

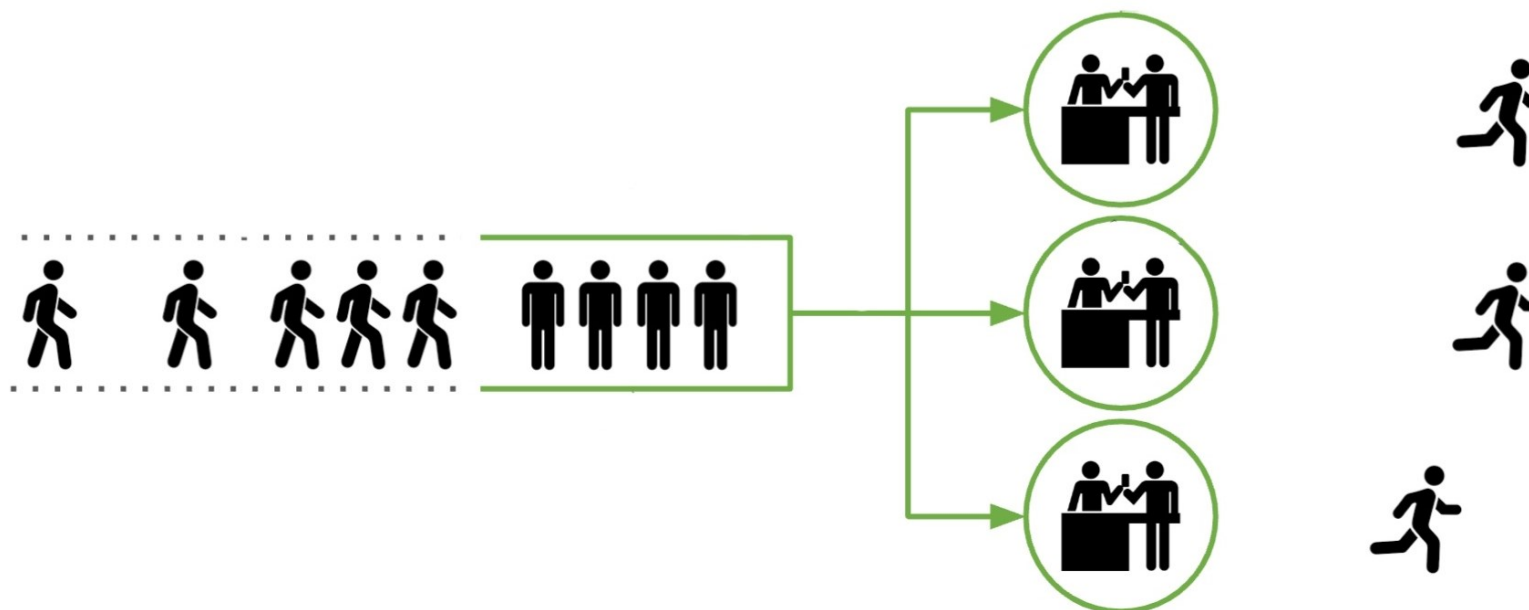
Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

Relazione per la prova finale
«Catene di Markov e sistemi di code»

Relatore: Prof.ssa Alessandra Bianchi
Padova, 22/07/2026

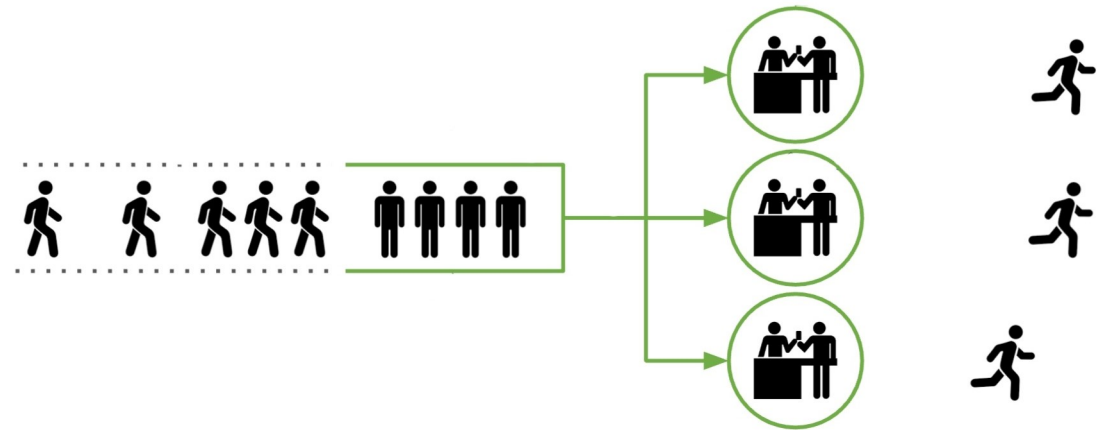
Laureanda: Alice Fullone
Matricola n. 2066726

INTRODUZIONE



OBIETTIVO DEL LAVORO

- Analisi asintotica e media di sistemi client/server
- Condizione di stabilità
- Formula di Little



Catene di Markov a tempo discreto

Una catena di Markov è un particolare processo aleatorio $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ che assume valori in uno spazio S dove, per ogni $n \geq 0$ e per ogni $i, j \in S$, vale:

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} \\ = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P_{ij} \end{aligned}$$

Definiamo $\mathbf{P} = (P_{ij})_{i,j \in S}$ matrice di transizione

Caratteristiche della catena

- *irriducibilità*: $\forall i, j \in S \exists n : P_{ij}^n \geq 0$
- *aperiodicità*: uno stato i ha *periodo* d se $P_{ii}^n = 0$ per ogni n non divisibile per d , dove d è l'intero maggiore con questa proprietà. Se $d = 1$, lo stato è detto *aperiodico*.

Una catena di Markov irriducibile e aperiodica è definita **ergodica**.

Distribuzione stazionaria

Una distribuzione π definita su S è stazionaria se: $\pi P^n = \pi$

Teorema ergodico

Per una catena di Markov irriducibile ed ergodica, esiste ed è unica π **distribuzione stazionaria**.

Inoltre, π è tale che $\pi_j > 0 \forall j \in S$ e vale:

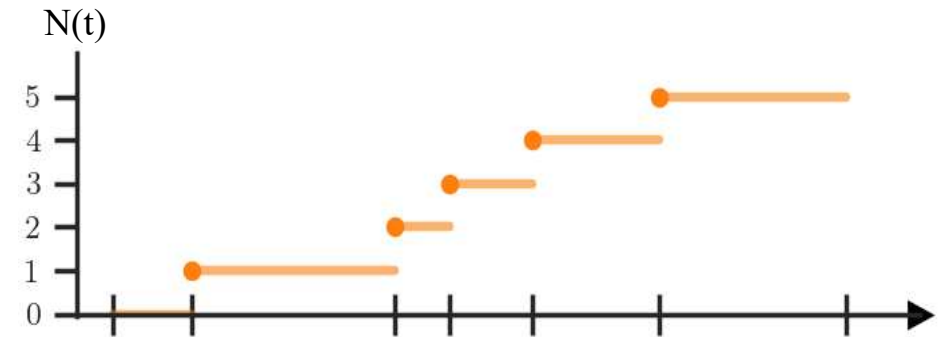
$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n = \pi_j \quad j \geq 0$$

La distribuzione π ha anche un'ulteriore interpretazione:

$$\pi_j = \frac{1}{m_{jj}} \quad m_{jj} = \text{tempo medio di ritorno in } j$$

Processi di conteggio

$\{N(t)\}$, $t \geq 0$ dove $N(t)$ rappresenta il numero totale di eventi verificati fino all'istante t .



Processi di Poisson

Un processo di Poisson $N(t)$ di parametro λ è un particolare processo di conteggio con *incrementi indipendenti* e *stazionari*, dove vale:

$$P\{N(t+s) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad \forall s, t > 0$$

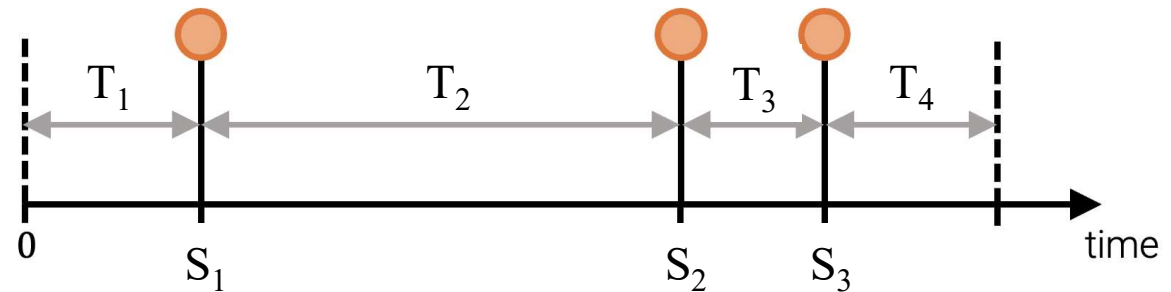
DESCRIZIONE DEL LAVORO

S_n = istante in cui si verifica l'n-esimo evento (**processo di punto**).

T_n = intervallo di tempo tra l'evento (n-1)-esimo ed n-esimo (**tempi di inter-arrivo**).

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad n \geq 1$$

$$T_n \sim \text{Exp}(\lambda) \text{ i.i.d.}$$



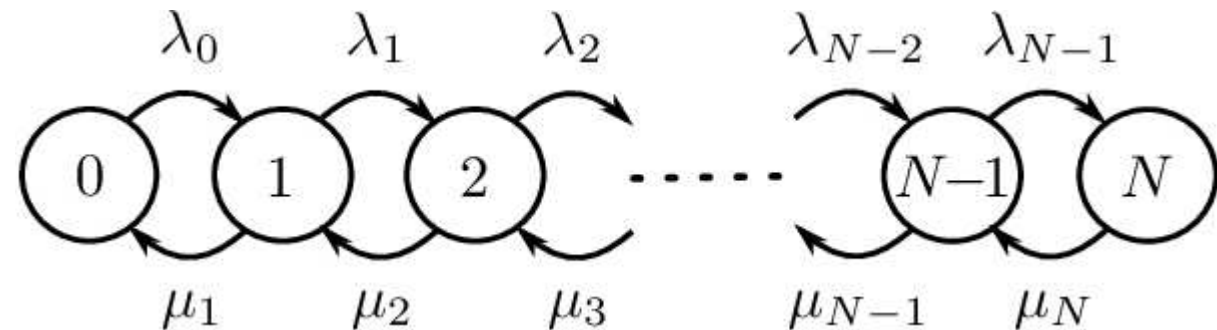
DESCRIZIONE DEL LAVORO

Processi di nascita e morte

Processo in cui le transizioni da uno stato all'altro sono sia incrementi che decrementi.
I tempi tra una transizione e la successiva hanno distribuzione esponenziale:

- tasso di natalità λ_n
- tasso di mortalità μ_n

In un processo di Poisson:
 $\mu_n = 0, \lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0$



Catene di Markov a tempo continuo

Il processo $\{X(t), t \geq 0\}$ è una catena di Markov a tempo continuo se $\forall s, t \geq 0$ e $i, j, x(u)$ interi non negativi con $0 \leq u < s$, vale:

$$\begin{aligned} P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} \\ = P\{X(t+s) = j \mid X(s) = i\} = P_{ij}(t) \end{aligned}$$

La probabilità di transizione $P_{ij}(t)$ è una **funzione del tempo**

$\forall t \geq 0$ definiamo $P(t) = (P_{ij}(t))_{ij \in S}$ matrice di transizione al tempo t

DESCRIZIONE DEL LAVORO

T_i = tempo di attesa in i prima della transizione

Proprietà di assenza di memoria: $P\{T_i > s + t \mid T_i > s\} = P\{T_i > t\}$

Teorema ergodico per un processo di Markov

Se $\{X(t), t \geq 0\}$ è irriducibile ed ergodico, esiste una distribuzione di probabilità π unica e invariante tale che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_j \quad \forall i, j \in S$$

Per la distribuzione invariante vale: $\pi \mathbf{P}(t) = \pi \quad \forall t \geq 0$

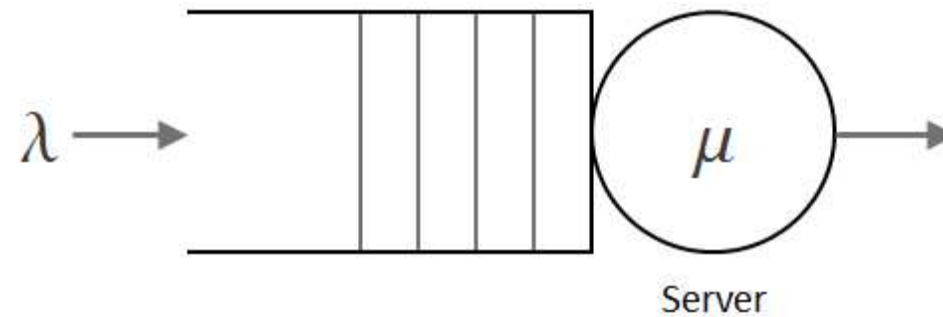
che equivale a dire: $\sum_i \pi_i \lambda_{ik} = (\sum_j \lambda_{kj}) \pi_k$

Sistemi M/M/1

Sia il processo di arrivo che di partenza sono markoviani, un solo server.

Processo di nascita e morte con λ e μ costanti.

Definiamo $X(t)$: numero di clienti nel sistema al tempo t .



Condizione di stabilità per un sistema M/M/1: $\lambda < \mu$

Infatti, se $\{X(t)\}$ ammette una distribuzione invariante π ,

allora necessariamente: $\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

Riconosciamo una distribuzione geometrica, sensata solo per $\lambda < \mu$

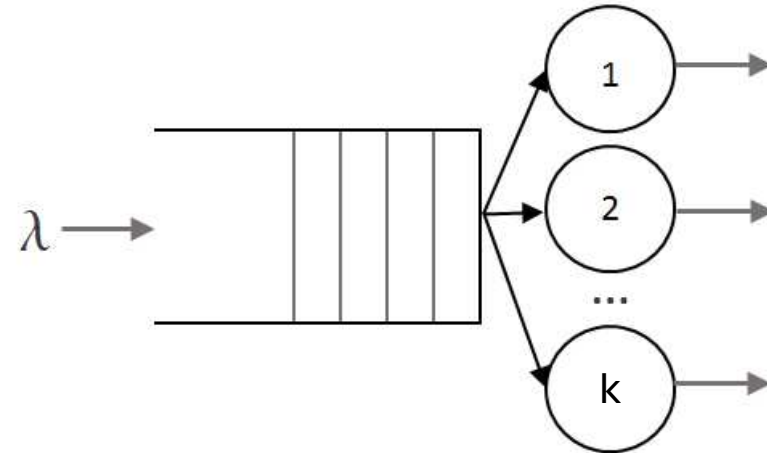
Numero medio di clienti: $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

Sistemi M/M/k

Sia il processo di arrivo che di partenza sono markoviani, k server.

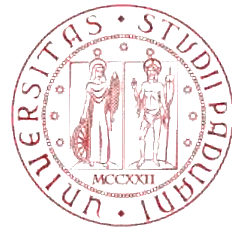
In questo caso, il tasso di partenza μ dipende dal numero n di clienti nel sistema:

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ k\mu & \text{se } n > k \end{cases}$$





DESCRIZIONE DEL LAVORO



Condizione di stabilità per un sistema M/M/k: $\lambda < k\mu$

Se $n > k$, l'espressione di π_n è, per la condizione di stazionarietà, la seguente:

$$\pi_n = \left(\frac{\lambda}{k\mu} \right)^n \frac{n^n}{n!} \pi_0 \quad \text{da cui ricaviamo } \lambda < k\mu$$

In generale, $\lambda_a = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t}$ valore medio del tasso di arrivo

La **formula di Little** lega tra di loro i valori medi del numero dei clienti e del tempo di attesa nel sistema (così come solo in coda) tramite il tasso medio λ_a :

Per il sistema totale: $\mathbb{E}[X] = \lambda_a \mathbb{E}[W]$

Per la coda: $\mathbb{E}[X_Q] = \lambda_a \mathbb{E}[W_Q]$

In particolare, per un sistema M/M/1:

Tempo di attesa:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{\mathbb{E}[X]}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Tempo di attesa in coda:

$$\mathbb{E}[W_Q] = \mathbb{E}[W] - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Confronto del tempo di attesa tra M/M/1 e M/M/2

Consideriamo un sistema M/M/1 con tasso di servizio 2μ e un sistema M/M/2 con tasso μ e dimostriamo che il tempo di attesa medio è minore nel primo caso.

Per un M/M/2, ricaviamo: $\pi_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} \pi_0$

$$\mathbb{E}[X_2] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \frac{4\mu\lambda}{(2\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)}$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{\lambda}{\mu_1 - \lambda} = \frac{\lambda}{2\mu - \lambda}$$

DESCRIZIONE DEL LAVORO

Dalla formula di Little: $\mathbb{E}[W_2] = \frac{\mathbb{E}[X_2]}{\lambda} = \frac{4\mu}{(2\mu+\lambda)} \frac{1}{(2\mu-\lambda)}$ $\mathbb{E}[W_1] = \frac{1}{\mu_1-\lambda} = \frac{1}{2\mu-\lambda}$

Da $2\mu > \lambda$ ricaviamo $4\mu > 2\mu + \lambda$ da cui: $\mathbb{E}[W_1] < \mathbb{E}[W_2]$

Per i tempi di attesa in coda:

$$\mathbb{E}[W_{Q1}] = \mathbb{E}[W_1] - \frac{1}{2\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)} \quad \mathbb{E}[W_{Q2}] = \mathbb{E}[W_2] - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)} \frac{2\lambda}{2\mu+\lambda}$$

Da $2\mu > \lambda$ ricaviamo $2\mu + \lambda > 2\lambda$ da cui: $\mathbb{E}[W_{Q2}] < \mathbb{E}[W_{Q1}]$