

L'AMBIENTE: UN DELICATO PUNTO DI EQUILIBRIO

Laureando: Peterle Fabio

Relatore: Gianna Maria Toffolo

Corso di laurea: Ingegneria dell'informazione

Data Laurea: 21/02/2013

Anno Accademico: 2012/2013

INDICE

0 Introduzione

1 Dinamica prede-predatori

1.1 La questione dell'Adriatico ed il primo modello lineare

1.2 Il modello di Vito Volterra

1.2.1 Dimostrazione della semplice stabilità del punto di equilibrio

1.3 L'effetto della pesca

1.4 Il disastro ecologico del lago Vittoria

1.4.1 Simulazione matlab

2 Dinamica della popolazione

2.1 Il modello di Malthus

2.2 Il modello di Verhulst

2.2.1 Dimostrazione dell'instabilità dell'origine nel modello di Verhulst

3 Il caos deterministico

3.1 La versione discretizzata dell'equazione di Verhulst

3.1.1 Simulazioni matlab

4 Conclusioni

5 Bibliografia

INTRODUZIONE

L'idea che è alla base della tesi aveva cominciato a manifestarsi già nei pomeriggi trascorsi a sbattere la testa sul libro “Analisi matematica 2” di Bramanti, Pagani, Salsa, quando alcuni inserti storici sulle equazioni differenziali e sul loro studio qualitativo, avevano indirizzato la mia mente verso scenari apparsi da subito affascinanti seppur nella loro marcata complessità. Una complessità che tuttavia veniva a mescolarsi all'utilità e alla chiarezza di alcune esperienze pratiche finendo con il dare concretezza anche ai più astratti teoremi matematici. E se la vastità del programma di analisi 2 aveva però in parte soffocato e offuscato questo aspetto pratico, il corso di sistemi e modelli ha consentito di recuperarlo per approfondirlo. Ed è proprio da questo approfondimento che è nato il presente elaborato la cui struttura conta tre macro-sezioni:

nella prima verranno presi in considerazione modelli di stato per lo studio della dinamica delle specie marine e lacustri, ossia come il loro numero varia nel tempo in relazione a diversi eventi interni e/o esterni (ad esempio la pesca); ciò verrà fatto servendosi dapprima di modelli matematici semplici ma poco realistici e in un secondo momento si provvederà ad introdurre equazioni di stato non più lineari ma che tengano conto di molti più dettagli e che dunque simulino più da vicino la realtà;

nella seconda parte si parlerà invece di dinamica della popolazione umana e in tal senso saranno approfonditi i modelli di Malthus e di Verhulst. Questa seconda sezione non è da considerarsi del tutto indipendente dalla prima in quanto l'andamento demografico della popolazione umana si ripercuote sull'intensità dell'attività di pesca e quindi sul numero di esemplari ittici;

nell'ultima sarà data una panoramica sull'intrigante questione del “caos”; cambiare di poco le ipotesi, o meglio le condizioni iniziali di un problema, può in certi campi essere causa di risultati del tutto diversi nel giro di poco tempo. E' quanto accade in meteorologia ma anche, ed ecco il collegamento con il resto della tesina, in particolari modelli demografici.

Settembre 2012

F. Peterle

1. DINAMICA PREDE-PREDATORI

1.1 La questione dell'Adriatico ed il primo modello lineare

Dovunque siate chiudete per un attimo gli occhi e immaginate di riaprirli in un giorno lontano a ridosso della fine della prima guerra mondiale, immersi in quell'enorme distesa azzurra che è il mare Adriatico. Andando nelle profondità vi accorgete che spopola una particolare specie di pesce mentre altre sono presenti in un numero assai più ridotto. Richiudete gli occhi e immergetevi nello stesso punto di mare ma prima del 1915. Osserverete una cosa diversa dalla precedente con un equilibrio del numero tra le varie specie di pesci. Possibile che in pochi anni lo scenario del mare potesse essere così diverso?

Era in sostanza questa la domanda con cui ebbe a che fare il biologo Umberto d'Ancona nel 1923. Dopo aver analizzato i dati del mercato del pesce di Trieste, aveva potuto constatare come la chiusura dell'attività dei pescherecci durante la guerra fosse andata a causare un incremento nel numero di pesci predatori e un abbassamento delle loro prede. Capire la ragione di un simile evento era vitale non per puro sfizio ecologico (già comunque di per sé fondamentale) bensì perché il tipo di pesce diminuito era una specie commestibile molto ricercata sicché a subirne gli effetti erano soprattutto i mercati.

D'Ancona non era un matematico, poteva però fornire ai matematici numerose informazioni biologiche che avrebbero permesso loro di costruire un modello che prevedesse l'andamento delle due specie in assenza e presenza di pesca.

Sperare che un tale modello sia al contempo verosimile e lineare, dunque risolvibile in maniera schematica con i metodi visti nella prima parte del corso di sistemi e modelli, è utopistico. Tuttavia è un buon punto di partenza e mi piace pensare che un matematico lavori in questo modo: dapprima costruisca un modello lineare disinteressandosi dei minimi dettagli che lo renderebbero verosimile ma non lineare, e solo in una seconda fase lo aggiusti ripetutamente per tenere conto di ogni minimo effetto. Lo schema che seguiremo sarà proprio questo.

Il primo modello che vediamo è quello che allora l'intuizione ci suggerirebbe fin da subito: il “cambiamento” del numero di prede (la parola “cambiamento” significa “derivata” in termini matematici), inteso come incremento o decremento, è dovuto al loro tasso a di riproduzione (che collabora per un aumento della specie) ma avrà altresì una dipendenza dal numero di predatori presenti: più predatori ci sono più è facile che le prede calino (di questo terrà conto il coefficiente b). Ciò per quanto concerne il modello delle prede; quello che emerge è tuttavia un senso di incompletezza dovuto all'assenza di un termine che tenga conto della mortalità per cause naturali delle prede che invece si suppone muoiano soltanto per mano, o meglio per bocca, dei predatori.

Per i pesci predatori supporremo che il loro aumento dipenda dalla situazione di “benessere” (coefficiente c) ossia dalla quantità di cibo presente (le prede) mentre un loro decremento è spiegato attraverso il tasso di mortalità d (per cause naturali). Anche questa parte di modello non è esente da semplificazioni: si è trascurata la possibilità che ad un certo punto vi sia competizione per le risorse, con ciò intendendo che se il numero di pesci grossi è elevato rispetto al loro cibo essi si troveranno a combattere contro i loro simili per accaparrarsi il poco nutrimento presente. Anche altri fenomeni, come la possibilità che una preda riesca a sfuggire ad un incontro ravvicinato con il predatore, sono stati lasciati per ora in disparte.

Il modello, inteso come sistema di equazioni rappresentative dei ragionamenti fatti, è allora

(indicando con $x(t)$ il numero di prede e con $y(t)$ quello dei predatori all'istante t):

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - by \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy \end{cases}$$

dove le costanti reali positive a, b, c, d descritte più sopra sono note ai matematici risultando tra le informazioni fornite dai biologi, esperti conoscitori dei tassi di riproduzione e mortalità delle specie ittiche in esame. Il modello è come detto lineare e l'obiettivo di risolverlo, cioè di ricavare gli andamenti temporali $x(t)$ e $y(t)$, può essere perseguito senza troppe difficoltà secondo l'approccio "autovalori-autovettori". Per farlo, senza ricorrere ad un livello di astrazione che complicherebbe il tutto, immagineremo che i parametri siano $a=3, b=c=d=2$; questo viene a significare ad esempio che vi è un tasso di riproduzione delle prede pari a 3 nuovi nati per individuo nell'unità di tempo (qui l'unità di tempo non è precisata, ma riguarda tempi propri della riproduzione dei pesci), e che il numero di predatori che muoiono per individuo nell'unità temporale è $d=2$. Analogamente per ogni predatore presente sono $b=2$ le prede che vengono mangiate nell'unità temporale e il numero di nuovi nati nella solita frazione di tempo tra i predatori è $c=2$ per ogni preda presente. Riscriviamo pertanto (1) come

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases}$$

Un modo equivalente di scriverlo è la forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{con la matrice } F = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ fondamentale nel calcolo delle soluzioni e}$$

nello studio del loro comportamento
asintotico cioè "a lungo tempo".

La linearità del sistema è tale da assicurare che la forma delle soluzioni sarà del tipo:

$$\mathbf{x}(t) = e^{Ft} \mathbf{x}(0) \quad \text{con } \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ mentre } \mathbf{x}(0) \text{ è il vettore delle condizioni iniziali } \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

indicante i valori di partenza delle due specie al tempo zero in cui si inizia ad osservare l'ecosistema marino (noti).

N.B. Il perché del fatto che questa sia proprio la soluzione è problema dell'analisi matematica. Non è tuttavia cosa molto difficile da verificare; è sufficiente sostituire queste funzioni nell'equazione e ci si accorge giungere ad un'identità. Chiariremo qui una volta per tutte che un sistema differenziale può in generale presentare infinite soluzioni tutte in una forma simile che differisce per una costante. Una volta stabilite però le condizioni iniziali la soluzione è univoca (almeno è così se sono verificate particolari proprietà come la continuità e derivabilità delle

funzioni a secondo membro, ipotesi qui sempre soddisfatte).

La maggior difficoltà nel risalire alla soluzione è ora il calcolo del termine e^{Ft} .

Possiamo però svolgere meccanicamente il calcolo trovando prima gli autovalori della matrice F che sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ cui sono associati gli autovettori $(1, 2)$, $(2, 1)$ rispettivamente. La matrice T che diagonalizza F è:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ con inversa } T^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e dunque}$$

$$e^{Ft} = T \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} T^{-1} = \dots = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 4e^{2t} & 2e^{-t} - 2e^{2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{2t} & 4e^{-t} - e^{2t} \end{bmatrix}. \text{ Infine si calcola la soluzione:}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{Ft} \mathbf{x}(0) = \dots = \begin{bmatrix} Ae^{-t} + 2Be^{2t} \\ 2Ae^{-t} + Be^{2t} \end{bmatrix} \text{ dove } A, B \text{ sono note e dipendono in particolare da } x(0) \text{ e } y(0).$$

Abbiamo trovato l'andamento temporale delle prede $x(t) = Ae^{-t} + 2Be^{2t}$ che, come quello dei predatori $y(t) = 2Ae^{-t} + Be^{2t}$, diverge per tempi lunghi il che, oltre ad essere impossibile per motivi fisici perché prima o poi l'ecosistema saturerebbe il suo spazio e non vi sarebbero più risorse neppure per le prede che si nutrono dei molluschi presenti nei fondali, nulla ci chiarisce sul problema di partenza ossia sul calo delle prede e sull'aumento dei predatori in un mare non disturbato dalla pesca (come assunto in questo modello dove l'azione della pesca non è stata infatti considerata per il desiderio di un'analisi dell'ecosistema come appariva nel corso della guerra: privo di interazione con l'esterno). Secondo quanto trovato prede e predatori continuerebbero ad accrescere il loro numero nel tempo, nessuna specie risulterebbe in calo rispetto all'altra come invece era stato rilevato da Umberto D'Ancona. Il modello non è allora in grado di dimostrare matematicamente il risvolto pratico e per questo non ci è di interesse.

1.2 Il modello di Vito Volterra

Buttare via il lavoro fatto sinora sarebbe però ingeneroso, nulla è inutile e se anche non porta a risultati concreti serve comunque a creare una sorta di "mentalità modellistica". Infatti il modello appena visto farà da base per i successivi che, facendo leva sul piano d'appoggio, modificheranno alcuni parametri e ne introdurranno altri con lo scopo di pervenire a soluzioni che trovino il riscontro riassunto dai dati del mercato di Trieste.

E' questo il caso del modello di Vito Volterra che nel 1924 fu incaricato proprio da Umberto d'Ancona di aiutarlo nella comprensione matematica della questione relativa al mar Adriatico.

Volterra iniziò osservando che il tasso di crescita delle prede in assenza di predatori era costante e pari ad a individui neonati nell'unità di tempo (per ogni individuo). Ancora una volta si ipotizzava che l'unica causa di morte per le prede fosse l'uccisione da parte dei pesci più grossi e di questo era comprensivo il coefficiente b : chiaramente più predatori e prede ci sono (cioè più è alto il prodotto xy) più è alta la probabilità che vi siano incontri tra esemplari delle due specie opposte: incontri, questi, che termineranno con la morte delle prede. In altre parole b tiene conto che il numero di

prede $x(t)$ decresce linearmente come funzione del numero di predatori $y(t)$. Qui si iniziano ad intravedere le differenze con il modello precedente. L'equazione dei predatori venne costruita dallo studioso italiano servendosi del coefficiente c per denotare il tasso di decrescita di essi in assenza di prede, mentre in presenza di prede il tasso di crescita risultava dipendere linearmente dal loro numero secondo d . Traducendo quanto detto si ottiene:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

(3) è un modello non lineare per il quale estrapolare le soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ è molto difficile non esistendo un ben precisato algoritmo come nel caso lineare. Anzi per questo sistema di equazioni differenziali non si riesce proprio a venirci a capo in maniera analitica, ossia non esiste un procedimento che dia gli andamenti di prede e predatori come funzione ben determinata del tempo. Metodi approssimativi, come quello con cui opera il Matlab, consentono di tracciare il grafico delle soluzioni in modo abbastanza buono senza però fornire l'esatta espressione analitica delle stesse. Senza tuttavia ricorrere (per ora) al Matlab quello che si può fare è un'analisi qualitativa del modello e, pur non arrivando all'espressione esatta degli andamenti, far nostra un'osservazione che è poi la ricetta per spiegare il fenomeno dell'Adriatico. Per compiere una tale analisi, la stessa fatta da Volterra a suo tempo, guardiamo nuovamente le equazioni del modello; per comodità indichiamo con x' la derivata temporale di $x(t)$, analogamente per $y(t)$. Dunque riscriviamo:

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

Dividiamo ora la prima equazione per x e la seconda per y dopo aver osservato che $x(t)=0$ e $y(t)=0$ sono delle soluzioni costanti del sistema, cioè ne rappresentano un punto di equilibrio (queste soluzioni verrebbero perse nella divisione effettuata e quindi bene abbiamo fatto a tenerle a mente). Otteniamo allora:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx \end{cases}$$

Un sistema differenziale equivalente, il che significa con le medesime soluzioni, è ottenibile moltiplicando ambo i membri della prima equazione per $-c+dx$, mentre la seconda viene moltiplicata specularmente per $a-by$.

$$\begin{cases} \frac{(-c+dx)x'}{x} = (a-by)(-c+dx) \\ \frac{(a-by)y'}{y} = (-c+dx)(a-by) \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ha l'imposizione

$$\frac{(-c + dx)x'}{x} - \frac{(a - by)y'}{y} = 0$$

Sviluppando il primo membro:

$$\frac{-cx' + dx x'}{x} - \frac{ay' - byy'}{y} = 0$$

da cui, spezzando le frazioni

$$-c \frac{x'}{x} + dx' - a \frac{y'}{y} + by' = 0$$

Si deve ora ricordare che x'/x ha come derivata $\log(x)$ dove con \log è da intendersi il logaritmo naturale e non quello decimale, analogo per y'/y mentre chiaramente x' e y' sono per definizione le derivate temporali di $x(t)$ e $y(t)$. La precedente relazione è pertanto riscrivibile come:

$$\frac{d}{dt}[-c \log(x) + dx - a \log(y) + by] = 0$$

Cerchiamo di leggere tra le righe di quanto ricavato: siamo riusciti a trovare una funzione reale in due variabili, che denotiamo con $h(x,y) = -c \log(x) + dx - a \log(y) + by$, avente derivata nulla sulle x e y che sono soluzioni del sistema (infatti il procedimento è stato svolto partendo dalle equazioni e semplicemente eseguendo operazioni che le mutassero in equazioni differenziali equivalenti e sempre nell'ipotesi che x e y fossero soluzioni). Una funzione avente questa proprietà è detta nel gergo matematico "integrale primo" o "costante del moto". Dando dei valori ad $a, b, c, d (> 0)$ si potrebbe studiare $h(x,y)$ per ogni coppia di coordinate (x,y) , non necessariamente soluzioni del modello di Volterra, e si scoprirebbe che essa risulta convessa e avente la forma di un paraboloide. A tale risultato si perviene anche scrivendo un breve programma MatLab che tracci il grafico di $h(x,y)$ e ne visualizzi il risvolto 3D:

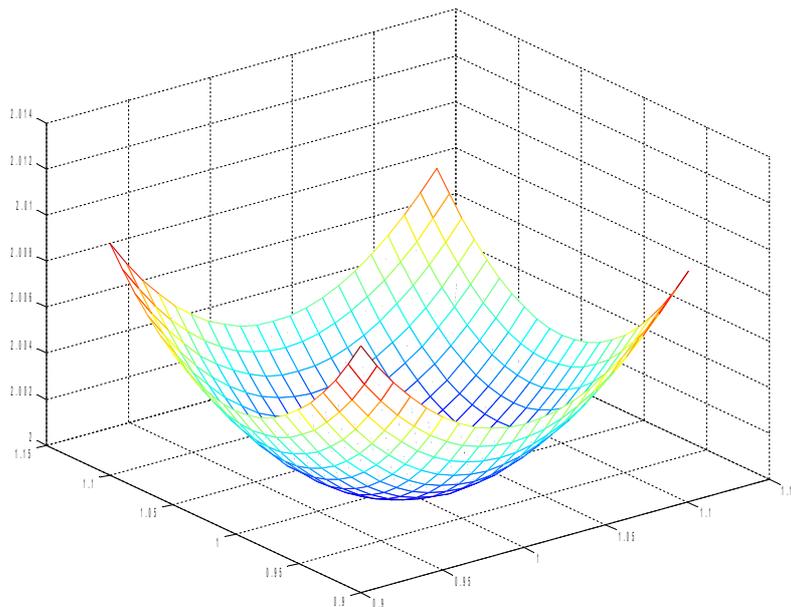


Grafico di $h(x,y) = -\log(x) + x - \log(y) + y$

Il grafico è stato riportato per notare che sezionandolo, cioè fissando la coordinata verticale z , quello che si ha come intersezione tra il piano di sezione $z=\text{costante}$ ed il paraboloide è una curva circolare regolare CHIUSA sul piano xy ad un'altezza $z=\text{costante}$. Perché sto osservando tutto questo? A cosa serve capire la forma chiusa o meno della curva generata dall'intersezione? In realtà è cruciale per comprendere nel profondo la natura delle soluzioni $x(t)$ e $y(t)$ del sistema. Come detto prima $h(x,y)$ è una funzione COSTANTE sulle coppie (x,y) che sono soluzione, cioè calcolata lungo le soluzioni dà un valore $z=\text{costante}$. Se ora intersechiamo questo piano $z=\text{costante}$ con il paraboloide abbiamo una curva chiusa e ciò assicura che x e y partono da un punto e vi ritornano, ossia, guardate nel tempo, sono PERIODICHE. In conclusione le soluzioni del modello di Volterra sono periodiche con periodo T dipendente dal valore di quella famosa “costante” che generava il piano di intersezione. Nel dettaglio tale “costante” è univocamente stabilita dalle condizioni iniziali $x(0),y(0)$ del problema.

Dopo la divagazione prettamente matematica che è stata fatta si rischia di perdere contatto con il problema pratico di partenza e in particolare sul significato di $x(t)$ e $y(t)$ che va ricordato sono rispettivamente l'ammontare delle prede e dei predatori all'istante t . Mettendo assieme l'osservazione grafica e il senso delle variabili in gioco possiamo affermare quello che è passato alla storia come uno dei principi di Volterra:

l'andamento delle popolazioni di prede e predatori in un sistema isolato è periodico:

l'immediata conseguenza deducibile è che nessuna popolazione divergerà. Questo va controcorrente con quanto si era visto nel primo modello che però non era sufficientemente accurato non tenendo conto che il numero di incontri prede-predatori è tanto più alto quanto più esemplari sono presenti. In quel modello semplicemente si ipotizzava che il tasso di mortalità delle prede fosse proporzionale al numero dei predatori (e non anche al numero di prede) e quello di natalità dei predatori lineare con l'ammontare delle prede (e non anche con il numero di predatori).

E' possibile estrapolare allora una morale; pur partendo da modelli simili i risultati a cui si perviene portano informazioni totalmente diverse: il primo modello ci diceva che prima o poi l'ecosistema si sarebbe trovato saturo, cosa tra l'altro irrealizzabile per diversi motivi; il secondo aggiusta la mira e produce una tesi più curiosa che trova forte riscontro nei dati pratici: quella della periodicità del numero di pesci in mare. In certi periodi il mare sarà più popolato da un certo tipo di specie, in un altro si verificherà un difetto di presenze ma il tutto è periodico. Inutile dire che una simile scoperta ha consentito ai biologi di capire meglio il mare, ai pescatori di massimizzare i loro sforzi nel corso dei periodi maggiormente fruttuosi (a volte però, come discuteremo più avanti, tali sforzi sono stati troppo intensi e capaci di mutare l'equilibrio delle acque) e ai matematici di avventurarsi nell'ambito dell'ecologia arricchendola di modelli e instaurando un rapporto che avrebbe condotto in breve tempo l'una e l'altra a imporsi in nuovi ambiti, quali la meteorologia, lo studio dei climi e la teoria del caos. La particolarità di questi “nuovi ambiti” sta nel fatto che sono legati fra loro: la dinamica delle popolazioni ha infatti aperto lo scenario dell'imprevedibilità, cioè del cosiddetto “caos”, anche in modelli matematici semplicissimi che non si pensava potessero manifestare comportamenti caotici nelle loro soluzioni (ossia fortemente dipendenti dalle condizioni iniziali; un esempio lo vedremo in coda alla tesi), ma allo stesso tempo la natura del caos è presente nello studio dei climi e, in maniera assai più vistosa, nella comprensione del meteo, non consentendo risposte a lungo termine alla domanda “che tempo farà?”. Ma ben sappiamo che meteo e andamento climatico a loro volta si riflettono sulle caratteristiche delle acque dei mari e dei laghi e quindi sulla dinamica delle popolazioni ittiche, fortemente correlata alle caratteristiche delle acque in cui vivono. Una cosa simile vale per l'andamento demografico delle popolazioni umane.

Tornando a concentrarci sul lavoro di Volterra e senza la presunzione di volerlo scavare troppo a fondo per aprire le nuove strade a cui abbiamo visto poter portare, emerge la necessità, vista la periodicità delle soluzioni, di calcolarne il valore medio. Esso denota il numero medio delle specie in mare delle quali, va ricordato, non siamo riusciti a trovare un andamento analitico preciso (in altre parole non siamo riusciti a scrivere $x(t)=f(t)$ e $y(t)=g(t)$ per qualche $f(t)$ e $g(t)$ ben precisate funzioni del tempo) pur riuscendo a stabilirne la natura periodica. E' bene ricordare che il valore medio di una grandezza $x(t)$ periodica con periodo T , si calcola come

$$x_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

purché l'integrale esista finito (ipotesi soddisfatta se $x(t)$ continua e limitata o meglio se $x(t)$ Riemann-integrabile). Sembra dunque che il calcolo del numero medio di prede o predatori si possa calcolare solo disponendone l'andamento temporale esatto. Fortunatamente ciò non è necessario se si usa un truccetto come il seguente e che parte dal fatto che $x(0)=x(T)$ e $y(0)=y(T)$ con T periodo delle due grandezze stabilito dalle condizioni iniziali, note le quali anche esso è noto. Ma allora è:

$$\int_0^T \left(\frac{x'}{x}\right) dt = \log(x(t)) \Big|_0^T = 0 \text{ e analogamente per } y. \text{ Torniamo ora al sistema (4) e integriamo}$$

ambo i membri delle due equazioni: a primo membro otterremo zero per quanto appena scritto;

$$0 = \int_0^T (a - by(t)) dt = aT - b \int_0^T y(t) dt$$

risolvendo l'equazione si ricava:

$$y_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{a}{b}$$

Procedendo analogamente con la seconda equazione si avrà

$$x_{\text{medio}} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{c}{d} .$$

Sintetizziamo brevemente quanto appena fatto: dopo aver dedotto la periodicità delle soluzioni del modello di Volterra abbiamo potuto calcolarne i valori medi. Adesso, con tali valori medi, faremo un'altra deduzione: se torniamo al sistema (3) di partenza e cerchiamo i punti stazionari, che sono le soluzioni costanti delle equazioni, quelle per cui la derivata è nulla, troveremo, oltre al banale punto $(0,0)$, l'altro, molto più importante, che risulta proprio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ cioè uguale ai valori medi.

D'impeto possiamo affermare che questo punto sarà semplicemente stabile perché la soluzione $(x(t), y(t))$ vi gira continuamente attorno, toccandolo ripetutamente e periodicamente, senza mai allontanarsi ma neppure avvicinandosi ad esso ossia l'ampiezza della "sinusoide" rimane inalterata anche a lungo andare.

Così il modello di Vito Volterra, per altro ideato dal polacco Lotka qualche anno prima e in ambito chimico ma senza le profonde osservazioni fatte dall'italiano, è utile anche da un punto di vista didattico. Ci illustra infatti che non sempre, anzi quasi mai, è possibile risolvere sino in fondo le equazioni differenziali caratteristiche di fenomeni reali, ma a volte è possibile leggere degli indizi notevoli su di esse; infine è un ottimo esempio per comprendere il senso di "punto di equilibrio":

quest'ultimo è una soluzione costante nel tempo del sistema (ma potrebbe non essere quella corrispondente alle condizioni iniziali imposte) e infatti si calcola annullando le derivate delle incognite.

1.2.1 Dimostrazione della semplice stabilità del punto $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

Poco più sopra, parlando appunto di punti di equilibrio (o stati stazionari del sistema), avevamo affermato, fidandoci dell'intuizione, che $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ era semplicemente stabile. Vi è un approccio non molto elegante ma tuttavia sufficientemente rigoroso, per dimostrare che quell'intuizione era corretta. Si tratta di andare a studiare cosa accade nelle vicinanze del punto di equilibrio e dimostrare che l'andamento della soluzione è proprio oscillatorio in suddetto intorno.

Indichiamo con $x_{eq} = \frac{c}{d}$ e con $y_{eq} = \frac{a}{b}$ la coppia caratterizzante il punto di equilibrio e poniamo $x(t) = x_{eq} + \zeta(t)$ e $y(t) = y_{eq} + \eta(t)$ cioè riscriviamo le soluzioni del sistema come somma dello stato stazionario e di una funzione opportuna. Se nell'analisi che andremo a svolgere troveremo che tali due funzioni $\zeta(t)$ e $\eta(t)$ sono periodiche con valore medio nullo (ciò vuol dire che oscillano attorno all'origine) dedurremo che $x(t)$ e $y(t)$ girano periodicamente attorno al punto di equilibrio (x_{eq}, y_{eq}) e che la nostra congettura era corretta.

L'analisi di cui si parla consiste nel risolvere il sistema di Volterra nelle nuove incognite $\zeta(t)$ e $\eta(t)$; sarà possibile farlo per delle semplificazioni che renderemo chiare al momento opportuno. Per il momento riportiamo il modello (3) con le dovute sostituzioni $x(t) = x_{eq} + \zeta(t)$ e $y(t) = y_{eq} + \eta(t)$.

$$\begin{cases} \frac{d(x_{eq} + \zeta(t))}{dt} = a(x_{eq} + \zeta(t)) - b(x_{eq} + \zeta(t))(y_{eq} + \eta(t)) \\ \frac{d(y_{eq} + \eta(t))}{dt} = -c(y_{eq} + \eta(t)) + d(x_{eq} + \zeta(t))(y_{eq} + \eta(t)) \end{cases}$$

x_{eq} e y_{eq} sono funzioni costanti e hanno derivata nulla, il sistema si riduce pertanto a:

$$\begin{cases} \frac{d\zeta(t)}{dt} = ax_{eq} + a\zeta(t) - bx_{eq}y_{eq} - bx_{eq}\eta(t) - b\zeta(t)y_{eq} - b\zeta(t)\eta(t) \\ \frac{d\eta(t)}{dt} = -cy_{eq} - c\eta(t) + dx_{eq}y_{eq} + dx_{eq}\eta(t) + d\zeta(t)y_{eq} + d\zeta(t)\eta(t) \end{cases}$$

Per proseguire ricordiamo che $\zeta(t)$ e $\eta(t)$ sono di ampiezza ridotta perché stiamo studiando cosa accade in un intorno del punto di equilibrio; il prodotto $\zeta(t)\eta(t)$ sarà dunque un infinitesimo di ordine superiore che trascureremo. In questa maniera linearizzeremo le equazioni ottenendo, una

volta sostituito $x_{eq} = \frac{c}{d}$ e $y_{eq} = \frac{a}{b}$,

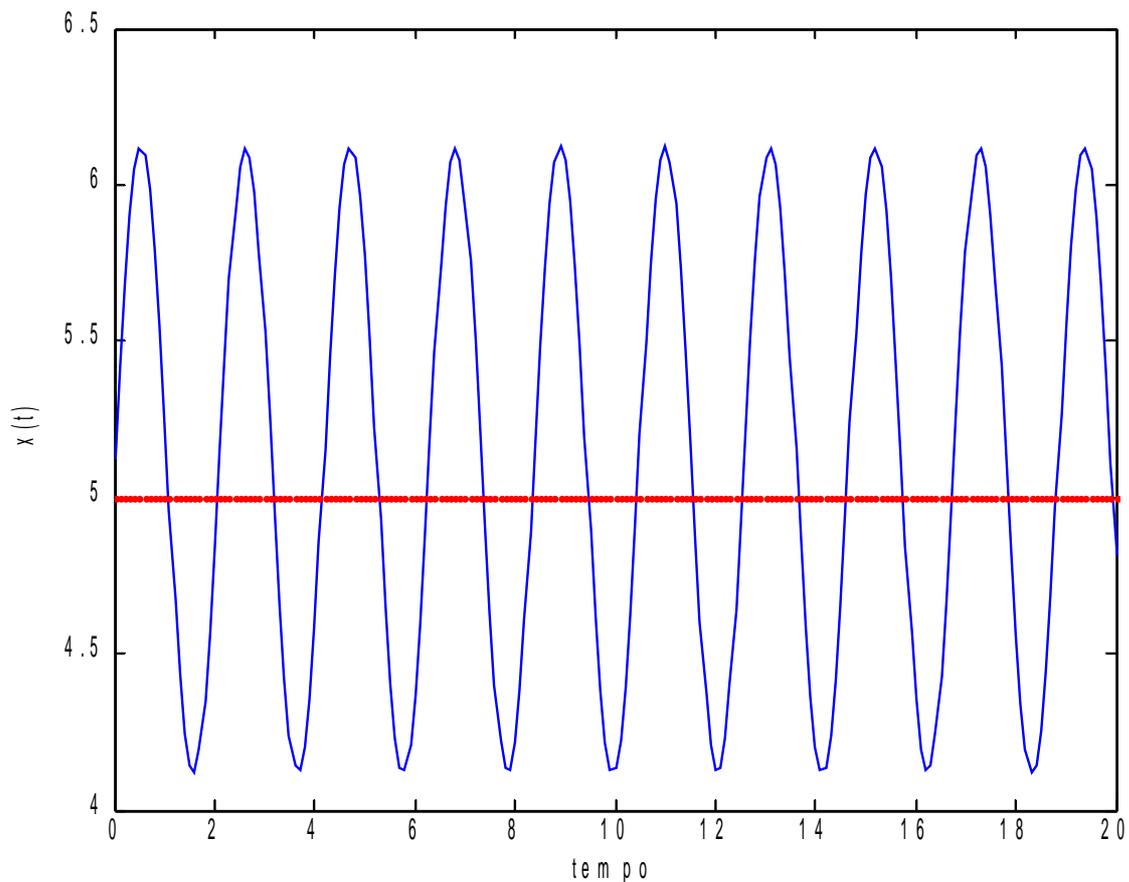
$$\begin{cases} \frac{d\zeta}{dt} = -b\frac{c}{d}\eta(t) \\ \frac{d\eta}{dt} = d\frac{a}{b}\zeta(t) \end{cases}$$

La natura lineare delle equazioni ci assicura che è meccanico trovarne le soluzioni: il metodo autovalori-autovettori richiederebbe, per una maggior comodità, di possedere però i valori esatti dei

parametri a, b, c, d . E' nostro interesse tuttavia avere una forma generale delle soluzioni e per questo motivo useremo il metodo di "variazione delle costanti" noto dall'analisi: si tratta di "indovinare" la forma delle soluzioni e di calcolarne poi i valori esatti. Ipotizziamo che le soluzioni abbiano la forma (scelta non proprio a caso ma dopo aver notato che i sistemi lineari hanno soluzioni in una forma esponenziale) $\zeta(t) = \alpha e^{\lambda t}$ e $\eta(t) = \beta e^{\lambda t}$ con α, β, λ da determinarsi sostituendo le presunte soluzioni nelle equazioni. In particolare si trova:

$$\begin{cases} \alpha \lambda e^{\lambda t} = -b \frac{c}{d} \beta e^{\lambda t} \\ \beta \lambda e^{\lambda t} = d \frac{a}{b} \alpha e^{\lambda t} \end{cases}$$

da cui è possibile isolare il rapporto α/β in entrambe le equazioni per poi uguagliarne le espressioni e ricavare λ . Sviluppando tali calcoli ci si accorgerà subito che λ risulta puramente immaginario. Immediata conseguenza è la natura sinusoidale di $\zeta(t)$ e $\eta(t)$: infatti si ricava $\zeta(t) = \rho \cos(\omega t + \theta)$ e $\eta(t) = \rho \sin(\omega t + \theta)$ con ρ e θ legati alle condizioni iniziali delle incognite e ω valore assoluto della parte immaginaria di λ . Si è allora scoperto che $\zeta(t)$ e $\eta(t)$ sono sinusoidali (valor medio nullo) e quindi che $x(t) = x_{eq} + \zeta(t)$ e $y(t) = y_{eq} + \eta(t)$ sono proprio delle sinusoidi oscillanti attorno a x_{eq} e y_{eq} rispettivamente come l'intuizione ci aveva suggerito. Dato infine che tali sinusoidi conservano la loro ampiezza per sempre il punto di equilibrio è soltanto semplicemente stabile perché le soluzioni che partono da condizioni iniziali vicine ad esso rimangono confinate all'interno di un intorno del punto di equilibrio senza però tendere asintoticamente ad esso;



Nel grafico sono riportati un possibile andamento temporale delle prede $x(t)$ (linea sinusoidale blu con condizione iniziale $x(0)=5.12$) ed il punto di equilibrio $x_{eq}=c/d$ assunto pari a 5 (modello

di Volterra). $x_{eq}=5$ è semplicemente stabile perché $x(t)$ gli gira attorno senza mai avvicinarlo o allontanarlo una volta per tutte, in altre parole $x(t)$ rimane confinato all'interno di una regione, intorno di x_{eq} . Nel grafico non è riportato $\zeta(t)=x(t)-x_{eq}$ ma si sa che il suo andamento è uguale, in scala, a $x(t)$. In particolare avrà un'ampiezza molto ridotta (di questa peculiarità ci siamo serviti nei calcoli per linearizzare il sistema) e girerà attorno a zero. Un grafico analogo varrà per i predatori (con $y_{eq}=a/b$).

1.3 L'effetto della pesca

Giunti a questo punto è doveroso riordinare le idee: finora il mare è stato considerato come un sistema ISOLATO: nessuna influenza su di esso viene cioè esercitata dall'ambiente esterno. Questo è con buona approssimazione lo scenario dell'Adriatico nel corso della prima guerra mondiale: l'attività dei pescherecci era stata ridotta quasi totalmente ed il livello dei pesci non veniva più ad essere influenzato dalla pesca. E' questo il significato di sistema isolato. Il valore iniziale di prede e predatori ($x(0)$ e $y(0)$ rispettivamente) era quello fotografato nel 1915, precisamente il giorno in cui partiva il divieto di pesca. Da quel momento in poi è il modello di Volterra a spiegare l'andamento delle specie marine, affermando che la loro andatura demografica è periodica e riuscendo a calcolarne i valori medi che qui riportiamo nuovamente:

$$x_{\text{medio}} = \frac{c}{d} \text{ numero medio delle prede}$$

$$y_{\text{medio}} = \frac{a}{b} \text{ numero medio dei predatori}$$

Il modello di Volterra vale fin tanto che l'attività di pesca rimane chiusa, ossia, per non perdere la cognizione temporale, fino al 1918. E in seguito? Come andrebbe corretto il modello per tenere conto della pesca?

Prima di rispondere ragioniamo sui valori medi appena riportati cercando di capire come potrebbero cambiare con l'introduzione della pesca che contribuisce solamente a “togliere” dal mare indistintamente l'una e l'altra specie.

La presenza dei pescatori causa:

A) una diminuzione del tasso di crescita delle prede x : da a si passa ad un tasso $a-\varepsilon$. Questo è dovuto appunto al prelievo di prede, cioè alla loro uccisione: le prede catturate con la pesca non potranno più contribuire alla riproduzione della specie, quindi il tasso di riproduzione cala.

B) un aumento della mortalità dei predatori: alle cause naturali si aggiunge ora la presenza del cosiddetto “super predatore”: l'uomo. Da c si passa allora al tasso di mortalità $c+\eta$.

N.B. Si è scelto di usare due lettere diverse ε e η per denotare l'influenza della pesca sui tassi di crescita delle prede e di mortalità dei predatori per il fatto che la pesca può influenzare in maniera differente i due parametri; ad esempio la struttura a maglia delle reti usate dai pescherecci potrebbe essere meno efficace nella cattura dei pesci più piccoli (le prede) che riescono meglio a sfuggire per la loro taglia inferiore.

C) i parametri b e d restano invariati: essi sintetizzano i processi di interazione delle specie (come ad esempio la probabilità che un incontro preda-predatore finisca con l'uccisione della preda) e la pesca non li modifica.

Da questo si percepisce agevolmente come potrebbe variare il numero medio delle due popolazioni: x_{medio} dovrebbe aumentare e valere semplicemente $x_{\text{medio}} = \frac{c+\eta}{d}$ mentre il numero medio dei carnivori calare a $y_{\text{medio}} = \frac{a-\varepsilon}{b}$. Questo suggerisce che la pesca favorisce le prede e penalizza i loro carnefici come aveva già vagamente giustificato Umberto d'Ancona.

Il percorso di questa tesina è molto omogeneo: si fanno delle osservazioni dei risultati trovati cercando di immaginare come si modificano in presenza di qualche altro fattore; era già successo in coda al modello di Volterra quando era stato detto, senza rigorosa dimostrazione, che il punto di equilibrio $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ era semplicemente stabile. Solo in un secondo momento lo si è provato matematicamente. La stessa cosa la faremo adesso, dopo aver sostenuto che la pesca produce un innalzamento del valore medio di prede e un abbassamento di quello dei predatori rispetto al caso di sistema isolato. Costruendoci un verosimile modello del mare in presenza di pesca lo verificheremo in maniera rigorosa.

Per farlo riprendiamo il modello (3) di Volterra e ci limitiamo ad aggiungere un termine per equazione che rifletta l'effetto della pesca. Con P denotiamo l'intensità della pesca (legata al numero di pescherecci finanziati dai mercati e autorizzati a solcare il mare), con μ l'efficacia degli strumenti utilizzati nella cattura delle prede e con ν quella per la cattura dei predatori. Qui non si vuole entrare nei dettagli degli apparecchi per la pesca, ma per avere un'idea si può presumere che la tecnica di pesca sia la stessa per prede e predatori ma più efficace e indirizzata alla cattura di una specie piuttosto che dell'altra (e a seconda di questo μ sarà minore o maggiore di ν). Dato che la pesca contribuisce solo ad un incremento della mortalità dei pesci, il modello che deriva dai discorsi fatti è:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - P\mu x \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - P\nu y \end{cases}$$

Anche il presente modello è non lineare; riscrivendolo però come:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - P\mu)x - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -(c + P\nu)y + dxy \end{cases}$$

lo si riconduce alla "forma di Volterra". Non è più necessario rifare tutti i calcoli, ciò che cambia sono solamente i coefficienti a e c , il primo dei quali risulta decrementato di $\varepsilon = P\mu$, il secondo aumentato di $\eta = P\nu$. E queste sono proprio le quantità che contribuiscono a mutare i punti di equilibrio, quantità per altro dedotte in discussioni precedenti. Come volevasi dimostrare.

Anche con la pesca l'andamento delle specie acquatiche è quindi periodico, con valori medi diversi che evidenziano come la pesca finisca con il favorire le prede. Attenzione però va mostrata nell'influenza del parametro P : se questo è molto alto (livello di pesca esagerato) si ha:

$$y_{\text{medio}} = \frac{a-\varepsilon}{b} = \frac{a-P\mu}{b} \text{ che viene a dirci che la popolazione di predatori risulterà prima o poi}$$

negativa; poiché ciò non ha senso quello che invece succede è che la popolazione di predatori si estingue. Analogamente le prede presto scompariranno perché (leggendo l'equazione) $a - P\mu$, con P alto, risulta negativo: tasso di crescita negativo si traduce poi in un'inevitabile scomparsa della specie. Questo, oltre a verificare la verosimiglianza del modello (una pesca indiscriminata toglie tutto al mare come è intuitivo pensare), fa suonare un campanello di allarme: P va infatti tenuto sotto controllo in modo che l'ecosistema marino continui a mantenere il suo equilibrio, indispensabile per l'intero ecosistema mondiale.

La storia dimostra invece come spesso questo appello sia rimasto inascoltato. Non serve andare tanto indietro negli anni. Basterebbe fermarsi agli anni '80 quando, a seguito della "Convention on the Law of the Sea" le nazioni unite affidarono agli Stati Uniti e al Canada, in quanto paesi affacciati sull'oceano, diritti esclusivi sulla pesca lasciando le briciole ai pescherecci battenti bandiere diverse. Tale legge si era resa necessaria per regolare l'accesso alle acque che prima erano state protagoniste di una vera e propria caccia al tesoro. Visti assegnatisi i diritti esclusivi, Usa e Canada concentrarono i loro sforzi sull'attività di pesca, favoriti da governi molto generosi in quanto a fondi da investire sul mare. Presto un numero elevatissimo di imbarcazioni all'avanguardia invasero il mare e in breve tempo i dati sul pescato da parte delle due nazioni crebbero a dismisura. Ma ad un certo punto l'oceano ha portato il conto: verso la fine degli anni '80 il pescato andava diminuendo e, per mantenere il patto con i mercati, i pescatori erano costretti a spingersi in acque sempre più lontane e profonde. Una cosa analoga aveva avuto come protagonista il Giappone: a partire dal 1952 la nazione nipponica aveva intensificato l'attività di pesca nel Pacifico, nell'Atlantico e nell'oceano Indiano finendo con il provocare l'abbassamento di quasi il 90% di alcune specie. In altri termini è come se Usa, Giappone e Canada avessero, in breve, sparato alle stelle il parametro P del modello precedente aiutati da cospicui fondi e nuove tecniche di pesca.

La creazione negli ultimi anni di alcune zone protette e l'imposizione alle nazioni rivierasche di leggi severe sui limiti del pescato ha consentito di far abbassare P ma molto resta ancora sul tavolo. La popolazione mondiale cresce infatti inesorabile e di conseguenza la domanda di pesce ai mercati sale altrettanto vertiginosamente. Si è anche allora cercato rifugio negli allevamenti di alcune specie di pesci ma il più delle volte questa soluzione si è rivelata in grado di peggiorare la situazione; i pesci da allevare richiedono in cibo altre specie che vanno per forza pescate in quantità tale da permettere da un lato l'allevamento e dall'altro di finire direttamente sui mercati per l'uomo.

1.4 Il disastro ecologico del lago Vittoria

La tecnica di allevamento, conosciuta già nella Cina del V secolo a.C. come dimostrano alcuni scritti sulla piscicoltura redatti da Fan Li, si è resa protagonista negli anni '50 di un altro misfatto, stavolta non in acque salate ma in quelle dolci del lago Vittoria in Africa. Per aumentarne la produttività, l'uomo ha introdotto in esso una specie ittica del tutto nuova in quell'ecosistema: il persico del Nilo. Per poter sviluppare dei ragionamenti modellistici va detto che questo tipo di pesce è un vorace predatore con un tasso di riproduzione elevato. Velocemente, ed è immediato intuirlo, le altre popolazioni del lago, che si nutrivano prevalentemente di vegetali, vennero decimate.

Un modello per la situazione del lago Vittoria in seguito all'immissione del persico del Nilo può essere costruito in un modo molto semplice ma al contempo realistico e tale da rispecchiare i dati registrati nel pescato del lago negli anni successivi: il tasso di crescita del persico è possibile assumerlo lineare con il numero di prede; più prede ci sono maggior benessere trova il predatore e questo provoca un incremento della sua specie. Per contro il tasso di mortalità delle prede sarà lineare con il numero di predatori, sempre assumendo che la maggior causa di morte dei pesci piccoli sia la caccia da parte del persico del Nilo.

Così troviamo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay \\ \frac{dy}{dt} = cx \end{cases}$$

$x(t)$ denota il numero di prede al tempo t , $y(t)$ è il numero di predatori mentre $a, c > 0$ sono le costanti che tengono conto del comportamento lineare del numero di esemplari di una specie in relazione all'ammontare dell'altra (ad esempio la cattura di una preda porta una quantità di benessere quantificabile con l'aumento della specie predatrice di due nuovi esseri per unità di tempo: in tal caso sarebbe $c=2$).

Dopo tante non linearità abbiamo finalmente ritrovato un sistema lineare. Per capire il carattere delle sue soluzioni useremo nuovamente il metodo autovalori-autovettori: per farlo riscriviamo il sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

la matrice $F = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{bmatrix}$ possiede gli autovalori (purementemente) complessi coniugati $\pm j\sqrt{ac}$ cui sono associati i modi $\cos(\sqrt{act})$ e $\sin(\sqrt{act})$. Le soluzioni vere e proprie del sistema sono una combinazione lineare dei modi e dipendono dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $y(0)$ (numero prede e persici del Nilo all'istante iniziale).

1.4.1 Simulazione Matlab

Andiamo a scrivere un programma Matlab che simuli il sistema appena visto, dando delle condizioni iniziali a piacere; poi esamineremo i risvolti grafici:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%          programma per la soluzione grafica al modello del lago Vittoria          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all
clc

delta_t=0.1; %passo di campionamento; più è piccolo migliore è l'approssimazione dei
%grafici delle soluzioni
t=0:delta_t:0.5; %vettore dei tempi ai quali si osserva il sistema

a=3; %parametro legato al decremento delle prede
c=2; %parametro legato all'incremento del persico
%immagazzino i valori delle popolazioni agli istanti di tempo considerati nei
%vettori x (prede) e y (predatori)
x(1)=3; %valore iniziale delle prede. In matlab gli indici dei vettori
%partono da uno e non ci è possibile scrivere x(0) e y(0) come
%l'intuizione vorrebbe.
%Il valore 3 è del tutto estraneo a interpretazioni fisiche
```

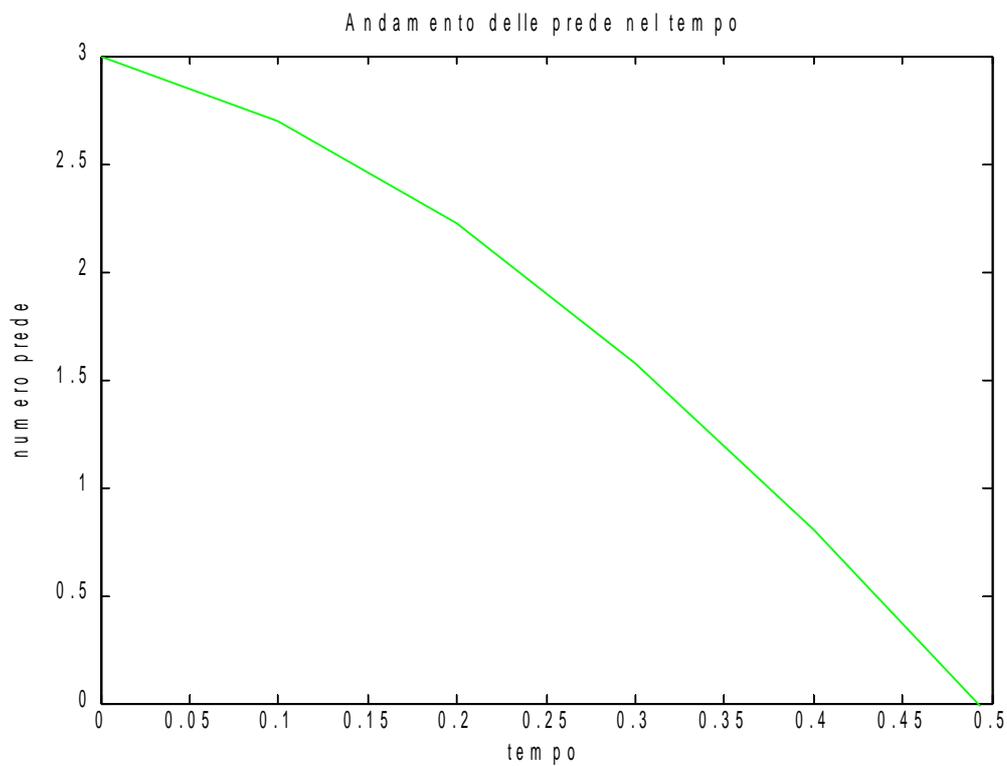
```

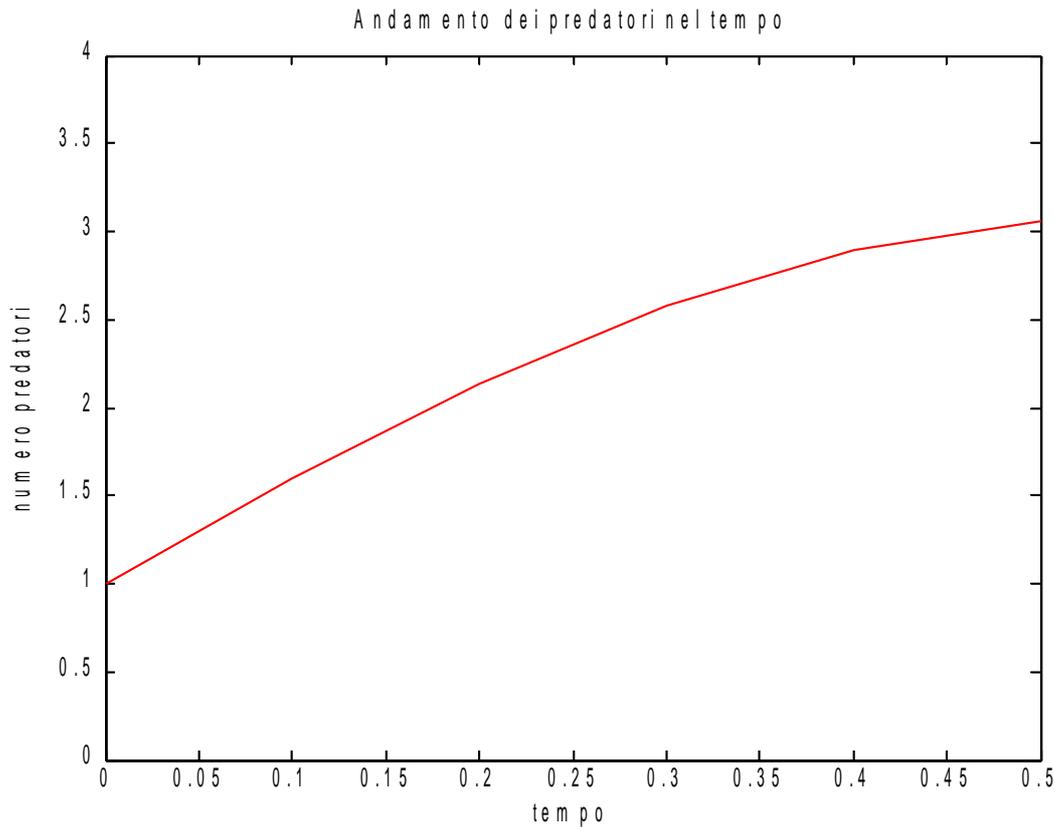
y(1)=1;

for i=2:length(t)
    x(i)=x(i-1)-a*y(i-1)*dt;
    y(i)=y(i-1)+c*x(i-1)*dt;
end
plot(t,x,'g') %stampa il grafico delle prede
xlabel('tempo')
ylabel('numero prede')
title('Andamento delle prede nel tempo')
axis([0 0.5, 0 3]);
figure %apre una nuova finestra per stampare il secondo grafico
plot(t,y,'r') %stampa il grafico dei predatori
xlabel('tempo')
ylabel('numero predatori')
title('Andamento dei predatori nel tempo')
axis([0 0.5, 0 4]);

```

Il prodotto del codice è riportato dai grafici seguenti:





Il programma fa esattamente ciò che dicono le due equazioni; la parte essenziale è il ciclo *for* dove vengono, passo dopo passo, aggiornati i valori delle popolazioni in base ai valori immediatamente precedenti, ossia vengono implementati gli enunciati:

$$(*) \quad \begin{cases} x(\text{nuovo}) = x(\text{vecchio}) + \delta x \\ y(\text{nuovo}) = y(\text{vecchio}) + \delta y \end{cases}$$

Infatti Matlab lavora nel dominio discreto e ha per questo la necessità di convertire equazioni differenziali in equazioni alle differenze quali sono quelle del sistema (*). δx rappresenta la quantità $-a y(\text{vecchio}) \delta t$ con δt valore di campionamento che definisce il passo discreto. Analogamente si può dire per δy . Non è tuttavia questo il modo in cui vengono usualmente riportate le equazioni alle differenze: si preferisce la seguente notazione (equivalente a (*)):

$$\begin{cases} x(n+1) = -a y(n) \\ y(n+1) = c x(n) \end{cases} .$$

L'ultima parte del programma produce semplicemente i grafici riportati raccogliendo i dati calcolati nel ciclo e poi interpolati. I valori iniziali sono scelti senza un senso pratico; una trattazione rigorosa richiederebbe prima di specificare l'unità di misura dell'ammontare delle specie ittiche che spiegherebbe il senso di quel $x(0)=3$, trattasi di 3 pesci, o di un $3 \cdot 10^4$ ecc. Lo stesso approfondimento si renderebbe necessario per l'unità di misura del tempo (mesi, periodi di gestazione dei pesci, anni... tutto dipende dalle informazioni prettamente biologiche a disposizione;

sono esse a dettare il modello). Qui non si vuole entrare nel merito della biologia ma si desidera rimanere con i piedi nella modellistica e discutere i risultati trovati, tra l'altro prevedibili.

Dai grafici si osserva come il numero di prede scenda a zero con andamento cosinusoidale partendo dal valore iniziale; non ha senso poi il loro diventare negative perciò quando sono arrivate allo zero la specie si è estinta. I persici del Nilo a questo punto non possono più aumentare e ce ne si accorge anche dalla seconda equazione dove la derivata dei predatori diventa nulla.

Il modello presentato per il lago Vittoria ha però una validità limitata: una volta che le prede sono andate esaurite è chiaro che la popolazione predatrice si troverà senza più cibo e presto scomparirà. Di questo il modello non tiene conto e ammette, nelle soluzioni, la negatività del numero di esemplari, cosa ovviamente assurda. Ma il lavoro fatto è utile, ribadiamo, per descrivere cosa succede al lago in un limitato periodo della sua vita.

Prima ancora tuttavia che vi sia la totale scomparsa della specie cacciata vi è un altro fenomeno da tenere presente; le prede si nutrono in gran parte di vegetali e questo fatto contribuisce a tenere a bada la diffusione della vegetazione nel lago. Una volta che i pesci in grado di nutrirsi sono in forte calo l'aumento della vegetazione diviene smisurato, capace di coprire la superficie lacustre. Questo è quanto accaduto nel lago africano. In poco tempo, a cavallo tra la fine degli anni ottanta e l'inizio del decennio successivo, il giacinto d'acqua, una pianta dai fiori viola pallido, è riuscita a invaderlo e ricoprirlo con gravissimo danno per i pesci che venivano privati dell'ossigeno necessario alla sopravvivenza oltre che per le imbarcazioni impossibilitate a solcare le acque. Zanzare e grossi serpenti andavano a nozze in un simile ambiente e in effetti a inizio anni '90 lo scenario nel lago e alle sue rive era spaventoso. La minaccia portata da quella graziosa pianta violacea, la cui velocità di espansione è esponenziale, ha fatto riflettere l'uomo sulla possibilità di modificare gli ecosistemi; non dimentichiamoci che tutto è cominciato con l'introduzione del persico del Nilo, cioè con l'azione dell'uomo.

2 DINAMICA DELLA POPOLAZIONE

2.1 Il modello di Malthus

L'allevamento del persico del Nilo non fu un semplice esperimento. Era piuttosto un tentativo per rendere maggiormente pescoso il lago Vittoria che aveva il delicato compito di sfamare una popolazione umana che alle sue rive era in costante crescita. Questa è la medesima motivazione, a fianco di un notevole desiderio politico mirato all'espansione economica, che indusse gli Stati Uniti e la Cina ad ampliare il pescato negli oceani negli anni '80. E la questione è: fino a quando le risorse dei mari potranno tenere testa all'esplosione demografica dell'uomo? Era con tutta probabilità questa la domanda che si era posto quasi due secoli prima dell'egemonia americana sull'Atlantico l'economista inglese Thomas Robert Malthus. Per dare un fondamento al suo pensiero elaborò un modello consistente solamente in un'equazione lineare, semplice da comprendere tant'è che in molti libri dell'analisi è utilizzata come introduzione all'ambito delle equazioni differenziali.

Il ragionamento malthusiano è il seguente: si indica con $N(t)$ il numero di persone presenti all'istante t e con λ (rispettivamente μ) il numero di nuovi nati (risp. morti) per individuo nell'unità di tempo: questo vuol dire che in un intervallo temporale h il numero di nuovi nati sarà $\lambda h N(t)$ (il numero dei morti $\mu h N(t)$). La variazione del numero totale di persone in un intervallo h sarà dunque:

$$N(t+h) - N(t) = \lambda h N(t) - \mu h N(t)$$

Questa non è ancora un'equazione differenziale, non compare infatti la derivata della grandezza incognita in gioco ($N(t)$) di cui si vuole determinare l'andamento nel tempo. Se però si dividono entrambi i membri per t e, forti del fatto che l'equazione precedente è valida per qualsiasi intervallo h anche molto piccolo, si passa al limite per h tendente a zero, è immediato ricavare

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu) N(t)$$

che, questa volta sì, è un'equazione differenziale. Il suo integrale generale è $N(t) = C e^{(\lambda - \mu)t}$ con C costante reale qualsiasi facente sì che le soluzioni siano infinite. Malthus però, in base a dei censimenti su scala mondiale, era a conoscenza approssimativamente della popolazione $N(0)$ al suo istante iniziale di osservazione (cioè il 1798, anno in cui concepì tale modello) e dunque capace di selezionare l'unica soluzione per la popolazione: $N(t) = N(0) e^{(\lambda - \mu)t}$. Il pessimismo dell'economista inglese trovava fondamento nell'analisi della funzione appena espressa dove, ed ecco il punto cruciale, il potenziale biologico $\lambda - \mu$ risultava maggiore di zero, il che equivale ad una popolazione con una natalità superiore alla mortalità portando l'ammontare della gente a divergere con velocità esponenziale, un po' come accadeva al giacinto d'acqua del lago Vittoria. In coda al suo pensiero, Malthus affermava che nel giro di pochi anni si sarebbe andati incontro a delle carestie senza precedenti perché le risorse non potevano controbilanciare quello che lui chiamava "l'istinto naturale di riproduzione di un'umanità sempre più priva di continenza morale". Malthus però concludeva il saggio proponendo alcune soluzioni che avrebbero potuto abbassare il coefficiente $\lambda - \mu$ nella soluzione: il "matrimonio ritardato", la "continenza morale" appunto ma anche pestilenze ed eventi catastrofici quali carestie e guerre. Chissà che i due conflitti mondiali del Novecento, con tanto di bombe nucleari, non fossero proprio un patto stretto dai potenti della Terra con Thomas Robert Malthus.

2.2 Il modello di Verhulst

Le debolezze del ragionamento malthusiano sono però vistose. A cominciare da quei tassi λ e μ che in realtà sono diversi a seconda delle regioni del globo.

Oggi sappiamo infatti che la popolazione cresce ma non lo fa esponenzialmente. Ad accorgersene fu già nel 1845 Verhulst che propose una correzione al modello di Malthus introducendo dei tassi di riproduzione e mortalità variabili nel tempo capaci di riflettere il fatto che una popolazione elevata comporta un difetto di risorse che tende ad abbassarla (il tutto avviene però in modo graduale senza le ipotesi catastrofiche di cui sopra). In questa maniera quello che prima era il λ ora diverrà un $\lambda - aN(t)$ che tiene conto che con il salire della popolazione il benessere comune cala e l'istinto di riproduzione con esso. Il μ avrà un comportamento opposto passando a $\mu + bN(t)$ per giustificare un aumento graduale della mortalità quando le risorse sono poche e la popolazione è alta. Il modello di Verhulst è allora:

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - aN)N - (\mu + bN)N$$

Questa equazione chiaramente non lineare viene riscritta nel modo seguente:

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N - (a + b)N^2$$

Per comodità di notazione denotiamo il potenziale biologico di Malthus come $\varepsilon = \lambda - \mu$ e lo raccogliamo:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left[1 - \frac{a+b}{\varepsilon} N \right]$$

Per avere una scrittura ancora più compatta e senza notevole perdita di informazione, poniamo

$k = \frac{\varepsilon}{a+b}$ e la forma dell'equazione diviene:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left[1 - \frac{1}{k} N \right]$$

da qui è molto più facile accorgersi che è un'equazione logistica, questo almeno è il suo nominativo nell'analisi. Vi sono due soluzioni costanti e precisamente $N(t)=0$ e $N(t)=k$. Per ora teniamocene a mente, in seguito le riprenderemo per stabilire in che rapporto stanno con le altre soluzioni.

A proposito di soluzioni per trovare quelle non costanti nel tempo dobbiamo ricorrere all'algoritmo di risoluzione caratterizzante le equazioni logistiche che hanno forma $y' = ay(1-by)$ e di cui quella di Verhulst è un caso particolare con $a = \varepsilon$ e $b = 1/k$ e $y = N(t)$. Nel caso più generale l'equazione si risolve dividendo i membri per $y(1-by)$ e successivamente integrandoli:

$$(5) \quad \frac{y'}{y(1-by)} = a$$

con y' è da intendersi la derivata dy/dt . Il segreto è di scrivere, prima dell'integrazione, $dy = y'dt$. Pertanto dalla (5):

$$\frac{dy}{y dt(1-by)} = a \quad .$$

si estrapola poi:

$$\frac{dy}{y(1-by)} = a dt$$

integriamo ora i membri (se due membri sono uguali lo devono essere anche i loro integrali):

$$(6) \quad \int \left(\frac{dy}{y(1-by)} \right) = \int a dt \quad .$$

La parte più ardua è sviluppare il membro di sinistra. Possiamo scomporre la prima integranda ricorrendo alle frazioni parziali:

$$\frac{1}{y(1-by)} = \frac{1}{y} + \frac{b}{1-by}$$

(6) diventa:

$$\log|y| - \log|1-by| + C1 = a t + C2$$

con $C1$ e $C2$ costanti reali qualsiasi. Per le proprietà del logaritmo:

$$\log \left| \frac{y}{1-by} \right| = a t + c$$

dove $c = C2 - C1$ costante reale (vista l'arbitrarietà di $C1$ e $C2$ anche c sarà arbitraria). L'obiettivo è quello di esplicitare y come funzione del tempo ed è perseguibile applicando l'esponenziale ad entrambi i membri:

$$\left| \frac{y}{1-by} \right| = e^{at+c}$$

risolta da:

$$\frac{y}{1-by} = c_0 e^{at}$$

(con $c_0 = e^c$ costante reale positiva) ma anche da:

$$\frac{y}{1-by} = -c_0 e^{at}$$

Dopo dei passaggi algebrici quello che si ottiene è che le y soddisfacenti l'equazione sono della forma $y(t) = \frac{c e^{at}}{1 + b c e^{at}}$ con c costante reale arbitraria. Questo per quanto riguarda le equazioni logistiche in generale. In quella di Verhulst basterà sostituire a con ε e b con $1/k$. Se in più si possiede la condizione iniziale $N(0)$ (livello della popolazione al tempo zero), l'unica soluzione è:

$$N(t) = \frac{k N(0) e^{\epsilon t}}{k - N(0) + N(0) e^{\epsilon t}} .$$

Il comportamento di $N(t)$ per tempi lunghi si deduce matematicamente dal limite per t tendente all'infinito. Il calcolo è immediato se si usa il teorema di de l'Hopital e porge il valore k .

Formalmente:
$$\lim N(t) = \lim \left(\frac{k N(0) e^{\epsilon t}}{k - N(0) + N(0) e^{\epsilon t}} \right) = \lim \left(\frac{k N(0) \epsilon e^{\epsilon t}}{N(0) \epsilon e^{\epsilon t}} \right) = k$$

Per tempi divergenti la popolazione si assesterà così ad un valore costante: precisamente al valore

$$k = \frac{\epsilon}{a + b} .$$

Nel complesso quest'analisi qualitativa della soluzione chiarisce molto sul suo grafico. In particolare, partendo da $N(0)$ (qualsiasi esso sia), si finisce con l'avvicinare sempre più la retta $N=k$ che era stata inizialmente determinata essere una delle tante soluzioni dell'equazione (non necessariamente soddisfacente il problema di Cauchy dotato dell'ulteriore condizione $N(0)$ nota). Alla luce di quanto dimostrato $N=k$ è un *punto di equilibrio asintoticamente stabile* con ciò intendendo che ha la capacità di attirare verso sé le altre soluzioni: dal grafico è ulteriormente evidenziato questo comportamento:

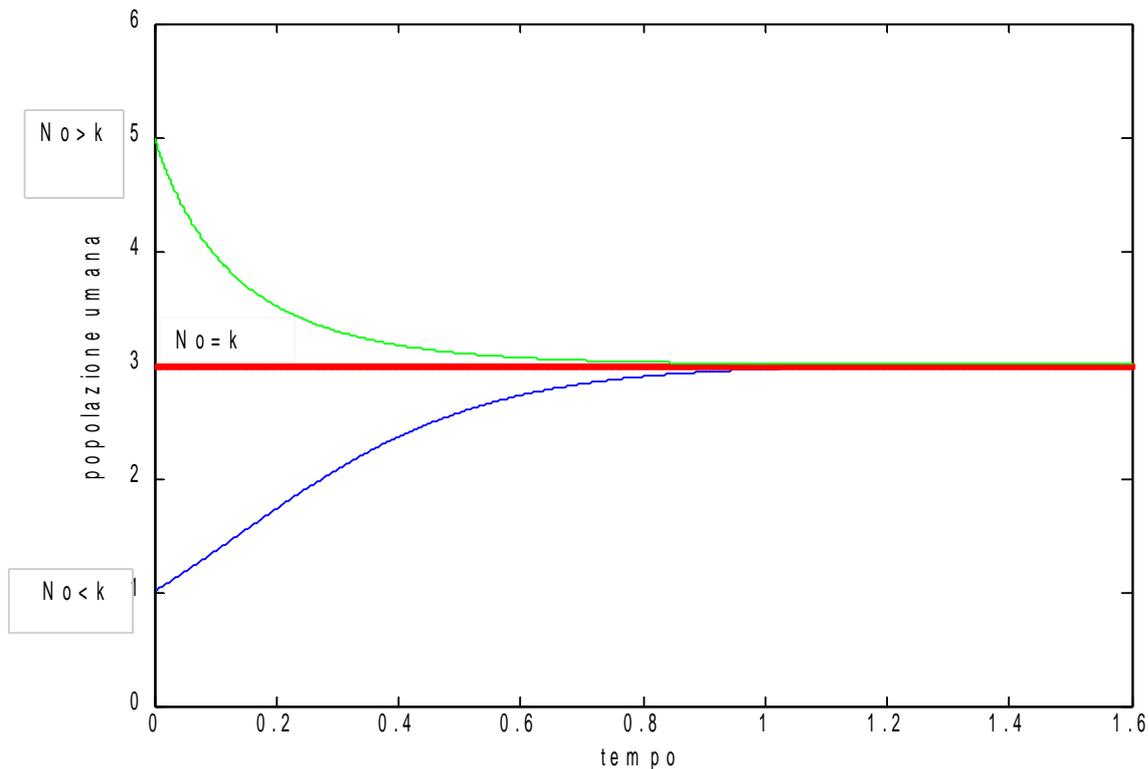


Grafico delle soluzioni all'equazione logistica di Verhulst nei tre casi possibili del problema di Cauchy: $N_0 < k$ (curva crescente blu), $N_0 = k$ (semiretta rossa) e $N_0 > k$ (curva decrescente verde). $N(t)=k$ è un punto di equilibrio oltre che l'unica soluzione che soddisfa la condizione iniziale $N(0)=N_0=k$. Ogni altra soluzione finisce in breve tempo con il venire sempre più attratta da tale punto di equilibrio che per questo è detto asintoticamente stabile.

2.2.1 Dimostrazione dell'instabilità dell'origine nel modello di Verhulst

Avevamo però notato un altro punto di equilibrio: l'origine $N=0$. Osservando nuovamente il grafico non si notano particolari proprietà della retta $N(t)=0$: non attira le soluzioni né queste oscillano attorno ad essa come invece succedeva al valore medio delle popolazioni nel modello di Volterra (esempio di semplice stabilità). L'origine per l'equazione logistica di Verhulst è un punto senza alcuna relazione con le altre soluzioni; pertanto è detto "instabile".

Senza però avere a disposizione il grafico $N(t)$ diventava difficile capire la natura dell'origine. Tuttavia esiste un teorema che ci permette di classificare la stabilità dell'origine del sistema non lineare, come lo è quello di Verhulst, in base alla versione linearizzata del modello originale. Quel teorema, di cui estrapiamo la parte che ci interessa dall'enunciato generale, parte dall'ipotesi che l'origine sia un punto di equilibrio per il sistema non lineare e afferma:

“se l'origine per il sistema linearizzato è punto di equilibrio instabile lo è anche per quello non lineare associato”.

L'utilità del teorema trova motivazione nel fatto che stabilire il tipo di stabilità in un modello lineare è meccanico.

Prima però va linearizzata l'equazione d'origine; per farlo si ricorre allo sviluppo di Taylor (centrato in 0) del suo secondo membro arrestandolo al primo ordine. Nel problema in questione l'equazione non lineare è qui riportata per comodità:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left[1 - \frac{1}{k} N \right]$$

il secondo membro è: $f(N) = \varepsilon N \left[1 - \frac{1}{k} N \right]$ la cui derivata è: $f'(N) = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{k} 2N$.

La formula di Taylor afferma che è possibile eseguire l'approssimazione: $f(N) \approx f'(N)_0 \cdot N$ dove $f'(N)_0$ è la derivata valutata in zero cioè ε . Il sistema (lineare) che risulta dalla presente approssimazione è

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$$

dove l'autovalore ε è maggiore di zero ($\varepsilon = \lambda - \mu$) essendo il parametro ereditato da Malthus. Questo porta il sistema linearizzato ad essere instabile (le sue soluzioni sono del tipo $ce^{\varepsilon t}$ divergenti nel tempo, destinate ad allontanarsi dall'origine che per questo è instabile) e per il teorema lo sarà anche l'origine del non lineare. Trattasi cioè di una più rigorosa metodologia nell'analisi dei punti di equilibrio che è servita per confermare le osservazioni dedotte in via grafica.

Come appurato studiando il comportamento asintotico della soluzione dell'equazione di Verhulst, la conclusione del matematico belga fu meno catastrofica di quella riportata dal collega Malthus. Per Verhulst la popolazione si sarebbe, a lungo andare, stabilizzata ad un valore costante.

3 IL CAOS DETERMINISTICO

La realtà sta comunque a metà tra le affermazioni di Malthus e di Verhulst. I dati sulla popolazione mondiale ne accentuano la continua crescita, portata per lo più dai paesi dell'Africa e sottolineano come il Giappone e le nazioni dell'Est Europa in parte controbilancino la crescita con una, per dirla alla Malthus, continenza morale esagerata. Per questo gioco di bilanciamento la crescita demografica mondiale non è esponenziale come nel pensiero Malthusiano ma lenta anche se non quanto affermato ottimisticamente dall'equazione logistica di Verhulst.

La validità dei due modelli proposti per la dinamica della popolazione umana è pressoché parziale vista la varietà dei comportamenti umani nelle varie parti del globo. A tal proposito va ricordato che per molti anni Kenya, Messico e India hanno sofferto uno squilibrio tra incremento demografico e risorse e in quei casi il modello di Malthus era espressione ravvicinata della realtà. Altri paesi invece, tra cui il nostro, da anni trovano rappresentazione nella dinamica di Verhulst. Ma un modello che tenga contemporaneamente conto della proliferazione dell'Africa e delle precauzioni dei paesi europei è molto difficile da elaborare. Questo è il prezzo che si deve sempre pagare quando si esce dalle idealità modellistico-matematiche” e ci si scontra con le macroscopiche discontinuità del concreto.

Tra le discontinuità del concreto rientra anche una approssimativa conoscenza delle condizioni iniziali qui identificabili nel valore della popolazione umana all'istante iniziale di osservazione ($N(0)$). A dire il vero di primo acchito questa può sembrare una sottigliezza in confronto alle difficoltà in cui ci si imbatte nella costruzione di un modello vicino alla realtà, ma così non è.

Lo capì per primo un meteorologo nel 1961. Edward Lorenz, questo era il suo nome, stava simulando al calcolatore un modello composto da una dozzina di equazioni per le previsioni del tempo. Il suo desiderio era quello di prevedere il meteo a lungo termine, magari addirittura per il lustro seguente. La sua macchina risolveva le equazioni secondo il metodo ricorsivo (simile a quello di cui si serve Matlab). Lorenz dava in pasto al computer le condizioni iniziali e questo stampava l'elenco dei valori futuri delle variabili incognite del sistema. La precisione della macchina a disposizione del meteorologo consisteva in sei cifre decimali.

Lorenz decise ad un certo punto di far ripetere l'esecuzione alla macchina dandole però in input una condizione iniziale che si discostava dalla precedente dell'un per mille, ossia in maniera del tutto impercettibile: era in pratica l'arrotondamento a tre cifre decimali, e non più a sei, della condizione precedente. La macchina stampò i nuovi valori e Lorenz si accorse che dopo un breve periodo i dati diventavano completamente diversi da quelli previsti agli stessi istanti temporali dall'esecuzione precedente. Una nuova condizione iniziale vicina ma non uguale all'originale comportava un andamento completamente non correlato al primo.

Le condizioni iniziali a cui si fa riferimento in ambito meteorologico possono essere la temperatura, la pressione ed il tasso di umidità nell'aria ad un certo istante da cui si fa poi partire l'evoluzione. Queste condizioni sono misurate con strumenti molto avanzati ma mai perfetti, ed è logico aspettarsi che le condizioni reali del sistema atmosferico si discostino, seppur di poco, da quelle misurate. Questo spiega la difficoltà nel fare previsioni troppo future: più è ampio questo futuro, più la probabilità di avere previsioni che si rivelano poi infondate è alta. Solo nel breve lo scostamento tra condizione iniziale reale e quella misurata non è tale da compromettere il lavoro: in termini matematici significa che nel breve termine l'andamento delle curve dei dati previsti dovrebbe approssimare adeguatamente quello che sarà poi il risvolto. Le locuzioni “breve” e “lungo” termine denotano un range temporale diverso a seconda del tipo di previsioni in atto: quelle che si pongono l'obiettivo di capire come sarà il clima futuro sono buone anche nell'ordine degli anni, quelle meteo sono attendibili solo per tre/quattro giorni. Tali intervalli sono per lo più stati suggeriti dall'esperienza dei meteorologi. Perciò diffidate da chi vi dice di sapere come sarà il tempo per i

prossimi mesi; non sta tenendo conto del “caos” cioè del comportamento caotico del sistema meteorologico.

3.1 La versione discretizzata dell'equazione di Verhulst

La natura del caos in atmosfera è come detto dovuta alla delicatezza dei parametri atmosferici: basta un lieve cambio di pressione o di temperatura per sconvolgere interi risultati. Quello che si vuole far trasparire è l'insita natura caotica del sistema climatico che è un qualcosa di molto complesso per via dell'elevato numero di parametri. Si è portati a pensare che i modelli dell'evoluzione della popolazione non possiedano queste complessità. Ci si sbaglierebbe però ancora una volta.

Nel 1976 alcuni matematici ripresero l'equazione di Verhulst per tramutarla in un'equazione alle differenze, dove il tempo non è più un continuo nell'asse reale, ma assume valori discreti (numeri naturali). Equazioni di questo tipo si trovano molto spesso nella pratica, dai modelli bancari per il calcolo del tasso di interessi (l'interesse viene ad aggiungersi alla somma a precisi istanti temporali, ad esempio una volta al mese sicché gli eventi che concorrono a mutare la somma non avvengono continuamente) alla biologia in rudimentali ma efficaci modelli che descrivono l'evoluzione del numero di cellule in un tessuto. Ma le equazioni alle differenze le ritroviamo pure in Matlab e nella datata macchina con cui lavorava Lorenz e sono lo strumento principe per la risoluzione delle più complicate equazioni differenziali.

La versione discreta derivante dall'eq. logistica di Verhulst, è qui espressa:

$$(7) \quad x(n+1) = \varepsilon x(n) \left(1 - \frac{1}{k} x(n)\right)$$

x è la variabile che esprime il livello della popolazione, quello che nel continuo era $N(t)$; ora il tempo è tenuto dalla variabile n che ricorda il termine “naturali” è assume appunto valori interi non negativi.

La (7) indica al lettore come è possibile prevedere il numero di persone al passo $n+1$ (che può indicare il mese successivo o l'anno venturo, ecc) noto il loro ammontare al passo n e noti i parametri biologici ε e k . A noi interessa non tanto la soluzione ma avere una prova della manifestazione caotica in un sistema tra i più semplici, o comunque molto meno complesso di quello meteorologico. Per questo ritoccheremo la formula (7) semplificandola in:

$$(8) \quad x(n+1) = r x(n) (1 - x(n)) \quad .$$

La (8) non è utile esclusivamente per illustrare il comportamento caotico; nacque come modello per esplicitare la popolazione di una particolare specie animale con r parametro espressivo del tasso complessivo di nascita e morte della popolazione. A sua volta x non veniva usata per indicare il numero degli animali bensì la loro percentuale con rispetto ad una popolazione massima oltre la quale il modello sarebbe dovuto essere modificato introducendo un nuovo termine di competizione per le risorse. In ogni momento nella (8) allora risulta $x \in [0, 1]$ mentre r è fisso.

La (8) mostra la proporzionalità della percentuale di popolazione al passo $n+1$ tanto al potenziale biologico r che alla percentuale ancora colmabile $1-x(n)$ (quest'ultimo termine indica una forma di competizione ma è diverso da quello che si instaurerebbe una volta raggiunta la percentuale massima).

3.1.1 Simulazioni Matlab

La non linearità dell'equazione non ci permette di risolverla esplicitamente sino in fondo. Non ci resta che fissare un valore iniziale $x(0)$ e calcolare $x(1)$ dalla (8); poi usare $x(1)$ per calcolare, sempre dalla (8), $x(2)$ e così via. Questo processo meccanico, che introduce continuamente delle approssimazioni, cosa che avverrebbe in maniera meno vistosa se si potesse risolvere analiticamente l'equazione (cosa possibile quasi solamente nel caso lineare), lo faremo fare al computer.

Il programma MATLAB che si occupa del calcolo è simile a quello impiegato per le valutazioni sul modello del lago Vittoria: si impostano i valori di r e quello iniziale della popolazione $x(0)$, quest'ultimo immagazzinato nella prima cella un vettore (indice 1). Il periodo di campionamento varrà $T=1$ il che denota che la popolazione viene fotografata solo una volta (all'anno, ad esempio). Nel caso del lago Vittoria, avendo a che fare con un sistema differenziale, impostavamo invece un periodo di campionamento δt molto più basso, tendente a zero, per avere un aggressivo utilizzo dell'asse reale dei tempi che ben approssimasse il grafico finale. Nel solito ciclo *for*, che implementa la (8), verrà costruito il resto del vettore x . Alla fine del lavoro ciclico il vettore conterrà la previsione della popolazione ai vari istanti temporali (in posizione i -esima vi troveremo l'ammontare della specie all'anno i -esimo, sempre che il tempo sia contato in anni). Di seguito è riportato il programma:

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%                               Dinamica delle popolazioni e caos                               %  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
clear all  
clc  
T=1; %campiono ogni anno il valore della popolazione  
r=3.689; %parametro che combina i tassi di nascita e morte, è un tasso biologico  
n=0:T:40; %definisco il vettore degli anni: l'anno 0 è quello in cui si inizia a  
% osservare il sistema  
  
x(1)=0.1; %valore (percentuale) della popolazione all'anno 0.  
%N.B. In MATLAB i vettori non partono dall'indice zero ma dall'indice uno  
for i=2:length(n)  
    x(i)=r*x(i-1)*(1-x(i-1));  
end  
plot(n,x,'b') % stampo in blu il primo grafico (che parte da 0.1)  
xlabel('anni n')  
ylabel('percentuale popolazione x(n)');  
  
y(1)=0.1002; % cambio di poco la condizione iniziale nella medesima equazione  
for i=2:length(n)  
    y(i)=r*y(i-1)*(1-y(i-1));  
end  
hold on % stampo sullo stesso grafico gli andamenti ottenuti dalle  
        % coppie (n,x) e (n,y)  
plot(n,y,'r') % in rosso il secondo grafico (con partenza da 0.1002)
```

Il grafico prodotto dalle istruzioni *plot* è:

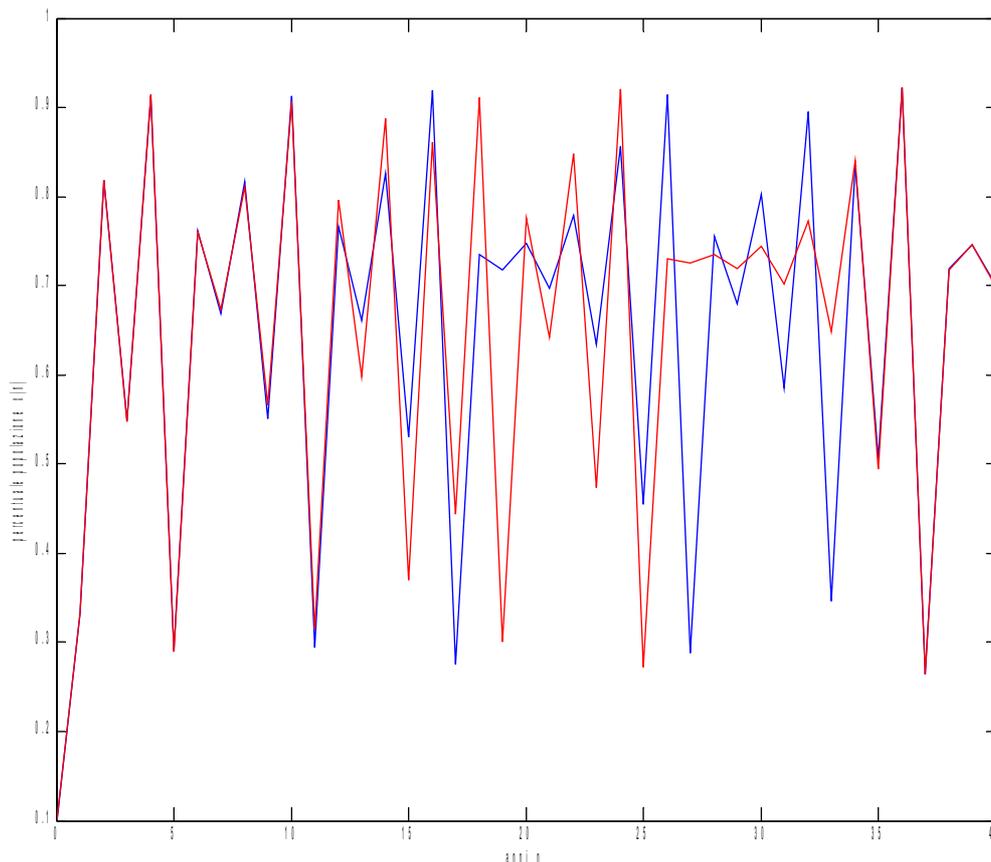


Figura fig(1)

Grafico della popolazione con condizione iniziale 0.1 (blu) e 0.1002 (rosso) e $r=3.689$. Nonostante le condizioni di partenza siano vicinissime, i due grafici sono alla lunga completamente diversi: all'anno 15 la popolazione partita da 0.1 vale 0.5302, l'altra 0.3704 cioè presentano già un distacco del 16%. Ma è impressionante quello che accade all'anno 37: lo scostamento sfiora il 50%. Solamente nel periodo iniziale i grafici sono quasi sovrapposti. In seguito il caos ha il sopravvento.

Quanto visto è sufficiente a mostrare le insidie celate da una semplice equazione alle differenze non lineare. Un errore minimo nelle condizioni iniziali si vede amplificato nel risultato finale. Per la verità un'immagine più forte del caos deterministico, cioè del comportamento caotico di equazioni basate su leggi fisiche note, è insita nei fenomeni atmosferici come nella metamorfosi della struttura delle nubi e in quella dei più pericolosi uragani.

Nel programma MATLAB precedente il potenziale biologico è stato impostato ad un particolare valore $r=3.689$. Si può comunque modificare il codice in modo da contemplare altri valori del potenziale r e scoprire cose molto interessanti.

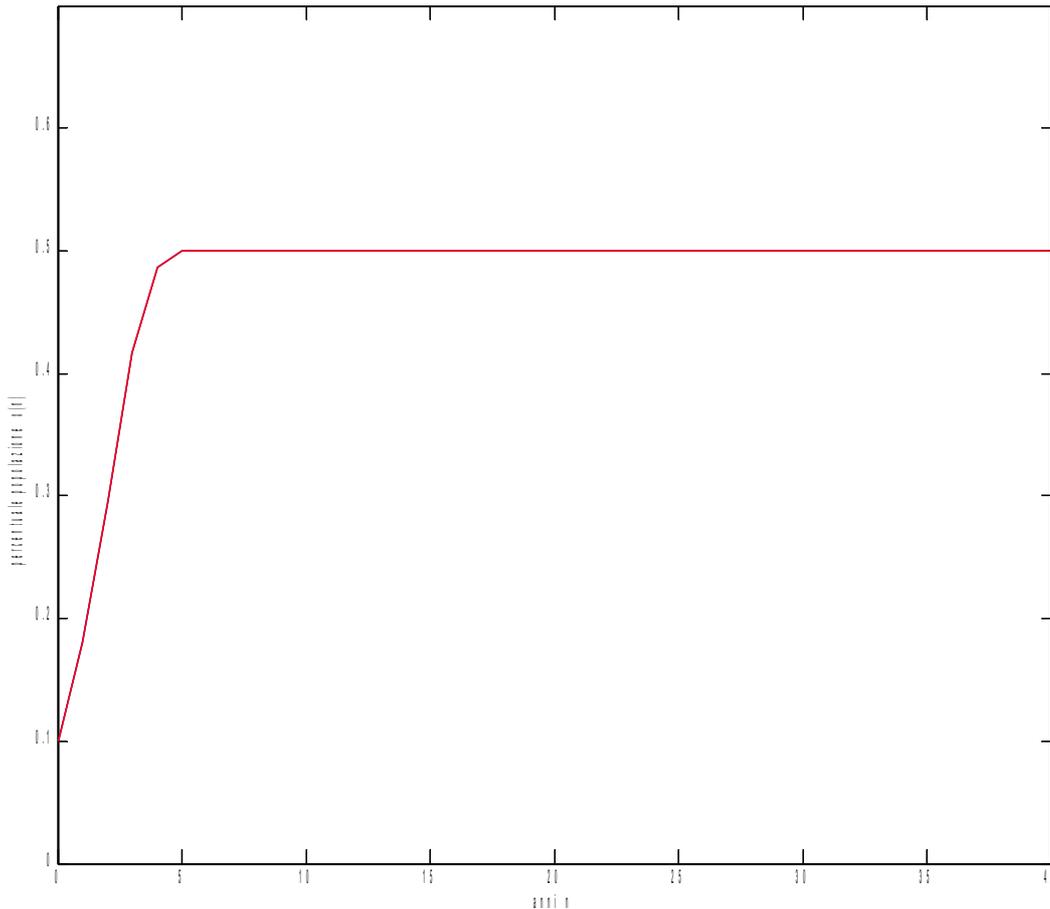


Figura fig(2)

Grafico nel caso $r=2$ con condizioni iniziali 0.1 (curva blu) e 0.1002 (curva rossa). Vi è convergenza ad un valore che si può dimostrare essere $1-1/r$, indipendente dal punto iniziale. I grafici risultano quasi sovrapposti, segno che la differenza minima nei punti iniziali non produce marcate differenze.

In particolare se $1 < r < 3$, lasciando inalterate le condizioni iniziali 0.1 e 0.1002 fissate nel codice, si scopre esserci una convergenza ad un valore particolare e che i grafici sono sostanzialmente sovrapposti, come intuitivo pensare vista la somiglianza delle condizioni iniziali: in altre parole è scomparso il comportamento caotico.

Il caos è assente anche per altri valori di r : ad esempio per valori compresi tra 0 e 1, popolazione destinata a estinguersi, oltre che per $r \in (3, 3.57)$ nel qual caso l'andamento risulta oscillare regolarmente attorno ad un valore, che sarà per questo detto semplicemente stabile. Le figure sottostanti testimoniano ogni affermazione con particolari esempi numerici:

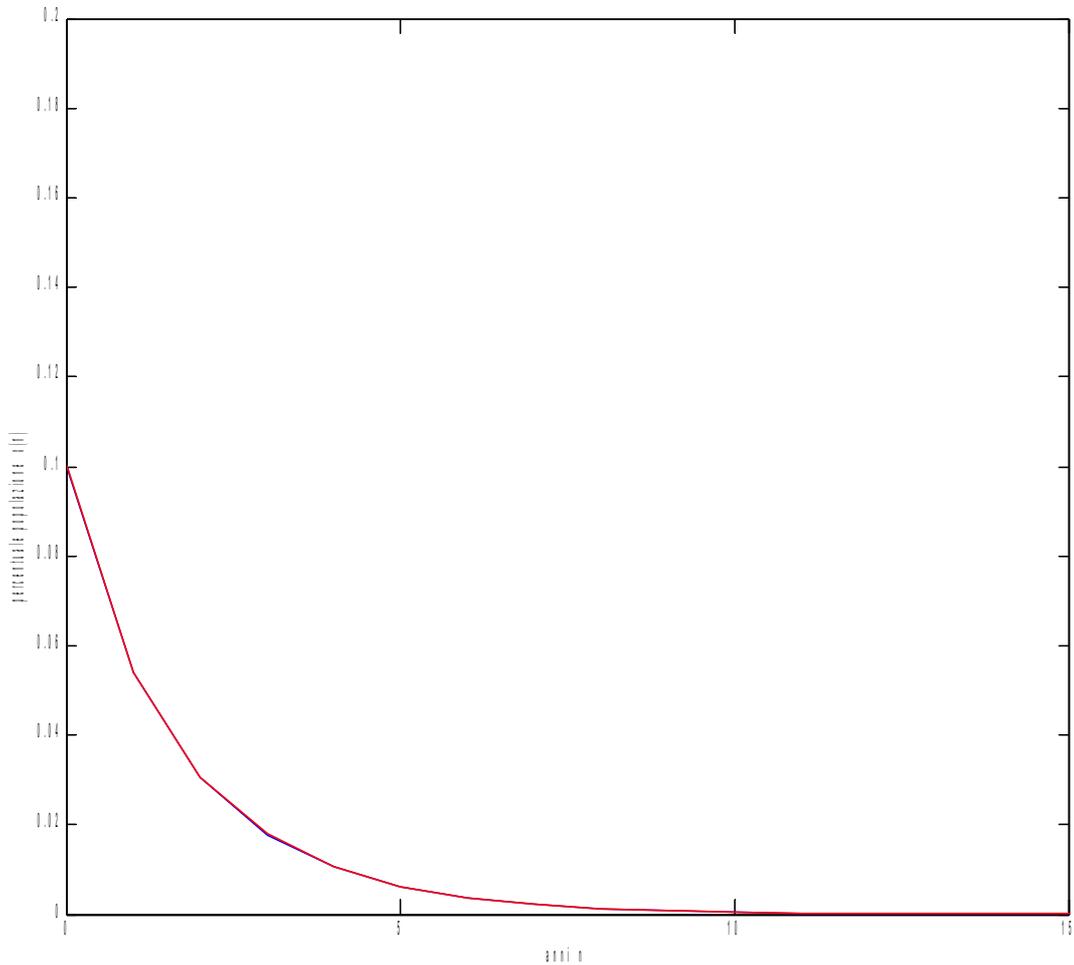


Figura fig(3)

Soluzioni dell'equazione alle differenze $x(n+1)=rx(n)[1-x(n)]$ con $r=0.6$ e condizioni iniziali $x(0)=0.1$ (curva blu) e $x(0)=0.1002$ (andamento in colore rosso). I grafici dicono che partendo con condizioni iniziali prossime il comportamento rimane analogo e destinato a convergere verso zero. Non compare il caos.

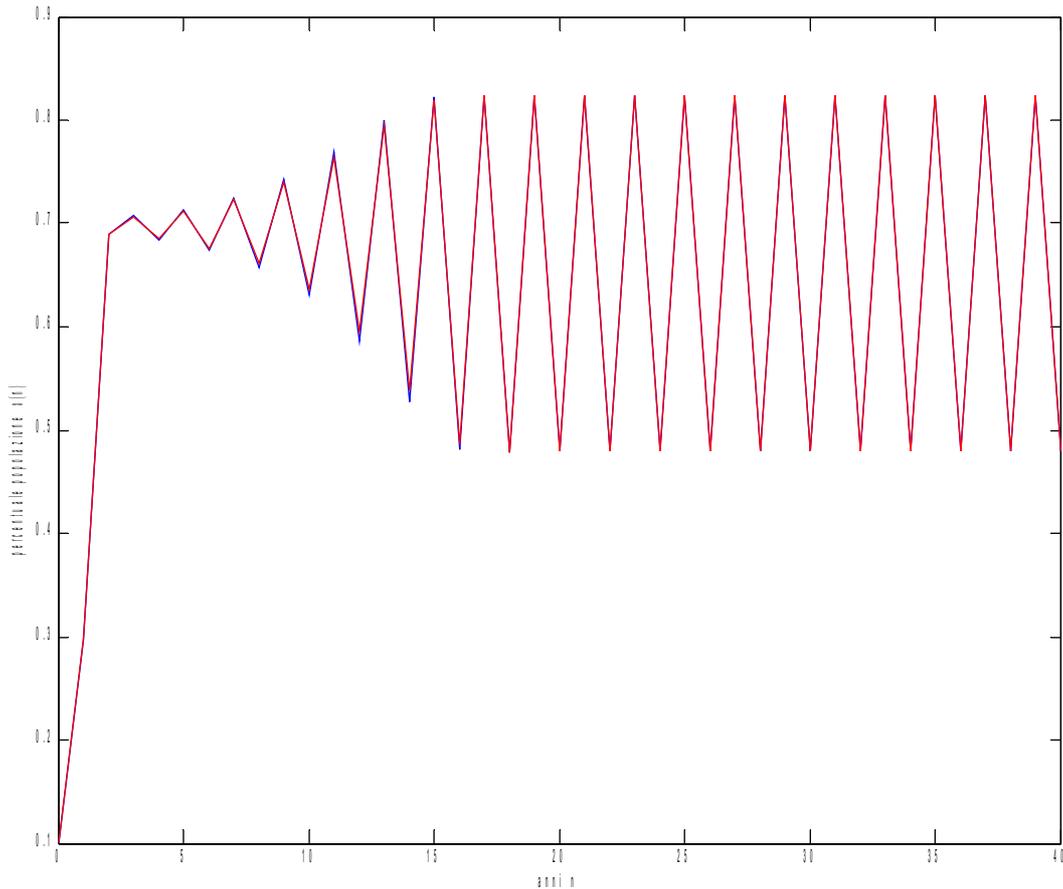


Figura fig(4)

Soluzioni dell'equazione alle differenze $x(n+1)=rx(n)[1-x(n)]$ con $r=3.1$ e condizioni iniziali $x(0)=0.1$ (curva blu) e $x(0)=0.1002$ (andamento in colore rosso). I grafici dicono che partendo con condizioni iniziali prossime il comportamento rimane analogo e destinato a convergere verso un comportamento oscillatorio regolare. Ancora una volta il caos non interviene.

La varietà di comportamenti delle soluzioni al concorrere di parametri diversi ci impone un pensiero. Il caos ha diverse nature e l'equazione alle differenze (8) calza a pennello per dimostrarlo. Il suo comportamento caotico si manifesta tanto nella non perfetta conoscenza della popolazione iniziale, quanto nel valore del potenziale biologico r . Questi due piani di caoticità presentano tuttavia delle regolarità nelle loro apparizioni: in primo luogo solo quando $r > 3.57$ una variazione, anche molto piccola, nella condizione di partenza, comporta la caoticità vista nella **fig(1)**.

In secondo luogo per ogni altro valore di r con condizioni iniziali prossime l'andamento è molto simile. Addirittura se $0 < r < 1$ la popolazione è destinata a scomparire qualunque sia la condizione al tempo zero, cioè gli andamenti alla lunga diranno tutti la stessa cosa pur partendo da valori iniziali molto diversi. Per $1 < r < 3$ vale la stessa risposta, modificata solo in coda: qualunque sia $x(0)$ alla lunga la popolazione si stabilizzerà sul valore $1-1/r$. Anche per $3 < r < 3.57$ non sussiste diversità di comportamento in relazione alle condizioni iniziali: le curve tenderanno ad assestarsi in breve su un'identica oscillazione regolare.

4 CONCLUSIONI

La tesi è andata a toccare diversi argomenti tutti però collegati tra loro sia da un punto di vista ecologico che modellistico.

La dinamica dei pesci in mare si è potuto constatare avere un comportamento molto diverso a seconda della presenza o meno della pesca. Una popolazione umana in continuo aumento richiede altresì un incremento dell'attività peschereccia che può rivelarsi dannosa per l'equilibrio dei mari e dei laghi.

Si è appurato che modelli molto semplici e lineari non sempre producono risultati che rispecchiano la realtà ma delle volte, e lo si è visto nel caso del lago Vittoria, possono essere utilizzati per capire l'evoluzione di certi parametri nel breve tempo. I modelli più accurati sono invece solitamente non lineari, risolvibili solo per via numerica tranne che in alcuni casi fortunati in cui da essi possono essere tratte preziose informazioni sul comportamento qualitativo delle soluzioni. E' stato questo il caso del modello di Volterra approfondito nel paragrafo 1.2; dalle sue equazioni siamo riusciti a dimostrare la natura periodica degli andamenti demografici di prede e predatori pur non calcolando effettivamente le soluzioni. Altri modelli non lineari, come l'equazione di Verhulst (paragrafo 2.2), siamo invece andati a risolverli esplicitamente. Trattasi questi tuttavia di casi assai rari. Il più delle volte per le equazioni differenziali non lineari non vi è un metodo risolutivo. Matlab consente la tracciatura dei grafici delle soluzioni (senza però darne l'andamento analitico) e per farlo traduce il modello a tempo continuo nella rispettiva versione discreta. Nel discreto si lavora per campioni: il valore di una grandezza ad un certo istante è sempre deducibile dal valore della stessa all'istante precedente; in questa maniera, una volta fissate le condizioni iniziali, sono calcolabili esattamente tutti i campioni successivi.

L'ultimo aspetto analizzato ha visto al centro proprio le condizioni iniziali: in alcuni modelli discreti (come quelli per le previsioni meteo o la versione discretizzata dell'equazione di Verhulst del paragrafo 3.1) la non perfetta conoscenza del valore iniziale si ripercuote vistosamente sui valori futuri delle variabili del sistema non consentendo una previsione del fenomeno che sia poi quella vicina alla realtà.

Quello che si deve leggere tra le righe del presente lavoro è allora che gran parte dei fenomeni naturali possono essere spiegati con dei modelli. Non esiste però un modello corretto ed uno errato per un certo evento. Esiste solamente un modello che meglio illustra la realtà, andando più vicino con le proprie previsioni a quelli che sono poi i risultati pratici. Modelli rudimentali come quello citato nel paragrafo 1.4 per il lago Vittoria sono comunque utili per illustrare il comportamento di determinate grandezze in un breve lasso di tempo, pur divenendo irrealistici a lungo andare.

5 Bibliografia

M.BISIACCO, S.BRAGHETTO: “*Teoria dei sistemi dinamici*”, Bologna, Esculapio, 1998.

G.GAETA: “*Modelli matematici in biologia*”, Milano, Springer-Verlag, 2007.

M.BRAMANTI, D.PAGANI, S.SALSA: “*Analisi matematica 2*”, Bologna, Zanichelli ed., 2009.

A.BEUTELSPACHER: “*Le meraviglie della matematica*”, Munchen, Piper Verlag GmbH, 2007.

D.ACHESON: “*1089 e altri numeri magici*”, Bologna, Zanichelli editore, 2009.

BADINO, MARTIGNETTI, ROLANDO, DELÁGE, BARBIERI, PAULY, WATSON, TARTAGLIA: “*L'ambiente e l'energia*”, tratto dalla rivista “*La Scienza*”, Novara, De Agostini, 2005.