1$, si ha un universo con curvatura negativa destinato ad espandersi per sempre. Infine, quando abbiamo sia $\Omega_\Lambda > 0$ che $\Omega_{m,0} > 0$, la situazione diventa più complicata. Osserviamo dall'equazione (3.103) che per valori di a prossimi a zero, il parametro dominante è $\Omega_{m,0}$ e la parte destra dell'equazione risulta positiva. Per valori di a molto grandi, il termine dominante è Ω_Λ e la parte destra dell'equazione risulta ancora una volta positiva. Ci sono però dei valori intermedi di $a(t)$ tali per cui il termine dominante diventa $\Omega_{k,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda$ e, per alcuni valori di $\Omega_{m,0}$ e Ω_Λ , questo porta ad avere una quantità negativa nella parte destra dell'equazione (3.103), il che è fisicamente impossibile. Grazie all'ausilio di alcuni programmi di calcolo, si è visto che è teoricamente possibile avere universi con valori di $\Omega_\Lambda > 1$ e bassi valori di $\Omega_{m,0}$, che per un certo periodo di tempo nel passato hanno avuto un fattore di scala $a \gg 1$ ed erano in contrazione. Ma, al diminuire di $a(t)$, il parametro di curvatura (che in questa situazione assume valore negativo) inizia a prendere il sopravvento. Siccome abbiamo visto che non è possibile avere $H^2 < 0$, questo causa un'arresto della contrazione ad un valore pari ad a_{min} e l'universo comincia ad espandersi. Tale fenomeno è detto *Big Bounce* e coinvolge modelli di universo privi di *Big Bang*². Allo stesso modo è possibile vedere che esistono modelli con valori di $\Omega_{m,0} > 1$ talmente alti, tali per cui alcuni valori di $\Omega_\Lambda \leq 0$ non sono sufficiente per evitare il ricollasso. In entrambi i casi, per determinare analiticamente i valori limite di Ω_Λ possiamo procedere nel modo seguente [5]:

²Quando la coppia di valori $(\Omega_{m,0}, \Omega_\Lambda)$ è vicina alla curva che, nel piano $\Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda$, separa la regione in cui si trovano i modelli che possiedono una singolarità iniziale da quella in cui si trovano i modelli che non la possiedono, allora ci troviamo davanti ad un altro modello cosmologico che prende il nome di *Loitering Universe*, o *Universo di Lemaitre*. Secondo quest'ultimo, l'universo ha origine dal *Big Bang*, per poi entrare in una fase in cui il fattore di scala rimane quasi costante (*loitering fase*). Durante questa fase l'universo si comporta in modo simile a quanto descritto per il modello di *universo statico di Einstein*. Infine, dopo un certo lasso di tempo, la costante cosmologica prenderà il sopravvento, portando ad un'espansione infinita. Tanto più i valori della coppia $\Omega_{m,0}, \Omega_\Lambda$ sono vicini alla curva di demarcazione, tanto più lunga sarà la *loitering fase*.

è stato osservato che i modelli che si trovano in questi casi limite, per un certo lasso di tempo nel passato, hanno avuto lo stesso comportamento visto nel modello di universo statico di Einstein, per cui essi devono soddisfare le relazioni

$$k_0 a_s^{-2} = \Lambda_s = \frac{3}{2} C a_s^{-3}, \quad (3.104)$$

dove Λ_s è il valore critico che stiamo cercando, la costante $C := \frac{8}{3}\pi G\rho_{m,0}$ e a_s rappresenta il valore del fattore di scala nel momento in cui l'universo è entrato nella *loitering fase* (quando le forze di espansione e contrazione erano bilanciate e quando il fattore di scala assumeva valore quasi costante). Segue che:

$$\frac{k_0}{a_s^2} = \frac{3}{2} \frac{C}{a_s^3}, \quad (3.105)$$

da cui

$$a_s = \frac{3C}{2k_0}.$$

Sostituendo quest'ultima uguaglianza in $\Lambda_s = K_0/a_s^2$, ricordando che $C = H_0^2\Omega_{m,0}$, abbiamo

$$\Lambda_s = \frac{4}{9} K_0^3 (\Omega_{m,0} H_0^2)^{-2}. \quad (3.106)$$

Definiamo $x := (\Lambda_s/12\Omega_{m,0}H_0^2)^{1/3}$, dalla (3.105) si ottiene

$$x^3 = \frac{\Lambda_s}{12\Omega_{m,0}H_0^2} = \frac{k_0^3}{27\Omega_{m,0}^3 H_0^6}, \quad (3.107)$$

per cui $x = k_0/3\Omega_{m,0}H_0^2$. Riprendiamo adesso l'equazione (3.40), valutata in $t = 0$ risulta

$$\frac{K_0}{H_0^2} = \Omega_{m,0} + \frac{\Lambda}{3H_0^2} - 1, \quad (3.108)$$

che si può riscrivere nella forma

$$\frac{K_0}{\Omega_{m,0}H_0^2} = 1 + \frac{\Lambda}{3\Omega_{m,0}H_0^2} - \frac{1}{\Omega_{m,0}}. \quad (3.109)$$

Siccome $3x = K_0/\Omega_{m,0}H_0^2$ e $4x^2 = \Lambda_s/3\Omega_{m,0}H_0^2$, dall'equazione precedente otteniamo la seguente cubica:

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \frac{(\Omega_{m,0} - 1)}{\Omega_{m,0}} = 0. \quad (3.110)$$

Supponiamo fissati i valori $\Omega_{m,0} > 0$ e H_0 e cerchiamo le radici positive di questa cubica (perché stiamo cercando i valori limite di $\Omega_\Lambda > 0$). Il suo discriminante è

$$\Delta = \frac{1}{64} \left(\frac{1 - 2\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}^2} \right). \quad (3.111)$$

Si può verificare che:

- se $0 \leq \Omega_{m,0} \leq 1/2$, allora $\Delta > 0$ ed esiste un'unica radice reale (ed è positiva).
Essa è

$$x = \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right] \quad (3.112)$$

e dalla definizione di x possiamo ricavarci il valore di Ω_Λ nel modo seguente:

$$\left(\frac{\Lambda_s}{3H_0^2} \cdot \frac{1}{4\Omega_{m,0}} \right)^{1/3} = \cosh \left[\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right]$$

da cui

$$\Omega_{\Lambda_s} = 4\Omega_{m,0} \left[\cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right) \right]^3. \quad (3.113)$$

Se $\Omega_{m,0} > 1/2$, allora $\Delta < 0$ e l'equazione ammette tre radici reali distinte e si ha che:

- se $1/2 \leq \Omega_{m,0} \leq 1$, solo una di esse risulta positiva ed è

$$x = \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right],$$

da cui si ricava il valore

$$\Omega_{\Lambda_s} = 4\Omega_{m,0} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right) \right]^3. \quad (3.114)$$

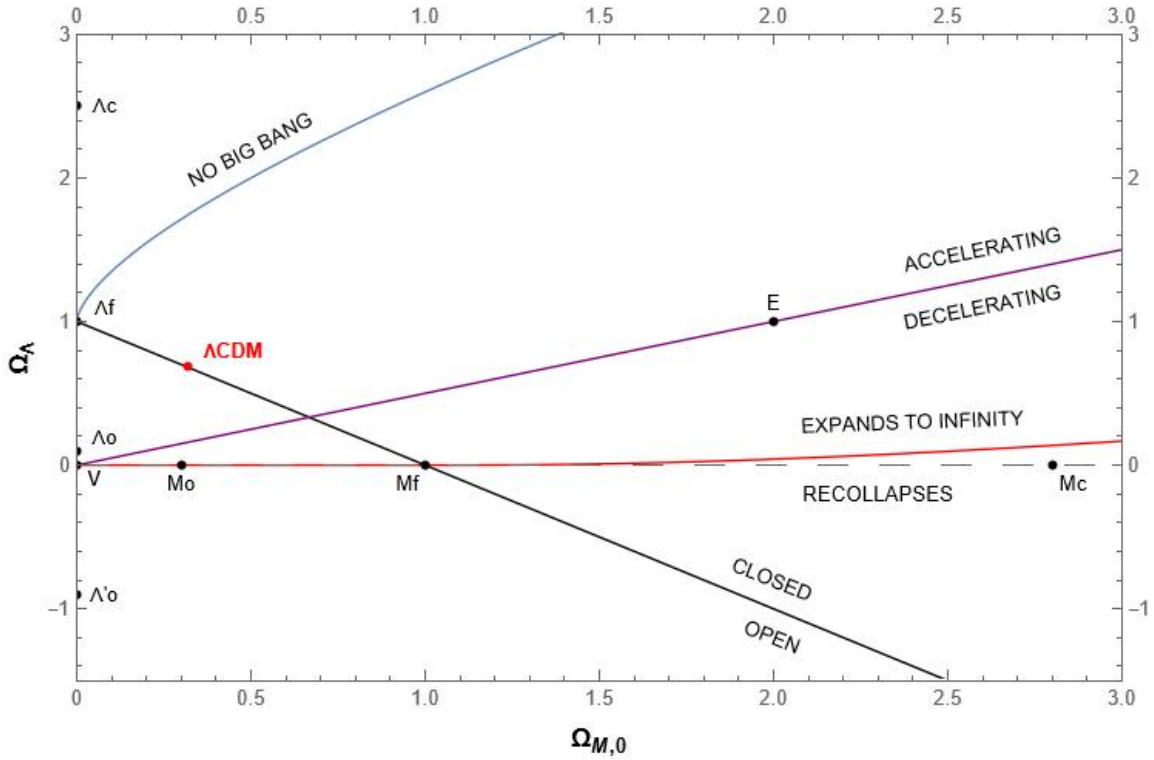


Figura 3.6: Piano $\Omega_{m,0}-\Omega_{\Lambda}$ in cui sono stati collocati i modelli analizzati nel corso di questo capitolo: V universo vuoto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0, 0)$, E universo statico di Einstein $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (2, 1)$, M_o universo matter-dominated aperto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0.3, 0)$, M_f universo matter-dominated piatto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (1, 0)$, M_c universo matter-dominated chiuso $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (2.8, 0)$, Λ_c universo vacuum-dominated chiuso $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0, 2.5)$, Λ_f universo vacuum-dominated piatto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0, 1)$, Λ_o universo vacuum-dominated aperto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0, 0.1)$, Λ'_o universo vacuum-dominated aperto $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0, -0.9)$, ΛCDM modello Λ -CDM $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda}) = (0.317, 0.683)$.

– se $\Omega_{m,0} > 1$, allora le radici reali positive sono due. Una coincide con la precedente, mentre l'altra è

$$x = \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) + \frac{4}{3} \pi \right],$$

da cui si ottiene il valore limite

$$\Omega_{\Lambda_s} = 4\Omega_{m,0} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) + \frac{4}{3} \pi \right) \right]^3. \quad (3.115)$$

In conclusione, abbiamo ottenuto che nel piano $\Omega_{m,0} - \Omega_\Lambda$ la curva

$$\Omega_\Lambda = \begin{cases} 4\Omega_{m,0} \left[\cosh \left(\frac{1}{3} \cosh^{-1} \left(\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right) \right]^3 & \text{se } 0 \leq \Omega_{m,0} \leq 1/2 \\ 4\Omega_{m,0} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) \right) \right]^3 & \text{se } \Omega_{m,0} \geq 1/2 \end{cases} \quad (3.116)$$

separa la parte di piano in cui stanno i modelli provvisti di *Big Bang* da quelli che ne sono sprovvisti, mentre la curva

$$\Omega_\Lambda = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \Omega_{m,0} \leq 1 \\ 4\Omega_{m,0} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}} \right) + \frac{4}{3}\pi \right) \right]^3 & \text{se } \Omega_{m,0} > 1 \end{cases} \quad (3.117)$$

separa la parte in cui ci sono i modelli di universo destinati a terminare con un *Big Crunch* da quelli in cui è prevista un'espansione infinita.

Bibliografia

- [1] S. M. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, Enrico Fermi Institute, University of Chicago (1997), <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll13/Carroll18.html>.
- [2] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry, An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco, 2003.
- [3] S. M. Carroll, W. H. Press and E. L. Turner, *The Cosmological Constant*, Annu. Rev. Astron. Astrophys. 1992. 30: 499-542. https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Carroll13/Carroll13_1.html
- [4] S. G. Djorgovski, *Lecture on Cosmological Models and Distances*, Caltech, California, https://sites.astro.caltech.edu/~george/ay21/Ay21_Lec03.pdf
- [5] J.E. Felten and R. Isaacman, *Scale factors $R(t)$ and critical values of the cosmological constant Λ in Friedmann universes*, Reviews of Modern Physics, 1986, 58: 689-698. DOI: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.58.689>.
- [6] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, new York, 1973.
- [7] D. W. Hogg, *Distance measures in cosmology*, Institute for Advanced Study, Princeton, 2000. https://ned.ipac.caltech.edu/level5/Hogg/Hogg_contents.html.
- [8] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, Department of Astronomy, The Ohio State University, 2006. http://carina.fcaglp.unlp.edu.ar/extragalactica/Bibliografia/Ryden_IntroCosmo.pdf.
- [9] R. K. Sachs and H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [10] J. A. Wolf, *Homogeneous Manifolds of Constant Curvature*, Offprint of Commentarii Mathematici Helvetici 36, 1961.

- [11] Planck collaboration, *Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results*, Astronomy and Astrophysics 571 A1(2014), <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201321529>.