



# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

**Fluttuazioni nella teoria di Ginzburg-Landau:  
calcolo della capacità termica nei superconduttori**

**Relatore**

**Prof. Luca Salasnich**

**Laureando**

**Marco Ferla**

**Anno Accademico 2018/2019**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione fenomenologica</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Formalismo di Landau</b>	<b>3</b>
2.1	Teoria GL . . . . .	3
2.2	Materiali non omogenei . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Fluttuazioni termiche</b>	<b>9</b>
3.1	Integrazione funzionale . . . . .	9
3.2	Capacità termica in 3D . . . . .	11
3.3	Capacità termica in 2D e 1D . . . . .	15
	<b>Conclusioni</b>	<b>19</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>20</b>

*"Felix qui potuit rerum gnoscere causas"*  
Virgilio, Georgiche, II, 489



# Capitolo 1

## Introduzione fenomenologica

In natura la resistività dei migliori conduttori si comporta nella seguente maniera: decresce linearmente al diminuire della temperatura per poi assestarsi ad un valore costante (*plateau*) per temperature molto basse tendenti allo zero. Nel 1911 K. Onnes scoprì che la resistività del mercurio decadeva a zero in maniera discontinua al di sotto di 4.1 K (v. Fig. 1.1) [OK11]. Questo nuovo fenomeno venne soprannominato *superconduttività* e la temperatura di transizione *temperatura critica*  $T_c$ . Si scoprì in seguito che altri materiali e leghe assumono un comportamento identico al mercurio.

La misura di tale resistività può essere fatta costruendo un anello di materiale superconduttore posto ad una temperatura inferiore a  $T_c$ . Inizialmente viene accesa una forza elettromotrice per generare una certa corrente  $I$  dentro l'anello, poi tale f.e.m. viene spenta e si osserva la variazione di flusso di campo magnetico generato da tale corrente. All'interno del materiale vale la legge  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{j}$ , con  $\mathbf{E}$  il campo elettrico e  $\mathbf{j}$  la densità di corrente. Consideriamo il flusso di campo magnetico  $\phi(\mathbf{B})$  attraverso l'area  $\Sigma$  descritta dall'anello

$$\phi(\mathbf{B}) = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (1.1)$$

e utilizzando la legge di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2)$$

e il Teorema di Stokes otteniamo

$$\phi \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \phi(\mathbf{B})}{\partial t} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.3)$$

dove la circuitazione viene fatta lungo l'anello  $\Gamma$  e  $d\mathbf{l}$  indica lo spostamento infinitesimo lungo l'anello. Di conseguenza se assumiamo la resistività molto piccola ( $\rho \approx 0$ ) avremo un tempo di decadimento nella legge oraria del flusso di campo magnetico molto lungo.

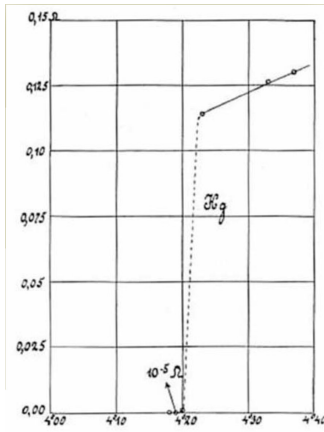


Figura 1.1: Appunti manoscritti di K. Onnes. In ascissa viene posta la temperatura e in ordinata la resistività [OK11]

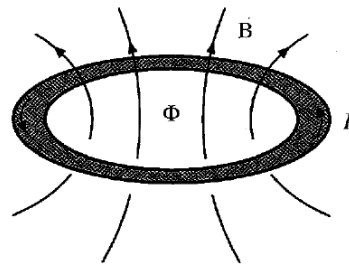


Figura 1.2: Schema esemplificativo per la misurazione della superconduttività [Ann04]

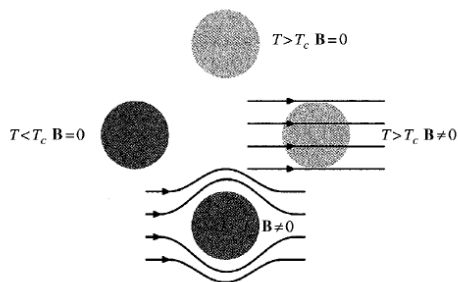


Figura 1.3: Illustrazione dell'effetto MO [Ann04]

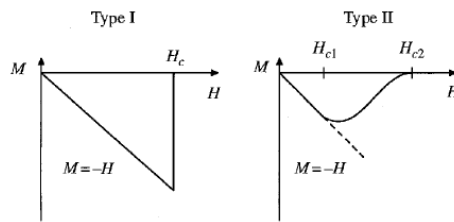


Figura 1.4: Superconduttori di tipo I e tipo II [Ann04]

Un altro effetto molto curioso riguardante i materiali superconduttori è l'*effetto Meissner-Ochsenfeld* (Fig. 1.3). Ponendo del materiale ad una temperatura  $T > T_c$  in un campo magnetico si osserva che le linee di campo penetrano il materiale, ma al di sotto di  $T_c$  le linee di campo si piegano cosicché il materiale presenta un comportamento di perfetto diamagnetismo. Infatti in fase superconduttiva la magnetizzazione interna  $\mathbf{M}$  al materiale è opposta al campo magnetico esterno. L'origine di tale diamagnetismo è dovuta a due contributi fondamentali: il primo, che si manifesta anche nei materiali diamagnetici standard come la grafite pirolitica, è l'esito dell'allineamento del momento angolare orbitale degli elettroni come risultato della magnetizzazione esterna; il secondo invece, più interessante per la nostra trattazione, è il risultato di una corrente superficiale di superconduzione che fluisce per opporsi al campo esterno. Inoltre si osserva che la transizione allo stato superconduttivo dipende dalla presenza o meno di campo magnetico: se vi è campo magnetico non nullo, la transizione avviene per una certa temperatura inferiore a  $T_c$ . Quindi ad una data temperatura  $0K < T < T_c$  esiste un limite massimo di campo magnetizzante esterno  $\mathbf{H}_c$  al di sopra del quale il materiale perde le proprietà superconduttive.

Esiste infine un'ulteriore distinzione da fare: esistono superconduttori di tipo I e di tipo II. I superconduttori di tipo I sono quelli descritti sino ad ora. I superconduttori di tipo II hanno solitamente temperature di transizione superiori ( $T_c = 18.1$  K per  $\text{Nb}_3\text{Sn}$ ) e una risposta al campo magnetizzante esterno diverso. La magnetizzazione interna  $\mathbf{M}$  si oppone al campo magnetizzante in maniera direttamente proporzionale fino ad un valore critico  $\mathbf{H}_{c1}^{ext}$ , per poi diminuire ed annullarsi a  $\mathbf{H}_{c2}^{ext}$ , come illustrato in Figura 1.4.

**Teoria di London** Un primo approccio a questi fenomeni fu proposto dai fratelli London. La base di tale teoria sta nel supporre la presenza di due fasi conduttive, una normale e una superconduttiva. Dette rispettivamente  $n_n$  ed  $n_s$  le densità dei portatori di carica delle due fasi, deve sussistere per evidenti ragioni di conservazione della carica la relazione  $n_n + n_s = N/V$ , ove  $N$  è il numero totale di cariche nel materiale e  $V$  il suo volume. Tale teoria è in analogia con la teoria dei condensati di Bose-Einstein; tuttavia non era chiaro come agli elettroni, che sono dei fermioni, si potesse applicare la statistica BE. La risoluzione di tale dilemma avvenne successivamente con l'introduzione della teoria BCS secondo cui gli elettroni formano delle coppie di conduzione, dette *coppie di Cooper*, e che per motivi di accoppiamento di spin creano stati bosonici. Infatti, dati due momenti angolari  $\mathbf{s}_1$  ed  $\mathbf{s}_2$  vige la regola di quantizzazione del momento angolare generale secondo cui

$$|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2| \leq \mathbf{s}_{tot} \leq \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2. \quad (1.4)$$

Dato che  $\mathbf{s}_{1,2} = \frac{1}{2}$ , allora  $0 \leq \mathbf{s}_{tot} \leq 1$  e, poiché la quantizzazione del momento angolare generale impone solo salti unitari, si ha che  $\mathbf{s}_{tot} = 0, 1$ .

L'intento di questo elaborato non è quello di approfondire tale teoria, bensì si concentrerà sull'approccio fenomenologico proposto da Ginzburg e Landau del 1950 (GL) fortemente influenzato dalla teoria London. Dopo aver introdotto il formalismo GL ci concentreremo sullo studio delle fluttuazioni termiche del parametro d'ordine e calcoleremo la funzione di partizione sopra e sotto  $T_c$ . Infine calcoleremo la capacità termica dei materiali superconduttori mediante un approccio basato sulla regolarizzazione dimensionale.

## Capitolo 2

# Formalismo di Landau

La teoria di Landau per le transizioni di fase si basa sul concetto di *parametro d'ordine*. Esso è una variabile termodinamica che assume varia attorno al punto di transizione. Per i nostri scopi è necessario richiedere che tale parametro sia nullo sopra  $T_c$  e non nullo sotto. La teoria trascura eventuali fluttuazioni e si suppone che il parametro d'ordine non cambi nel tempo e nello spazio: è per questo motivo che viene detta *teoria di campo medio*.

L'intento è quello di scrivere il potenziale termodinamico come funzione del parametro d'ordine. Tale potenziale verrà chiamato *energia libera*  $F$ , seppur non è necessario che si tratti effettivamente di un'energia piuttosto che un'entalpia o quant'altro. Uno stato di equilibrio a temperatura  $T$  è uno stato per cui il parametro d'ordine minimizza  $F$ . Ad esempio nel caso dei materiali ferromagnetici si assume come parametro d'ordine la magnetizzazione interna  $\mathbf{M}$  e l'espressione per l'energia libera è

$$F = F_0 + \alpha \mathbf{M} \cdot \mathbf{M} + \frac{\beta}{2} (\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^2 + O\left((\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})^3\right), \quad (2.1)$$

ove  $F_0$  è effettivamente l'energia libera di Helmholtz propria del materiale (che d'ora in poi verrà omessa in quanto non necessaria per la trattazione che intendiamo compiere)[Tim12]. Si noti che la sola dipendenza da  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}$ , o tutt'al più dalle sue potenze, rende  $F$  isotropa, in quanto si considera la magnetizzazione come un campo uniforme all'interno del materiale. Inoltre  $F$  è differenziabile in  $M$  e quindi minimizzabile.

### 2.1 Teoria GL

Non essendo all'epoca ancora stata formulata una teoria microscopica per la superconduttività, Ginzburg e Landau proposero in analogia con i condensati BE l'esistenza di una certa funzione d'onda di particella singola  $\Psi_s(\mathbf{r})$  che descrivesse la parte superconduttiva di corrente. Tale funzione d'onda deve soddisfare la condizione di normalizzazione

$$\int d^3r |\Psi_s(\mathbf{r})|^2 = n_s V = N_s, \quad (2.2)$$

dove  $N_s$  indica la frazione di condensato superconduttivo (in analogia con la teoria di London). In seguito si sceglie come parametro d'ordine  $\psi$  l'ampiezza complessa di  $\Psi_s(\mathbf{r})$  tale per cui la condizione (2.2) si riduce a  $|\psi|^2 = n_s$ . Siccome la teoria deve essere invariante sotto  $U(1)$ , gli stati in meccanica quantistica cioè sono definiti a meno di una fase globale che non è un osservabile, allora l'energia libera assume la forma

$$F(T) = F_n(T) + \underbrace{\int d^3r \left( \alpha(T) |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + O(|\psi|^6) \right)}_{f_s(T)}, \quad (2.3)$$

ove  $F_n$  è l'energia libera della fase normale e  $f_s(T)$  è l'espansione in serie della densità di energia libera della fase superconduttiva in prossimità della temperatura critica. Trascurando  $F_n$ , la funzione  $F$  è

quindi reale a vista, dato che le potenze di  $|\psi|$  sono per forza reali e le costanti  $\alpha$  e  $\beta$  sono variabili termodinamiche reali. Affinché l'energia libera sia inferiormente limitata imponiamo che  $\beta$  sia una certa costante reale positiva. Derivando rispetto a  $|\psi|$  la  $F$  e imponendola uguale a zero si possono presentare due casistiche (v. Fig. 2.1):

- se  $\alpha \geq 0$  allora  $F$  è minimizzata quando  $\psi = 0$  e questo è il caso in cui il materiale presenta un comportamento classico (cioè  $n_n = n$ );
- se  $\alpha < 0$  allora esiste un altro insieme di soluzioni, cioè  $\frac{\partial f_s(T)}{\partial |\psi|} = 0 \iff |\psi| = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ . Tale insieme di soluzioni verrà chiamato d'ora in poi  $\psi_0$ .

Il fatto che esistano infiniti punti di minimo è conseguenza diretta del fatto che l'ampiezza complessa della funzione d'onda di particella singola può essere scritta in formula di Eulero come

$$\psi = |\psi|e^{i\theta}, \quad (2.4)$$

con ovvia notazione. Quindi non avendo vincoli su  $\theta$  esiste una circonferenza nel piano complesso che soddisfa la condizione di minimo. Osservando la Figura 2.2 si capisce che la condizione di minimo si trova nell'ansa della superficie, detta *potenziale a sombrero*. Possiamo riassumere quando sino ad ora detto definendo il nostro parametro d'ordine come

$$|\psi_0| = \begin{cases} 0 & \text{se } T > T_c \\ \sqrt{-\frac{\alpha(T)}{\beta}} & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.5)$$

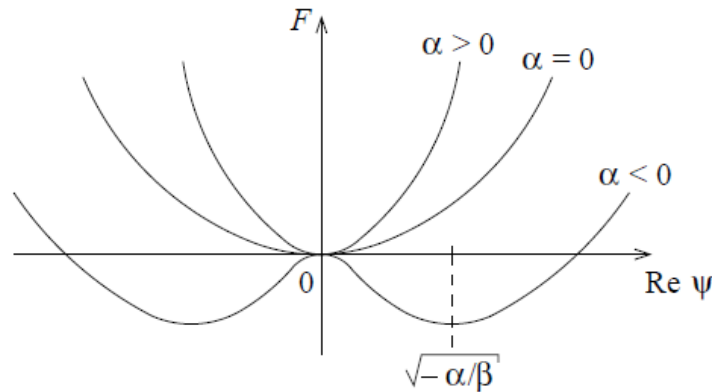


Figura 2.1: Insiemi di livello dell'energia libera in funzione della parte reale di  $\psi$  [Tim12]

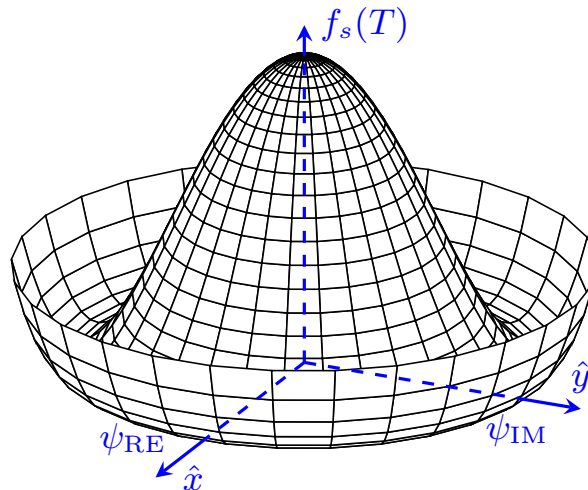


Figura 2.2: Densità di energia libera in funzione della parte reale e immaginaria del parametro  $\psi$ , caso  $\alpha < 0$



Si capisce che la transizione a fase superconduttiva dipende dal segno del parametro  $\alpha$  in funzione della temperatura. Per temperature elevate, cioè solitamente sopra a  $T_c$ , il parametro  $\alpha$  è positivo e il materiale si trova in fase non superconduttiva. In corrispondenza di  $T_c$  il parametro  $\alpha$  si annulla ed abbiamo la transizione di fase e sotto  $T_c$  il parametro diventa negativo. Di conseguenza possiamo ridefinire le variabili termodinamiche con  $\beta = \text{costante} > 0$  e  $\alpha(T) = a(T - T_c) + o((T - T_c)^2)$ , con  $a \in \mathbb{R}^+$ . Questa approssimazione si chiama *approssimazione in punto di sella*. Possiamo ridefinire il parametro d'ordine con la nuova approssimazione

$$|\psi_0| = \begin{cases} 0 & \text{se } T > T_c \\ \sqrt{\frac{a(T_c - T)}{\beta}} & \end{cases} \quad (2.6)$$

In Figura 2.3 viene esposto un grafico raffigurante quanto detto in (2.6).

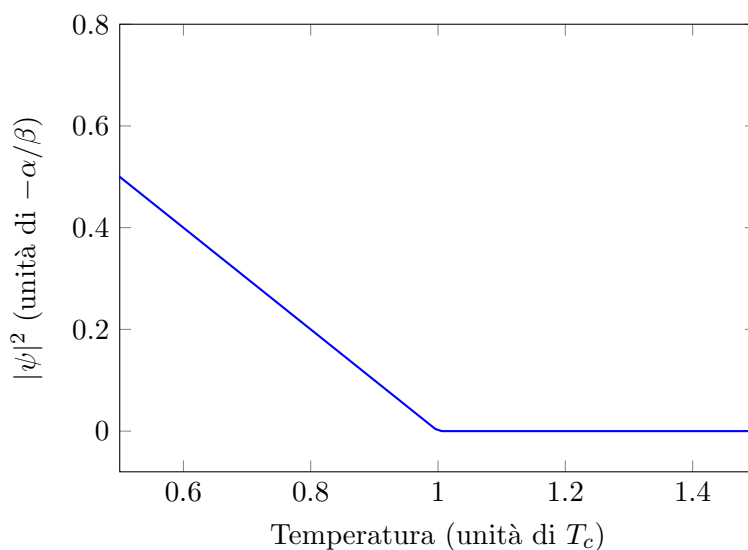


Figura 2.3: Andamento del modulo quadro del parametro d'ordine in funzione della temperatura

Ricordando la definizione di transizione di fase del secondo ordine alla Ehrenfest, si può osservare che

$$c_s = -T \frac{\partial^2 f_s}{\partial T^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } T > T_c \\ -T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{a^2}{2\beta} (T_c - T)^2 = \frac{a^2}{\beta} T & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.7)$$

Si badi bene che al di fuori della zona di superconduzione esiste ancora un contributo al calore specifico non nullo dato dall'energia libera di fase normale e che sopravvive anche in fase superconduttiva. Di conseguenza il calore specifico totale sarà la somma del calore specifico di fase normale e di fase superconduttiva. Per essere più precisi

$$c_{tot} = c_s + c_n = \begin{cases} c_n & \text{se } T > T_c \\ \frac{a^2}{\beta} T + c_n & \text{se } T < T_c. \end{cases} \quad (2.8)$$

Di conseguenza esiste una discontinuità in corrispondenza di  $T_c$  nel calore specifico, come si vede in Figura 2.4, e tale discontinuità è pari a

$$\Delta c = \frac{a^2}{\beta} T_c. \quad (2.9)$$

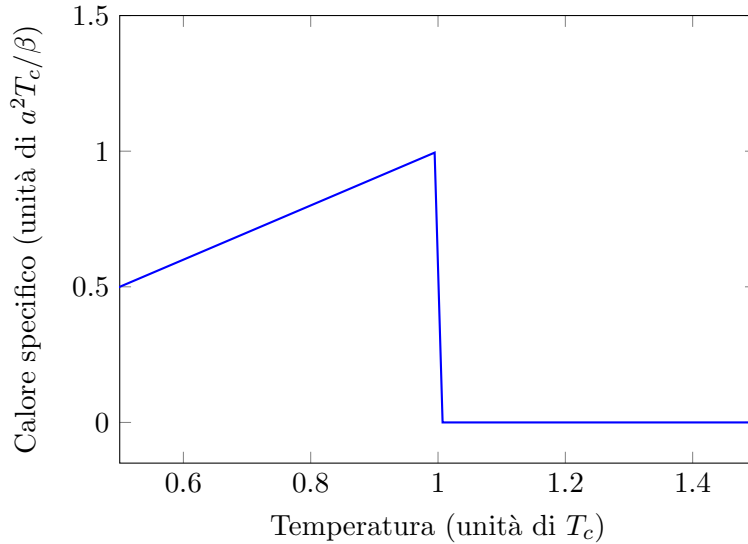


Figura 2.4: Grafico del calore specifico di superconduzione

## 2.2 Materiali non omogenei

La teoria GL prescrive anche la dipendenza dalla posizione del parametro d'ordine  $\psi(\mathbf{r})$ , che di fatto è ciò che ci permetterà di eseguire tutti calcoli di seguito esposti. Ciò si realizza introducendo il gradiente del parametro d'ordine, sicché la densità di energia libera di superconduzione diviene

$$f_s(T) = \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2 + O(|\psi|^6) \quad (2.10)$$

e  $m^*$  è la massa effettiva delle particelle di condensato. Di conseguenza scriveremo

$$F_s[\psi] = \int d^3r \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*}|\nabla\psi|^2, \quad (2.11)$$

che viene definito *funzionale di Landau* e che dipende da tutti i possibili valori di  $\psi$  per tutti i valori di posizione  $\mathbf{r}$ . Affinché tale funzionale rappresenti un'energia libera bisogna minimizzare  $F[\psi]$ . Per fare ciò calcoliamo le derivate funzionali e imponiamole nulle:

$$\frac{\partial f_s[\psi]}{\partial \psi(\mathbf{r})} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi^* + \alpha(T)\psi^* + \beta\psi^*|\psi|^2 = 0; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial f_s[\psi]}{\partial \psi^*(\mathbf{r})} = -\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla^2\psi + \alpha(T)\psi + \beta\psi|\psi|^2 = 0. \quad (2.13)$$

A tale risultato si può giungere in maniera euristica utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange in teoria di campo. Infatti  $f_s[\psi]$  non è altro che un funzionale dipendente da due campi  $\psi$  e  $\psi^*$  che, se minimizzato, rappresenta una densità di energia libera. Ricordiamo che

$$\frac{\partial f_s}{\partial \psi_i} - \partial_\mu \frac{\partial f_s}{\partial (\partial_\mu \psi_i)} = 0, \quad (2.14)$$

dove  $\psi_i$  rappresenta uno dei due campi, e computando i valori (calcoliamolo esplicitamente solo per  $\psi$ , dato che i risultati per  $\psi^*$  saranno analoghi)

$$\frac{\partial f_s}{\partial \psi} = \alpha(T)\psi^* + \beta\psi^*|\psi|^2 \quad (2.15)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial f_s}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \partial_i \frac{\partial f_s}{\partial (\partial_i \psi)} = \frac{\hbar^2}{2m^*} \partial_i \partial^i \psi^* = \frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 \psi^* \quad (2.16)$$

otteniamo (2.12). In (2.16) abbiamo implicitamente sottinteso che i campi coinvolti siano indipendenti dal tempo e, per evitare segni che non tornano, scegliamo di utilizzare il tensore metrico con segnatura  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ .

La risoluzione dell'equazione (2.12) (e della sua complessa coniugata (2.13)) ha notevoli applicazioni. Supponiamo di avere un materiale conduttore in fase non superconduttiva che si trova nel piano  $yz$  e nella regione  $x < 0$  e, a contatto con esso, del materiale superconduttore in  $x > 0$ . Supponiamo inoltre per semplicità di considerare solo un parametro d'ordine reale. Di conseguenza l'Eq. (2.12) (o (2.13)) diventa

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \alpha\psi(x) + \beta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0, \quad (2.17)$$

dato che stiamo analizzando il comportamento del sistema lungo la coordinata  $x$ . Le condizioni al contorno di questa equazione sono  $\psi(0) = 0$ , dato che il parametro d'ordine deve annullarsi nel punto di transizione fra stato normale e superconduttivo, e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (2.18)$$

Compiendo la sostituzione  $\psi(x) = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}f(x)$  l'Eq. (2.17) diviene

$$-\frac{\hbar^2}{2\alpha m^*} f''(x) + f(x) - f(x)^3 = 0 \quad (2.19)$$

che ha come soluzione

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right), \quad (2.20)$$

dove con  $\xi$  indichiamo la *lunghezza di coerenza* di Ginzburg-Landau

$$\xi^2 = -\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha(T)}. \quad (2.21)$$

Questi conti, oltre ad essere un esercizio di calcolo, evidenziano l'importanza del valore appena calcolato in (2.21). Infatti la lunghezza di coerenza rappresenta la distanza dalla superficie in cui il parametro d'ordine ha quasi raggiunto il suo valore di *bulk*.



## Capitolo 3

# Fluttuazioni termiche

Sino ad ora ci siamo concentrati sullo stato  $|\psi\rangle$  che minimizza il funzionale e questa approssimazione viene chiamata *approssimazione di campo medio*. Tale approccio non considera le fluttuazioni termiche, che *de facto* sono l'argomento più interessante del seguente elaborato. Queste fluttuazioni sono l'origine della presenza di coppie di Cooper anche al di sopra della temperatura critica. Quindi un certo materiale può presentare caratteristiche superconduttive anche in prossimità di  $T_c$ . Un punto di forza della teoria GL è appunto quello di andare oltre l'approssimazione di campo medio incorporando tali fluttuazioni al fine di spiegare e comprendere tali fenomeni altrimenti non comprensibili.

L'implementazione di tali fluttuazioni viene effettuata considerando la soluzione che minimizza il funzionale di Landau considerando il parametro d'ordine puramente reale  $|\psi\rangle = \psi_0$  ed applicandovi una perturbazione dipendente dallo spazio. Considereremo cioè come nuovo parametro d'ordine

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \eta(\mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Nel seguente capitolo esporremo dapprima il concetto di integrazione funzionale, in seguito utilizzeremo tale concetto per il calcolo della funzione di partizione grancanonica. Poi utilizzeremo l'approccio di regolarizzazione dimensionale per il calcolo in 3D, 2D e 1D della capacità termica in prossimità della temperatura critica.

### 3.1 Integrazione funzionale

Un sistema in equilibrio termico ha una probabilità non finita di assumere la configurazione definita da (3.1). Tale probabilità è uguale a

$$P[\psi] = \frac{\exp\left(-\frac{F_s[\psi]}{k_B T}\right)}{\mathcal{Z}_s}, \quad (3.2)$$

dove  $\mathcal{Z}$  è la funzione di partizione grancanonica "superconduttiva" definita da

$$\mathcal{Z}_s = \int \mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\psi^*] \exp\left(-\frac{F_s[\psi]}{k_B T}\right). \quad (3.3)$$

Quest'ultimo integrale si chiama *integrale funzionale* e il suo concetto può essere espresso nel modo che segue. Supponiamo di avere un numero discreto di punti dello spazio  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ , allora avremo che

$$\mathcal{Z} = \int d\psi(\mathbf{r}_1)d\psi^*(\mathbf{r}_1) \dots d\psi(\mathbf{r}_N)d\psi^*(\mathbf{r}_N) \exp(-bF_s[\psi]); \quad (3.4)$$

la funzione esponenziale cioè viene integrata in tutti i possibili valori di  $\psi$  e  $\psi^*$  dipendenti a loro volta del numero discreto di coordinate. Per passare poi da (3.3) a (3.4) bisogna passare ad un set continuo di coordinate, cioè far tendere ad infinito  $N$ .

Utilizziamo ora (3.1) in (2.11). In generale il termine  $\eta(\mathbf{r})$  è un termine complesso, di conseguenza possiamo scomporlo nella sua parte reale e immaginaria scrivendolo come  $\eta(\mathbf{r}) = \eta_1(\mathbf{r}) + i\eta_2(\mathbf{r})$ . Si ha che

$$F_s[\psi] \simeq F_s[\psi_0] + \int d^3r \alpha |\eta|^2 + 2\beta\psi_0^2 |\eta|^2 + \frac{\beta}{2}\psi_0^2 (\eta^2 + \eta^{*2}) + \gamma |\nabla\eta|^2, \quad (3.5)$$

dove  $F_s[\psi_0]$  è l'energia libera in approssimazione di campo medio e abbiamo trascurato i termini lineari (dato che stiamo calcolando un minimo stazionario) e quelli di ordine superiore a  $|\eta|^2$ . Questa ultima approssimazione si chiama *approssimazione gaussiana*. Inoltre abbiamo ridefinito per semplicità di notazione  $\gamma = \hbar^2/(2m^*)$ . A questo punto, per il calcolo esplicito conviene passare in coordinate dello spazio reciproco. Possiamo scrivere

$$\eta_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\eta_{1,\mathbf{k}}}{\sqrt{V}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \eta_2(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\eta_{2,\mathbf{k}}}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (3.6)$$

Di conseguenza la (3.5) diventa

$$\begin{aligned} F_s[\psi] &= F_s[\psi_0] + \int d^3r (\eta_1^2(\alpha + 3\beta\psi_0^2) + \eta_2^2(\alpha + \beta\psi_0^2) + \gamma |\nabla\eta|^2) = \\ &= F_s[\psi_0] + \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{1}{V} \int d^3r (\alpha + 3\beta\psi_0^2 + \gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \eta_{1,\mathbf{k}} \eta_{1,\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} + \\ &+ (\alpha + \beta\psi_0^2 + \gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \eta_{2,\mathbf{k}} \eta_{2,\mathbf{k}'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = \\ &= F_s[\psi_0] + \sum_{\mathbf{k}} (\alpha + 3\beta\psi_0^2 + \gamma k^2) \eta_{1,\mathbf{k}}^2 + (\alpha + \beta\psi_0^2 + \gamma k^2) \eta_{2,\mathbf{k}}^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Abbiamo utilizzato una serie di proprietà: *in primis* vale  $\int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ , poi valgono le identità  $|\eta|^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2$ ,  $(\eta^2 + \eta^{*2}) = 2(\eta_1^2 - \eta_2^2)$ .

A questo punto bisogna calcolare la funzione di partizione utilizzando l'integrale funzionale (3.4). Si badi bene che l'integrazione, adesso che si è passati nello spazio reciproco, viene effettuata nelle variabili  $\eta_{1,\mathbf{k}}$  ed  $\eta_{2,\mathbf{k}}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_s &= \int d\eta_{1,\mathbf{k}} d\eta_{2,\mathbf{k}} e^{-\frac{F_s[\psi]}{k_B T}} = \\ &= e^{-\frac{F_s[\psi_0]}{k_B T}} \prod_{\mathbf{k}} \int d\eta_{1,\mathbf{k}} d\eta_{2,\mathbf{k}} \exp(-b(\alpha + 3\beta\psi_0^2 + \gamma k^2) \eta_{1,\mathbf{k}}^2) (-b(\alpha + \beta\psi_0^2 + \gamma k^2) \eta_{2,\mathbf{k}}^2) = \\ &= e^{-\frac{F_s[\psi_0]}{k_B T}} \prod_{\mathbf{k}} \left( \frac{\pi k_B T}{\alpha + 3\beta\psi_0^2 + \gamma k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi k_B T}{\alpha + \beta\psi_0^2 + \gamma k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da notare che l'ultimo integrale eseguito è l'integrale gaussiano, da qui la scelta del nome per "approssimazione gaussiana". Prima di continuare è doveroso notare che la (3.8) è del tutto valida sia per temperature sopra la temperatura critica sia sotto. Infatti per  $T > T_c$  si ha che  $\psi_0 = 0$ ,  $F_s[\psi_0] = 0$  e quindi la funzione di partizione si semplifica diventando

$$\mathcal{Z}_s = \prod_{\mathbf{k}} \frac{\pi k_B T}{\alpha + \gamma k^2}. \quad (3.9)$$

### 3.2 Capacità termica in 3D

Vogliamo adesso calcolare la capacità termica in presenza di fluttuazioni termiche. Procediamo per gradi considerando prima il caso in cui  $T > T_c$ . Esplicitando  $\alpha$  in funzione della temperatura si trova che l'energia libera è uguale a

$$A = -k_B T \ln(\mathcal{Z}_s) = -k_B T \sum_{\mathbf{k}} \ln \left( \frac{\pi k_B T}{a(T - T_c) + \gamma k^2} \right). \quad (3.10)$$

A questo punto la capacità termica è, a conti fatti, uguale a

$$C = -T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = k_B \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(a(T - T_c) + \gamma k^2)^2}. \quad (3.11)$$

Il passo successivo sta nel cercare di eliminare ogni dipendenza da  $\mathbf{k}$ . La sommatoria viene eseguita sulla prima zona di Brilluoin, e trovandoci noi in un sistema macroscopico possiamo utilizzare il limite termodinamico  $V \rightarrow \infty$ . Di conseguenza possiamo compiere la sostituzione  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$  e l'integrazione viene compiuta su tutto lo spazio.

Nel caso tridimensionale avremo quindi

$$C = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{k_B(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(a(T - T_c) + \gamma k^2)^2} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} dk k^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{k_B(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(a(T - T_c) + \gamma k^2)^2}, \quad (3.12)$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che la funzione integranda dipende solo dal modulo di  $\mathbf{k}$  e siamo passati in coordinate sferiche. Notiamo che abbiamo a che fare con un integrale improprio in  $k$ , il cui integrale indefinito risulta essere

$$\int dk k^2 \frac{k_B(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(a(T - T_c) + \gamma k^2)^2} = k_B \left( \frac{k(\alpha - aT_c)}{2\gamma(\alpha + \gamma k^2)} + \frac{(aT_c - 3\alpha) \arctan \left( \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} k \right)}{2\sqrt{\alpha}\gamma^{3/2}} + \frac{k}{\gamma} \right) + constant \quad (3.13)$$

con  $\alpha = a(T - T_c)$  per non appesantire la notazione. Si nota tuttavia che il termine  $k/\gamma$  diverge per  $k \rightarrow \infty$  e il termine  $\frac{k(\alpha - aT_c)}{2\gamma(\alpha + \gamma k^2)}$  diverge per  $k \rightarrow 0$ , di conseguenza verrebbe da pensare che la capacità termica sia sempre infinita. La cosa è evidentemente un controsenso e verrebbe da pensare di trovarsi in un *cul se sac*.

**Regolarizzazione tramite continuazione analitica** Per risolvere il seguente problema è stato utilizzato un approccio basato sulla Regolarizzazione tramite continuazione analitica. Tale processo è uno strumento nato per risolvere problemi rinormalizzazione in QED. Le tecniche trattate servono infatti a "estrarre informazioni dagli infiniti" mediante l'alterazione volontaria di certe quantità al fine di compensare effetti patologici.

Procediamo per gradi. Consideriamo il seguente integrale:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (3.14)$$

Se  $p$  e  $q$  sono due numeri complessi con parte reale positiva, allora vale l'identità di Eulero (che non dimosteremo):

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (3.15)$$

dove  $\Gamma$  indica la funzione gamma di Eulero e  $B$  indica la funzione beta di Eulero. Adottando il criterio della continuazione analitica si estende il dominio di validità della (3.15) a tutti i  $p$  e  $q$  complessi. A questo punto se compiamo una serie di macchinose sostituzioni (che omettiamo) otteniamo [Zei09]

$$\int_0^\infty dr \frac{r^\alpha}{(a + br^\beta)^\gamma} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{1}{\beta a^\gamma} B\left(\frac{\alpha+1}{\beta}, \gamma - \frac{\alpha+1}{\beta}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\alpha+1}{\beta}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \Gamma\left(\gamma - \frac{\alpha+1}{\beta}\right)}{a^\gamma \beta \Gamma(\gamma)}. \quad (3.16)$$

Riprendiamo a questo punto la (3.12) ed espandiamo il quadrato a numeratore:

$$C = \frac{2Vk_B}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\gamma^2 k^6 - 2aT_c \gamma k^4 + (aT_c)^2 k^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2}. \quad (3.17)$$

Anche qui, adottando il criterio della continuazione analitica si estende il dominio di validità della (3.15) a tutti gli argomenti complessi delle funzioni gamma di Eulero coinvolte. Calcoliamo passo passo ogni singolo contributo:

$$\int_0^\infty dk \gamma^2 \frac{k^6}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \gamma^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{7/2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{7}{2}\right)}{2\alpha^2 \Gamma(2)} = \frac{\alpha^{3/2}}{2\gamma^{3/2}} \frac{5\pi}{2} \quad (3.18)$$

$$2aT_c \gamma \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = 2aT_c \gamma \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{5/2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{5}{2}\right)}{2\alpha^2 \Gamma(2)} = aT_c \frac{\alpha^{1/2}}{\gamma^{3/2}} \frac{3\pi}{2} \quad (3.19)$$

$$(aT_c)^2 \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = (aT_c)^2 \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{3}{2}\right)}{2\alpha^2 \Gamma(2)} = \frac{(aT_c)^2}{2\gamma^{3/2}} \frac{\pi}{\alpha^{1/2}}. \quad (3.20)$$

Quindi la capacità termica totale sopra  $T_c$  è uguale a

$$C = \frac{2Vk_B}{(2\pi)^2} \left( \frac{\alpha^{3/2}}{2\gamma^{3/2}} \frac{5\pi}{2} + aT_c \frac{\alpha^{1/2}}{\gamma^{3/2}} \frac{3\pi}{2} + \frac{(aT_c)^2}{2\gamma^{3/2}} \frac{\pi}{\alpha^{1/2}} \right) \quad (3.21)$$

In Figura 3.1 viene plottata questa funzione e in ascissa vengono messi multipli di  $\alpha$ . Fra tutti i contributi, quello più interessante è sicuramente in (3.20). Notiamo infatti che compare a denominatore  $\alpha^{1/2}$ . Di conseguenza al tendere della temperatura critica  $T \rightarrow T_c^+$  avremo che la capacità termica diverge all'infinito come  $C \simeq \frac{1}{\sqrt{T-T_c}}$ . Inoltre al crescere di  $\alpha$  la funzione tende asintoticamente alla funzione di capacità termica data dall'approssimazione in campo medio.

Calcoliamo adesso l'energia libera sotto  $T_c$ . Ricordandosi che  $|\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}$  si ha che

$$A = -k_B T \ln(Z_s) = \underbrace{-k_B T \left( -\frac{F_s[\psi_0]}{k_B T} \right)}_{A_0} - \underbrace{\frac{k_B T}{2} \left( \sum_{\mathbf{k}} \ln \left( \frac{\pi k_B T}{\gamma k^2 - 2\alpha} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \ln \left( \frac{\pi k_B T}{\gamma k^2} \right) \right)}_{A_g}. \quad (3.22)$$

Per il calcolo della capacità termica notiamo che il primo termine  $A_0$  corrisponde all'energia libera calcolata in approssimazione di campo medio. Di conseguenza esso produrrà un risultato uguale a (2.7). Calcoliamo adesso il contributo degli altri due termini:

$$C_g = -T \frac{\partial^2 A_g}{\partial T^2} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_B (\gamma k^2 + 2aT_c)^2}{2(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} + \frac{k_B}{2}. \quad (3.23)$$

Pare che non si possa utilizzare la (3.16) in quanto a denominatore abbiamo un termine apparentemente negativo. Tuttavia stiamo lavorando sotto la temperatura critica e di conseguenza  $\alpha$  è definito negativo e la capacità termica qui definita è sicuramente positiva. Fatte le seguenti premesse, possiamo procedere con il calcolo della capacità termica come fatto prima.

$$C_g = \frac{k_B}{2} + \frac{Vk_B}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dk \frac{\gamma^2 k^6 + 4aT_c \gamma k^4 + (2aT_c)^2 k^2}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2}. \quad (3.24)$$

Abbiamo sostanzialmente gli stessi risultati di prima (3.20-3.22) con alcuni alcuni fattori moltiplicativi cambiati e invece di avere  $\alpha$  avremo  $-2\alpha$ . Nello specifico si avrà che

$$C = \frac{a^2 V}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{2Vk_B}{(2\pi)^2} \left( \frac{(-2\alpha)^{3/2}}{2\gamma^{3/2}} \frac{5\pi}{2} + 4aT_c \frac{(-2\alpha)^{1/2}}{\gamma^{3/2}} \frac{3\pi}{2} + \frac{(2aT_c)^2}{2\gamma^{3/2} (-2\alpha)^{1/2}} \frac{\pi}{2} \right). \quad (3.25)$$



Il fattore  $\frac{a^2 V}{\beta} T_c$  è il risultato della differenziazione di  $A_0$  in (3.22), che è lo stesso contributo ottenuto considerando l'approssimazione in campo medio da (2.7). Di conseguenza, il fattore più rilevante è quello contenente  $(2aT_c)^2$ , in quanto produce una divergenza nella capacità termica in corrispondenza di  $T_c$  che scala come  $C \simeq \frac{1}{\sqrt{T_c - T}}$ .

Possiamo graficare quanto ottenuto. Come si vede in Figura 3.2 abbiamo una divergenza della capacità termica in corrispondenza della temperatura critica. La linea tratteggiata indica la capacità termica calcolata in approssimazione di campo medio. Quanto sino ad ora calcolato non è un puro esercizio matematico, ma ha delle prove sperimentali. Nel 1996 Overend et al. [Ove+96] studiarono la risposta della capacità termica di cristalli di  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$  in funzione della temperatura. Quello che osservarono fu che la capacità termica seguiva un andamento simile a quanto descritto dalle leggi ottenute considerando l'approssimazione di campo medio. Tuttavia in prossimità della temperatura critica osservarono la presenza di una "spalla" che si discostava dalla previsione di campo medio (v. Fig. 3.3). Osserviamo il grafico riportato. Notiamo che i dati sperimentali in prossimità della temperatura critica non seguono bene né la curva di campo medio né la curva ottenuta considerando le fluttuazioni termiche. Se avessimo una divergenza in  $T_c$  allora idealmente un superconduttore non potrebbe transire allo stato superconduttivo e viceversa. Infatti per piccole variazioni di temperatura dovremmo avere infinita energia disponibile e di conseguenza non potremmo mai osservare la fase superconduttiva perché il materiale si assesterebbe in prossimità della temperatura critica. Ciò evidentemente non è vero. Generalmente si osserva inoltre uno spostamento a sinistra nel grafico della capacità termica all'aumento del campo magnetico esterno, come illustrato da Lortz et al. [Lor+06]. Avevamo infatti detto nel Cap. 1 che all'aumentare del campo magnetico esterno diminuisce la temperatura critica di transizione. Così è, come effettivamente si vede dalla Figura 3.4. Inoltre si nota come all'aumentare del campo magnetico aumenta l'effetto di "spalla" dovuto alle fluttuazioni termiche.

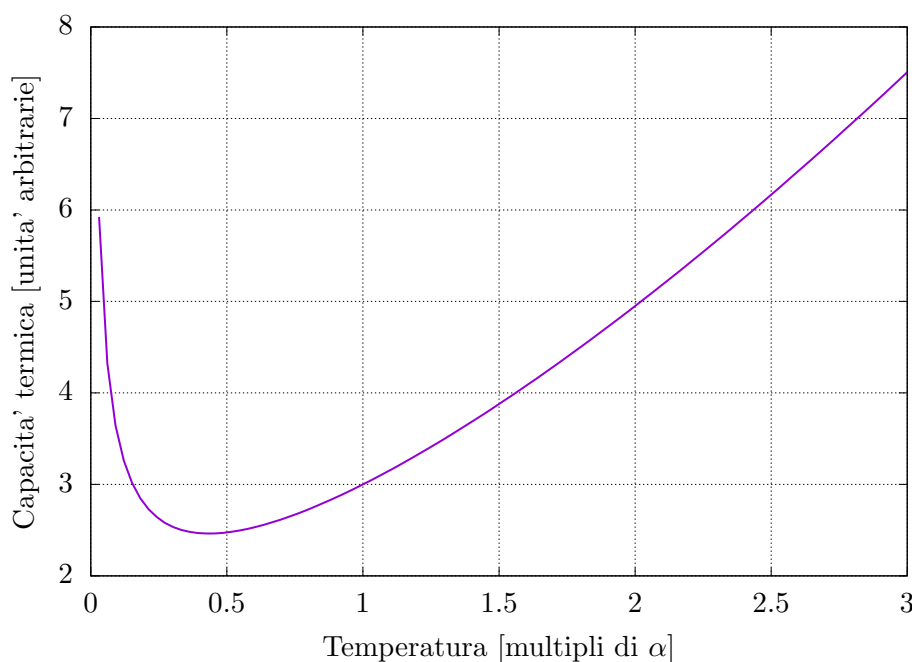


Figura 3.1: Andamento della capacità termica in funzione della temperatura, caso sopra  $T_c$

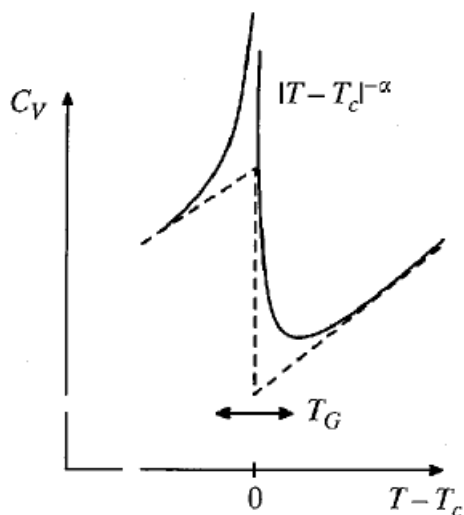


Figura 3.2: Andamento della capacità termica in funzione della temperatura, contributi dovuti alle fluttuazioni termiche [Ann04]

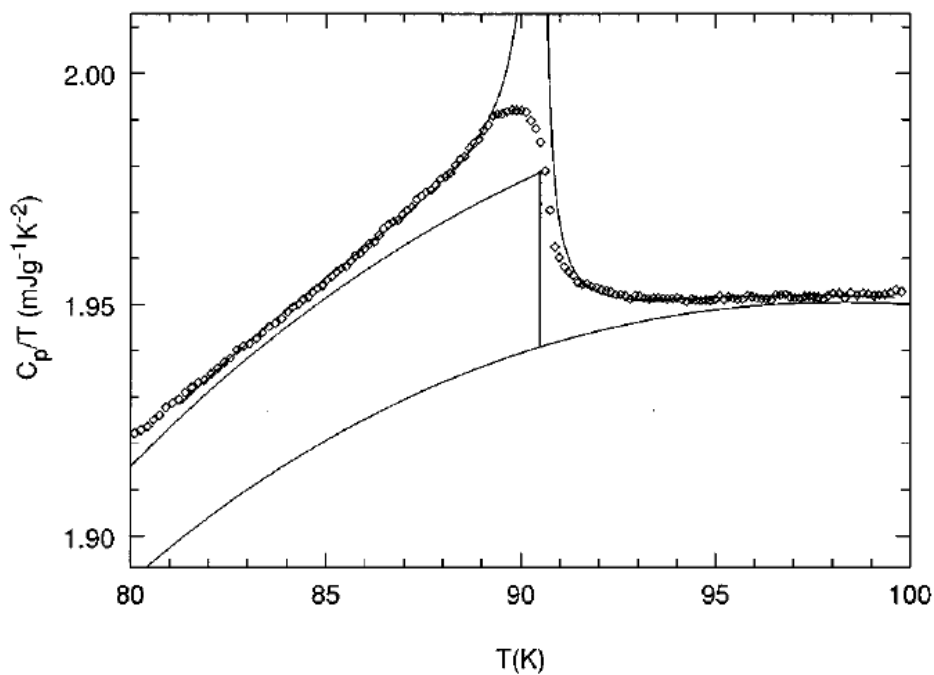


Figura 3.3: Calore specifico normalizzato dalla temperatura di cristalli di  $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ . I punti rappresentano i dati sperimentali mentre le linee piene rappresentano, in ordine crescente, il calore specifico della fase normale, il calore specifico superconduttivo in approssimazione di campo medio e il calore specifico superconduttivo con fluttuazioni termiche [Ove+96]

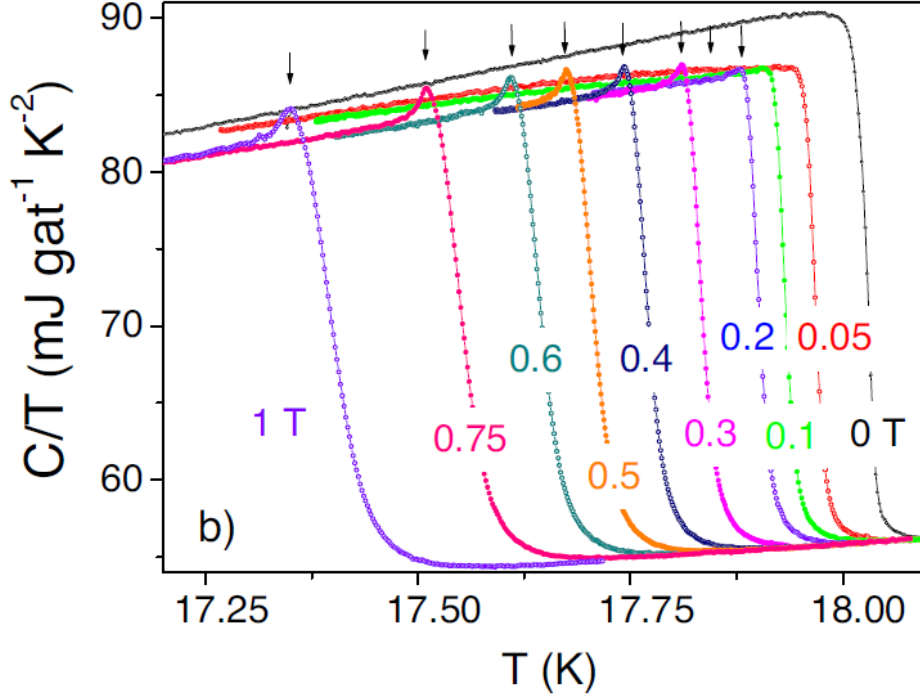


Figura 3.4: Calore specifico di  $\text{Nb}_3\text{Sn}$  in funzione di temperatura e campo magnetico esterno. Le frecce indicano incrementi rilevanti dovuti al contributo di fluttuazione termica [Lor+06]

### 3.3 Capacità termica in 2D e 1D

Prima di addentrarci nel calcolo della capacità termica in 2D facciamo una serie di considerazioni dimensionali. Supponiamo sempre di avere una perturbazione del parametro  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi_0| + \eta(\mathbf{r})$ , ma adesso avremo che  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ . I processi di integrazione sono esattamente gli stessi, solo che questa volta ogni integrazione verrà fatta in due dimensioni e i campi perturbativi avranno la forma

$$\eta_1(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\eta_{1,\mathbf{k}}}{\sqrt{S}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \eta_2(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\eta_{2,\mathbf{k}}}{\sqrt{S}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (3.26)$$

dove  $S$  rappresenta la superficie totale. A questo punto si faranno gli stessi processi di integrazione visti in (3.7) ma in 2D e utilizzando la relazione  $\int d^2r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} = S\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$  e si arriverà esattamente a (3.8). A questo punto concentriamoci nel caso in cui  $T > T_c$ : avremo che

$$C = -T \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = k_B \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(a(T - T_c) + \gamma k^2)^2}. \quad (3.27)$$

A questo punto non compieremo più la sostituzione in 3D, bensì  $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{S}{(2\pi)^2} \int d^2k$ . Avremo quindi che

$$\begin{aligned} C &= \frac{S}{(2\pi)^2} \int d^2k \frac{k_B(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \frac{S k_B}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dk \frac{k(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \\ &= \frac{S k_B}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{\gamma^2 k^5 - 2aT_c \gamma k^3 + (aT_c)^2 k}{(\alpha + \gamma k^2)^2}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dove nel secondo passaggio siamo passati in coordinate polari. Proviamo ad applicare la (3.16).

$$(aT_c)^2 \int_0^\infty dk \frac{k}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = (aT_c)^2 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right) \frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{2\alpha^2\Gamma(2)} = \frac{(aT_c)^2}{2\gamma\alpha} \quad (3.29)$$

Notiamo che sia per il termine contenente  $k^3$ , sia per quello contenente  $k^5$  abbiamo dei comportamenti patologici, dato che avremmo all'interno delle formule risolutive dei fattori rispettivamente equivalenti a  $\Gamma(0)$  e  $\Gamma(-1)$ . Tali fattori sono infatti divergenti.

**Regolarizzazione dimensionale** La risoluzione di questa *impasse* sta nell'uso di una tecnica chiamata *regolarizzazione dimensionale*. Vediamo in pratica come si esegue concentrandoci sul caso di  $k^3$ . Invece di integrare la funzione con il numeratore avente dimensione 3, imponiamo che abbia dimensione  $3 - \epsilon$ , di conseguenza l'integrale diviene

$$J_{3-\epsilon} = -2aT_c\gamma \int_0^\infty dk \frac{\kappa^\epsilon k^{3-\epsilon}}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = -2aT_c\gamma \kappa^\epsilon \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{4-\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{4-\epsilon}{2}\right)}{2\alpha^2\Gamma(2)}, \quad (3.30)$$

dove il fattore  $\kappa^\epsilon$  è stato introdotto per non avere problemi di dimensionalità delle misure [Ton19]. Se facciamo tendere a zero il fattore  $\epsilon$  possiamo scrivere in serie  $\Gamma(\epsilon/2)$

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_M + o(\epsilon), \quad (3.31)$$

dove  $\gamma_M$  è la costante di Eulero-Mascheroni e vale  $\gamma_M \approx 0.577$ . Trattiamo i fattori contenenti  $\epsilon$  a esponente come segue:

$$\kappa^\epsilon \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = \exp\left(\epsilon \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\right) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} 1 + \epsilon \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) + o(\epsilon^2). \quad (3.32)$$

Quindi otteniamo

$$\kappa^\epsilon \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\epsilon/2) \simeq \frac{2}{\epsilon} + 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) - \gamma_M + o(\epsilon). \quad (3.33)$$

Troncando quindi il termine singolare  $2/\epsilon$  e osservando che  $\Gamma((4-\epsilon)/2) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \Gamma(2)$  otteniamo l'integrale, che viene soprannominato "regolarizzato".

$$[J_{3-\epsilon}]_{reg} = \frac{aT_c \left(\gamma_M - 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\right)}{\gamma}. \quad (3.34)$$

Procediamo con l'ultimo integrale e otteniamo

$$J_{5-\epsilon} = \gamma^2 \int_0^\infty dk \frac{\kappa^\epsilon k^{5-\epsilon}}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \gamma^2 \kappa^\epsilon \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{6-\epsilon}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{6-\epsilon}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{6-\epsilon}{2}\right)}{2\alpha^2\Gamma(2)}. \quad (3.35)$$

Ripercorrendo i passaggi di prima e tenendo conto che

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) = -\frac{2}{\epsilon} + \gamma_M - 1 + o(\epsilon) \quad (3.36)$$

otteniamo

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) \kappa^\epsilon \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} = -\frac{2}{\epsilon} - 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right) + \gamma_M - 1 + o(\epsilon). \quad (3.37)$$

Infine regolarizzando otteniamo

$$[J_{5-\epsilon}]_{reg} = \frac{\alpha}{2\gamma} \left(\gamma_M - 1 - 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\right) \quad (3.38)$$

Quindi la capacità termica in 2D "regolarizzata" (cioè contenente i termini trattati mediante regolarizzazione dimensionale) sopra  $T_c$  vale

$$C = \frac{Sk_B}{2\pi} \left( \frac{(aT_c)^2}{2\gamma\alpha} + \frac{aT_c \left(\gamma_M - 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\right)}{\gamma} + \frac{\alpha}{2\gamma} \left(\gamma_M - 1 - 2 \ln\left(\kappa\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\right) \right) \quad (3.39)$$

Notiamo che fra tutti i contributi quello più significativo è dato da (3.29). Infatti per  $T \rightarrow T_c^+$  abbiamo una divergenza ad infinito e in quel punto la capacità termica scala come  $C \simeq (T - T_c)^{-1}$ . I conti nel caso in cui  $T < T_c$  sono del tutto analoghi ai conti per  $T > T_c$ , come nel caso 3D ma utilizzando

anche la regolarizzazione dimensionale. Calcoliamo l'espressione per la capacità termica in 2D sotto la temperatura critica. Si ha che vale (3.22) e (3.23) ma in 2D, quindi

$$C = \frac{a^2 S}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{S}{(2\pi)^2} \int d^2 k \frac{k_B(\gamma k^2 + 2aT_c)^2}{2(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = \frac{a^2 S}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{S k_B}{4\pi} \int_0^\infty dk \frac{\gamma^2 k^5 + 4aT_c \gamma k^3 + (2aT_c)^2 k}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2}, \quad (3.40)$$

dove il primo contributo viene dato dall'approssimazione di campo medio e nell'integrale si è passati in coordinate polari. Procedendo con ordine abbiamo che

$$(2aT_c)^2 \int_0^\infty dk \frac{k}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = \frac{(aT_c)^2}{\gamma(-\alpha)}. \quad (3.41)$$

Per gli altri termini il processo di regolarizzazione dimensionale è lo stesso ma cambia solo  $\kappa^\epsilon \left(\frac{\gamma}{-2\alpha}\right)^{\frac{\epsilon}{2}}$  e nel denominatore  $\alpha \rightarrow -2\alpha$ , quindi

$$[J_{3-\epsilon}]_{reg} = \left[ 4aT_c \gamma \int_0^\infty dk \frac{\kappa^\epsilon k^{3-\epsilon}}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} \right]_{reg} = \frac{2aT_c \left( -\gamma_M + 2 \ln \left( \kappa \sqrt{\frac{\gamma}{2(-\alpha)}} \right) \right)}{\gamma} \quad (3.42)$$

$$[J_{5-\epsilon}]_{reg} = \left[ \gamma^2 \int_0^\infty dk \frac{k^5}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} \right]_{reg} = \frac{-\alpha}{\gamma} \left( \gamma_M - 1 - 2 \ln \left( \kappa \sqrt{\frac{\gamma}{2(-\alpha)}} \right) \right). \quad (3.43)$$

Sommando tutti i termini quindi otteniamo

$$C = \frac{a^2}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{S k_B}{4\pi} \left[ \frac{(aT_c)^2}{\gamma(-\alpha)} + \frac{2aT_c \left( -\gamma_M + 2 \ln \left( \kappa \sqrt{\frac{\gamma}{2(-\alpha)}} \right) \right)}{\gamma} + \frac{-\alpha}{\gamma} \left( \gamma_M - 1 - 2 \ln \left( \kappa \sqrt{\frac{\gamma}{2(-\alpha)}} \right) \right) \right] \quad (3.44)$$

Anche in questo caso avremo che per  $T \rightarrow T_c^-$  la capacità termica scala come  $C \simeq (T_c - T)^{-1}$ . In generale si può dimostrare che la capacità termica in prossimità della temperatura di transizione scala come  $C \simeq |T - T_c|^{-(4-D)/2}$ , dove  $D$  indica la dimensione del superconduttore. Nel caso 1D infatti, qualora ci trovassimo nella condizione  $T > T_c$ , avremmo che (3.11) diverrebbe

$$C = \frac{L}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{k_B(\gamma k^2 - aT_c)^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2}, \quad (3.45)$$

dove il fattore 2 sparisce dato che la funzione è pari in  $k$  e quindi vale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} dx f(x)$ . Utilizziamo la continuazione analitica come nel caso 3D

$$\gamma^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \gamma^2 \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{5/2} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{5}{2}\right)}{2\alpha^2 \Gamma(2)} = -\frac{3\pi\alpha^{1/2}}{4\gamma^{1/2}} \quad (3.46)$$

$$-2aT_c \gamma \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \dots = -\frac{aT_c \pi}{2\alpha^{1/2} \gamma^{1/2}} \quad (3.47)$$

$$(aT_c)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{(\alpha + \gamma k^2)^2} = \dots = \frac{(aT_c)^2 \pi}{\gamma^{1/2} \alpha^{3/2}}. \quad (3.48)$$

Sommando quindi avremo che

$$C = L \left( \frac{(aT_c)^2}{\gamma^{1/2} \alpha^{3/2}} - \frac{aT_c}{2\alpha^{1/2} \gamma^{1/2}} - \frac{3\alpha^{1/2}}{4\gamma^{1/2}} \right) \quad (3.49)$$

Nel caso  $T < T_c$  si avranno sempre valide le (3.22) e (3.23), ma questa volta in 1D. Analizziamo nello specifico questo caso:

$$C = \frac{a^2 L}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{L}{2\pi} \int dk \frac{k_B(\gamma k^2 + 2aT_c)^2}{2(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = \frac{a^2 L}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + \frac{L k_B}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{\gamma^2 k^4 + 4aT_c \gamma k^2 + (2aT_c)^2}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2}. \quad (3.50)$$

Calcolando esplicitamente ogni singolo contributo si ottiene

$$\gamma^2 \int_0^\infty dk \frac{k^4}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = \gamma^2 \left( \frac{2(-\alpha)}{\gamma} \right)^{\frac{5}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{5}{2}\right)}{2(2(-\alpha))^2 \Gamma(2)} = -\frac{3\pi(2(-\alpha))^{1/2}}{4\gamma^{1/2}} \quad (3.51)$$

$$4aT_c\gamma \int_0^\infty dk \frac{k^2}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = 4aT_c\gamma \left( \frac{2(-\alpha)}{\gamma} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{3}{2}\right)}{2(2(-\alpha))^2 \Gamma(2)} = \frac{\pi aT_c}{(\gamma(-2\alpha))^{1/2}} \quad (3.52)$$

$$(2aT_c)^2 \int_0^\infty \frac{dk}{(\gamma k^2 - 2\alpha)^2} = (2aT_c)^2 \left( \frac{2(-\alpha)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{1}{2}\right)}{2(2(-\alpha))^2 \Gamma(2)} = \frac{\pi(aT_c)^2}{\gamma^{1/2}(2(-\alpha))^{3/2}}. \quad (3.53)$$

Unendo tutti i contributi otteniamo quindi:

$$C = \frac{a^2 L}{\beta} T_c + \frac{k_B}{2} + Lk_B \left( \frac{(aT_c)^2}{\gamma^{1/2}(2(-\alpha))^{3/2}} + \frac{aT_c}{(\gamma(-2\alpha))^{1/2}} - \frac{3(2(-\alpha))^{1/2}}{4\gamma^{1/2}} \right) \quad (3.54)$$

# Conclusioni

In questa tesi abbiamo visto l'importanza della teoria GL come approccio fenomenologico alla superconduttività. Tale teoria, naturale sviluppo della teoria dei fratelli London, non è una trattazione *ab ovo* che intende spiegare la superconduttività a partire da principi primi. Per tali scopi infatti è necessaria la teoria BCS che postula l'esistenza di coppie elettroniche superconduttive.

Un punto di forza della teoria GL, che è stato anche il punto saliente di questo lavoro, è la possibilità di introdurre fluttuazioni del parametro d'ordine. Mediante tali fluttuazioni è possibile verificare la presenza di coppie di Cooper anche prima della temperatura di transizione. Inoltre tali fluttuazioni possono spiegare in parte certi comportamenti che non potrebbero essere spiegati in approssimazione di campo medio, come nel caso della capacità termica. Tuttavia i calcoli eseguiti hanno fatto uso di una serie di approssimazioni che, sebbene accettabili, non garantiscono che le soluzioni siano sempre e comunque valide. *In primis* abbiamo fatto uso dell'approssimazione gaussiana per calcolare la funzione di partizione "superconduttiva" sopra e sotto  $T_c$ , poi abbiamo fatto uso della continuazione analitica e della regolarizzazione dimensionale dimenticandoci di fatto i termini divergenti. Queste approssimazioni producono una serie di incongruenze anche con i dati sperimentali e quindi un naturale sviluppo di questo lavoro potrebbe essere fugare tali incongruenze. La teoria BCS sembra la più valida, ma affrontare un argomento così vasto va ben oltre gli scopi di una tesi di laurea triennale.

# Bibliografia

- [OK11] HK Onnes e WH Keesom. *Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. Suppl.* 29. 1911.
- [Ove+96] Neil Overend et al. “Comparison of critical and lowest-Landau-level scaling of the specific heat of several YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7- $\delta$</sub>  single crystals”. In: *Physical Review B* 54.13 (1996), p. 9499.
- [Ann04] James F Annett. *Superconductivity, superfluids and condensates*. Vol. 5. Oxford University Press, 2004.
- [Lor+06] R Lortz et al. “Thermal fluctuations and vortex melting in the Nb<sub>3</sub>Sn superconductor from high resolution specific heat measurements”. In: *Physical Review B* 74.10 (2006), p. 104502.
- [Zei09] Eberhard Zeidler. “The Basic Strategy of Extracting Finite Information from Infinities—Ariadne’s Thread in Renormalization Theory”. In: *Quantum Field Theory II: Quantum Electrodynamics: A Bridge between Mathematicians and Physicists* (2009), pp. 47–113.
- [Tim12] Carsten Timm. “Theory of superconductivity”. In: *Institute of theoretical Physics Dresden* (2012).
- [Ton19] Andrea Tononi. “Zero-temperature equation of state of a two-dimensional bosonic quantum fluid with finite-range interaction”. In: *Condensed Matter* 4.1 (2019), p. 20.