DIPARTIMENTO
DI INGEGNERIA
INDUSTRIALE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova – Dipartimento di Ingegneria Industriale

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

Propagazione delle onde di gravità applicate alla superficie del mare

Tutor universitario: Prof. Francesco Picano

Laureando: *Matteo Berti*

Matricola 2001806

Padova, anno 2022/2023

FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA: LE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES & PRIME IPOTESI

Equazione di continuità

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Conservazione della quantità di moto

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot \overline{\overline{\Sigma}}}$$

Ipotesi:

- **Trascureremo la viscosità del fluido e gli effetti dati dalle tensioni superficiali, consideriamo poi la densità costante.**
- **Trascureremo gli effetti del movimento dell'aria sopra l'acqua, questo è possibile perché il rapporto tra le rispettive densità è molto minore di uno e risulta corretto nel caso di un'onda già formata.**
- **Assumiamo infine che il campo di velocità nell'acqua sia irrotazionale. Questa ipotesi risulta ragionevole soprattutto alla luce dei risultati del teorema di Kelvin le cui condizioni sono rispettate.**

$\Delta\phi = 0$ *equazione di continuità*

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-H} = 0$$ *condizione sul flusso indisturbato*

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} \cong \frac{\partial\eta}{\partial t}$$ *condizione cinematica*

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_{z=0} \cong -g\eta$$ *condizione dinamica con Bernoulli*

$\eta(x, t = 0) = \mathrm{a} \cdot \cos(\mathrm{K}x)$ *condizione sulla forma*

FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA: LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA

$\phi(x,z,t) = f(z)\,sin(Kx - \omega(K)t)$ **Forma generale della funzione potenziale**

Sostituendo nel Laplaciano otteniamo: $\left(\frac{d^2 f}{dz^2} - K^2 f\right) sin(Kx - \omega(K)t) = 0 \longrightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} - K^2 f = 0$

Che ha come soluzione generale: $f(z) = Ae^{Kz} + Be^{-Kz}$

Dalle condizione sul flusso indisturbato e dalla condizione cinematica ricaviamo:

$$A = \frac{a\omega}{K(1 - e^{-2KH})} \quad e \quad B = \frac{a\omega e^{-2KH}}{K(1 - e^{-2KH})}$$

Trovato quindi il potenziale possiamo trovare anche le forme per le velocità delle particelle:

$$\begin{cases} u = a\omega \frac{cosh(K(z+H))}{sinh(KH)} cos(Kx - \omega t) \\ w = a\omega \frac{sinh(K(z+H))}{sinh(KH)} sin(Kx - \omega t) \end{cases}$$

PRIMI RISULTATI

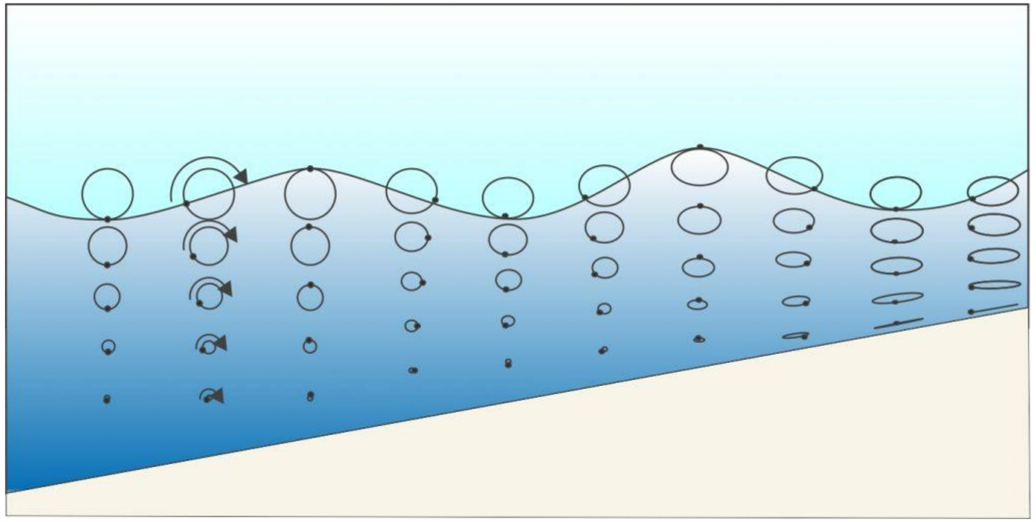
Attraverso la condizione data dall'equazione di Bernoulli possiamo trovarci le espressioni di due parametri e della pressione così definita:

$$\omega = \sqrt{gK tanh(KH)} \qquad c = \frac{\omega}{K} = \sqrt{\frac{g}{K} tanh(KH)} \qquad p' = \rho g z + p = \rho \frac{a\omega^2}{K} \frac{\cosh\big(K(z+H)\big)}{\sinh(KH)} \cos(Kx - \omega t)$$

Di particolare importante la dipendenza della velocità di propagazione **c** dal numero d'onda **K**, questo si riflette in naturale nel fenomeno della dispersione di onde di diversa lunghezza.

Analizzando poi, con l'approssimazione data dalla serie di Taylor, il movimento delle particelle troviamo la seguente equazione per la traiettoria:

$$\frac{[(\overline{OP})_x]^2}{\left[a \frac{cosh\big(K(z_O + H)\big)}{sinh(KH)}\right]^2} + \frac{[(\overline{OP})_z]^2}{\left[a \frac{sinh\big(K(z_O + H)\big)}{sinh(KH)}\right]^2} = 1$$



Le particelle liquide si muoveranno quindi in traiettorie chiuse sempre attorno allo stesso punto, la forma varia a seconda della profondità ***H***

L'APPROSSIMAZIONE PER ACQUE PROFONDE

Ora è sicuramente interessante andare a valutare come si comportano, i parametri che abbiamo introdotto, in situazioni in cui il rapporto lunghezza d'onda su profondità è di molto inferiore o di molto maggiore all'unità.

Partiamo quindi considerando il rapporto $\frac{\lambda}{H} \ll 1$, questa condizione è detta di acque profonde.

Per la velocità di fase si possono immediatamente vedere gli effetti di questa ulteriore approssimazione, infatti prendendo l'espressione generale precedentemente trovata per questa grandezza possiamo andare a trascurare il termine iperbolico. Infatti:

$$\tanh(KH) = \tanh\left(\frac{2\pi}{\lambda}H\right) = \tanh\left(\frac{H}{\lambda}\right) \approx 1 \;\; per \frac{\lambda}{H} \ll 1$$

Nella pratica avremmo poi che la tangente iperbolica risulta 0.96403 già per profondità appena doppie rispetto alla lunghezza d'onda. L'approssimazione risulta quindi ben posta. In condizioni di acque profonde considereremo quindi la velocità di fase come:

$$c = \sqrt{\frac{g}{K}}$$

Infine, per valori di $\mathrm{KH} > 2$, le orbite indotte dal fenomeno ondoso non saranno più ellittiche ma andranno a collassare in orbite circolari tanto più il valore di KH aumenta.

L'APPROSSIMAZIONE PER ACQUE BASSE

Il limite opposto rispetto a quello visto precedentemente, ovvero $\frac{\lambda}{H} \gg 1$, ci approssima la situazione di acque basse, ed è una condizione altrettanto interessante da studiare.

In questo caso, per la velocità di fase, avremo che il termine iperbolico non si elide bensì si riduce approssimativamente al suo argomento. L'espressione per c in condizioni di acque basse risulta quindi:

$$c = \sqrt{\frac{g}{K} tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)} = \sqrt{gH}$$

In queste condizioni notiamo che la velocità di propagazione perde la sua dipendenza dal numero d'onda K, perde così anche il suo carattere dispersivo, le onde per cui questa approssimazione è valida non tenderanno quindi a formare dei treni d'onda ma si propagheranno con la stessa rapidità.

La pressione invece risulta: $p' = \rho g a cos(Kx - \omega t) = \rho g \eta$

Quindi, diversamente dalla condizione di acque profonde, la variazione di pressione è indipendente dalla profondità a cui è misurata ed è invece pari all'aumento del carico idrostatico dovuto all'elevazione della colonna d'acqua descritta dalla funzione η. In acque basse si avrà perciò un campo di pressione completamente idrostatico.

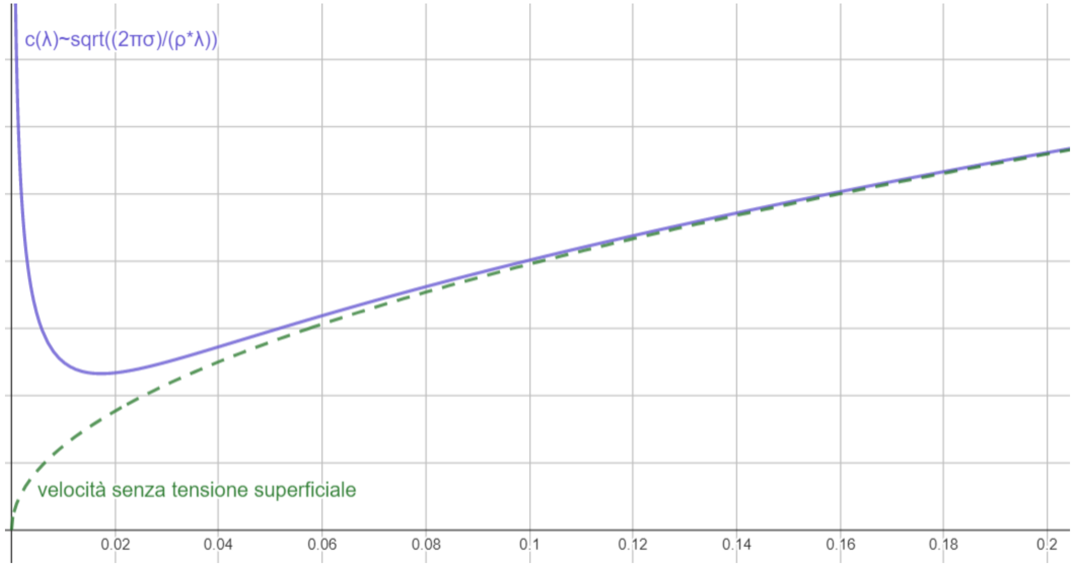
Per valutare gli effetti della tensione superficiale sul comportamento delle onde dovremmo far decadere la condizione dinamica posta inizialmente a favore di una nuova condizione che tenda conto dell'effettiva tensione superficiale del liquido: $\boldsymbol{\sigma}$, questa nuova condizione è espressa dalla seguente equazione:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - g\eta$$

Risolvendo quindi il problema otteniamo:

$$\omega = \sqrt{K\left(g + \frac{\sigma K^2}{\rho}\right) tanh(KH)}$$

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{K} + \frac{\sigma K}{\rho}\right) tanh(KH)} = \sqrt{\left(\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho}\right) tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}$$



ONDE ED ENERGIA

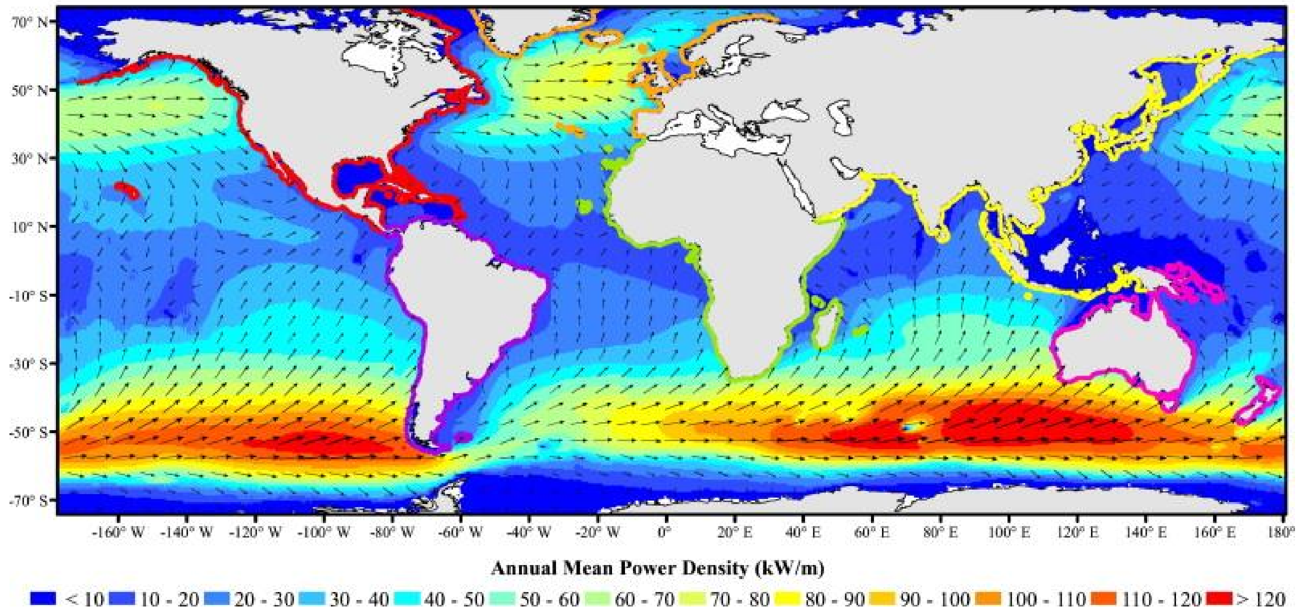
Soffermiamoci ora sull'energetica dell'onda per calcolare quanta energia è in grado di trasportare un onda di questo tipo. Avremo sia un contributo di tipo cinetico sia un contributo di tipo gravitazionale, si può inoltre dimostrare che i due termini sono equivalenti, perciò:

$$E_k = E_P = \frac{\rho g\, \overline{\eta^2}}{2} \qquad \text{ed} \qquad E = E_p + E_k = \rho g\, \overline{\eta^2} = \frac{1}{2}\rho g\, a^2$$

Consideriamo quindi la trasmissione di energia dovuta ad una singola componente sinusoidale di numero d'onda K. Il flusso di energia attraverso il piano verticale $x = 0$ è pari al lavoro di pressione svolto dal fluido nella regione $x < 0$ sulla regione $x > 0$. La media nel tempo di questo flusso, che chiameremo EF, calcolata per unità di lunghezza di una cresta, è:

$$EF = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\int_{-H}^{0} pudz\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\rho g\, a^2\left[\frac{c}{2}\left(1 + \frac{2KH}{\sinh(2KH)}\right)\right] = \frac{1}{2}\rho g\, a^2 v_g$$



GRUPPI D'ONDA

Per studiare i comportamenti di onde viste come sovrapposizione di diverse armoniche consideriamo variabili l'ampiezza d'onda e fase. Si impongono a controllo di una variazione ''lenta'':

$$\frac{1}{a}\nabla a \ll K \quad e \quad \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial t} \ll \omega$$

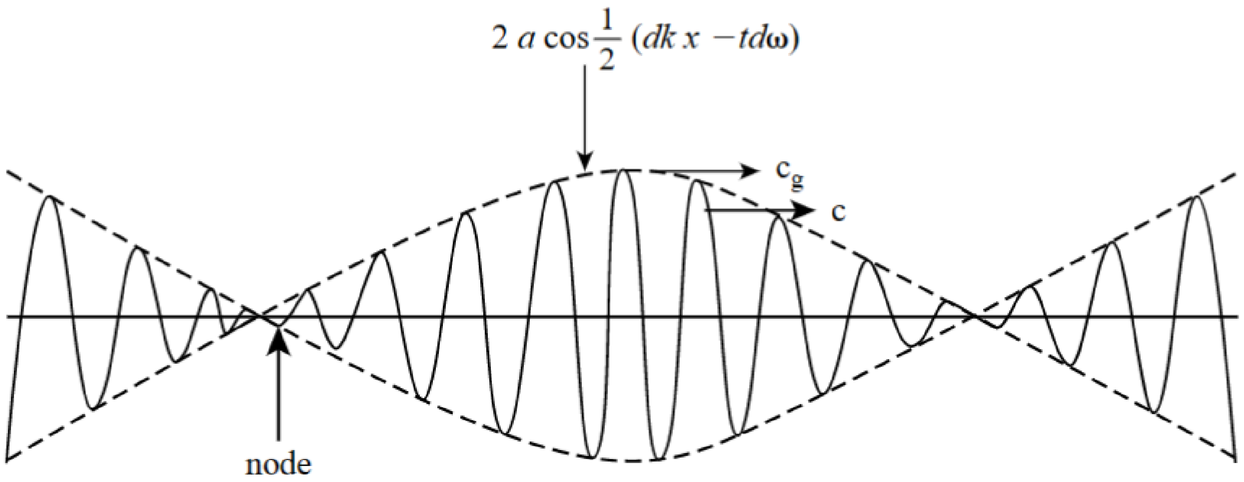
Dal momento che anche la fase varia molto lentamente possiamo definire una frequenza angolare e un numero d'onda locali attraverso le espressioni:

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad e \quad \vec{K} = \nabla\theta$$

Le quali, assumendo che la fase sia doppiamente differenziabile nel tempo e nello spazio, implicano:

$$\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \nabla\omega = 0$$

Comunemente conosciuta come equazione di conservazione delle creste d'onda.



GRUPPI D'ONDA

Introduciamo la lagrangiana media dell'onda e linearizziamola al primo grado:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\varepsilon\left\{\frac{\left(\omega - \vec{K}\cdot\overrightarrow{U_o}\right)^2}{g\vec{K}T} - 1\right\} - \frac{1}{2}\frac{K^2\varepsilon^2}{\rho g}\left\{\frac{9T^4 - 10T^2 + 9}{8T^4}\right\} + o(\varepsilon^3) = \frac{1}{2}\varepsilon D$$

Dove $\varepsilon = \frac{1}{2}\rho g a^2$ e $T = \tanh(KH)$ e $D = \frac{\left(\omega - \vec{K}\cdot\overrightarrow{U_o}\right)^2}{gKT} - 1$

La quale seguendo il principio variazionale ci porta a:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = 0$$

Dalla quale segue che $D = 0$ ci rappresenta la relazione di dispersione da cui, considerando $\sigma = \sqrt{gKT}$, ricaviamo:

$$\omega = \vec{K}\cdot\overrightarrow{U_o} \pm \sigma$$

Definiamo ***N*** come 'azione':

$$N = \mathcal{L}_\omega = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Si ottiene l'equazione dell'evoluzione della densità di azione:

$$\frac{\partial}{\partial t}N - \nabla\cdot\left(\overrightarrow{v_g}\,N\right) = 0$$

Dove $\overrightarrow{v_g}$ è la velocità di gruppo e risulta pari alla velocità di trasporto precedentemente introdotta, ricordiamo inoltre che:

$$\overrightarrow{v_g} = \frac{\partial\omega}{\partial K}\hat{e}_K = -\frac{D_{\vec{K}}}{D_\omega}$$

IL PROBLEMA NON LINEARE ED EFFETTI SUL FENOMENO

Oggigiorno per lo studio del problema non lineare, che tiene quindi conto dei fenomeni di dissipazione energetica dell'onda, si utilizza l'analisi spettrale introducendo lo spettro della densità di azione. Avremo:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}}\left(\nabla_{\vec{K}}\Omega N\right) - \nabla_{\vec{K}}(\nabla_{\vec{x}}\Omega N) = S$$

Dove $\Omega = \vec{K} \cdot \overrightarrow{U_o} + \sigma$, con $\sigma = \sqrt{gKtanh(KH)}$

La precedente equazione ci dice che il tasso di variazione nel tempo dello spettro della densità di azione è determinato dall'avvezione (ovvero il trasporto di una quantità o proprietà fisica da parte di un fluido a causa del suo moto di massa), dalla rifrazione (attraverso il terzo termine) e da processi fisici come possono essere la generazione di onde tramite l'azione del vento, interazioni non lineari tra le onde stesse o la dissipazione attraverso il collasso delle creste d'onda come schiuma di mare (l'azione di tutti questi processi è espressa tramite il termine S).

Questa equazione, che esprime l'evoluzione per spettri d'onde continui, è riconosciuta al giorno d'oggi come il punto di partenza dei moderni modelli per le onde marine.

Attraverso l'analisi di questa equazione possiamo inoltre studiare i principali fenomeni non lineari della propagazione delle onde marine conosciuti come: **la grande propagazione circolare attorno al globo, lo shoaling, la rifrazione** e **l'interazione tra un'onda ed una corrente esterna.**

CONCLUSIONI

Lo studio dei fenomeni ondosi è un argomento estremamente interessante e più vivo che mai.
Dal punto di vista energetico sarebbe infatti estremamente redditizio sviluppare macchine in grado di ricavare efficacemente energia dalle onde, le quali, dal canto loro, si dimostrano essere uno dei sistemi di trasporto di energia più efficienti in natura.

È di grande importanza inoltre per la capacità di prevedere i fenomeni ondosi che andranno ad abbattersi sulle coste. Qui in Veneto ci si può fare immediatamente un'idea dell'utilità di queste previsioni per la gestione che si fa a Venezia del MOSE per contrastare fenomeni come le sesse e le alte maree.

FINE