

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Scienze Statistiche
Corso di Laurea Triennale in
Statistica per l'Economia e l'Impresa



RELAZIONE FINALE
**MODELLO A DUE STADI PER LA DIFFUSIONE DELLE
INNOVAZIONI**

Relatrice: Dott.ssa Elena Sartori
Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Laureando: Gianmarco Rosa
Matricola N. 2049095

Anno Accademico 2023/2024

Abstract

Lo studio della diffusione delle innovazioni descrive come nuove idee, prodotti o pratiche si diffondono all'interno di una popolazione. Questa tematica è una delle più dibattute, nel corso degli anni, nell'ambito delle scienze comportamentali, quali l'antropologia, la sociologia e le scienze gestionali. Vari modelli sono stati proposti in letteratura, ma i due capisaldi sono quelli proposti in [3, 4].

Il presente elaborato si pone come obiettivo quello di analizzare i due modelli citati, esponendo gli aspetti chiave ed evidenziando i principali limiti. Successivamente viene analizzato un modello probabilistico, proposto in letteratura, basato su una popolazione di agenti eterogenei e connessi tra loro. Il modello presentato è in grado di rappresentare la dinamica della diffusione delle innovazioni nel tempo, articolandola in due stadi: conoscenza e adozione.

The study of the diffusion of innovations describes how new ideas, products, or practices spread in a population. This topic has been one of the most discussed over the years in the field of behavioral sciences, such as anthropology, sociology, and management sciences. Various models have been proposed in literature, but the two milestones are those proposed in [3, 4].

This paper aims to analyze these two models, delineating their key aspects and highlighting their main limitations. Subsequently, a probabilistic model proposed in literature, based on a population of heterogeneous and interconnected agents, is examined. The model is able to represent the dynamics of a two-stage mechanism that describes the diffusion of innovation over time, categorizing it into two stages: awareness and adoption.

Indice

Abstract	ii
1 Aspetti teorici e letteratura presente	1
1.1 Cenni di teoria della misura	1
1.1.1 Spazio misurabile, di misura e di probabilità	1
1.2 Variabili casuali	2
1.2.1 La distribuzione di Poisson	2
1.2.2 La distribuzione esponenziale	3
1.2.3 La distribuzione Normale	3
1.2.4 Convergenze	4
1.3 Processi stocastici	4
1.3.1 Processi di punto e processi di Poisson	5
1.4 Delta di Dirac	5
1.5 Modello di Rogers	6
1.6 Modello di Bass	9
2 Modello a due stadi	11
2.1 Diffusione delle innovazioni	12
2.2 Processo di adozione	12
3 Simulazioni	16
3.1 Risultati al variare della propensione al conformismo	16
3.2 Risultati al variare della propensione all'adozione	18
4 Appendice	20
5 Codice delle simulazioni	25
Riferimenti bibliografici	28

1 Aspetti teorici e letteratura presente

Nel presente capitolo vengono riportate alcune definizioni ed alcuni aspetti teorici degli argomenti che sono oggetto di trattazione nei capitoli successivi. Le seguenti definizioni sono tratte da *Probability Theory and Stochastic Processes* di P. Bremaud [1] e da *Essentials of Stochastic Processes* di R. Durrett [2]. Inoltre vengono brevemente presentati i due principali modelli di riferimento presenti in letteratura: *A new product growth for Model Consumer Durables* di F. Bass [3] e *Diffusion of Innovation* di E. Rogers [4]. Per ulteriori approfondimenti si rimanda ai testi.

1.1 Cenni di teoria della misura

1.1.1 Spazio misurabile, di misura e di probabilità

Definizione 1.1. Denominata $\mathcal{P}(\Omega)$ la collezione di tutti i possibili sottoinsiemi di un insieme Ω . Una collezione di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è chiamata σ -algebra su Ω se:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_n \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Si dice allora che (Ω, \mathcal{F}) è uno spazio misurabile. Un sottoinsieme $A \in \mathcal{F}$ è chiamato insieme misurabile.

Definizione 1.2. Sia (Ω, \mathcal{F}) uno spazio misurabile. Una collezione di funzioni $\mu : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ è detta misura su (Ω, \mathcal{F}) se sono soddisfatte le condizioni:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. per ogni sequenza numerabile di insiemi disgiunti $\{A_n\}_{n \geq 0}$ in \mathcal{F} , vale la proprietà di σ -additività:

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Allora $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ è detto uno spazio di misura.

In particolare, se $\mathbb{P} : \Omega \rightarrow [0, 1]$ è una misura di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) tale che $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ si dice che $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ è detto spazio di probabilità.

1.2 Variabili casuali

Sia considerato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, dove Ω è lo spazio degli eventi elementari, \mathcal{F} una σ -algebra su Ω e \mathbb{P} una misura di probabilità.

Una variabile aleatoria $X(a)$, con $a \in A \subseteq \Omega$, è una funzione avente come dominio lo spazio Ω , come codominio la retta reale e tale che l'insieme degli elementi a per i quali vale la relazione

$$X(a) \leq x$$

è un evento per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Le variabili casuali possono essere *discrete* o *continue* a seconda che Ω sia un insieme finito o al più numerabile o che sia un insieme infinito non numerabile.

Data una variabile aleatoria X , la funzione di ripartizione $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è data da

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Se X è una variabile aleatoria discreta, la densità è

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$$

e il valor medio di una funzione $f(X)$ si calcola come segue:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_x f(x) \cdot p_X(x).$$

Se X è una variabile aleatoria continua e la funzione di ripartizione F_X è derivabile con derivata prima continua, la densità è

$$f_X(x) = F'_X(x)$$

e il valor medio di una funzione $f(X)$ si calcola come segue:

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int f(x) \cdot f_X(x) dx.$$

1.2.1 La distribuzione di Poisson

Una variabile casuale discreta viene definita variabile casuale di Poisson di parametro λ se

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

Si ricorda che per la variabile di Poisson vale la seguente relazione:

$$\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda.$$

1.2.2 La distribuzione esponenziale

Una variabile casuale continua viene definita variabile casuale esponenziale di parametro λ se

$$\mathbb{P}(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Con un semplice passaggio di integrazione, è possibile ricavare la funzione di densità, definita come segue:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si ricordano, nelle righe seguenti, alcuni risultati noti circa questa distribuzione.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Per il calcolo della varianza il riferimento è alla formula nota $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. Si ricava quindi la quantità:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

e si deriva il risultato sulla varianza:

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Un importante risultato circa la variabile esponenziale è la proprietà di assenza di memoria, tale per cui:

$$\mathbb{P}(X > x + s | X > x) = \mathbb{P}(X > s).$$

1.2.3 La distribuzione Normale

Una variabile casuale continua viene definita variabile casuale Normale di media μ e varianza σ^2 se la sua funzione di distribuzione è così definita:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

La deviazione standard è $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

1.2.4 Convergenze

Sia $\{X_n\}_{n \geq 0}$ una collezione di variabili casuali definite in (Ω, \mathcal{F}) a valori in \mathbb{R} .

Definizione 1.3. Si dice che $\{X_n\}_{n \geq 0}$ converge quasi certamente a X se:

$$\mathbb{P}\left(\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right\}\right) = 1.$$

Definizione 1.4. Si dice che $\{X_n\}_{n \geq 0}$ converge in probabilità a X se per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Definizione 1.5. Si dice che $\{X_n\}_{n \geq 0}$ converge debolmente a X se, indicate con F_{X_n} e F_X le relative funzioni di ripartizione, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n} = F_X.$$

In particolare, se g è funzione continua e limitata, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X)).$$

1.3 Processi stocastici

Si consideri uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dato uno spazio parametrico T , si definisce processo stocastico una funzione finita e a valori reali di $\omega \in \Omega$ e $t \in T$ tale che, per ogni t , $Y_t(\omega)$ è una funzione misurabile di ω . Usualmente il parametro indicizzato con t è il tempo.

La realizzazione di un processo stocastico è l'assegnazione, ad ogni valore $t \in T$, di un valore di X_t .

Gli elementi che permettono di distinguere e categorizzare i processi stocastici sono il parametro t , la natura dello spazio degli stati e la relazione tra le variabili nei vari istanti temporali.

Se $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ si dice che X_t è un processo stocastico a tempo discreto, ed è possibile scrivere il processo come X_n , con $n = (0, 1, 2, \dots)$; se invece $T = [0, \infty)$, si dice che il processo è a tempo continuo.

Lo spazio S è lo spazio in cui giacciono i valori di X_t . Nel caso in cui $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ si dice che il processo stocastico è a valori interi, mentre se $S = (-\infty, \infty)$ il processo viene definito a valori reali.

1.3.1 Processi di punto e processi di Poisson

Un processo stocastico viene definito processo di punto semplice e localmente finito sulla semiretta positiva, se questo si presenta come una successione di variabili casuali $\{T_n\}_{n \geq 1}$ tali che, quasi certamente,

1. $0 < T_n < T_{n+1}$ quando $T_n < \infty$ (semplicità), e
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$ (localmente finito).

Questa successione rappresenta la sequenza dei tempi degli eventi. Talvolta, ci si riferisce a T_n come al "punto" n -esimo del processo stocastico.

La variabile casuale intera $N((a, b])$, definita da:

$$N((a, b]) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{(a, b]}(T_n),$$

dove $\mathbb{1}_{(a, b]}(T_n)$ è la funzione indicatrice che vale 1 se T_n è nell'intervallo $(a, b]$, e 0 altrimenti, conta il numero di volte che un evento si verifica nell'intervallo di tempo $(a, b]$.

Per $t \geq 0$, si definisce $N(t)$ come:

$$N(t) = N((0, t]).$$

In particolare, $N(0) = 0$ e la relazione tra intervalli è data da:

$$N((a, b]) = N(b) - N(a).$$

Definizione 1.6. *Un processo di Poisson omogeneo su \mathbb{R}^+ con intensità $\lambda > 0$ è un processo di punto su \mathbb{R}^+ tale che:*

1. *Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, e per tutti gli intervalli $I_j := (a_j, b_j)$ tra loro disgiunti, le variabili casuali $N(I_j)$ sono indipendenti.*
2. *Per ogni intervallo $(a, b] \subset \mathbb{R}^+$, $N((a, b])$ è una variabile casuale di Poisson con media $\lambda(b - a)$.*

1.4 Delta di Dirac

Formalmente, la Delta di Dirac viene definita dalla notazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) \, dx = \phi(x_0)$$

valida per ogni funzione continua in un intorno di x_0 . Un modo per definire la Delta di Dirac consiste nel considerarla come una misura che, per ogni sottoinsieme A dei numeri reali, restituisce $\delta(A) = 1$ se $0 \in A$ e $\delta(A) = 0$ altrimenti. L'integrale di Lebesgue consente di definire l'integrazione rispetto alla misura δ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta\{dx\} = f(0)$$

per ogni funzione f continua a supporto compatto.

Il concetto di misura delforme può essere definito su qualsiasi insieme. Sia X un insieme, sia $x_0 \in X$ e sia Σ una sigma-algebra dei sottoinsiemi di X . La misura definita sugli insiemi $A \in \Sigma$ dalla relazione:

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in A \\ 0 & \text{se } x_0 \notin A \end{cases}$$

è chiamata misura di Dirac in x_0 .

1.5 Modello di Rogers

Uno dei pilastri fondamentali nell'analisi del processo decisionale è la teoria formulata da Everett M. Rogers. Il sociologo americano pubblica nel 1962 il libro *Diffusion of Innovations*, in cui espone e descrive l'evoluzione della conoscenza e dell'adozione di un'innovazione nel corso del tempo. L'autore definisce il processo decisionale sull'innovazione come l'evoluzione nel tempo attraverso cui un individuo transita dallo stato di conoscenza dell'innovazione alla decisione sull'adozione o sul rifiuto, fino all'effettiva implementazione nella vita reale del nuovo prodotto e alla conferma della propria scelta. Il processo evolve, secondo il sociologo, in 5 fasi, quali:

1. *conoscenza*: avviene nel momento in cui un individuo scopre l'esistenza dell'innovazione e ne inizia a comprendere il funzionamento;
2. *persuasione*: si verifica quando l'agente formalizza un'idea favorevole o contraria all'innovazione;
3. *decisione*: si realizza nel momento in cui l'agente decide se adottare o meno l'innovazione;
4. *implementazione*: ha inizio quando l'innovazione viene introdotta nell'attività giornaliera;

5. *conferma*: ha luogo dopo che l'innovazione è stata implementata e testata, sostenendone o negandone l'utilità.

Il processo decisionale è influenzato, tra gli altri fattori, dalla diversità degli individui che costituiscono la rete sociale in cui viene introdotta l'innovazione. Nell'elaborato Rogers analizza gli agenti e li classifica in:

1. *innovatori*, pari al 2.5% della popolazione,
2. *early adopter*, pari al 13.5%,
3. *maggioranza iniziale*, pari al 34%,
4. *maggioranza tardiva*, pari al 34%,
5. *ritardatari*, pari al restante 16%.

Gli Early Adopter, quando comparati con i Ritardatari, scrive Rogers, mostrano un maggior livello di istruzione, un migliore stato sociale e una migliore esposizione ai canali di comunicazione di massa, nonché una partecipazione maggiormente attiva alla vita sociale.

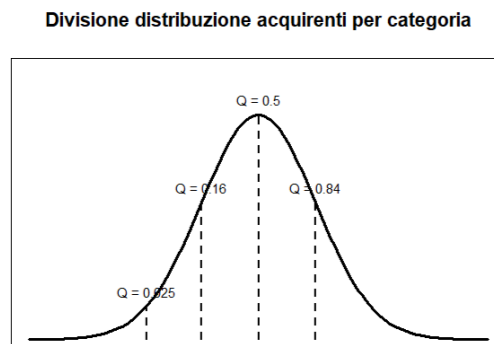


Figura 1: Divisione degli acquirenti.

Nello studio Rogers, inoltre, propone una categorizzazione delle innovazioni, al fine di evitare di dover studiare successivamente ogni innovazione come un singolo caso, e di potersi quindi ricondurre a esempi noti. Vengono quindi analizzati cinque fattori che caratterizzano, a livello generale, ogni innovazione.

1. *Vantaggio percepito*: è il grado in cui un'innovazione è percepita come migliore rispetto all'idea che sostituisce. Il grado viene spesso espresso in termini di profitto economico, in un cambiamento a livello di status sociale o in altre modalità. La natura dell'innovazione, nella maggior parte dei casi, influenza il vantaggio percepito, indicandone come gli agenti percepiranno il nuovo servizio.

2. *Compatibilità*: è il grado in cui un'innovazione è percepita come coerente con i valori esistenti, le esperienze passate e i bisogni dei potenziali adottanti. Un'idea percepita come più compatibile è meno incerta per il potenziale adottante. Un'innovazione può essere compatibile o incompatibile con i valori e le credenze socioculturali, con le idee precedentemente introdotte, o con i bisogni dei clienti per le innovazioni.
3. *Complessità*: è il grado in cui un'innovazione è percepita come complessa nel suo utilizzo. Ne deriva chiaramente che un'idea percepita come più complessa è molto incerta per il potenziale adottante.
4. *Sperimentabilità*: è il grado in cui un'innovazione può essere provata su base limitata. Le innovazioni che possono essere testate in piccola scala sono generalmente adottate più rapidamente.
5. *Osservabilità*: è il grado con cui un'innovazione è osservabile agli altri.

Si nota quindi come, nella teoria proposta nel 1962, gli agenti non adottino tutti allo stesso istante, ma in momenti sequenziali. Un ruolo fondamentale viene rivestito dalla rete di agenti, all'interno della quale le persone sono raggiunte dall'innovazione a livelli più o meno intensi. In questo contesto, Rogers introduce la figura del *leader*, una persona nella rete che ha una forte capacità di influenzare i comportamenti e le opinioni degli altri agenti.

Viene quindi introdotto, nello studio dei canali di comunicazione di massa, un processo a due stadi: il primo passo, chiamato *informazione*, consiste nel passaggio dell'informazione dai canali di comunicazione alle figure dette opinion leader, mentre il secondo passo, l'*influenzazione*, consiste nella comunicazione dell'innovazione a tutto il network da parte dei leader.

Questa teoria entrava tuttavia in contrasto con le ideologie dell'epoca, nelle quali il processo conoscitivo si articolava di un solo ed unico passo, ovvero la conoscenza tramite canali di comunicazione.

Successive considerazioni riguardano questo processo: risulta possibile infatti il caso in cui un soggetto entri a conoscenza dell'innovazione tramite i social media, e inizi, successivamente, un dialogo con altri agenti. Ne deriva quindi che la fase di conoscenza non si articola obbligatoriamente in due fasi, ma può essere presente un solo stadio, due, o più.

1.6 Modello di Bass

Lo studio del processo decisionale continua negli anni, cercando di andare oltre quanto proposto da Rogers nel 1962. Nell'anno 1969, Frank Bass pubblica il paper *A new product growth for model consumer durables*, nel quale, partendo dalla letteratura disponibile all'epoca, analizza più dettagliatamente il processo di diffusione delle innovazioni. Lo studio di Bass inizia ponendo attenzione all'istante della prima vendita di un nuovo prodotto, con la formulazione di una legge che descrive la probabilità di uno scambio al tempo T :

$$\mathbb{P}(T) = p + \frac{q}{m}Y(T),$$

dove q e m sono costanti che verranno definite successivamente, mentre $Y(T)$ rappresenta il numero di acquisti effettuati entro l'istante T . Considerando che $Y(0) = 0$, si ricava che al tempo $T = 0$, l'unico elemento che caratterizza la formula è p : in questo senso p rappresenta la probabilità di uno scambio al tempo $T = 0$, e, se espressa come rapporto, rappresenta la proporzione della popolazione introdotta da Rogers come *innovatori*. Con riferimento alla terminologia introdotta da Rogers, gli agenti che non adottano al tempo $T = 0$ ma adottano in istanti successivi, sono gli *imitatori*.

Si ricava inoltre che la probabilità di scambio in un determinato tempo è funzione lineare del numero di compratori registrati sino all'istante precedente.

Lo studio evolve con la seguente formulazione:

$$f(t) = (1 - F(t)) \cdot (p + q \cdot F(t)) \quad (1)$$

dove:

- $F(t)$ è la proporzione di adottanti al tempo t ;
- $f(t)$ è il tasso di adozione al tempo t ;
- p è il coefficiente di innovazione;
- q è il coefficiente di conformazione con la massa.

Data la (1), la proporzione di adottanti al tempo t descrive l'evoluzione nel tempo del processo, e il tasso di adozione viene calcolato attraverso la derivata prima rispetto al tempo della proporzione di adottanti. La (1) diventa quindi un'equazione differenziale definita come segue:

$$y' = p + (q - p)y - qy^2,$$

la cui soluzione è data da:

$$y = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{(1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t})^2}.$$

Ricavandone la derivata prima, è possibile scrivere la funzione $S(t)$ che descrive l'evoluzione nel tempo del numero di vendite definita come segue:

$$S(t) = m \cdot y',$$

con m numero totale di scambi del periodo. Si ricava che il punto di massimo della funzione è dato in

$$t^* = \frac{1}{(p+q)} \cdot \log\left(\frac{q}{p}\right)$$

Per la dimostrazione si veda l'appendice.

Il modello proposto descrive quindi l'evoluzione nel corso del tempo dell'innovazione, dalla fase di lancio, alla crescita e alla maturità, arrivando poi alla fase finale corrispondente al declino. Si noti che, nella (1), i parametri introdotti p e q sono costanti comuni a tutti gli elementi della rete: il modello proposto non ammette infatti forme di eterogeneità, ma ogni agente del network è caratterizzato da parametri comuni.

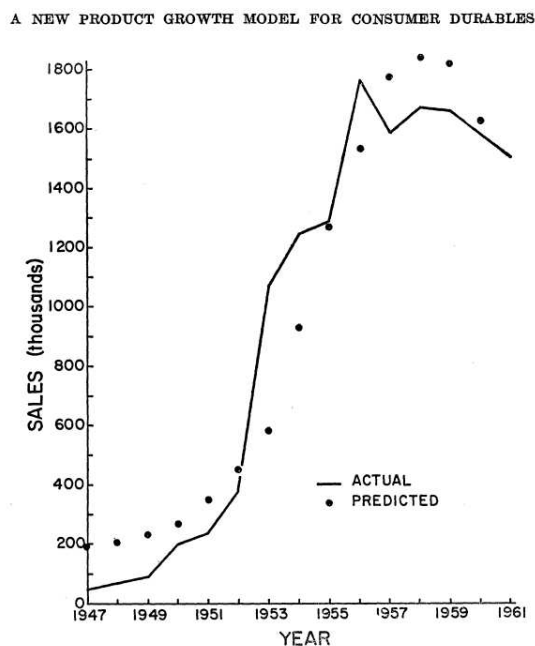


FIG. 4. Actual sales and sales predicted by regression equation

Figura 2: Rappresentazione grafica dell'evoluzione nel tempo del numero di vendite.

La letteratura introdotta da Bass viene spesso utilizzata nelle ricerche di Marketing, analizzando le serie storiche degli individui adottanti nel passato, con l'obiettivo di prevedere l'evoluzione futura della domanda di beni o servizi da parte del mercato.

2 Modello a due stadi

Nella seguente trattazione viene considerata una rete di N agenti, interconnessi tra loro con diversi gradi di connessione, nella quale avviene il lancio di un nuovo prodotto/servizio tramite un canale comunicativo, e ne viene valutata l'evoluzione nel tempo. Il modello a due stadi che viene riportato è il modello proposto nell'articolo *Awareness, persuasion, and adoption: Enriching the Bass model* di Colapinto, Sartori e Tolotti [5]. Nel caso analizzato, ogni agente all'interno della rete è diverso dagli altri, e assume tre caratteristiche proprie. Sia definito il *vettore identità* come segue:

Definizione 2.1. Sia $\theta_i = (\beta_i, p_i, q_i)$ il *vettore identità dell' i -esimo agente*, dove:

- β_i rappresenta una misura di connettività, $\beta_i \geq 0$;
- p_i rappresenta la propensione all'adozione, $p_i \geq 0$;
- q_i rappresenta la propensione alla conformazione con la massa, $q_i \geq 0$;

$\theta_i = (\beta_i, p_i, q_i), i = 1, \dots, N$ sono vettori i.i.d. con distribuzione η^θ .

Si noti che nella definizione del vettore identità, i parametri fanno riferimento alle quantità introdotte da Bass nella formula (1), con la differenza che nel modello proposto da Bass i parametri sono comuni a tutta la popolazione, mentre nel caso trattato nel presente capitolo i valori di questi parametri dipendono dal soggetto.

Si procede analizzando la diffusione dell'innovazione nei due stadi proposti: conoscenza e adozione. Si noti che la conoscenza, che mostra se un agente è consapevole della presenza della novità, rappresenta un passaggio necessario affinché l'agente possa decidere se adottare o meno l'innovazione.

Definizione 2.2. Siano definiti il *processo di conoscenza* e il *processo di adozione*, rispettivamente $\mathbf{x} = \{(x_1(t), \dots, x_N(t)), t \in [0, T]\}$ e $\mathbf{y} = \{(y_1(t), \dots, y_N(t)), t \in [0, T]\}$. Le variabili $x_i(t)$ e $y_i(t)$ sono definite come segue:

$$x_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se l'agente } i \text{ è stato raggiunto dall'informazione entro } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$y_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{se l'agente } i \text{ ha adottato entro } t, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'interesse è valutare l'evoluzione congiunta dei due processi (x, y) in un orizzonte temporale $[0, T]$, possibilmente con $T \rightarrow \infty$, studiando prima l'evoluzione della diffusione delle innovazioni e poi il processo di adozione.

2.1 Diffusione delle innovazioni

Dalla letteratura presente, il processo di diffusione delle innovazioni in una rete di persone viene descritto secondo la seguente legge:

$$x : 0 \rightarrow 1, \quad \text{con intensità } \lambda_i^x = \exp(\beta_i \cdot m_N^x). \quad (2)$$

In questo caso si ha che:

$$m_N^x = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$$

rappresenta la proporzione di soggetti a conoscenza dell'innovazione. Nell'equazione (2), il parametro β_i rappresenta un fattore di scala, che amplifica l'intensità all'aumentare del grado di connettività dell'agente. Si ricava intuitivamente che l'intensità del passaggio da uno stato all'altro del processo x aumenta al crescere della proporzione di persone all'interno della rete a conoscenza dell'innovazione rispetto al totale di agenti.

2.2 Processo di adozione

Descritto il processo di diffusione dell'innovazione all'interno di una rete di N agenti, si procede analizzando la scelta di ogni singolo individuo. Una volta che l'informazione ha raggiunto il soggetto, questo è chiamato a decidere se adottare o meno l'innovazione. La letteratura presente propone delle soluzioni nelle quali gli agenti sono caratterizzati da parametri comuni e quindi non sono presenti elementi di eterogeneità. Nell'articolo analizzato, nella scelta della funzione di utilità, vengono presi in considerazione fattori personali, considerando che emozioni e fattori sociali rivestono un ruolo fondamentale nelle decisioni personali. Con riferimento ai *Random Utility Models*, viene considerata quindi una funzione $U_{[i,t]} : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ per $i = 1, \dots, N$ e $t \in [0, T]$ definita come segue:

$$U_{[i,t]}(y) = y \cdot [x_i(t) \cdot (p_i + q_i m_N^y(t) + \epsilon_i)], \quad (3)$$

dove

$$m_N^y(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y_j(t)$$

rappresenta la proporzione di soggetti che al tempo t utilizzano l'innovazione. La funzione di utilità è caratterizzata da più elementi: p_i , come definito precedentemente, rappresenta la propensione all'adozione dell' i -esimo agente, q_i rappresenta la propensione al conformarsi alla popolazione, ed ϵ_i rappresenta un termine di errore che comporta eterogeneità nelle funzioni di utilità dei vari soggetti della rete. Si assume che i vari ϵ_i , per $i = 1, \dots, N$, siano variabili indipendenti e identicamente distribuite con funzione di distribuzione η^ϵ , dove $\eta^\epsilon(z) = \mathbb{P}(\epsilon \leq z)$ attribuisce massa positiva ai numeri negativi. Si noti che il vettore identità $\theta_i = (\beta_i, p_i, q_i)$, definito nella (2.1), e ϵ_i hanno due ruoli differenti. Sebbene sia θ_i che ϵ_i rappresentino caratteristiche dell'agente, θ_i è noto al tempo zero ed è legato alla "personalità" del singolo, mentre ϵ_i è rivelato solo al momento della decisione. Si riportano a seguito alcune considerazioni circa la funzione $U_{[i,t]}$.

- Se $x_i(t)=0$, $U_{[i,t]}(\cdot)=0$. Questo comporta che, se l' i -esimo agente non è a conoscenza dell'innovazione, la sua utilità è pari a zero.
- Se $x_i(t)=1$, $U_{[i,t]}(1)=p_i + q_i m_N^y(t) + \epsilon_i$. La funzione cresce all'aumentare dei parametri p_i , q_i e m_N^y . Al variare del termine d'errore ϵ_i , l'utilità dell'agente può essere positiva o negativa.
- Se $y=0$, $U_{[i,t]}(0)=0$. Questo comporta che l'utilità di non adottare è pari a zero.

Si ricava che, nella scelta dell'utilizzo o meno dell'elemento innovativo, l'agente confronta la sua utilità attesa con zero. In accordo con il modello di Rogers, introdotto nel Capitolo 1.5, gli agenti possono decidere di adottare o non adottare ad un determinato istante t , decidendo di posticipare la scelta ad un momento futuro.

La funzione di utilità riveste un ruolo fondamentale nello studio: si noti che la probabilità di adottare nell'intervallo $(t, t + h)$ deriva dall'intersezione di due elementi: il primo $\{U_{[i,\tau]}(1) \geq U_{[i,\tau]}(0)\}$, e il secondo $\{\tau \in (t, t + h)\}$, dove τ rappresenta il successivo istante in cui all'agente sarà chiesto se adottare o meno l'innovazione. Supponendo che il generico istante successivo in cui l'agente sarà chiamato a scegliere se adottare o meno sia distribuito esponenzialmente con parametro 1, si ricava che:

$$\mathbb{P}(\tau \in (t, t + h] \mid \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \theta_i) = \mathbb{P}(\tau \in (t, t + h]) = 1 - e^{-h}.$$

Ricordando che $U_{[i,t]}(0) = 0$, si ricava

$$\mathbb{P}(U_{[i,\tau]}(1) \geq U_{[i,\tau]}(0) \mid \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \theta_i) = x_i(t) \mathbb{P}(p_i + q_i m_N^y(\tau) + \epsilon_i \geq 0 \mid \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \theta_i).$$

Risulta ora possibile ricavare l'intensità di transizione del processo \mathbf{y} . Ricordando il risultato notevole:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-h}) = 1,$$

e $\eta^\epsilon(z) = \mathbb{P}(\epsilon \leq z)$, facendo tendere a 0 l'ampiezza dell'intervallo $(t, t + h]$, si ricava:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(1 - e^{-h})x_i(t) \cdot \mathbb{P}(p_i + q_i m_N^y(\tau) + \epsilon_i \geq 0 \mid \tau \in (t, t + h))] \\ = x_i(t)[1 - \eta^\epsilon(-p_i - q_i m_N^y(t))]. \end{aligned}$$

Proposizione 1. *Considerato un agente la cui funzione di utilità è definita in (3). Il processo y di decisione rispetto all'adozione ha intensità:*

$$\lambda_i^y(t) = x_i(t) \cdot (1 - \eta^\epsilon(-p_i - q_i m_N^y(t))). \quad (4)$$

Definito il processo di presa di conoscenza e adozione, è possibile ora definire la dinamica di un sistema a due stadi quando il numero di agenti nella rete tende a infinito, descrivendo in questo modo l'intero processo decisionale nel caso di individui con caratteristiche diverse all'interno della rete.

Teorema 1. *Consideriamo i vettori θ_i definiti in (2.1), e il processo di Markov (x, y) , le cui intensità sono descritte come segue:*

$$\begin{aligned} x_i = 0 \rightarrow 1 \quad \text{con intensità} \quad \lambda_i^x = \exp(\beta_i m_N^x), \\ y_i = 0 \rightarrow 1 \quad \text{con intensità} \quad \lambda_i^y = x_i \cdot (1 - \eta^\epsilon(-p_i - q_i m_N^y)). \end{aligned}$$

Assumiamo inoltre che, al tempo $t = 0$, $x_i(0) = 0$ e $y_i(0) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, N$. Allora, per $N \rightarrow \infty$, la coppia $(m_N^x(t), m_N^y(t))$ converge debolmente alla coppia (m_t^x, m_t^y) , definita come

$$m_t^x = \int m_t^x(\theta') d\eta^\theta(\theta'), \quad m_t^y = \int m_t^y(\theta') d\eta^\theta(\theta'),$$

dove $\theta' = (\beta', p', q')$, $(m_0^x, m_0^y) = (0, 0)$,

$$\begin{cases} \dot{m}_t^x(\theta) = (1 - m_t^x(\theta)) \exp\{\beta m_t^x\}, \\ \dot{m}_t^y(\theta) = (m_t^x(\theta) - m_t^y(\theta))(1 - \eta^\epsilon(-p - q m_t^y)). \end{cases}$$

Si noti che il modello proposto non risulta essere in contrasto con la letteratura precedente, ma risulta essere una specificazione della stessa.

Siano considerate le seguenti condizioni:

- $\beta_i = \beta$, con $\beta \rightarrow \infty$; secondo questa specificazione, tutti gli agenti diventano consapevoli immediatamente dell'innovazione, quindi $x \equiv 1$ (viene considerata solo l'adozione);
- $p_i = p$, $q_i = q$ per tutti $i = 1, \dots, N$, senza eterogeneità;
- per quanto riguarda i termini di errore, viene posto $\varepsilon_i \sim \text{Unif}[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ovvero si assume che il termine aggiuntivo alla valutazione dell'utilità privata sia distribuito uniformemente tra gli attori della comunità.

Il sistema proposto nel Teorema (1) diventa quindi:

$$\dot{m}_y^t = (1 - m_y^t) \cdot (p + qm_y^t), \quad (9)$$

con la condizione iniziale $m_y^0 = 0$. Questa equazione dà origine alla curva di adozione di Bass, dove m_y^t rappresenta la proporzione cumulativa dei potenziali acquirenti che hanno già adottato.

3 Simulazioni

Per completare lo studio viene eseguito un esperimento di simulazione in cui vengono analizzati i risultati delle simulazioni ottenute sia da un modello che non ammette eterogeneità, sia da un modello che la ammette.

Si considera, come in Esempio 1 di [5], il caso in cui $x \equiv 1$, ovvero il caso in cui, nella rete di persone, ogni agente risulta essere a conoscenza dell'innovazione, e deve decidere solamente se adottare o meno.

Vengono analizzati, per ognuno dei due modelli (con eterogeneità e senza) i risultati al variare dei parametri p_i e q_i .

Ogni singolo caso studiato prevede la creazione di una rete di 1000 agenti in grado di interagire tra loro (la rete è stata costruita utilizzando il modello di Barabási-Albert, che crea una struttura connessa in base a un processo di attaccamento preferenziale), e ad ogni nodo vengono attribuiti i parametri β_i , p_i e q_i , introdotti nei capitoli precedenti.

Per valutare la differenza e l'impatto dei parametri p_i e q_i nel processo di adozione, viene fissato un parametro e viene fatto variare l'altro (saranno presi quattro valori). Per ognuno dei quattro possibili scenari vengono riportati i risultati ottenuti da 4000 simulazioni. Ogni simulazione prevede la registrazione della proporzione di adottanti in otto istanti temporali.

3.1 Risultati al variare della propensione al conformismo

Si riportano di seguito i risultati dello studio di simulazione al variare di q_i , nel quale l'errore viene assunto come variabile casuale Uniforme tra -1 e 1. Il caso considerato prevede il parametro p_i comune a tutti i soggetti, e pari a 0.001, mentre i quattro valori di q_i analizzati sono 0.1, 0.24, 0.4, 0.6.

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
pi:	0.001	0.001	0.001	0.001
qi:	0.1	0.24	0.4	0.6
T1:	0.50063	0.50121	0.50098	0.50063
T2:	0.77574	0.81134	0.8508	0.90076
T3:	0.90543	0.94258	0.97633	1
T4:	0.96136	0.98431	0.99742	1
T5:	0.98452	0.99589	0.99974	1
T6:	0.99382	0.99894	0.99997	1
T7:	0.9975	0.99971	1	1
T8:	0.99899	0.99993	1	1

Tabella 1: Proporzione di adottanti nei diversi scenari temporali con parametri comuni a tutti i nodi

Si assume ora che i parametri p_i e q_i ammettano eterogeneità. Si riportano i risultati nel caso in cui i parametri p_i siano i valori assoluti (per la condizione imposta nella (2.1)) dei valori generati da una variabile casuale Normale di media 0.001 e deviazione standard pari a 0.01. In modo analogo sono stati definiti i valori q_i , generati da variabili casuali Normali aventi media pari al valore assunto nel rispettivo scenario prima analizzato e deviazioni standard pari a 0.18.

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
pi:	0.001	0.001	0.001	0.001
qi:	0.1	0.24	0.4	0.6
T1:	0.50808	0.50773	0.50856	0.50786
T2:	0.79908	0.82133	0.85883	0.9078
T3:	0.92455	0.9437	0.97212	0.99348
T4:	0.97124	0.98097	0.99304	0.99887
T5:	0.98861	0.99293	0.99788	0.99969
T6:	0.99534	0.99726	0.99927	0.9999
T7:	0.99807	0.99891	0.99973	0.99997
T8:	0.99917	0.99953	0.99989	0.99999

Tabella 2: Proporzione di adottanti nei diversi scenari temporali con parametri eterogenei

Dai risultati sopra riportati si nota come la velocità di convergenza a 1 della proporzione aumenti all'aumentare del valore assunto dai parametri q_i : questo risultato era attendibile data la definizione della (3). Si nota inoltre come, nel passaggio da rete omogenea a rete eterogenea, la velocità di convergenza diminuisca: l'introduzione di parametri eterogenei ha quindi un impatto sui risultati.

3.2 Risultati al variare della propensione all'adozione

Si riportano a seguito i risultati dello studio di simulazione al variare di p_i , nel quale l'errore viene assunto come variabile casuale Uniforme tra -1 e 1. Il caso considerato prevede il parametro q_i comune a tutti i soggetti, e pari a 0.18, mentre i quattro valori di p_i analizzati sono 0.001, 0.01, 0.04, 0.06.

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
pi:	0.001	0.01	0.03	0.06
qi:	0.18	0.18	0.18	0.18
T1:	0.50106	0.50982	0.53044	0.56023
T2:	0.79578	0.80456	0.82423	0.85087
T3:	0.9274	0.93253	0.94347	0.95714
T4:	0.97595	0.97828	0.98305	0.98856
T5:	0.99223	0.99318	0.99504	0.99699
T6:	0.99751	0.99788	0.99857	0.99921
T7:	0.99921	0.99934	0.99957	0.99979
T8:	0.99974	0.99979	0.99988	0.99994

Tabella 3: Proporzione di adottanti nei diversi scenari temporali con parametri omogenei

Si assume ora che i parametri p_i e q_i ammettano eterogeneità. Si riportano i risultati nel caso in cui i parametri q_i siano i valori assoluti (per la condizione imposta nella (2.1)) dei valori generati da una variabile casuale Normale di media 0.18 e deviazione standard pari a 0.01. In modo analogo sono stati definiti i valori p_i , generati da variabili casuali Normali aventi media pari al valore assunto nel rispettivo scenario prima analizzato e deviazioni standard pari a 0.1.

	Scenario 1	Scenario 2	Scenario 3	Scenario 4
pi:	0.001	0.01	0.03	0.06
qi:	0.18	0.18	0.18	0.18
T1:	0.50832	0.51178	0.53021	0.5593
T2:	0.80487	0.80749	0.82361	0.85068
T3:	0.93147	0.93301	0.94112	0.95542
T4:	0.97616	0.97695	0.98044	0.98654
T5:	0.9914	0.99172	0.99324	0.99566
T6:	0.99676	0.99689	0.99754	0.99856
T7:	0.99873	0.99878	0.99907	0.9995
T8:	0.99948	0.99951	0.99964	0.99982

Tabella 4: Proporzione di adottanti nei diversi scenari temporali con parametri eterogenei

Conclusioni

La diffusione delle innovazioni risulta essere una tematica molto discussa negli ultimi decenni. Il presente elaborato è iniziato analizzando i modelli proposti da Rogers (1926) e da Bass (1969), e si è concluso con l'analisi di un modello che cerca di superare i limiti.

Il modello di Bass, con i parametri p (coefficiente di innovazione) e q (coefficiente di imitazione), ha fornito una base solida per analizzare la diffusione delle innovazioni in vari contesti. Tuttavia, una delle principali limitazioni di questo modello è la sua assunzione di omogeneità tra gli agenti che compongono la rete. Rogers, d'altra parte, ha identificato e proposto diverse categorie di adottanti (innovatori, primi adottanti, maggioranza precoce, maggioranza tardiva e ritardatari), riconoscendo implicitamente la presenza di eterogeneità negli agenti che compongono la rete di persone in cui ha luogo il processo di adozione.

Il modello proposto in *Awareness, persuasion and adoption: Enriching the Bass model* da Colapinto, Sartori e Tolotti, ha come obiettivo principale quello di superare le limitazioni appena citate, con l'introduzione di eterogeneità nei parametri del vettore che identifica gli agenti. Vengono proposte, descritte ed analizzate le equazioni che spiegano l'evoluzione nel tempo, a livello macroscopico, del processo conoscitivo e del processo decisionale, riuscendo a conciliare gli studi di Bass con la teoria proposta da Rogers.

Infine, è stato evidenziato come il modello a componenti eterogenee non sia un modello a sé stante, ma una generalizzazione degli studi proposti in passato. Questo approccio consente di rappresentare meglio la realtà, riconoscendo la diversità degli individui e delle loro interazioni, fornendo una visione più dettagliata e accurata delle dinamiche di diffusione delle innovazioni.

4 Appendice

Dimostrazione dell'equazione (1.6)

L'evoluzione nel tempo della funzione $S(t)$ è descritta da:

$$S(t) = m \cdot y',$$

ovvero

$$S(t) = m \cdot \frac{(p+q)^2}{p} \cdot \frac{e^{-pT-qT}}{\left(1 + \frac{q}{p}e^{-pT-qT}\right)^2},$$

Per calcolarne il punto di massimo, si trova la derivata prima:

$$S(t)' = m \cdot \frac{(p+q)^2}{p} \cdot \frac{(-p^4 - p^3q)e^{-pT-qT} + (p^3q + p^2q)e^{-2pT-2qT}}{(p + qe^{-pT-qT})^3}.$$

Il massimo è ottenuto ponendo la quantità trovata pari a 0, ovvero ponendo il numeratore pari a 0. Si ricava:

$$\begin{aligned} & -mp^5e^{-pT-qT} - 3mp^4qe^{-pT-qT} - 3mp^3q^2e^{-pT-qT} + mp^4qe^{-2pT-2qT} \\ & + 3mp^3q^2e^{-2pT-2qT} + 3mp^2q^3e^{-2pT-2qT} - mp^2q^3e^{-pT-qT} + mpq^4e^{-2pT-2qT} = 0. \end{aligned}$$

Con la sostituzione $x = e^{-pT-qT}$ si ottiene:

$$x(-mp^5 - 3mp^4q - 3mp^3q^2 - mp^2q^3) + x^2(mp^4q + 3mp^3q^2 + 3mp^2q^3 + mpq^4) = 0,$$

da cui

$$x = \frac{mp^5 + 3mp^4q + 3mp^3q^2 + mp^2q^3}{mp^4q + 3mp^3q^2 + 3mp^2q^3 + mpq^4},$$

con soluzione $x = p/q$. Ricordando che $x = e^{-pT-qT}$, si ottiene

$$-T \cdot (p+q) = \log\left(\frac{p}{q}\right),$$

da cui:

$$T = \frac{1}{p+q} \cdot \log\left(\frac{q}{p}\right).$$

Dimostrazione del Teorema (1)

Viene suddiviso il corpo principale della dimostrazione in due lemmi. Il primo enuncia una legge dei grandi numeri per una sequenza $(\rho_N)_N$ di misure empiriche, mentre il secondo caratterizza l'unica misura limite (deterministica) Π^* tale che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N \rightarrow \Pi^*.$$

In particolare, esso fornisce un'equazione di Fokker-Plank utile per descrivere l'evoluzione temporale di Π^* .

Prima di enunciare e dimostrare i due lemmi, vengono riportate alcune considerazioni riguardanti il processo (x, y) e introdotte alcune notazioni utili.

Condizionato a una realizzazione del vettore identità $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, (x, y) evolve come una catena di Markov a tempo continuo nello spazio degli stati $\{0, 1\}^{2N}$ con generatore infinitesimale che agisce su funzioni $h : \{0, 1\}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue:

$$G_{[\theta]}^N h(x, y) = \sum_{i=1}^N (1 - x_i) \lambda_i^x [h(x^i, y) - h(x, y)] + \sum_{j=1}^N (1 - y_j) \lambda_j^y [h(x, y_j) - h(x, y)], \quad (5)$$

dove $x^i := (x_1, \dots, 1 - x_i, \dots, x_N)$, y_i analogo, e λ_i^x e λ_j^y sono le intensità definite nella (2) e nella (4).

Viene indicata con $x_i[0, T]$ (risp. $y_i[0, T]$) la traiettoria di x_i (risp. y_i) su $[0, T]$ e con $\mathcal{D}([0, T])$ lo spazio di Skorohod delle funzioni continue a destra e costanti a tratti definite sull'intervallo $[0, T]$. Infine, viene definita la misura empirica:

$$\rho_N(x([0, T]), y([0, T]), \theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\{x_i[0, T], y_i[0, T], \theta_i\}}.$$

$\rho_N \in \mathcal{M}_1$, dove \mathcal{M}_1 denota lo spazio delle misure di probabilità su $\mathcal{D}^2([0, T]) \times \mathbb{R}^3$ dotato della topologia di convergenza debole. Si nota, inoltre, che $m_N^x(t)$ e $m_N^y(t)$ sono medie empiriche della forma

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i[0, T], y_i[0, T], \theta_i) =: \int f d\rho_N.$$

Pertanto, viene fornita ora una legge dei grandi numeri per la sequenza $(\rho_N)_N$ (Lemma A.1), caratterizzando la misura limite Π^* (Lemma A.2).

Lemma A. 1. *Esiste un'unica $\Pi^* \in \mathcal{M}_1$ tale che*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N = \Pi^* \quad \text{quasi certamente}$$

nella topologia debole.

Lemma A. 2. *Si ha $\Pi^* = \Pi_\theta^* \otimes \eta^\theta$, dove η^θ è stata definita nella (2.1) e dove Π_θ^* può essere caratterizzata come segue. Sia $\pi_t^x(\theta) := \Pi_\theta^*(x(t) = 1)$ e $\pi_t^y(\theta) := \Pi_\theta^*(y(t) = 1)$, allora $(\pi_t^x(\theta), \pi_t^y(\theta))$ è l'unica soluzione di*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \pi_t^x(\theta) = (1 - \pi_t^x(\theta)) \exp\left(\beta \int \pi_t^x(\theta') d\eta^\theta(\theta')\right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \pi_t^y(\theta) = (\pi_t^x(\theta) - \pi_t^y(\theta)) \left(1 - \eta^\epsilon(-p - q \int \pi_t^y(\theta') d\eta^\theta(\theta'))\right) \\ \pi_0^x(\theta) = \pi_0^y(\theta) = \delta_0. \end{cases}$$

Per $t \in [0, T]$ e per qualsiasi θ fisso $= (\beta, p, q)$.

Le dimostrazioni di questi risultati sono posticipate alla fine della Appendice. Assumendo la validità dei due lemmi, è possibile dimostrare il Teorema (1). Si noti che

$$m_N^x(t) = \int x \Gamma_t(\rho_N)(dx, dy, d\theta),$$

$$m_N^y(t) = \int y \Gamma_t(\rho_N)(dx, dy, d\theta),$$

dove $\Gamma_t(Q)$ è la proiezione al tempo t di $Q \in \mathcal{M}_1$. Pertanto, come corollario del Lemma (1), si ha che $(m_N^x(t), m_N^y(t))$ converge debolmente alla coppia (m_t^x, m_t^y) , dove

$$m_t^x = \int x \Gamma_t(\Pi_*) (dx, dy, d\theta); \quad m_t^y = \int y \Gamma_t(\Pi_*) (dx, dy, d\theta).$$

Resta da dimostrare che (m_t^x, m_t^y) sono le quantità definite nel Teorema (1). Queste equazioni sono derivate basandosi sul Lemma A.2. Infatti, si noti che $m_t^x = \int m_t^x(\theta') d\eta_\theta(\theta')$, dove $m_t^x(\theta) = \int x \Gamma_t(\Pi_\theta^*) (dx, dy) = \pi_t^x(\theta)$ (lo stesso per m_t^y). Pertanto, le equazioni proposte nel Teorema (1) seguono immediatamente dal Lemma A.2.

Dimostrazione del Lemma A1

Per dimostrare la legge dei grandi numeri, bisogna definire una nuova funzione F , $F : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, dove \mathcal{M}_1 è lo spazio delle probabilità su $\mathcal{D}^2([0, T]) \times \mathbb{R}^3$. Questa funzione è cruciale per specificare la rate function del principio delle grandi deviazioni utilizzato per derivare la legge dei grandi numeri. A tal fine, viene introdotto un processo ausiliario (x, y) sullo spazio degli stati $\{0, 1\}^2$, che evolve secondo le seguenti intensità di transizione. Per $Q \in \mathcal{M}_1$,

$$x : 0 \rightarrow 1 \quad \text{con intensità} \quad (1 - x(t)) \cdot \lambda_Q^x(t), \quad (6)$$

$$\lambda_Q^x(t) = \exp \left\{ \beta \int v(t) Q(dv[0, T], dw[0, T], d\theta) \right\}; \quad (7)$$

$$(8)$$

$$y : 0 \rightarrow 1 \quad \text{con intensità} \quad (1 - y(t)) \cdot \lambda_Q^y(t), \quad (9)$$

$$\lambda_Q^y(t) = x(t) \left(1 - \eta^\epsilon \left(-p - q \int w(t) Q(dv[0, T], dw[0, T], d\theta) \right) \right). \quad (10)$$

Si indichi con τ_x (rispettivamente, τ_y) il tempo di salto del processo x (rispettivamente, y). Viene definito $F(Q)$ come

$$F(Q) = E^Q[f(x[0, T], y[0, T], \theta)],$$

dove

$$\begin{aligned} f(x[0, T], y[0, T], \theta) &= \int_0^T (1 - x(t)) (1 - \lambda_Q^x(t)) dt + x(T) \ln(\lambda_Q^x(\tau_x^-)) \\ &+ \int_0^T (1 - y(t)) (1 - \lambda_Q^y(t)) dt + y(T) \ln(\lambda_Q^y(\tau_y^-)). \end{aligned} \quad (11)$$

Sia P_N la legge del processo indotta dal generatore (5) e P_N la distribuzione di probabilità di $\rho_N(x[0, T], y[0, T], \theta)$ sotto P_N . Dopo aver definito una funzione F , grazie ad un teorema noto in letteratura, è possibile caratterizzare un principio di grandi deviazioni per la sequenza di misure $(P_N)_N$, nel seguente senso. Viene definito

$$I(Q) := H(Q|W) - F(Q),$$

dove W è la legge del processo indotta dal generatore (5) assumendo indipendenza (cioè, $\lambda_i^x = \lambda_i^y = 1$ per tutti $i = 1, \dots, N$), e dove $H(Q|W)$ denota l'entropia relativa di Q rispetto a W . Allora $(P_N)_N$ soddisfa un principio di grandi deviazioni con buona rate function I . Pertanto,

$$P(d(\rho_N, \Pi^*) \geq \epsilon)$$

converge a zero con velocità esponenziale in N , dove $d(\cdot, \cdot)$ è una metrica che induce la topologia debole su \mathcal{M}_1 . La legge dei grandi numeri deriva da questo risultato, applicando il lemma di Borel-Cantelli.

Dimostrazione del Lemma A2

La misura Π^* definita nel Lemma A.1 è l'unico elemento di M_1 tale che $\Pi^* = \Pi_\theta \otimes \eta_\theta$,

dove Π_θ è la legge del processo di Markov su $\{0, 1\}^2$ con distribuzione iniziale $\delta_0 \otimes \delta_0$ e generatore dipendente dal tempo $L_t^{[\Pi^*; \theta]}$, definito come

$$L_t^{[\Pi^*; \theta]} f(x, y) = (1-x) \cdot e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot (f(1-x, y) - f(x, y)) \\ + x \cdot (1-y) \cdot e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot (f(x, 1-y) - f(x, y)).$$

Poiché le leggi marginali di un processo di Markov sono soluzioni della corrispondente equazione di Kolmogorov in avanti, definendo $\pi_t := \Pi_t(\Pi^\theta)$, la proiezione t di Π^θ , abbiamo che $\dot{\pi}_t = L_t^{[\Pi_*; \theta]}$, dove $L_t^{[\Pi_*; \theta]}$ è l'aggiunto di $L^{[\Pi^*; \theta]}$:

$$(L_t^{[\Pi_*; \theta]} q)(x, y) = x \cdot e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot q(1-x, y) \\ - (1-x) \cdot e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot q(x, y) \\ + x \cdot y \cdot e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot q(x, 1-y) \\ - x \cdot (1-y) \cdot e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \cdot q(x, y).$$

Più specificamente,

$$\dot{\pi}_t(1, 1) = e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(0, 1) + e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(1, 0);$$

$$\dot{\pi}_t(1, 0) = e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(0, 0) - e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(1, 0);$$

$$\dot{\pi}_t(0, 1) = -e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(0, 1);$$

$$\dot{\pi}_t(0, 0) = -e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} \pi_t(0, 0).$$

Si noti che $\pi_t(0, 1) \equiv 0$, dato che $\pi_0(0, 1) = 0$ e $\frac{\dot{\pi}_t(0, 1)}{\pi_t(0, 1)} \leq 0$. Pertanto, l'unica soluzione non negativa è quella nulla. Ora ponendo $\pi_x^t = \pi_t(1, 1) + \pi_t(1, 0)$ e $\pi_y^t = \pi_t(1, 1)$ si vede che

$$\begin{cases} \dot{\pi}_x^t = e^{\beta \int x(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} (1 - \pi_x^t) \\ \dot{\pi}_y^t = e^{p+q \int y(t) \Pi_*(dx[0,T], dy[0,T], d\theta)} (\pi_x^t - \pi_y^t) \\ \pi_x^0 = \pi_y^0 = 0. \end{cases}$$

5 Codice delle simulazioni

Si riporta il codice utilizzato nelle simulazioni. Il linguaggio utilizzato è R. Si noti che il codice riporta un solo caso simulato: per svolgere altre simulazioni si cambiano i valori di μ e σ quando vengono definiti i valori p_i e q_i .

```
1  library(parallel)
2  library(igraph)
3  library(magick)
4  library(png)
5
6  # Definizione di alcune quantità
7  n_nodes <- 1000
8  n_archi <- 4
9  n_simulazioni <- 4000
10 time <- 1:8
11 scenari <- 4
12
13 # Generazione della rete di agenti
14 rete <- barabasi.game(n_nodes, power = 1, m = n_archi, directed = FALSE)
15 gradi <- degree(rete)
16 layout_fisso <- layout_with_fr(rete)
17
18 # Definizione dei 4 scenari di pi e qi
19 # I valori sono da cambiare per diverse simulazioni
20 valori_pi <- c(0.001, 0.001, 0.001, 0.001)
21 valori_qi <- c(0.10, 0.24, 0.4, 0.6)
22
23 # Funzione per generare valori di pi e qi per uno scenario: genera valori(assoluti)
24 # da una distribuzione Normale con una certa media e varianza.
25 # Nel caso di BASS la varianza è nulla, non ammettendo eterogeneità;
26 # nel caso del modello con eterogeneità proposto risulta necessario impostare
27 # un valore per la varianza
28 genera_valori <- function(mean_pi, mean_qi, n_nodes) {
29   pi_vals <- abs(rnorm(n_nodes, mean = mean_pi, sd = 0.01))
30   qi_vals <- abs(rnorm(n_nodes, mean = mean_qi, sd = 0.18))
31   list(pi = pi_vals, qi = qi_vals)
32 }
33
34 # Funzione di simulazione: dati i nodi, per ogni istante di tempo (1:8) calcola
35 # la proporzione di adottanti. Una persona adotta se la sua utilità è maggiore
36 # di quella se non adotta, quindi se maggiore di zero
37 simulazione <- function(pi_vals, qi_vals) {
```

```

38 bi_vals <- gradi + runif(n_nodes, min = -1, max = 1)
39 adoption <- rep(0, n_nodes)
40 proporzioni <- numeric(length(time))
41
42 random_vals <- matrix(runif(n_nodes * length(time), min = -0.5, max = 0.5),
43 nrow = n_nodes, ncol = length(time))
44
45 for (t in time) {
46   if (t == 1) {
47     prev_prop <- 0
48   } else {
49     prev_prop <- proporzioni[t - 1]
50   }
51
52   utilita <- pi_vals + qi_vals * prev_prop + random_vals[, t]
53
54   non_adopted <- which(adoption == 0)
55   nuovi_adopters <- non_adopted[utilita[non_adopted] > 0]
56   adoption[nuovi_adopters] <- 1
57
58   proporzioni[t] <- mean(adoption)
59 }
60
61 return(proporzioni)
62 }
63
64 # Funzione per eseguire le simulazioni per uno scenario specifico.
65 # Cicla la funzione sopra definita, quindi per ognuno dei 4 scenari
66 # (ad esempio pi fissato e 4 valori di qi)
67 # salva ogni simulazione come vettore colonna nella matrice, e alla fine calcola,
68 # per ogni scenario, la media di riga.
69 # La prima riga infatti contiene tutti i valori del primo istante,
70 # la seconda del secondo, ecc..
71 esegui_simulazioni <- function(mean_pi, mean_qi) {
72   valori <- genera_valori(mean_pi, mean_qi, n_nodes)
73
74   results <- matrix(0, nrow = length(time), ncol = n_simulazioni)
75
76   for (i in 1:n_simulazioni) {
77     results[, i] <- simulazione(valori$pi, valori$qi)
78   }
79
80   prop_final <- round(rowMeans(results), 5)
81
82   return(prop_final)
83 }
84
85 # Eseguo le simulazioni per tutti e 4 gli scenari
86 result_matrix <- matrix(0, nrow = length(time) + 2, ncol = scenari + 1)

```

```

87 first_col <- c('pi:', 'qi:', 'T1:', 'T2:', 'T3:', 'T4:', 'T5:', 'T6:', 'T7:', 'T8:')
88 result_matrix[, 1] <- first_col
89
90 for (i in 1:scenari) {
91     mean_pi <- valori_pi[i]
92     mean_qi <- valori_qi[i]
93
94     prop_final <- esegui_simulazioni(mean_pi, mean_qi)
95
96     result_matrix[1, i + 1] <- mean_pi
97     result_matrix[2, i + 1] <- mean_qi
98     result_matrix[3:10, i + 1] <- prop_final
99 }
100
101 # Visualizzo la matrice dei risultati
102 print(result_matrix)

```

Riferimenti bibliografici

- [1] BRÉMAUD, P. 2020. *Probability Theory and Stochastic Processes*. Springer. ISBN-10: 3030401820.
- [2] DURRETT, R., 2016. *Essentials of Stochastic Processes*. Springer. ISBN-10: 1461436141.
- [3] BASS, F. M., 1969. *A New Product Growth for Model Consumer Durables*. Management Science, vol. 15(5), pp. 215-227. doi.org/10.1287/mnsc.15.5.215
- [4] ROGERS, E. M., 1962. *Diffusion of Innovations*. ISBN: 0-02-926650-5.
- [5] COLAPINTO, C., SARTORI, E. e TOLOTTI, M., 2013. *Awareness, persuasion and adoption: Enriching the Bass model*. Physica A, vol. 395, pp. 1-10. doi:10.1016/j.physa.2013.10.001
- [6] GRASS, D., CAULKINS, J., FEICHTINGER, G., TRAGLER, G. e BEHRENS, D., 2008. *Optimal Control of Nonlinear Processes, with Applications in Drugs, Corruption, and Terror*. Berlin: Springer.

doi:10.1111/rode.12382