



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA**



**DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
DELL'INFORMAZIONE**

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE

MODELIZZAZIONE E CONTROLLO DI UN BALLBOT

Relatore: Prof. LUCA SCHENATO

Laureando: BHAWANDEEP SINGH

ANNO ACCADEMICO 2021–2022

7 MARZO 2022

Indice

Introduzione	3
1 Generalità sui Ballbot	4
1.1 Robot autobilanciati.....	4
1.1.1 Motivazioni.....	4
1.1.2 Prime versioni del Ballbot.....	5
1.2 Descrizione del sistema.....	7
2 Modello fisico e linearizzazione	9
2.1 Modello fisico bidimensionale.....	9
2.2 Modello di stato e linearizzazione.....	15
2.3 Sistema ad anello aperto.....	17
3 Controllo ad anello chiuso del Ballbot	19
3.1 Sfida.....	19
3.2 Controllore.....	20
3.2.1 Controllore $C_\theta(s)$	20
3.2.1 Controllore $C_\theta(s)$	23
Conclusioni	29
Bibliografia	30

Introduzione

L'obiettivo di questa trattazione è quello di fornire una panoramica sui Ballbot, dando alcuni cenni storici, quali le motivazioni che hanno spinto allo studio di questa tecnologia e i diversi progetti finora studiati. Si analizza, quindi, il funzionamento generale di un ballbot e il principio fisico su cui esso si basa. La parte di studio ha visto la modellazione del robot e la simulazione del sistema dinamico in ambiente MATLAB - Simulink. Successivamente la tesi verterà sull'argomento principale che è la progettazione di un controllore che agisce sui motori di bordo di un ballbot per stabilizzarlo lungo l'asse verticale. Trovato un modello matematico che descriva il sistema fisico, si passerà alla linearizzazione delle equazioni che governano il sistema intorno ad un punto di equilibrio, ciò significa che si considereranno piccole perturbazioni degli ingressi intorno all'equilibrio, in modo da mantenere valide le equazioni linearizzate. Il passo successivo consisterà nel porre delle specifiche ragionevoli e quindi nella progettazione di un controllore che permetta al corrispondente sistema retroazionato di avere le caratteristiche desiderate. Si faranno uso di strumenti quali matlab, sisotool e simulink, che faciliteranno il lavoro della scelta di poli e zeri adeguati al controllore. Infine, si trarranno le conclusioni sulla base dei risultati ottenuti.

Capitolo 1

Generalità sui Ballbot

1.1 Robot autobilanciati

1.1.1 Motivazioni

Storicamente, i robot mobili sono stati progettati per essere staticamente stabili, il che fa sì che il robot non debba consumare energia mentre è fermo. Ciò si ottiene in genere attraverso l'uso di tre o più ruote su una base. Per evitare il ribaltamento, questi robot mobili staticamente stabili hanno un'ampia base per un grande poligono di supporto e molto peso morto nella base per abbassare il baricentro. Inoltre, tendono ad avere una bassa accelerazione o decelerazione per evitare il ribaltamento. Non possono né rotolare in nessuna direzione, né girare sul posto. Il desiderio di costruire robot mobili alti e stretti che non si ribaltino ha portato allo sviluppo di robot mobili di bilanciamento come il ballbot. Un ballbot (Figura 1.1.1) ha generalmente un corpo che si bilancia sopra una singola ruota sferica. Il corpo viene mantenuto in posizione eretta attorno al suo punto di equilibrio instabile controllando la sfera, proprio come il controllo di un pendolo inverso. Attraverso il suo unico punto di contatto con il suolo, un ballbot è omnidirezionale, eccezionalmente agile e consente una migliore navigabilità in ambienti stretti, affollati e dinamici. Tutte queste caratteristiche rendono la pianificazione per ottenere i movimenti desiderati per il ballbot un compito impegnativo.

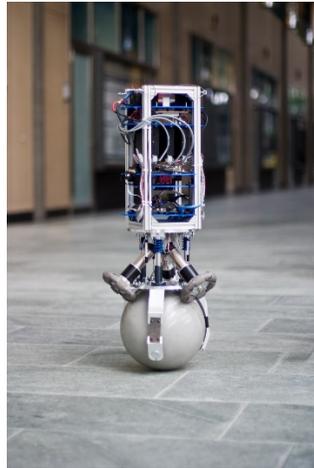


Figura 1.1 Il Rezero sviluppato all'ETH di Zurigo, Svizzera nel 2010

1.1.2 Prime versioni del Ballbot

Il primo ballbot di successo è stato sviluppato nel 2005 dal Prof. Ralph Hollis del Robotics Institute presso la Carnegie Mellon University (CMU), Pittsburgh, USA ed è stato brevettato nel 2010. Il CMU (Figura 1.2) Ballbot è costruito per essere a misura d'uomo, sia per altezza che per ingombro. Il Prof. Hollis e il suo gruppo alla CMU hanno dimostrato che il ballbot può essere resistente ai disturbi, inclusi calci e spinte. Dall'introduzione di CMU Ballbot nel 2005, molti altri gruppi in tutto il mondo hanno sviluppato ballbot. Il Prof. Masaaki Kumagai ha sviluppato BallIP (Figura 1.3) nel 2008 presso l'università Tohoku Gakuin, in Giappone. Il Prof. Kumagai e il suo gruppo hanno dimostrato la capacità dei ballbot di trasportare carichi e di essere utilizzati per il trasporto cooperativo. Thomas Kølbæk Jespersen (Danimarca) ha sviluppato il ballbot Kugle (Figura 1.4) come sua tesi della magistrale nel 2019 presso l'Università di Aalborg. Dotato di tre motori, un Intel NUC integrato, due SICK LiDAR, un microprocessore ARM e un tablet nella parte superiore, il robot è in grado di manovrare autonomamente in ambienti interni e guidare le persone in giro.



Figura 1.2 CMU Ballbot

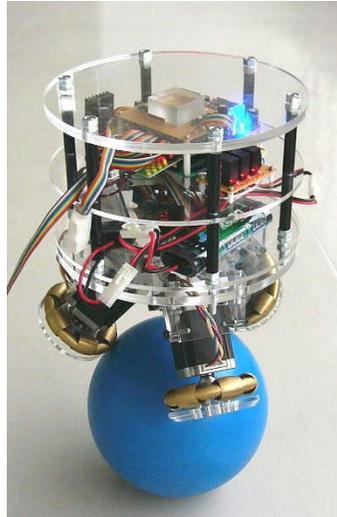


Figura 1.3 BallP



Figura 1.4 Ballbot

Kugle

1.2 Descrizione del sistema

I parametri di progettazione più fondamentali di un ballbot sono la sua altezza, massa, il suo baricentro e la coppia massima che i suoi attuatori possono fornire. La scelta di questi parametri determina il momento d'inerzia del robot, l'angolo di beccheggio massimo e quindi le sue prestazioni dinamiche e di accelerazione. La velocità massima è funzione della potenza dell'attuatore e delle sue caratteristiche. Oltre alla coppia massima, l'angolo di inclinazione è ulteriormente limitato dalla forza massima che può essere trasmessa dagli attuatori al suolo. Pertanto, anche i coefficienti di tutte le parti coinvolte nella trasmissione della forza svolgono un ruolo importante nella progettazione del sistema. Inoltre, è necessario prestare molta attenzione al rapporto tra il momento d'inerzia del corpo del robot e la sua sfera per evitare rotazioni indesiderate della sfera, specialmente durante l'imbardata. La sfera è l'elemento centrale di un ballbot, deve trasmettere e sopportare tutte le forze che ne derivano e resistere all'usura meccanica causata dalle superfici di contatto ruvide. Sono essenziali un elevato coefficiente di attrito della sua superficie e una bassa inerzia. Principalmente per quanto riguarda il meccanismo di azionamento della sfera sono note due varianti:

1. una 'pallina del mouse invertita'. A differenza della tradizionale pallina del mouse che aziona i rulli per fornire l'input al computer, la pallina inversa del mouse utilizza rulli per azionare la sfera che produce movimento. (Figura 1.5.1),
2. tre omni-ruote (Figura 1.5.2).

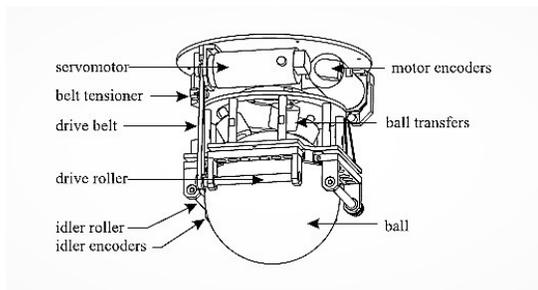


Figura 1.5.1 sfera controllata da rulli

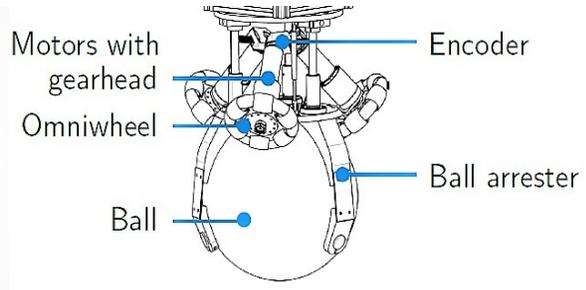


Figura 1.5.2 sfera controllata da omni-ruote

Solo il CMU Ballbot utilizza il meccanismo di azionamento della pallina del mouse inverso.

La sfera viene azionata utilizzando quattro rulli e ogni rullo è azionato da un motore elettrico indipendente più un motore per la rotazione dell'imbardata. A differenza di CMU Ballbot, sia BallIP, Rezero e Kugle usano le omni-ruote per guidare la sfera con solo tre motori per entrambe le operazioni di controllo.

Al fine di controllare attivamente la posizione e l'orientamento del corpo di un ballbot da una struttura sensore-computer-attuatore, oltre a un microprocessore adatto per eseguire i cicli di controllo necessari, un ballbot richiede fundamentalmente una serie di sensori che consentono di misurare l'orientamento della sfera e del corpo del ballbot in funzione del tempo. Per tenere traccia dei movimenti della sfera, vengono solitamente utilizzati encoder rotativi. Vengono poi utilizzati anche giroscopi e accelerometro.

Capitolo 2

Modello fisico e linearizzazione

2.1 Modello fisico bidimensionale

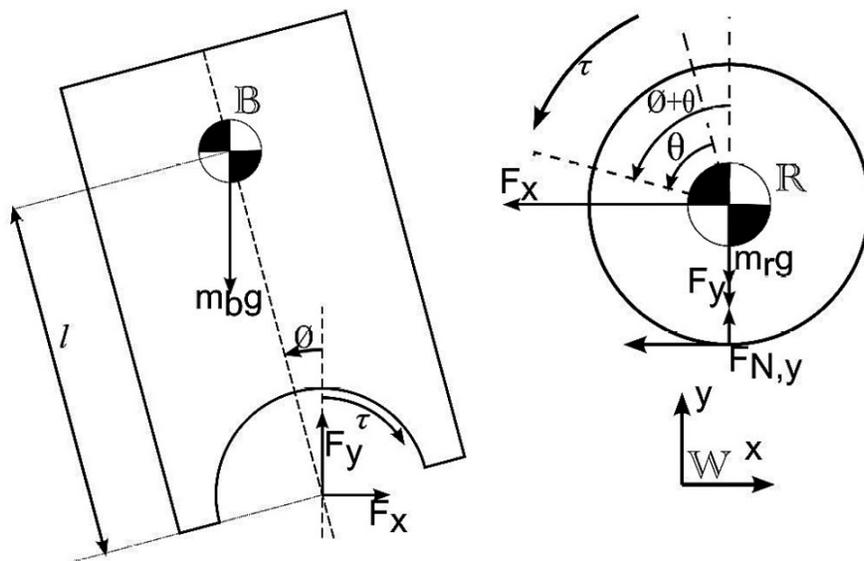


Figura 2.1 Modello bidimensionale del ballbot

Il modello che verrà analizzato in questa tesi è il bidimensionale semplificato (Figura 2.1). Consiste in un corpo rigido attaccato al centro di massa di una sfera rigida tramite un giunto rotante. La distanza tra i centri di massa del corpo e la sfera è fissata a l . Vengono definiti tre quadri di riferimento, il sistema di riferimento inerziale W , il telaio del corpo B (body) situato al centro di massa del corpo e il telaio della sfera R situato al centro di massa della sfera. L'angolo tra l'asse y di W e l'asse del corpo verticale in B è definito ϕ . L'angolo θ è definito tra l'asse verticale di R della sfera e l'asse verticale del corpo di B . Ovvero θ è definito tale che $\phi + \theta$ è l'angolo tra l'asse y di W e l'asse verticale di R .

Tabella 1.1 Parametri nominali

Raggio sfera	r_r	0.1058 m
Raggio body (CM)	r_b	0.006335 m
Peso sfera	m_r	2.44 kg
Peso body	m_b	51.66 kg
Lunghezza sfera-body (CM)	l	0.69 m
Inerzia della sfera	I_r	0.0174 kg*m ²
Momento torcente d'ingresso alla sfera (CM) definito in W	τ	2.128 N*m/A
Inerzia del body (rispetto all'asse dell'imbardata)	I_{b1}	12.59 kg*m ²
Inerzia del body (rispetto all'asse di beccheggio)	I_{b2}	12.48 kg*m ²
Coefficiente di attrito viscoso	D_v	3.68 N*m*s/rad
Accelerazione di gravità	g	9.8 m* s ⁻²

Ipotesi sul modello:

1. Il movimento nel piano XZ e nel piano YZ è disaccoppiato e l'equazione del movimento in questi piani è lo stesso,
2. Si ha un attrito viscoso di tipo lineare fra la sfera e superficie di contatto,
3. Non c'è attrito sul movimento rotatorio del corpo,
4. Non c'è scivolamento tra il corpo e la sfera, né tra la sfera e superficie di contatto,
5. La densità del corpo è uniforme.

Le prime due equazioni che governano la dinamica del modello bidimensionale della sfera possono essere ottenute tramite la seconda legge di Newton sul corpo per ogni asse x e y di W come:

$$m_b \ddot{x}_r = \mathbf{F}_x^1, \quad (2.1)$$

$$m_b \ddot{y}_r = \mathbf{F}_y - m_b g. \quad (2.2)$$

¹ $\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y$: Forza applicata al corpo dalla sfera

Similmente, per il corpo:

$$m_r \ddot{x}_r = -F_x - F_f^2, \quad (2.3)$$

$$m_r \ddot{y}_r = -F_y - m_r g + F_{y,N}^3. \quad (2.4)$$

Il momento torcente sul movimento rotatorio del corpo risulta:

$$I_b \ddot{\theta}_r = -\tau + F_y l \sin\phi + F_x l \cos\phi. \quad (2.5)$$

Poiché le forze esercitate dal corpo sulla sfera (applicate al centro di massa), il movimento rotatorio della sfera è descritto dall'equazione:

$$I_r(\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) = \tau - F_f r_r. \quad (2.6)$$

Avendo posto l'ipotesi della non presenza di scivolamento tra la superficie e sfera si è in condizioni di puro rotolamento avente la forma:

$$\dot{x}_r = -(\dot{\theta} + \dot{\phi})r_r. \quad (2.7)$$

Facendo la derivata della (2.7) si trova l'accelerazione lineare:

$$\ddot{x}_r = -(\ddot{\theta} + \ddot{\phi})r_r. \quad (2.8)$$

Ancora per il vincolo del moto di puro rotolamento si può affermare che non c'è movimento della sfera lungo l'asse y:

$$\ddot{y}_r = 0. \quad (2.9)$$

Dall'ipotesi del corpo rigido, la distanza tra il centro di massa della sfera e il centro di massa del corpo deve rimanere costante a l e allo stesso angolo rispetto alla struttura

² F_f : forza applicata alla sfera dalla superficie nell'asse x inverso al movimento del Ballbot

³ $F_{y,N}$: forza normale applicata dalla superficie alla sfera

del corpo. In altre parole, il vincolo del giunto rotante può essere formulato in termini di posizioni della sfera e del corpo come:

$$\begin{bmatrix} x_b + l \sin \phi \\ y_b - l \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

la cui derivata seconda risulta:

$$\ddot{x}_b + \ddot{\phi} l \cos \phi - \dot{\phi}^2 l \sin \phi = \ddot{x}_r. \quad (2.11)$$

$$\ddot{y}_b + \ddot{\phi} l \sin \phi - \dot{\phi}^2 l \cos \phi = \ddot{y}_r. \quad (2.12)$$

Ora usando l'equazione (2.8) nella (2.11) otteniamo:

$$\ddot{x}_b = -(\ddot{\phi} + \ddot{\theta}) r_r + \ddot{\phi} l \cos \phi - \dot{\phi}^2 l \sin \phi. \quad (2.13)$$

Similmente per l'asse y, uso la (2.9) nella (2.12):

$$\ddot{y}_b = -\ddot{\phi} l \sin \phi - \dot{\phi}^2 l \cos \phi. \quad (2.14)$$

Per l'equazione della forza della sfera lungo l'asse x, si possono ridurre le equazioni usando la (2.2) e (2.4) in (2.7) ottenendo:

$$I_r = \tau + (m_r \ddot{x}_r + m_b \ddot{x}_b) r_r - I_r \ddot{\phi}. \quad (2.15)$$

Inoltre, dopo aver aggiunto (2.9) e (2.14), la prima componente nelle equazioni del moto assume la sua forma finale composta di soli termini ϕ e θ e loro derivate:

$$\begin{aligned} (I_r + (m_b + m_r) r_r^2) \ddot{\theta} \\ = \tau - \ddot{\phi} (I_r + (m_b + m_r) r_r^2 + m_b r_r l \cos \phi) \\ + \dot{\phi}^2 m_b r_r l \sin \phi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Simile alla derivazione della (2.16), usiamo (2.3), (2.4), (2.13) e (2.14) in (2.5) per ottenere la seconda componente nelle equazioni del moto come:

$$(I_b + m_b l^2) \ddot{\phi} = -\tau + m_b g l \sin \phi - m_b \ddot{r}_r l \cos \phi - m_b \dot{\phi} \dot{r}_r l \sin \phi. \quad (2.17)$$

Dunque, combinando (2.16) e (2.17) si ottengono le equazioni del moto bidimensionale del ballbot:

$$\begin{bmatrix} a & a + \cos \phi \\ c * \cos \phi & b + c * \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_b g l \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau \\ -\tau \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

Dove, $a := (I_r + (m_b + m_r) r_r^2)$; $b := (I_b + m_b l^2)$ e $c := m_b r_r l$

Se la velocità iniziale della sfera e del corpo sono identiche e diverse da zero e non sono presenti disturbi esterni, questo modello continuerà a far muovere il ballbot all'infinito senza alcuna dissipazione. Tuttavia, il ballBot reale in tali situazioni generalmente si arresta dopo un intervallo poiché è presente l'inevitabile smorzamento nel sistema. Per questo motivo, si trova utile incorporare un termine di attrito lineare nelle equazioni del moto per modellare questo comportamento e creare quindi il modello più realistico. Lo si realizza con una costante di smorzamento viscoso lineare D_v tra la sfera e la superficie di contatto, modificando (2.16) come

$$(I_r + (m_b + m_r) r_r^2) \ddot{\theta} + \ddot{\phi} ((I_r + (m_b + m_r) r_r^2) + m_b r_r l * \cos \phi) - \dot{\phi}^2 m_b r_r l \sin \phi = \tau - D_v \dot{\theta} \quad (2.19)$$

Infine, come risultato si ottengono le seguenti equazioni del moto del Ballbot bidimensionale:

$$\begin{bmatrix} a & a + \cos \phi \\ c * \cos \phi & b + c * \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_b g l \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - D_v \\ -\tau \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

È stato implementato il modello non lineare del sistema nel programma simulink (Figura 2.2), in modo da verificare alcuni parametri utili, quali l'angolo (in radianti)

del corpo e della sfera, le loro velocità(rad/s) e accelerazioni(rad/s²). Sarà utile per esaminare come questi parametri vengono influenzati quando si andrà a realizzare il controllore, che verrà definito nel capitolo 3.

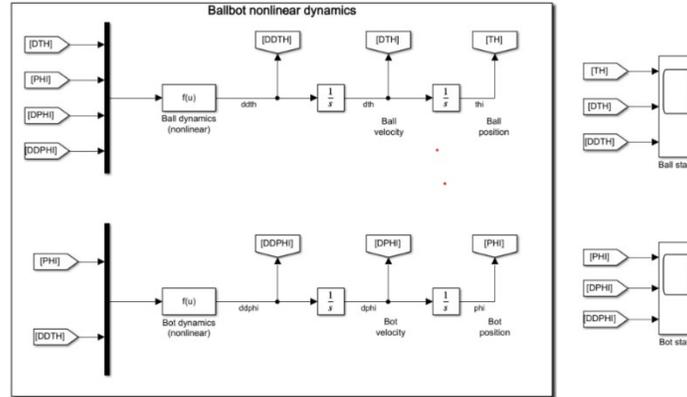


Figura 2.2 Implementazione del modello non lineare del ballbot in simulink

Raccogliendo le equazioni (2.17) e (2.19) per $\ddot{\phi}$ e $\ddot{\theta}$ trovo le due espressioni della dinamica non lineare del ballbot. Si utilizzano i vari valori nominali della Tabella 1.1, in particolare $\tau = 2.128 \text{ N} \frac{m}{A}$, $D_v = 3.68 \frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$. Inizialmente, si può intuire che il modello non lineare è in uno stato di equilibrio instabile per qualunque condizione iniziale dei valori $\theta \phi \dot{\theta} \dot{\phi}$ ($x = [\theta \phi \dot{\theta} \dot{\phi}]^T$). Infatti, si osserva come ad esempio una configurazione iniziale $x = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ produca come risultato:

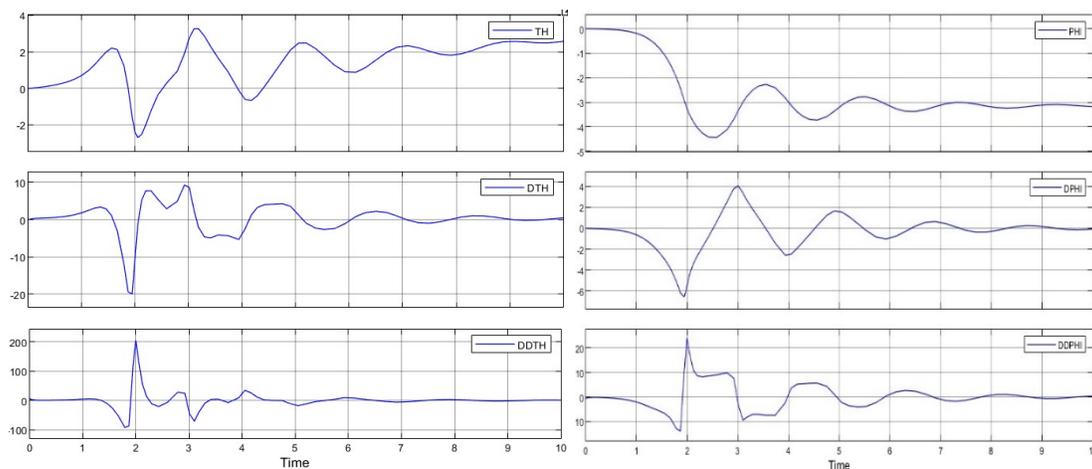


Figura 2.3 Simulazione in simulink del modello non lineare

2.2 Modello di stato e linearizzazione

Per simulare il robot in MATLAB, è necessario prima convertire il sistema nella rappresentazione in spazio di stato. Innanzitutto, si cerca di trovare un modello di stato per il sistema in considerazione in modo da scrivere le equazioni in forma compatta come segue:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (2.21)$$

La variabile di stato per la data coordinata generalizzata $q = [\theta \ \phi]$, dove θ è l'angolo della sfera e ϕ è l'angolo del corpo del robot. Poiché θ e ϕ compaiono entrambe con le loro derivate fino a quella di secondo ordine, il nostro sistema avrà ordine quattro e il vettore degli stati conterrà al più le derivate prime, perciò $x = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$.

Le matrici A, B, C, D sono date come:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \phi} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\phi}} \\ \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \theta} & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \phi} & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\theta}} & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\phi}} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \tau} \\ \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \tau} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; D = 0. \quad (2.22)$$

Differenziando le equazioni (2.17) e (2.19) rispetto a $\ddot{\theta}$ e $\ddot{\phi}$ e linearizzando il modello attorno ad un punto di equilibrio (instabile in questo caso), ad esempio $x_e = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ottengo:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \theta} = 0; & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \theta} = 0; \\
\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \phi} = \frac{bc(a+c)}{r_r*(ab-c^2)}; & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \phi} = \frac{abc}{r_r*(ab-c^2)}; \\
\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} = 0; & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\theta}} = 0; \\
\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \dot{\phi}} = 0; & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \dot{\phi}} = 0; \\
\frac{\partial \ddot{\theta}}{\partial \tau} = \frac{a+b+2c}{c^2+ab}. & \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial \tau} = \frac{a+c}{c^2-ab}.
\end{array}$$

Ora, sostituendo all'interno di questi i vari parametri dalla Tabella 1.1 trovo le seguenti matrici nella rappresentazione in spazio di stato:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6082.8 & 0 & 0 \\ 0 & 92.8 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.0979 \\ -0.4952 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Prima di passare al calcolo delle funzioni di trasferimento, può essere interessante valutare gli autovalori (Figura 2.4) della matrice della dinamica (la matrice A) e di conseguenza i modi dell'evoluzione libera, così da verificare se il sistema è asintoticamente stabile o meno. Si va, quindi a calcolare $\Delta_A(s) = \det(sI - A) = 0$. Come risultato si ottengono i valori: 0, 0, 0, 1, -92.3345. Dunque, si può concludere che il modello non lineare è instabile.

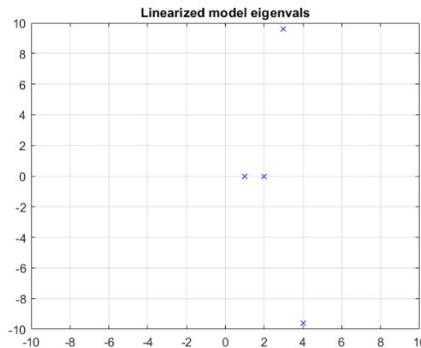


Figura 2.4 Autovalori della matrice A

2.3 Sistema ad anello aperto

Le funzioni di trasferimento del sistema sono:

$$G_{\tau,\theta} = \frac{5.071(s^2 + 496.5)}{s^2(s-9.609)(s+9.609)};$$
$$G_{-\tau,\emptyset} = \frac{-0.4913}{(s-9.609)(s+9.609)}.$$
(2.24)

Per verificare se il modello lineare è BIBO stabile o meno, si vanno a calcolare i poli delle due funzioni di trasferimento:

```
sfera_p = 4x1
          0
          0
          9.6091
          -9.6091

corpo_p = 2x1
          9.6091
          -9.6091
```

Figura 2.5 Poli delle funzioni di trasferimento

Entrambe le funzioni di trasferimento presentano poli a parte reale positiva e quindi il sistema non è BIBO stabile, n'è dall'input della forza F al output dell'angolo (di conseguenza posizione) θ e n'è dall'input della forza F al output dell'angolo \emptyset .

Capitolo 3

Controllo ad anello chiuso del Ballbot

3.1 Sfida

Il sistema in considerazione non è SISO, infatti si ha come ingresso una forza ($\tau, -\tau$) e due ‘uscite’ da controllare, ovvero sia la posizione della sfera che l’angolo del corpo (Figura 3.1). Inoltre, il sistema è instabile, per cui non lo si può studiare nel dominio della frequenza (margine di fase, pulsazione di attraversamento).

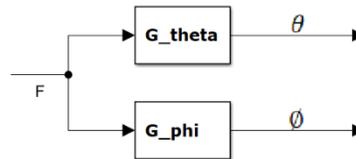


Figura 3.1 Sistema da controllare

La soluzione a questa ‘sfida’ è quella di stabilizzare prima l’angolo del corpo e dunque stabilizzare la posizione del ballbot (controllo in serie). Questo può essere reso possibile attraverso, ad esempio, lo studio del luogo delle radici e la progettazione del controllore in retroazione negativa. Dunque, si seguirà la seguente procedura:

1. Si andrà a stabilizzare l’angolo del corpo a $\theta = 0$, ignorando completamente la posizione del Ballbot. Si andrà a progettare il controllore $C_\theta(s)$ con il luogo delle radici.
2. Si ricalcola la funzione di trasferimento dalla forza esterna F alla posizione x (facendo attenzione che non ci siano cancellazioni zero-polo instabili).

3. Si stabilizza la posizione desiderata, ad esempio $x=0$, sempre tramite lo studio attraverso il luogo delle radici.

3.2 Controllore

3.2.1 Controllore $C_\phi(s)$

Si consideri, inizialmente, un controllore proporzionale $C_\phi(s) = k$. Si può quindi iniziare considerando un controllore con guadagno -1. Otteniamo, il seguente grafico:

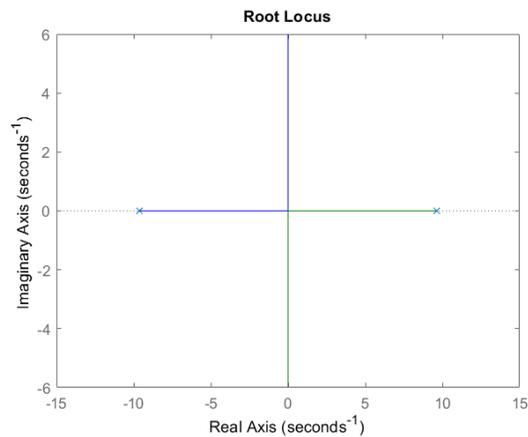


Figura 3.2 Luogo delle radici (1)

Per qualunque valore del guadagno ($k < 0$) del compensatore, si ha sempre un ramo del luogo che rimane nel RHP (luogo positivo). Dunque, un semplice controllore proporzionale non è sufficiente a stabilizzare il corpo. Si aggiunge ora un polo in -20, ottenendo (Figura 3.3):

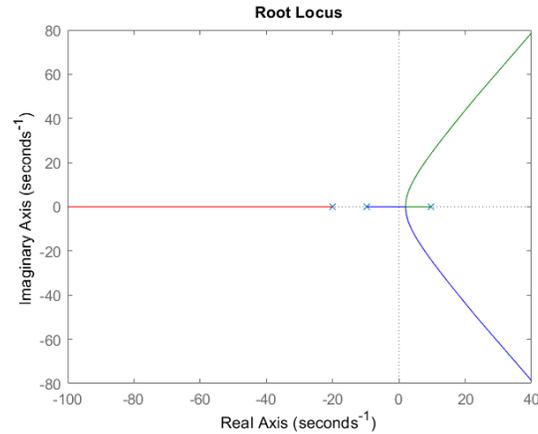


Figura 3.3 Luogo delle radici (2)

Come si intuisce dalla figura 3.3 il compensatore non è ancora in grado di stabilizzare il sistema ad anello chiuso. È necessario piegare i due rami della RHP verso la LHP. Ciò si ottiene aggiungendo uno zero nell'LHP al compensatore (proprietà "attraente" degli zeri).

Si consideri di aggiungere uno zero in $s = -5$ al compensatore. Si ottiene (Figura 3.4):

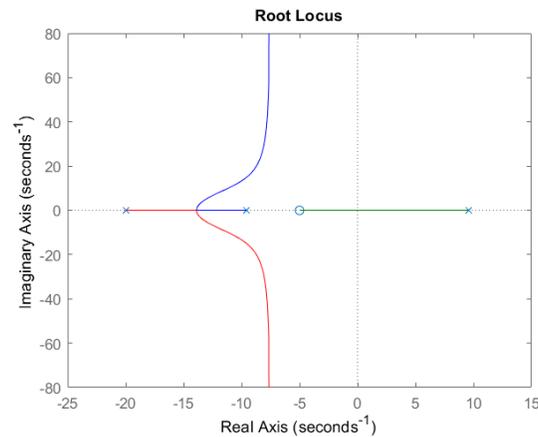


Figura 3.4 Luogo delle radici (3)

Ora, per un guadagno del compensatore sufficientemente alto, il sistema ad anello chiuso diventa stabile. Dall'analisi del luogo delle radici, si può verificare che una scelta ragionevole per il guadagno compensatore è -180. Si vanno a tracciare i poli della funzione di trasferimento in catena chiusa $W_{\phi}(s) = \frac{G_{\phi}(s)C_{\phi}(s)}{1+C_{\phi}(s)G_{\phi}(s)}$ (Figura 3.5).

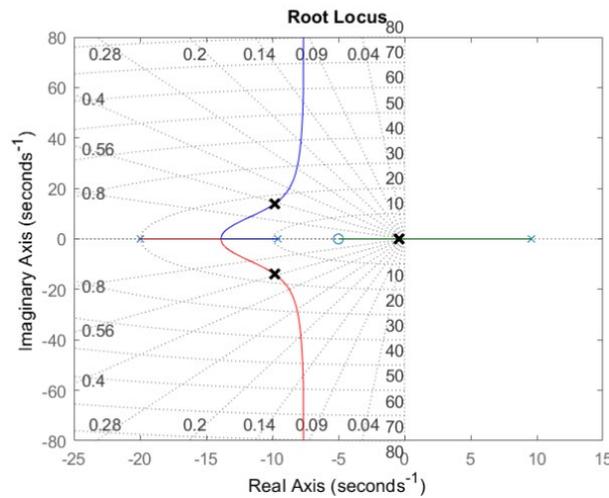


Figura 3.5 Luogo delle radici (4)

Si intuisce dalla figura 3.5 che tutti i poli della funzione di trasferimento in catena chiusa appartengono al LHP, ovvero hanno tutti parte reale negativa. Si va a verificare la risposta impulsiva del sistema lineare controllato, ottenendo (Figura 3.6):

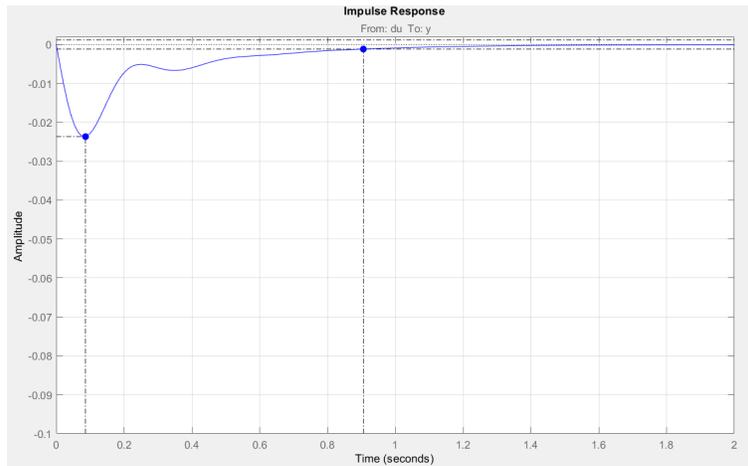


Figura 3.6 Risposta impulsiva del sistema lineare controllato

Il controllore realizzato è $C_{\varnothing}(s) = \frac{-180(s+5)}{(s+20)}$. Inoltre, sono state raggiunte ottime prestazioni per quanto riguarda il tempo di assestamento (al 5%) e la sovralongazione. Come previsto, il corpo viene stabilizzato dal controllore (almeno per piccole deviazioni attorno all'equilibrio verticale verso l'alto). Si va ora a testare il

controllore $C_\phi(s)$ utilizzando il modello non lineare del sistema ballbot implementato in Simulink con condizioni iniziali $x = [0 \ \frac{\pi}{4} \ 0 \ 0]^T$ (Figura 3.7).

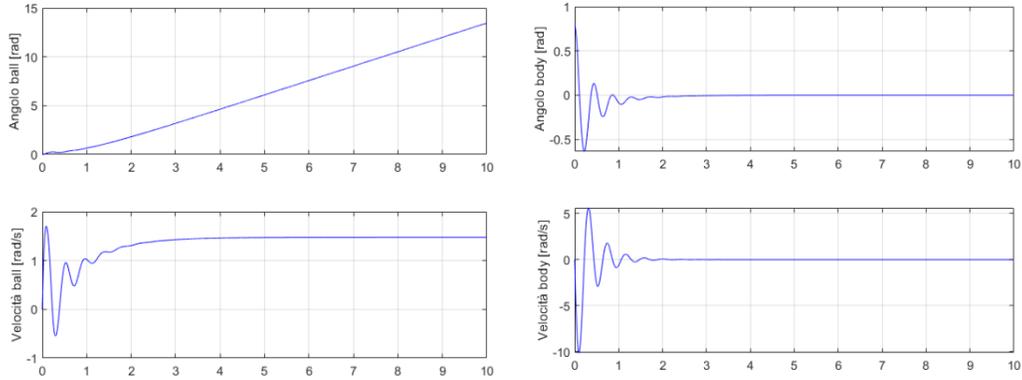


Figura 3.7 Simulazione del modello non lineare con il controllore $C_\phi(s)$

Tuttavia, dalla figura 3.7, si rileva come il ballbot si muove indefinitamente.

3.2.1 Controllore $C_\theta(s)$

Dunque, l'obiettivo ora è quello di trovare il controllore per stabilizzare la posizione del ballbot. Il controllore per la posizione deve essere progettato per il sistema ad anello chiuso con il corpo stabilizzato. In pratica la funzione di trasferimento da considerare è quella dalla forza in ingresso alla posizione del ballbot, tenendo conto della presenza del sistema equilibrato in catena chiusa del corpo. Questa funzione di trasferimento ha

forma: $P_\theta(s) = \frac{G_\theta(s)}{1+G_\phi(s)C_\phi(s)}$ dove $G_\phi(s) = C_\phi(s)P_\phi(s)$.

I poli della funzione di trasferimento $P_\theta(s)$ sono:

```
ans = 5x1 complex
    0.0000 + 0.0000i
    0.0000 + 0.0000i
   -0.4056 + 0.0000i
   -9.7972 +14.0294i
   -9.7972 -14.0294i
```

Figura 3.8 Poli di $P_\theta(s)$

Si nota come $P_\theta(s)$ sia già marginalmente stabile, poiché non ci sono poli a parte reale positiva. In linea di principio, la progettazione del controller di posizione del ballbot può essere eseguita ricorrendo a metodi convenzionali, nel dominio della frequenza (ad es. metodo di Bode). Tuttavia, analogamente a quanto fatto prima, il metodo di progettazione del luogo della radice viene applicato successivamente.

È stato osservato che per qualunque valore del guadagno K_{C_θ} di un semplice controllore proporzionale $C_\theta(s)$ ho almeno un ramo nell' RHP (dell'anello chiuso).

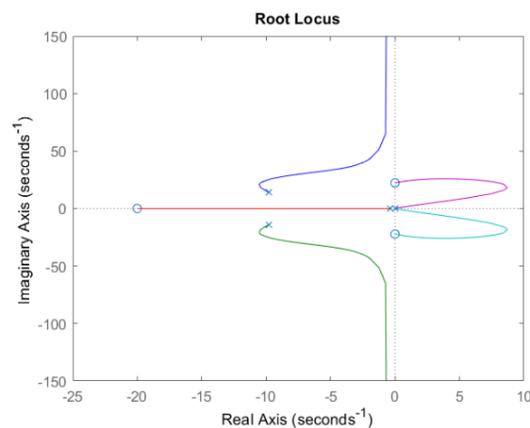


Figura 3.9 Luogo delle radici di $P_\theta(s)$

Non è facile trovare una compensazione che sposti il polo reale instabile (dell'anello chiuso) del luogo della radice nell'LHP. Un'idea sarebbe quella di progettare un controllore PID, se questo riuscisse a stabilizzare il sistema. Si inizia quindi con un polo nell'origine, che va a modificare il luogo nel seguente modo:

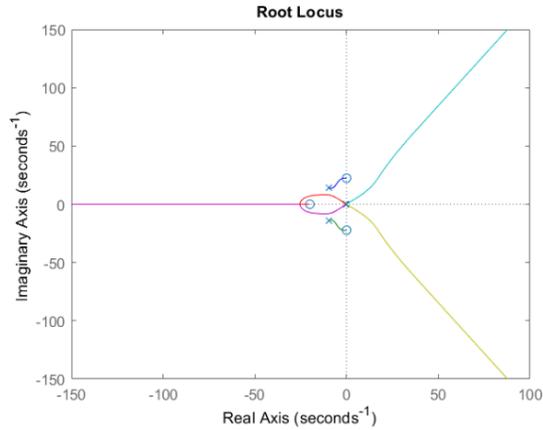


Figura 3.10 Luogo delle radici (1)

Grazie all'interattività del programma sisotool, è stato possibile simulare e osservare agevolmente, differenti configurazioni di compensatore che hanno permesso di scegliere la configurazione migliore. Infatti, aggiungendo uno zero doppio a $s = -0.017$ e osservando come un guadagno relativamente basso, ad esempio $K=0.9$, basti per stabilizzare il sistema ad anello chiuso (Figura 3.11).

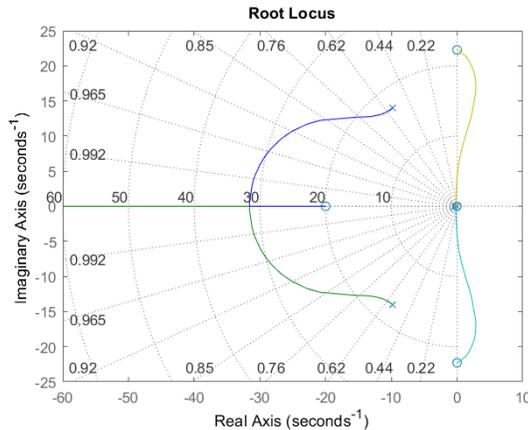


Figura 3.12 Luogo delle radici (2)

Il controllore per stabilizzare la posizione del ballbot ha la forma finale $C_\theta(s) = \frac{0.9(s+0.017)^2}{s}$. Si noti come il controllore $C_\theta(s)$ abbia la forma di un controllore PID

$$C_{PID} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s.$$

I poli della funzione di trasferimento in catena chiusa $W_{\theta}(s) = \frac{P_{\theta}(s)C_{\theta}(s)}{1+C_{\theta}(s)P_{\theta}(s)}$ sono:

```
p = 6x1 complex
-9.8213 +14.0091i
-9.8213 -14.0091i
-0.1767 + 0.9965i
-0.1767 - 0.9965i
-0.0187 + 0.0000i
-0.0159 + 0.0000i
```

Figura 3.13 Poli di $W_{\theta}(s)$

Si vanno a tracciare questi poli sul piano complesso del luogo delle radici (Figura 3.15):

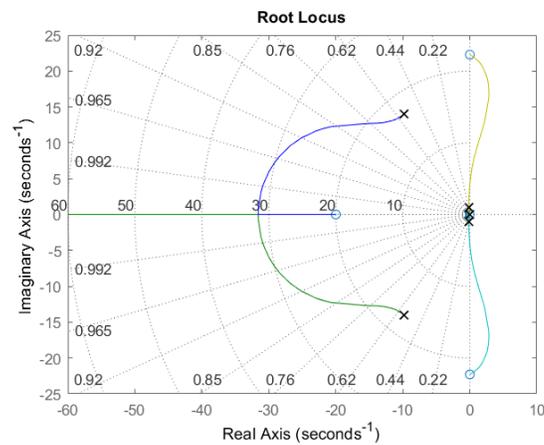


Figura 3.14 Luogo delle radici (3)

La risposta al gradino unitario del sistema lineare è data come (Figura 3.15):

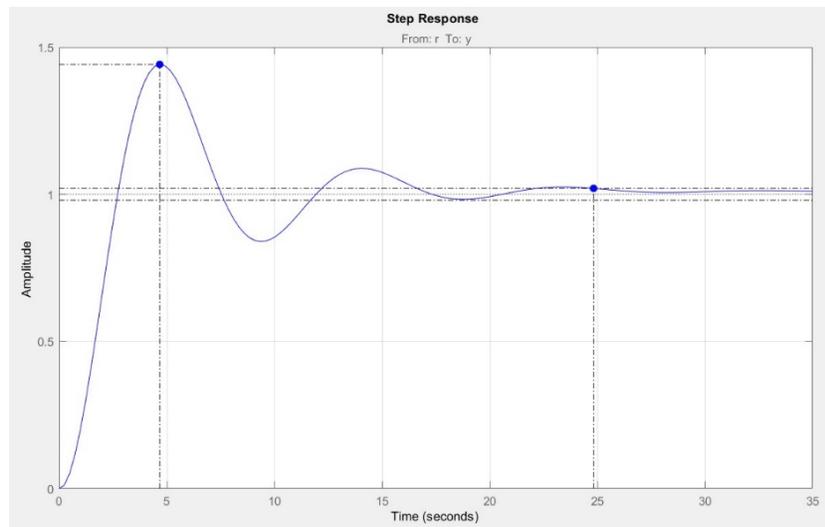


Figura 3.15 Risposta al gradino unitario di $W_{\theta}(s)$

Tuttavia, come dimostra la figura 3.15 il tempo di salita è relativamente alto. Si deve cercare un buon compromesso tra il tempo di salita e la sovralongazione. Allora, si è osservato che aumentando il guadagno $K=2.1$ la risposta al gradino del sistema controllato diventa:

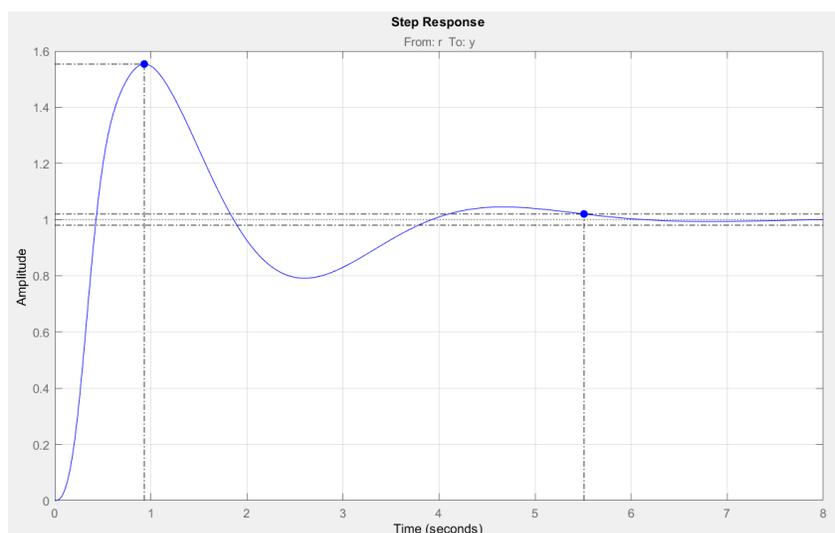


Figura 3.16 Risposta al gradino di $W_{\theta}(s)$ con $C_{\theta}(s)$ modificato

Si va ora a testare il sistema non lineare, dove sono stati implementati entrambi i controllori per ϕ e θ e si verificherà come il sistema complessivo risulta stabile, almeno per piccole variazioni dell'angolo ϕ . Le condizioni iniziali imposte sono $x = [0 \ \frac{\pi}{8} \ 0 \ 0]^T$. Il modello simulink complessivo risulta essere:

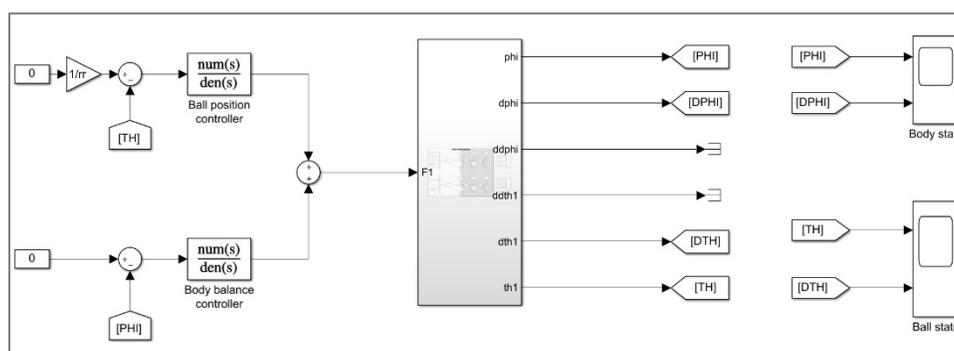


Figura 3.17 Modello non lineare con l'implementazione dei controllori

I risultati ottenuti sono i seguenti:

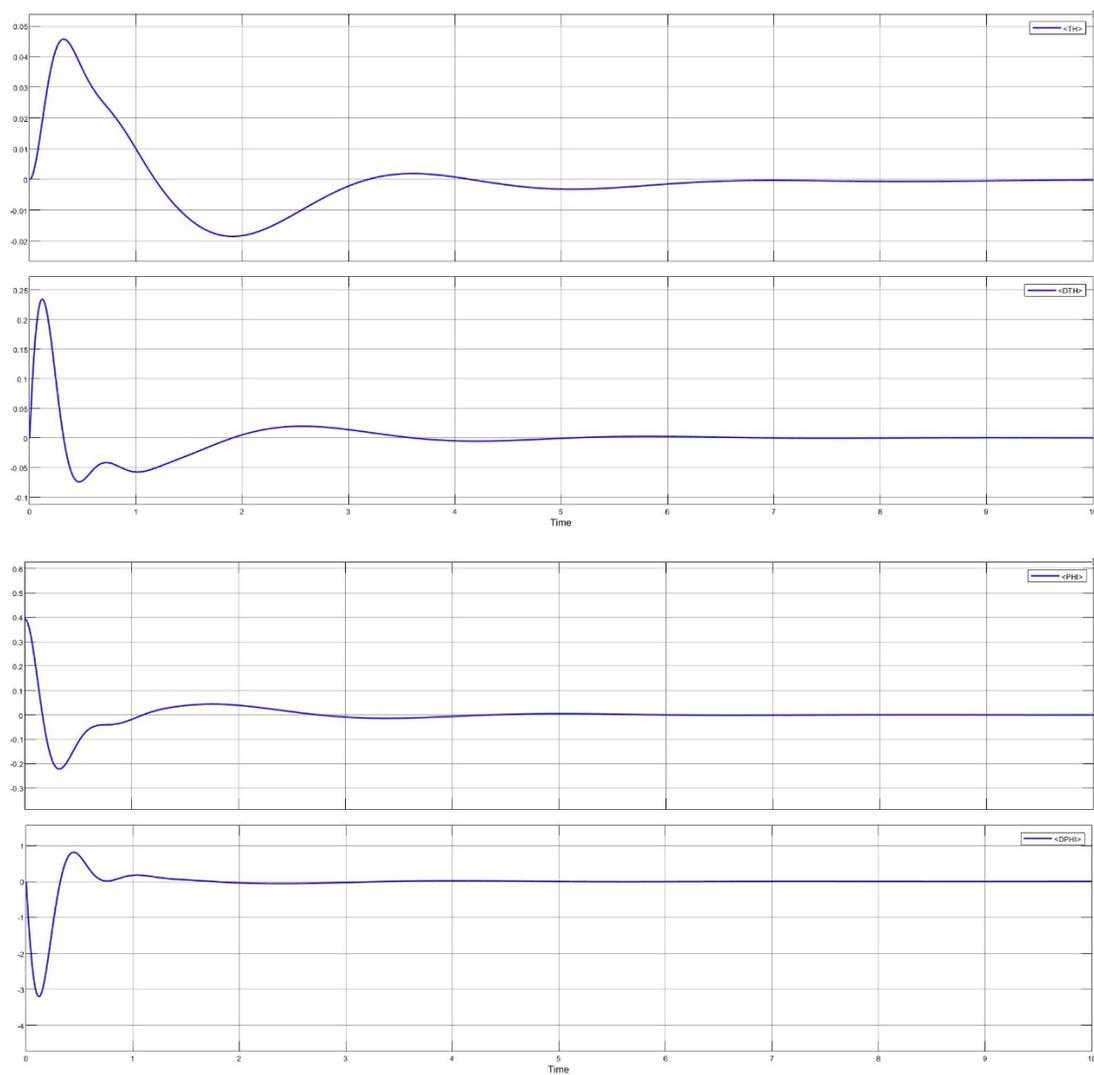


Figura 3.18 Simulazione del modello non lineare con il controllore $C_{\theta}(s)$ e $C_{\phi}(s)$

Conclusioni

In conclusione, possiamo ricapitolare ciò che è stato fatto nella tesi ed analizzare i risultati ottenuti. A partire da un ballbot fisico, è possibile attribuirgli un modello fisico (bidimensionale) e matematico, descrivendo la fisica del sistema attraverso equazioni dinamiche. Queste vengono poi linearizzate attorno a un punto di equilibrio ed ingresso costante, ottenendo così un modello lineare e le funzioni di trasferimento che ne descrivono il funzionamento. Si è visto come il sistema in esame non è BIBO stabile; quindi, un modo per progettare il controllore è applicare il metodo del luogo delle radici e non essendo un sistema SISO il suo controllo prevede due fasi in serie: la prima, in cui viene stabilizzato l'angolo del corpo, e la seconda, dove a partire dall'angolo del corpo stabilizzato, si prevede la stabilizzazione della posizione. È importante precisare che l'angolo del corpo può essere perturbato di 'poco' rispetto alla posizione verticale verso l'alto, altrimenti il modello linearizzato non sarebbe più valido. A questo punto si procede con la progettazione vera e propria del controllore che verrà inserito nell'anello retroazionato e permetterà di stabilizzare il sistema. Nella prima parte si è visto come un semplice controllore proporzionale non sia stato in grado di soddisfare i requisiti. Allora, sono stati aggiunti zeri e poli adeguati che hanno permesso di stabilizzare l'angolo del corpo nella retroazione negativa. Questo controllore è stato poi testato sul modello non lineare, dove si sono ottenuti risultati soddisfacenti. L'analisi successiva riguardava la progettazione del controllore per la posizione del ballbot. In questa fase siamo partiti considerando la funzione di trasferimento della catena aperta di \emptyset . Grazie all'utilizzo del programma sisotool, è stato possibile realizzare un controllore PID, che ha stabilizzato la posizione del ballbot. In conclusione, i controllori sono stati implementati nel modello non lineare, e si è visto come siamo riusciti a soddisfare i requisiti imposti.

Bibliografia

- [1] Mauro Bisiacco, Maria Elena Valcher, Controlli automatici, Libreria Progetto, Padova, 2008
- [2] <https://en.wikipedia.org/wiki/Ballbot>
- [3] <https://github.com/Prasheel24/ballbot>
- [4] Pendolo su carrello: Slide di supporto Parte 1&2 (PDF) File. Lezione del corso ‘Laboratorio di automatica’ a.a. 2020/2021.
- [5] Laboratorio numerico 3: analisi e simulazione del pendolo inverso su carrello (cart-pendulum system). Lezione del corso ‘Laboratorio di automatica’ a.a. 2020/2021.
- [6] Laboratorio numerico 4: controllo del pendolo inverso su carrello (cart-pendulum system). Lezione del corso ‘Laboratorio di automatica’ a.a. 2020/2021.