



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA "GALILEO GALILEI"

---

CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN ASTRONOMIA

# Vuoto Quantistico

DAL PROBLEMA DEL CORPO NERO  
ALLA QUANTIZZAZIONE DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

*Laureando:*  
Davide LEGACCI

*Relatore:*  
Ch.mo Prof. Armando-Francesco  
BORGHESANI

---

Sessione di Laurea 13 Dicembre 2016

*Ad Alice*

## Sommario

Il primo capitolo è di riscaldamento: si tratta principalmente delle definizioni classiche riguardanti la radiazione termica, come quella di intensità specifica di radiazione o densità di energia. Si propone qualche dimostrazione “all’antica”, seguendo Planck; si arriva a riconoscere la fondamentale esistenza di una *funzione universale* che descrive la radiazione in equilibrio all’interno di una cavità; in un’appendice si riporta una dimostrazione della legge di Kirchhoff.

Il secondo capitolo è storico. La meta è la funzione di Planck, ma ci si prende tutto il tempo necessario, introducendo il modello classico degli oscillatori armonici materiali e suggerendo una prima analogia tra un oscillatore materiale e un *modo* di oscillazione del campo elettromagnetico in una cavità. Stabilito il fondamentale legame tra l’energia media di un oscillatore e la densità di energia del campo in equilibrio un excursus di meccanica statistica classica (in appendice) porta al teorema di equipartizione e alla distribuzione di Rayleigh-Jeans. Si presentano quindi due teorie di Planck, con due modelli di quantizzazione differenti: entrambe conducono alla meta, e dalla seconda in particolare emerge per la prima volta il fatto che l’energia media di un oscillatore sia diversa da zero anche quando in equilibrio con un radiazione termica di temperatura nulla - ossia in assenza di radiazione. Einstein e Stern giocano con questa nuova *energia di punto zero*, ricavando indipendentemente la distribuzione di Planck tramite un’ipotesi *ad hoc*, che oggi sappiamo essere errata.

Il terzo capitolo è il cuore della tesi: si mostra che la quantizzazione e l’energia di punto zero non sono prerogative dei sistemi materiali come gli oscillatori (o gli atomi), ma riguardano *il campo elettromagnetico*. Si risolvono le equazioni di Maxwell nel vuoto con un’opportuna scelta di gauge, arrivando a scrivere l’energia di un modo di oscillazione in termini della frequenza e dell’ampiezza. Un opportuno cambio di variabili mostra come l’espressione ottenuta sia equivalente, non solo formalmente ma nel profondo, all’hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale. Ogni modo del campo si quantizza allora esattamente come un oscillatore armonico, introducendo gli operatori di salita e di discesa. I livelli energetici di ogni modo vengono interpretati in termini di *numero di fotoni*. Si generalizza il tutto al campo generale sommando le soluzioni dei vari modi, ed emerge il primo di tanti “infiniti” in elettrodinamica quantistica.

Il quarto capitolo è forzato. Si introduce qualitativamente la matematica della relatività generale e dei buchi neri, e se ne discutono le leggi della meccanica. Il problema dell’entropia viene risolto dalla possibilità che questo possa *emettere*: Hawking mostra che un buco nero emette termicamente e ne determina la temperatura, inversamente proporzionale alla massa. Il meccanismo di emissione sarebbe dovuto essere spiegato in termini dei risultati del capitolo precedente, ma un approfondimento estremamente maggiore sarebbe stato necessario; si è quindi ripiegato su una spiegazione pittorica e folkloristica del meccanismo di emissione basato sulle “particelle virtuali”.

# Indice

<b>Prefazione</b>	<b>3</b>
<b>1 Radiazione termica</b>	<b>4</b>
1.1 Introduzione . . . . .	4
1.2 Intensità e densità di energia . . . . .	5
1.2.1 Derivazione elettrodinamica . . . . .	9
1.2.2 Conservazione dell'intensità . . . . .	10
1.3 Interazione radiazione-materia . . . . .	11
1.3.1 Emissione . . . . .	11
1.3.2 Assorbimento . . . . .	13
1.3.3 Scattering . . . . .	13
1.4 Equilibrio termodinamico . . . . .	15
1.4.1 Bilancio termico . . . . .	15
1.4.2 Verso la funzione universale . . . . .	16
1.4.3 Legge di Kirchhoff . . . . .	19
1.4.4 Radiazione di corpo nero . . . . .	19
<b>2 Energia di punto zero in meccanica quantistica classica</b>	<b>21</b>
2.1 Proprietà della funzione universale . . . . .	21
2.2 Gli oscillatori di Planck . . . . .	22
2.3 Modi normali di oscillazione . . . . .	24
2.4 Oscillatore armonico e modo normale . . . . .	27
2.5 Energia media . . . . .	27
2.5.1 Oscillatore classico e formula di Rayleigh-Jeans . . . . .	27
2.5.2 Quantizzazione dell'energia . . . . .	28
2.6 Nasce il concetto di energia di punto zero . . . . .	33
2.7 Einstein, Hopf e Stern . . . . .	37
<b>3 Quantizzazione del campo elettromagnetico</b>	<b>40</b>
3.1 Formalismo generale della meccanica quantistica . . . . .	40
3.1.1 Prodotto tensoriale di spazi vettoriali . . . . .	42
3.2 Quantizzazione dell'oscillatore armonico . . . . .	42
3.3 Elettrodinamica classica . . . . .	45
3.4 Quantizzazione del campo elettromagnetico . . . . .	48
3.4.1 Proprietà di un modo di oscillazione . . . . .	49
3.4.2 Un modo è un oscillatore! . . . . .	53
3.4.3 Quantizzazione del modo . . . . .	54
3.5 Generalizzazione a molti modi . . . . .	57
3.6 Stato di vuoto . . . . .	58

3.7	Considerazioni sulla quantizzazione del campo . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Uno sguardo ai buchi neri</b>	<b>61</b>
4.1	Formazione dei buchi neri . . . . .	61
4.1.1	Collasso gravitazionale . . . . .	61
4.1.2	Buchi neri primordiali . . . . .	63
4.1.3	Buchi neri in fisica classica . . . . .	63
4.2	Cenni di relatività generale . . . . .	63
4.2.1	Varietà pseudo-Riemanniana . . . . .	63
4.2.2	Equazione di Einstein . . . . .	64
4.2.3	Campo vettoriale di Killing . . . . .	65
4.2.4	La metrica di Schwarzschild . . . . .	66
4.2.5	Collasso gravitazionale, di nuovo . . . . .	67
4.3	Buchi neri e termodinamica . . . . .	67
4.3.1	Radiazione di Hawking . . . . .	69
4.4	Conclusioni . . . . .	71
<b>A</b>	<b>Scattering in equilibrio termodinamico</b>	<b>72</b>
A.1	Bilancio di scattering . . . . .	72
A.2	Un utile esercizio . . . . .	73
<b>B</b>	<b>Legge di Kirchhoff</b>	<b>76</b>
<b>C</b>	<b>Legge di Stefan-Boltzmann</b>	<b>78</b>
C.1	Pressione di radiazione . . . . .	78
C.2	Legge di Stefan-Boltzmann . . . . .	78
<b>D</b>	<b>Assorbimento dell'oscillatore</b>	<b>80</b>
<b>E</b>	<b>Meccanica statistica classica</b>	<b>82</b>
E.1	Ensamble microcanonico e canonico . . . . .	82
E.1.1	Equipartizione energia per un sistema canonico . . . . .	84
E.2	Oscillatore armonico classico . . . . .	85
E.2.1	Approccio meccanico . . . . .	85
E.2.2	Approccio statistico . . . . .	86
<b>F</b>	<b>Il modello di Einstein-Hopf</b>	<b>89</b>
<b>G</b>	<b>Oscillatore armonico in rappresentazione di Schrodinger</b>	<b>91</b>
	<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>93</b>

# Prefazione

«La straordinaria capacità di rendere  
complicate le cose semplici.»

---

New York Times

«Radiazione di Hawking?»

---

The Independent

Come spesso accade, questo lavoro è profondamente cambiato, in corso d'opera, rispetto al suo obiettivo originale. Quella che voleva essere un'introduzione alla radiazione termica e alla meccanica quantistica classica è diventata la parte più corposa della tesi. Quelle che volevano essere brevi precisazioni a piè di pagina sono diventate pagine e pagine di appendici. E quello che sarebbe dovuto essere il motivo di vita di questo lavoro, l'*astro* di *astrofisica*, è finito relegato frettolosamente nelle ultime pagine.

Il titolo iniziale del lavoro era *Vuoto Quantistico e Radiazione di Hawking*. Obiettivo ambizioso, troppo: una trattazione completa del vuoto quantistico richiede conoscenze di elettrodinamica quantistica che si affrontano solo in corsi della Laurea Magistrale; lo stesso dicasi per i buchi neri, la relatività generale e la QFT. Il progetto iniziale mi avrebbe portato a (cercare di) applicare strumenti mal padroneggiati ad oggetti poco conosciuti. Pertanto, in corso d'opera, ho ritenuto opportuno procedere passo dopo passo, ripartendo dalle basi e ripercorrendo, anche da un punto di vista storico, le tappe fondamentali che hanno portato alla nascita del concetto di *energia di punto zero*, arrivando a lambire i bordi del problema senza entrarci veramente, ma gettando le basi, magari, per un lavoro futuro.

Il risultato di questa scelta consiste in quattro capitoli. I primi due sono standard, mentre nel terzo c'è qualcosa di nuovo (ovviamente agli occhi di uno studente che esce da una laurea triennale). Il tentativo di comprensione ed elaborazione di alcuni concetti è stato, devo dire, divertente e soddisfacente. Il quarto capitolo, invece, è tutt'altra cosa: mi sono reso conto in corso d'opera che l'argomento avrebbe necessitato di ben altre conoscenze per essere affrontato. Il capitolo si sarebbe inserito in una tesi già abbastanza corposa (grazie anche alle innumerevoli appendici), e ad un certo punto ho pensato di tagliarlo completamente (complice anche un certo ritardo nei lavori). Alla fine ho deciso di inserirlo, temendo che il lavoro potesse essere considerato poco coerente col piano di studi: nei primi tre capitoli, di astronomico non c'è assolutamente nulla. Il risultato non è sfavillante: invito il lettore a prenderlo come un tentativo sportivo, e ribadisco che il cuore del lavoro sta nel terzo capitolo.

Davide Legacci, Padova, 12 dicembre 2016

# Capitolo 1

## Radiazione termica

«In my own case such a goal has been for many years the solution of the question of the distribution of energy in the normal spectrum of radiant heat.»

---

Max Planck. *The origin and development of the quantum theory.*  
Clarendon Press, 1922

### 1.1 Introduzione

Ad ogni temperatura un corpo emette ed assorbe energia sotto forma di radiazione elettromagnetica, detta *radiazione termica*. Come è legata questa radiazione alla sua frequenza, alla natura del corpo in questione e al suo stato fisico? Questo problema ha impegnato, a partire dal 1859, fisici come Gustav KIRCHHOFF (\*1824, †1887), John W. S. RAYLEIGH (\*1842, †1919), Wilhelm WIEN (\*1864, †1928), James JEANS (\*1877, †1946), ed è stato risolto da Max PLANCK (\*1858, †1947) nel dicembre del 1900 [27]. Scopo del capitolo è quello di introdurre le notazioni e i concetti fondamentali riguardanti questa radiazione all'interno di un mezzo *omogeneo* ed *isotropo* ed in corrispondenza della superficie di separazione tra mezzi diversi. Il risultato di questa indagine sarà la comparsa inevitabile di una funzione universale, una *distribuzione normale di energia*, uguale per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro natura. Nel percorso che porterà a questa funzione (o meglio nei percorsi, seguiti da Planck una prima volta nel 1900 ed una seconda nel 1912, ed in seguito, con procedimenti diversi, da Albert EINSTEIN (\*1879, †1955), Ludwig HOPF (\*1884, †1939) e Otto STERN (\*1888, †1969) tra il 1906 ed il 1913, da Peter DEBYE (\*1884, †1966) nel 1910 e da Satyendranath BOSE (\*1894, †1974) nel 1924) farà capolino più volte l'*energia di punto zero*, che classicamente è l'energia di un sistema in equilibrio termico con una radiazione a  $T = 0$  K, ossia in assenza di radiazione; questo il tema del Capitolo 2.

La natura della radiazione termica, un po' come in accade in fluidodinamica, può essere analizzata da due punti di vista:

- quello *euleriano*, ossia descrivendo le proprietà della radiazione (l'intensità, il flusso, la densità ...) in un punto fissato del mezzo, utilizzando il concetto di *campo* (vedi sezione 1.2);
- quello *lagrangiano*, che in fluidodinamica, utilizzando l'*equazione del moto*, descrive l'evoluzione di una singola particella di fluido. Nel nostro caso la situazione è più delicata: l'oggetto dell'indagine, la *particella* di luce, va descritta considerandone sia gli aspetti

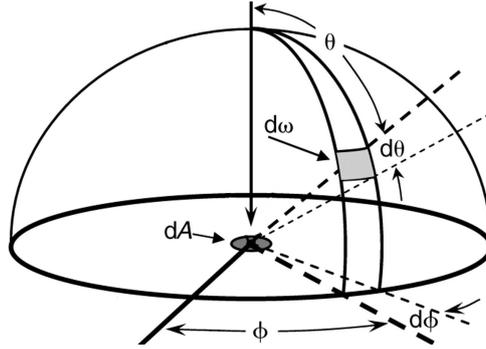


Figura 1.1: Sistema di coordinate sferiche rispetto all'elemento di superficie

corpuscolari che quelli ondulatori. In pratica, l'analisi "lagrangiana" consiste nello studio dell'emissione, del trasporto e dell'assorbimento di un singolo fotone (vedi sezione 1.3).

**Elettrodinamica e termodinamica** Nell'indagine della radiazione termica è inoltre possibile vestire i panni di un osservatore *termodinamico* o di un osservatore *elettrodinamico*. Dal punto di vista del primo lo stato della radiazione è definito da una quantità media, misurabile, *macroscopica*, l'intensità della radiazione. Il secondo osservatore, invece, descrive lo stato della radiazione in ciascun punto del mezzo e in ciascun istante con le sei componenti del campo elettromagnetico, che devono soddisfare le equazioni di Maxwell. Ogni componente del campo può essere scritta come sovrapposizione di infinite onde elementari (capitolo 3). La stessa intensità, o stato macroscopico, può essere ottenuta in un'infinità di modi differenti, o stati microscopici, definiti dall'ampiezza e della fase delle infinite onde elementari [vedi 26, pp. 103-115].

Iniziamo la nostra indagine adottando il punto di vista *euleriano*, nei panni di un osservatore *termodinamico*: dando per assodato, per il momento, il fatto che un mezzo sia permeato da una radiazione elettromagnetica di origine termica, ci proponiamo di descrivere l'intensità di questa radiazione in ciascun punto del mezzo, in funzione della frequenza. La presentazione seguita è quella di Planck e Masius [26] integrata da [6, cap. 6], [21, pp. 309-337] [20, cap. 3] e [35, cap. 2].

## 1.2 Intensità e densità di energia

Esistono diverse vie per quantificare l'intensità della radiazione in un punto del mezzo: la grandezza usata in termodinamica è la quantità di energia che attraversa una superficie in un certa direzione e prende il nome di *intensità specifica di radiazione*. Questa grandezza si associa naturalmente alla quantità di energia contenuta in un volume finito del mezzo, ossia la *densità di energia*, legata a sua volta alla *densità numerica di fotoni*.

**Intensità specifica di radiazione e flusso** Sia  $d\sigma$  un elemento di superficie all'interno del mezzo. Per quanto detto, ad un fissato istante di tempo questa superficie viene attraversata da raggi con direzioni diverse. Ha senso chiedersi quale sia l'energia che attraversa questa superficie in una fissata direzione, individuata ad esempio dall'angolo  $\vartheta$  formato con la normale alla superficie. Più precisamente, cerchiamo la quantità di energia  $dE_{\vartheta}^{\sigma}$  che attraversa la superficie  $d\sigma$  nel tempo  $dt$  entro l'angolo solido  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  intorno alla direzione individuata da  $\vartheta$  e nel range di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$  (figura 1.1). Si disaccoppia l'informazione fisica, intrinseca del mezzo, da quella geometrica-temporale, con la seguente

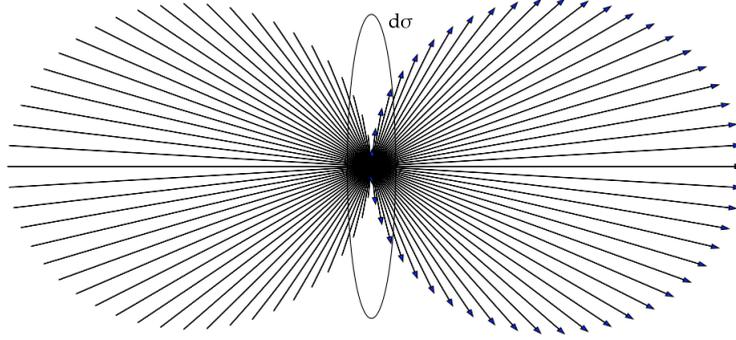


Figura 1.2: Flusso di un campo isotropo attraverso l'elemento di superficie in un semispazio. La lunghezza di ciascuna freccia, che rappresenta l'intensità in una data direzione, è proporzionale al coseno dell'angolo formato con la normale alla superficie.

**Definizione 1.1.** L'intensità specifica di radiazione  $K_\nu$  [ $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ] (la notazione è dovuta a Kirchoff) è la grandezza fisica tale che

$$dE_\nu^\sigma = K_\nu \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \quad (1.1)$$

In altre parole,  $K_\nu \cos \vartheta$  è la quantità di energia che attraversa una superficie unitaria per unità di tempo, di frequenza e di angolo solido, in direzione  $\vartheta$  rispetto alla normale.<sup>1</sup> In generale

$$K_\nu = K_\nu(\mathbf{x}, t, \vartheta, \varphi) \quad (1.2)$$

ossia l'intensità specifica dipende dalla posizione nel mezzo e dalla direzione, individuata da due angoli, rispetto alla normale alla superficie considerata; l'ipotesi di *isotropia* equivale a porre

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial \vartheta} = \frac{\partial K_\nu}{\partial \varphi} = 0 \quad (1.3)$$

Sul significato dell'intensità di radiazione *in un punto del mezzo* si veda l'osservazione 1.1.

**Definizione 1.2.** Il *flusso*  $F_\nu$  [ $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ] è l'energia che attraversa una superficie unitaria per unità di tempo e frequenza, in tutte le direzioni.

$$F_\nu^{\text{tot}} := \int_{\text{spazio}} K_\nu \cos \vartheta d\Omega \quad (1.4)$$

Nel caso di radiazione isotropa risulta

$$F_\nu^{\text{tot}} = K_\nu \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi = 0 \quad (1.5)$$

In un campo isotropo il flusso netto attraverso una superficie orientata in modo qualsiasi è quindi nullo: l'energia totale che attraversa  $d\sigma$  è la stessa in entrambe le direzioni. È utile allora calcolare il *flusso uscente*, ossia il flusso in un semispazio, fissata arbitrariamente una direzione uscente rispetto alla superficie (vedi figura 1.2). Risulta subito

$$F_\nu := \int_{\text{semispazio}} K_\nu \cos \vartheta d\Omega = K_\nu \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi = \pi K_\nu \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>Quindi, ovviamente,  $K_\nu$  è la quantità di energia che attraversa una superficie unitaria per unità di tempo, frequenza e angolo solido, in direzione normale alla superficie.

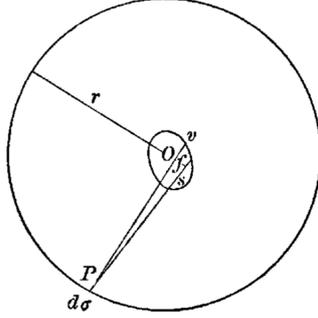


Figura 1.3: Calcolo della densità di radiazione

**Densità di energia** La velocità di propagazione della radiazione in un mezzo qualsiasi è finita, dunque un volume finito nel mezzo deve contenere una quantità finita di energia. In particolare l'energia contenuta in un elemento di volume  $d\sigma ds$  è pari all'energia che attraversa la superficie  $d\sigma$  nel tempo  $\frac{ds}{c/n}$ , dove  $v = \frac{c}{n}$  è la velocità di propagazione della radiazione in un mezzo con indice di rifrazione  $n$ . Ha quindi senso definire una *densità di energia* come il rapporto tra questa energia ed il volume che la contiene.

L'argomento utilizzato da Planck in [26, pp. 19-21] è il seguente: per considerare tutti i raggi che attraversano l'elemento di volume si considera inizialmente il contributo di un elemento di superficie sferica  $d\sigma$  a distanza  $r$  da un punto  $O$  in  $dV$  (vedi figura 1.3). Questo contributo è dato dalla (1.1) con

$\vartheta = 0$  essendo l'elemento di volume al centro della sfera;

$dt = \frac{ds}{v}$  dove  $ds$  è la dimensione lineare della porzione di  $dV$  intercettata dal raggio;

$d\Omega = \frac{df}{r^2}$  dove  $df$  è la *cross-section* tra il fascio uscente da  $d\sigma$  e  $dV = df ds$

Dunque l'energia emessa da  $d\sigma$  che attraversa  $dV$  è<sup>2</sup>

$$K_\nu d\sigma dv \frac{ds}{v} \frac{df}{r^2} = \frac{K_\nu d\sigma}{v} \frac{dv}{r^2} dv dV \quad (1.7)$$

Non resta che integrare sugli elementi  $d\sigma$  contenuti nella sfera, ossia sull'angolo solido sotto il quale l'elemento di volume  $dV$  vede l'intera sfera. Il termine  $\frac{d\sigma}{r^2}$  che compare nella (1.7) è proprio l'angolo solido  $d\Omega$  sotto il quale  $dV$  vede  $d\sigma$ , quindi (tenuto conto dell'isotropia della radiazione) l'energia complessiva che attraversa l'elemento di volume è

$$\int_{\text{spazio}} \frac{K_\nu}{v} dv dV d\Omega = 4\pi \frac{K_\nu}{v} dv dV \quad (1.8)$$

La densità di energia cercata si ottiene dividendo la (1.8) per il volume  $dV$ ; segue quindi la

**Definizione 1.3.** La *densità di radiazione*  $u_\nu$  [erg cm<sup>-3</sup> Hz<sup>-1</sup>] nel caso di radiazione isotropa in un mezzo con indice di rifrazione  $n$  è

$$u_\nu dv := \frac{4\pi}{c/n} K_\nu dv = \frac{4}{c/n} F_\nu dv \quad (1.9)$$

e corrisponde all'energia contenuta nell'unità di volume dovuta alla radiazione di frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu + dv$ .

<sup>2</sup>Più correttamente bisognerebbe considerare ogni fascio uscente da un punto  $P$  di  $d\sigma$  che intercetta solo una porzione di  $dV$  per poi sommare il contributo di questi fasci per ogni punto in  $d\sigma$ , arrivando al medesimo risultato.

Eliminando qualche orpello, per  $n = 1$

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu = \frac{4}{c} F_\nu \quad (1.10)$$

Nel caso di radiazione non isotropa si definisce semplicemente

**Definizione 1.4.** L'*intensità media*  $J_\nu$  [ $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ] è

$$J_\nu := \frac{1}{4\pi} \int_{\text{spazio}} K_\nu d\Omega \quad (1.11)$$

ed in generale

$$u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c/n} J_\nu d\nu \quad (1.12)$$

che si riduce alla (1.9) nel caso di radiazione isotropa.

*Osservazione 1.1.* La dipendenza esplicita dovuta ad  $r$  dalla scelta della sfera sulla quale integrare tramite *scompare*, come ci si aspetta, dalla (1.8). Questo significa che si ottiene la stessa energia attraverso il volume  $dV$  utilizzando una sfera di raggio qualsiasi; in particolare, per  $r \rightarrow 0$ , è legittimo pensare ad  $K_\nu$  come all'intensità della radiazione *nel punto*  $O$ .

**Energia attraverso l'elemento di superficie** Le equazioni (1.1), (1.6) e (1.9) consentono di esprimere l'energia che attraversa la superficie  $d\sigma$  nel tempo  $dt$  e nell'intervallo di frequenze  $d\nu$  emessa in o ricevuta da un semispazio come

$$\begin{aligned} dE_\nu^{\sigma, \text{tot}} &:= \int_{\text{semispazio}} dE_\nu^\sigma \\ &= K_\nu \left( \int_{\text{semispazio}} \cos \vartheta d\Omega \right) d\sigma dt d\nu \end{aligned}$$

e in definitiva

$$dE_\nu^{\sigma, \text{tot}} [\text{erg}] = \pi K_\nu d\sigma dt d\nu = \frac{c/n}{4} u_\nu d\sigma dt d\nu \quad (1.13)$$

*Osservazione 1.2* (Sulle notazioni). In letteratura si trovano notazioni e termini spesso diversi o scambiati rispetto a quelli usati in queste pagine: ad esempio McGervey [20, p. 72] usa il termine *intensità* ed il simbolo  $I(\nu)$  e Borghesani [6, p. 88] usa lo stesso simbolo ma il termine *potere emissivo specifico* per riferirsi alla grandezza che in questo lavoro è il *flusso*  $F_\nu$ ; naturalmente, nomi e simboli a parte, questa grandezza è sempre uguale (in un mezzo con indice di rifrazione pari a 1) a  $\frac{c}{4} u_\nu$  e si misura in  $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ . Analogamente per l'*intensità specifica*  $K_\nu$  [ $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ] si trovano in letteratura i termini *brillanza*<sup>35</sup>, *intensità*<sup>4,8</sup>, *radianza spettrale* e la notazione  $I_\nu$ <sup>4,21</sup>. È bene non fare confusione.

**Densità numerica di fotoni** La natura duale della radiazione elettromagnetica consente di legare la grandezza macroscopica  $K_\nu$  al numero di fotoni, ciascuno dei quali di energia pari ad  $h\nu$ , in una certa regione di spazio. Più precisamente vogliamo definire, per ciascun punto del mezzo, il numero di fotoni per unità di volume e frequenza che viaggia nell'angolo solido unitario. Se  $u_\nu$  è la densità di radiazione segue che

**Definizione 1.5.** La *densità numerica di fotoni*  $\psi_\nu$  [ $\text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}$ ] in un campo di radiazione isotropo è

$$\psi_\nu = \frac{u_\nu}{4\pi h\nu} \quad (1.14)$$

Inoltre, dalla (1.9)

$$K_\nu = h\nu c \psi_\nu \quad (1.15)$$

quindi il numero di fotoni che attraversa la superficie  $d\sigma$  nel tempo  $dt$  entro l'angolo solido  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  intorno alla direzione individuata da  $\vartheta$  e nel range di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$  è

$$\frac{dE_\nu^\sigma}{h\nu} = \frac{K_\nu}{h\nu} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu = \psi_\nu \cos \vartheta d\sigma c dt d\Omega d\nu \quad (1.16)$$

### 1.2.1 Derivazione elettrodinamica

Una derivazione alternativa è la seguente. Come noto<sup>3</sup>, vale il *teorema di Poynting*: la densità (bolometrica) di energia del campo elettromagnetico è

$$u [\text{erg cm}^{-3}] = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (1.17)$$

e l'energia che attraversa una superficie  $\Sigma$  nell'unità di tempo è data dal *flusso del vettore di Poynting*:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (1.18)$$

$$\Phi [\text{erg/s}] = \int_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} d\Sigma \quad (1.19)$$

Dalle equazioni di Maxwell  $B = E/c$  e, ricordando che  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ ,

$$u = \varepsilon_0 E^2 \quad (1.20)$$

Per un *fascio collimato* normale alla superficie  $\Sigma$  allora, con un campo uniforme

$$\Phi = |\mathbf{S}| \Sigma = c \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \Sigma = u c \Sigma \quad (1.21)$$

In conclusione il flusso (bolometrico) della radiazione collimata è

$$F [\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}] = \frac{\Phi}{\Sigma} = u c \quad (1.22)$$

Il fattore 1/4 emerge del caso di radiazione isotropa come segue: l'energia che attraversa  $\Sigma$  nel tempo  $\Delta t$  è dovuta al contributo degli elementi di volume  $d\tau = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$  contenuti in una semisfera di raggio  $c\Delta t$  centrata in  $\Sigma$ ; il contributo di ciascun elemento di volume è dato dall'energia in esso contenuta emessa nell'angolo solido sotto cui  $d\tau$  vede  $\Sigma$ , ossia

$$dE^\Sigma = u d\tau \frac{d\Omega}{4\pi} = u r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi \frac{\Sigma \cos \vartheta}{4\pi r^2} \quad (1.23)$$

L'energia totale che attraversa  $\Sigma$  è allora

$$\begin{aligned} E^\Sigma &= \frac{u\Sigma}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{c\Delta t} dr \\ &= \frac{u\Sigma}{4\pi} 2\pi \frac{1}{2} c\Delta t \\ &= \frac{cu}{4} \Sigma \Delta t \end{aligned} \quad (1.24)$$

Questa espressione equivale alla (1.13).  $\square$

<sup>3</sup>Ad esempio [3, pp. 347-350]

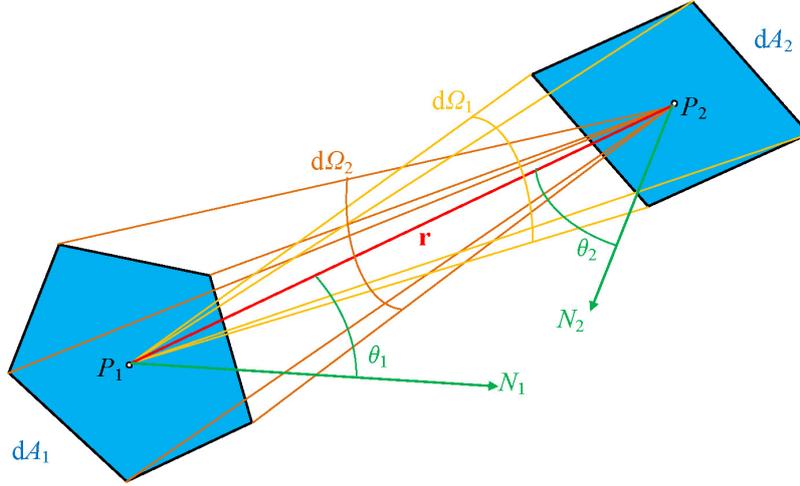


Figura 1.4: Conservazione dell'intensità di energia nel vuoto

### 1.2.2 Conservazione dell'intensità

È interessante cercare la quantità di energia emessa da un qualsiasi elemento di superficie  $dA_1$ , detto *sorgente*, verso un qualsiasi altro elemento di superficie  $dA_2$ , detto *target*, all'interno del mezzo. Si impone la condizione che la dimensione lineare delle superfici sia molto minore della distanza tra le stesse, come in figura 1.4. In questo modo, in prima approssimazione, l'angolo solido sotto il quale  $dA_2$  è vista da un punto all'interno di  $dA_1$  non dipende dalla posizione del punto o dalla forma della superficie, e viceversa.

Consideriamo inizialmente il caso di propagazione *nel vuoto*, ossia in una regione priva di emissione e di assorbimento (nel senso che verrà definito nella sezione 1.3). Sia  $P_1 \in dA_1$  e sia  $r$  la coordinata radiale (rispetto a  $P_1$ ) di un punto  $P_2 \in dA_2$ ; siano inoltre  $\vartheta_1, \vartheta_2$  rispettivamente gli angoli formati dalle normali  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$  con la direzione individuata da  $\mathbf{r}$ .

**La radiazione emessa da  $dA_1$  che investe  $dA_2$**  è l'energia che la prima superficie emette in direzione della seconda, entro l'angolo solido sotto cui  $P_1$  vede  $dA_2$ . Per definizione questa energia è data dalla (1.1) con  $K_\nu = K_\nu(r=0), \vartheta = \vartheta_1, d\sigma = dA_1$  e  $d\Omega = dA_2 \cos \vartheta_2 / r^2$  angolo solido<sup>4</sup> sotto il quale  $dA_1$  vede  $dA_2$ .

$$dE_\nu^{A_1} = K_\nu(0) \frac{dA_1 \cos \vartheta_1 dA_2 \cos \vartheta_2}{r^2} dt d\nu \quad (1.25)$$

**La radiazione che attraversa  $dA_2$  e che è stata emessa da  $dA_1$**  è data ancora dalla (1.1), scambiando i ruoli delle due superfici: è infatti l'energia che la seconda superficie riceve dalla direzione della prima, entro l'angolo solido sotto il quale  $P_2$  vede  $dA_1$ . Sostituendo  $K_\nu = K_\nu(r), \vartheta = \vartheta_2, d\sigma = dA_2$  e  $d\Omega = dA_1 \cos \vartheta_1 / r^2$  si ottiene

$$dE_\nu^{A_2} = K_\nu(r) \frac{dA_1 \cos \vartheta_1 dA_2 \cos \vartheta_2}{r^2} dt d\nu \quad (1.26)$$

La simmetria delle (1.25), (1.26) è evidente. In ottica (ma non solo) il termine

$$dG := \frac{dA_1 \cos \vartheta_1 dA_2 \cos \vartheta_2}{r^2}$$

<sup>4</sup>Il termine  $\cos \vartheta_2$  proietta la superficie  $dA_2$  ortogonalmente alla direzione  $\mathbf{r}$ .

prende il nome di *étendue*; poichè compare invariato nelle (1.25), (1.26) si parla di *conservazione dell'étendue*.<sup>29,31</sup> Il fatto fondamentale è il seguente: avendo escluso ogni forma di emissione o assorbimento lungo il tragitto che la radiazione compie tra  $dA_1$  e  $dA_2$ , vale la conservazione dell'energia. *L'energia emessa (per unità di tempo e frequenza) dalla prima superficie verso la seconda è proprio l'energia che la seconda superficie riceve dalla prima.*<sup>5</sup> Questo consente di porre  $dE_\nu^{A_1} = dE_\nu^{A_2}$  e, eliminando l'étendue, si ottiene

$$K_\nu(0) = K_\nu(r)$$

che può essere riformulata nella

**Legge 1.1** (Conservazione dell'intensità di radiazione nel vuoto). *In un mezzo privo di emissione e assorbimento l'intensità di radiazione si conserva lungo un raggio:*

$$\frac{dK_\nu(r)}{dr} = 0 \quad (1.27)$$

*Osservazione 1.3.* Dalla (1.9) segue che la stessa legge di conservazione vale per la densità di radiazione.

Dalle equazioni (1.25) e (1.26) si ricava immediatamente anche il fatto che, fissata l'orientazione reciproca e le dimensioni della sorgente e del target, l'energia emessa dalla prima e ricevuta dalla seconda per unità di tempo e frequenza dipende solo dalla distanza tra le due superfici, ed in particolare decresce col quadrato di questa distanza. Vale quindi la ben nota

**Legge 1.2** (Inverso del quadrato). *In un mezzo privo di emissione e assorbimento l'energia emessa da una superficie sorgente e che attraversa una superficie target decresce col quadrato della distanza  $r$  tra sorgente e target:*

$$dE_\nu^{A_1,2} [\text{erg}] = \frac{\text{cost}}{r^2} dt d\nu = \frac{K_\nu \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 dA_1 dA_2}{r^2} \quad (1.28)$$

## 1.3 Interazione radiazione-materia

Passiamo adesso dal punto di vista euleriano adottato fin'ora a quello *lagrangiano*, e chiediamoci quindi come venga emesso, come si propaghi e come venga assorbito un fotone nel mezzo. Vedremo che, in generale (quindi in una situazione di *non-equilibrio*) l'intensità specifica *cambia* lungo il raggio, ossia energia viene aggiunta o sottratta dal raggio durante la propagazione, a differenza di quanto accade nella sezione 1.2.2.

### 1.3.1 Emissione

L'*emissione* di un fotone all'interno del mezzo è dovuta alla transizione di un elettrone da uno stato quantico ammissibile ad un altro, essendo l'energia del primo stato maggiore dell'energia del secondo. Se l'elettrone in questione è *libero* prima e dopo che il fotone venga emesso l'emissione di un fotone  $\nu$  avviene a discapito dell'energia cinetica dell'elettrone:  $h\nu = \Delta E_k$ ; si parla in questo caso di radiazione di *free-free* o di *bremstrahlung*. Se invece l'elettrone appartiene ad un atomo o ad una molecola prima e dopo che il fotone venga emesso, l'emissione avviene a discapito dell'energia potenziale corrispondente ai livelli energetici (quantizzati!) di partenza e di arrivo:  $h\nu = E_n - E_m$ ,  $n > m$ ; si parla di emissione *bound-bound*. La situazione intermedia *free-bound* è detta *ricombinazione*.

---

<sup>5</sup>È un po' come se, rientrando a casa dopo aver fatto la spesa, non si venisse derubati ne' si ricevessero regali lungo il tragitto: il numero di borse all'uscita del negozio coincide col numero di borse portate fino a casa.

Ci si può chiedere se questa emissione elementare sia *isotropa*, ossia comporti l'emissione di un'onda sferica, o *direzionale*. Per ottenere un modello teorico consistente risulta necessario [vedi 9] considerare ogni processo elementare come *completamente direzionale*, e di conseguenza associato ad un trasferimento di *momento* tra radiazione e materia di modulo  $\Delta E/c$ , ove  $\Delta E$  è la differenza di energia tra gli stati.

Tuttavia, come in Planck e Masius [26, p. 5], supporremo che, preso un elemento di volume  $d\tau$  all'interno di un mezzo omogeneo e isotropo, e sotto l'ipotesi semplificata che ogni punto dell'elemento di volume concorra allo stesso modo all'emissione dell'elemento stesso, *ciascun punto di  $d\tau$  sia il vertice di un fascio di raggi divergenti in tutte le direzioni, di intensità uniforme*. L'energia emessa nell'angolo solido  $d\Omega$  sarà quindi proporzionale all'angolo solido stesso.

Le due affermazioni precedenti sono solo in apparente contraddizione: se il punto dell'elemento di volume - la molecola - è isotropa, tutte le direzioni di emissione devono essere *egualmente probabili*. Se la molecola non è isotropa si arriva alla stessa conclusione considerandone la rotazione casuale (caotica) nel tempo. Quindi, nonostante ciascuna emissione elementare sia un processo *direzionale*, l'emissione su un tempo scala sufficientemente maggiore del tempo scala di emissione *risulta isotropa*.

È importante sottolineare che un processo di emissione comporta un aumento netto dell'energia di un raggio, a discapito dell'energia cinetica-termica del mezzo.

**Coefficiente di emissione** È utile definire una quantità che racchiuda il contenuto fisico del meccanismo di emissione, senza che questo sia necessariamente noto.

**Definizione 1.6.** Il *coefficiente di emissione*  $\varepsilon_\nu$  [erg cm<sup>-3</sup> s<sup>-1</sup> sr<sup>-1</sup> Hz<sup>-1</sup>] è l'energia emessa termicamente per unità di volume, tempo, angolo solido e frequenza.

La quantità che ha senso definire è in realtà  $\varepsilon_\nu d\nu$ , ossia l'energia emessa per unità di volume, tempo e angolo solido nel range di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$ : non ha infatti senso parlare di una quantità finita di energia emessa ad una precisa frequenza [26, p. 6]. In altri termini ancora  $\varepsilon_\nu$  rappresenta la *distribuzione* di energia emessa per unità di volume, tempo e angolo solido, in funzione della frequenza. Avendo chiarito il significato del termine, parleremo comunque di *energia emessa per unità di frequenza*.

Il coefficiente di emissione dipende naturalmente dalla frequenza di emissione ma anche (o soprattutto) dalla natura e dallo stato del mezzo. Si formula l'ipotesi che lo stato del mezzo dipenda esclusivamente dalla sua temperatura assoluta  $T$ : il coefficiente di emissione è quindi una funzione positiva della frequenza di emissione, della natura del mezzo e della sua temperatura.

**Energia emessa dall'elemento di volume** Si fissi arbitrariamente l'usuale sistema di coordinate sferiche con origine nell'elemento di volume,  $\vartheta$  colatitudine e  $\varphi$  longitudine (o, a seconda dei gusti, rispettivamente angolo polare e azimutale), in modo che  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ . Naturalmente l'energia emessa nel tempo  $dt$  dall'elemento di volume  $d\tau$  nell'angolo solido  $d\Omega$  e nel range di frequenze  $[\nu, \nu + d\nu]$  è

$$dE_\nu^\tau = \varepsilon_\nu d\tau dt d\Omega d\nu \quad (1.29)$$

Forti dell'ipotesi di isotropia del mezzo, la radiazione emessa dell'elemento di volume in tutto lo spazio e nel rest-frame del mezzo<sup>6</sup> è

$$dE_{\nu,\text{out}}^\tau := \int_{\text{spazio}} dE_\nu^\tau = \varepsilon_\nu d\tau dt d\nu \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 4\pi \varepsilon_\nu d\tau dt d\nu \quad (1.30)$$

<sup>6</sup>Se il mezzo è in movimento il coefficiente di emissione è isotropo nel rest-frame del mezzo, ma non nel rest-frame del laboratorio, a causa dello spostamento Doppler. Supporremo comunque il mezzo essere sempre in quiete nel sistema del laboratorio. [21, p. 326]

### 1.3.2 Assorbimento

Col termine *assorbimento* (termico) si intende un processo di rimozione netta di energia da un raggio, energia che viene convertita in cinetica-termica del mezzo. Come nel caso dell'emissione questi processi possono essere di tipo *free-free* (*bremstrahlung inverso*), *bound-free* (*ionizzazione*), *bound-bound* (*eccitazione*). Quest'ultimo caso si considera di assorbimento termico solo quando l'atomo viene diseccitato *per collisione*, e l'energia del fotone viene convertita in energia cinetica della particella coinvolta nell'urto. Nel caso in cui l'atomo eccitato torni allo stato fondamentale per diseccitazione termica spontanea, ossia emettendo (in direzione qualsiasi) uno o più fotoni la cui energia complessiva eguaglia l'energia del fotone inizialmente assorbito, l'energia netta della radiazione *non* è cambiata ed il fenomeno è considerato di *scattering* (vedi sezione 1.3.3).

**Coefficiente di assorbimento** A causa dell'assorbimento termico un raggio che percorra nel mezzo un tratto  $ds$  perde una frazione  $k_\nu ds$  della sua energia, con la seguente

**Definizione 1.7.** Il *coefficiente di assorbimento*  $k_\nu$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] è la frazione di energia persa termicamente da un raggio lungo un tratto di lunghezza unitaria nel mezzo.

Se  $n$  [ $\text{cm}^{-3}$ ] è la densità numerica degli atomi del mezzo responsabili dell'assorbimento valgono le seguenti relazioni tra coefficiente di assorbimento, *cross-section*  $\sigma_\nu$  [ $\text{cm}^2$ ] e *cammino libero medio dei fotoni*  $l_\nu$  [ $\text{cm}$ ]:

$$k_\nu = n\sigma_\nu = l_\nu^{-1} \quad (1.31)$$

Analogamente al coefficiente di emissione anche il coefficiente di assorbimento in un mezzo omogeneo ed isotropo dipende dalla frequenza della radiazione e dalla natura e temperatura del mezzo. Emissione (termica) ed assorbimento (termico) sono semplicemente due facce della stessa medaglia; un fenomeno di natura completamente diversa ma con esito simile è quello che regola l'interazione della radiazione con la materia tra l'emissione e l'assorbimento, ossia lo *scattering*.

### 1.3.3 Scattering

In un processo di *scattering* un fotone interagisce con una componente del mezzo ed emerge "dall'urto" con una frequenza uguale o diversa, a seconda del fenomeno fisico, e una direzione *qualsiasi* (essendo la probabilità di ciascuna direzione di emissione caratterizzata dal particolare processo fisico). Oltre all'esempio già menzionato nella sezione 1.3.2, i fenomeni di scattering possono essere di vario tipo:

#### Fotone-elettrone

- *Scattering Compton*, a seguito del quale sia l'energia cinetica dell'elettrone che la frequenza del fotone cambiano, in maniera diversa in base all'angolo  $\vartheta$  di uscita del fotone (vedi figura 1.5). Dalla conservazione del quadrimpulso<sup>7</sup> si ottiene la relazione tra l'energia iniziale  $h\nu$  e finale  $h\nu'$  del fotone e l'angolo  $\vartheta$ :

$$h\nu' = \frac{m_e h\nu}{m_e + \frac{h\nu}{c^2}(1 - \cos\vartheta)} \quad (1.32)$$

La massa dell'elettrone è indicata con  $m_e$ . Si ottiene subito l'analoga relazione in termini di lunghezza d'onda:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta) \quad (1.33)$$

---

<sup>7</sup>si veda ad esempio [10, pp. 104-106]

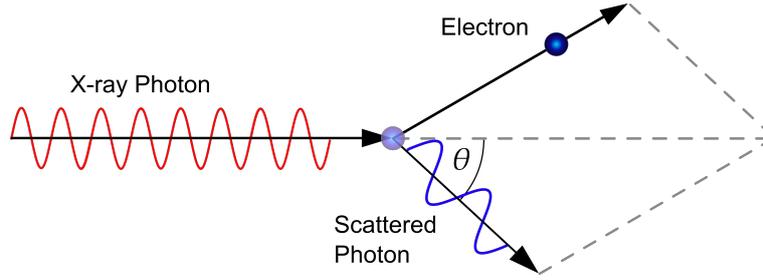


Figura 1.5: Scattering Compton

dove

$$\lambda_C := \frac{h}{m_e c} \quad (1.34)$$

è la *lunghezza d'onda di Compton* dell'elettrone.

- *Scattering Thomson*, che è il limite non relativistico dello scattering Compton. Descrive bene in fenomeni in cui  $h\nu \ll m_e c^2$ , o equivalentemente  $\lambda \gg \lambda_C$ . In questo caso la frequenza del fotone resta *invariata*.

**Fotone-atomo o molecola** L'interazione di un fotone con elementi del mezzo di dimensione molto inferiore alla lunghezza d'onda della luce è descritta dalla teoria di *Rayleigh*. L'intensità della radiazione scatterata è proporzionale a<sup>33</sup>

$$\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\lambda^4}$$

Lo scattering quindi è più efficace alle corte lunghezze d'onda, e le direzioni più probabili per un singolo fotone sono  $\vartheta = 0, \pi$

**Fotone-particella** La *teoria di Mie* descrive l'interazione di fotoni con particelle la cui dimensione è dell'ordine di  $0.1\lambda$  o superiore. La dipendenza dalla lunghezza d'onda<sup>33</sup> è molto minore rispetto allo scattering di Rayleigh ( $I \propto \lambda^{-0.8}$ ) e il *forward scattering*, ossia la diffusione del fotone in  $\vartheta \in [-\pi/2, \pi/2]$ , domina sul *backward scattering*.

**Coefficiente di scattering** La caratteristica principale dei fenomeni di scattering è quella di modificare la *direzione* di un fotone: questo può portare all'aggiunta o alla sottrazione di fotoni da un fascio, *come se* avvenissero fenomeni di emissione o assorbimento. Si possono allora definire due coefficienti di scattering, uno di emissione e uno di assorbimento, che all'atto pratico si sommano (rispettivamente) al coefficiente di emissione termica e di assorbimento termico.

**Definizione 1.8.** Il *coefficiente di scattering in emissione*  $\alpha_\nu^+$  [ $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ ] è l'energia che esce dall'unità di volume per unità di tempo, angolo solido e frequenza a causa dello scattering.

**Definizione 1.9.** Il *coefficiente di scattering in assorbimento*  $\alpha_\nu^-$  [ $\text{cm}^{-1}$ ] è la frazione di energia persa da un raggio lungo un tratto di lunghezza unitaria nel mezzo a causa dello scattering.

Si veda l'Appendice A per un esempio.

## 1.4 Equilibrio termodinamico

Fin'ora ci siamo limitati ad una serie di definizioni; applichiamo adesso i concetti esposti ad un mezzo omogeneo ed isotropo racchiuso in un contenitore adiabatico. Poiché per non avvengono scambi di calore con l'esterno il sistema evolverà, stando al secondo principio della termodinamica, allo stato di massima entropia, in equilibrio termico (la temperatura è la stessa in ogni punto del mezzo), meccanico (la risultante dei momenti e delle forze sul sistema è nulla) e chimico (la composizione chimica del sistema è costante e uniforme). È questo lo stato di *equilibrio termodinamico*. In questo stato la radiazione termica deve avere le stesse proprietà *macroscopiche* in ciascun punto del mezzo, ossia l'intensità specifica di radiazione deve essere isotropa e costante in ogni punto.

### 1.4.1 Bilancio termico

Affinché la temperatura del mezzo sia uniforme è necessario che ciascun *elemento di volume*  $d\tau$  emetta ed assorba la stessa energia in qualsiasi intervallo di tempo e per ogni frequenza. Questa osservazione è sufficiente ad esprimere il legame tra l'intensità della radiazione presente nel mezzo e i coefficienti di emissione ed assorbimento propri del mezzo. L'energia emessa è data immediatamente dall'equazione (1.30), che riportiamo:

$$dE_{\nu,\text{out}}^{\tau} = 4\pi\varepsilon_{\nu} d\tau dt d\nu \quad (1.30)$$

Per quanto riguarda l'energia assorbita, l'argomento è simile a quello utilizzato per calcolare la densità di energia nella sezione 1.2; ci rifacciamo pertanto alle medesime notazioni. Ciascun raggio che attraversa  $d\tau$  perde, a causa dell'assorbimento, una frazione della sua energia data da  $k_{\nu}ds$ ; l'energia assorbita dal volume  $d\tau$  è data dalla somma dell'energia persa da tutti i raggi che attraversano  $d\tau$  nel tempo  $dt$ . L'energia che attraversa  $d\tau$  in  $dt$  dovuta ad un singolo raggio è

$$K_{\nu} d\sigma dt \frac{df}{r^2} d\nu \quad (1.35)$$

Lungo il tratto  $ds$  questo raggio perde una frazione  $k_{\nu}ds$  della sua energia, dunque l'energia assorbita da un singolo raggio nel tempo  $dt$  è

$$k_{\nu}ds K_{\nu} d\sigma dt \frac{df}{r^2} d\nu \quad (1.36)$$

Sommando per tutti i raggi in  $d\sigma$  si ottiene  $\sum df ds = d\tau$  e integrando in tutto lo spazio per includere il contributo di ogni elemento di superficie si ottiene

$$\begin{aligned} dE_{\nu,\text{in}}^{\tau} &:= \int_{\text{spazio}} k_{\nu} K_{\nu} d\Omega dt d\nu d\tau \\ &= 4\pi k_{\nu} K_{\nu} d\tau dt d\nu \end{aligned} \quad (1.37)$$

Il confronto delle (1.37)-(1.30) consente di scrivere la fondamentale

**Legge 1.3** (Bilancio termico). *In equilibrio termodinamico l'intensità specifica di radiazione ad una certa frequenza è data dal rapporto tra il coefficiente di emissione ed il coefficiente di assorbimento del mezzo:*

$$K_{\nu} = \frac{\varepsilon_{\nu}}{k_{\nu}} \quad [\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}] \quad (1.38)$$

*Osservazione 1.4.* La (1.38) è semplicemente una condizione di *conservazione dell'energia*: un elemento di volume può emettere solo quello che assorbe. Un corollario immediato è il seguente:

$$k_\nu = 0 \Rightarrow \varepsilon_\nu = 0 \quad (1.39)$$

Ossia, *un mezzo non può emettere alle frequenze che non è in grado di assorbire.*

*Osservazione 1.5.* Si osservi che  $K_\nu$  data dalla (1.38) *dipende* dalla natura del mezzo, oltre che dalla temperatura e dalla frequenza.

*Osservazione 1.6* (Isotropia e raggi). Le (1.30)-(1.37) (moltiplicate per  $d\Omega/4\pi$  per limitarsi all'angolo solido  $d\Omega$ , grazie all'isotropia dei processi di emissione e assorbimento<sup>8</sup>) hanno un duplice significato, che è bene ribadire:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\nu d\tau dt d\Omega d\nu \\ k_\nu K_\nu d\tau dt d\Omega d\nu \end{aligned}$$

sono, rispettivamente, l'energia emessa (assorbita) dall'elemento di volume nell' (dall') angolo solido  $d\Omega$ , ma anche l'energia guadagnata (persa) da un raggio che attraversi  $d\tau$ . Quindi la (1.38) esprime non solo la conservazione di energia dell'elemento di volume, *ma anche del raggio che lo attraversa*: nonostante i processi di emissione e assorbimento, è come se un raggio passasse attraverso l'elemento di volume senza subire alcuna modifica.

**Scattering** Tutto quello che si è detto a proposito dei fenomeni termici di emissione e assorbimento vale, esattamente allo stesso modo, per lo scattering. In equilibrio termodinamico è necessario che il bilancio di scattering di  $d\tau$  sia nullo; in altre parole, in ciascun elemento di volume entrano fotoni scatterati da altri elementi di volume e, a sua volta,  $d\tau$  scattera fotoni: il bilancio di questi fotoni in entrata e in uscita è pari a zero. Questo significa che un raggio che attraversi l'elemento di volume perde e riceve, a causa dello scattering, lo stesso numero di fotoni: in definitiva, è come se passasse attraverso l'elemento di volume senza subire alcuna modifica. In equilibrio termodinamico *la presenza dello scattering è del tutto ininfluenza*, e in definitiva vale la

**Legge 1.4.** *In equilibrio termodinamico la propagazione della radiazione avviene come nel vuoto, al netto dei processi di emissione, assorbimento e scattering.*

Si veda l'Appendice A per una dimostrazione rigorosa del tutto analoga a quella svolta nel presente paragrafo, basata su [26, pp. 27-30].

## 1.4.2 Verso la funzione universale

La variazione dell'energia di un raggio dovuta a emissione, assorbimento e scattering in un mezzo è *continua*; al contrario, un raggio che provenga da un mezzo e giunga alla superficie di separazione con un secondo mezzo viene parzialmente *riflesso* e parzialmente *trasmesso*, subendo quindi una variazione discontinua. La quantità di luce trasmessa e riflessa dipende da numerosi fattori, tra cui la natura dei due mezzi, la frequenza, la direzione e la polarizzazione della luce incidente.

**Definizione 1.10.** Il *potere assorbente* di un mezzo  $A$  è il rapporto tra la radiazione assorbita e la radiazione incidente sul mezzo.

<sup>8</sup>si ribadisce il fatto che l'isotropia è valida quando si considera un grande numero di eventi di emissione o assorbimento: come discusso nella sezione 1.3.1, un *singolo* processo elementare è *direzionale*.

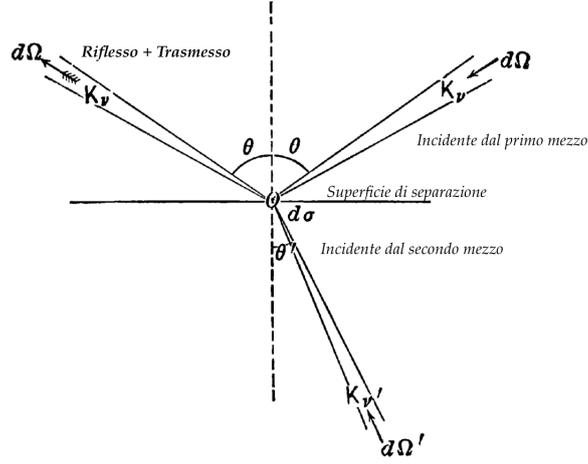


Figura 1.6: Radiazione riflessa e trasmessa alla superficie di separazione tra due mezzi

Naturalmente,  $A$  è una quantità adimensionale compresa tra 0 e 1.

**Definizione 1.11.** Un *corpo bianco* e un *corpo nero* (brevemente BB) sono corpi tali che, rispettivamente,  $A = 0$  e  $A = 1$ .

Consideriamo quindi *due* mezzi omogenei ed isotropi racchiusi in un contenitore adiabatico in equilibrio termodinamico; tutte le grandezze relative al secondo mezzo saranno denotate da un apice  $'$ . Tutto quello che si è detto fin'ora vale, separatamente, per ciascuno dei due mezzi.

Come già detto un raggio proveniente dal secondo mezzo che raggiunga la superficie di separazione con il primo viene parzialmente trasmesso nel primo mezzo e parzialmente riflesso indietro nel secondo mezzo, secondo le usuali relazioni

$$\vartheta_{\text{incidente}} = \vartheta_{\text{riflesso}} \equiv \vartheta \quad (1.40)$$

$$n \sin \vartheta = n' \sin \vartheta' \quad (\text{Legge di Snell}) \quad (1.41)$$

La situazione è rappresentata in figura 1.6. Indichiamo con  $\rho$  il coefficiente di riflessione del primo mezzo, ossia la frazione di radiazione incidente che viene riflessa;  $\rho$  dipende dall'angolo di incidenza, dalla frequenza e dalla polarizzazione della luce incidente. Analoghe considerazioni valgono per il secondo mezzo. L'energia riflessa nel primo mezzo e quella trasmessa dal secondo ad angoli che soddisfino la (1.41) si sommano per dare l'energia emessa dall'elemento  $d\sigma$  della superficie di separazione in direzione  $\vartheta$  rispetto alla normale, che come al solito è

$$dE_{\nu}^{\sigma} = K_{\nu} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \quad (1.1)$$

I due contributi sono

$$dE_{\nu}^{\sigma, \text{rif}} = \rho K_{\nu} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \quad (1.42)$$

$$dE_{\nu}^{\sigma, \text{tr}} = (1 - \rho') K'_{\nu} \cos \vartheta' d\sigma dt d\Omega' d\nu \quad (1.43)$$

Dalla legge di Snell si ottiene

$$n \cos \vartheta d\vartheta = n' \cos \vartheta' d\vartheta' \quad (1.44)$$

ed essendo  $d\Omega' = \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$  con  $\varphi = \varphi'$  si ottiene

$$\begin{aligned} \cos \vartheta' d\Omega' &= \frac{n}{n'} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{d\vartheta'} \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \\ &= \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \cos \vartheta d\Omega \end{aligned} \quad (1.45)$$

A questo punto ponendo  $dE_\nu^\sigma = dE_\nu^{\sigma,\text{rif}} + dE_\nu^{\sigma,\text{tr}}$  risulta

$$K_\nu = \rho K_\nu + (1 - \rho') K_\nu \left(\frac{n}{n'}\right)^2 \quad (1.46)$$

O equivalentemente

$$\frac{K_\nu}{K_\nu'} \left(\frac{n'}{n}\right)^2 = \frac{1 - \rho'}{1 - \rho} \quad (1.47)$$

I singoli coefficienti di trasmissione dipendono dall'angolo di incidenza e dalla polarizzazione della luce, ma nell'espressione appena ricavata appaiono in una funzione  $f(\rho, \rho')$  uguale ad una quantità *costante*, dunque  $f$  deve essere a sua volta costante (rispetto agli angoli e agli stati di polarizzazione, non alla frequenza). Dunque, noto il valore di  $f$  per una coppia qualsiasi di  $(\rho, \rho')$  ammessi dalla legge di Snell,  $f$  è completamente determinata; in particolare la coppia  $(\rho, \rho') = (0, 0)$  è sicuramente valida, in quanto per  $(\vartheta, \vartheta') = (0, 0)$  la luce è completamente trasmessa. Allora

$$f(\rho, \rho') \equiv \frac{1 - \rho}{1 - \rho'} \equiv 1 \quad (1.48)$$

Sostituendo nella (1.47) si ottiene

$$\frac{K_\nu}{n^2} = \frac{K_\nu'}{n'^2} \quad (1.49)$$

Questa relazione è probabilmente la più importante ottenuta fin'ora. Dalla (1.38) sappiamo che l'intensità specifica in equilibrio termodinamico è una funzione della natura del mezzo, della temperatura e della frequenza; analogamente l'indice di rifrazione dipende dalla natura del mezzo e dalla frequenza (e, volendo, anche dalla temperatura). Quindi, in generale,

$$\frac{K_\nu}{n^2} =: g(m, T, \nu) \quad (1.50)$$

dove  $m$  indica la dipendenza dalla natura del mezzo. Naturalmente la funzione  $g$  relativa ad un mezzo *non* dipende in alcun modo dal secondo mezzo. La (1.49) ci dice che, in equilibrio termodinamico (e quindi a parità di temperatura) e a frequenza fissata

$$g(m, T, \nu) = g(m', T, \nu) \quad \forall m, m' \quad (1.51)$$

Ossia, presi due mezzi qualsiasi (in un contenitore adiabatico e in equilibrio termodinamico), la funzione  $g$  assume lo stesso valore per i due mezzi, a parità di frequenza e temperatura. Se ora un mezzo viene sostituito con un altro alla medesima temperatura la (1.49) deve valere ancora, ma il valore di  $g$  del primo mezzo non può essere cambiato: quindi, indipendentemente dalla sua natura,  $g$  assume il medesimo valore anche per il terzo mezzo. In altre parole, vale la seguente

**Legge 1.5** (La funzione universale). *In un mezzo in equilibrio termodinamico la quantità*

$$B_\nu(T) := \frac{K_\nu}{n^2} \equiv \frac{\varepsilon_\nu}{k_\nu n^2} \quad (1.52)$$

*non dipende dalla natura del mezzo, ed è quindi una funzione universale di frequenza e temperatura.*

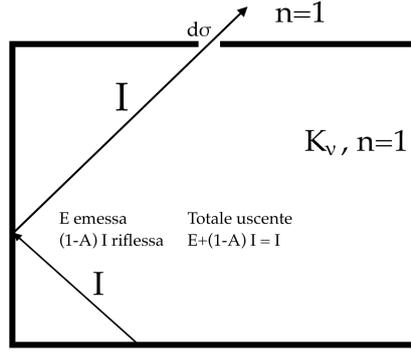


Figura 1.7: Radiazione uscente da un *hohlraum*

### 1.4.3 Legge di Kirchhoff

Si consideri, all'interno di un contenitore adiabatico in equilibrio termodinamico, un mezzo "emittente" a contatto con un secondo mezzo "ricevente". Si definisce *potere emissivo*  $E$  del mezzo emittente l'energia emessa dalla sua superficie<sup>9</sup>, e *potere assorbente* del mezzo emittente  $A$  il rapporto tra l'energia assorbita e l'energia incidente sul mezzo. Poiché  $0 < A < 1$ ,  $E/A > E$ . Si dimostra che questa quantità  $E/A$  corrisponde all'energia  $I$  diretta verso il mezzo ricevente e non dipende dalla natura del mezzo emittente, ma solo dall'indice di rifrazione del mezzo ricevente:

**Legge 1.6 (Kirchhoff).** *In equilibrio termodinamico il rapporto tra il potere emissivo ed il potere assorbente di un corpo qualsiasi non dipende dalla sua natura, ma solo dall'indice di rifrazione del mezzo nel quale emette.*

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{E}{A}}_{\text{mezzo emittente}} &= \underbrace{I}_{\text{mezzo ricevente}} = \underbrace{n^2}_{\text{mezzo ricevente}} \underbrace{B_\nu(T)}_{\text{universale}} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \\
 &= \underbrace{K_\nu}_{\text{mezzo ricevente}} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu
 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Si veda l'appendice B per una dimostrazione.

Cerchiamo di comprendere il senso di questa legge. In generale (in equilibrio termodinamico) l'energia  $I$  uscente da un elemento sulla superficie di contatto tra due mezzi dipende, fissate frequenza e temperatura, *solo* dall'indice di rifrazione del mezzo "ricevente" (il "primo" mezzo dell'appendice B), tramite le (1.52),(B.1). Questa energia è dovuta in parte all'energia *riflessa* nel mezzo ricevente, in parte all'energia *trasmessa* dal mezzo "emittente" (il "secondo" mezzo dell'appendice B). L'energia trasmessa dal mezzo emittente è tanto più grande quanto maggiore è la sua capacità di *emettere*, e quindi di *assorbire* (si ricordi la (1.38)). Ovviamente se il mezzo emittente assorbe molto (e quindi emette molto) allora riflette poco, e viceversa; la legge di Kirchhoff dice che il bilancio finale *non dipende dal mezzo emittente, ma solo dall'indice di rifrazione del mezzo ricevente*.

### 1.4.4 Radiazione di corpo nero

In termini più pratici, assumendo da ora che l'indice di rifrazione del mezzo ricevente sia pari a 1: dato un sistema in equilibrio termodinamico, l'energia uscente da un elemento di superficie *non*

<sup>9</sup>da un elemento  $d\sigma$  nel tempo  $dt$  in  $[\nu, \nu + d\nu]$  entro  $d\Omega$  in direzione  $\vartheta$ .

nera è esattamente la stessa che esce da un elemento di superficie (ideale) *nera* (ossia con  $A = 1$ ). La differenza sta nel fatto che, nel caso della superficie nera, tutta l'energia viene *emessa*; nel caso della superficie non nera, l'energia emessa è solo una frazione dell'energia totale; la parte mancante viene fornita dall'energia *riflessa*.

Dalla (1.53) si osserva che, ponendo  $A = 1$ , l'energia  $I$  emessa in un mezzo a contatto con un corpo nero è pari al potere emissivo del corpo nero. In particolare, per  $n = 1$

**Legge 1.7** (Potere emissivo di corpo nero). *La funzione universale  $B_\nu(T)$  descrive il potere emissivo di un corpo nero qualsiasi che emetta in un mezzo con indice di rifrazione pari a 1.*

$$E_{BB} = \overbrace{I}^{\text{ricevente con } n=1} = B_\nu(T) \cos \vartheta \, d\sigma \, dt \, d\Omega \, d\nu \quad [\text{erg}] \quad (1.54)$$

Questo è il massimo potere emissivo che un corpo può avere a temperatura  $T$ .

Questi risultati consentono di *simulare* un corpo nero, ossia di studiarne il potere emissivo (universale) utilizzando un sistema che *non* è un corpo nero (ossia le cui pareti hanno  $A < 1$ ). Si consideri infatti (figura 1.7) una cavità con pareti adiabatiche in equilibrio termodinamico con la radiazione al suo interno (*Hohlraum*): in questo caso le pareti stesse giocano il ruolo di “mezzo emittente”, e la cavità stessa quello di mezzo “ricevente”. La radiazione che si instaura all'interno della cavità in equilibrio termodinamico ha un'intensità  $K_\nu$  data dalla funzione universale tramite la (1.52): allora da ciascun elemento di superficie delle pareti “esce” energia  $I$  come se la parete fosse nera (nonostante *non* lo sia!), in parte grazie alla *sua* emissione, in parte grazie all'energia *riflessa*, proveniente dalle altre pareti.

$$I = E + (1 - A)I \quad (1.55)$$

A questo punto la radiazione uscente da un piccolo foro di superficie  $d\sigma$  praticato sulla superficie della cavità può essere analizzata con con bolometri e apparati dispersori ed ha (ad ogni frequenza) *esattamente le stesse proprietà che avrebbe se  $d\sigma$  fosse la superficie di un corpo nero.*

**Legge 1.8** (Radiazione di corpo nero). *In equilibrio termodinamico, la radiazione all'interno di una cavità è universale e non dipende ne' dalla forma o natura della cavità, ne' dai mezzi emittenti e assorbenti presenti all'interno della cavità, ma solo dalla temperatura. La radiazione è descritta dalla densità  $u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu$ <sup>10</sup> con  $\nu$  che va da 0 a  $\infty$ .*

*Osservazione 1.7.* Un corpo non è nero *in assoluto*, ma solo in base al tipo di materiale con cui è a contatto: il corpo nero infatti è tale se assorbe tutta la radiazione incidente, ma il comportamento della radiazione in corrispondenza della superficie di contatto di due mezzi *dipende dalla natura di entrambi i mezzi*. Un corpo “nero” rispetto all'aria può non esserlo rispetto al vetro. In altre parole (si vedano le equazioni (1.42), (1.43)) è necessario che  $\rho = \rho' = 0$ .

**Inizia la ricerca della funzione universale** Le equazioni (1.52) e (1.53) sono state ricavate da Kirchhoff tra il 1860 ed il 1864. L'interesse teorico della funzione universale  $B_\nu(T)$  è evidente: in quanto indipendente dalla natura del corpo, rappresenta una proprietà profonda ed intrinseca della natura stessa; descrive inoltre il potere emissivo di un qualsiasi corpo nero e la radiazione che si instaura, all'equilibrio, all'interno di una cavità. L'universalità di  $B_\nu(T)$  ne consente la determinazione esplicita (analitica) tramite un sistema fisico *qualsiasi*, scelto a piacere, e quindi il più semplice possibile, del quale si conoscano i coefficienti di emissione e assorbimento. Nonostante le premesse incoraggianti, ci sarebbero voluti quasi quarant'anni per arrivare ad un'espressione in accordo con i dati sperimentali: questa ricerca, come ben noto, avrebbe ben presto messo in luce un limite fondamentale della fisica classica, conducendo, tramite procedimenti classicamente ineccepibili, ad un risultato drammaticamente errato.

<sup>10</sup>Supponendo sempre che l'indice di rifrazione nella cavità sia pari a 1.

## Capitolo 2

# Energia di punto zero in meccanica quantistica classica

«This rest-energy remains with the oscillator, on the average, at the absolute zero of temperature. »

---

Max Planck, 1911

Si useranno nel presente capitolo notazioni e concetti introdotti nell'appendice [E](#), a cui si rimanda più volte; se ne consiglia pertanto una lettura preliminare.

### 2.1 Proprietà della funzione universale

È dovuta ai dati sperimentali di Stefan (1879) e alla dimostrazione di Boltzmann (1884) la seguente

**Legge 2.1** (Stefan-Boltzmann). *La densità della radiazione di corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della temperatura:*

$$u \equiv \int_0^\infty u_\nu d\nu = \text{cost} T^4 \quad (2.1)$$

Si veda l'appendice [C](#) per una dimostrazione. Nel 1893 Wien, con un argomento simile a quello utilizzato da Boltzmann, dimostra la

**Legge 2.2** (Spostamento di Wien).

$$u_\nu = \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (2.2)$$

dove  $F$  è una funzione universale di frequenza e temperatura, che vi compaiono solo come rapporto  $\nu/T$ .

La legge di Wien implica quella di Boltzmann:

$$\int_0^\infty \nu^3 F\left(\frac{\nu}{T}\right) d\nu = T^4 \underbrace{\int_0^\infty x^3 F(x) dx}_{\text{costante}} \quad (2.3)$$

avendo effettuato il cambio di variabile  $x = \nu/T$ . I dati sperimentali mostrano inoltre che  $u_\nu$  tende a zero agli estremi del dominio, e presenta un massimo la cui posizione dipende dalla temperatura:

$$\frac{du_\nu}{d\nu} = 3\nu_{\max}^2 F\left(\frac{\nu_{\max}}{T}\right) + \frac{\nu_{\max}^3}{T} F'\left(\frac{\nu_{\max}}{T}\right) = 0 \quad (2.4)$$

da cui segue, ponendo ancora  $x = \nu_{\max}/T$ :

$$3F(x) + xF'(x) = 0 \quad (2.5)$$

Essendo  $F$  una funzione universale, il valore di  $x$  che soddisfa l'equazione è ovviamente costante; allora, al variare della temperatura, la frequenza di massimo deve sempre soddisfare la condizione

$$\frac{\nu_{\max}}{T} = \text{cost} \quad (2.6)$$

La legge di Wien è detta *di spostamento* perché descrive come cambia la posizione del massimo di emissione con la temperatura.

## 2.2 Gli oscillatori di Planck

La (2.2), derivata per via termodinamica, ha validità generale, ma non dice nulla sull'aspetto della funzione  $F$ : per esplicitarla è necessario scegliere un sistema fisico da inserire (idealmente) nella cavità e studiare la radiazione all'equilibrio. Grazie alla legge di Kirchhoff la scelta è del tutto arbitraria: Planck decide di usare un sistema di  $N$  oscillatori uno-dimensionali di frequenza  $\omega_0 = 2\pi\nu$  interagenti col campo elettromagnetico. [vedi 25, p. 4]

**“L'equazione fondamentale”** L'idea è quella di confrontare l'energia emessa da un oscillatore di frequenza propria  $\nu$  e energia media  $\langle H \rangle$  con quella assorbita dal campo elettromagnetico di densità  $u_\nu$ . L'equazione del moto di un oscillatore uno-dimensionale di massa  $m$  e carica  $e$  soggetto alla forza di richiamo  $-m\omega_0^2 x$  in un campo elettrico esterno  $E_x(t)$  è<sup>1</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x(t) + \frac{e}{m} E_R(t) \quad (2.7)$$

dove  $E_R$  è il campo elettrico prodotto dalla carica stessa,  $m\omega_0^2 \equiv k$  è la costante elastica dell'oscillatore e  $\nu_0 = \omega_0/2\pi$  la frequenza propria. La formula di Larmor classica fornisce la potenza emessa da una carica accelerata:

$$\dot{W}_E = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{x}^2 \quad (2.8)$$

Integrando (per parti) si ottiene l'energia emessa dalla carica tra due istanti di tempo:

$$W_E(t_1, t_2) = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{x}(t)^2 dt = \frac{2e^2}{3c^3} \left( \dot{x}\ddot{x}|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\ddot{x}(t) dt \right) \quad (2.9)$$

Si assume che il moto della carica sia periodico e si sceglie l'intervallo  $t_2 - t_1$  come un multiplo intero del periodo: allora il primo termine tra parentesi si annulla e

$$W_E(t_1, t_2) = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\ddot{x}(t) dt \quad (2.10)$$

<sup>1</sup>La fonte primaria è sempre [26]; fonti secondarie sono [22, p. 477], [7, p. 455], [17, p. 35]

L'energia persa dall'oscillatore  $-W_E(t_1, t_2)$  è dovuta al lavoro compiuto dal campo di reazione:

$$-W_E(t_1, t_2) = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) \ddot{x}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} eE_R(t) \dot{x}(t) dt \quad (2.11)$$

Si ottiene quindi la seguente espressione per il campo generato dalla carica in moto<sup>2</sup>

$$E_R(t) = \frac{2e}{3c^3} \ddot{x}(t) \quad (2.12)$$

In questo modo, dalla (2.7), si ottiene l'espressione esplicita per l'equazione del moto dell'oscillatore:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x(t) + \gamma \ddot{x}(t) \quad (2.13)$$

$$\gamma = \frac{2e^2}{3mc^3} \quad \text{Coefficiente di smorzamento} \quad (2.14)$$

In termini del momento di dipolo dell'oscillatore  $f = ex$  l'equazione del moto, con qualche semplice manipolazione, si può riscrivere come

$$L\ddot{f} + Kf = E_x(t) + \frac{2}{3c^3} \ddot{f} \quad (2.15)$$

Dove le costanti sono

$$L = \frac{m}{e^2}, \quad K = \frac{m\omega_0^2}{e^2} \equiv \frac{k}{e^2} \quad (2.16)$$

L'energia dell'oscillatore è

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \equiv \frac{1}{2}Kf^2 + \frac{1}{2}L\dot{f}^2 \quad (2.17)$$

Considerando ora il campo di radiazione come sovrapposizione di onde piane monocromatiche del tipo  $E_x(t) = E_{x\omega} \cos(\omega t + \varphi_\omega)$  e risolvendo l'equazione differenziale del moto si ottiene un'espressione esplicita per  $x(t)$ . L'energia che l'oscillatore assorbe per unità di tempo (forza per velocità) da un singolo modo di oscillazione si può allora scrivere come

$$\dot{W}_A = \overline{\dot{x}eE_x(t)} \quad (2.18)$$

Si integra su tutto lo spettro, effettuando una media temporale sull'oscillazione del campo (indicata dalla barra) e considerando che la densità di energia del campo di radiazione termica, isotropo e non polarizzato, è

$$u_\omega d\omega = \frac{E_{x\omega}^2 + E_{y\omega}^2 + E_{z\omega}^2}{8\pi} = \frac{3E_{x\omega}^2}{8\pi} \quad (2.19)$$

L'espressione che si ottiene è

$$\dot{W}_A = \frac{4\pi e^2}{3m} \gamma \int_0^\infty \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^6} u_\omega d\omega \quad (2.20)$$

La funzione che compare nell'integrale è estremamente piccata intorno a  $\omega_0$ , e l'energia assorbita può essere approssimata come

$$\dot{W}_A \cong \frac{\pi e^2}{3m} \gamma \omega_0^2 u_{\omega_0} \int_0^\infty \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 \omega_0^4/4} d\omega \cong \frac{\pi e^2}{3m} u_{\nu_0} \quad (2.21)$$

Per una derivazione alternativa si veda l'appendice D.

<sup>2</sup>Questa espressione è stata ottenuta sotto l'ipotesi di moto periodico, ma si dimostra che ha validità generale.

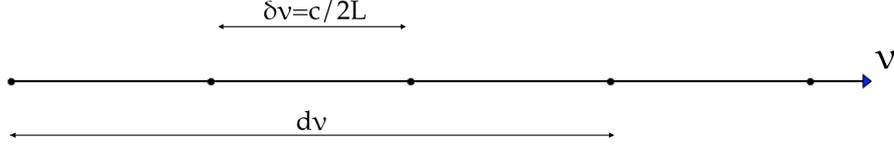


Figura 2.1: Calcolo della densità di modi di oscillazione stazionaria su una stringa di lunghezza  $L$

**Bilancio energetico** Dalla formula di Larmor mediata nel tempo e dall'equazione del moto (2.13) risulta

$$\dot{W}_E = \frac{2e^2}{3c^3} \omega_0^2 (2\pi\nu_0)^2 \langle x^2 \rangle \quad (2.22)$$

Inoltre (si veda l'appendice E) l'energia potenziale media e cinetica dell'oscillatore unidimensionale si equivalgono e la loro somma fornisce l'energia media dell'oscillatore:

$$\langle K \rangle = \langle U \rangle = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\langle H \rangle}{2} \quad (2.23)$$

Quando l'oscillatore è in equilibrio con la radiazione assorbe ed emette la stessa energia: ponendo  $\dot{W}_A = \dot{W}_E$  si ottiene allora

$$\frac{2e^2}{3c^3} (2\pi\nu_0)^2 \frac{\langle H \rangle}{m} = \frac{\pi e^2}{3m} u_{\nu_0} \quad (2.24)$$

e in generale si ottiene la seguente espressione che lega l'energia media  $\langle H \rangle$  di un oscillatore di frequenza propria  $\nu$  con la densità della radiazione  $u_\nu$  in equilibrio con l'oscillatore:

$$\boxed{u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle H \rangle} \quad (2.25)$$

## 2.3 Modi normali di oscillazione

Il procedimento utilizzato per ottenere la (2.25) è puramente classico e vincolato al modello dell'oscillatore, ma si può procedere per altra via, molto più generale. Il problema è stato affrontato inizialmente da Debye nell'ambito nello studio dei calori specifici dei solidi.

$N$  atomi di un cristallo sono pensati come oscillatori armonici tridimensionali *accoppiati*, ognuno con energia media  $\langle H \rangle$ . Ognuno dei  $3N$  modi di vibrazione è caratterizzato da una frequenza propria  $\nu$ . In prima approssimazione, le oscillazioni proprie di ciascun atomo del cristallo possono essere considerate come oscillazioni stazionarie dell'intero cristallo [7, p. 216]. Analogamente, il campo elettromagnetico all'interno di una cavità è dato dalla sovrapposizione dei suoi *modi normali* o *stazionari* di oscillazione: si tratta di *calcolare il numero di modi di oscillazione consentiti per unità di volume con frequenza compresa tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$* , ossia trovare una funzione  $g(\nu)$  tale che

$$dN = g(\nu) V d\nu \quad (2.26)$$

**Onde stazionarie su una stringa** Nel caso 1-dimensionale, il problema equivale a quello di trovare i modi di oscillazioni di una stringa di lunghezza  $L$  con gli estremi vincolati. L'equazione d'onda che si ottiene dall'interferenza di due onde armoniche uguali che si propagano in direzione opposta, ossia del tipo  $a \sin(kx \pm \omega t)$ , è

$$A(x, t) = 2a \sin(kx) \cos(\omega t) \quad (2.27)$$

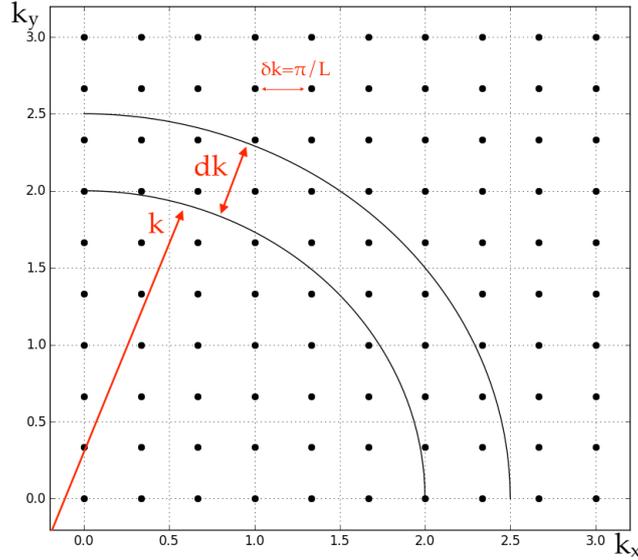


Figura 2.2: Calcolo della densità di modi di oscillazione stazionaria in un cubo di lato  $L$

Essendo la stringa vincolata agli estremi le condizioni al contorno sono  $A(x=0) = A(x=L) = 0$ ; la prima è automaticamente soddisfatta, mentre la seconda impone il vincolo

$$k_m L = \frac{2\pi}{\lambda_m} L = m\pi, \quad m \text{ intero} \quad (2.28)$$

o, in termini della frequenza di oscillazione ( $c$  è la velocità di propagazione dell'onda sulla stringa e)

$$\nu_m = \frac{c}{2L} m \quad (2.29)$$

Il numero di oscillazioni per unità di frequenza è, come in figura 2.1

$$\frac{1}{\delta\nu} = \frac{1}{\nu_{m+1} - \nu_m} = \frac{2L}{c} \quad (2.30)$$

e il numero di modi di vibrazione con frequenza compresa nell'intervallo  $[\nu, \nu + d\nu]$  è

$$dN = \frac{1}{\delta\nu} d\nu = \frac{2L}{c} d\nu = g(\nu) L d\nu \quad (2.31)$$

Quindi, nel caso unidimensionale  $g(\nu) = 2/c$  non dipende dalla frequenza.

**Caso tridimensionale** Si consideri ora una scatola cubica di lato  $L$ . La radiazione esiste all'interno sotto forma di onde stazionarie, la cui espressione si ottiene risolvendo le equazioni di Maxwell nel vuoto, ossia l'equazione delle onde per ciascuna componente del campo elettrico

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = c^2 \nabla^2 \psi \quad (2.32)$$

e imponendo le condizioni al contorno dovute alla presenza delle pareti (vale a dire, la componente tangenziale di  $\mathbf{E}$  deve essere nulla sulle pareti). Il risultato è analogo a quello del caso unidimensionale: le componenti del campo devono essere del tipo ([vedi 6, p. 97])

$$\begin{aligned} E_x(t, x, y, z) &= E_{x0} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(t, x, y, z) &= E_{y0} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(t, x, y, z) &= E_{z0} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Dalla soluzione della (2.32) per ottenere le (2.33) emerge la condizione (analoga alla  $k = 2\pi/\lambda$  del caso unidimensionale)

$$\underbrace{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}_{\text{Numeri d'onda}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad (2.34)$$

Dalle condizioni al contorno, analogamente al caso unidimensionale, emerge il vincolo sulle lunghezze d'onda ammissibili: risulta (si confronti con la (2.28))

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{\pi}{L}(m_x, m_y, m_z), \quad m_x, m_y, m_z \text{ interi} \quad (2.35)$$

*Osservazione 2.1.* Le ampiezze  $E_{x0}, E_{y0}, E_{z0}$  delle tre componenti del campo non sono indipendenti, ma sono legate dall'equazione di Maxwell sulla divergenza del campo elettrico nel vuoto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = (E_{x0}k_x + E_{y0}k_y + E_{z0}k_z) \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) = 0, \quad \forall x, y, z, t \quad (2.36)$$

O equivalentemente

$$E_{x0}m_x + E_{y0}m_y + E_{z0}m_z = 0 \quad (2.37)$$

Questo significa che, per ogni terna fissata  $(m_x, m_y, m_z)$ , ci sono *due* modi di oscillazione linearmente indipendenti, corrispondenti agli stati di polarizzazione. Si veda l'osservazione 3.1 per una trattazione più approfondita della questione.

Il numero di modi di oscillazione consentiti (ossia di vettori d'onda  $\mathbf{k}$  consentiti) per unità di volume *nello spazio dei numeri d'onda* è (vedi figura 2.2)

$$\left(\frac{1}{\delta k}\right)^3 = \frac{L^3}{\pi^3} \quad (2.38)$$

Il numero di modi di vibrazione con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  compreso in modulo tra  $k$  e  $k + dk$  è dato dal prodotto della (2.38) per il guscio di volume nello spazio dei numeri d'onda  $d^3k = \frac{4\pi k^2}{8} dk$ , dove il fattore  $1/8$  è dovuto al fatto che si considera solo un ottante nello spazio dei numeri d'onda, in quanto ogni componente di  $\mathbf{k}$  è positiva.

$$dN = \frac{1}{\delta k^3} d^3k = \frac{L^3}{\pi^3} \frac{4\pi k^2}{8} dk = \frac{k^2}{2\pi^2} L^3 dk \quad (2.39)$$

La (2.34) consente di esprimere il numero di oscillazioni in termini della frequenza, anziché del modulo del vettore d'onda (equivalente alla lunghezza d'onda), tramite la velocità delle onde nella cavità:

$$k^2 = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2 \quad (2.40)$$

Sostituendo e differenziando si ottiene subito

$$dN = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu \quad (2.41)$$

Ricordando la (2.26) e l'osservazione 2.1 si ottiene infine l'espressione per la densità di modi di vibrazione in funzione della frequenza<sup>3</sup>

$$g(\nu) = 2 \frac{4\pi\nu^2}{c^3} [\text{Hz}^{-1} \text{cm}^{-3}] \quad (2.42)$$

---

<sup>3</sup>In questo caso  $L^3 = V$ , ma i risultati valgono indipendentemente dalla forma della scatola.

È evidente che la densità di energia del campo elettromagnetico all'interno della cavità debba essere dato dal prodotto della densità dei modi di vibrazione per l'energia media  $U$  di un modo di vibrazione. Ossia,

$$u_\nu = 2 \frac{4\pi\nu^2}{c^3} \langle H \rangle \quad (2.43)$$

Si ottiene quindi un'espressione formalmente identica alla (2.25).

## 2.4 Oscillatore armonico e modo normale

Come è possibile che la stessa espressione emerga da procedimenti che, a parte l'aspetto del risultato, non sembrano avere nulla in comune? Nel modello dell'oscillatore abbiamo confrontato l'energia emessa da un oscillatore con quella assorbita dal campo. Il termine  $\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$ , da solo, non ha un significato particolare, ma emerge semplicemente dai calcoli. A posteriori, possiamo dire che è la funzione che lega la densità di energia del campo elettromagnetico presente nella cavità all'energia media dell'oscillatore presente nella cavità. Lo stesso termine nel secondo procedimento ha invece dignità propria: rappresenta *il numero di oscillazioni stazionarie per unità di volume* ad una determinata frequenza del campo elettromagnetico nella cavità.

Il legame tra i due procedimenti è in realtà profondo, e viene suggerito dal significato del termine  $\langle H \rangle$ : nel primo caso è l'energia media *dell'oscillatore unidimensionale*, nel secondo l'energia media di un *modo normale di oscillazione del campo elettromagnetico*. Vedremo che i questi due concetti sono in effetti equivalenti. Riassumendo, i passaggi fondamentali sono i seguenti:

1. Come già visto, il campo elettromagnetico nella cavità esiste infatti sotto forma di *onde stazionarie*, o *modi normali* (analoghe alle oscillazioni stazionarie che avvengono all'interno di un cristallo). La soluzione delle equazioni di Maxwell e le condizioni al contorno dovute alle pareti forniscono l'equazione d'onda e il vincolo sulle frequenze ammesse, da cui ottiene la densità di modi di oscillazione;
2. la densità di energia del campo elettromagnetico è data dal prodotto della densità di modi di oscillazione per l'energia media di ciascun modo;
3. ciascun modo di oscillazione di frequenza  $\nu$  è equivalente ad un oscillatore armonico unidimensionale.

Sul punto 3 torneremo abbondantemente nel capitolo 3.

## 2.5 Energia media

Si tratta adesso di esplicitare l'energia media di un oscillatore-modo di oscillazione in equilibrio con la radiazione alla temperatura  $T$ .

### 2.5.1 Oscillatore classico e formula di Rayleigh-Jeans

Dal teorema di equipartizione (vedi l'appendice E e in particolare l'equazione (E.32)) segue subito che l'energia media di un oscillatore in equilibrio termodinamico con l'ambiente a temperatura  $T$  è

$$\langle H \rangle = k_B T \quad (2.44)$$

Dalla (2.25) si ottiene allora per la densità del campo elettromagnetico nella cavità la formula di *Rayleigh-Jeans*:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (2.45)$$

Questa espressione, in buon accordo con i dati sperimentali alle basse frequenze, non può naturalmente essere corretta: non rispetta la (2.2) (legge di Wien) e diverge all'infinito alle alte frequenze, portando alla cosiddetta *catastrofe ultravioletta*

$$u_{\text{RJ}} = \int_0^\infty u_\nu d\nu = +\infty \quad \text{assurdo!} \quad (2.46)$$

Questa espressione rappresenta il limite della fisica classica di fronte al problema della radiazione di corpo nero.

### 2.5.2 Quantizzazione dell'energia

**Energia totale e entropia** La conta dei modi di oscillazione del campo elettromagnetico è corretta, quindi il problema sta nell'energia media attribuita a ciascun modo-oscillatore. Planck risolve la questione in un due famosi articoli<sup>27</sup> della fine del 1900.<sup>4</sup> O meglio: avanza due ipotesi sulle quali costruisce un modello il cui risultato è in perfetto accordo con i dati sperimentali; sul *significato fisico* delle ipotesi si discuterà per anni.

Come già detto, Planck considera un sistema di  $N$  oscillatori in equilibrio con la radiazione. L'approccio è termodinamico: Planck scrive l'entropia del sistema di oscillatori ad una certa energia grazie alla formula di Boltzmann (vedi sotto), che lega l'entropia alla probabilità che il sistema si trovi in un certo macrostato. Scrivendo quindi l'entropia in termini della temperatura e dell'energia media di ogni oscillatore si ottiene l'agognata energia media in funzione della temperatura.

L'energia totale degli oscillatori, ossia il macrostato, è  $N\langle H \rangle = P\varepsilon$ , con  $P$  intero. Qui sta la prima ipotesi rivoluzionaria di Planck: *l'energia complessiva del sistema deve essere un multiplo intero di un elemento fondamentale di energia* finito  $\varepsilon$ . Si tratta dunque di calcolare il numero  $W_N(P)$  di modi in cui  $P$  elementi di energia possono distribuirsi tra  $N$  oscillatori - ossia, il numero di *microstati* (chiamati prima da Boltzmann e poi da Planck *complexion*) che costituiscono il macrostato  $P$ . Per la terminologia si rimanda all'appendice E.

La seconda ipotesi di Planck in netto contrasto con la fisica classica è quella di *indistinguibilità degli elementi di energia*: lo stato di un oscillatore è completamente determinato dal numero di elementi di energia che contiene, non da "quali" elementi di energia contiene (vedi 3.7). Gli elementi di energia di Planck rispettano quella che, circa vent'anni dopo, sarebbe stata chiamata *statistica di Bose-Einstein*. In altre parole, in un sistema con due oscillatori, il macrostato  $P = 3$  è costituito dai quattro microstati

Oscillatore 1	Oscillatore 2
3	0
2	1
1	2
0	3

e *non* dagli otto (in generale  $N^P$ ) microstati

<sup>4</sup>Per la precisione, il 14 dicembre 1900 è considerato il giorno di nascita della meccanica quantistica.

Oscillatore 1	Oscillatore 2
A,B,C	0
A,B	C
A,C	B
B,C	A
A	B,C
B	A,C
C	A,B
0	A,B,C

Il fulcro della dimostrazione che segue sta nella seguente legge [26, sec. 118].

**Legge 2.3** (Boltzmann-Planck). *Dato un sistema costituito da  $N$  elementi, per ogni possibile macrostato  $P$ :*

1. *l'entropia del sistema è proporzionale alla probabilità termodinamica del macrostato  $P$ ;*
2. *la probabilità termodinamica del macrostato  $P$  è proporzionale al numero  $W_N(P)$  di microstati che lo compongono; in altre parole, ciascun microstato corrispondente ad un determinato macrostato è equiprobabile<sup>5</sup>.*

$$S_N(P) = k_B \log W_N(P) \quad (2.47)$$

In questo caso,  $W_N(P)$  è il numero di modi in cui  $P$  palline indistinguibili possono essere distribuite tra  $N$  urne distinguibili

$$W_N(P) = \frac{(N-1+P)!}{P!(N-1)!} \quad (2.48)$$

L'entropia totale del sistema è

$$S_N(P) = NS \quad (2.49)$$

dove  $S$  è l'entropia di un singolo oscillatore. Allora, usando l'approssimazione di Stirling  $n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n$  per grandi numeri (ossia  $N, P \gg 1$ ) e ricordando che  $N\langle H \rangle = P\varepsilon$ , dopo qualche passaggio algebrico si ottiene

$$\begin{aligned} S &= \frac{k_B}{N} \log W_N(P) \approx \frac{k_B}{N} ((N+P) \ln(N+P) - N \ln N - P \ln P) \\ &= k_B \left( \left(1 + \frac{\langle H \rangle}{\varepsilon}\right) \ln \left(1 + \frac{\langle H \rangle}{\varepsilon}\right) - \frac{\langle H \rangle}{\varepsilon} \ln \frac{\langle H \rangle}{\varepsilon} \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

A questo punto, dalla definizione di entropia

$$\frac{\partial S}{\partial \langle H \rangle} = \frac{1}{T} = \frac{k_B}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\langle H \rangle}\right) \quad (2.51)$$

Da cui

$$\boxed{\langle H \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1}} \quad (2.52)$$

<sup>5</sup>Vedi il *postulato di equiprobabilità a priori* in appendice E.

Si ottiene allora per la densità della radiazione, ricordando la (2.25) e la legge di Wien

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1} = \nu^2 F\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (2.53)$$

Per rispettare la legge di Wien è necessario che l'elemento di energia  $\varepsilon$  sia proporzionale alla frequenza; la costante universale di proporzionalità è la *costante di Planck*.

$$\varepsilon = h\nu \quad (2.54)$$

Finalmente, si ottiene la *distribuzione di Planck*, in perfetto accordo con i dati sperimentali:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad [\text{erg cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1}] \quad (2.55)$$

Questo significa che la *funzione universale* di cui si è più volte parlato nel primo capitolo è (vedi in particolare la legge 1.8)

$$B_\nu(T) = \frac{2\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad [\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}] \quad (2.56)$$

**Entropia e probabilità** La legge 2.3 è strettamente legata all'ipotesi di quantizzazione dell'energia. La relazione logaritmica tra entropia e probabilità è espressa per la prima volta da Boltzmann nel 1896, nell'ambito dello studio della teoria cinetica dei gas<sup>5</sup>. Dalle ipotesi che

1. l'entropia di uno stato dipenda esclusivamente dalla sua probabilità;
2. la probabilità di uno stato complesso sia data dal prodotto delle probabilità degli stati di cui è composto;
3. l'entropia sia una grandezza estensiva

segue che

$$S = f(W) = S_1 + S_2 = f(W_1 W_2) = f(W_1) + f(W_2) \quad (2.57)$$

Derivando rispetto a  $W_1$  e a  $W_2$  si ottiene

$$\ddot{f}(W)W + \dot{f}W = 0 \quad (2.58)$$

La cui soluzione generale, come si verifica immediatamente, è

$$S = f(W) = k \ln W + \text{cost} \quad (2.59)$$

In termodinamica classica, l'entropia - e quindi la probabilità - di uno stato è definita sempre a meno di una costante. *Planck ingloba la costante di integrazione nella costante moltiplicativa, che assume valore universale, e assegna un significato assoluto all'entropia, e quindi alla probabilità, di uno stato.* In altre parole, il numero di modi in cui l'energia del sistema può distribuirsi tra gli oscillatori *deve essere finito*, e quindi  $\varepsilon$  deve essere finito.<sup>6</sup>

$$h > 0 \quad (2.60)$$

Nel limite in cui  $\varepsilon = h\nu \rightarrow 0$ , la distribuzione di Planck tende a quella di Rayleigh-Jeans: l'energia media di un oscillatore di frequenza  $\nu$  in equilibrio con la radiazione risulta infatti

$$\langle H \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}} - 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{k_B T} e^{\frac{\varepsilon}{k_B T}}} = k_B T \quad (2.61)$$

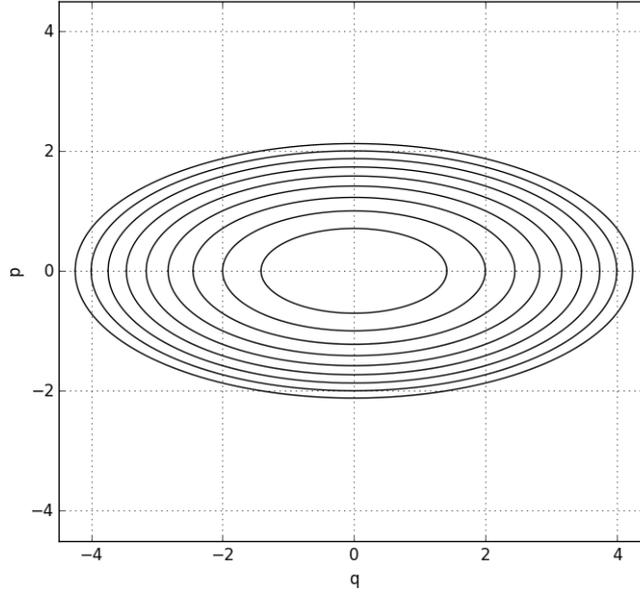


Figura 2.3: Orbite quantizzate per l'oscillatore armonico unidimensionale

**Energia del singolo oscillatore e funzione di partizione** L'energia media di un oscillatore si può ottenere per altra via, raffinando un po' l'ipotesi di quantizzazione. Fin'ora la quantizzazione è stata usata esclusivamente nella forma

$$\text{Energia totale del sistema} = N\langle H \rangle = P\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad (2.62)$$

che consente di trovare  $\langle H \rangle$  e, grazie alla (2.25), la densità di radiazione. Non si è parlato dell'energia  $\mathcal{E}$ <sup>7</sup> di un singolo oscillatore; inoltre la (2.25) è stata ottenuta eguagliando l'energia scambiata dall'oscillatore con la radiazione in equilibrio:  $\dot{W}_A = \dot{W}_E$  con

$$\dot{W}_A = \frac{\pi e^2}{3m} u_\nu \quad (2.21)$$

$$\dot{W}_E = \frac{2e^2}{3c^3} \omega^4 \langle x^2 \rangle \quad (2.22)$$

*Osservazione 2.2.* Queste espressioni, e di conseguenza l'equazione

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle H \rangle \quad (2.25)$$

sono state ricavate nel caso classico, ossia sotto l'ipotesi che l'oscillatore possa scambiare col campo - e quindi possedere - qualsiasi energia.

Il passo successivo è quello di supporre che, al contrario, l'energia  $\mathcal{E}$  di ogni oscillatore di frequenza propria  $\nu$  possa assumere solo valori che siano multipli interi di  $\varepsilon = h\nu$ . In altre parole, all'equilibrio l'oscillatore non può più assumere *qualsiasi* valore di energia tra 0 e  $\infty$ , non può più occupare un'orbita qualsiasi nello spazio delle fasi (si veda la figura E.1. L'equazione

$$\mathcal{E} = n\varepsilon = nh\nu, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.63)$$

<sup>6</sup>Infatti, per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $P \rightarrow \infty \Rightarrow W_N(P) \rightarrow \infty$ , per  $N$  fissato.

<sup>7</sup> $\mathcal{E} = (H(p(t), q(t)))$  è l'energia dell'oscillatore lungo una soluzione delle equazioni del moto.

pone un vincolo alle regione dello spazio delle fasi che l'oscillatore può occupare: *lo spazio delle fasi viene quantizzato*. Le orbite nello spazio delle fasi di un oscillatore sono ellissi di asse (si veda ancora l'appendice E)

$$p_{\max} \equiv b = \sqrt{2m\mathcal{E}}, \quad q_{\max} \equiv a = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \quad (2.64)$$

Nel caso classico, questi valori variano con continuità tra 0 e  $\infty$ ; la (2.63) impone

$$p_{\max} \equiv b = \sqrt{2\hbar m\nu n}, \quad q_{\max} \equiv a = \sqrt{\frac{2n\hbar\nu}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi^2} \frac{n}{m\nu}} \quad (2.65)$$

L'area di queste ellissi è

$$A = \pi ab = \frac{2\pi}{\omega} \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}}{\nu} = nh, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.66)$$

Le orbite dell'oscillatore armonico quantizzato sono ellissi la cui area è un multiplo intero di  $h$ , come in figura 2.3. L'energia media dell'oscillatore (che, si badi bene, *non* è un valore possibile di energia per l'oscillatore) si ottiene come in equazione (E.40), sostituendo l'integrazione con una somma (dove  $\beta = (k_B T)^{-1}$ ):

$$\langle H \rangle = \frac{\sum_0^\infty \mathcal{E} e^{-\beta\mathcal{E}}}{\sum_0^\infty e^{-\beta\mathcal{E}}} \quad (2.67)$$

Infatti la *funzione di partizione* (definita in (E.10)) per un sistema che ammette infiniti livelli discreti di energia  $\mathcal{E} = n\varepsilon$  è

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon n} \quad (2.68)$$

L'energia media dell'oscillatore è allora, da (E.14)

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \varepsilon \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta\varepsilon n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon n}} \quad \square \quad (2.69)$$

La serie che esprime la funzione di partizione converge a<sup>8</sup>

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\beta\varepsilon} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} \quad (2.70)$$

Da cui, di nuovo

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} = \frac{\hbar\nu}{e^{\frac{\hbar\nu}{k_B T}} - 1} \quad \square \quad (2.52)$$

Il risultato è quello che ci si aspetta, ma sorge un problema inatteso. Si ricordi l'osservazione 2.2: apparentemente, *non* è legittimo usare la (2.25) in questo caso, avendo supposto che l'oscillatore scambi energia in modo discreto. Vedremo nella sezione 2.6 un problema simile.

**Chi è quantizzato?** La *quantizzazione* di cui si è parlato fin'ora riguarda esclusivamente gli oscillatori "mentali" con cui Planck ha riempito la cavità (avendo potuto scegliere, grazie al teorema di Kirchhoff, *qualsiasi* sistema fisico in equilibrio con la radiazione). Si tratta di un artificio, di un abile trucco: si ipotizza che l'energia (totale o singola, sempre o solo in emissione, a seconda del modello) degli oscillatori possa essere solo un multiplo intero di un elemento fondamentale di energia (la cui grandezza dipende dalla frequenza dell'oscillazione in

---

<sup>8</sup>  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

questione). Sulla base di questa ipotesi si ricava l'energia media degli oscillatori, e quindi la densità del campo. Come suggerito (e discusso nella sezione 3.4) ciascun modo di oscillazione del campo elettromagnetico è assimilabile ad un oscillatore armonico unidimensionale, così come gli atomi delle pareti, che oscillano intorno ad una posizione di equilibrio. Tuttavia nella teoria di Planck gli atomi e il campo *non* sono quantizzati.

**Prime avvisaglie di energia di punto zero** È interessante sviluppare l'energia media di un oscillatore in equilibrio con la radiazione (2.52) nel limite classico  $h\nu \ll k_B T \iff \varepsilon\beta \ll 1$ :

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{\varepsilon}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta\varepsilon)^n}{n!} - 1} = \frac{\varepsilon}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\beta\varepsilon)^n}{n!}} \\ &\approx \frac{\varepsilon}{\beta\varepsilon + \frac{1}{2}(\beta\varepsilon)^2} = \frac{\beta^{-1}}{1 + \frac{1}{2}\beta\varepsilon} \\ &\approx \beta^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2}\beta\varepsilon \right) = k_B T - \frac{1}{2}h\nu \quad (2.71) \end{aligned}$$

L'energia media presenta una correzione al primo ordine indipendente dalla temperatura rispetto all'energia media predetta dalla teoria classica. Volendo che l'energia media equivalga al primo ordine con quella classica sarebbe necessario un termine  $h\nu/2$  additivo per  $\langle H \rangle$ : proprio questo sarà il risultato della *seconda teoria* di Planck.

## 2.6 Nasce il concetto di energia di punto zero

Planck trova la forma corretta della distribuzione di energia all'interno della cavità nel 1900, ma non è soddisfatto delle ipotesi *ad hoc* che ha impiegato. Passerà molti anni cercando di ottenere lo stesso risultato per altra via, pubblicando nel 1912 una seconda teoria, di cui si parla brevemente, non tanto per il modello (a posteriori, errato) utilizzato, quanto per il risultato ottenuto (perfettamente in accordo con la teoria moderna, nonostante il percorso seguito per arrivarci non lo sia!).

Planck riformula la quantizzazione: l'assorbimento è continuo, l'emissione è discreta. Ipotizza ossia che gli oscillatori possano *assorbire* dal campo energia in modo continuo (e quindi possedere *qualsiasi* energia, occupare un'orbita *qualsiasi* nello spazio delle fasi). In altre parole, resta valida la<sup>9</sup>

$$\dot{W}_A = \frac{\pi e^2}{3m} u_\nu \quad (2.21)$$

Per quanto riguarda l'emissione, Planck ipotizza che un oscillatore di frequenza  $\nu$ , assorbendo con continuità energia dal campo, abbia la possibilità di emettere *tutta* l'energia che possiede *solo* quando questa sia un multiplo intero di  $h\nu$ . Questa emissione ha probabilità  $\eta$  di avvenire - nel qual caso l'oscillatore perde tutta la sua energia, e ricomincia ad assorbire dal campo - e  $1 - \eta$  di non avvenire - nel qual caso l'oscillatore continua ad assorbire dal campo, avendo una nuova possibilità di emissione solo dopo aver assorbito un altro pacchetto  $h\nu$  di energia.

Sia quindi  $P_n$  la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$ : l'orbita di questo oscillatore è confinata in una corona ellittica nello spazio delle fasi (figura 2.4). Si ribadisce che, in questo modello, l'oscillatore può assumere qualsiasi energia in questa corona, ma può emettere solo quando "valica" l'ellisse esterna. La probabilità che l'oscillatore, quando la raggiunge, emetta la sua energia  $h\nu$  è  $P_n\eta$ ; la probabilità che l'emissione non avvenga è

<sup>9</sup>Scritta da Planck nella forma  $\frac{dU}{dt} = \frac{J}{4L}$  con  $L$  come in (2.16) e  $J = \frac{4}{3}\pi u_\nu$ . Si veda [26, sec. 149] o [17, p. 238].

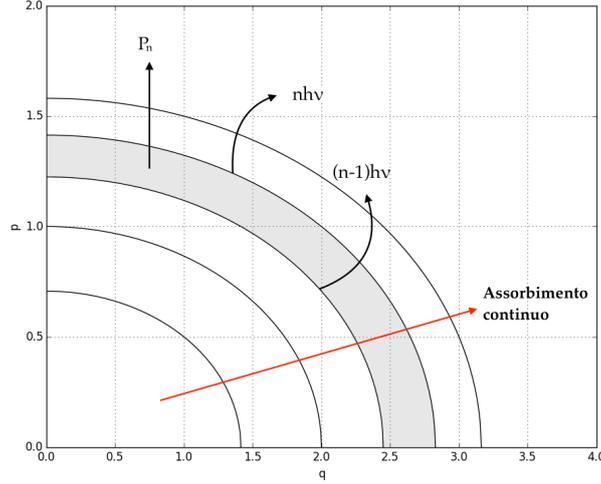


Figura 2.4: Secondo modello di Planck: l'assorbimento degli oscillatori è continuo, ma l'emissione è quantizzata

ovviamente  $P_n(1 - \eta)$ . La probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra  $nh\nu$  e  $(n + 1)h\nu$  è pari alla probabilità che *non* avvenga l'emissione  $h\nu$ , ossia

$$P_n(1 - \eta) = P_{n+1} \Rightarrow P_n = P_1(1 - \eta)^{n-1} \quad (2.72)$$

La probabilità che l'oscillatore abbia una qualsiasi energia tra 0 e  $\infty$  è unitaria:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = P_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \eta)^{n-1} = P_1 \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \eta)^n = \frac{P_1}{1 - (1 - \eta)} = \frac{P_1}{\eta} \quad (2.73)$$

La probabilità che l'oscillatore abbia energia tra  $(n - 1)h\nu$  e  $h\nu$  è quindi

$$P_n = \eta(1 - \eta)^{n-1} \quad (2.74)$$

Planck assume quindi che ogni energia in una corona sia equiprobabile, cosicché l'energia media di un oscillatore con energia compresa tra  $(n - 1)h\nu$  e  $nh\nu$  è semplicemente la media aritmetica di queste due quantità:

$$\frac{n - 1 + n}{2} h\nu = \left(n - \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (2.75)$$

L'energia media di un oscillatore qualsiasi è allora la media delle energie medie di ciascuna corona pesate dalla rispettive probabilità:

$$\langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{1}{2}\right) h\nu \cdot P_n = \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2}\right) h\nu \quad (2.76)$$

Si tratta adesso di legare l'entropia del sistema a  $P_n$ , quindi a  $\eta$  tramite la (2.74), quindi ad  $\langle H \rangle$  tramite la (2.76). Una volta nota  $S(\langle H \rangle)$  si ottiene  $\langle H \rangle(T)$  come da (2.51).

**Entropia** L'equazione di partenza è sempre la

$$S_N = SN = k_B \ln W \quad (2.47)$$

dove  $S_N$  è l'entropia del sistema composto da  $N$  oscillatori e  $S$  l'entropia di un oscillatore. Rispetto a quanto fatto in precedenza cambia il modo in cui si determina la probabilità termodinamica  $W$  del sistema: prima era il numero di modi in cui  $P$  elementi di energia indistinguibili

possono distribuirsi tra  $N$  oscillatori distinguibili. Adesso non ha senso parlare di  $P$  elementi di energia, essendo l'assorbimento continuo. Si procede così: sia  $N_n$  il numero di oscillatori con energia nella corona (d'ora in poi, *livello energetico*)  $n$ -esima.<sup>10</sup> Per la legge dei grandi numeri

$$N_n = P_n N \quad (2.77)$$

L'energia totale del sistema è definita completamente dal numero di oscillatori in ogni livello energetico o, in altre parole, un macrostato è definito dalla successione  $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Ad esempio, nel caso in cui si avessero 5 livelli disponibili per  $N = 3$  oscillatori indicati con  $A, B, C$ , la seguente tabella illustra un macrostato possibile (quanti oscillatori in ogni livello) e i relativi microstati (quali oscillatori in quale livello):

Livello energetico	Macrostato possibile	Microstato	Microstato	Microstato
5	0	0	0	0
4	2	A,B	A,C	B,C
3	0	0	0	0
2	0	0	0	0
1	1	C	B	A

In questo caso,  $N = 5, N_1 = 1, N_2 = N_3 = 0, N_4 = 2, N_5 = 0$ . Il numero di microstati relativi a questo macrostato, ossia la probabilità termodinamica  $W$  che stiamo cercando, è

$$W = \frac{3!}{1!0!0!2!0!} = 3 \quad (2.78)$$

Nel caso dell'oscillatore il numero di livelli energetici disponibili è infinito, e la formula per la probabilità termodinamica di un macrostato è

$$W = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\dots} = \frac{N!}{\prod_{n=1}^{\infty} N_n!} \quad (2.79)$$

In approssimazione di Stirling questa formula si riduce a

$$W \approx \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{N}{N_n}\right)^{N_n} = \prod_{n=1}^{\infty} P_n^{-N_n} \quad (2.80)$$

L'entropia del sistema relativa a questo macrostato, e corrispondentemente l'entropia di ciascun oscillatore, è allora

$$S_N = SN = k_B \ln W = k_B \sum_{n=1}^{\infty} \ln P_n^{-N_n} = k_B \frac{N}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \ln P_n^{-N_n} = -k_B N \sum_{n=1}^{\infty} P_n \ln P_n$$

In definitiva, l'entropia di un oscillatore è

$$S = -k_B \sum_{n=1}^{\infty} P_n \ln P_n \quad (2.81)$$

A questo punto si tratta solo di utilizzare le equazioni (2.74), (2.76), risolvendo la serie. Dopo qualche passaggio si ottiene

$$S = k_B \left[ \left( \frac{\langle H \rangle}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{\langle H \rangle}{h\nu} + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\langle H \rangle}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \ln \left( \frac{\langle H \rangle}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.82)$$

<sup>10</sup>Ossia con energia tra  $(n-1)h\nu$  e  $nh\nu$ .

Si confronti il risultato con quello ottenuto in (2.50): l'espressione è simile, tranne che per dei nuovi fattori  $\frac{1}{2}$ . Vediamo che in effetti, posto  $\frac{\partial S}{\partial \langle H \rangle} = T^{-1}$ , si ottiene

$$\langle H \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} + \frac{1}{2}h\nu \quad (2.83)$$

Ossia

$$\boxed{\lim_{T \rightarrow 0} \langle H \rangle = \frac{1}{2}h\nu} \quad (2.84)$$

Questa espressione rappresenta la nascita del concetto di *energia di punto zero*. Secondo Planck, l'oscillatore mantiene (mediamente) questa energia anche alla temperatura di zero assoluto: essendo minore di  $h\nu$ , infatti, non può essere emessa.

**Densità del campo** Come preannunciato nell'osservazione 2.2, a questi punto non è possibile utilizzare l'espressione (2.25), derivata sotto le ipotesi di assorbimento *ed emissione* continui: è evidente che l'espressione per la densità che otterremmo sarebbe diversa dalla (2.55). Planck formula allora due ipotesi fondamentali:

1. il rapporto tra la probabilità di non-emissione e la probabilità di emissione è proporzionale all'intensità della radiazione che eccita l'oscillatore:

$$\frac{1 - \eta}{\eta} = C u_\nu \quad (2.85)$$

2. le espressioni ottenute *devono*, nel limite  $h\nu \ll k_B T$ , tendere alle espressioni classiche.

La prima ipotesi si basa sul fatto che l'energia media degli oscillatori cresce con l'intensità della radiazione: dunque, quando il campo è intenso, è necessario che un oscillatore abbia una buona probabilità di raggiungere un livello di eccitazione elevato prima di scaricarsi. La seconda ipotesi è una prima formulazione del *Principio di Corrispondenza*.

Dalla prima ipotesi  $\frac{1}{\eta} = C u_\nu + 1$  e dall'espressione per l'energia media (2.76)  $\langle H \rangle = (C u_\nu + \frac{1}{2}) h\nu$ , quindi

$$u_\nu = \frac{1}{C} \left( \frac{\langle H \rangle}{h\nu} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{C} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2.86)$$

Per determinare il valore della costante Planck impone di ritrovare la distribuzione di Rayleigh-Jeans nel limite  $h\nu \ll k_B T$ :

$$u_\nu \approx C^{-1} \frac{k_B T}{h\nu} \stackrel{!}{=} u_{\nu, \text{RJ}} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \quad (2.87)$$

Sostituendo nella (2.86) il valore che si ottiene,  $C^{-1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} h\nu$ , si riottiene proprio la distribuzione di Planck.  $\square$

Nella seconda teoria di Planck, dunque, emerge il concetto di energia di punto zero per l'oscillatore, ma *non per il campo* nella cavità: infatti  $u_\nu \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$ . Il risultato ottenuto è notevole, ma il modello "assorbimento continuo - emissione discreta" è destinato ad essere ben presto messo da parte in favore del modello atomico di Niels BOHR (\*1885, †1962), nel quale sia l'assorbimento che l'emissione vengono quantizzati.<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Per l'influenza del lavoro di Planck sul modello di Bohr si veda [16, p. 9].

## 2.7 Einstein, Hopf e Stern

Nel 1910 Einstein e Hopf formulano un modello di dipolo oscillante in equilibrio con la radiazione, che conduce inesorabilmente alla distribuzione di Rayleigh-Jeans. Un paio d'anni più tardi l'idea che un oscillatore potesse possedere una energia di punto zero, ossia avere energia non nulla anche quando in equilibrio con una radiazione la cui temperatura tende a zero, suscita il vivo interesse dello stesso Einstein e di Stern. Nel 1913, sotto questa luce, i due riprendono in mano il modello Einstein-Hopf e mostrano che, con un'ipotesi *ad hoc*, è possibile ottenere la distribuzione di Planck. Non ci soffermiamo sulla derivazione del modello, di cui riportiamo solo i passaggi concettuali principali in appendice F, ma concentriamo la nostra attenzione sul ruolo dell'energia di punto zero sia dal punto di vista di Einstein e Stern che "barando", ossia col senno di poi.

**Il modello Einstein-Hopf** Einstein ed Hopf ricavano la seguente equazione differenziale per la densità del campo elettromagnetico in equilibrio con un sistema di dipoli elettrici oscillanti liberi di traslare ortogonalmente alla direzione di oscillazione:

$$u_\omega - \frac{\omega}{3} \frac{du_\omega}{d\omega} = \frac{\pi^2 c^3}{3k_B T \omega^2} u_\omega^2 \quad (2.88)$$

La soluzione con  $u(\omega = 0) = 0$  è

$$u_\omega = \frac{\omega^2 k_B T}{\pi^2 c^3} \quad (2.89)$$

Si verifica in fatti che  $u'_\omega = 2u_\omega/\omega$  e sostituendo nell'equazione differenziale

$$u_\omega - \frac{\omega}{3} \frac{2u_\omega}{\omega} = \frac{1}{3} u_\omega^{-1} u_\omega^2 \quad \square \quad (2.90)$$

Con le dovute sostituzioni ( $u_\omega d\omega = u_\nu d\nu$  e  $\omega = 2\pi\nu$ ) la (2.89) è proprio la distribuzione di Rayleigh-Jeans! L'equazione (2.88) è ricavata senza menzionare energie medie, emissione o assorbimento, ma si basa sull'equilibrio tra l'impulso guadagnato e perso dal dipolo che si muove in un campo esterno. La fisica classica conduce inesorabilmente alla distribuzione di Rayleigh-Jeans.

**Energia di punti zero *ad hoc*** Einstein e Stern, incuriositi dai risultati del 1912 di Planck, iniziano a giocare con l'energia di punto zero. Innanzitutto chiamano in causa la discussa equazione (2.25), che si può riscrivere<sup>12</sup> in termini di  $\omega$ :

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle H \rangle \quad (2.91)$$

Sostituendo nella (2.88) si fa apparire esplicitamente l'energia media del dipolo nell'equazione differenziale:

$$u_\omega - \frac{\omega}{3} u'_\omega = \frac{u_\omega}{3k_B T} \langle H \rangle \quad (2.92)$$

L'ipotesi *ad hoc* è la seguente: *si attribuisce al dipolo un'energia di punto zero pari a  $h\nu \equiv \hbar\omega$* , ossia si effettua la sostituzione  $\langle H \rangle \rightarrow \langle H \rangle + \hbar\omega$ . Riesprimendo  $\langle H \rangle$  con la (2.91) si ottiene l'equazione differenziale di partenza con un termine aggiuntivo

$$\begin{aligned} u_\omega - \frac{\omega}{3} u'_\omega &= \frac{u_\omega}{3k_B T} (\langle H \rangle + \hbar\omega) \\ &= \frac{\pi^2 c^3}{3k_B T \omega^2} u_\omega^2 + \frac{\hbar\omega}{3k_B T} u_\omega \end{aligned} \quad (2.93)$$

<sup>12</sup>Sempre grazie a  $u_\omega d\omega = u_\nu d\nu$ .

La soluzione con  $u(\omega = 0) = 0$  è proprio la distribuzione di Planck!<sup>13</sup>

$$u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1} \quad (2.94)$$

È sempre più evidente il fatto che l'energia di punto zero debba giocare un ruolo fondamentale, ma l'ipotesi di Einstein ed Hopf è del tutto arbitraria; per di più l'energia di punto zero utilizzata è il *doppio* di quella trovata da Planck in (2.84). La domanda che sorge spontanea è: *perchè Einstein ed Hopf non attribuiscono anche al campo elettromagnetico un'energia di punto zero?* Ad esempio, la (2.91) suggerisce che

$$\begin{aligned} u_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle H \rangle &\rightarrow u_\omega + u_{0\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} (\langle H \rangle + \langle H \rangle_0) \\ &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle H \rangle + u_{0\omega} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ossia (le scritte sono equivalenti tramite la solita  $u_\omega d\omega = u_\nu d\nu$ )

$$\begin{aligned} u_{0\omega} &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle H \rangle_0 \\ u_{0\nu} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle H \rangle_0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Si osservi inoltre che, nella derivazione della legge (corretta) di Planck tramite l'ipotesi (errata) che l'energia di punto zero dell'oscillatore sia  $\hbar\omega$ , *la quantizzazione scompare completamente*: il dipolo è libero di assorbire ed emettere energia in modo continuo.

**Uno sguardo a posteriori** Anticipiamo alcuni risultati del prossimo capitolo per rispondere alla domanda: semplicemente, il modello Einstein-Hopf è errato. Dal punto di vista dell'elettrodinamica quantistica moderna *ciascun modo di oscillazione del campo elettromagnetico ha un'energia di punto zero pari a  $\frac{1}{2}\hbar\omega$*  (lo dimostreremo nella sezione 3.4.3), così come un oscillatore materiale (l'energia di punto zero trovata da Planck per l'oscillatore è corretta!). Si ricordi inoltre la (2.43) *ottenuta come nella sezione 2.3*: il numero di modi di oscillazione del campo elettromagnetico per unità di volume con frequenza tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  è

$$\frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \equiv \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega \quad (2.97)$$

La densità di energia di punto zero<sup>14</sup> del campo elettromagnetico corretta allora è pari alla densità di modi per la ZPE di ciascun modo, ossia proprio

$$\begin{aligned} u_{0\omega} &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{2} \hbar\omega = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \\ u_{0\nu} &= \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{1}{2} \hbar\nu = \frac{4\pi\hbar\nu^3}{c^3} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Proviamo allora a risolvere l'equazione di Einstein-Hopf nella forma (2.92) con le posizioni

$$u_\omega \rightarrow u_\omega + u_{0\omega}, \quad \langle H \rangle \rightarrow \langle H \rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (2.99)$$

<sup>13</sup>La verifica diretta è semplice ma tediosa.

<sup>14</sup>D'ora in poi ZPE, *zero point energy*.

Il membro di sinistra non cambia:

$$u_\omega + \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} - \frac{\omega}{3} \frac{d}{d\omega} \left( u_\omega + \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} \right) = u_\omega - \frac{\omega}{3} u'_\omega + \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3} - \frac{\omega}{3} \frac{3\hbar\omega^2}{2\pi^2c^3} \quad (2.100)$$

Il membro a destra, a meno del fattore  $(3k_B T)^{-1}$ , è del tipo

$$u_\omega \langle H \rangle + u_{0\omega} \langle H \rangle + u_\omega \langle H \rangle_0 + \underbrace{u_{0\omega} \langle H \rangle_0}_{\text{Termine critico}} \quad (2.101)$$

Il *termine critico*  $u_{0\omega} \langle H \rangle_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega u_{0\omega}$  accoppia la ZPE del campo con quella dell'oscillatore; in altre parole, sembra possibile che un oscillatore con energia pari alla sua ZPE *venga eccitato dall'energia di vuoto*. Vedremo che questo *non* accade: un oscillatore nel suo *stato fondamentale* non assorbe radiazione di punto zero. Omettendo questo termine ed effettuando le opportune sostituzioni nella (2.101) si riottiene esattamente l'equazione differenziale (2.93) e quindi, in definitiva, la distribuzione di Planck. Viceversa, non omettendo il termine critico (ed Einstein e Hopf non potevano sapere che andasse omesso) si ottiene un'equazione differenziale la cui soluzione per lo spettro totale è, di nuovo, del tipo Rayleigh-Jeans:

$$u_\omega = u_{\omega, \text{RJ}} + u_{0\omega} \quad (2.102)$$

Per questo motivo Einstein e Hopf, come molti altri, scartarono l'idea di una ZPE del campo elettromagnetico: l'energia di punto zero, se esiste, è considerata una prerogativa dei sistemi materiali, non dello spazio.<sup>15</sup> Vedremo nel prossimo capitolo come, in realtà, la quantizzazione e l'energia di punto zero riguardino da vicino il campo elettromagnetico.

---

<sup>15</sup>Una notevole eccezione rispetto a questa tendenza è rappresentata dalla teoria, proposta nel 1916, da Walther NERNST (\*1864, †1941). Si veda ad esempio [16, pp. 24-37].

## Capitolo 3

# Quantizzazione del campo elettromagnetico

Fin'ora abbiamo condotto un'analisi quasi storica del problema della nascita dell'energia di punto zero, limitandoci sempre alle conoscenze fisiche disponibili negli anni '20. Facciamo adesso un balzo in avanti, avvalendoci dei risultati della teoria quantistica moderna.

### 3.1 Formalismo generale della meccanica quantistica

**Prodotto hermitiano** Introduciamo brevemente la notazione di Dirac e gli strumenti e lo spazio che useremo (una trattazione precisa e sintetica si trova in [28, pp. 188-194]): un *prodotto hermitiano* o *interno* su uno spazio vettoriale complesso  $V$  è una *forma hermitiana definita positiva* e verrà indicato con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Ossia,  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow V$  tale che (\* indica il complesso coniugato)

$$\langle \varphi | a\psi \rangle = a \langle \varphi | \psi \rangle, \quad \forall a \in \mathbb{C}, \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in V \quad (3.1)$$

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle^*, \quad \forall |\varphi\rangle, |\psi\rangle \in V \quad (3.2)$$

Questi due punti definiscono una *forma hermitiana* e implicano la *sesquilinearità*, ossia

$$\langle b\varphi | \psi \rangle = \langle \psi | b\varphi \rangle^* = b^* \langle \varphi | \psi \rangle, \quad \forall b \in \mathbb{C} \quad (3.3)$$

Si osservi che  $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle^* \in \mathbb{R}$ ; una forma hermitiana è allora *definita positiva* se

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \quad \forall |\psi\rangle \in V, \quad \text{e} \quad \langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff |\psi\rangle = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

**Spazio di Hilbert** Uno *spazio di Hilbert*  $\mathcal{H}$  è uno spazio vettoriale in generale complesso dotato di un prodotto hermitiano (queste proprietà definiscono uno spazio *prehilbertiano*) con la richiesta aggiuntiva che sia *di Banach*. Ossia, se  $\mathcal{H}$  prehilbertiano è *completo* rispetto alla distanza indotta dal prodotto hermitiano allora è di Hilbert.<sup>1</sup> Si chiede inoltre che  $\mathcal{H}$  sia *separabile*.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>La distanza indotta è  $d : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\psi, \varphi) \mapsto \|\psi - \varphi\| \equiv \sqrt{\langle \psi - \varphi | \psi - \varphi \rangle}$ . La nozione di distanza consente di introdurre il concetto di *convergenza* di una successione nello spazio;  $\mathcal{H}$  è allora *completo* se tutte le successioni *di Cauchy* convergono in esso. Una successione  $\{|\psi_n\rangle\}$  di elementi di  $\mathcal{H}$  è *di Cauchy* se  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z} : \|\psi_n - \psi_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > N$ , ossia se da un certo punto in poi tutti i suoi elementi sono arbitrariamente "vicini".

<sup>2</sup>La nozione di separabilità è topologica: uno spazio metrico è tautologicamente uno spazio topologico metrizzabile, e la separabilità equivale a chiedere che lo spazio vettoriale ammetta una base ortonormale al più numerabile:  $\{|\psi_i\rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $|\varphi\rangle = \sum_i C_i |\psi_i\rangle = \sum_i \langle \psi_i | \varphi \rangle |\psi_i\rangle$ ,  $\forall |\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ .

**Operatori** Un *operatore*  $O$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è una mappa lineare da  $\mathcal{H}$  in sé stesso:  $O : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $|\psi\rangle \mapsto O|\psi\rangle$ ,  $O|a\psi + b\varphi\rangle = aO|\psi\rangle + bO|\varphi\rangle$ , con  $a, b$  elementi del campo. L'*aggiunto* di un operatore è l'operatore  $O^\dagger$  definito da  $\langle\psi|O|\varphi\rangle \equiv \langle\varphi|O^\dagger|\psi\rangle^*$  per ogni coppia di elementi di  $\mathcal{H}$ .<sup>3</sup> Un operatore è *autoaggiunto* o *hermitiano* se è uguale al suo aggiunto.<sup>4</sup> Per qualche considerazione in più si veda la nota a pagina 58.

L'*equazione agli autovalori* per un operatore è  $O|a_i^j\rangle = a_i|a_i^j\rangle$ , con  $a_i \in \mathbb{C}$ ,  $|a_i^j\rangle \in \mathcal{H}$ . Ossia, in generale esistono più autostati *linearmente indipendenti* corrispondenti allo stesso autovalore; il numero di questi autostati indipendenti, ossia la dimensione dell'autospazio di un autovalore, è detta *degenerazione* dell'autovalore. Un autovalore *non degenerare* ha autospazio di dimensione 1, ossia ammette un unico autostato, a meno di fattori moltiplicativi.

Si dimostrano tre proprietà fondamentali degli operatori hermitiani di uno spazio di Hilbert, che consentono di identificarli con le (grandzze fisiche) *osservabili*:

1. gli autovalori di un operatore hermitiano sono *reali*;
2. gli autostati relativi ad autovalori *distinti* sono *ortogonali*;
3. esiste una base ortonormale di  $\mathcal{H}$  composta da autostati dell'operatore.

Il legame con la fisica di un sistema è, brevemente, il seguente: *una grandezza fisica osservabile equivale ad un operatore hermitiano*. I possibili esiti della misura di questa grandezza sono gli autovalori dell'operatore, che formano lo *spettro* dell'osservabile. Dato un sistema fisico un suo *stato* è rappresentato da un elemento dello spazio di Hilbert. La misura di un'osservabile in certo stato non fornirà, in generale, un esito che possa essere predetto a priori. La probabilità di misurare un certo (auto)valore dato uno stato iniziale (*probabilità di transizione*) è, nel caso non degenerare e normalizzando tutti gli stati<sup>5</sup>, *il modulo quadro del prodotto hermitiano tra lo stato di partenza e l'autostato relativo all'autovalore* (o modulo quadro dell'*ampiezza di transizione*). Dopo la misura, si postula che il sistema *collassi* nell'autostato in questione.<sup>6</sup> L'esito di una misura di una certa osservabile è quindi noto a priori se e solo se il sistema si trova in un autostato dell'osservabile. Finché non se ne effettua la misura, quindi, un'osservabile non "ha" un valore ben definito in uno stato qualsiasi di un sistema fisico: la sua misura può dare tanti risultati diversi, ognuno associato ad una probabilità. Il *valore di aspettazione* di un'osservabile  $A_h$  in uno stato  $|\psi\rangle$  (o, in generale, di un operatore anche non hermitiano  $A$ ) è dato dalla

**Definizione 3.1** (Valore medio).

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_\psi &:= \langle \psi | A | \psi \rangle \in \mathbb{C} \\ \langle A_h \rangle_\psi &:= \langle \psi | A_h | \psi \rangle \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{3.5}$$

L'*indeterminazione*  $\Delta A_\psi$  di un'osservabile  $A$  in uno stato  $|\psi\rangle$  è legata al valore medio dell'operatore  $A - \langle A \rangle_\psi$ , ossia

$$\Delta A_\psi^2 = \langle (A - \langle A \rangle_\psi)^2 \rangle_\psi\tag{3.6}$$

L'indeterminazione di un'osservabile in uno stato è nulla se e solo se l'esito di una misura dell'osservabile nello stato è certa, ossia se e solo se lo stato è un *autostato* dell'osservabile:

$$\Delta A_\psi = 0 \iff A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{R}\tag{3.7}$$

<sup>3</sup>L'esistenza dell'operatore aggiunto, ossia il fatto che, dato  $O$ , allora  $\langle\varphi|O^\dagger|\psi\rangle^* \in \mathcal{H}$ , non è scontata. Si veda in merito il *lemma di Riesz*.

<sup>4</sup>Ci sarebbe da precisare qualcosa in merito a questo "o", ma tralasciamo.

<sup>5</sup>Tutti gli stati si intendereanno normalizzati, senza perdere nulla in generalità

<sup>6</sup>Nel caso degenerare la generalizzazione è immediata: la probabilità di transizione è data dalla somma dei moduli quadri delle ampiezze di transizione utili, e lo stato del sistema dopo la misura è dato dalla *proiezione* dello stato iniziale sull'autospazio relativo all'autovalore ottenuto.

Due osservabili si dicono *compatibili* se esiste una base di  $\mathcal{H}$  formata da autostati *simultanei*; si dimostra che  $A$  e  $B$  sono compatibili se e solo se *commutano*, ossia se  $AB - BA \equiv [A, B] = 0$ . Esiste una relazione fondamentale tra le indeterminazioni di due osservabili in uno stato, che fundamentalmente esprime la *possibilità di conoscere simultaneamente il valore di due grandezze fisiche*:

**Legge 3.1** (Indeterminazione). *Le indeterminazioni di due osservabili  $A, B$  in uno stato  $|\psi\rangle$  sono legate da*

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} \|\langle [A, B] \rangle_\psi\| \quad (3.8)$$

In particolare, nel caso degli operatori posizione  $x_i$  e momento  $p_j$ , essendo  $[x_i, p_j] = \delta_{ij} i \hbar$ , risulta (lasciando implicito il fatto che si parli dello stesso stato)

$$\Delta q_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.9)$$

### 3.1.1 Prodotto tensoriale di spazi vettoriali

Si richiamano rapidamente la nozione di prodotto tensoriale di spazi vettoriali, utile nel seguito (per approfondire si veda ad esempio [1]). Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  (lo stesso vale per gli spazi complessi). Lo spazio duale è  $V^* \equiv \text{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari}\}$ . Un vettore di  $V$  si scrive (sommando su indici ripetuti)  $v = v^i e_i$ , mentre un vettore di  $V^*$  si scrive  $\varphi = \varphi_j e^j$ , dove  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base di  $V$  e  $\{e^j\}_{j=1, \dots, n}$  è una base di  $V^*$ .  $V$  è isomorfo a  $V^*$  tramite la  $e_i \leftrightarrow e^j \iff e^j(e_i) = \delta_i^j$  (*base coniugata*), ma questo isomorfismo dipende ovviamente dalla scelta della base. Esiste però un isomorfismo canonico tra  $V$  e  $V^{**} = \{\tilde{v} : V^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineari}\}$ :  $v \in V$  è canonicamente equivalente a  $\tilde{v} \in V^{**}$  in modo che  $\tilde{v}(\varphi) \equiv \varphi(v)$ . Insomma, abolendo la tilde, è lo stesso pensare ad un elemento di  $V$  che agisce su un elemento del duale  $V^*$  o viceversa:  $v(\varphi) = \varphi(v) \in \mathbb{R}$ .

Si definisce allora il prodotto tensoriale di due spazi vettoriali ( $\dim V = n, \dim W = m$ ) come lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari sul prodotto cartesiano dei duali a valori in  $\mathbb{R}$ . Si fa prima ad esprimerlo in matematiche:  $V \otimes W := \{g : V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ bilineari}\}$ . Se  $v \in V, w \in W$  allora si indica con  $v \otimes w \in V \otimes W$  il vettore che agisce così, con  $\varphi \in V^*, \psi \in W^*$ :

$$\begin{aligned} v \otimes w : V^* \times W^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\varphi, \psi) &\mapsto v \otimes w(\varphi, \psi) \equiv \varphi(v)\psi(w) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se  $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$  è una base di  $V$  e  $\{u_j\}_{j=1, \dots, m}$  è una base di  $W$  allora una base di  $V \otimes W$  è  $\{e_i \otimes u_j\}_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ , quindi  $\dim V \otimes W = \dim V \dim W$  e un generico vettore di  $V \otimes W$  si scrive  $g = g^{ij} e_i \otimes u_j$ . Esattamente lo stesso ragionamento vale per  $V^* \otimes W^*$ , o per  $V \otimes W^*$ , e si generalizza al prodotto tensoriale di un numero arbitrario di spazi vettoriali e loro duali. Un fatto interessante è che  $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ , ma stiamo divagando.

## 3.2 Quantizzazione dell'oscillatore armonico

Sarà molto utile nel seguito avere presente il procedimento di quantizzazione dell'oscillatore armonico unidimensionale. L'operatore hermitiano hamiltoniano è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (3.11)$$

$p, x$  sono gli operatori hermitiani momento e posizione. Grazie alle definizioni

$$x_0^2 := \frac{\hbar}{m\omega}, \quad p_0^2 := m\hbar\omega \quad (3.12)$$

l'hamiltoniana si riscrive in termini degli operatori adimensionali  $x' := x/x_0, p' = p/p_0$ :

$$\frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} (p'^2 + x'^2) \quad (3.13)$$

La regola di commutazione tra gli operatori è

$$[x, p] = i\hbar \Rightarrow [x', p'] = i \quad (3.14)$$

Vogliamo risolvere l'equazione agli autovalori per l'energia:

$$H |\psi\rangle = \mathcal{E} |\psi\rangle \quad (3.15)$$

dove  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ . Grazie al teorema del Wronskiano sappiamo che lo spettro di autovalori è discreto e non degenere.

Il metodo risolutivo più efficace è il seguente. L'operatore hamiltoniano della (3.13) si può riscrivere come

$$\frac{H}{\hbar\omega} = \frac{1}{2} (p' + ix')(p' - ix') + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a) = a^\dagger a + \frac{1}{2} \quad (3.16)$$

avendo definito l'operatore<sup>7</sup>

$$a := \frac{1}{\sqrt{2}} (p' - ix') \quad (3.17)$$

ed il suo aggiunto

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (p' + ix') \quad (3.18)$$

Questi operatori *non* hermitiani sono detti *di salita* e *di discesa*. Soddiscano le seguenti regole di commutazione:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [H, a] = -\hbar\omega a, \quad [H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger \quad (3.19)$$

Saranno utili nel seguito le relazioni esplicite ed inverse:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (p - im\omega x) & x &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a - a^\dagger) \\ a^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (p + im\omega x) & p &= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'utilità di questi operatori sta nell'effetto che hanno sugli autostati  $|\psi\rangle$  dell'hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H |\psi\rangle = \mathcal{E} |\psi\rangle &\Rightarrow Ha |\psi\rangle = (aH - \hbar\omega a) |\psi\rangle \\ &= (\mathcal{E} - \hbar\omega) a |\psi\rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analogamente,

$$Ha^\dagger |\psi\rangle = (\mathcal{E} + \hbar\omega) a^\dagger |\psi\rangle \quad (3.22)$$

Ossia, se  $|\psi\rangle$  è un autostato dell'hamiltoniana di autovalore  $\mathcal{E}$ , allora  $a |\psi\rangle$  (rispettivamente  $a^\dagger |\psi\rangle$ ) è ancora autostato dell'hamiltoniana di autovalore  $\mathcal{E} - \hbar\omega$  (rispettivamente  $\mathcal{E} + \hbar\omega$ ), da cui il nome degli operatori.

<sup>7</sup>In letteratura si trovano varie definizioni, che portano naturalmente al medesimo risultato. La scelta effettuata qui è quella di [22, p. 36] e [24, p. 97], mentre [18, p. 22] e [34, p. 6] definiscono

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' + ip') = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega x + ip) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (x' - ip') = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} (m\omega x - ip)$$

**Autovalori positivi** Vediamo che gli autovalori dell'hamiltoniana devono essere positivi: innanzitutto, il valore medio dell'operatore hamiltoniano in un suo autostato normalizzato è, per definizione, l'autovalore corrispondente:

$$H|\psi\rangle = \mathcal{E}|\psi\rangle \Rightarrow \langle H \rangle_\psi = \langle \psi | H | \psi \rangle = \mathcal{E} \quad \square \quad (3.23)$$

Per qualsiasi stato (e in particolare per gli autostati)  $\langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle \geq 0$ . Inoltre, non esiste uno stato tale che  $\langle H \rangle = 0$ : se per assurdo questo stato  $|\varphi\rangle$  esistesse, necessariamente  $x|\varphi\rangle = p|\varphi\rangle = 0$ , ossia  $|\varphi\rangle$  sarebbe un autostato comune di  $x$  e  $p$ . Dalla (3.7) questo vorrebbe dire  $\Delta x_\varphi = \Delta p_\varphi = 0$  e in definitiva  $\Delta x_\varphi \Delta p_\varphi = 0$ , che contraddice la relazione di indeterminazione (3.9). Quindi

$$\langle H \rangle_\psi > 0 \quad \forall |\psi\rangle \Rightarrow \mathcal{E}_n > 0 \quad \forall n \quad (3.24)$$

Si può fare di meglio: se  $|\psi\rangle$  è un autostato dell'hamiltoniana

$$\mathcal{E} = \langle \psi | H | \psi \rangle = \hbar\omega \langle \psi | a^\dagger a + \frac{1}{2} | \psi \rangle = \underbrace{\hbar\omega | \langle a | \psi \rangle |^2}_{\geq 0} + \frac{1}{2}\hbar\omega \geq \frac{\hbar\omega}{2} \quad (3.25)$$

Da qui in poi adottiamo per gli autostati dell'hamiltoniana la notazione  $H|n\rangle = \mathcal{E}_n|n\rangle$ . Visto che  $\mathcal{E}_n \geq \hbar\omega/2$  e che l'operatore  $a$  trasforma autostati in autostati con energia sempre minore deve esistere uno *stato di minima energia*  $|0\rangle \in \ker a$ , ossia tale che  $a|0\rangle = 0$ . Imponendo che questo stato sia normalizzato si ottiene il valore di minima energia:

$$|a|0\rangle|^2 = \langle 0 | a^\dagger a | 0 \rangle = \langle 0 | \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2} | 0 \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \langle H \rangle_0 - \frac{1}{2} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_1 = 0$$

Ossia

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (3.26)$$

Una considerazione: il risultato analogo ottenuto per la prima volta da Planck riguarda l'energia *media* di un oscillatore, mentre il risultato quantistico riguarda un singolo oscillatore. Effettuando una misura di energia su un oscillatore armonico in uno stato qualsiasi non si può misurare un'energia inferiore a  $\hbar\omega/2$ .

I livelli energetici e gli autostati *non* normalizzati superiori si ottengono applicando al livello  $|0\rangle$  l'operatore di salita. Si dimostra che il fattore di normalizzazione necessario è  $1/\sqrt{n!}$ , ossia i livelli energetici e gli autostati normalizzati dell'hamiltoniana sono

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ |n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( a^\dagger \right)^n |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.27)$$

È utile introdurre l'*operatore numero*  $N := a^\dagger a = \frac{H}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$ . Ovviamente  $N$  ed  $H$  sono compatibili ( $[N, H] = 0$ ) e hanno gli autostati  $|n\rangle$  in comune:

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad (3.28)$$

Naturalmente gli autostati dell'hamiltoniana e dell'operatore numero *non* sono autostati degli operatori di salita e di discesa: in particolare

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (3.29)$$

Si ricorda infine che, essendo  $H$  hermitiano, gli autostati (normalizzati) relativi ad autovalori diversi sono ortogonali:

$$\langle n|m \rangle = \delta_{nm} \quad (3.30)$$

Si ottiene facilmente il legame con la soluzione in rappresentazione di Schrodinger presentata brevemente in appendice G applicando la (G.1) agli operatori di salita e discesa:

$$a|0\rangle = 0 \rightarrow -\frac{i}{\sqrt{2}} \left( \frac{\partial}{\partial x'} + x' \right) \psi_0(x') = 0 \quad (3.31)$$

La cui soluzione è proprio la (G.11). Rappresentando l'operatore si salita si ottiene l'espressione

$$\psi_n(x') = C \frac{i^n}{\sqrt{n^n n!}} \left( x' - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \psi_0(x') \quad (3.32)$$

che confrontata con la (G.4) fornisce l'espressione analitica dei polinomi di Hermite.

Per finire, è utile riportare i valori medi di alcune osservabili negli autostati dell'hamiltoniana:

$$\langle n|x|n \rangle = 0 \quad \langle n|x^2|n \rangle = \frac{\hbar}{n\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.33)$$

$$\langle n|p|n \rangle = 0 \quad \langle n|p^2|n \rangle = m\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.34)$$

$$\langle n|K|n \rangle = \langle n|U|n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.35)$$

E naturalmente

$$\langle n|H|n \rangle = \mathcal{E}_n = \langle n|K|n \rangle + \langle n|U|n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.36)$$

### 3.3 Elettrodinamica classica

È bene richiamare alcuni risultati di elettrodinamica classica. Si parte dalle equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.38)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

La divergenza nulla del campo magnetico (3.38) consente di scriverlo (in un dominio semplicemente connesso) come rotore di un campo vettoriale, detto *potenziale vettore*:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.42)$$

Dalla (3.39) allora

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.43)$$

La quantità tra parentesi, in quanto irrotazionale, si scrive in una regione semplicemente connessa come (l'inverso del) gradiente di un campo scalare, detto *potenziale scalare*

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \quad (3.44)$$

Dalle due equazioni di Maxwell non utilizzate (3.37)-(3.40) emergeranno delle condizioni sui potenziali  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$ ; una volta fissati, il campo elettrico ed il campo magnetico sono definiti in modo unico. Il contrario non è vero: dati  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  esistono infiniti potenziali che li generano. Infatti, essendo il rotore di un gradiente identicamente nullo, il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di una funzione scalare qualsiasi; in altre parole,  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$  definiscono lo stesso campo magnetico. Si verifica subito dalla (3.44) che se  $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$ , anche il campo elettrico resta invariato; in altre parole il campo elettromagnetico è invariante per la *trasformazione di gauge*

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (3.45)$$

Le condizioni mancanti sui potenziali sono, grazie a qualche identità vettoriale

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \varphi = 0 \quad (3.46)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.47)$$

Si userà nel seguito la notazione

$$\square \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \quad (3.48)$$

Le quattro equazioni di Maxwell sono allora riassunte nelle due equazioni per i potenziali appena scritte. Per semplificarle si usa scegliere, a seconda della situazione di interesse, una diversa *gauge*. In ambito relativistico è usuale la *gauge di Lorentz*:<sup>8</sup>

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.49)$$

Altre possibilità sono la *gauge temporale*  $\varphi = 0$  o la *gauge di Coulomb*  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ; si dimostra che nel vuoto queste condizioni possono essere soddisfatte *contemporaneamente*, dando luogo alla cosiddetta *gauge di radiazione*:

$$\varphi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.50)$$

Con questa scelta l'equazione (3.46) è soddisfatta identicamente e l'equazione (3.47) si riduce all'equazione omogenea delle onde per il potenziale vettore:

$$\square \mathbf{A} \equiv -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.51)$$

**Un esempio preliminare** È utile prendere confidenza con l'equazione tramite una soluzione costruita "a mano". Si cerca una soluzione del tipo  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(z, t)$ . Si verifica esplicitamente che una possibilità è

$$\begin{cases} A_x(z) = A_0 \cos \vartheta \cos(kz - \omega t) \\ A_y(z) = A_0 \sin \vartheta \cos(kz - \omega t + \varphi) \\ A_z(z) = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

<sup>8</sup>Il formalismo covariante semplifica molto la notazione: si definisce il *quadripotenziale*  $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$ . La trasformazione di gauge è  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$  con  $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ . La gauge di Lorentz si scrive semplicemente  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Si mostra che le equazioni di Maxwell nel vuoto si riducono alle cinque equazioni  $\partial_\mu A^\mu = 0$ ,  $\square A^\mu \equiv \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = 0$ .

dove  $k$  e  $\omega$  sono scelti in modo che

$$\omega \equiv kc \quad (3.53)$$

Ricordando che  $\cos \alpha = \operatorname{Re} e^{i\alpha} = \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$  la soluzione può essere scritta come

$$\begin{cases} A_x(z) = A_0 \cos \vartheta \frac{1}{2} (e^{i(kz-\omega t)} + e^{-i(kz-\omega t)}) \\ A_y(z) = A_0 \sin \vartheta \frac{1}{2} (e^{i(kz-\omega t+\varphi)} + e^{-i(kz-\omega t+\varphi)}) \\ A_z(z) = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Ponendo per brevità  $\alpha = kz - \omega t$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z, t) &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y \\ &= \frac{A_0}{2} [\cos \vartheta (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \mathbf{e}_x + \sin \vartheta (e^{i\alpha} e^{i\varphi} + e^{-i\alpha} e^{-i\varphi}) \mathbf{e}_y] \\ &= \frac{A_0}{2} [(\cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta e^{i\varphi} \mathbf{e}_y) e^{i\alpha} + (\cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta e^{-i\varphi} \mathbf{e}_y) e^{-i\alpha}] \end{aligned} \quad (3.55)$$

Si definisce il *vettore di polarizzazione*  $\mathbf{e}_k$ ; si osservi che è un vettore complesso unitario:<sup>9</sup>

$$\mathbf{e}_k = \cos \vartheta \mathbf{e}_x + \sin \vartheta e^{i\varphi} \mathbf{e}_y \quad (3.56)$$

Allora

$$\mathbf{A} = \frac{A_0}{2} (\mathbf{e}_k e^{i(kz-\omega t)} + \mathbf{e}_k^* e^{-i(kz-\omega t)}) \quad (3.57)$$

**Un po' più in generale** L'equazione delle onde per un generico campo scalare  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  è  $\square\varphi = 0$ ; una soluzione possibile è data da

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = f(\pm(\|\mathbf{k}\|ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})) \quad (3.58)$$

dove  $f$  è una funzione qualsiasi e  $\mathbf{k}$  un vettore qualsiasi. Infatti

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \equiv \varphi_{tt} = \|\mathbf{k}\|^2 c^2 f''(\dots) \\ \varphi_{xx} = k_1^2 f''(\dots) \\ \varphi_{yy} = k_2^2 f''(\dots) \\ \varphi_{zz} = k_3^2 f''(\dots) \end{cases} \Rightarrow \square\varphi = 0 \quad \square \quad (3.59)$$

Dove l'argomento della funzione  $f''$  è sempre  $\pm(\|\mathbf{k}\|ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ . Si definisce lo scalare  $\omega_k$  legato al vettore  $\mathbf{k}$  dalla *relazione di dispersione*:

$$\omega_k \equiv \|\mathbf{k}\|c \quad (3.60)$$

Si osservi che lo spazio delle soluzioni di  $\square\varphi$  è chiuso per combinazioni lineari:

$$\begin{cases} \square\varphi = 0 \\ \square\psi = 0 \end{cases} \Rightarrow \square(c_1(\mathbf{k})\varphi + c_2(\mathbf{k})\psi) = 0 \quad (3.61)$$

Questo suggerisce di scrivere la soluzione generica usando le trasformate di Fourier, dove si sceglie la funzione generica  $f = e^{i(-\omega_k t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ ; data la presenza del  $\pm$  nella (3.58) il ruolo della trasformata e dell'antitrasformata è scelto a piacere.

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega_k t} \hat{\varphi}(\mathbf{k}, 0) d^3\mathbf{k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{\varphi}(\mathbf{k}, t) d^3\mathbf{k} \quad (3.62)$$

<sup>9</sup>La scelta della notazione sarà chiara in seguito.

Si è posto

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \hat{\varphi}(\mathbf{k}, 0)e^{-i\omega_k t} \quad (3.63)$$

Grazie al teorema di inversione di Fourier, inoltre

$$\hat{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad (3.64)$$

Proseguendo su questa strada (ad esempio, [19, pp. 131-144]) si arriva alla soluzione generica per l'equazione delle onde per un campo scalare:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)} \varepsilon(\mathbf{k}) + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)} \varepsilon^*(\mathbf{k}) \right) \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_k} \quad (3.65)$$

dove  $\varepsilon(\mathbf{k})$  è una funzione complessa e  $\varepsilon^*$  indica il complesso coniugato. Visto che il potenziale vettore deve soddisfare l'equazione delle onde componente per componente una soluzione della (3.51) è del tipo

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \left( e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)} \mathbf{a}(\mathbf{k}) + e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)} \mathbf{a}^*(\mathbf{k}) \right) \frac{d^3\mathbf{k}}{2\omega_k} \quad (3.66)$$

Il potenziale vettore è quindi dato dalla sovrapposizione di infinite onde piane trasversali del tipo  $\mathbf{a}(\mathbf{k})e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega_k t)}$  che si propagano nella direzione individuata da  $\mathbf{k}$ .

Abbiamo preferito fornire qualche esempio e dare un'idea del procedimento generale anziché svolgere i conti nel dettaglio. Per arrivare a quantizzare il campo elettromagnetico, infatti, risulta più conveniente esprimere il potenziale vettore in termini di un numero infinito ma discreto di variabili, come illustrato nella prossima sezione.

### 3.4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Abbiamo finalmente tutti gli ingredienti necessari per procedere alla quantizzazione del campo elettromagnetico. La via più semplice è la seguente:

1. Nel vuoto si può usare la gauge di radiazione: si parte quindi dall'equazione delle onde per il potenziale vettore;
2. si mostra che ciascun modo del campo, corrispondente a una soluzione particolare dell'equazione delle onde per il potenziale vettore, è equivalente ad un oscillatore armonico unidimensionale:
  - (a) si separa il potenziale vettore in una parte spaziale e una temporale per risolvere l'equazione delle onde;
  - (b) si scrivono il campo elettrico ed il campo magnetico corrispondenti;
  - (c) si scrive l'energia corrispondente;
  - (d) si introducono delle variabili dipendenti dalla parte temporale del potenziale vettore che si verificano essere canonicamente coniugate;
  - (e) l'energia del modo di oscillazione espressa in termini di queste variabili è quella di un oscillatore armonico unidimensionale!
3. Si quantizza il modo di oscillazione procedendo formalmente come per la quantizzazione dell'oscillatore armonico, ossia introducendo degli opportuni operatori di salita e di discesa:

- (a) l'energia del modo diventa un operatore hermitiano;
- (b) il potenziale vettore ed i campi diventano degli operatori hermitiani;
- (c) un modo di oscillazione ammette solo livelli discreti di energia;
- (d) si studia il valore medio dei campi negli autostati dell'hamiltoniana;
- (e)  $n$  assume significato fisico: rappresenta il numero di fotoni, e quindi l'energia, di un autostato dell'hamiltoniana.

4. Si generalizza quanto fatto per un singolo modo al campo.

### 3.4.1 Proprietà di un modo di oscillazione

Come già discusso nel vuoto si può usare la gauge di radiazione: si tratta di risolvere

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \mathbf{A} = 0 \quad (3.51)$$

Una volta determinato il potenziale vettore i campi sono dati da

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.67)$$

Una soluzione reale particolare o *monocromatica* si ottiene separando il potenziale vettore in una parte spaziale (*mode function*) e una temporale, più il complesso coniugato.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_0(\mathbf{x})\alpha(t) + \mathbf{A}_0^*(\mathbf{x})\alpha^*(t) \quad (3.68)$$

Concentriamoci sul primo addendo; per il complesso coniugato valgono considerazioni del tutto analoghe. L'equazione delle onde si riscrive

$$-\frac{1}{c^2} \mathbf{A}_0(\mathbf{x})\ddot{\alpha}(t) + \alpha(t)\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.69)$$

L'equazione deve essere risolta componente per componente:

$$\frac{A_0^i}{c^2} \ddot{\alpha} = \alpha \nabla^2 A_0^i \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}(t) = \frac{\nabla^2 A_0^i}{A_0^i}(\mathbf{x}) \equiv -k^2 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (3.70)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che il membro a sinistra dell'uguale dipende solo dal tempo e quello a destra solo dalla posizione: le due espressioni devono quindi essere identicamente uguali ad una costante, convenzionalmente chiamata  $-k^2$ . L'espressione si scinde quindi in due equazioni da soddisfare contemporaneamente:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = -k^2 \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) \quad (3.71)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -k^2 c^2 \alpha(t) \equiv -\omega_k^2 \alpha(t) \quad (3.72)$$

La (3.71) è detta *equazione di Helmholtz* ed ammette soluzioni proporzionali a  $e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , dove  $\mathbf{k}$  è un vettore tale che  $\|\mathbf{k}\| = k$ . La soluzione dell'equazione temporale è del tipo  $\alpha(t) = \alpha(0)e^{\mp i\omega_k t}$ .

**Due stati di polarizzazione** È necessario tener conto del fatto che  $\mathbf{A}_0(\mathbf{x})$  è un vettore. Naturalmente l'intensità del campo nel vuoto deve essere indipendente dalla posizione; vedremo a breve (equazione (3.110)) che "l'intensità" del campo elettrico è proporzionale a  $|\mathbf{A}_0(\mathbf{x})|^2$ .<sup>10</sup> È quindi necessario che questa quantità sia indipendente dalla posizione: una mode function che soddisfi questa condizione e l'equazione di Helmholtz è  $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ . Il *vettore di polarizzazione*  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  è in generale un vettore complesso che dipende da  $\mathbf{k}$  (ma non dalla posizione!); si riveda l'esempio particolare (3.57), in cui non dipende da  $\mathbf{k}$ . Da qui in poi non è restrittivo assumere  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  reale e unitario. La gauge di Coulomb è strettamente collegata a questo vettore: la divergenza non ha effetto sulla componente temporale, quindi la gauge è  $\nabla \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0$ . Sia ad esempio  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} = (a, b, c)$ : allora  $\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(a, b, c)$  e

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_0 = ie^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}(k_1a + k_2b + k_3c) = ie^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.73)$$

Questa è semplicemente l'equazione del piano ortogonale a  $\mathbf{k}$ : per ogni *vettore d'onda*  $\mathbf{k}$  fissato esistono *due* vettori di polarizzazione linearmente indipendenti che soddisfino l'equazione, ossia appartengano al piano, ossia siano ortogonali a  $\mathbf{k}$ . Indicheremo questi vettori con  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}1}, \mathbf{e}_{\mathbf{k}2}$ , o in generale  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $\lambda = 1, 2$ . Naturalmente questi vettori possono essere scelti ortogonali tra loro e soddisfano quindi queste relazioni:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, 2 \quad (3.74)$$

*Osservazione 3.1.* Il lettore con una buona memoria ricorderà di un 2 aggiunto sportivamente nella formula (2.42): l'osservazione 2.1 e il riferimento alla divergenza adesso si comprendono meglio.

Per ogni scelta del vettore d'onda la mode function di un singolo modo è quindi del tipo

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.75)$$

dove si è ommesso il pedice  $_0$  precedentemente utilizzato, non essendoci più il rischio di fare confusione. Ricordando le equazioni (3.68), (3.71), (3.72) e che il vettore di polarizzazione è assunto essere reale il potenziale vettore di un singolo modo si può scrivere come

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) &= \left( \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= \left( \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(0) e^{i(\omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \end{aligned} \quad (3.76)$$

**Normalizzazione e condizione al contorno** Si osservi che aver scelto i vettori di polarizzazione unitari e indipendenti dalla posizione implica la normalizzazione della mode function:<sup>11</sup>

$$\frac{1}{V} \int_V |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = 1 \quad (3.77)$$

L'integrazione viene fatta sul volume di spazio nel quale si assume essere presente il campo, che può essere tutto lo spazio o un volume finito come una cavità. In questa trattazione adottiamo una condizione di *periodicità*: non c'è alcun confine materiale (spazio libero), ma si richiede che

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x} + \mathbf{L}, t) \quad (3.78)$$

<sup>10</sup>Le virgolette sono dovute: in effetti mostreremo che il valore di aspettazione dell'operatore campo elettrico al quadrato negli autostati dell'hamiltoniana dipende dal modulo quadro della mode function... Un po' di pazienza.

<sup>11</sup>Ovviamente per un vettore complesso  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^2$ ,  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* \equiv |\mathbf{A}|^2$ .

dove  $\mathbf{L} = L(1, 1, 1) \equiv L\mathbf{1}$ : è come se il campo fosse contenuto in una scatola di lato  $L$ . Questo limita la scelta dei possibili vettori d'onda (proprio come nella sezione 2.3). La richiesta si ripercuote ovviamente solo sulla mode function: dalla (3.76)

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \left( \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \text{c.c.} \right) \\ &= 2\text{Re} \left( \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \\ &= 2 \left( \text{Re} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \text{Re} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \text{Im} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \text{Im} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \\ &= 2 \left( \text{Re} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - \text{Im} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \right)\end{aligned}\tag{3.79}$$

dove c.c. indica il complesso coniugato. La condizione di periodicità si traduce quindi nella richiesta

$$\begin{cases} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \cos(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{L})) \\ \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) = \sin(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{L})) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}\tag{3.80}$$

dove  $\mathbf{n}$  è un vettore le cui componenti sono  $n_{x,y,z} = \pm 1, \pm 2, \dots$ .<sup>12</sup> Questa condizione al contorno di periodicità è una scelta artificiale e utile per i conti. Non ha nessun effetto fisico se ci sceglie  $L$  molto maggiore delle dimensioni fisiche di interesse, e consente di considerare il campo all'interno di uno dei cubi virtuali, ossia considerare la condizione di normalizzazione (3.77) nel volume  $V = L^3$ ; negli altri cubi la situazione è esattamente la stessa. Sempre grazie alla condizione di periodicità possiamo scrivere<sup>13</sup>

$$\int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} = \int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} = 0\tag{3.81}$$

Si noti la differenza con la (3.77), per la quale basta scegliere vettori di polarizzazione unitari e indipendenti dalla posizione (il prodotto per il complesso coniugato abbatte l'esponenziale): in questo caso il termine esponenziale sopravvive, ed è necessaria la periodicità.

Un approccio più sofisticato alla questione consente di non introdurre questa condizione al contorno, quindi di non porre un vincolo sui vettori d'onda accettabili, ma non ce ne occupiamo qui ([vedi 22, p. 331]).

**Trasversalità** La gauge di Coulomb equivale a una condizione di *trasversalità*: un modo di oscillazione è fissato dal vettore d'onda, e il potenziale vettore di un singolo modo è ortogonale a questo vettore d'onda (ha due possibili modi indipendenti di esserlo). Inoltre è costituito da onde piane che si propagano *nella direzione* del vettore d'onda: in definitiva, il potenziale vettore è ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. Questo, a parole, non è altro che l'equazione (3.74). Fissato un vettore d'onda la componente temporale  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{\mp i\omega_{\mathbf{k}} t}$  rappresenta l'*ampiezza* dell'onda. Si ribadisce il significato del pedice  $\mathbf{k}\lambda$ : la soluzione dipende dal vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , e per ogni  $\mathbf{k}$  fissato ci sono due vettori di polarizzazione linearmente indipendenti, denotati da  $\lambda = 1, 2$  che soddisfano la gauge di Coulomb, che risulta essere una condizione di trasversalità.

**Energia** I campi generati dal potenziale vettore trovato si ottengono dalle (3.67):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{c} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \text{c.c.}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) \nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) + \text{c.c.}\end{aligned}\tag{3.82}$$

<sup>12</sup>Infatti  $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{L}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \cdot L(1, 1, 1) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + 2\pi(n_x + n_y + n_z)$ .

<sup>13</sup> $\int_0^{2\pi} e^{\pm 2ikx} dx = 0$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  nel caso unidimensionale, per essere chiari.

L'energia di questo modo di oscillazione è proporzionale a  $\int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d^3(\mathbf{x})$ : sviluppando il quadrato si ottengono sei termini del tipo

$$\frac{1}{c^2} \left[ \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})^2 \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t)^2 + \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})^2 \dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)^2 + 2|\dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 \right] + \\ + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)^2 [\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})]^2 + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)^2 [\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})]^2 + 2|\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 |\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 \quad (3.83)$$

Le ampiezze escono dall'integrale e restano pertanto da valutare gli integrali contenenti la mode function e il suo rotore. Si considerino le tre coppie costituite dai primi, dai secondi e dai terzi membri delle due righe:

$$\int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} \qquad \int_V [\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})]^2 d^3\mathbf{x} \quad (3.84)$$

$$\int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} \qquad \int_V [\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})]^2 d^3\mathbf{x} \quad (3.85)$$

$$\int_V |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} \qquad \int_V |\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} \quad (3.86)$$

Sfruttando qualche identità vettoriale si ottiene<sup>14</sup> (si omette il pedice  $\mathbf{k}\lambda$  per semplicità, ma si parla sempre della mode function)

$$[\nabla \times \mathbf{A}]^2 = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] \\ = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}) + k^2 \mathbf{A}^2 \quad (3.87)$$

dove la divergenza di  $\mathbf{A}$  è nulla per la gauge di Coulomb e l'ultimo passaggio è giustificato dall'equazione di Helmholtz (3.71). Si usa quindi il teorema della divergenza sul primo termine della somma (stiamo integrando su un volume!):

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}) d^3\mathbf{x} = \oint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \quad (3.88)$$

Grazie alla condizione di periodicità (3.78) l'integrale di superficie (il flusso) è nullo, e in definitiva

$$\int_V [\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})]^2 d^3\mathbf{x} = k^2 \int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})^2 d^3\mathbf{x} \quad (3.89)$$

Relazioni analoghe valgono per gli integrali (3.85), (3.86). È utile ridefinire la mode function in modo che contenga il volume:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \longrightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (3.90)$$

$$\frac{1}{V} \int_V |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = 1 \longrightarrow \int_V |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = 1 \quad (3.91)$$

Da questa normalizzazione e ricordando la (3.81) l'(orribile) espressione (3.83) integrata sul volume si riduce a

$$\frac{1}{c^2} \left[ 0 + 0 + 2|\dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 \right] + 0 + 0 + 2|\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 k^2 \quad (3.92)$$

Si ricordi che  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$ , per cui  $\dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t) = -i\omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)$  e  $|\dot{\alpha}_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 = \omega_{\mathbf{k}}^2 |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2$ . La precedente diventa allora

$$2 \frac{\omega_{\mathbf{k}}^2}{c^2} |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 + 2k^2 |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 = 4k^2 |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 \quad (3.93)$$

<sup>14</sup>Si usano le identità vettoriali  $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$  e  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ .

Possiamo finalmente scrivere l'energia del campo associata al modo di oscillazione  $\mathbf{k}\lambda$ :  $H = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 d^3\mathbf{x}$ , quindi

$$H_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{k^2}{2\pi} |\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 \quad (3.94)$$

### 3.4.2 Un modo è un oscillatore!

Finalmente dimostriamo un fatto di cui si è parlato più volte. L'energia di un modo di oscillazione dipende dal modulo del vettore d'onda e dal modulo quadro dell'ampiezza di oscillazione. In generale  $\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)$  è complessa; si definiscono allora due quantità *reali*<sup>15</sup>  $q_{\mathbf{k}\lambda}, p_{\mathbf{k}\lambda}$ , con costanti di normalizzazione scelte *ad hoc*:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}\lambda}(t) &:= \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} (\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)) & \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2} \left( \frac{1}{k} p_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{c}{i} q_{\mathbf{k}\lambda} \right) \\ p_{\mathbf{k}\lambda}(t) &:= \frac{k}{\sqrt{4\pi}} (\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)) & \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) &= \frac{\sqrt{4\pi}}{2} \left( \frac{1}{k} p_{\mathbf{k}\lambda} - \frac{c}{i} q_{\mathbf{k}\lambda} \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

Sostituendo nella (3.94) possiamo esprimere l'energia del modo in funzione di queste nuove variabili:

$$H_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{1}{2} (p_{\mathbf{k}\lambda}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}\lambda}^2) \quad (3.96)$$

*Formalmente, abbiamo ottenuto l'hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale di massa unitaria.* Per verificare che l'equivalenza oltre che formale sia anche concettuale dobbiamo verificare che  $q_{\mathbf{k}\lambda}$  e  $p_{\mathbf{k}\lambda}$  abbiano il ruolo che ci si aspetta, ossia che soddisfino le equazioni di Hamilton nei panni di coordinata e momento canonicamente coniugati. La verifica è immediata, ricordando che  $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha$  (si omettono i pedici per brevità):

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} (-i\omega)(\alpha + \alpha^*) = p \stackrel{?}{=} \frac{\partial H}{\partial p} = p \quad \square \\ \dot{p} &= \frac{k}{\sqrt{4\pi}} (-i\omega)(\alpha - \alpha^*) = -\omega^2 q \stackrel{?}{=} -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega^2 q \quad \square \end{aligned} \quad (3.97)$$

**Ricapitolando** Siamo partiti dalle equazioni di Maxwell nel vuoto. Le quattro equazioni possono essere riscritte come due equazioni per un campo scalare (potenziale scalare) e un campo vettoriale (potenziale vettore), definiti a meno di una trasformazione *di gauge*. Nel vuoto è possibile scegliere, senza perdere generalità, il campo scalare nullo e il campo vettoriale a divergenza nulla (gauge di radiazione). Le equazioni di Maxwell si riducono allora alla singola equazione delle onde per il potenziale vettore: è un'equazione alle derivate parziali di secondo ordine omogenea. Si procede per separazione di variabili, scrivendo una soluzione particolare, o *modo*, come prodotto di una parte spaziale vettoriale (*mode function*) e una temporale scalare, più il complesso coniugato. La soluzione temporale è determinata (ovviamente a meno di costanti moltiplicative) dalla scelta di un vettore  $\mathbf{k}$ , detto *vettore d'onda*, mentre per la parte spaziale esistono *due* direzioni di *polarizzazione* ortogonali tra loro possibili per ogni vettore d'onda fissato. Il modo si scrive

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) = \left( \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(0) e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(0) e^{i(\omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.76)$$

La gauge di radiazione (in particolare quella di Coulomb) si traduce in una condizione di *trasversalità*:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda} = 0$ . La normalizzazione del modulo quadro di  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t)$  nel volume dove

<sup>15</sup>  $\alpha - \alpha^*$  è immaginario e  $\alpha + \alpha^*$  è reale.

vive il campo e un'opportuna condizione di periodicità consentono di scrivere l'energia associata al modo in termini del modulo del vettore d'onda e del modulo quadro dell'ampiezza di oscillazione: una scelta furba di variabili mostra che questa scrittura è equivalente a quella di un oscillatore armonico unidimensionale. Non si tratta solo di una coincidenza formale: le variabili introdotte risultano essere una coordinata ed il suo momento coniugato, perchè soddisfano le equazioni di Hamilton per quella che, adesso, si può a ragione chiamare *hamiltoniana del modo di oscillazione*.

### 3.4.3 Quantizzazione del modo

A questo punto, la descrizione quantistica del modo di oscillazione è semplicemente la descrizione quantistica dell'oscillatore armonico equivalente (di massa unitaria), che abbiamo già fatto. In particolare, l'energia del modo è quantizzata ed esiste un'energia di punto zero. I risultati matematici sono quelli già noti: si tratterà soprattutto di cogliere il significato fisico delle grandezze via via introdotte.

Si introducono gli operatori di salita e di discesa  $a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger, a_{\mathbf{k}\lambda}$  per il modo di oscillazione con vettore d'onda  $\mathbf{k}$  e polarizzazione  $\lambda$  tramite le (3.20). Si riportano per comodità le espressioni classiche del campo (3.95) e quelle quantistiche dell'oscillatore:

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= \frac{i}{c\sqrt{4\pi}}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)) & q &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a - a^\dagger) \\ p_{\mathbf{k}\lambda}(t) &= \frac{k}{\sqrt{4\pi}}(\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t)) & p &= \sqrt{\frac{\omega\hbar}{2}}(a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (3.98)$$

Dal confronto di queste espressioni risulta che, nel definire i nuovi operatori di salita e di discesa, la procedura di quantizzazione è equivalente alla sostituzione della variabile classica  $\frac{\alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t)}{c\sqrt{4\pi}}$  con l'operatore  $\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}a_{\mathbf{k}\lambda}$  (lo stesso risultato si ottiene confrontando le espressioni dei momenti), ossia

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}\lambda}(t) &\longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}}a_{\mathbf{k}\lambda}(t) \\ \alpha_{\mathbf{k}\lambda}^*(t) &\longrightarrow \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}}a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) \end{aligned} \quad (3.99)$$

A meno di costanti di normalizzazione, la quantizzazione consiste nel sostituire le ampiezze classiche con gli operatori quantistici di salita e di discesa. La componente spaziale, ossia la mode function, non subisce cambiamenti. L'operatore hermitiano<sup>16</sup> potenziale vettore per un singolo modo si ottiene dalle note (3.68) e (3.90) grazie a questa sostituzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}} \left( \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})a_{\mathbf{k}\lambda}(t) + \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}} \left( a_{\mathbf{k}\lambda}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \end{aligned} \quad (3.100)$$

L'operatore hamiltoniano del modo assume la solita forma (3.16):

$$H_{\mathbf{k}\lambda} = \hbar\omega_k \left( a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.101)$$

<sup>16</sup>si veda poco sotto per una verifica esplicita di ermeticità.

Gli autostati dell'hamiltoniana del modo  $\mathbf{k}\lambda$  si indicano con  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$  e l'equazione agli autovalori è

$$H_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = \mathcal{E}_{n_{\mathbf{k}\lambda}} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \quad (3.102)$$

Il modo di oscillazione  $\mathbf{k}\lambda$  può quindi assumere solo valori discreti di energia, e gli autostati normalizzati si ottengono applicando l'operatore di creazione allo stato fondamentale, come nella (3.27):

$$\begin{aligned} \langle H_{\mathbf{k}\lambda} \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}} &= \mathcal{E}_{n_{\mathbf{k}\lambda}} = \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_k \\ |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}\lambda}!}} \left( a^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}\lambda}} |0\rangle, \quad n_{\mathbf{k}\lambda} = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.103)$$

Si ricorda inoltre la definizione dell'operatore numero:

$$N_{\mathbf{k}\lambda} = a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{H_{\mathbf{k}\lambda}}{\hbar\omega_k} - \frac{1}{2} \quad (3.104)$$

$$N_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle = n_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \quad (3.105)$$

**Fotocreazione e fotoannichilazione** La (3.103) ha un significato profondo. L'energia di un fotone di frequenza  $\omega_k$  è  $\hbar\omega_k$ , e l'energia di un modo definito da  $\mathbf{k}\lambda$  può essere solo un multiplo intero di questa energia, più  $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ . La costante di proporzionalità, ossia l'autovalore  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  relativo all'autostato  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$  dell'operatore numero, deve rappresentare allora *il numero di fotoni nello stato  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$* . O meglio:  $\mathbf{k}$  fissa il *modo* di oscillazione, e un autostato dell'hamiltoniana è il numero di fotoni. Gli operatori di salita e di discesa mandano autostati in altri autostati *con un fotone in più o un fotone in meno*; sono per questo detti operatori di *fotocreazione e fotoannichilazione*. Torneremo in seguito sulla questione.

**Energia di punto zero** Lo stato di vuoto del modo, ossia lo stato di minima energia appartenente al nucleo dell'operatore di discesa, è  $|n_{\mathbf{k}\lambda} = 0\rangle$ : il numero di fotoni in questo stato è nullo, ma non la sua energia. Come preannunciato alla fine della sezione 2.7 ciascun modo di oscillazione del campo elettromagnetico ha un'energia di punto zero pari a  $\frac{1}{2}\hbar\omega_k$ .

**Operatori elettrico e magnetico** Gli operatori hermitiani campo elettrico e campo magnetico si ottengono da (3.82): ( $\dot{\alpha} = -i\omega\alpha$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) &= \frac{i\omega}{c} C \left( \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) a_{\mathbf{k}\lambda}(t) - \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x}) a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) \right) \\ \mathbf{B}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}, t) &= C \left( a_{\mathbf{k}\lambda}(t) (\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})) + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) (\nabla \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})) \right) \end{aligned} \quad (3.106)$$

dove si  $C = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}}$ . Gli autostati dell'hamiltoniana non sono autostati degli operatori elettrico e magnetico. In un autostato dell'hamiltoniana, quindi, i campi non hanno un valore definito, ma *fluttuano* (in termini probabilistici) intorno ad un valore di aspettazione. La probabilità di transizione da un autostato normalizzato dell'hamiltoniana ad un autostato normalizzato del campo è data, come al solito, dal modulo quadro dell'ampiezza di transizione. *Il valore medio dei campi in un qualsiasi autostato dell'hamiltoniana è nullo*:

$$\begin{aligned} \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | \mathbf{E}_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle &= [\dots] \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle - [\dots] \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = 0 \\ \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | \mathbf{B}_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle &= [\dots] \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle + [\dots] \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

Il contenuto delle parentesi (costanti e mode function) non ha nessuna importanza: gli operatori di salita e di discesa, agendo sugli autostati dell'hamiltoniana, restituiscono per definizione un

altro autostato dell'hamiltoniana, e autostati relativi ad autovalori distinti sono ortogonali (si ricordi la (3.29)).

Quindi, in ogni autostato  $|n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle$  dell'hamiltoniana, i campi non hanno un valore definito ma fluttuano con intensità media *nulla* e energia media ben definita (per definizione!) pari a  $(n_{\mathbf{k}\lambda} + 1/2) \hbar\omega_k$ .

Il prossimo passo, va da sé, è quello di quantificare queste fluttuazioni, ossia valutare l'indeterminazione (o il suo quadrato) degli operatori-campo negli autostati dell'hamiltoniana (si veda la (3.6)). Per quanto appena visto,

$$\Delta E_{n_{\mathbf{k}\lambda}}^2 = \langle E_{\mathbf{k}\lambda}^2 \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}}, \quad \Delta B_{n_{\mathbf{k}\lambda}}^2 = \langle B_{\mathbf{k}\lambda}^2 \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}} \quad (3.108)$$

Nel caso del campo elettrico (gli operatori di creazione e distruzione *non* commutano!)

$$\langle E_{\mathbf{k}\lambda}^2 \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}} = -2\pi\hbar\omega_k \left( \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})^2 \underbrace{\langle (a_{\mathbf{k}\lambda})^2 \rangle}_0 + \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}^*(\mathbf{x})^2 \underbrace{\langle (a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger)^2 \rangle}_0 - |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 \underbrace{\langle a_{\mathbf{k}\lambda} a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} \rangle}_{2n_{\mathbf{k}\lambda}+1} \right) \quad (3.109)$$

dove, essendo la notazione già abbastanza pesante, si sono omesse le dipendenze esplicite dal tempo e i pedici  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  nei valori medi. I valori medi degli operatori seguono da facili considerazioni; il risultato che si ottiene è molto interessante:

$$\begin{aligned} \Delta E_{n_{\mathbf{k}\lambda}}^2 = \langle E_{\mathbf{k}\lambda}^2 \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}} &= 4\pi\hbar\omega_k |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 n_{\mathbf{k}\lambda} + 2\pi\hbar\omega_k |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 \\ &= 4\pi\hbar\omega_k \underbrace{|\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2}_{\text{Non dipende dalla posizione!}} n_{\mathbf{k}\lambda} + \langle E_{\mathbf{k}\lambda}^2 \rangle_{n_{\mathbf{k}\lambda}=0} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Lo stato di vuoto  $|n_{\mathbf{k}\lambda} = 0\rangle$  è uno stato di minima indeterminazione per il campo elettrico: in tutti gli altri autostati dell'hamiltoniana la fluttuazione del campo è pari a quella dello stato di vuoto più un termine che dipende da  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  e, come promesso nel paragrafo 3.4.1, dal modulo quadro della mode function. Abbiamo già provveduto (nel medesimo paragrafo), grazie ad una scelta opportuna dei vettori di polarizzazione, a fare sì che questa quantità *non dipenda dalla posizione*. Il procedimento è analogo nel caso del vampo magnetico.

**Fluttuazioni nello stato di vuoto** Lo stato di vuoto  $|n_{\mathbf{k}\lambda} = 0\rangle$  è quindi uno stato di minima indeterminazione per gli operatori campo elettrico e campo magnetico, che *fluttuano* (statisticamente!) con valore medio nullo. L'energia dello stato di vuoto è ben determinata e vale  $1/2\hbar\omega_k$ .

**Ermeticità** Per concludere la sezione osserviamo dalle (3.100), (3.106) che gli operatori  $E_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $B_{\mathbf{k}\lambda}$ ,  $A_{\mathbf{k}\lambda}$  sono hermitiani: nel caso degli ultimi due, indicando genericamente con  $\mathbf{f}$  la funzione complessa che accompagna gli operatori (la mode function o il suo rotore e le costanti moltiplicative), con  $\mathbf{O}$  l'operatore ed omettendo i pedici

$$\mathbf{O} = \mathbf{f}a + \mathbf{f}^*a^\dagger \Rightarrow \mathbf{O}^\dagger = \mathbf{f}^*a^\dagger + \mathbf{f}a = \mathbf{O} \quad \square \quad (3.111)$$

Nel caso del campo elettrico invece

$$\mathbf{E} = i(\mathbf{f}a - \mathbf{f}^*a^\dagger) \Rightarrow \mathbf{E}^\dagger = -i(\mathbf{f}^*a^\dagger - \mathbf{f}a) \quad \square \quad (3.112)$$

### 3.5 Generalizzazione a molti modi

Bene, questo è tutto per quanto riguarda *una soluzione particolare* dell'equazione delle onde per il potenziale vettore, ossia un *modo*; si tratta adesso di trovare una soluzione generale. Fin'ora siamo stati un po' pedanti con i pedici per rendere agevole questo passaggio: abbiamo già visto che un modo è determinato dal vettore d'onda e dalla polarizzazione; a causa della condizione di periodicità i vettori d'onda ammissibili sono dati dalla (3.80), ma questo vincolo non è restrittivo fisicamente assumendo  $L$  molto grande. Le proprietà fondamentali della mode function  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})$ , ossia della componente spaziale del vettore d'onda (sia nel caso classico che in quello quantistico), sono

1. soddisfa l'equazione di Helmholtz  $\nabla^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = -k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})$ ;
2. soddisfa la gauge di Coulomb, equivalente alla condizione di trasversalità  $\nabla \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) = 0$ , da cui i *due* possibili stati di polarizzazione;
3. soddisfa la "box-normalization"  $\int_V |\mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x})|^2 d^3\mathbf{x} = 1$

*Quanti modi diversi esistono?* Naturalmente, infiniti (in generale il vettore d'onda è scelto a piacere; nel nostro caso c'è il solito vincolo di periodicità). Come già osservato nell'equazione (3.61), *combinazioni lineare di soluzioni dell'equazione delle onde sono ancora soluzioni*, grazie alla linearità delle equazioni di Maxwell. Il potenziale vettore *totale* è dato allora semplicemente dalla somma dei potenziali vettori di tutti i modi di oscillazione, quindi dalla somma su tutti i vettori d'onda ammessi e, per ciascuno, su  $\lambda = 1, 2$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k V}} \left( a_{\mathbf{k}\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right) \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.113)$$

I vettori di polarizzazione di modi diversi sono ortogonali tra loro, ossia la (3.74) si generalizza a

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.114)$$

In questo modo vale la condizione di ortogonalità che generalizza la (3.91):

$$\int_V \mathbf{A}_{\mathbf{k}\lambda}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{\mathbf{k}'\lambda'}^*(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{e}_{\mathbf{k}\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}'\lambda'} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (3.115)$$

Grazie a questa condizione l'energia totale risulta essere, con delle considerazioni analoghe a quelle fatte per un singolo modo

$$H = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \hbar\omega_k \left( a_{\mathbf{k}\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.116)$$

Questa è l'hamiltoniana di infiniti oscillatori armonici *disaccoppiati*: modi diversi di oscillazione sono dunque sono indipendenti. L'operatore hamiltoniano totale agisce sugli stati che vivono nel prodotto tensoriale degli spazi di Hilbert  $\mathcal{H}_{\mathbf{k}\lambda}$  in cui vive ciascuno stato: in altre parole, un generico autostato dell'operatore  $H$  è (si veda la sezione 3.1.1)

$$|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle := |n_{\mathbf{k}_1\lambda_1}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}_2\lambda_2}\rangle \otimes \cdots = \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda}\rangle \in \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{H}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.117)$$

L'energia *totale* del campo elettromagnetico è data dalla somma delle energie di ogni modo, ognuna delle quali è data dall'energia dei fotoni del modo più l'energia di punto zero. L'equazione agli autovalori è

$$H |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = \mathcal{E}_{\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}} |\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle \quad (3.118)$$

L'autovalore relativo all'autostato  $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$ , ossia "il livello energetico totale del campo", è naturalmente il valore medio dell'operatore  $H$ <sup>17</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}} &= \langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | H | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \\ &= \sum_{\mathbf{k}\lambda} \langle n_{\mathbf{k}\lambda} | H_{\mathbf{k}\lambda} | n_{\mathbf{k}\lambda} \rangle = \sum_{\mathbf{k}\lambda} \left( n_{\mathbf{k}\lambda} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (3.119)$$

Il primo termine della somma è l'energia dovuta al numero totale di fotoni  $\sum_{\mathbf{k}\lambda} n_{\mathbf{k}\lambda}$  dello stato  $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle$ , valore di aspettazione dell'operatore numero totale. Se non ovvio è quantomeno *ragionevole* che la serie converga: si sta sommando infatti su tutto lo spettro elettromagnetico, e per la convergenza è necessario che  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  sia diverso da zero solo un numero finito di volte. In altre parole (un po' a spanne), è necessario che ci siano pochi fotoni da una certa frequenza in poi. Il secondo termine è peculiare: non c'è alcuna speranza che possa convergere.

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}} = \infty \quad (3.120)$$

### 3.6 Stato di vuoto

Questo infinito che emerge è dovuto alla somma delle energie di punto zero di tutti i modi di oscillazione, ed è l'energia totale nel caso in cui tutti i modi di oscillazione si trovino nel proprio livello fondamentale. Questo significa che, per ogni frequenza, *non c'è nessun fotone*. Questo stato è, a ragione, detto *stato di vuoto*: *non c'è nessun fotone*, ma l'energia del campo sembra infinita!

$$|\text{vac}\rangle := \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} |n_{\mathbf{k}\lambda} = 0\rangle \in \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{H}_{\mathbf{k}\lambda} \quad (3.121)$$

Vogliamo ricondurci a una quantità nota dai capitoli precedenti, la densità di energia. La (3.120) esprime l'energia totale del "campo in assenza del campo", ossia del vuoto, nel volume  $V$ . La

<sup>17</sup> L'operatore hamiltoniano totale va scritto come somma di operatori, ognuno dei quali agisce sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \bigotimes_{\mathbf{k}\lambda} \mathcal{H}_{\mathbf{k}\lambda}$  del tipo  $H = \sum_{\lambda=1,2} H_{\mathbf{k}_1\lambda} \otimes \text{id}_{\mathbf{k}_2\lambda} \otimes \text{id}_{\mathbf{k}_3\lambda} \otimes \dots + \text{id}_{\mathbf{k}_1\lambda} \otimes H_{\mathbf{k}_2\lambda} \otimes \text{id}_{\mathbf{k}_3\lambda} \otimes \dots + \dots$ . Facciamo un esempio semplice usando l'operatore numero e due modi di oscillazione, indicati brevemente dal pedice  $i = 1, 2$ . Per ciascun modo separatamente gli autostati dell'operatore numero vivono in uno spazio di Hilbert:  $N_i |n_i\rangle = n_i |n_i\rangle \in \mathcal{H}_i$ ,  $i = 1, 2$ . Dai due spazi vettoriali di Hilbert si ottiene lo spazio tensoriale  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Vogliamo scrivere l'operatore  $N$  che agisce su questo spazio e che applicato a  $|n\rangle = (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) \in \mathcal{H}$  restituisca  $(n_1 + n_2) (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) \in \mathcal{H}$ , ossia

$$N (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) = (n_1 + n_2) (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle)$$

Non ha senso scrivere  $N = N_1 + N_2$ : i due operatori numero vivono in spazi diversi. Si introduce l'operatore  $\text{id}_i$ , che vive nello stesso spazio di  $N_i$  e tale che  $\text{id}_i |n_i\rangle = |n_i\rangle$ . Abbiamo definito un operatore  $O$  come un'applicazione lineare da uno spazio di Hilbert in sé stesso,  $O \in \text{End } \mathcal{H}$ , che è a sua volta uno spazio vettoriale (in realtà è qualcosa di più, ossia un'algebra, in quanto tra gli operatori è definita una "moltiplicazione": il "prodotto" di due operatori è ancora un operatore). Ha quindi senso parlare di prodotto tensoriale di operatori! L'operatore che stiamo cercando è  $N = N_1 \otimes \text{id}_2 + \text{id}_1 \otimes N_2$ . Infatti

$$(N_1 \otimes \text{id}_2 + \text{id}_1 \otimes N_2) (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) = n_1 |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle + |n_1\rangle \otimes n_2 |n_2\rangle = (n_1 + n_2) (|n_1\rangle \otimes |n_2\rangle) \quad \square$$

Analogamente, posto  $|\{n_{\mathbf{k}\lambda}\}\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$  per rifarsi alla notazione (3.117),

$$\langle \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} | N | \{n_{\mathbf{k}\lambda}\} \rangle = \sum_{i=1,2} \langle n_i | N_i | n_i \rangle = n_1 + n_2$$

La notazione (3.116), che non presenta difficoltà in senso classico, va usata quindi con cautela in senso operatoriale.

densità di energia del vuoto è allora semplicemente  $\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\mathbf{k}}$ . Si ricorda che per la polarizzazione si somma su  $\lambda = 1, 2$ , mentre la somma su  $\mathbf{k}$  è effettuata su tutti gli infiniti ma discreti valori concessi dalla (3.80). Una somma su questi valori discreti equivale ad un integrale diviso per il fattore di discretizzazione:

$$\sum_{\mathbf{k}\lambda} = \sum_{\lambda=1,2} \frac{\int d^3\mathbf{k}}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{8\pi^3} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3\mathbf{k} \quad (3.122)$$

Questo consente di scrivere la densità di energia del vuoto come

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{V} \frac{V}{8\pi^3} \frac{2}{2} c\hbar \iiint k dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{c\hbar}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int \underbrace{k k^2 \sin \vartheta}_{\text{Jacobiano}} dk d\vartheta d\varphi = \frac{c\hbar}{8\pi^3} 4\pi \int k^3 dk = \\ &= \frac{c\hbar}{2\pi^2} \int \frac{\omega^3}{c^3} \frac{d\omega}{c} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int \omega^3 d\omega \quad (3.123) \end{aligned}$$

La distribuzione spettrale di densità di energia del vuoto è quindi una vecchia conoscenza (equazione (2.98)):

$$u_{0\omega} = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \omega^3 \quad (3.124)$$

### 3.7 Considerazioni sulla quantizzazione del campo

La soluzione dell'equazione delle onde per il potenziale vettore è un problema classico e porta all'equivalenza formale tra un modo di oscillazione del campo, definito da un vettore d'onda e da una polarizzazione, e un oscillatore armonico con la medesima frequenza. Questo suggerisce di quantizzare il modo esattamente come si è quantizzato il campo, e si traduce nel sostituire le ampiezze con gli operatori di salita e di discesa. L'energia di un livello è attribuita al numero di fotoni presenti, più l'energia di vuoto, che emerge dalla *non commutatività degli operatori di salita e di discesa*: dalla (3.16), se fosse  $[a^\dagger, a] = 0$ , avremmo  $H = a^\dagger a$ . Abbiamo definito lo *stato di vuoto* come lo stato in cui tutti gli infiniti modi che compongono il campo sono nel proprio livello di minima energia: ad ogni frequenza non c'è nessun fotone. Nonostante questo, è emerso un infinito, dovuto all'energia di punto zero, ben definita e pari a  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}/2$ , di ciascun modo. Lo stato di vuoto, inoltre, non è un autostato del campo elettrico e del campo magnetico. Nonostante il loro valore medio sia nullo questi *fluttuano*: anche in assenza di fotoni una misura dell'intensità del campo, che ha carattere statistico, può fornire un esito diverso da zero.

L'ampiezza di oscillazione classica è sostituita in ambito quantistico dall'operatore  $a$ ; il numero di fotoni è legato all'operatore numero  $N = a^\dagger a$ . *Questi operatori non commutano*, ossia non sono compatibili:  $[a, a^\dagger a] \neq 0$ .  $a$  e  $N$  non ammettono autostati simultanei,<sup>18</sup> ossia non è possibile conoscere contemporaneamente il numero di fotoni e l'ampiezza del campo.

Sul significato dei livelli energetici di un modo di oscillazione si tenga sempre ben presente l'equivalenza tra il modo - ossia un vettore d'onda e una polarizzazione - e un oscillatore armonico con la medesima frequenza. Questo modo può assumere solo energie pari a  $(n_{\mathbf{k}\lambda} + 1/2)\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ , dove  $n_{\mathbf{k}\lambda} = 0, 1, 2, \dots$  e  $\omega_{\mathbf{k}}$  dipende dal vettore d'onda. Come già detto questa energia viene attribuita a  $n_{\mathbf{k}\lambda}$  fotoni, ciascuno di energia  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}$ , più l'energia di vuoto. *Fissata una frequenza, ossia un*

<sup>18</sup>In generale il fatto che due operatori non commutino *non* implica il fatto che non esista nemmeno un autostato comune, ma solo il fatto che non esista una *base* di autostati comuni. Tuttavia in questo caso, come nel caso di posizione e momento, non esiste nemmeno un autostato in comune.

*modo, il numero di fotoni non si conserva.* Analogamente a come l'oscillatore può essere in questo o quel livello energetico, così il modo di oscillazione; ma "essere in un livello energetico" significa "avere un certo numero di fotoni". Non sono i fotoni a "passare da un livello energetico ad un altro". Quando un modo compie una transizione da un livello energetico ad un altro, *un fotone della giusta frequenza compare o scompare.* Abbiamo cercato di esprimere con parole semplici il seguente concetto: gli stati stazionari (autostati dell'hamiltoniana) sono invarianti per permutazioni di fotoni identici (ossia della stessa frequenza). Ossia: se un modo di oscillazione è nel terzo stato eccitato significa che contiene tre fotoni a frequenza fissata. Se uno di questi fotoni viene *assorbito* il modo compie una transizione al secondo livello energetico; se poi un "altro" fotone alla medesima frequenza viene *emesso*, il modo torna al terzo livello eccitato, esattamente lo stesso di prima. Si dice che i fotoni sono *bosoni*. Qualcuno ricorderà il peculiare modo in cui Planck, nella sezione 2.5.2, ha contato il numero di modi in cui  $P$  "pacchetti energetici" possono distribuirsi tra  $N$  oscillatori. . .

Questo non è che l'inizio, e ci sarebbe molto altro, tra effetti sperimentali del vuoto quantistico e sviluppi teorici. In questa sede ci fermiamo qui: abbiamo chiuso un cerchio, ritrovando alla fine del processo di quantizzazione la stessa espressione per la densità di energia del vuoto ipotizzata in modo rocambolesco alla fine del capitolo 2.

## Capitolo 4

# Uno sguardo ai buchi neri

Il passaggio potrà sembrare drastico: ci sarebbe ancora molta teoria da sviluppare in ambito quantistico, per non parlare della teoria della Relatività Generale *in toto*, prima di approcciarsi in maniera quantitativa e formale ai buchi neri, oggetti nei quali i fenomeni quantistici e di gravitazione sono strettamente intrecciati e che rappresentano quindi un buon banco di prova per le teorie di gravitazione quantistica. Tuttavia, senza nessuna pretesa di rigore o completezza e con spirito qualitativo ed euristico, vogliamo provare a delineare gli aspetti principali di un fenomeno noto come *radiazione di Hawking*, strettamente legato alle fluttuazioni di vuoto quantistico.

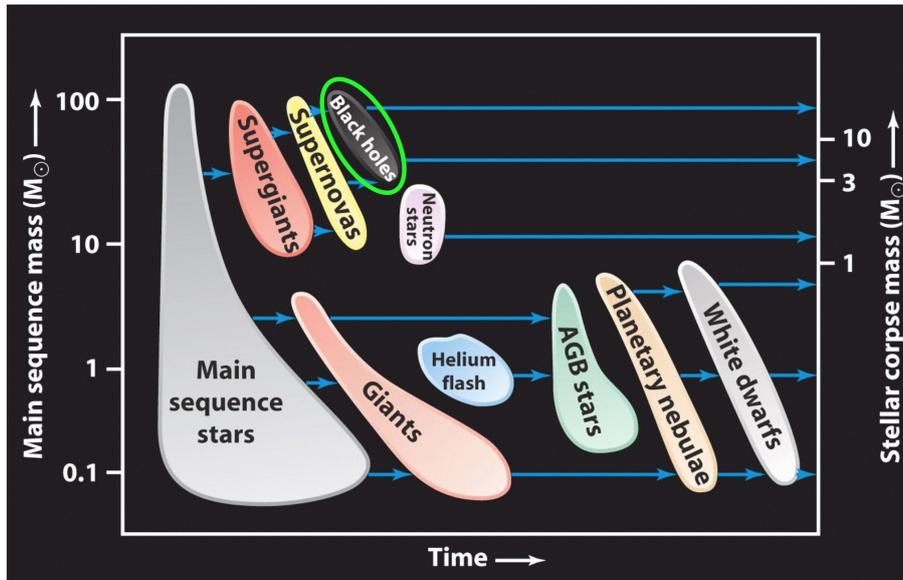
Il titolo del capitolo è naturalmente provocatorio: *osservare* un buco nero è decisamente problematico. Il fatto che, come suggerito dal nome, un buco nero possa *emettere* dovrebbe essere di aiuto; sfortunatamente vedremo che le cose non sono così semplici.

### 4.1 Formazione dei buchi neri

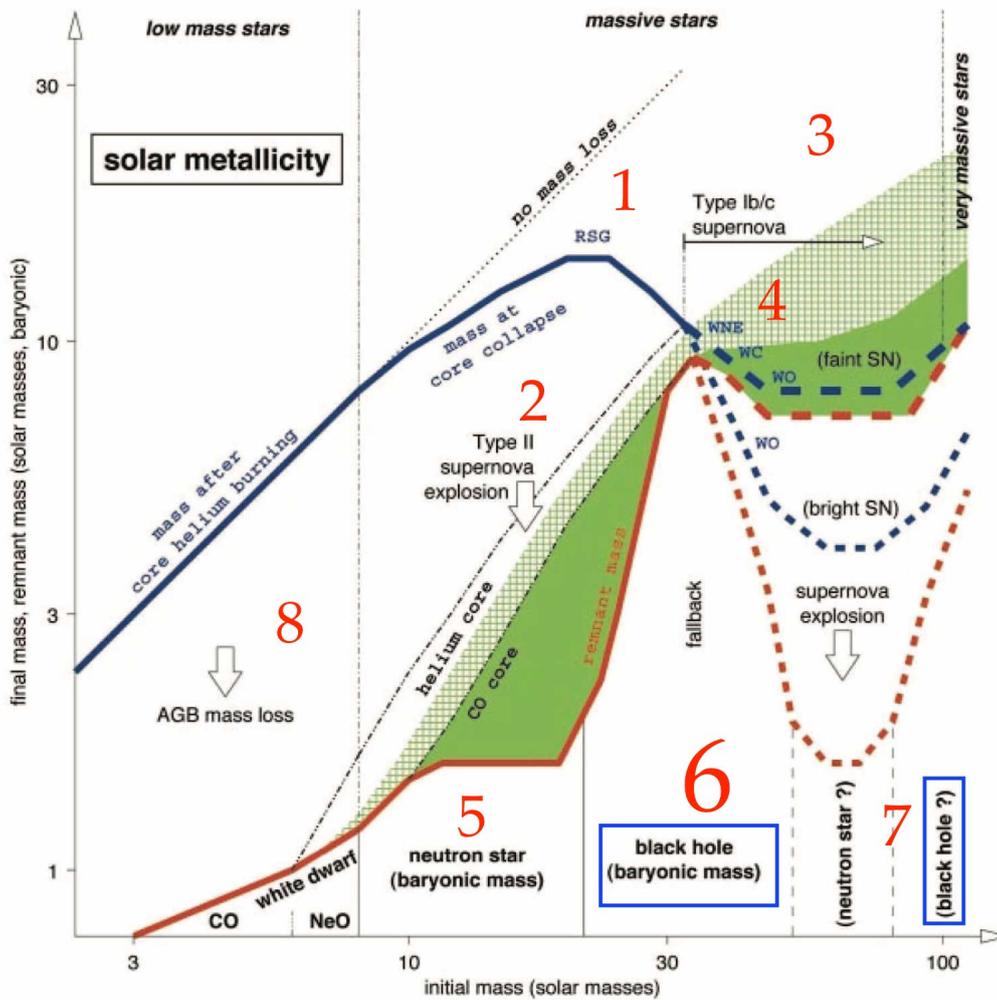
#### 4.1.1 Collasso gravitazionale

Il grafico in figura 4.1 mostra la dipendenza della massa finale prima (linea blu) e dopo (linea rossa) il collasso di una stella in funzione della sua massa iniziale, in unità di masse solari.

1. La linea tratteggiata rappresenta la massa prima del collasso in assenza di perdita di massa, che diventa importante sopra le  $10 - 15 M_{\odot}$ .
2. Nell'intervallo  $15 - 30 M_{\odot}$ , nonostante le forti perdite di massa, l'involucro ricco di idrogeno non è rimosso completamente: il collasso del nucleo e il successivo *core bounce* portano allo scenario di supernova *II*. Il progenitore è usualmente una supergigante rossa.
3. Intorno alle  $30 M_{\odot}$  l'involucro ricco di idrogeno è completamente espulso nelle fasi finali, portando alla formazione di supernovae del tipo  $I_{b,c}$ .
4. Al crescere della massa possono venire esposti l'involucro di elio e quello di carbonio-ossigeno (stelle di Wolf-Rayet).
5. Fino a circa  $20 M_{\odot}$  il resto di supernova è una stella di neutroni di  $1 - 2 M_{\odot}$ .
- 6. Al crescere della massa l'esplosione successiva al collasso del nucleo è *più debole* e il materiale può ricollassare sulla stella di neutroni: questo è un possibile scenario di formazione per un buco nero.**
7. Il processo non è lineare: a masse ancora superiori entrambi gli scenari (stella di neutroni e buco nero) sono possibili. In particolare l'autogravità della stella potrebbe essere così elevata da prevenire l'esplosione di supernova e passare direttamente alla fase di buco nero.



(a) *Evoluzione stellare*



(b) *Massa finale su massa iniziale. (Figure from Woosley et al. 2002).*

Figura 4.1: Sopra, schematica evoluzione stellare. In ordinata a sinistra la massa durante la sequenza principale, in ordinata a destra la massa alla fine del processo evolutivo. Sotto, grafico dettagliato delle ultime fasi di evoluzione: massa prima (in blu) e dopo (in rosso) il collasso in funzione della massa iniziale e tipo di oggetto finale.

8. Sotto le  $8 M_{\odot}$  il bruciamento nucleare si arresta una volta esaurito l'elio, e la stella evolve allo stato di *carbon-oxygen white dwarf*, col nucleo sostenuto dalla pressione di degenerazione. Se la massa supera un valore critico (come questo possa accadere è motivo di dibattito; è comunque necessario che la nana bianca faccia parte di un sistema binario) l'ignizione del carbonio in regime di degenerazione causa una "fuga termonucleare" che porta all'esplosione della stella (supernova  $I_a$ ).

#### 4.1.2 Buchi neri primordiali

Per una ragione che sarà chiarita nel seguito i buchi neri di interesse per la radiazione di Hawking non sono quelli formati per collasso gravitazionale, come brevemente spiegato nella sezione precedente, bensì i cosiddetti *buchi neri primordiali*. Si tratta di "buchi neri formati dalle fluttuazioni locali della densità estrema nell'universo primordiale", che non essendo vincolati al collasso di una stella possono avere anche masse molto piccole. Accettiamo la possibile esistenza di questi oggetti, senza entrare nel merito della questione.

#### 4.1.3 Buchi neri in fisica classica

Il concetto di buco nero nasce verso la fine del 1800, quando la meccanica è ancora quella di Newton. Ci si pone, in termini classici, la seguente domanda: *quale deve essere il raggio  $r$  di un corpo di massa  $M$  affinché la sua velocità di fuga sia pari alla velocità della luce?* La risposta segue subito dalla conservazione dell'energia:

$$-\frac{GM}{r}m + \frac{1}{2}mc^2 = 0 \Rightarrow r = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.1)$$

Tuttavia i *fotoni* risultano avere massa nulla: non sono quindi soggetti alla gravità di Newton, e la questione viene messa da parte.

## 4.2 Cenni di relatività generale

### 4.2.1 Varietà pseudo-Riemanniana

La geometria dello spaziotempo, pensato come varietà differenziabile quadridimensionale  $M$ , è descritta dalla *metrica*  $g$ : si tratta di un *tensore di tipo*  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  *simmetrico non degenere*. In altre parole  $g$  manda ogni punto  $p$  di  $M$ , ossia ogni *evento* dello spaziotempo, in un elemento  $g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$ , dove  $T_p^*$  è lo *spazio cotangente* ad  $M$  nel punto  $p$ , ossia semplicemente il duale dello spazio tangente, che è uno spazio vettoriale. Abbiamo capito nella sezione 3.1.1 cosa sia il prodotto tensoriale di due spazi vettoriali: se  $g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$  allora per definizione

$$g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{bilineare} \quad (4.2)$$

Si chiede inoltre che questa funzione sia *simmetrica* e *non degenere*. A ben guardare, si tratta semplicemente di un *prodotto scalare non degenere nello spazio tangente*!<sup>1</sup> Insomma: il tensore metrico  $g$  associa ad ogni punto dello spaziotempo  $p$  un prodotto scalare  $g_p$  che agisce nello spazio  $T_pM$  tangente alla varietà nel punto in questione. Sempre dal capitolo precedente sappiamo che un generico elemento di  $V^* \otimes W^*$  si scrive  $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$ , dove i vettori con l'apice in alto formano una base degli spazi duali. Senza entrare nei dettagli (il significato della notazione è profondo;

<sup>1</sup>*Non degenere* significa che non esiste un vettore  $v$  dello spazio tangente, oltre al vettore nullo, tale che  $g_p(v, w) = 0 \quad \forall w$ . Questo *non esclude* la possibilità che per qualche vettore  $g_p(v, v) < 0$ , ossia *non* si richiede che il prodotto scalare sia definito positivo.

si veda l'osservazione 3.1.14 a pagina 140 di [1]) un vettore di base dello spazio cotangente ad una varietà in un punto  $p$  si scrive  $dx_p^i$ : si capisce allora il senso della famosa

$$g_p = g_{ij}(p) dx_p^i \otimes dx_p^j \quad (4.3)$$

La metrica è quindi rappresentata (fissata una base) dalle 16 funzioni a valori reali  $g_{ij}(p)$ , che formano la *matrice metrica*. Questa matrice dice come il prodotto scalare  $g_p$  agisce su due vettori dello spazio tangente. Se i vettori  $dx_p^i$  formano la base dello spazio cotangente allora i vettori della base coniugata per lo spazio tangente, indicati con  $\partial_i|_p$ , soddisfano per definizione  $\partial_i|_p(dx_p^j) = dx_p^j(\partial_i|_p) = \delta_i^j$ . Un vettore dello spazio tangente  $T_pM$  si può scrivere allora come  $v = v^i \partial_i|_p$  e l'effetto di  $g_p$  su due vettori dello spazio tangente è

$$v \cdot w := g_p(v, w) = g_{ij}(p) dx_p^i \otimes dx_p^j (v^k \partial_k|_p, w^l \partial_l|_p) = g_{ij}(p) v^i w^j \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Si ribadisce che  $v \cdot w$  e in particolare  $v \cdot v$  può essere *positivo, negativo o nullo*. Una varietà differenziabile  $M$  dotata di una metrica simmetrica non degenera  $g$  è detta *varietà pseudo-Riemanniana*; per essere *Riemanniana* una varietà ha bisogno di una metrica a cui si chiede di essere non solo non degenera ma anche *definita positiva*.

## 4.2.2 Equazione di Einstein

Concetto fondamentale della relatività generale è il legame tra le proprietà geometriche, ossia la metrica, e le proprietà fisiche dello spaziotempo, ossia la distribuzione di massa-energia, descritta dal *tensore energia-impulso*  $T_{\mu\nu}$ . Nello spazio vuoto, in assenza di massa-energia, la metrica è quella di Minkowski (da qui usiamo come da convenzione lettere greche per gli indici):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (4.5)$$

La presenza di massa-energia modifica la metrica, ossia la struttura geometrica dello spaziotempo. La celebre equazione di Einstein del 1916 esprime il legame tra questi tensori:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

$R_{\mu\nu}$  e  $R$  sono il tensore di Ricci e lo scalare di Ricci, che si ricavano direttamente dalla metrica usando la connessione di Levi-Civita.  $G$  è la costante di gravitazione universale, e  $\Lambda$  è la *costante cosmologica*. Ci sarebbe molto da dire sul legame tra questa costante e l'energia di vuoto, ma il discorso non trova spazio in questa sede.

La metrica, oltre che negli spazi tangenti, induce una nozione di distanza *anche tra punti della varietà*. In poche parole, la distanza tra due punti della varietà è la lunghezza della curva più breve che collega i due punti, detta *geodetica*, lungo le quali si muovono le particelle. Le equazioni delle geodetiche, che si ricavano dai coefficienti (simboli di Christoffel) della connessione di Levi-Civita, sono quindi di fondamentale importanza: descrivono le *traiettorie* nello spaziotempo.

L'equazione di Einstein può essere usata in due versi: da una parte scegliendo una metrica si può determinare la distribuzione di massa energia (ad esempio sulla base del *principio cosmologico* si può scrivere un'unica metrica, detta di Robertson-Walker; usando questa metrica si scrivono le equazioni di Friedmann per il tensore energia impulso, e quindi per la pressione, la temperatura e la densità del *fluido cosmico*, legate da un'opportuna equazione di stato); dall'altra, partendo da un'espressione per il tensore energia-impulso, si ricava la metrica e quindi

le geodetiche. Poche settimane dopo la pubblicazione dell'equazione di Einstein il fisico Karl SCHWARZSCHILD (\*1873, †1916), seguendo questa seconda via, fornisce una soluzione per il problema a simmetria sferica. Lo spaziotempo intorno ad una distribuzione di massa non rotante a simmetria sferica (detta *sorgente* del campo gravitazionale) è parametrizzato dalle coordinate  $(t, r, \vartheta, \varphi)$  dove  $(r, \vartheta, \varphi)$  sono le solite coordinate sferiche con origine al centro della distribuzione di massa; il tensore energia-impulso al di fuori della sorgente, ossia nel vuoto, è nullo:  $T_{\mu\nu} = 0$ . Omettendo la costante cosmologica l'equazione di Einstein diventa quindi

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \quad (4.7)$$

La simmetria sferica della sorgente implica che la metrica debba essere la stessa nei punti dello spaziotempo equidistanti dal centro. La simmetria del problema è legata alla presenza dei cosiddetti *vettori di Killing*, che saranno utili nel seguito e a cui dedichiamo quindi un piccolo excursus, restando sempre fedeli all'approccio euristico-qualitativo che caratterizza questo capitolo.

### 4.2.3 Campo vettoriale di Killing

Si consideri una varietà Riemanniana  $(M, g)$ . Il *fibrato tangente*  $TM$  è l'unione disgiunta di tutti gli spazi tangenti, ed una sua *sezione* è detta *campo vettoriale*  $X$ .

$$\begin{aligned} X : M &\rightarrow TM, & \text{differenziabile} \\ p &\longmapsto X_p \in T_pM \end{aligned} \quad (4.8)$$

Un campo vettoriale  $Z$  è detto *di Killing* se

$$\mathcal{L}_Z g = 0 \quad (4.9)$$

dove  $\mathcal{L}$  indica la derivata di Lie, che si ottiene “forzando la regola di Leibniz”:

$$\mathcal{L}_Z (g(X, Y)) = (\mathcal{L}_Z g)(X, Y) + g(\mathcal{L}_Z X, Y) + g(X, \mathcal{L}_Z Y) \quad (4.10)$$

Chiedere che il campo  $Z$  sia di Killing allora equivale a chiedere che, per ogni coppia di campi vettoriali  $X, Y$  su  $M$

$$\mathcal{L}_Z (g(X, Y)) = g(\mathcal{L}_Z X, Y) + g(X, \mathcal{L}_Z Y) \quad (4.11)$$

Questa espressione ricorda molto la nozione di *compatibilità di una connessione rispetto ad una metrica*, che insieme ad una nozione di *simmetria* definisce la connessione di Levi-Civita. L'espressione, infatti, è formalmente identica sostituendo la derivata di Lie  $\mathcal{L}$  con la connessione  $\nabla$ ; tuttavia nel caso della connessione la richiesta è sulla connessione stessa e deve valere *per ogni campo*  $X, Y, Z$ , mentre nel caso dei vettori di Killing la richiesta è su un campo particolare  $Z$  e deve valere per ogni coppia di campi  $X, Y$ .

*E l'approccio qualitativo che fine ha fatto?* Una definizione formale era di dovere, ma per ora è abbastanza sterile. Rinunciando al rigore cerchiamo allora di introdurre l'importanza fisica dei vettori di Killing, che vivono (come tutti i vettori) negli spazi tangenti alla varietà spaziotemporale. Quindi, fissato un campo vettoriale di Killing, ad ogni punto dello spaziotempo è appiccicato un vettore, che vive nello spazio tangente alla varietà in quel punto, e ha una certa direzione. *Le proprietà dello spaziotempo sono invarianti nella direzione dei vettori di Killing*: in un certo senso, i vettori di Killing “preservano la metrica”.

**Timelike e Spacelike** Si ricordi che la “direzione” di un vettore va pensata in senso quadridimensionale: un vettore  $v$  può essere di tipo *tempo*, *spazio* o *luce* rispettivamente se  $v \cdot v < 0$ ,  $v \cdot v > 0$ ,  $v \cdot v = 0$ , dove il prodotto scalare è dato dalla (4.4).

**Energia di Killing** Abbiamo detto che una particella si muove nello spaziotempo lungo una geodetica. La geodetica è una curva, e il vettore tangente alla curva in un punto vive naturalmente nello spazio tangente alla varietà spaziotemporale nel punto in questione. Ossia, se  $\sigma : I \rightarrow M$  è una geodetica parametrizzata da  $\lambda \in I \subset \mathbb{R}$ , allora  $\sigma'(\lambda) \in T_{\sigma(\lambda)}M$ . Il vettore  $\sigma'$  si chiama *quadrivelocità* e si indica con  $u$ . Se  $\xi$  è un vettore di Killing nel punto  $p$ , ossia  $Z_p = \xi \in T_pM$  con  $Z$  campo vettoriale di Killing, e  $u = \sigma'(\lambda)$  con  $\sigma$  geodetica tale che  $\sigma(\lambda) = p$  (in modo che  $u$  e  $\xi$  vivano nello stesso spazio tangente) si definisce *energia di Killing* lo scalare<sup>2</sup>

$$E_K := -u \cdot \xi = -g_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu = -\xi^\nu u_\nu \quad (4.12)$$

La particolarità è che l'energia di Killing non dipende dal punto in cui viene calcolata, ossia si conserva lungo le geodetiche, con una metrica opportuna; la metrica di Schwarzschild di cui si parla nella prossima sezione si rivela tale.

Osserviamo infine che, affinché una particella che si muove lungo una geodetica sia “reale”, la sua quadrivelocità deve sempre essere un vettore di tipo tempo (è un concetto ben noto dalla relatività speciale: la quadrivelocità non può “puntare fuori dal cono-luce” della particella, pena il viaggiare più veloce della luce, o analogamente violare il principio di causalità).

#### 4.2.4 La metrica di Schwarzschild

Terminata questa breve presentazione dei vettori di Killing torniamo al punto dove ci siamo lasciati, ossia alla soluzione dell'equazione di Einstein nel caso a simmetria sferica. Utilizzando, per l'appunto, i vettori di Killing si dimostra (ma non lo facciamo) che la metrica più generale che soddisfi la condizione di *simmetria sferica* si può scrivere nella forma

$$g = m(t, r) dt^2 + n(t, r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.13)$$

dove  $d(\cdot)^2$  sta per  $d(\cdot) \otimes d(\cdot)$  e  $d\Omega^2 = d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$ . Da questa espressione si ricavano i simboli di Christoffel della connessione di Levi Civita e quindi il tensore e lo scalare di Ricci; il tutto viene sostituito nella (4.7). Dalle equazioni che si ottengono si ricavano quindi le funzioni incognite  $m(t, r)$ ,  $n(t, r)$ . Quello che si ottiene è la *metrica di Schwarzschild*:

$$g = - \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.14)$$

dove  $M$  è una costante, che viene interpretata come la *massa* della sorgente che produce il campo gravitazionale. L'espressione presenta due singolarità:

- nel caso  $r = 0$  si tratta di una *vera* singolarità della metrica; tuttavia la soluzione è stata ottenuta risolvendo l'equazione di Einstein *nel vuoto*, mentre per  $r = 0$  ci troviamo sicuramente all'interno della sorgente: la soluzione quindi sicuramente non vale per  $r = 0$ , indipendentemente dalla singolarità;
- la singolarità che si ottiene per  $r = \frac{2GM}{c^2}$  è invece apparente: è dovuta ad una cattiva scelta delle coordinate, e scompare effettuando una scelta più opportuna, ossia utilizzando un'altra carta locale per la varietà. Si osservi tuttavia che l'espressione ottenuta equivale formalmente alla (4.1): questa quantità prende il nome di *raggio di Schwarzschild*  $r_H$ .

<sup>2</sup>L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che la metrica induce un isomorfismo canonico tra campi vettoriali e 1-forme che consente di “alzare e abbassare gli indici”. [1, p. 354]

**Redshift gravitazionale** La singolarità è solo apparente, ma  $r_H$  ha un significato fisico importante. Si consideri un fotone emesso con frequenza  $\nu$  alla distanza  $r$  dal centro della distribuzione di massa  $M$  verso un osservatore a distanza infinita. Si dimostra che il fotone subisce un effetto di *redshift gravitazionale*: la frequenza osservata  $\nu_o$  risulta essere

$$\nu_o \approx \nu \sqrt{1 - \frac{r_H}{r}} \quad (4.15)$$

Se il fotone viene emesso sull'orizzonte degli eventi non può essere osservato dall'osservatore distante. Il raggio Schwarzschild per oggetti "ordinari" è relativamente piccolo, solitamente molto minore delle dimensioni dell'oggetto. I valori per il Sole e per la Terra sono, rispettivamente, dell'ordine del kilometro e del centimetro. Tuttavia il collasso di una stella alla fine del suo ciclo evolutivo può portarla a superare il proprio raggio critico: ci si pone quindi il problema di studiare cosa accada ad un corpo con dimensione minore del suo raggio di Schwarzschild.

#### 4.2.5 Collasso gravitazionale, di nuovo

La metrica trovata descrive la geometria dello spaziotempo al di fuori di una distribuzione di massa a simmetria sferica, come una stella; un procedimento analogo porta alla soluzione dell'equazione di Einstein *nel caso in cui la sorgente collassi*, mantenendo la simmetria sferica. Quando la stella raggiunge il suo raggio di Schwarzschild la luce che emette non può più allontanarsi, ma rimane "in bilico" in  $r = r_H$ . All'interno dell'orizzonte degli eventi la stella continua a collassare verso una "singolarità". Nessun segnale può fuggire all'infinito una volta che la stella oltrepassa il suo raggio di Schwarzschild: il collasso genera un *buco nero*, una regione dello spazio tempo dove la deformazione, la *curvatura* è così intensa da confinare al suo interno anche la luce. La situazione è rappresentata in figura 4.2.

**Un buco nero non ha capelli** Dopo il collasso il buco nero raggiunge rapidamente uno *stato stazionario* caratterizzato solo da tre parametri: massa, carica elettrica e momento angolare. Tutte le altre proprietà del progenitore del buco nero non lasciano traccia, se ne perde ogni informazione: questo è il contenuto del teorema noto come *A black hole has no hair*. Un *buco nero di Schwarzschild* è un buco nero *neutro non rotante*, ossia un oggetto di dimensione inferiore al suo raggio di Schwarzschild caratterizzato solo dalla sua massa.

### 4.3 Buchi neri e termodinamica

Lo studio della meccanica dei buchi neri ha portato James M. BARDEEN (\*1939) e Stephen HAWKING (\*1942) a formulare negli anni '70 quattro leggi che presentano una sorprendente *analogia* con le quattro leggi della termodinamica [2]. Nell'ambito della teoria quantistica l'analogia si rivela essere profonda: ci si rende conto che quelle che *assomigliavano* formalmente alle leggi della termodinamica *sono* le leggi della termodinamica.

**Gravità superficiale di un buco nero** La trattazione relativistica consente di definire una quantità  $\kappa$  interpretabile come la *forza per unità di massa che un osservatore esterno al buco nero deve esercitare su una particella per tenerla sull'orizzonte degli eventi*: questa grandezza viene detta *gravità superficiale* del buco nero. Per un buco nero di Schwarzschild  $\kappa = \frac{1}{4M}$  (in unità naturali): un buco nero *più* massivo ha gravità superficiale *minore*.

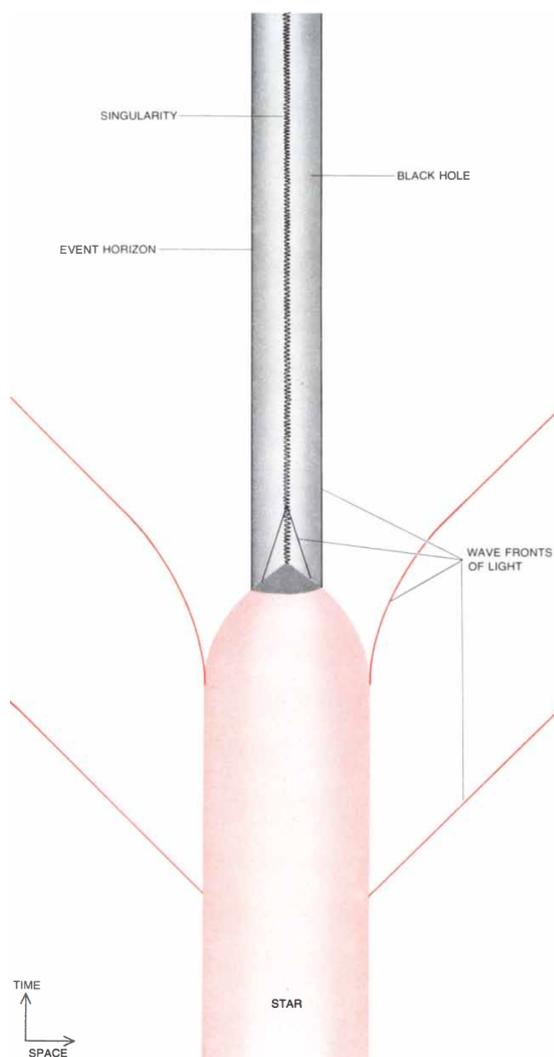


Figura 4.2: Collasso gravitazionale di una stella. Da S. W. Hawking. «The quantum mechanics of black holes». In: *Scientific American* 236.1 (1976), pp. 34–40.

**Seconda legge** Questa legge riguarda l'area superficiale  $A$  del buco nero (intesa come superficie dell'orizzonte degli eventi). Sotto opportune ipotesi dette *di energia debole* e *di censura cosmica* si verifica che  $A$  non decresce nel tempo:

$$\delta A \geq 0 \quad A \sim S \quad (4.16)$$

Inoltre se due buchi neri si uniscono la superficie del buco nero finale è *maggiore* della somma delle sue superfici iniziali:  $A > A_1 + A_2$ . L'analogia con la seconda legge della termodinamica  $\delta S \geq 0$  è evidente, e anzi la legge per i buchi neri è leggermente più forte. L'entropia di un sistema isolato non può diminuire, ma l'entropia di una sua componente può farlo; invece la legge (4.16) dice che l'area *di ogni singolo buco nero* non può diminuire.

**Prima legge** La prima legge lega la variazione della massa alla variazione della superficie di un buco nero. A parità di carica elettrica e momento angolare risulta

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A \quad \kappa \sim T \quad (4.17)$$

Se si accetta l'analogia, suggerita dalla seconda legge, tra area ed entropia, ed essendo ben nota l'equivalenza di massa ed energia, questa legge esprime il fatto che la gravità superficiale di un buco nero  $\kappa$  sia proporzionale a una grandezza *analogica* alla temperatura. La prima legge della termodinamica dice infatti che (in assenza di lavoro esterno) una variazione di energia interna è proporzionale a una variazione di entropia, e la costante di proporzionalità è proprio la temperatura:  $\delta E = T \delta S$ .

**Legge zero** L'analogia tra gravità superficiale e temperatura è resa più forte dal fatto che la gravità superficiale si rivela essere *costante* per ogni punto dell'orizzonte degli eventi, così come la temperatura in un sistema in equilibrio termico.

$$\kappa = \text{cost} \quad (4.18)$$

**Terza legge** È impossibile ridurre a zero la gravità superficiale di un buco nero con un numero finito di operazioni (per esempio immettendo materia). Questa legge, a differenza delle altre tre, non ha una vera e propria dimostrazione matematica, ma è "ragionevole" ritenerla corretta. Di nuovo, rinforza l'analogia tra gravità superficiale e temperatura.

$$\kappa > 0 \quad (4.19)$$

**Un problema concettuale** Nonostante l’analogia formale tra le leggi dei buchi neri e le leggi della termodinamica non è per nulla chiaro se abbia senso parlare di una *entropia* o una *temperatura* per un buco nero. Nel 1972 Jacob D. BEKENSTEIN (\*1947, †2015) fornisce un’interpretazione cruciale dell’entropia. Il *teorema no-hair* dice che “una grande quantità di informazione viene persa quando il buco nero si forma per collasso gravitazionale”: come già detto, il buco nero ha memoria solo della massa, della carica e del momento angolare del progenitore, che potrebbe essere stato di *qualsiasi* tipo e natura. O meglio, così sarebbe secondo la fisica classica: ad esempio un buco nero di massa fissata potrebbe essersi formato classicamente da una nube arbitrariamente grande composta da particelle arbitrariamente leggere, e quindi esisterebbe un numero infinito di possibili scenari di formazione per lo stesso buco nero. Quantisticamente parlando, però, *sembra che una nube di massa  $m$ , per poter formare un buco nero di dimensione  $r$ , debba avere lunghezza d’onda  $\frac{h}{mc} < r$* . Questo pone un vincolo al numero di possibili configurazioni che portano alla formazione di un buco nero fissato, numero che pur enorme deve essere *finito*. Maggiore è questo numero, maggiore è l’informazione che viene persa al momento della formazione del buco nero (se ci fosse solo un modo di formarlo, non ci sarebbe nessuna perdita di informazione). *Bekenstein suggerisce di interpretare il logaritmo di questo numero come l’entropia del buco nero*; ricordando la legge di Boltzmann, questo equivale a pensare al buco nero come un *macrostato* e alle possibili configurazioni che portano alla sua formazione come ai suoi *microstati*. In altre parole, il numero di configurazioni possibili è interpretato come la *probabilità termodinamica* del buco nero. L’intuizione è geniale, ma solleva un grosso problema: se veramente il buco nero ha un’entropia finita proporzionale alla superficie del suo orizzonte degli eventi, allora deve avere anche una *temperatura* finita, proporzionale alla sua gravità superficiale. Questo, classicamente, è impossibile: la temperatura di un buco nero deve (ribadiamo, classicamente) essere rigorosamente pari allo zero assoluto. Un modo per convincersene è osservare che un buco nero non può essere in equilibrio con una radiazione termica (ossia di corpo nero) a temperatura diversa da zero. Se così fosse il buco nero dovrebbe *emettere* per bilanciare l’energia assorbita, ma per definizione non è in grado di farlo. L’unico equilibrio possibile è quello in cui non c’è nessuna radiazione incidente sul buco nero, ossia la temperatura della radiazione con cui il corpo nero è in equilibrio deve essere pari a zero. Il paradosso è rimasto tale fino al 1974, quando Hawking ha proposto un modello di *emissione termica* da parte del buco nero, che potrebbe quindi avere una temperatura diversa da zero.

### 4.3.1 Radiazione di Hawking

Nel 1974 Hawking applica la teoria quantistica dei campi ai buchi neri: i suoi calcoli mostrano che un buco nero debba emettere uno spettro di radiazione termica alla temperatura  $T_H = \frac{\kappa\hbar}{2\pi k_B c}$  o, in unità naturali,  $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ . Il meccanismo di emissione può *euristicamente* essere spiegato come segue. Richiamiamo innanzitutto il concetto di vettore di Killing introdotto nella sezione 4.2.3: la direzione di un vettore di Killing in un punto determina una direzione lungo la quale le proprietà dello spaziotempo sono invarianti. Si dimostra che *fuori dal buco nero c’è invarianza per traslazioni temporali*: le proprietà dello spaziotempo non cambiano al trascorrere di un certo tipo di tempo, ossia il vettore di Killing è di tipo tempo. All’interno del buco nero, invece, esiste una direzione *spaziale* lungo la quale “tutto appare allo stesso modo”: il vettore di Killing è di tipo spazio. Ricordiamo inoltre che una particella, per essere fisicamente sensata, deve avere quadrivelocità di tipo tempo.

“Nella regione intorno al buco nero avvengono continuamente fenomeni di formazione e annichilazione di coppia di particelle virtuali.” L’energia totale di questa coppia è nulla, e tale deve rimanere in seguito a qualsiasi processo. Quindi, necessariamente, una particella ha energia positiva e quadrivelocità timelike: è una particella “reale”; l’altra particella deve avere *energia*

*negativa e quadrivelocità spacelike*: fisicamente, non ha nessun senso. Se questa “particella” attraversa l’orizzonte degli eventi passa però in una regione dello spaziotempo con vettori di Killing di tipo spazio. La sua energia è costante lungo le geodetiche, e rimane pertanto negativa: “la quadrivelocità diventa di tipo tempo, e la particella diventa reale”. Il processo netto, quindi, è il seguente: una particella di energia positiva si allontana all’infinito, e una particella di energia negativa, uguale e contraria, cade nel buco nero. Visto che l’energia di questa particella è negativa, *la massa del buco nero diminuisce: è come se il buco nero avesse emesso una particella*. La situazione è rappresentata in figura 4.3.

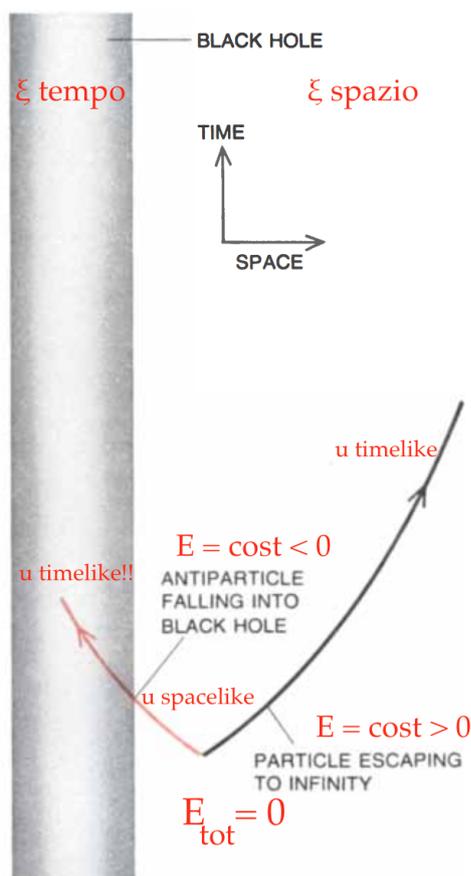


Figura 4.3: Meccanismo euristico di radiazione di Hawking. Da S. W. Hawking. «The quantum mechanics of black holes». In: *Scientific American* 236.1 (1976), pp. 34–40.

Ribadiamo che questa presentazione è assolutamente euristica: la spiegazione formale non fa nessun riferimento a particelle virtuali.

**Tasso di emissione** Hawking ha ottenuto che il tasso di emissione alla frequenza  $\omega$  di un buco nero è proporzionale all’assorbimento tramite un fattore  $\left(e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1\right)^{-1}$ : questo è proprio *l’andamento termico per un corpo nero* alla temperatura (in unità naturali)  $T = \kappa/2\pi$ . Come già visto per un buco nero di Schwarzschild  $\kappa = \frac{1}{4M}$ , e quindi

$$T \propto \frac{1}{M} \quad (4.20)$$

Inserendo le costanti fisiche opportune,  $T = \frac{c^3\hbar}{8\pi Gk_B} \frac{1}{M} \approx 10^{-6} \frac{M_\odot}{M} \text{K}$ . La (4.20) è sorprendente: in seguito ad un processo di emissione la massa del buco nero diminuisce, quindi la gravità superficiale e la temperatura *aumentano* portando ad un aumento del tasso di emissione, e così via. Questo processo di perdita di massa e riscaldamento può portare il buco nero a *evaporare*, ossia a consumare tutta la sua massa in un tempo finito. Una stima del tempo di vita è data dalla legge di Stefan-Boltzmann: la potenza emessa da tutta la superficie è

$$\frac{dE}{dt} \propto AT^4 \quad (4.21)$$

Essendo  $E \propto M$ ,  $A \propto M^2$ ,  $T \propto M^{-1}$  risulta  $\frac{dM}{dt} \propto M^{-2}$ ; una stima del tempo di vita si ottiene integrando questa espressione. Con le opportune costanti

$$\tau \sim \frac{G^2}{\hbar c^4} M^3 \sim 10^{71} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 \text{ s} \quad (4.22)$$

Per un buco nero di massa dell’ordine di una massa solare, questo tempo è enorme: il tempo di vita dell’universo è dell’ordine di  $10^{17}$ s! Tuttavia, per buchi neri di massa sufficientemente *bassa*, questo tempo potrebbe essere confrontabile con l’età attuale dell’universo: la massa critica è dell’ordine di  $10^{15}$ g (si tenga presente che  $M_\odot \sim 10^{33}$ g). Buchi neri di massa così bassa non possono avere origine dal collasso gravitazionale di una stella; entrano quindi in gioco i *buchi neri primordiali* di cui si è parlato all’inizio del capitolo, che potrebbero avere masse di questo ordine di grandezza.

**La seconda legge** Un’osservazione: quando il buco nero emette la sua superficie *diminuisce*, ma questo fatto non viola la Seconda Legge perché viene meno l’ipotesi di “energia debole”. La seconda legge viene comunque generalizzata esplicitando il legame tra l’entropia *del* buco nero e la sua superficie: si definisce l’entropia totale come somma dell’entropia esterna al buco nero con  $S_{BH} = \frac{c^3}{4\hbar G} A$  (entropia di Bekenstein-Hawking), e la formulazione finale è

$$\delta S_{\text{tot}} \geq 0 \tag{4.23}$$

In questo modo, quando il buco nero emette, la sua massa, la sua superficie e la sua entropia *diminuiscono*, ma l’entropia esterna aumenta compensando la diminuzione; viceversa per l’assorbimento. Questa generalizzazione è necessaria per superare un’apparente violazione del secondo principio della termodinamica: senza considerare l’entropia *del* buco nero, un fenomeno di assorbimento è accompagnato da una diminuzione di entropia esterna non compensata da un incremento.

## 4.4 Conclusioni

L’introduzione della possibilità che un buco nero possa emettere termicamente consente di superare il problema della definizione di entropia per un corpo che dovrebbe avere temperatura pari allo zero assoluto. La teoria quantistica dei campi consente di spiegare il meccanismo di emissione, ben diverso nella realtà da quello ingenuamente proposto in queste pagine, e di scrivere lo spettro di emissione di un buco nero, che risulta termico ad una temperatura inversamente proporzionale alla sua massa. Si innesca in questo modo un processo che porta il buco nero a *scaldarsi* ed emettere sempre di più, fino a consumare completamente la massa disponibile. Il tempo di vita di un buco nero ordinario è comunque immensamente maggiore dell’età dell’universo, ma piccoli buchi neri primordiali potrebbero avere tempi di evaporazione compatibili col tempo di Hubble: come confermato dai calcoli di [23], l’emissione è trascurabile per buchi neri di massa stellare ma dovrebbe aver portato qualsiasi buco nero primordiali con massa  $\lesssim 10^{15}\text{g}$  ad evaporare al tempo cosmico attuale.

Il termine “scaldarsi” usato poco sopra non deve trarre in inganno: la temperatura stimata per un buco nero ordinario è dell’ordine dei microkelvin. L’osservazione diretta della radiazione di un buco nero è quindi, nella pratica, impossibile: la sola CMB è superiore per diversi ordini di grandezza. Tuttavia i piccoli buchi neri primordiali possono raggiungere temperature molto maggiori, dell’ordine di  $10^{12}\text{K}$ . Alla fine del processo di evaporazione un buco nero di questo tipo emette relativamente molta energia in poco tempo: l’energia emessa nell’ultimo decimo di secondo è dell’ordine di  $10^{30}\text{erg}$  in raggi gamma. Un possibile metodo di rivelazione potrebbe consistere nello sfruttare l’atmosfera terrestre come detector, osservando la radiazione di Cerenkov prodotta da questi fotoni gamma. Le stime numeriche sono tratte da [13].

# Appendice A

## Scattering in equilibrio termodinamico

### A.1 Bilancio di scattering

In questa sezione vogliamo generalizzare l'equazione (1.38) tenendo conto dello scattering in condizione di equilibrio termodinamico. Nella sezione 1.4.1 abbiamo trovato ed eguagliato l'energia emessa ed assorbita *termicamente* da un elemento di volume in un intervallo tempo e ad una frequenza qualsiasi; ci proponiamo di fare lo stesso relativamente allo scattering.

**Isotropia** È necessaria un'osservazione preliminare sull'isotropia dei fenomeni di scattering. Come abbiamo visto nella sezione 1.3.3, lo scattering *non* è, in generale, un processo isotropo: in seguito ad un singolo evento di scattering un fotone può essere deviato in una qualsiasi direzione, *ma alcune direzioni sono più probabili di altre*. Quindi, se tutti i fotoni viaggiassero nella stessa direzione, si otterrebbe il risultato macroscopico di un flusso di radiazione con una direzione preferenziale.<sup>1</sup> Naturalmente in equilibrio termodinamico non è questo il caso: i fotoni incorrono in eventi di scattering viaggiando in tutte le direzioni, e il risultato è quello di un campo di scattering *isotropo*.

**Energia guadagnata da un raggio** Ricordando la definizione 1.8, l'energia “emessa” (ossia scatterata in tutte le direzioni) da un elemento di volume  $d\tau$  è

$$dE_{\nu, \text{scatter gain}}^{\tau} = \alpha_{\nu}^{+} d\tau dt d\Omega d\nu \quad (\text{A.1})$$

In altre parole, è come se l'elemento di volume  $d\tau$  *guadagnasse un termine di emissione*, tale che

$$\varepsilon_{\nu, \text{tot}} := \varepsilon_{\nu} + \alpha_{\nu}^{+} \quad (\text{A.2})$$

Come nell'osservazione 1.6, l'energia *guadagnata* da un raggio che attraversa  $d\tau$  (si veda nuovamente la figura 1.3) è proprio data dall'energia emessa da  $d\tau$  entro l'angolo solido  $d\Omega$ , ossia è data dalla (A.1).

**Energia persa da un raggio** Con procedimento del tutto analogo a quello usato per trovare la quantità di energia (1.37) assorbita termicamente dal volume  $d\tau$  si trova la quantità di energia ricevuta e scatterata da  $d\tau$  - e quindi persa dal raggio - in tutte le direzioni nel tempo  $dt$ , ricordando dalla definizione 1.9 che  $\alpha_{\nu}^{-}$  ha le stesse dimensioni del coefficiente di assorbimento  $k_{\nu}$ :

$$4\pi\alpha_{\nu}^{-}K_{\nu} d\tau dt d\nu \quad [\text{erg}] \quad (\text{A.3})$$

---

<sup>1</sup>O più di una: lo scattering di Rayleigh, per esempio, è simmetrico rispetto alla direzione di propagazione del fotone.

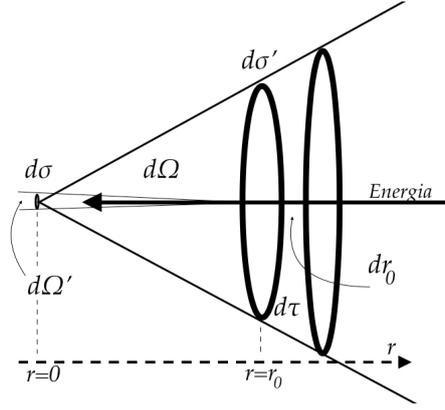


Figura A.1: Fascio elementare

Date le osservazioni sull'isotropia *media* dei fotoni scatterati è legittimo moltiplicare la (A.3) per  $d\Omega/4\pi$  e considerare ciò che si ottiene come l'energia ricevuta e scatterata da  $d\tau$  nell'angolo solido  $d\Omega$  e nel tempo  $dt$ .

$$dE_{\nu, \text{scatter lost}}^{\tau} = \alpha_{\nu}^{-} K_{\nu} d\tau dt d\Omega d\nu \quad (\text{A.4})$$

Si tenga comunque presente che si tratta di un valore *medio*!

Questo basta a dimostrare il fatto che un raggio non venga globalmente modificato dallo scattering.

**Legge A.1.** *In equilibrio termodinamico ogni raggio perde a causa dello scattering esattamente la quantità di energia che riguadagna a causa dello scattering di altri raggi.*

Inoltre, eguagliando le (A.1)-(A.4), si ottiene l'equazione di bilancio di scattering:

$$\alpha_{\nu}^{+} = \alpha_{\nu}^{-} K_{\nu} \quad (\text{A.5})$$

Come ci si aspetta, la (A.5) è del tutto analoga alla relazione termica (1.38). In effetti non può essere così: non essendovi nessun vero processo fisico di emissione o assorbimento in atto, ma solo un "riciclo" di fotoni, la (A.5) è - di nuovo - una condizione di conservazione dell'energia: quello che viene "emesso" da un volume è stato prelevato da un raggio che lo ha attraversato.

## A.2 Un utile esercizio

Quanto segue non aggiunge nessuna informazione nuova alla trattazione, ma rappresenta un utile verifica della consistenza della teoria. Consideriamo infatti l'energia che attraversa un elemento di superficie  $d\sigma$  entro l'angolo solido  $d\Omega$ , in direzione normale alla superficie. Vogliamo dimostrare che questa energia è *proprio quella risultante dall'assorbimento, dall'emissione e dallo scattering dovuto a tutti e soli gli elementi di volume  $d\tau$  contenuti nell'angolo solido*, utilizzando una (sorta di) *equazione del trasporto*. In altre parole, vogliamo scrivere un'espressione esplicita per questa energia e mostrare che è proprio uguale alla (1.1), che riportiamo (con  $\vartheta = 0$ ):

$$dE_{\nu}^{\sigma} = K_{\nu} d\sigma d\Omega dt d\nu \quad (\text{1.1})$$

Il procedimento è concettualmente simile a quello usato nella sezione 1.2.1.

Si consideri dunque l'energia che attraversa  $d\sigma$  nel verso della freccia continua in figura A.1. Il primo fatto da osservare è il seguente: la (1.1) rappresenta non solo l'energia che attraversa

$d\sigma$  entro  $d\Omega$ , ma anche l'energia che attraversa *qualsiasi sezione*  $d\sigma'$  dell'angolo solido  $d\Omega$ , entro l'angolo solido  $d\Omega'$  sotto il quale è visto  $d\sigma$ . Infatti, per definizione, questa energia è data da

$$dE_\nu^{\sigma'} = K_\nu d\sigma' d\Omega' dt d\nu \quad (\text{A.6})$$

dove l'intensità di radiazione è costante in ogni punto del mezzo e, posta  $r_0$  la distanza tra  $d\sigma$  e  $d\sigma'$ , risulta

$$\begin{cases} d\Omega = \frac{d\sigma'}{r_0^2} \\ d\Omega' = \frac{d\sigma}{r_0^2} \end{cases} \Rightarrow d\Omega' d\sigma' = d\Omega d\sigma = \text{cost} \quad \square \quad (\text{A.7})$$

Si confronti il risultato con quello ottenuto nella sezione 1.2.2: la (A.7) è semplicemente la *conservazione dell'étendue*, ma il ragionamento *fisico* è opposto. Nel primo caso si parte dalla conservazione dell'energia per concludere la conservazione dell'intensità: quest'ipotesi fatta *a priori* richiede di essere in un mezzo *vuoto*, privo di emissione e assorbimento. In questo caso, invece, grazie all'equilibrio termodinamico possiamo ipotizzare la conservazione dell'intensità, dalla quale segue la conservazione dell'energia, anche *in presenza di emissione e assorbimento*.

Esplicitiamo a questo punto i contributi di emissione (termica e di scattering) e di assorbimento (termico e di scattering) di un elemento di volume.

**Emissione** Sia  $d\tau$  il volume racchiuso tra due sezioni di  $d\Omega$  a distanza rispettivamente  $r_0$  e  $r_0 + dr_0$  da  $d\sigma$ , come in figura A.1. L'energia emessa da questo elemento di volume in direzione di  $d\sigma$  è data dalla solita (1.29), dove l'angolo solido da utilizzare è  $d\Omega'$  e  $d\tau = d\sigma' dr_0$ . Per considerare anche il contributo dello scattering, inoltre, il coefficiente di emissione da usare è quello dato dalla (A.2). Quindi

$$\begin{aligned} E_{r_0} &:= dE_\nu^\tau = \varepsilon_{\nu,\text{tot}} d\tau d\Omega' dt d\nu \\ &= \varepsilon_{\nu,\text{tot}} dr_0 (d\sigma' d\Omega') dt d\nu \\ &= \varepsilon_{\nu,\text{tot}} dr_0 (d\sigma d\Omega) dt d\nu \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Visto che il termine tra parentesi nella (A.8) è costante, *ciascun elemento di volume contenuto tra due sezioni del fascio emette verso  $d\sigma$  una quantità di energia per unità di tempo e frequenza che dipende solo dallo spessore  $dr_0$  dell'elemento stesso*.

Di questa energia  $E_{r_0}$ , solo una parte  $E_0$  arriva in  $d\sigma$ : infatti una frazione  $(k_\nu + \alpha_\nu^-) dr$  di ogni raggio viene persa lungo ogni elemento di lunghezza  $dr$ . Sia  $E_r$  l'energia che, partendo da  $r_0$ , arriva in  $r$ ; naturalmente (si veda la figura A.2)

$$\frac{dE_r(r)}{dr} > 0 \quad (\text{A.9})$$

La quantità di energia che viene persa (assorbita e scatterata) in  $[r, r + dr]$  è

$$E_{r+dr} - E_r = E_r(k_\nu + \alpha_\nu^-) dr \quad (\text{A.10})$$

Ossia, ponendo per brevità  $\chi_\nu := k_\nu + \alpha_\nu^-$ , che *non* dipende da  $r$

$$\frac{dE_r}{dr} = \chi_\nu E_r \quad (\text{A.11})$$

Considerando le condizioni al contorno  $E_r(0) \equiv E_0$ ,  $E_r(r_0) \equiv E_{r_0}$  l'integrazione della (A.11) porge subito

$$E_r(r) = E_{r_0} e^{\chi_\nu(r-r_0)} \quad (\text{A.12})$$

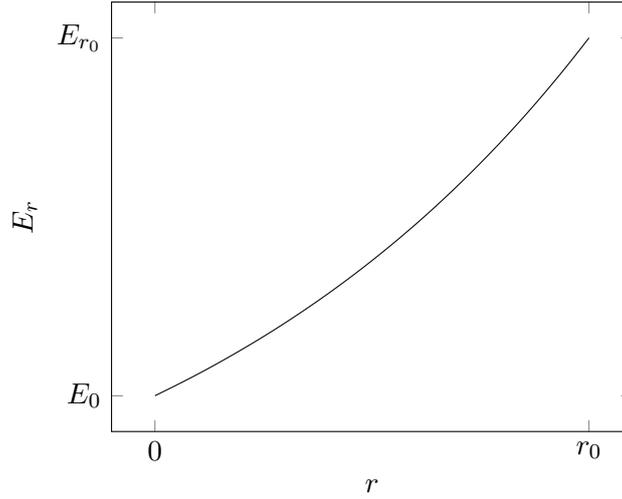


Figura A.2: Energia assorbita tra  $d\tau$  e  $d\sigma$

Ricapitolando: la (A.8) è l'energia emessa (termicamente e per scattering) dall'elemento di volume  $d\tau$ . Questa energia, nel suo percorso verso  $d\sigma$ , viene assorbita e scatterata: l'espressione appena trovata fornisce l'energia che "sopravvive" percorrendo un tratto  $r$ . In particolare, l'energia emessa da  $d\tau$  che effettivamente arriva a  $d\sigma$  è

$$\begin{aligned}
 E_0 &= E_r(0) = E_{r_0} e^{-\chi_\nu r_0} \\
 &= \varepsilon_{\nu, \text{tot}} e^{-\chi_\nu r_0} dr_0 d\sigma d\Omega dt d\nu \\
 &= (\varepsilon_\nu + \alpha_\nu^+) e^{-\chi_\nu r_0} dr_0 d\sigma d\Omega dt d\nu \\
 &= (\varepsilon_\nu + \alpha_\nu^- K_\nu) e^{-\chi_\nu r_0} dr_0 d\sigma d\Omega dt d\nu
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Questo è il contributo di *un singolo* elemento di volume: per trovare l'energia che attraversa  $d\sigma$  emessa nell'angolo solido occorre integrare per  $r_0 \in [0, \infty)$ . Se il ragionamento è corretto, l'espressione ottenuta dopo l'integrazione deve essere uguale alla (1.1).

$$\begin{aligned}
 dE_\nu^\sigma &\stackrel{?}{=} \int_0^\infty (\varepsilon_\nu + \alpha_\nu^- K_\nu) e^{-\chi_\nu r_0} d\sigma d\Omega dt d\nu dr_0 \\
 &= (\varepsilon_\nu + \alpha_\nu^- K_\nu) d\sigma d\Omega dt d\nu \int_0^\infty e^{-\chi_\nu r_0} dr_0 \\
 &= \frac{(\varepsilon_\nu + \alpha_\nu^- K_\nu) d\sigma d\Omega dt d\nu}{\chi_\nu} \left. e^{-\chi_\nu r_0} \right|_0^\infty
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

Questa espressione, ricordando la (1.38) e la definizione di  $\chi_\nu$ , è proprio la (1.1).  $\square$

## Appendice B

# Legge di Kirchhoff

Dimostriamo in questa appendice un risultato fondamentale ottenuto da Kirchhoff nel 1860: si vuole mostrare come, in equilibrio termodinamico, il bilancio tra energia assorbita ed energia riflessa da un corpo non dipenda dalla sua natura.

Generalizziamo la situazione della sezione 1.4.2 considerando un sistema adiabatico in equilibrio termodinamico costituito da  $N$  mezzi adiacenti, e concentriamoci sulla superficie di separazione tra due mezzi scelti arbitrariamente, come in figura B.1. Per l'energia totale diretta da  $d\sigma$  verso il primo mezzo vale la solita

$$I := dE_\nu^\sigma = K_\nu \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \quad (\text{B.1})$$

ove la notazione  $I$  è introdotta per brevità.

*Osservazione* B.1. Come già nell'osservazione 1.5, si ribadisce (sarà utile tra poco) che questa quantità, da sola, dipende dalla natura del *primo* mezzo, dalla sua temperatura e dalla frequenza.

Nella sezione 1.4.2 abbiamo scomposto questa energia nel contributo riflesso dal primo mezzo e in quello trasmesso dal secondo, ma possiamo ragionare in modo diverso. L'energia proveniente dal primo mezzo che giunge alla superficie di separazione è infatti composta da molto contributi, ognuno dei quali ha seguito un percorso diverso nel sistema, avendo subito un certo numero di riflessioni e trasmissioni; un ragionamento analogo vale per l'energia che giunge alla superficie di separazione provenendo dal secondo mezzo. Tuttavia ognuno di questi contributi deve essere stato *emesso* da qualche parte: possiamo allora scrivere

$$I = \sum_{n=1}^N I_n \quad (\text{B.2})$$

dove  $I_n$  è la frazione di  $I$  che è stata *emessa* nel mezzo  $n$ , indipendentemente dal percorso seguito per giungere alla superficie.

Naturalmente, essendo in equilibrio termodinamico, il flusso netto di energia attraverso  $d\sigma$  deve essere nullo: deve quindi esistere un fascio di energia  $J = I$  che attraversa  $d\sigma$  in direzione opposta. Arrivato alla superficie di separazione  $J$  viene riflesso e trasmesso, e così le componenti riflesse e trasmesse subiscono ulteriori riflessioni e trasmissioni in corrispondenza delle superfici di separazione con gli altri mezzi, frammentandosi in tanti contributi, finché ciascuno di questi contributi non viene *assorbito* all'interno di uno dei mezzi. Scriviamo allora

$$J = \sum_{n=1}^N J_n \quad (\text{B.3})$$

dove  $J_n$  è la frazione di  $J$  che viene *assorbita* nel mezzo  $n$ , indipendentemente dal percorso seguito per giungervi.

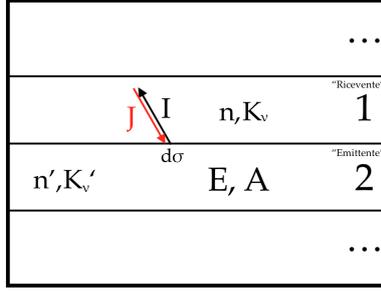


Figura B.1: Sistema composto da  $N$  mezzi in equilibrio termodinamico

La condizione di equilibrio termodinamico consente inoltre di porre

$$I_n = J_n, \forall n = 1, \dots, N \quad (\text{B.4})$$

Infatti, globalmente, il bilancio energetico di ciascun elemento di volume in ogni mezzo, e quindi di ogni mezzo, deve essere nullo.

Concentriamoci adesso sul *secondo* mezzo:

**Definizione B.1.** Si dice *potere emissivo* del secondo mezzo la quantità

$$E := I_2[\text{erg}] \quad (\text{B.5})$$

ossia la parte emessa dal secondo mezzo dell'energia totale emessa verso il primo mezzo.

Inoltre, ricordando la definizione 1.10, il potere assorbente (energia assorbita su energia incidente) del *secondo* mezzo è

$$A = \frac{J_2}{J} [\text{adimensionale}] \quad (\text{B.6})$$

Singolarmente, il potere emissivo ed il potere assorbente del *secondo* mezzo dipendono da proprietà di tutto il sistema, in particolare dalla natura sia del primo che del secondo mezzo. Tuttavia, ricordando la (B.4) e che  $I = J$ ,

$$\frac{E}{A} = I = K_\nu \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \quad (\text{B.7})$$

Si veda l'osservazione B.1: la quantità  $I$  dipende dalle proprietà del *primo* mezzo, mentre il rapporto  $E/A$  si riferisce al *secondo* mezzo. La dipendenza dal primo mezzo avviene tramite il suo *indice di rifrazione*: sappiamo infatti dalla (1.49) che, per un mezzo in equilibrio termodinamico,  $K_\nu/n^2$  è una funzione universale. Allora

**Legge B.1** (Kirchhoff). *In equilibrio termodinamico il rapporto tra il potere emissivo ed il potere assorbente di un corpo qualsiasi non dipende dalla sua natura, ma solo dall'indice di rifrazione del mezzo nel quale emette.*

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\frac{E}{A}}^{\text{mezzo emittente}} &= \overbrace{I}^{\text{mezzo ricevente}} = \underbrace{n^2}_{\text{mezzo ricevente}} \overbrace{B_\nu(T)}^{\text{universale}} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu \\
 &= \underbrace{K_\nu}_{\text{mezzo ricevente}} \cos \vartheta d\sigma dt d\Omega d\nu
 \end{aligned} \quad (\text{1.53})$$

## Appendice C

# Legge di Stefan-Boltzmann

Riportiamo in questa appendice la derivazione di Boltzmann (1884), basata sulla termodinamica classica, della legge per la densità bolometrica della radiazione di corpo nero. È necessario un risultato preliminare sulla pressione di radiazione.

### C.1 Pressione di radiazione

**Fascio collimato** Cerchiamo la pressione esercitata da un'onda piana incidente normalmente su una superficie  $d\sigma$ . L'energia incidente sulla superficie nel tempo  $dt$  è  $dE = u c dt d\sigma$  e la variazione di momento della parete riflettente è  $dp = 2 \frac{dE}{c} = 2u dt d\sigma$ . La pressione esercitata dalla radiazione è allora

$$P = \frac{dp}{d\sigma dt} = 2u \quad (\text{C.1})$$

**Radiazione isotropa** Nel caso di radiazione isotropa ci rifacciamo al procedimento della sezione 1.2.1. La variazione di momento della parete è

$$dp = \frac{2}{c} \cos \vartheta dE^\sigma \quad (\text{C.2})$$

dove  $dE^\sigma$  è data dalla (1.23), ossia

$$dp = \frac{u}{2\pi c} \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\sigma dr d\vartheta d\varphi \quad (\text{C.3})$$

Lo stesso integrale della (1.24) porta a

$$\Delta p = \frac{u}{2\pi c} 2\pi \frac{1}{3} c dt d\sigma \quad (\text{C.4})$$

La pressione esercitata da una radiazione isotropa su una superficie perfettamente riflettente è quindi

$$P = \frac{\Delta p}{d\sigma dt} = \frac{u}{3} \quad (\text{C.5})$$

### C.2 Legge di Stefan-Boltzmann

Boltzmann considera un cilindro di volume  $V$  con un'estremità costituita da un pistone riflettente: in equilibrio termodinamico la radiazione all'interno del pistone ha le stesse proprietà della radiazione di corpo nero. A causa della pressione di radiazione esercitata sul pistone il volume subisce una variazione  $dV$  accompagnata da un lavoro del campo  $dW = P dV$ . La

prima legge della termodinamica lega lavoro, calore scambiato ed energia interna  $U = uV$  (si usa la (C.5)):

$$dQ = dU + P dV = d(uV) + \frac{1}{3}u dV = \frac{4}{3}u dV + V du \quad (\text{C.6})$$

La densità di energia  $u_\nu$  presente nel cilindro è, in accordo con la legge di Kirchhoff (1.53), una funzione universale di frequenza e temperatura: supponendo l'indice di rifrazione del gas presente nel cilindro essere pari a uno, risulta infatti

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} K_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) \quad (\text{C.7})$$

Quindi la densità di energia totale  $u = \int_0^\infty u_\nu d\nu$  dipende solo dalla temperatura, e possiamo scrivere

$$dQ = \frac{4}{3}u dV + V \frac{\partial u}{\partial T} dT \quad (\text{C.8})$$

La variazione di entropia  $S$  associata a questa trasformazione è

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T} dT \quad (\text{C.9})$$

La seconda legge della termodinamica è valida se e solo se  $dS$  è un differenziale esatto (ossia esiste la *funzione di stato*  $S$  di cui  $dS$  è il differenziale:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV \quad (\text{C.10})$$

e per confronto diretto si ottiene

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{\partial u}{\partial T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{4}{3} \frac{u}{T} \quad (\text{C.11})$$

Un differenziale (1-forma) esatta è necessariamente *chiusa*<sup>1</sup>, ossia  $S$  soddisfa il criterio di Schwartz (le derivate seconde commutano):

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{4}{3} \frac{d}{dT} \left( \frac{u}{T} \right) = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{1}{T} \frac{\partial u}{\partial T} \quad (\text{C.12})$$

Posto  $u' \equiv \frac{\partial u}{\partial T}$  risulta

$$\frac{4}{3} \left( \frac{u'T - u}{T^2} \right) = \frac{u'}{T} \Rightarrow u' = \frac{4}{T} u \Rightarrow u = \text{cost } T^4 \quad (\text{C.13})$$

La costante di integrazione, solitamente indicata con  $a_R$ , è detta *costante di radiazione*; viene solitamente ridefinita ponendo

$$a_R = \frac{4}{c} \sigma_B \quad (\text{C.14})$$

dove  $\sigma_B$  è la costante di Stefan-Boltzmann; allora

$$u = \frac{4}{c} \sigma_B T^4 \quad (\text{C.15})$$

In questo modo il flusso della radiazione isotropa è

$$F [\text{erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}] = \int_0^\infty F_\nu d\nu = \int_0^\infty \pi B_\nu d\nu = \int_0^\infty \pi K_\nu d\nu = \frac{c}{4} u = \sigma_B T^4 \quad (\text{C.16})$$

Già nel 1879 Stefan, sulla base di dati sperimentali, aveva suggerito la dipendenza della densità di energia dalla quarta potenza della temperatura.

<sup>1</sup>Il contrario, in generale, non è vero.

## Appendice D

# Assorbimento dell'oscillatore

La (2.21) è ricavata da Born [7, pp. 455-458] in maniera leggermente diversa da quella seguita nella sezione 2.2. Innanzitutto scrive ciascuna componente del campo grazie al teorema di inversione di Fourier:

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = \check{f}(t) \quad (\text{D.1})$$

$$f(\nu) = \int_0^T E_x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \hat{E}_x(\nu) \quad (\text{D.2})$$

supponendo che il sostegno di  $E_x$  sia l'intervallo  $[0, T]$ . Usando per la densità del campo

$$u = \frac{1}{8\pi} \overline{(E^2 + B^2)} = \frac{3}{4\pi} \overline{E_x^2} \quad (\text{D.3})$$

essendo per isotropia  $E_x^2 = E_y^2 = \dots = B_z^2$  e rappresentando con la barra la media temporale sul sostegno

$$\overline{E_x^2} = \frac{1}{T} \int_0^T E_x^2 dt \quad (\text{D.4})$$

Usando la (D.1) e osservando che  $f$  è anti-hermitiana<sup>1</sup> si ottiene

$$u_\nu = \frac{3}{2\pi T} |f(\nu)|^2 \quad (\text{D.5})$$

Born scrive quindi la (2.13) senza il termine di smorzamento:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_x(t) \quad (\text{D.6})$$

Per risolvere l'equazione differenziale non si esplicita la componente del campo, ma si scrive (secondo un risultato della teoria delle equazioni differenziali) la soluzione come somma della soluzione generale dell'equazione omogenea con una soluzione particolare dell'equazione non-omogenea:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{Soluzione dell'equazione omogenea} \quad (\text{D.7})$$

$$x(t) = \frac{e}{\omega_0 m} \int_0^t E_x(t') \sin(\omega_0(t-t')) dt' \quad \text{Soluzione dell'equazione non-omogenea} \quad (\text{D.8})$$

---

<sup>1</sup>Ossia  $f^*(\nu) = f(-\nu)$

Si verifica per derivazione diretta che la (D.8) risolve la (D.6) con le condizioni iniziali  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . L'energia assorbita dall'oscillatore per unità di tempo è

$$\dot{W}_A = \overline{\dot{x}eE_x(t)} = \frac{e}{T} \int_0^T \dot{x}(t)E_x(t) dt \quad (2.18)$$

Esplicitando  $\dot{x}$  dalle (D.7),(D.8) il termine relativo alla derivata del seno può essere scritto come

$$\cos(\omega_0(t-t')) = \cos(2\pi\nu_0(t-t')) = \frac{1}{2} \left( e^{2\pi\nu_0(t-t')} + e^{-2\pi\nu_0(t-t')} \right) \quad (D.9)$$

Tenendo presente la (D.2) e che  $|f(\nu_0)|^2 = f(\nu_0)f^*(\nu_0)$  si ottiene

$$\dot{W}_A = \frac{e^2}{2mT} |f(\nu_0)|^2 \quad (D.10)$$

Ricordando infine la (D.5)

$$\dot{W}_A = \frac{\pi e^2}{3m} u_{\nu_0} \quad \square \quad (2.21)$$

# Appendice E

## Meccanica statistica classica

### E.1 Ensemble microcanonico e canonico

Si presentano in questa appendice alcuni risultati fondamentali di meccanica statistica classica ([vedi 15]). Si consideri un sistema fisico composto da  $N$  particelle: lo stato del sistema è completamente determinato da un punto, detto *rappresentativo*, nello spazio delle fasi  $\Gamma$ , ossia lo spazio a sei dimensioni delle coordinate e dei momenti:

$$(p, q) = (p_x^1, p_y^1, p_z^1, p_x^2, \dots, p_x^N, p_y^N, p_z^N, q_x^1, q_y^1, q_z^1, \dots, q_x^N, q_y^N, q_z^N) \in \Gamma \quad (\text{E.1})$$

Una proprietà macroscopica del sistema fisico è una funzione del tipo

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{E.2})$$

La proprietà macroscopica (o *stato macroscopico*) per eccellenza è l'*energia* del sistema, descritta dall'hamiltoniana  $H(p, q)$ . La dinamica del sistema è determinata dalle equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{p}_i^j &= -\frac{\partial H}{\partial q_i^j} \\ \dot{q}_i^j &= \frac{\partial H}{\partial p_i^j} \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Se il sistema fisico è isolato l'energia si conserva, dunque le coordinate e i momenti evolvono nello spazio delle fasi sugli *insiemi di livello dell'energia*.

$$\Sigma_{\mathcal{E}} := \{(p, q) \in \Gamma : H(p, q) = \mathcal{E}\} \quad (\text{E.4})$$

$\Sigma_{\mathcal{E}}$  è una sottovarietà  $6N - 1$ -dimensionale di  $\Gamma$ , e quindi una superficie nello spazio delle fasi, se  $\mathcal{E}$  non è un *valore critico*, ossia se  $H$  è sommersiva in ogni punto di  $\Sigma_{\mathcal{E}}$ .<sup>1</sup> I *punti critici* sono allora quelli tal per cui la matrice jacobiana di  $H$  ha rango nullo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} = 0 &\Rightarrow q = \text{cost} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = 0 &\Rightarrow p = \text{cost} \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Ossia, i punti critici sono gli *equilibri*. Il significato è evidente: se il sistema è in un punto di equilibrio, per definizione, ci rimane: se ne uscisse, cambierebbe energia. L'insieme di livello di un'energia di equilibrio non è quindi una superficie, bensì un *punto* nello spazio delle fasi.

---

<sup>1</sup>Ossia, se il differenziale di  $H$  è suriettivo.

**Ensamble** L'insieme statistico o *ensamble di Gibbs* relativo al sistema fisico è il sottoinsieme dello spazio delle fasi costituito dalle coppie  $(p, q)$  consentite al sistema. Se il sistema fisico è isolato, per quanto appena detto, questo sottoinsieme è un punto o una superficie nello spazio delle fasi; si parla in questo caso di *ensamble microcanonico*. Se invece il sistema fisico è chiuso (ossia non scambia materia con l'ambiente), ma scambia *energia* con l'ambiente, può assumere valori diversi di energia: il suo insieme statistico, detto *ensamble canonico*, è quindi un "volume" nello spazio delle fasi. In particolare, si considera il caso in cui il sistema fisico scambia calore con un *termostato*, ossia un secondo sistema a temperatura  $T$  costante (*sistema canonico*).

**Postulato di equiprobabilità a priori** La meccanica statistica classica si basa sul seguente postulato: per un sistema in equilibrio termodinamico, fissato uno stato macroscopico, ogni microstato  $(p, q)$  relativo al macrostato è egualmente probabile. In altri termini, dato un valore  $a$  di una proprietà macroscopica  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , il sistema ha la stessa probabilità di essere in uno qualsiasi dei microstati  $(p, q)$  nella preimmagine di  $a$ .

**Distribuzione dell'ensamble** Si vuole definire una funzione reale  $\rho(p, q)$  avente l'ensamble come dominio che esprima la probabilità che il sistema sia nel microstato  $(p, q)$ . Nel caso di un insieme microcanonico l'energia del sistema è costante, ossia solo un macrostato è concesso. Per il postulato di equiprobabilità a priori, allora, ogni microstato corrispondente all'unica energia possibile è egualmente probabile:

$$\rho_{\text{micro}}(p, q) = \text{cost} \quad (\text{E.6})$$

Esplicitare la costante non è banale, ma non ce ne occupiamo.

Nel caso di ensamble canonico, invece, il sistema fisico può assumere valori diversi di energia. Naturalmente, fissato uno di questi valori, ciascun microstato relativo ad esso sarà egualmente probabile, *ma microstati relativi ad energie diverse hanno probabilità diverse*. In altre parole, è equivalente pensare alla distribuzione dell'ensamble canonico (*distribuzione canonica*) come alla *distribuzione di probabilità per l'energia di un sistema fisico a contatto con un termostato*. È dovuto a Boltzmann il fondamentale risultato:

**Legge E.1** (Distribuzione canonica o di Boltzmann). *Si consideri un sistema fisico di hamiltoniana  $H$  che sin equilibrio termico con un termostato di temperatura  $T$  e sia  $E \subset \Gamma$  il suo ensamble canonico. La probabilità che il punto rappresentativo del sistema nello spazio delle fasi sia nell'elemento di volume  $[x, x + dx]$  con  $x = (p, q) \in E$  è*

$$\rho_{\text{can}} : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_{\text{can}}(p, q) dp dq = C e^{-\frac{H(p, q)}{k_B T}} dp dq \quad (\text{E.7})$$

$k_B$  è la costante di Boltzmann e  $C$  è la costante di normalizzazione definita da

$$\int_E \rho_{\text{can}}(p, q) dp dq = 1 \quad (\text{E.8})$$

**Definizione E.1.** La *temperatura inversa* è

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \quad (\text{E.9})$$

**Definizione E.2.** La *funzione di partizione* di un sistema canonico di temperatura  $T$  e ensamble canonico  $E \in \Gamma$  è

$$z(T, E) := \frac{1}{C} = \int_E e^{-\beta H(p, q)} dp dq \quad (\text{E.10})$$

$z$  ha le dimensioni di un'azione (energia  $\cdot$  tempo).

D'ora in poi parleremo solo di distribuzione canonica, quindi aboliamo l'etichetta  $_{\text{can}}$ . Si può quindi riscrivere

$$\rho(p, q) = \frac{1}{z} e^{-\beta H(p, q)} \quad (\text{E.11})$$

La distribuzione canonica permette di determinare il valore più probabile (o valore *medio*) per una proprietà macroscopica all'equilibrio come media dei valori possibili pesati dalla probabilità che si verifichino: fissato il sistema fisico, questo valore dipende solo *dalla temperatura di equilibrio*. Omettendo per semplicità le dipendenze esplicite dalle variabili,

$$\langle f \rangle := \int_E f \rho dp dq = \frac{1}{z} \int_E f e^{-\beta H} dp dq \quad (\text{E.12})$$

In particolare, per l'energia media di un sistema canonico, si osserva che

$$\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = \frac{1}{z} \int_E -H e^{-\beta H} dp dq = -\langle H \rangle \quad (\text{E.13})$$

Ossia

$$\boxed{\langle H \rangle = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}} \quad (\text{E.14})$$

### E.1.1 Equipartizione energia per un sistema canonico

Se l'hamiltoniana di un sistema canonico diverge all'infinito quando le coordinate e i momenti tendono all'infinito si integra per parti la funzione di partizione rispetto ad un momento o una coordinata qualsiasi, diciamo  $q_i$ :

$$z = \int_E e^{-\beta H} dp dq = \underbrace{q_i e^{-\beta H}}_0 \Big|_E + \int_E \beta q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} e^{-\beta H} dp dq \quad (\text{E.15})$$

Allora, posto  $Q_i = q_i \frac{\partial H}{\partial q_i}$ ,  $P_j = p_j \frac{\partial H}{\partial p_j}$ , risulta

$$\begin{aligned} z &= \beta \int_E Q_i e^{-\beta H} dp dq = \beta z \langle Q_i \rangle \\ &= \beta \int_E P_j e^{-\beta H} dp dq = \beta z \langle P_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

Ossia

$$\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \rangle = \frac{1}{\beta} = k_B T, \quad \forall i, j = 1, \dots, 3N \quad (\text{E.17})$$

È interessante l'applicazione di questo risultato al caso, molto frequente, in cui l'hamiltoniana di un sistema sia composta (in parte o esclusivamente) da termini quadratici nelle coordinate o nei momenti:

$$H(p, q) = \sum_{i,j} a_i q_i^2 + b_j p_j^2 \equiv \sum_{i,j} H_{q_i} + H_{p_j} \quad (\text{E.18})$$

In questo caso

$$\langle q_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \rangle = \langle 2a_i q_i^2 \rangle = 2 \langle H_{q_i} \rangle = \langle p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \rangle = \langle 2b_j p_j^2 \rangle = 2 \langle H_{p_j} \rangle = k_B T \quad (\text{E.19})$$

Vale ossia la

**Legge E.2** (Equipartizione energia). *Dato un sistema canonico a contatto con un termostato di temperatura  $T$  ciascun termine quadratico dell'hamiltoniana (o grado di libertà) contribuisce all'energia media totale con*

$$\langle H_{q_i} \rangle = \langle H_{p_j} \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{E.20})$$

## E.2 Oscillatore armonico classico

L'oscillatore armonico unidimensionale classico è l'esempio per eccellenza: si tratta prima la meccanica di un oscillatore isolato, poi la statistica di un oscillatore in un bagno termico.

**Canonico?** Una precisazione: il significato del termine *canonico* è completamente diverso a seconda dell'ambito di utilizzo. Una *trasformazione canonica* in meccanica razionale preserva la struttura hamiltoniana del sistema, ossia si può scrivere la (E.24). Del significato statistico si è già discusso.

### E.2.1 Approccio meccanico

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale *isolato*. Utilizzando la teoria delle trasformazioni canoniche ([vedi 32]) si ricavano le equazioni del moto e la conservazione dell'energia. L'equazione dinamica e l'Hamiltoniana sono

$$m\ddot{q} = -kq \equiv -m\omega^2 q \quad (\text{E.21})$$

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \quad (\text{E.22})$$

Si effettuano due trasformazioni canoniche: la prima è il riscaldamento

$$(p, q) = w(\tilde{p}, \tilde{q}) = \left( \sqrt{m\omega} \tilde{p}, \frac{1}{\sqrt{m\omega}} \tilde{q} \right) \quad (\text{E.23})$$

La nuova hamiltoniana è

$$\tilde{H} = H \circ w = \frac{\omega}{2} (\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2) \quad (\text{E.24})$$

La seconda introduce le variabili azione-angolo per l'oscillatore

$$(\tilde{p}, \tilde{q}) = h(I, \varphi) = \left( \sqrt{2I} \cos \varphi, \sqrt{2I} \sin \varphi \right) \quad (\text{E.25})$$

L'hamiltoniana assume la forma integrabile (ossia, compare solo l'azione)

$$\hat{H} = \tilde{H} \circ h = \omega I \quad (\text{E.26})$$

In questa forma, le equazioni di Hamilton nelle variabili azione-angolo si risolvono immediatamente: l'azione è costante e l'angolo procede con velocità costante.

$$\dot{I} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow I(t) = I_0 \quad (\text{E.27})$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial I} = \omega = \text{cost} \Rightarrow \varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$

Nelle variabili di partenza le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{2I_0 m \omega} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ q(t) &= \sqrt{\frac{2I_0}{m \omega}} \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Posto  $\mathcal{E} = H(p(t), q(t))$  risulta

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m} (2I_0 m \omega) \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{2I_0}{m \omega} \sin^2(\omega t + \varphi_0) = I_0 \omega = \text{cost} \quad (\text{E.29})$$

Ossia, come ben noto, l'energia è costante lungo le soluzioni. L'ampiezza massima dell'oscillazione è

$$A = \sqrt{\frac{2I_0}{m\omega}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \quad (\text{E.30})$$

Equivalentemente, l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza massima di oscillazione:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (\text{E.31})$$

## E.2.2 Approccio statistico

Un oscillatore isolato è un esempio di sistema *microcanonico*, a energia costante: l'insieme microcanonico - o orbita - è un'ellisse nello spazio delle fasi bidimensionale, e quindi una superficie, tranne che nel caso critico  $\mathcal{E} = 0$ .

Sia adesso l'oscillatore non più isolato, ma a contatto con un termostato: in questo caso è possibile che l'oscillatore assuma, all'equilibrio, *qualsiasi* energia tra 0 e  $\infty$ . L'ensamble canonico occupa quindi tutto lo spazio delle fasi:  $E = \Gamma = \mathbb{R}^2$ . La distribuzione canonica ci dice quale è l'energia più probabile per l'oscillatore all'equilibrio: l'hamiltoniana soddisfa le ipotesi necessarie per poter usare il teorema di equipartizione (è quadratica nella coordinata e nel momento), quindi

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T = k_B T \quad (\text{E.32})$$

**Naturalmente** si giunge al risultato anche con un calcolo esplicito: si scrive innanzitutto la funzione di partizione

$$z = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta H} dp dq \quad (\text{E.33})$$

Il cambio di coordinate giusto è suggerito dalle equazioni del moto per l'oscillatore:

$$(p, q) = w(\mathcal{E}, \varphi) = \left( \sqrt{2m\mathcal{E}} \cos \varphi, \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}} \sin \varphi \right) \quad (\text{E.34})$$

In queste coordinate  $H = \mathcal{E}$ , con  $(\mathcal{E}, \varphi) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ . Lo jacobiano del cambio di coordinate è ( $w'$  indica la matrice jacobiana di  $w$ )

$$|\det w'(\mathcal{E}, \varphi)| = \omega^{-1} \quad (\text{E.35})$$

Allora, per i teoremi del calcolo integrale

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-\beta\mathcal{E}} |\det w'(\mathcal{E}, \varphi)| d\mathcal{E} d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{\omega} \int_0^\infty e^{-\beta\mathcal{E}} d\mathcal{E} \\ &= \frac{2\pi}{\omega} \beta^{-1} = \frac{2\pi}{\omega} k_B T \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Si osservi che, correttamente,  $z$  ha le dimensioni di un tempo (il periodo dell'oscillatore) per un'energia. A questo punto

$$\langle H \rangle = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta} = +\frac{\omega}{2\pi} \beta \frac{2\pi}{\omega} \frac{1}{\beta^2} = \beta^{-1} = k_B T \quad \square \quad (\text{E.37})$$

**Oppure** Direttamente dalla (E.12):

$$\langle H \rangle = \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H e^{-\beta H} dp dq \quad (\text{E.38})$$

Il cambio di coordinate è lo stesso di prima e

$$\langle H \rangle = \underbrace{z^{-1} 2\pi \omega^{-1}}_{\beta} \underbrace{\int_0^{\infty} \mathcal{E} e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E}}_{\beta^{-2}} = \beta^{-1} \quad \square \quad (\text{E.39})$$

È utile esplicitare la funzione di partizione e riscrivere questa espressione come

$$\langle H \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \mathcal{E} e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E}}{\int_0^{\infty} e^{-\beta \mathcal{E}} d\mathcal{E}} \quad (\text{E.40})$$

Si confronti questa espressione con (2.67).

**Ancora** L'energia più probabile è quella che massimizza la funzione

$$f(\mathcal{E}) = \mathcal{E} e^{-\beta \mathcal{E}} \Rightarrow f'(\mathcal{E}) = e^{-\beta \mathcal{E}} (1 - \beta \mathcal{E}) = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = \beta^{-1} \quad \square \quad (\text{E.41})$$

Quest'ultimo metodo suggerisce un modo di visualizzare l'orbita più probabile nello spazio delle fasi: basta infatti esplicitare l'hamiltoniana nella funzione

$$f(p, q) = H(p, q) e^{-\beta H(p, q)} \quad (\text{E.42})$$

Come ci si aspetta, le intersezioni del grafico di questa funzione in  $\mathbb{R}^3$  con piani di quota costante sono delle ellissi, ossia le orbite a energia fissata. Si veda la figura E.1.

Per finire, è utile calcolare il valore medio di qualche altra *osservabile* dell'oscillatore in equilibrio con un termostato a temperatura  $T$ , ancora grazie al teorema di equipartizione o direttamente con la (E.12):

$$U = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \Rightarrow \langle U \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{E.43})$$

$$K = \frac{1}{2m} p^2 \Rightarrow \langle K \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (\text{E.44})$$

Il valore medio di posizione e momento è nullo, poiché integrale su  $\mathbb{R}$  di una funzione pari per una funzione dispari.

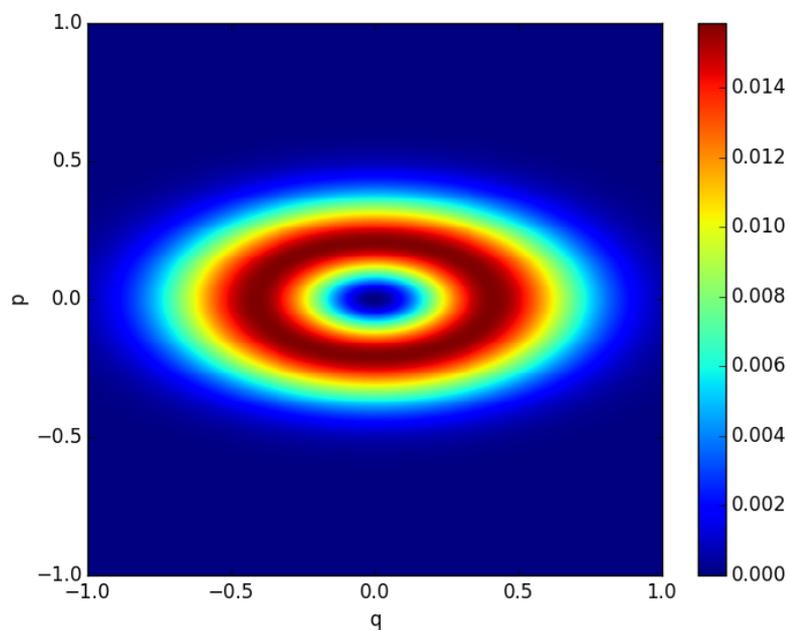
$$\langle q \rangle = 0 \quad (\text{E.45})$$

$$\langle p \rangle = 0 \quad (\text{E.46})$$

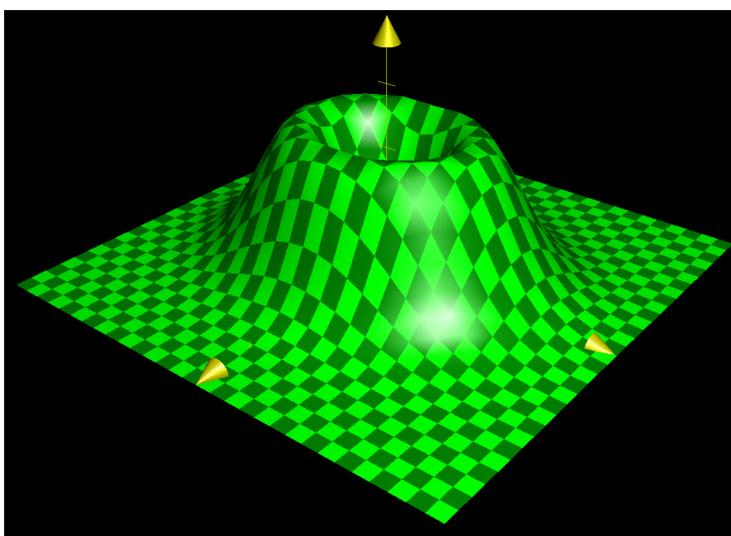
Il valore medio degli scarti quadratici è

$$\langle \Delta q^2 \rangle = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle = \langle q^2 \rangle = \left\langle \frac{2U}{m\omega^2} \right\rangle = \frac{k_B T}{m\omega^2} \quad (\text{E.47})$$

$$\langle \Delta p^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = 2m \langle K \rangle = m k_B T \quad (\text{E.48})$$



(a) *Spazio delle fasi*



(b) *Grafico in  $\mathbb{R}^3$*

Figura E.1: Sopra, spazio delle fasi dell'oscillatore armonico unidimensionale a contatto con un termostato. Le zone più rosse corrispondono alle orbite più probabili.

Sotto, grafico in  $\mathbb{R}^3$  della funzione che descrive le energie, e quindi le orbite, più probabili. In entrambi i grafici il massimo della funzione, ossia l'orbita più probabile, è costituita dal luogo dei punti  $(p, q)$  tali che  $H(p, q) = k_B T$ .

## Appendice F

# Il modello di Einstein-Hopf

Riportiamo i passaggi concettuali principali che portano alla determinazione della (2.88). Il dipolo di Einstein-Hopf è costituito da una massa  $m$  di carica  $e$  elasticamente legata ad una massa  $M \gg m$  di carica  $-e$ . Nel sistema di riferimento centrato nella massa  $M$  il momento di dipolo è  $\mathbf{p}(t) = e\mathbf{z}(t)$ , dove  $\mathbf{z}(t) = z(t)\hat{\mathbf{z}}$  è il raggio vettore della massa  $m$ . Grazie al fatto che  $M \gg m$  e sotto l'usuale ipotesi che il campo elettrico esterno non cambi apprezzabilmente sulla scala di distanza delle due cariche l'equazione del moto è quella dell'oscillatore in equilibrio con la radiazione:

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{e}{m} E_z(t) + \gamma \ddot{z} \quad (2.13)$$

dove  $E_z(t)$  è la componente del campo esterno parallela alla direzione di oscillazione.

I dipoli oscillanti sono tuttavia liberi di *traslare*, diciamo lungo l'asse  $x$ . Einstein ed Hopf mostrano che il dipolo in moto, a causa dell'interazione col campo moto, risente di una *forza di ritardo* che tende a rallentarlo. Il modulo di questa forza è ( $v \ll c$  è la velocità dell'oscillatore lungo l'asse  $x$ )

$$F = -Rv \quad (F.1)$$

$$R = \frac{4\pi e^2}{5mc^2} \left( u_\omega - \frac{\omega}{3} \frac{du_\omega}{d\omega} \right) \quad (F.2)$$

Inoltre, a causa del "rinculo" dovuto all'assorbimento e all'emissione, il dipolo viene accelerato dal campo (a causa della conservazione dell'impulso associato al fenomeno di emissione-assorbimento). Quando la diminuzione di energia cinetica dovuta alla forza di ritardo è bilanciata dall'aumento di energia cinetica dovuto al rinculo, il sistema è in equilibrio. Se  $(M+m)v(t) \approx Mv(t)$  è il momento lineare del dipolo, la sua variazione in un tempo  $\delta t$  è

$$Mv(t + \delta t) = Mv(t) + \Delta - Rv(t)\delta t \quad (F.3)$$

dove  $\Delta$  è il momento guadagnato grazie al rinculo e  $Rv\delta t$  quello perso a causa forza di ritardo. La direzione di emissione-assorbimento è casuale e  $\Delta$  può essere, nel tempo  $\delta t$ , sia positivo che negativo:  $\langle v(t)\Delta \rangle = 0$ . La condizione di equilibrio è data dalla conservazione dell'energia cinetica media  $\langle K_{\text{finale}} \rangle - \langle K_{\text{iniziale}} \rangle = \frac{1}{2}k_B T - \frac{1}{2}k_B T = 0$ . Elevando al quadrato entrambi i membri della (F.3), trascurando i termini quadratici in  $\delta t$  e facendo la media si ottiene  $2M[\langle K_{\text{finale}} \rangle - \langle K_{\text{iniziale}} \rangle] = 0 = \langle \Delta^2 \rangle - 4R\delta t \langle K_{\text{iniziale}} \rangle$ , ossia la condizione di equilibrio tra impulso guadagnato e perso è

$$\frac{\Delta^2}{\delta t} = 2Rk_B T \quad (F.4)$$

Per determinare l'impulso  $\Delta$  va scritta la forza che il campo esterno esercita sul dipolo (non quella di ritardo). Nel caso di un dipolo non oscillante l'energia potenziale del dipolo in un

campo esterno è<sup>3</sup>  $U = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{p}$ , dunque la forza esercitata sul dipolo è  $\mathbf{F} = -\nabla U = \nabla(\mathbf{E} \cdot \mathbf{p})$ , ossia, sommando su indici ripetuti

$$\mathbf{F} = \nabla(E_i p_i) = (\partial_x(E_i p_i), \partial_y(E_i p_i), \partial_z(E_i p_i)) \quad (\text{F.5})$$

Il vettore  $\mathbf{p}$  è invariante per traslazioni, quindi possiamo scrivere

$$F_j = \partial_j(E_i p_i) = p_i \partial_j E_i \quad (\text{F.6})$$

Inoltre, se  $\varphi$  è il potenziale del campo elettrico esterno,

$$\partial_j E_i = -\partial_j \partial_i \varphi = -\partial_i \partial_j \varphi = \partial_i E_j \quad (\text{F.7})$$

Quindi la forza sul dipolo dovuta al campo esterno è

$$F_j = p_i \partial_i E_j = (\mathbf{p} \cdot \nabla) E_j \quad (\text{F.8})$$

Nel nostro caso  $\mathbf{p} = (0, 0, ez(t))$ , e il dipolo è vincolato a muoversi solo lungo l'asse  $x$ . Le formule derivate valgono anche nel caso di dipolo oscillante e

$$\mathbf{F} = ez(t) \partial_z \mathbf{E} = ez(t) \nabla E_z \quad (\text{F.9})$$

L'impulso impartito al dipolo nel tempo  $\delta t$  dalla componente  $x$  della forza è quindi

$$\Delta = \int_0^{\delta t} F_x dt = e \int_0^{\delta t} \int_0^{\delta t} z(t) \partial_x E_z(t) dt \quad (\text{F.10})$$

Si tratta quindi di esplicitare il campo elettrico  $E_z(t)$ , risolvere l'equazione del moto (2.13) per determinare  $z(t)$  e inserire queste due quantità nell'integrale. Il campo viene esplicitato come sovrapposizione di onde piane monocromatiche, e l'espressione che si ottiene è

$$\frac{\Delta^2}{\delta t} = \frac{4\pi^4 c^4 \gamma}{5\omega^2} u_\omega^2 \quad (\text{F.11})$$

Il confronto con la (F.4), insieme alla definizione (F.2) di  $R$ , consente di scrivere l'equazione differenziale cercata per la densità del campo elettromagnetico:

$$u_\omega - \frac{\omega}{3} \frac{du}{d\omega} = \frac{\pi^2 c^3}{3k_B T \omega^2} u_\omega^2 \quad \square \quad (\text{2.88})$$

## Appendice G

# Oscillatore armonico in rappresentazione di Schrodinger

Si continua con le notazioni introdotte nella sezione 3.2 cambiando, per praticità, la notazione per l'operatore posizione normalizzato:  $x' \rightarrow \xi$ . Le rappresentazioni di Schrodinger<sup>1</sup> degli operatori è

$$\xi \mapsto \xi, \quad p' \mapsto -i \frac{d}{d\xi} \quad (\text{G.1})$$

Analogamente la rappresentazione dello stato  $|\psi\rangle$  nella base di autostati (impropri) dell'operatore posizione è la funzione d'onda  $\psi(\xi) := \langle \xi | \psi \rangle$  e l'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana si riscrive

$$\left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right) \psi(\xi) = 2 \frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega} \psi(\xi) := 2\mathcal{E} \psi(\xi) \quad (\text{G.2})$$

Si tratta di risolvere l'equazione

$$\psi''(\xi) + (2\mathcal{E} - \xi^2) \psi(\xi) = 0 \quad (\text{G.3})$$

Da considerazioni generali sulle proprietà dell'equazione di Schrodinger unidimensionale, essendo il potenziale *pari*, si possono cercare funzioni d'onda a parità definita. Ricordiamo inoltre che essendo il potenziale divergente a  $\infty$  agli estremi del dominio lo spettro è discreto non degenere.<sup>2</sup>

La soluzione deve soddisfare  $\psi'' \approx \xi^2 \psi$  per  $|\xi| \rightarrow \infty$  e  $\psi \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0$ ; si verifica che  $\psi(\xi) = \xi^k e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  soddisfa queste richieste  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Si cerca allora una soluzione nella forma

$$\psi(\xi) = \mathcal{H}(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (\text{G.4})$$

dove le funzioni  $\mathcal{H}(\xi)$  sono i *polinomi di Hermite*, tali che per  $|\xi| \rightarrow \infty$   $\mathcal{H}$  cresca al massimo come una potenza di  $\xi$ . La (G.3) si riscrive in termini di  $\mathcal{H}$  e si cerca la soluzione dell'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine che si ottiene come serie di potenze:

$$\mathcal{H}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi^n \quad (\text{G.5})$$

---

<sup>1</sup>ossia un possibile isomorfismo tra l'algebra degli operatori su  $\mathcal{H}$  e l'algebra degli operatori sullo spazio  $L^2$  delle funzioni a quadrato integrabile, scelto in modo che l'operatore posizione sia semplicemente la moltiplicazione ed esteso al momento grazie alla regola di commutazione.

<sup>2</sup>Ossia, è possibile che  $\psi \in L^2$  solo per valori discreti dell'energia.

Si ottiene la seguente espressione ricorsiva per i coefficienti  $C_n$ :

$$C_{n+2} = \frac{2n+1-2\mathcal{E}}{(n+2)(n+1)}C_n \quad (\text{G.6})$$

La parità di  $\psi$  è la stessa di  $\mathcal{H}$ . Poiché  $C_{2n} \propto C_0$  e  $C_{2n+1} \propto C_1$ , i polinomi di Hermite con  $C_1 = 0$  sono pari e quelli con  $C_0 = 0$  sono dispari. Poiché stiamo cercando funzioni d'onda a parità definita saremo sempre in uno di questi due casi.

Dalla (G.6) sembra che sia possibile determinare i coefficienti di Hermite, e quindi la funzione d'onda, *per ogni scelta di  $\mathcal{E}$* , ma sappiamo che lo spettro di energia deve essere discreto. La quantizzazione dello spettro è una conseguenza del criterio di convergenza della serie (G.5). Si osserva che

$$\frac{C_{n+2}}{C_n} \sim \frac{2}{n} \quad \text{per } n \rightarrow \infty \quad (\text{G.7})$$

Questo andamento è lo stesso dei coefficienti dello sviluppo di  $e^{\xi^2}$ , e non è quindi accettabile. Affinché la serie (G.5) converga è necessario che, da un certo punto in poi, tutti i coefficienti della serie siano nulli:

$$\exists n^* \in \mathbb{N} : C_{n^*+2}=0 \quad (\text{G.8})$$

L'energia (adimensionale) del sistema in questo caso, ossia l'autovalore dell'autofunzione che si ottiene col polinomio di Hermite di questo ordine, è dalla (G.6) (si ricordi che  $\mathcal{E} = \mathcal{E}/(\hbar\omega)$ )

$$\mathcal{E} = n^* + \frac{1}{2} \quad (\text{G.9})$$

Naturalmente si ottengono soluzioni accettabili  $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ , ossia troncando i polinomi di Hermite a ordini diversi, e in generale i livelli energetici possibili per l'oscillatore armonico sono

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{G.10})$$

Si riportano i primi esempi:

$$n = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_0 = \frac{\hbar\omega}{2}, \quad \psi_0(\xi) = C_0 e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (\text{G.11})$$

La costante si fissa normalizzando la funzione d'onda<sup>3</sup>; riesprimendo la posizione in termini di  $x^2 = \frac{\hbar}{m\omega} \xi^2$  si ottiene la funzione d'onda per lo stato fondamentale dell'oscillatore armonico:

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \quad (\text{G.12})$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \frac{3}{2}\hbar\omega, \quad \psi_1(\xi) = C_1 \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ \mathcal{E}_2 &= \frac{5}{2}\hbar\omega, \quad \psi_2(\xi) = (C_0 + C_2 \xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\ &= C_0 (1 - 2\xi^2) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{G.13})$$

---

<sup>3</sup>Essendo reale, basta porre  $\int_{\mathbb{R}} \psi_0^2(x) dx = 1$

# Riferimenti bibliografici

## Libri e Articoli

- [1] Marco Abate e Francesca Tovena. *Geometria Differenziale*. 1st Edition. UNITEXT – La Matematica per il 3+2. Springer Milan, 2011 (cit. alle pp. [42](#), [64](#), [66](#)).
- [2] J. M. Bardeen, B. Carter e S. W. Hawking. «The four laws of black hole mechanics». In: *Comm. Math. Phys.* 31.2 (1973), pp. 161–170 (cit. a p. [67](#)).
- [3] Alessandro Bettini. *Elettromagnetismo*. Seconda edizione. Zanichelli, 1994 (cit. alle pp. [9](#), [90](#)).
- [4] Erika Bohm-Vitense. *Introduction to Stellar Astrophysics*. Vol. 2: Stellar Atmospheres. Cambridge University Press, 1989 (cit. a p. [8](#)).
- [5] Ludwig Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie*. Vol. 1. JA Barth, 1896 (cit. a p. [30](#)).
- [6] Armando Francesco Borghesani. *Introduzione alla Struttura della Materia*. Seconda Edizione. Edizioni Libreria Progetto, 2007 (cit. alle pp. [5](#), [8](#), [25](#)).
- [7] Max Born, Roger John Blin-Stoyle e John Michael Radcliffe. *Atomic physics*. 8<sup>a</sup> ed. Blackie e Son, 1969 (cit. alle pp. [22](#), [24](#), [80](#)).
- [8] L.J. Boya. «The Thermal Radiation Formula of Planck (1900)». In: *ArXiv Physics e-prints* (feb. 2004) (cit. a p. [8](#)).
- [9] Albert Einstein. «On the quantum theory of radiation». In: *Physikalische Zeitschrift* 18 (1917), pp. 121–128 (cit. a p. [12](#)).
- [10] Maurizio Gasperini. *Manuale di relatività ristretta*. Springer Science e Business Media, 2010 (cit. a p. [13](#)).
- [11] D. ter Haar. *The Old Quantum Theory*. 1st edition. Pergamon Press, 1967.
- [12] S. W. Hawking. «Black hole explosions?» In: *Nature* 248.5443 (mar. 1974), pp. 30–31.
- [13] S. W. Hawking. «Particle creation by black holes». In: *Comm. Math. Phys.* 43.3 (1975), pp. 199–220 (cit. a p. [71](#)).
- [14] S. W. Hawking. «The quantum mechanics of black holes». In: *Scientific American* 236.1 (1976), pp. 34–40 (cit. alle pp. [68](#), [70](#)).
- [15] Kerson Huang. *Statistical mechanics*. Seconda edizione. Wiley, New York, 1963 (cit. a p. [82](#)).
- [16] Helge Kragh. «Preludes to dark energy: zero-point energy and vacuum speculations». In: *Archive for history of exact sciences* 66.3 (2012), pp. 199–240 (cit. alle pp. [36](#), [39](#)).
- [17] Thomas S Kuhn. *Black-body theory and the quantum discontinuity, 1894-1912*. Oxford, 1978 (cit. alle pp. [22](#), [33](#)).
- [18] Peter Lambropoulos e David Petrosyan. *Fundamentals of quantum optics and quantum information*. 1<sup>a</sup> ed. Springer, 2007 (cit. a p. [43](#)).

- [19] Kurt Lechner. *Elettrodinamica classica: Teoria e applicazioni*. UNITEXT. Springer Milan, 2014 (cit. a p. 48).
- [20] John D. McGervey. *Introduction to Modern Physics*. Seconda edizione. Academic Press, 1983 (cit. alle pp. 5, 8).
- [21] Dimitri Mihalas e Barbara Weibel Mihalas. *Foundations of radiation hydrodynamics*. Oxford Studies in Physics. Oxford University Press, 1984 (cit. alle pp. 5, 8, 12).
- [22] Peter W. Milonni. *The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics*. Academic Press, 1993 (cit. alle pp. 22, 43, 51).
- [23] Don N. Page. «Particle emission rates from a black hole: Massless particles from an uncharged, nonrotating hole». In: *Phys. Rev. D* 13 (2 gen. 1976), pp. 198–206 (cit. a p. 71).
- [24] Luigi E. Picasso. *Lectures in Quantum Mechanics: A Two-Term Course*. 1<sup>a</sup> ed. UNITEXT for Physics. Springer International Publishing, 2015 (cit. a p. 43).
- [25] Max Planck. *The origin and development of the quantum theory*. Clarendon Press, 1922 (cit. alle pp. 4, 22).
- [26] Max Planck e Morton Masius. *The Theory of Heat Radiation*. Blakiston, 1914 (cit. alle pp. 5, 7, 12, 16, 22, 29, 33).
- [27] M. Planck et al. *Planck's original papers in quantum physics: German and English edition*. Vol. 1. Taylor e Francis, 1972 (cit. alle pp. 4, 28).
- [28] Robert M. Wald. *Quantum field theory in curved spacetime and black hole thermodynamics*. 1<sup>a</sup> ed. Chicago lectures in physics. University of Chicago Press, 1994 (cit. a p. 40).

### Siti Web consultati

- [29] *Etendue*. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Etendue> (cit. a p. 11).
- [30] *Radiazione di Hawking*. URL: <http://www.vialattea.net/esperti/php/risposta.php?num=8334>.

### Materiale didattico

- [31] *Basic Optics: Radiance*. College of Saint Benedict e Saint John's University. URL: <http://www.physics.csbsju.edu/370/photometry/etendue.pdf> (cit. a p. 11).
- [32] Giancarlo Benettin. *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*. Università di Padova (cit. a p. 85).
- [33] Sergio Ortolani. *Complementi di astronomia*. Università di Padova (cit. a p. 14).
- [34] G. M. Wysin. *Quantization of the Free Electromagnetic Field: Photons and Operators*. Department of Physics, Kansas State University. 2011 (cit. a p. 43).
- [35] Lorenzo Zaninetti. *Guida all'Astrofisica Galattica*. Università di Torino. 2015 (cit. alle pp. 5, 8).