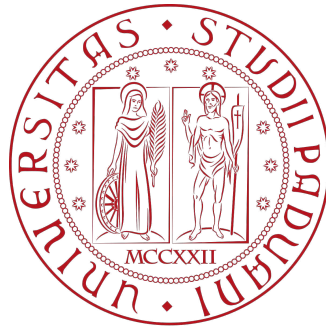


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA**

**DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN SCIENZE STATISTICHE**



**TESI MAGISTRALE**

**Rischio di Mercato e Stima Congiunta  
di VaR ed ES: un'analisi empirica  
sull'EURSTOXX600**

**Relatore:** PROF. MASSIMILIANO CAPORIN

DIPARTIMENTO DI SCIENZE STATISTICHE

**Laureando:** LUCA AMADEI

**Matricola N°:** 2050613

**ANNO ACCADEMICO 2022/2023**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>1 Misure per il rischio di mercato</b>	<b>5</b>
1.1 Introduzione . . . . .	5
1.2 Proprietà delle misure di rischio . . . . .	6
1.3 Value-at-Risk . . . . .	7
1.3.1 Metodi di stima . . . . .	8
1.3.2 Sfide e limitazioni . . . . .	9
1.4 Expected Shortfall . . . . .	10
1.4.1 Proprietà e limiti . . . . .	11
1.5 Elicetabilità e stima congiunta . . . . .	12
<b>2 Regressione Quantilica in ambito finanziario</b>	<b>14</b>
2.1 QR per il Value-at-risk . . . . .	15
2.2 QR per l'Expected Shortfall . . . . .	16
<b>3 Distribuzione AL per la stima condizionata di VaR ed ES</b>	<b>19</b>
3.1 Distribuzione Asimmetrica Laplaciana . . . . .	19
3.2 Stima congiunta di VaR ed ES . . . . .	21
3.3 Specificazione delle misure di rischio . . . . .	23
3.3.1 Componente Value at Risk . . . . .	23
3.3.2 Componente Expected Shortfall . . . . .	27
<b>4 Backtesting</b>	<b>29</b>
4.1 Valutazione delle previsioni di VaR ed ES . . . . .	29

4.1.1	Approcci già esistenti per la validazione . . . . .	30
4.1.2	Backtesting per la stima congiunta di VaR ed ES . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Analisi Empirica delle previsioni di VaR ed ES</b>	<b>36</b>
5.1	Dati e analisi esplorativa . . . . .	36
5.2	Stima del VaR sistemico . . . . .	40
5.2.1	Barclays - Banks . . . . .	40
5.2.2	St.James Place - Finance . . . . .	44
5.2.3	Swiss Re - Insurance . . . . .	46
5.2.4	Reti per il rischio sistemico . . . . .	49
5.3	Stima congiunta di VaR ed ES . . . . .	53
5.4	Backtesting . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>69</b>
A.1	Scelta del parametro di penalità LASSO specifico dell'azienda $\lambda_i$	69
A.2	Sigle titoli EUROSTOXX600 . . . . .	70



# Introduzione

Negli ultimi anni, il concetto di rischio finanziario ha subito un'accelerazione significativa, emergendo come tema di crescente rilevanza. Questa evoluzione è stata guidata da una serie di fattori che hanno contribuito a rendere il rischio finanziario un aspetto centrale nelle decisioni economiche e nell'ambito degli investimenti. La complessità delle dinamiche economiche globali, l'aumento della volatilità dei mercati e l'innovazione finanziaria hanno permesso di creare un ambiente in cui la gestione del rischio finanziario è diventata fondamentale ed inevitabile.

Il rischio è una componente essenziale del settore finanziario e si riferisce alla probabilità che gli investimenti o le decisioni finanziarie producano risultati diversi da quelli previsti, portando a conseguenze negative per gli investitori, le istituzioni o l'economia nel suo insieme.

Nel corso della storia, le regole che governano la gestione dei rischi hanno subito diverse modifiche in linea con quanto stabilito dal Comitato di Basilea, fondato nel 1974 con l'obiettivo di generare la stabilità finanziaria e di sviluppare linee guida per le istituzioni.

L'obiettivo principale delle modifiche apportate dal Comitato di Basilea è stato quello di migliorare la protezione dai rischi e di promuovere una maggiore solidità nel sistema bancario globale. Queste modifiche sono state spesso in risposta a eventi finanziari significativi, come la crisi del 2008, che hanno evidenziato la necessità di regole migliori e più solide per la gestione del rischio. Oltre ai requisiti di capitale, il Comitato di Basilea ha affrontato anche altri aspetti critici della gestione del rischio, come la liquidità bancaria e la gestione della leva finanziaria.

I rischi finanziari possono essere raggruppati nelle seguenti categorie:

- **Rischio di Mercato:** si riferisce alla possibilità che eventi o fattori

macroeconomici influenzino negativamente l'intero mercato finanziario o una classe di attività, portando a perdite generalizzate per gli investitori.

- **Rischio di Credito:** dovuto all'impossibilità di un debitore di adempiere ai suoi obblighi di pagamento nei confronti di un creditore, come ad esempio il rimborso di un prestito o il pagamento di interessi su un'obbligazione.
- **Rischio Operativo:** è associato a perdite finanziarie o danni causati da processi interni difettosi, errori umani, problemi tecnologici, inefficienze operative o eventi esterni imprevedibili.

Nel presente elaborato, ci concentreremo sull'importante tema della gestione del rischio di mercato, un ambito che richiede un'analisi approfondita, l'utilizzo di strumenti di valutazione sofisticati e l'adozione di un approccio strategico basato su una solida comprensione delle dinamiche finanziarie.

Questo preambolo costituisce un fondamentale punto di partenza per approfondire il concetto di rischio di mercato, riconoscendone il ruolo cruciale nell'orientare le decisioni finanziarie.

Un cambiamento chiave è, sicuramente, l'accordo di Basilea I nel 1996 che ha definito l'introduzione di metodi più precisi per la misurazione dei rischi di mercato e per la definizione del capitale necessario da detenere. In particolare, sono stati proposti due approcci: l'approccio standard, che stabilisce criteri uniformi per la misurazione dei rischi di mercato, e l'approccio basato su modelli interni, che consente alle istituzioni finanziarie di utilizzare modelli personalizzati per calcolare il proprio rischio di mercato.

All'interno di queste nuove direttive, si è individuato il Value-at-Risk (VaR) come una misura chiave per quantificare il rischio di mercato. Questa misura ha il vantaggio di fornire una stima numerica del rischio, consentendo alle istituzioni finanziarie di prendere decisioni migliori sulla gestione e sulla copertura di tali rischi.

Nel primo capitolo di questo elaborato, esploreremo le due principali misure

utilizzate per calcolare il rischio di mercato: il VAR (Value at Risk) e l'ES (Expected Shortfall). Durante questa analisi, metteremo in evidenza sia gli aspetti positivi che le limitazioni di queste misure, cercando di chiarire l'idea che sta alla base della stima congiunta.

Nel secondo capitolo, approfondiremo il concetto e l'importanza di regressione quantilica nell'ambito finanziario. Questa tecnica statistica ci permetterà di analizzare in modo più dettagliato e approfondito la relazione tra i diversi titoli, superando i limiti dei metodi tradizionali.

Nel terzo capitolo, esploreremo la rilevante connessione tra la regressione quantilica e la distribuzione asimmetrica Laplaciana seguendo quanto evidenziato da Koenker e Machado (1999). Questa relazione risulta di fondamentale importanza in fase di definizione della funzione per la stima congiunta di VaR ed ES. Successivamente, nel quarto e quinto capitolo, verranno presentate le funzioni utilizzate per effettuare il backtest delle misure di rischio e verrà condotta un'analisi empirica utilizzando i titoli dell'EUROSTOXX600 del settore finanziario. Questa analisi ci consentirà di applicare i concetti e le tecniche discusse nei capitoli precedenti a dati di mercato reali, consentendoci di valutare la loro effettiva utilità e applicabilità nel mondo finanziario.



# Capitolo 1

## Misure per il rischio di mercato

### 1.1 Introduzione

Le misure per il rischio di mercato sono strumenti essenziali nell'analisi e nella gestione delle possibili fluttuazioni di valore degli asset finanziari legate a fattori macroeconomici. Queste misure consentono agli investitori, alle istituzioni finanziarie e alle aziende di valutare quanto un'attività o un portafoglio possa essere influenzato da eventi di mercato, come variazioni dei tassi di interesse, volatilità dei prezzi delle azioni e cambiamenti nei tassi di cambio.

Tra le misure principali vi sono il Value at Risk (VaR), che stima la perdita massima attesa in un determinato intervallo di tempo con un certo livello di confidenza, e l'Expected Shortfall (ES), che fornisce una stima dell'entità media delle perdite al di là del VaR. Questi metodi quantitativi consentono di valutare la potenziale esposizione al rischio di mercato e di prendere decisioni informate sulla gestione del portafoglio.

Nel proseguo di questo capitolo, ci dedicheremo ad un'analisi approfondita dei vantaggi e delle sfide legate alle due principali misure di rischio; sarà possibile offrire una prospettiva più completa, in grado di affrontare le debolezze individuali di ciascuna misura. La stima congiunta (Taylor (2019)) delle misure di rischio mira a sfruttare i punti di forza di entrambe, superando le limitazioni e fornendo una valutazione più accurata e affidabile del rischio complessivo.

## 1.2 Proprietà delle misure di rischio

Una misura di rischio  $\rho(a)$  è coerente (Artzner et al. (1999)) se soddisfa alcune proprietà matematiche che la rendono una misura affidabile della quantità di rischio associata a un portafoglio o a un'attività finanziaria:

- **Invarianza traslazionale:** se  $\mathcal{R}$  è una variabile aleatoria (es. il valore di un investimento rischioso), e  $\mathcal{B}$  è un investimento privo di rischio allora:

$$\rho(\mathcal{R} + \mathcal{B}) = \rho(\mathcal{R}) - \mathcal{B} \quad (1.2.1)$$

quindi introducendo una componente priva di rischio in un portafoglio, la misura di rischio si riduce proporzionalmente al peso della componente priva di rischio.

- **Sub-additività:** la misura di rischio di un portafoglio di strumenti finanziari rischiosi non può essere superiore alla somma delle misure di rischio valutate sui singoli strumenti finanziari che lo compongono:

$$\rho(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \leq \rho(\mathcal{R}_1) + \rho(\mathcal{R}_2) \quad (1.2.2)$$

il che implica che la diversificazione deve comportare una riduzione del rischio (o al limite non comportare incrementi).

- **Omogeneità positiva:** all'aumentare della quota di ricchezza investita in uno strumento finanziario rischioso, la misura di rischio deve aumentare:

$$\rho(\delta\mathcal{R}) = \delta\rho(\mathcal{R}), \quad \delta > 0 \quad (1.2.3)$$

o in altre parole, il rischio è proporzionale al valore di una posizione (di un investimento).

- **Monotonicità:** dati due investimenti rischiosi, se i rendimenti dell'investimento 1 sono sempre superiori ai rendimenti dell'investimento 2 allora

il rischio di 2 deve essere superiore al rischio di 1:

$$r(\mathcal{R}_1) \geq r(\mathcal{R}_2) \implies \rho(\mathcal{R}_1) \leq \rho(\mathcal{R}_2) \quad (1.2.4)$$

- Inoltre, le misure di rischio devono anche essere normalizzate, il che implica che in assenza di investimento rischioso il rischio deve essere nullo  $\rho(0) = 0$ .

### 1.3 Value-at-Risk

Il Value at Risk (VaR) è stato sviluppato nei primi anni '90 nell'ambito finanziario per fornire alle istituzioni un singolo valore in grado di incorporare rapidamente e facilmente le informazioni sul rischio di un portafoglio o di un singolo titolo (Hull (2012)). Inoltre, come anticipato in precedenza, il Comitato di Basilea per la Supervisione Bancaria (1996) presso la Banca dei Regolamenti Internazionali utilizza il VaR per richiedere alle istituzioni finanziarie, come banche e società di investimento, di rispettare requisiti di capitale per coprire i rischi di mercato che incorrono a seguito delle loro normali operazioni.

Tuttavia, se il rischio sottostante non è stimato correttamente, questi requisiti possono portare le istituzioni finanziarie a sovrastimare (o sottostimare) i loro rischi di mercato e di conseguenza a mantenere livelli di capitale eccessivamente alti (bassi). La facilità di calcolo e la possibilità di valutarne l'accuratezza tramite backtest rendono il Value-at-Risk (VaR) lo strumento maggiormente utilizzato per gestire il rischio finanziario.

Il VaR è definito come la perdita massima nella quale si può incorrere con un dato livello di confidenza ed un determinato orizzonte temporale; per un dato portafoglio di strumenti finanziari con rendimento  $r_{t,h}$  in un orizzonte di

h giorni a partire dal giorno t il VaR è pari a:

$$\int_{-\infty}^{VaR(\alpha)} f(r_{t,h}) dr_{t,h} = \alpha \quad (1.3.1)$$

### 1.3.1 Metodi di stima

L'aspetto di particolare interesse riguarda la comprensione della distribuzione prevista dei rendimenti per un periodo di  $h$  giorni nel futuro. L'obiettivo principale è prevedere i rischi utilizzando un livello di confidenza più o meno conservativo: a livelli più elevati (misurati in termini assoluti o di perdite) corrisponde la necessità di detenere maggiori risorse liquide al fine di mitigare eventuali rischi di mercato. Questa maggiore disponibilità di risorse liquide potrebbe portare a vincoli di liquidità, in quanto tali risorse non potrebbero essere impegnate in investimenti o altre attività. Da quando il Value at Risk (VaR) è stato introdotto come strumento di valutazione del rischio di mercato, sono emersi diversi approcci che sono stati proposti e adottati. La loro classificazione può variare e può non sempre essere coerente tra le diverse proposte (McNeil, Frey e Embrechts (2015)):

- **Metodo Parametrico:** si basa sull'assunzione che i rendimenti seguano una distribuzione specifica, di solito una distribuzione normale o una distribuzione t di Student.
- **Metodi Monte Carlo:** che si basano sulla simulazione; questi metodi ricorrono spesso ad un mapping dei rendimenti rispetto ad un insieme di fattori di rischio sui quali viene costruito un modello; il modello viene stimato ed utilizzato per simulare l'evoluzione dei fattori di rischio, e da questi si risale alle simulazioni per i rendimenti, dalle quali si determina il VaR.
- **Metodi di Simulazione storica:** il Value-at-Risk viene stimato sulla base di quantili empirici (statistiche d'ordine) di rendimenti storici, o tramite stime kernel della densità dei rendimenti.

- **Metodi relativi al variance-covariance approach:** tramite l'assunzione di normalità dei dati (che sappiamo non essere realistica) ed il ricorso a metodi unconditional o conditional per la stima dei parametri (es. modelli GARCH o il modello RiskMetrics); in questo gruppo si trovano metodi parametrici che caratterizzano la distribuzione e la dinamica di parametri di tale distribuzione o di alcuni suoi momenti.

### 1.3.2 Sfide e limitazioni

Il Value-at-Risk è una misura coerente solo se le variabili casuali sottostanti gli investimenti o strumenti finanziari che si considerano hanno una distribuzione che appartiene alla famiglia delle distribuzioni ellittiche (es. la Normale) e se il portafoglio che stiamo considerando è lineare negli strumenti finanziari (es. un portafoglio di azioni). Se tali ipotesi sono violate, il Value-at-Risk non è più una misura coerente per il rischio.

Dunque nonostante la sua natura concettualmente semplice, la misurazione del VaR rappresenta una sfida statistica complessa e, finora, nessuna delle metodologie sviluppate ha fornito soluzioni appaganti. Il VaR, essendo essenzialmente un particolare quantile dei futuri valori del portafoglio, condizionato alle informazioni attuali, è soggetto alla variazione nel tempo della distribuzione dei rendimenti del portafoglio. Di conseguenza, la vera difficoltà risiede nel trovare un modello adeguato per affrontare quantili condizionali in continua evoluzione.

Nella figura sottostante viene evidenziata l'importante criticità del VaR: fornisce solo informazioni riguardo al limite massimo che si prevede di superare con una determinata probabilità e non offre dettagli sulle eventuali eccedenze oltre il quantile.

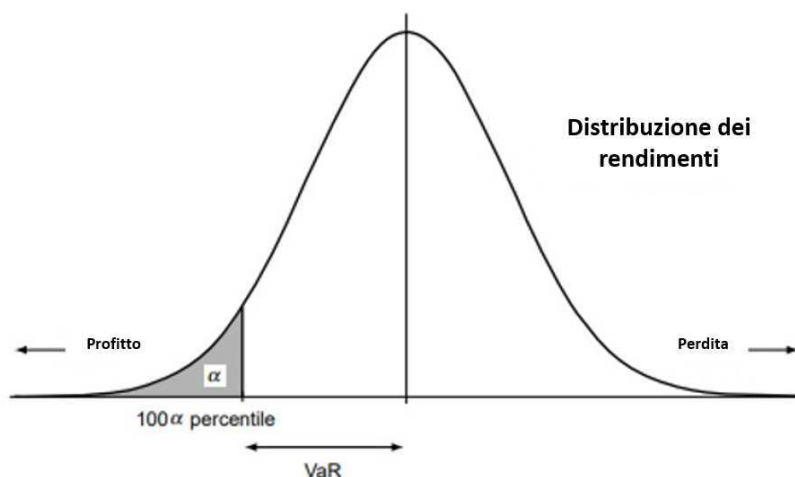


Figura 1.1: Visualizzazione grafica del VaR

L'incapacità di catturare il rischio di coda ha portato all'adozione di un'altra misura di rischio: l'Expected Shortfall, un pilastro fondamentale per valutare e gestire il rischio finanziario in contesti complessi e in continua evoluzione; la sua rapida adozione negli ultimi anni testimonia la sua crescente importanza.

## 1.4 Expected Shortfall

L'Expected Shortfall (ES) è definito come l'aspettativa condizionale delle eccedenze oltre il VaR, fornisce una misura più completa del rischio ma il calcolo risulta molto più complicato in quanto è una misura di rischio di coda.

La specificazione per il calcolo dell'Expected Shortfall risulta essere la seguente:

$$ES_{\alpha,h} = E[r_{t+h} \mid r_{t+h} \leq \text{VaR}(\alpha, h)] = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \text{VaR}(\tau, h) d\tau \quad (1.4.1)$$

L'ES è in grado di catturare il rischio nelle code estreme della distribuzione dei rendimenti, affrontando situazioni di coda che potrebbero non essere completamente comprese dal VaR.

### 1.4.1 Proprietà e limiti

A differenza di quanto specificato per il VaR, l'Expected Shortfall è invece una misura coerente per il rischio verso la quale si stanno spostando le istituzioni finanziarie. La definizione e il calcolo analitico dell'ES generano implicitamente la condizione di *no crossing* tra VaR ed ES, una proprietà che stabilisce che l'Expected Shortfall non dovrebbe mai superare il VaR quando entrambi sono calcolati allo stesso livello di confidenza. In altre parole, l'ES dovrebbe essere sempre inferiore o uguale al VaR.

Questa condizione ha senso dal punto di vista intuitivo: l'Expected Shortfall misura la perdita media quando si supera il VaR, quindi non dovrebbe mai essere maggiore del VaR stesso, che rappresenta la perdita massima in un intervallo di confidenza.

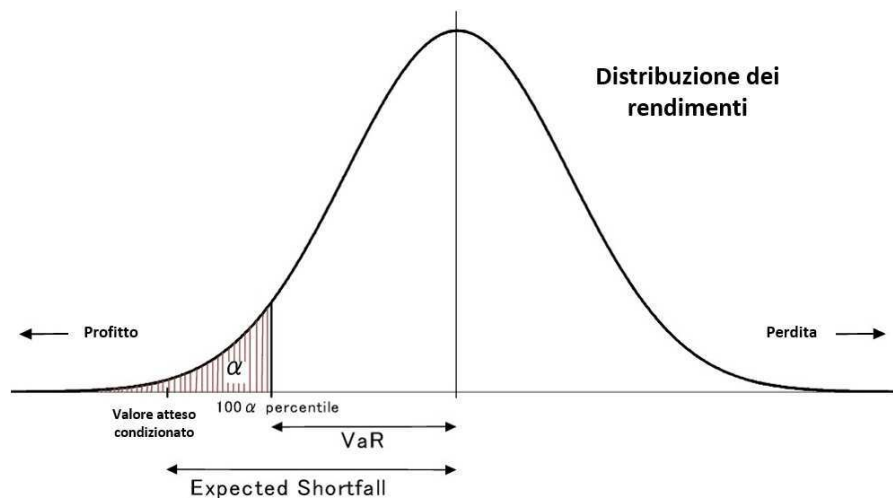


Figura 1.2: Esempio di no crossing tra VaR ed ES

Assicurando questa condizione, si garantisce che l'Expected Shortfall sia sempre coerente con il VaR e che i due indicatori di rischio siano allineati in modo logico. Ciò contribuisce a fornire una valutazione più affidabile e accurata del rischio finanziario nell'ambito della gestione degli investimenti e delle attività aziendali.

Il passaggio dall'utilizzo del Value at Risk (VaR) all'Expected Shortfall (ES) ha rappresentato un passo avanti nell'affinamento delle misure di gestione del

rischio finanziario. Sebbene l'ES apporti miglioramenti sostanziali nel modo in cui valutiamo il rischio nelle distribuzioni di coda, è fondamentale considerare i problemi associati al suo utilizzo nella fase di backtest. Questi problemi emergono dall'approccio complessivo e dalla natura non lineare dell'ES, che possono rendere il processo di validazione più complesso.

Sebbene l'ES superi le limitazioni del VaR nel catturare il rischio nelle code estreme delle distribuzioni, la sua sensibilità alle fluttuazioni nei rendimenti potrebbe portare a risultati meno stabili nei test storici. I backtest sono intrinsecamente basati su dati passati, che potrebbero non riflettere a pieno le dinamiche future. Inoltre, l'ES richiede una stima precisa dei rendimenti nella coda, il che può portare a una maggiore incertezza nei risultati.

## 1.5 Elicitabilità e stima congiunta

Come appena illustrato, sia il Value at Risk (VaR) che l'Expected Shortfall (ES) presentano vantaggi e svantaggi. Mentre il VaR, con la sua natura semplice, trascurava alcune informazioni nel calcolo del rischio, l'ES offre un panorama più dettagliato e preciso. Tuttavia, l'ES soffre della scarsa capacità di sottoporre le sue previsioni a backtest, un aspetto interconnesso con l'importante proprietà di *elicibilità* (Nolde e Ziegel (2017)).

L'elicibilità sottintende l'esistenza di una funzione punteggio che può essere sfruttata per condurre test comparativi sui modelli. In questo contesto, il VaR soddisfa tale proprietà, poiché può essere soggetto a test per valutarne la performance. Tuttavia, l'Expected Shortfall non gode dello stesso vantaggio, in quanto manca di un metodo pratico e ben definito per essere sottoposto a test di validazione comparativa.

È da questa complessa sfida che sorge l'idea di specificare congiuntamente il VaR e l'ES utilizzando una distribuzione asimmetrica Laplaciana (AL) (Taylor (2019)), che grazie alle sue proprietà algebriche conserva l'importante attributo di elicibilità. Inoltre, l'associazione di queste due misure consente di



superare le limitazioni individuali presentate in precedenza, aprendo nuovi orizzonti nella comprensione e nella gestione del rischio finanziario.

Nelle prossime sezioni, esploreremo gli aspetti teorici e le dettagliate specificazioni riguardanti la stima congiunta di Value at Risk (VaR) ed Expected Shortfall (ES) all'interno del contesto della misura del rischio di mercato. Un aspetto fondamentale di questo metodo è la sua abilità di sfruttare un'importante relazione tra la Regressione Quantilica (QR) e la distribuzione asimmetrica Laplaciana (AL). Questa relazione offre un approccio innovativo per affrontare le sfide intrinseche all'Expected Shortfall, contribuendo a una comprensione più profonda e ad una gestione più efficace del rischio.

# Capitolo 2

## Regressione Quantilica in ambito finanziario

La regressione quantilica (QR) è essenziale nel contesto dei rendimenti finanziari per diversi motivi chiave. In primo luogo, questa tecnica statistica è robusta agli outlier, i quali sono comuni nei dati finanziari e possono distorcere le analisi. In secondo luogo, la QR modella efficacemente la variabilità dei mercati finanziari, fornendo stime precise dei quantili e mostrando come fattori specifici influenzano i rendimenti in diversi scenari di mercato.

Inoltre, aiuta nella gestione del rischio, consentendo agli investitori di valutare il rischio associato alle loro decisioni e di adottare strategie di copertura mirate. Può anche essere utilizzata per analizzare le performance finanziarie a vari livelli di rischio, permettendo agli investitori di valutare come i loro portafogli si comportano in condizioni di mercato diverse.

Questi aspetti rendono la regressione quantilica una metodologia flessibile e affidabile per comprendere, gestire e prevedere i rendimenti finanziari in situazioni complesse e volatili. Nel prosieguo del capitolo, verranno illustrati i concetti di regressione quantilica (QR) legati alle due misure di rischio di mercato. Questo approfondimento consentirà di comprendere le principali specificazioni della QR, offrendo così una prospettiva più dettagliata sulle applicazioni pratiche nell'ambito finanziario.

## 2.1 QR per il Value-at-risk

Nel contesto dell'analisi del Value at Risk (VaR) tramite la regressione quantilica, i concetti precedentemente discussi acquistano una rilevanza particolare. Il VaR rappresenta uno specifico quantile, ovvero un punto nella distribuzione dei rendimenti finanziari che indica la massima perdita che un portafoglio o un investimento potrebbe subire. La robustezza della regressione quantilica agli outlier è cruciale quando si calcola il VaR, poiché permette di ottenere stime accurate anche quando si verificano eventi estremi e comprendere le possibili perdite nei momenti critici del mercato.

L'analisi delle covariate all'interno della regressione quantilica nel contesto del VaR consente di identificare e comprendere meglio i fattori che influenzano i rischi finanziari, fornendo così un quadro completo e dettagliato per la gestione del rischio nelle istituzioni finanziarie.

La regressione quantilica si basa sulla minimizzazione della funzione di perdita che misura la discrepanza tra i quantili stimati e i rendimenti osservati:

$$\min \sum_{t=1}^n (y_t - Q_t) (\alpha - I(y_t \leq Q_t)) \quad (2.1.1)$$

Di seguito vengono proposti diversi approcci alla Quantile Regression nel contesto del Value-at-Risk che risultano essere di possibile utilizzo in relazione alle caratteristiche delle serie dei rendimenti (Koenker (2005)):

- **Quantile Auto-Regression:** il quantile stimato dipende dai ritardi della variabile modellata:

$$Q_{r_t}(\tau) = \alpha_\tau + \phi_\tau r_{t-1} \quad (2.1.2)$$

La presenza di coefficienti  $\phi_\tau$  diversi tra quantili suggerisce che effetti non-lineari influenzino l'evoluzione dei rendimenti.

- **QR con fattori di rischio:** impiegata per esaminare come diversi fattori di rischio influenzano i livelli di VaR. Questo consente di valutare il contributo relativo di ciascun fattore nel determinare il rischio complessivo del portafoglio o dell'attività finanziaria.

$$Q_{r_t}(\tau) = \alpha_\tau + \beta'_\tau \mathbf{F}_t \quad (2.1.3)$$

- **QR in presenza di eteroschedasticità:** utili in contesti in cui si verifica la presenza di eteroschedasticità nelle serie storiche di rendimenti finanziari (i.e. gli effetti GARCH) suggerisce di inserire la dipendenza dai rendimenti al quadrato ritardati.

$$Q_{r_t}(\tau) = \alpha_\tau + \gamma_\tau r_{t-1}^2 \quad (2.1.4)$$

La presentazione delle diverse specificazioni di regressione quantilica, ognuna con un set di covariate diverso, sottolinea in modo evidente l'importanza di questa metodologia nell'analisi finanziaria. La flessibilità offerta dalla QR nell'incorporare variabili di diversa natura rivela la sua efficacia nel catturare l'eterogeneità e la complessità dei dati finanziari. Inoltre questa flessibilità permette anche una comprensione più approfondita dei fattori che influenzano i rendimenti e i rischi finanziari.

## 2.2 QR per l'Expected Shortfall

Quanto appena visto per il Value at Risk può essere esteso al contesto dell'Expected Shortfall (ES). In questo caso l'applicazione della regressione quantilica amplifica la sua importanza, consentendo una valutazione più accurata e dettagliata dei rischi finanziari in scenari complessi e volatili.

Nell'ambito dell'ES non risulta sufficiente il semplice calcolo della QR riportato per il Value-at-Risk, ma è necessario condizionarsi ai rendimenti osservati

oltre il quantile:

$$ES_t = E(y_t | y_t \leq Q_t) \quad (2.2.1)$$

Nonostante la regressione quantilica si concentri sul quantile per un livello di probabilità scelto; Bassett Jr, Koenker e Kordas (2004) hanno fornito un interessante collegamento tra la regressione quantilica e l'ES, dimostrando che l'ES può essere scritto come:

$$ES_t = E(y_t) - \frac{1}{\alpha} E((y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))) \quad (2.2.2)$$

Questa espressione può essere valutata empiricamente utilizzando la media campionaria  $\bar{y}$  di  $y_t$  e la funzione obiettivo della regressione quantilica minimizzata:

$$\hat{ES} = \bar{y} - \frac{1}{\alpha n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{Q}_t) (\alpha - I(y_t \leq \hat{Q}_t)) \quad (2.2.3)$$

Questa specificazione sembra indicare che la stima dell'ES sia un prodotto collaterale della regressione quantilica. Tuttavia quanto appena descritto produce una stima incondizionata dell'Expected Shortfall (ES), poiché l'espressione utilizzata coinvolge una media dei valori della funzione di perdita su un determinato numero di osservazioni  $n$ .

È di interesse concentrarsi sulla stima condizionata dell'ES, poiché a causa dell'eteroschedasticità dei rendimenti giornalieri è facile supporre che questa stima possa variare nel tempo.

Per risolvere questa sfida, procederemo all'introduzione della distribuzione asimmetrica Laplaciana e della relazione che presenta con la regressione quantilica nell'ottica di fornire un approccio più flessibile alla modellizzazione

condizionata del Value at Risk (VaR) e dell'Expected Shortfall (ES). Tale scelta mira a fornire un quadro più flessibile e adattabile nella modellazione condizionata di VaR ed ES per la valutazione del rischio di mercato.

# Capitolo 3

## Distribuzione AL per la stima condizionata di VaR ed ES

Nel seguente capitolo, verranno mostrate le proprietà della distribuzione asimmetrica Laplaciana (AL) e come queste risultino particolarmente utili nell'ambito finanziario. Inoltre, verrà chiarita la relazione tra la Regressione Quantilica e la distribuzione AL, mostrando come questo aspetto consenta di sviluppare una funzione per la stima congiunta del Value at Risk (VaR) e dell'Expected Shortfall (ES).

Questa funzione rappresenta uno strumento potente nella gestione del rischio finanziario, in quanto consente di comprendere meglio l'impatto degli eventi estremi e di valutare le possibili perdite in scenari particolari.

### 3.1 Distribuzione Asimmetrica Laplaciana

La distribuzione asimmetrica Laplaciana, anche nota come distribuzione *Doppia esponenziale*, è una distribuzione di probabilità che offre una modellizzazione flessibile per dati con code pesanti. Questo aspetto ne favorisce l'utilizzo in contesti in cui si verificano eventi estremi o inusuali più frequentemente di quanto prevedrebbe una distribuzione normale.

Nel contesto finanziario, la distribuzione AL si dimostra utile per modellare i rendimenti dei titoli in quanto spesso presentano code pesanti e asimmetria nella distribuzione, ciò significa che gli eventi positivi (aumenti dei prezzi o dei rendimenti) e gli eventi negativi (diminuzioni dei prezzi o dei rendimenti)

potrebbero non avere la stessa intensità o frequenza.

La funzione di densità è specificata come:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{b}\right) \quad (3.1.1)$$

La distribuzione AL è governata da due parametri:

- **Parametro di Scala ( $b$ ):** controlla la dispersione o la variazione dei dati. Un valore elevato di  $b$  indica una distribuzione più ampia e con code più pesanti, in cui eventi estremi sono più probabili. Questo parametro consente di adattare la distribuzione ai dati che mostrano una maggiore variabilità.
- **Parametro di Forma ( $\mu$ ):** rappresenta il punto in cui si trova il picco della distribuzione, regola la posizione centrale dei dati.

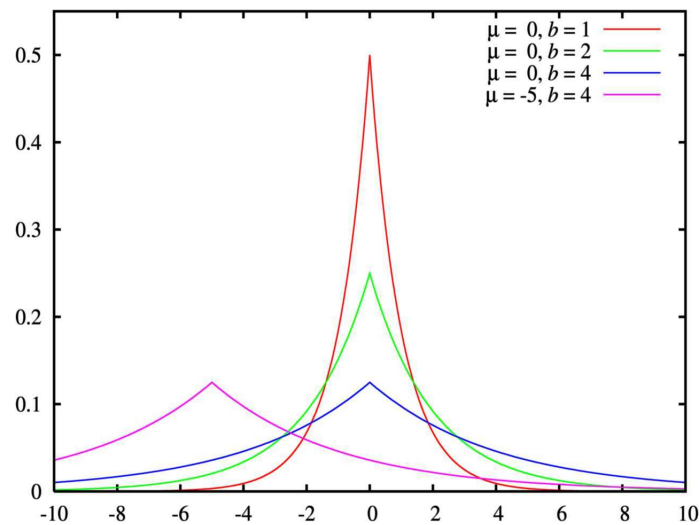


Figura 3.1: Funzione di densità AL

Il parametro di scala e di forma influenzano la forma complessiva della distribuzione asimmetrica Laplaciana. Manipolando questi parametri, è possibile adattare la distribuzione ai dati reali, tenendo conto delle caratteristiche specifiche del fenomeno preso in esame.

L'aspetto cruciale è che la distribuzione asimmetrica Laplaciana consente di



calcolare il Value at Risk (VaR) e l'Expected Shortfall (ES) tramite l'utilizzo di una distribuzione che riflette meglio le caratteristiche dei dati reali e genera stime più accurate del rischio.

## 3.2 Stima congiunta di VaR ed ES

Koenker e Machado (1999) hanno mostrato che la minimizzazione della regressione quantilica (2.1.1) è equivalente al massimo della verosimiglianza basata sulla densità asimmetrica Laplaciana (3.2.1) nella circostanza in cui si assume che i residui del modello di regressione siano distribuiti in modo laplaciano. Questa significativa connessione rappresenta un passo fondamentale nella stima congiunta di VaR ed ES, cioè nella definizione di una funzione di perdita appropriata.

In questo contesto, non si assume che le osservazioni  $y_t$  seguano una distribuzione AL, bensì fissato il parametro  $\alpha$  viene stimato soltanto un quantile.

Per cui partendo dall'espressione della massima verosimiglianza basata sulla densità AL:

$$f(y_t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\sigma} \exp(-(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))/\sigma) \quad (3.2.1)$$

- $\sigma$  è il parametro di scala.
- $Q_t$  è la posizione variabile nel tempo, che rappresenta il quantile della densità corrispondente al livello di probabilità scelto  $\alpha$ .

Lo stimatore di massima verosimiglianza per il parametro di scala risulta essere la media della funzione di perdita:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{Q}_t) (\alpha - I(y_t \leq \hat{Q}_t)) \quad (3.2.2)$$

Di conseguenza, riprendendo quanto detto in precedenza (2.2.3) è possibile riscrivere in termini di parametro di scala lo stimatore incondizionato di ES:

$$\hat{\text{ES}} = \bar{y} - \frac{\hat{\sigma}}{\alpha} \quad (3.2.3)$$

La proposta riportata nel seguente elaborato è di adattare l'espressione appena definita per la stima condizionata.

Dunque si introduce il parametro di scala  $\sigma_t$ , che potenzialmente può essere visto come l'aspettativa condizionata della funzione di perdita nel tempo. Rappresentiamo ciò nella seguente espressione:

$$\sigma_t = E_t((y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))) \quad (3.2.4)$$

Come proposto precedentemente possiamo riscrivere l'espressione (2.2.2) come ES condizionato, in funzione dei termini  $\sigma_t$  e della media  $\mu_t$  come segue:

$$\text{ES}_t = \mu_t - \frac{\sigma_t}{\alpha} \quad (3.2.5)$$

Infine riprendendo la specificazione riportata nell'espressione 3.2.1 è possibile stimare un modello per il quantile condizionato utilizzando la massima verosimiglianza basata sulla seguente densità e che tiene conto delle seguenti assunzioni:

- Parametro di scala dipendente dall'istante temporale  $\sigma_t$ :

$$f(y_t) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\sigma_t} \exp(-(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))/\sigma_t) \quad (3.2.6)$$

- ES specificato in funzione di  $\sigma_t$  e  $\mu_t$  (3.2.5):

$$f(y_t) = \left( \frac{1-\alpha}{\mu_t - \text{ES}_t} \right) \exp\left( -\frac{(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))}{\alpha(\mu_t - \text{ES}_t)} \right) \quad (3.2.7)$$

- La media condizionata di una serie di rendimenti giornalieri  $r_t$  ha valore

costante  $c$ , e definendo  $y_t = r_t - c$  si ottiene  $\mu_t = 0$ .

Si specifica la funzione di massima verosimiglianza per la stima congiunta di VaR ed ES come segue:

$$f(y_t) = \left( \frac{\alpha - 1}{ES_t} \right) \exp \left( \frac{(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))}{\alpha ES_t} \right) \quad (3.2.8)$$

Ricapitolando la proposta è di massimizzare la verosimiglianza basata su una densità AL per stimare un modello congiunto per il quantile condizionato e l'ES condizionato. Non si assume che i rendimenti seguano una distribuzione AL, ed  $\alpha$  non viene ottimizzato ma fissato all'1% o 5%.

In questa sezione, si è evidenziato il collegamento tra il parametro di scala di una densità AL e l'ES; si è suggerito che questo può essere stimato contemporaneamente con un modello di quantile condizionato utilizzando la massima verosimiglianza basata su una densità AL.

### 3.3 Specificazione delle misure di rischio

L'idea è quella di modellare contemporaneamente VaR e ES, con i parametri stimati mediante massima verosimiglianza basata sulla densità AL dell'espressione 3.2.8. Di seguito vengono riportate le diverse formulazioni sia per la componente VaR che per l'ES.

#### 3.3.1 Componente Value at Risk

Nel seguente elaborato, è stato adottato un approccio diverso rispetto alle specificazioni menzionate nel paper di Taylor (2019), nel quale si proponevano due modelli CAViaR per la stima condizionata del VaR.

Si è sviluppata una misura innovativa della rilevanza sistemica di una società quotata all'interno dell'indice Eurostoxx600, considerando esplicitamente l'interconnessione dell'azienda all'interno del settore finanziario seguendo quanto definito da Hautsch, Schaumburg e Schienle (2015). La nostra analisi si

è concentrata sulla comprensione approfondita di come le aziende siano interconnesse all'interno del mercato finanziario, andando oltre la tradizionale valutazione del rischio e aprendo nuove prospettive nella valutazione della rilevanza sistemica aziendale.

In questo senso il VaR quantifica il rischio della difficoltà finanziaria delle singole aziende e dell'intero sistema, utilizzando le code delle distribuzioni dei rendimenti degli asset corrispondenti. Di conseguenza, si basa su quantili condizionati estremi e quindi sul concetto di Value-at-Risk (VaR) condizionato. Per ciascuna azienda, identifichiamo i cosiddetti driver di rischio rilevanti (di coda) come l'insieme di fondamentali fattori macroeconomici, caratteristiche specifiche dell'azienda e effetti di propagazione del rischio da altre istituzioni che guidano il VaR dell'azienda. Inoltre, individuare con quali aziende un'istituzione è connessa e misurare la forza di queste connessioni ci consente di costruire una rete di rischio di coda per il sistema finanziario.

L'idea è modellare il VaR condizionato dell'azienda  $i$  al tempo  $t = 1, \dots, T$  come una funzione lineare dei fattori di rischio specifici dell'azienda, indicati con  $\mathbf{W}'_t$ :

$$\text{VaR}_q^i = \mathbf{W}^{(i)'} \xi_q^i \quad (3.3.1)$$

Questa relazione potrebbe essere stimata utilizzando un modello lineare corrispondente al quantile:

$$X_t^i = -\mathbf{W}_t^{(i)'} \xi_q^i + \varepsilon_t^i, \quad \text{con} \quad Q_q \left( \varepsilon_t^i \mid \mathbf{W}_t^{(i)} \right) = 0 \quad (3.3.2)$$

se conoscessimo i fattori di rischio rilevanti  $W^{(i)}$  selezionati da  $W$ , le stime di  $\hat{\xi}_q^i$  potrebbero essere ottenute dalla regressione quantilica lineare standard (Koenker e Bassett Jr (1978)) minimizzando:

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho_q \left( X_t^i + \mathbf{W}_t^{(i)'} \xi_q^i \right) \quad (3.3.3)$$

con funzione di perdita  $\rho_q(u) = u(q - I(u < 0))$  e dunque:

$$\widehat{\text{VaR}}_{q,t}^i = \mathbf{W}_t^{(i)'} \tilde{\xi}_q^i. \quad (3.3.4)$$

L'impostazione proposta nel seguente elaborato è un approccio di regressione quantilica a due fasi:

- **Step 1:** partendo da tutti i potenziali regressori  $W_t$  si selezionano i regressori più importanti dell'azienda.  $W_t$  contiene:

- il **rendimento ritardato**  $X_{t-1}^i$  specifico di i,
- le **influenze delle aziende** diverse da i,  $E_t^{-i} = (E_t^j)_{j \neq i}$ . Catturiamo queste dipendenze nella rete in termini di cosiddetti superamenti di perdita (*loss exceedances*); definiti (per l'azienda j) come  $E_t^j = X_t^j \mathbf{1}(X_t^j \leq \hat{Q}_{0.1}^j)$ , dove  $\hat{Q}_{0.1}^j$  è il quantile di campione non condizionato al 10% di  $X_j$ .

Pertanto, l'azienda j influenza il VaR dell'azienda i solo se la prima è in difficoltà.

Come già anticipato, la sfida principale è ridurre il set ad alta dimensionalità delle possibili interconnessioni tra tutte le aziende a un numero fattibile di connessioni di rischio rilevanti. Affrontiamo questo problema statisticamente come un problema di selezione dei driver di rischio di coda rilevanti per ciascuna azienda tramite l'applicazione di una regressione quantilica penalizzata LASSO.

Di conseguenza, eseguiamo una regressione quantile con penalizzazione  $l_1$  con parametro fisso  $\lambda^i$  e che minimizza la seguente formula:

$$\tilde{\xi}_q^i = \underset{\xi^i}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \rho_q(X_t^i + \mathbf{W}_t' \xi^i) + \lambda^i \frac{\sqrt{q(1-q)}}{T} \sum_{k=1}^K \hat{\sigma}_k |\xi_k^i| \quad (3.3.5)$$

con  $\rho_q(u) = u(q - I(u < 0))$ ,  $\mathbf{W}_t = (W_{t,k})_{k=1}^K$ ,  $\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (W_{t,k})^2$ .

L'idea chiave è selezionare i regressori rilevanti in base ai valori assoluti dei loro effetti marginali stimati nella regressione quantilica penalizzata. I regressori vengono eliminati se i loro coefficienti ridotti sono sufficientemente vicini a zero, vengono esclusi tutti coloro che hanno effetto marginale assoluto  $|\tilde{\xi}_q^i|$  inferiori a una soglia  $\tau = 0.0001$ , e vengono mantenuti solo i  $K(i)$  regressori rilevanti.

Pertanto, il LASSO deseleziona i regressori che contribuiscono solo in piccola misura alla variazione. Dunque la selezione dei driver di rischio rilevanti tramite LASSO dipende in modo cruciale dalla scelta del parametro di penalità specifico dell'azienda  $\lambda^i$ . Maggiore è il valore scelto di  $\lambda^i$ , più regressori vengono eliminati. Inversamente, nel caso di  $\lambda^i = 0$ , si torna alla configurazione standard della regressione quantile.

Per ciascuna istituzione, determiniamo il livello di penalità appropriato  $\lambda^i$  in modo completamente basato sui dati secondo quanto proposto in Belloni e Chernozhukov (2011). Di conseguenza, il numero e l'insieme dei fattori di rischio rilevanti vengono determinati solo dai dati, senza alcune assunzioni pre-restrittive. Per ulteriori dettagli sulla specificazione di  $\lambda^i$  è possibile consultare la sezione A.1 nell'Appendice.

- **Step 2:** Nel secondo passo, per calcolare il VaR di una singola azienda, ci baseremo sui regressori selezionati attraverso la penalizzazione Lasso nel primo passaggio, applicheremo una regressione quantilica standard (3.3.3) con una selezione iterativa del p-value per individuare i coefficienti significativi al 10% ed infine questa procedura ci consentirà di determinare la misura finale del VaR per la società in questione come in equazione:

$$\widehat{\text{VaR}}_{q,t}^i = \mathbf{W}_t^{(i)'} \tilde{\xi}_q^i. \quad (3.3.6)$$

### 3.3.2 Componente Expected Shortfall

Nel caso dell'Expected Shortfall è importante definire il modello in modo tale che non si verifichi il crossing tra le stime del VaR e dell'ES, in questo modo si assicura che le stime di rischio siano coerenti e forniscano risultati attendibili. Una possibile soluzione consiste nel definire l'ES condizionato come una funzione del VaR condizionato. Questa scelta risulta essere ragionevole in quanto ES e VaR sono influenzati dalla volatilità che cambia nel tempo.

Per la specificazione della componente Expected Shortfall vengono proposte due diverse formulazioni:

- **ES come multiplo del VaR:** la componente ES è definita come il prodotto del quantile e di un fattore moltiplicativo costante. Per garantire l'assenza di crossing, ci assicuriamo che questo fattore sia maggiore di 1 esprimendolo in termini di una funzione esponenziale di un parametro  $\gamma_0$  non vincolato:

$$ES_t = (1 + \exp(\gamma_0))Q_t \quad (3.3.7)$$

La semplicità di questa formulazione risalta subito all'occhio; tuttavia, l'espressione 3.3.7 è piuttosto restrittiva, poiché le dinamiche del VaR potrebbero non essere le stesse delle dinamiche dell'ES.

- **ES come modello AR:** una specificazione alternativa dell'ES, deriva dall'utilizzo di una formulazione autoregressiva (AR), che riduce la grandezza degli sforamenti oltre il quantile.

Anche in questo caso è necessario garantire l'assenza di crossing imponendo il seguente vincolo  $\gamma \geq 0$ .

$$ES_t = Q_t - x_t$$
$$x_t = \begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 (Q_{t-1} - y_{t-1}) + \gamma_2 x_{t-1} & \text{se } y_{t-1} \leq Q_{t-1} \\ x_{t-1} & \text{altrove} \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Nel prossimo capitolo, esploreremo le diverse funzioni punteggio utilizzate

per effettuare il backtest sulle stime ottenute mediante un approccio di stima congiunta. Confronteremo questi nuovi metodi con quelli tradizionali, evidenziandone le differenze chiave. Sarà un'opportunità per analizzare come queste nuove metodologie possono portare a una migliore comprensione e previsione dei dati rispetto ai vecchi approcci.



# Capitolo 4

## Backtesting

### 4.1 Valutazione delle previsioni di VaR ed ES

Dopo aver definito l'approccio per prevedere il Value-at-Risk e l'Expected Shortfall, è essenziale determinare se il modello selezionato offre previsioni adeguate o funziona in modo corretto. Queste procedure di verifica del modello, richieste anche dalle regolamentazioni vigenti per la misurazione e la copertura dei rischi nelle istituzioni finanziarie, sono comunemente chiamate *backtesting*.

La valutazione della qualità del modello si basa sull'uso di una serie di procedure statistiche, tra cui test e l'utilizzo di funzioni di perdita, che esaminano le prestazioni del modello in una situazione di valutazione al di fuori del campione (out-of-sample).

Nel processo di valutazione e validazione di uno o più modelli alternativi, ci concentriamo sulle previsioni del Value-at-Risk, possibilmente per vari livelli di copertura, utilizzando un periodo di campionamento che non è stato utilizzato per specificare o stimare il modello.

Dunque è fondamentale distinguere tra i dati *in-sample* (per i quali è sempre possibile stimare il VaR) e i dati *out-of-sample* su cui vengono convalidati i modelli. Questa distinzione può essere molto chiara: ad esempio, i dati da 1 a  $T$  si usano per la stima del modello, ed il periodo da  $T + 1$  a  $T + M$  si utilizza per la validazione, con i parametri stimati in  $[1, T]$  mantenuti fissi per tutto il periodo di validazione.

Nel prosieguo del capitolo, esamineremo inizialmente i principali metodi di

backtesting utilizzati per la convalida del VaR calcolato in modo tradizionale. Successivamente, presenteremo tre diverse funzioni punteggio per la stima congiunta di VaR ed ES, che verranno utilizzate successivamente nello studio empirico delle previsioni.

#### 4.1.1 Approcci già esistenti per la validazione

I test riportati di seguito risultano essere accurati e corretti solamente su misure di rischio che presentano la proprietà di elicibilità, posseduta dal VaR ma non dall'ES come anticipato ad inizio elaborato. Questa proprietà è importante in quanto consente di valutare l'accuratezza delle previsioni di rischio e di confrontare diverse metodologie di stima. Se una misura di rischio è elicibile, è possibile definire una funzione punteggio che valuta l'adeguatezza delle previsioni di tale misura.

Di seguito vengono riportati approcci per il backtesting già esistenti e validati:

- **I test classici di Kupiec (1995):** per la valutazione della copertura non condizionata; questo approccio si basa sulla sequenza degli sforamenti e sulla loro probabilità. Se consideriamo le previsioni del Value-at-Risk come  $VAR_{t+h}$  e del rendimento  $r_{t+h}$  con livello di copertura  $\alpha$  il test sarà definito nel seguente modo:

$$H_{t+h} = \begin{cases} 1 & r_{t+h} < VaR_{t+h}(r_t, \alpha) \\ 0 & r_{t+h} \geq VaR_{t+h}(r_t, \alpha) \end{cases} \quad (4.1.1)$$

La quantità  $H_t$  è anche detta Hit, e si assume sia valutata su M periodi, ovvero la dimensione dell'out-of-sample. La statistica test si basa sul rapporto di verosimiglianza:

$$LR_{UC} = 2 \log \left( (1 - \hat{p})^{M-k} \hat{p}^k \right) - 2 \log \left( (1 - \alpha)^{M-k} \alpha^k \right) \sim \chi_1^2 \quad (4.1.2)$$

con  $k$  numero di sforamenti e  $\hat{p} = k/M$ .

- **Il test di Berkowitz (2001)** che valuta la copertura tramite un approccio basato sulla lettura delle previsioni del Value-at-Risk come previsioni intervallari. Il Value-at-Risk relativo al rendimento in  $t + 1$  è la densità predittiva (cumulata) e permette di disegnare un test che sfrutta la trasformata di Roseblatt:

$$x_{t+1} = \int_{-\infty}^{r_{t+1}} \hat{f}_r(r_{t+1} | r_t) dr_{t+1} = \widehat{F}_r(r_{t+1} | r_t) \quad (4.1.3)$$

La densità stimata usando informazioni fino a  $t$  viene usata per valutare  $x_{t+1}$  una volta che  $r_{t+1}$  diventa noto. Berkowitz (2001) suggerisce di effettuare un'ulteriore trasformazione:

$$z_{t+1} = \Phi^{-1}(x_{t+1}) \Rightarrow z_{t+1} \sim \text{i.i.d. } \mathcal{N}(0, 1) \quad (4.1.4)$$

e quindi di valutare attraverso test del rapporto di verosimiglianza l'ipotesi nulla associata ad un modello correttamente specificato per  $r_{t+1}$  con distribuzione asintotica  $\chi^2$ .

- **Il test di Engle e Manganelli (2004)**, per valutare le proprietà di una trasformazione degli Hit:

$$Hit_{t+h}^* = I(r_{t+h} < VaR_{t+h}(r_t, \alpha)) - \alpha \quad (4.1.5)$$

$Hit_{t+h}^*$  assume valore  $1 - \alpha$  in presenza di uno sfornamento e  $\alpha$  altrimenti, e di conseguenza il valore atteso di  $Hit_{t+h}^*$ , se il modello per il VaR è correttamente specificato, risulta essere 0.

La proposta di Engle e Manganelli (2004) può essere rappresentata sotto forma di una regressione ausiliaria:

$$Hit_{t+1}^* = \delta_0 + \sum_{j=1}^q \delta_j Z_{t,j} + \eta_{t+1} \quad (4.1.6)$$

dove  $Z_{t,j}$  corrisponde: a ritardi di  $Hit_t$  a ritardi del VaR a ritardi dei rendimenti o dei loro quadrati, i.e. funzioni di elementi inclusi nel set informativo al tempo  $t$ , istante nel quale viene fatta la previsione che porta poi alla costruzione di  $Hit_{t+1}^*$ . Un test congiunto di significatività su tutti i coefficienti permette di valutare l'ipotesi nulla. Sotto l'ipotesi nulla,  $\eta_{t+1}$  si distribuisce come una Bernoulli con parametro  $\alpha$  e varianza  $\alpha(1 - \alpha)$ .

Se indichiamo con  $\hat{\delta}$  il vettore dei coefficienti stimati, con  $Z_t$  l'insieme delle esplicative nella regressione, e con  $Z$  la matrice delle esplicative, allora la statistica test proposta da Engle e Manganelli diventa:

$$DQ = \frac{\hat{\delta}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\delta}}{\alpha(1 - \alpha)} \rightarrow \chi_{q+1}^2 \quad (4.1.7)$$

dove  $q + 1$  è il rango di  $Z$ .

I test precedenti consentono di valutare ipotesi anche riferendosi ad un unico modello per il calcolo del Value-at-Risk, tuttavia, spesso è presente un modello di riferimento (un benchmark) rispetto al quale si punta ad un miglioramento, oppure è necessario individuare il modello da utilizzare all'interno di un insieme di alternative.

In questo caso i test sono sempre utilizzabili ma si può ricorrere anche ad un raffronto utilizzando delle funzioni di perdita, il modello migliore sarà quello con perdita minore.

È di fondamentale importanza notare, come detto in precedenza, che l'Expected Shortfall (ES) non è elicitable. Pertanto, nell'ambito della valutazione delle previsioni di ES, vengono spesso utilizzati approcci basati su test statistici specifici o confronti basati su criteri soggettivi.

Ora esploreremo come condurre il backtesting sulla stima congiunta di VaR ed ES, focalizzandoci sull'utilizzo di test non parametrici che non richiedono assunzioni specifiche sulla distribuzione dei dati e soddisfano il requisito di continuità, che è importante nel contesto della regolamentazione banca-

ria.

### 4.1.2 Backtesting per la stima congiunta di VaR ed ES

Fissler e Ziegel (2016) hanno dimostrato che la stima congiunta di VaR ed ES è elicetabile, anche se ES non è elicetabile individualmente come detto in precedenza. Le funzioni punteggio strettamente coerenti per valutare le previsioni hanno la seguente forma:

$$\begin{aligned}
 S(Q_t, ES_t, y_t) &= (I(y_t \leq Q_t) - \alpha) G_1(Q_t) - I(y_t \leq Q_t) G_1(y_t) \\
 &\quad + G_2(ES_t) (ES_t - Q_t + I(y_t \leq Q_t)) \\
 &\quad \times (Q_t - y_t) / \alpha - \zeta_2(ES_t) + a(y_t)
 \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Le funzioni  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\zeta_2$  soddisfano le seguenti condizioni:

- $G_1$  è crescente;
- $\zeta_2$  è crescente, convessa con dominio di soli valori negativi;
- $G_2 = \zeta_2'$

Queste condizioni consentono di scegliere una varietà di funzioni alternative. Di seguito vengono riportati tre esempi di  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $\zeta_2$  per la funzione punteggio.

#### **FZG score**

Il primo esempio è la funzione punteggio presentata da Fissler, Ziegel e Gneiting (2015). Assunzioni della funzione:

- $G_1(x) = x$ ;
- $G_2(x) = \exp(x)/(1 + \exp(x))$ ;
- $a = \ln(2)$  per ottenere valori positivi per la funzione punteggio.

Si riporta di seguito la distribuzione della FZG score:

$$\begin{aligned}
S(Q_t, ES_t, y_t) &= (I(y_t \leq Q_t) - \alpha) Q_t - I(y_t \leq Q_t) y_t \\
&+ \frac{ES_t}{(1 + \exp(ES_t))} (ES_t - Q_t + I(y_t \leq Q_t)) \\
&\times (Q_t - y_t) / \alpha + \ln \left( \frac{2}{1 + \exp(ES_t)} \right)
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

### AS score

Un secondo esempio è la funzione proposta da Acerbi e Székeley (2014). L'espressione risulta la seguente:

$$\begin{aligned}
S(Q_t, ES_t, y_t) &= \alpha (ES_t^2/2 + WQ_t^2/2 - Q_t ES_t) + I(y_t \leq Q_t) \\
&\times (-ES_t(y_t - Q_t) + W(y_t^2 - Q_t^2)/2)
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

$W$  è un parametro costante abbastanza grande da garantire che  $WQ_t < ES_t$  per  $\alpha < 50\%$ .

La funzione punteggio AS è una funzione di punteggio strettamente coerente che può essere ottenuta impostando:

- $G_1(x) = -(W/2)x^2$ ;
- $G_2(x) = \alpha x$ ;
- $a = 0$ .

### AL log score

L'utilizzo dell' AL log score come metrica per valutare le previsioni di VaR ed ES combina una solida fondazione teorica con un'applicazione pratica consolidata. Questo approccio offre una metodologia coerente per valutare la qualità delle previsioni di questi parametri di rischio e può essere utilizzato come uno strumento utile nella gestione del rischio finanziario.

Si considerano le seguenti assunzioni:

- $G_1 = 0$ ;
- $G_2(x) = -1/x$ ;
- $\zeta_2(x) = -\ln(-x)$ ;
- $a = 1 - \ln(1 - a)$

Dunque la funzione punteggio sarà:

$$S(Q_t, ES_t, y_t) = -\ln\left(\frac{\alpha - 1}{ES_t}\right) - \frac{(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))}{\alpha ES_t} + \frac{y_t}{ES_t} \quad (4.1.11)$$

Poiché abbiamo definito  $y_t$  con media zero, l'ultimo addendo dell'espressione risulta essere zero, e la specificazione finale è:

$$S(Q_t, ES_t, y_t) = -\ln\left(\frac{\alpha - 1}{ES_t}\right) - \frac{(y_t - Q_t)(\alpha - I(y_t \leq Q_t))}{\alpha ES_t} \quad (4.1.12)$$

Questa funzione è il negativo della log-verosimiglianza AL, per cui ci riferiamo ad essa come AL log score. Le funzioni di punteggio appena sviluppate saranno fondamentali nell'analisi empirica per valutare la precisione e l'accuratezza delle previsioni ottenute attraverso la stima congiunta di ES e VaR. Questi metodi ci consentiranno di esaminare in modo approfondito l'efficacia delle nostre previsioni nei confronti della realtà dei mercati finanziari.

Nel prossimo capitolo, metteremo in atto le teorie discusse nei capitoli precedenti, applicandole direttamente ai titoli dell'Eurostoxx600. Questa fase operativa ci darà l'opportunità di valutare l'efficacia dei nostri modelli nel contesto reale dei mercati finanziari. Questo processo non solo ci permetterà di esaminare a fondo le prestazioni dei nostri metodi, ma anche di individuare spunti per ulteriori miglioramenti.

# Capitolo 5

## Analisi Empirica delle previsioni di VaR ed ES

### 5.1 Dati e analisi esplorativa

L'Eurostoxx600 rappresenta un panorama diversificato e complesso delle principali società quotate in borsa in 17 paesi dell'Eurozona. Questo indice comprende una vasta gamma di settori economici, ciascuno con le proprie peculiarità e dinamiche. Tra le aziende incluse nell'Eurostoxx600, si trovano leader dell'industria, giganti finanziari, innovatori tecnologici e molte altre realtà economiche significative. Queste aziende operano in settori variegati, che spaziano dalla tecnologia all'energia, dai servizi finanziari alla produzione. All'interno di questo elaborato, si è scelto di concentrarsi sui titoli dell'Eurostoxx600 che rientrano nella categoria *Level 2 Sector Name* specificata come **Financials**. All'interno di questo settore, troviamo aziende che rappresentano un livello più dettagliato come:

- **Banche:** istituti di credito, banche commerciali e istituzioni finanziarie simili.
- **Assicurazioni:** compagnie assicurative, che forniscono servizi come assicurazioni vita, assicurazioni sulla proprietà e assicurazioni sanitarie.
- **Servizi Finanziari:** offrono una vasta gamma di servizi finanziari, come gestione del patrimonio, consulenza finanziaria e servizi di investimento.



Dunque, partendo dai 600 titoli inclusi nell'Eurostoxx600, si è focalizzata l'attenzione su un sottoinsieme di 109 titoli appartenenti al settore finanziario. Successivamente, si è scelto di restringere il campo di osservazione, concentrandosi sul periodo temporale che va dal 2010-01-01 al 2023-01-01.

Poiché non tutti i titoli selezionati erano quotati al 1° gennaio 2010, sono stati selezionati solo quelli che non presentavano valori mancanti (NA) nella serie storica dei prezzi, riducendone il numero ad 87.

Un ulteriore passaggio cruciale è stato il processo di pulizia dei prezzi in relazione ai giorni festivi, quando le borse erano chiuse. Questa operazione ha contribuito a creare un set di dati coerente e privo di irregolarità, garantendo che i risultati ottenuti riflettessero in modo accurato le dinamiche del mercato finanziario.

L'ultima fase ha portato alla creazione dei rendimenti percentuali giornalieri, nostre variabili di interesse, calcolati nel seguente modo:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \times 100 \quad (5.1.1)$$

In Appendice A.2 si riportano i titoli finanziari suddivisi per categoria e accompagnati dalle rispettive sigle, al solo scopo di garantire chiarezza e pulizia nei grafici di rete che verranno generati successivamente. Nel presente studio, sono stati selezionati tre titoli finanziari per condurre un'analisi empirica, uno per ciascun settore (Bancario, Finanziario e Assicurativo).

### **Barclays - Banks**

Barclays PLC [14] è un fornitore globale di servizi finanziari con sede nel Regno Unito, impegnato nei settori della banca al dettaglio, carte di credito, banca all'ingrosso, investment banking, wealth management e investment management. L'azienda opera come due divisioni: Barclays UK e Barclays International, supportate dalla sua società di servizi, Barclays Execution Services. Barclays UK comprende le sue attività di Personal Banking, Business

Banking e Barclaycard Consumer nel Regno Unito. Queste attività sono gestite dalla sua banca nel Regno Unito (Barclays Bank UK PLC) e da alcune altre entità. Barclays International include la sua banca d'investimento e aziendale, insieme alle attività di consumatori, carte e pagamenti. Queste attività sono gestite dalla sua banca (Barclays Bank PLC) e dalle sue controllate, oltre a determinate altre entità.

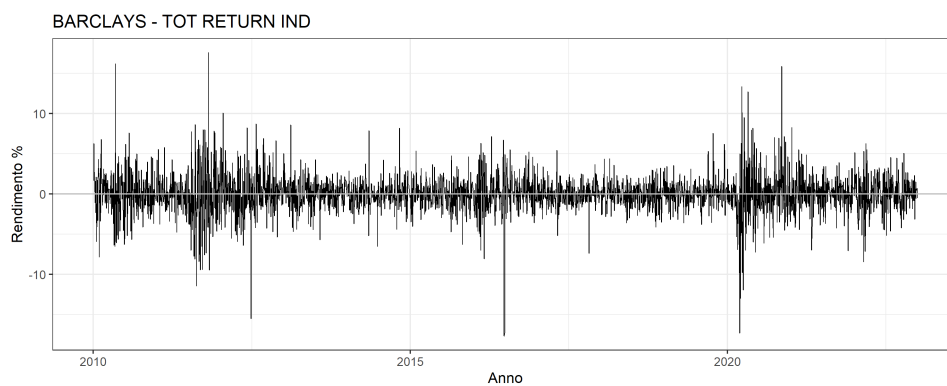


Figura 5.1: Distribuzione dei rendimenti del titolo BARCLAYS (BARC)

## St.James Place - Finance

St. James's Place plc [15] è un'azienda con sede nel Regno Unito che opera nel settore della gestione del patrimonio. L'azienda gestisce veicoli di investimento, come i fondi comuni. Investe direttamente in questi, ma anche indirettamente attraverso prodotti offerti dalle sue controllate. Il business dell'azienda è integrato verticalmente e fornisce supporto ai suoi clienti attraverso la fornitura di consulenza finanziaria e assistenza tramite la sua rete di partner, nonché soluzioni finanziarie, compresi prodotti di gestione del patrimonio come obbligazioni assicurative, pensioni, investimenti in fondi comuni e conti di risparmio (ISA). I suoi prodotti e servizi includono investimenti; pianificazione della pensione; pianificazione dell'imposta di successione; pianificazione dell'assistenza sociale; clienti privati; gestione del patrimonio intergenerazionale, che riguarda come le famiglie utilizzano il loro patrimonio collettivo per sostenersi a vicenda durante la loro vita; servizi bancari e consulenza per le

imprese.

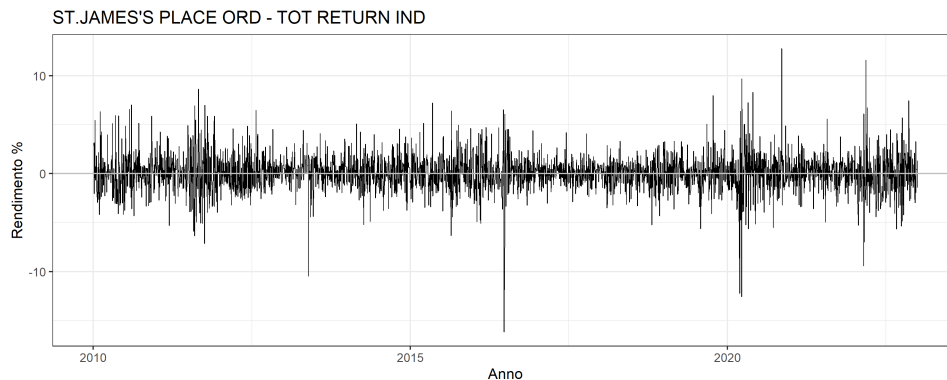


Figura 5.2: Distribuzione dei rendimenti del titolo ST. JAMES PLACE (STJ)

## Swiss Re - Insurance

Swiss Re AG [16] è un fornitore all'ingrosso con sede in Svizzera di riassicurazioni, assicurazioni e altre forme di trasferimento del rischio basate sull'assicurazione. L'azienda opera in quattro segmenti: Riassicurazioni Proprietà e Causali, Riassicurazioni Vita e Salute, Soluzioni Corporate e Life Capital. La sua Unità di Riassicurazioni genera premi e commissioni. Il segmento Corporate Solutions offre servizi a imprese di medie e grandi dimensioni, con offerte che vanno dalle tradizionali assicurazioni proprietà e causali a soluzioni personalizzate. Il segmento Admin Re fornisce soluzioni di gestione del rischio e del capitale acquisendo portafogli chiusi di assicurazioni vita e salute, intere linee di business o l'intero capitale sociale di compagnie di assicurazioni vita.

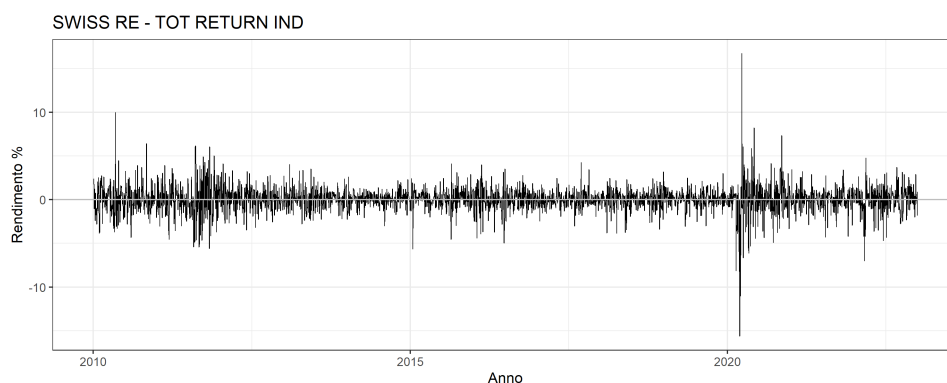


Figura 5.3: Distribuzione dei rendimenti del titolo SWISS RE (SREN)

Per garantire la massima affidabilità dei risultati, si è suddiviso il dataset in due parti distinte: una è stata utilizzata per l'analisi e la stima dei modelli (osservazioni dal 2010 al 2020) , mentre l'altra è stata riservata per la fase di verifica (osservazioni dal 2020 al 2023). Questa divisione ha generato due dataset: uno con 2486 osservazioni e l'altro con le restanti 744 osservazioni. Questo approccio ci ha permesso di valutare l'efficacia dei nostri modelli in condizioni di mercato reali, migliorando così la precisione delle previsioni e garantendo una comprensione più approfondita delle tendenze finanziarie nel lungo termine.

## 5.2 Stima del VaR sistemico

In questa sezione, si è focalizzata l'attenzione sull'analisi del rischio sistemico e della selezione dei driver di rischio rilevanti all'interno del nostro portafoglio di titoli finanziari.

Per ottenere una visione completa di queste dinamiche, abbiamo esaminato tre titoli distinti, per ciascuno dei quali sono stati calcolati due Value at Risk (VaR). Il primo VaR è stato stimato utilizzando l'intero spettro dei titoli del settore finanziario, mentre il secondo è stato calcolato considerando solo i titoli appartenenti al settore del titolo di interesse.

Attraverso questa analisi, intendiamo mettere in luce le differenze significative nei coefficienti e nei regressori rilevanti per ciascun titolo, delineando così un quadro dettagliato del rischio sistemico sia a livello di titoli finanziari singoli che nel settore bancario, finanziario e assicurativo.

### 5.2.1 Barclays - Banks

Inizialmente si è focalizzata l'attenzione sull'analisi del titolo *Barclays* all'interno di un gruppo di 87 titoli. Attraverso la procedura di regressione quantilica a due step riportata in Sezione 3.3.1, si sono identificati 13 driver

di rischio rilevanti all'interno dell'insieme di partenza.

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>BARC</b>				
(Intercept)	-0.18922	0.03486	-34.11847	< 0.0001
Ex_AEGON	-0.12291	0.03614	-3.40065	0.00068
Ex_AGS	-0.12744	0.02552	-4.99284	< 0.0001
Ex_GEN	0.07712	0.04155	1.85612	0.06356
Ex_1ACA	-0.06859	0.03387	-2.02472	0.04300
Ex_1DBK	-0.11251	0.02411	-4.66563	< 0.0001
Ex_ICP	-0.17118	0.03661	-4.67522	< 0.0001
Ex_ISP	-0.08718	0.03079	-2.83127	0.00467
<b>Ex_LLOY</b>	<b>-0.24759</b>	<b>0.04005</b>	<b>-6.18222</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
Ex_MB	-0.08485	0.03571	-2.37615	0.01757
<b>Ex_NWG</b>	<b>-0.22909</b>	<b>0.05089</b>	<b>-4.50140</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
<b>Ex_STAN</b>	<b>-0.23501</b>	<b>0.03813</b>	<b>-6.16378</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
Ex_SHB_A	-0.08587	0.03130	-2.74316	0.00613
Ex_UBSG	-0.08477	0.03953	-2.14451	0.03209

Tabella 5.1: Output QR standard per il Titolo Barclays

L'applicazione della regressione quantilica ha fornito un'analisi approfondita del comportamento del titolo Barclays nel contesto del mercato finanziario. Risulta particolarmente interessante notare che alcuni titoli, tra cui Lloyds Banking Group, Natwest Group e Standard Chartered, presentano un coefficiente in termini di valore assoluto significativamente superiore rispetto agli altri. Questa osservazione può essere giustificata dal fatto che Barclays e questi titoli appartengono al settore bancario, condividono la stessa valuta e sono quotati sulla Borsa di Londra. Questo aspetto indica l'esistenza di dinamiche sottostanti, non immediatamente visibili, che legano il titolo Barclays a questi tre titoli.

Le connessioni implicano che cambiamenti o eventi in un'area di questo settore possono influenzare anche le prestazioni degli altri titoli, creando un'interdipendenza tra di loro. Questa comprensione più profonda delle dinamiche di

mercato può fornire preziose informazioni agli investitori e agli analisti, aiutandoli a prendere decisioni più precise nel contesto del mercato finanziario. Successivamente si è deciso di restringere l'insieme dei titoli al solo settore bancario, riducendo così il set di driver di rischio possibili a 39. Lo scopo di questa selezione è mettere in luce, se presenti, eventuali differenze o similitudini rispetto alle relazioni precedentemente mostrate. Nella tabella sottostante vengono riportati i risultati ottenuti dalla procedura a due step della regressione quantilica:

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>BARC</b>				
(Intercept)	-0.17661	0.04146	-28.38255	< 0.0001
Ex_BAMI	-0.03709	0.02109	-1.75923	0.07866
Ex_BIRG	-0.04355	0.00968	-4.49680	< 0.0001
Ex_BKT	-0.09504	0.03821	-2.48743	0.01293
Ex_1SANX	0.08887	0.04180	2.12617	0.03359
Ex_CBG	-0.10894	0.04216	-2.58420	0.00982
Ex_1ACA	-0.11576	0.04340	-2.66766	0.00769
Ex_1DBK	-0.11833	0.03495	-3.38522	0.00072
Ex_1INGA	-0.10991	0.04328	-2.53930	0.01117
Ex_ISP	-0.11287	0.03003	-3.75912	0.00017
Ex_INL	-0.09101	0.03229	-2.81839	0.00486
<b>Ex_LLOY</b>	<b>-0.27095</b>	<b>0.02793</b>	<b>-9.70249</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
<b>Ex_NWG</b>	<b>-0.23172</b>	<b>0.03600</b>	<b>-6.43678</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
<b>Ex_STAN</b>	<b>-0.21745</b>	<b>0.05102</b>	<b>-4.26165</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
Ex_SHB_A	-0.08880	0.02246	-3.95354	< 0.0001

Tabella 5.2: Output QR standard per il Titolo Barclays

Dalla tabella emerge nuovamente che i tre titoli con coefficienti più elevati in termini di valore assoluto sono quelli menzionati in precedenza: Lloyds Banking Group, Natwest Group e Standard Chartered. È interessante notare che questi titoli, che abbiamo precedentemente identificato come driver di rischio rilevanti, sono ora affiancati da altri titoli bancari, precedentemente non selezionati nella Tabella 5.1 come Investec (INL) e Bank of Ireland Group

(BIRG). Questi nuovi ingressi tra i driver di rischio sottolineano ulteriormente la tendenza di relazioni tra titoli della stessa valuta, area geografica o borsa di quotazione.

Dopo aver identificato i driver di rischio rilevanti per il titolo Barclays, si è stimato il Value at Risk (VaR) come in equazione 3.3.6. Questo passaggio ci ha permesso di quantificare e valutare il potenziale rischio finanziario al titolo Barclays nel nostro insieme di verifica.

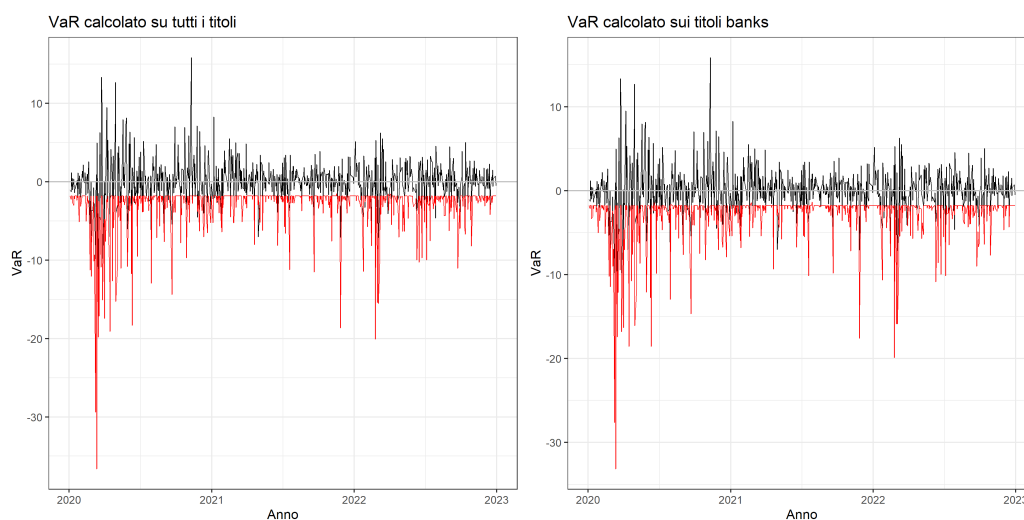


Figura 5.4: Distribuzione dei rendimenti e del VaR del titolo BARCLAYS (BARC)

Dal confronto dei grafici, emerge che le stime del Value at Risk (VaR) nei due casi sembrano essere molto simili. Questa osservazione è ulteriormente confermata dalle statistiche di base, che oltre ad indicare una notevole somiglianza mostrano come la misura stimata con l'intero insieme di titoli (2.5% di sforamenti) risulta essere più parsimoniosa del VaR stimato sui titoli bancari (3% di sforamenti).

Questo suggerisce che, nonostante le similitudini generali nelle stime del VaR, l'inclusione dei titoli finanziari potrebbe portare a una maggiore conservatività nelle previsioni dei rischi finanziari, riflettendo una prospettiva più cauta nell'analisi del potenziale impatto delle variazioni di mercato.

## 5.2.2 St.James Place - Finance

A differenza di quanto osservato per il titolo Barclays, l'analisi del titolo azionario St.James's Place (Tabella 5.3) individua 18 driver di rischio rilevanti; di particolare interesse è il fatto che gran parte di questi driver appartengono al settore bancario o assicurativo, e non al settore finanziario come il titolo stesso.

Vengono illustrati i risultati ottenuti tramite la procedura di regressione quantitativa a due step per la selezione dei driver di rischio:

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>STJ</b>				
(Intercept)	-0.2045	0.03418	-29.85072	< 0.0001
Ex_ABRDN	-0.13989	0.02631	-5.31622	< 0.0001
Ex_ADM	0.04059	0.02178	1.86390	0.06246
Ex_AVIVA	-0.09045	0.03318	-2.72569	0.00646
Ex_AZM	-0.12881	0.02393	-5.38351	< 0.0001
Ex_BALN	-0.07413	0.03178	-2.33255	0.01975
Ex_BEZ	-0.15534	0.04400	-3.53053	0.00042
Ex_CBG	-0.14238	0.05392	-2.64062	0.00833
Ex_HNR1	-0.20783	0.03196	-6.50220	< 0.0001
<b>Ex_HL</b>	<b>-0.19024</b>	<b>0.03510</b>	<b>-5.42017</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
Ex_HSX	-0.20077	0.06142	-3.26873	0.00110
Ex_ICP	-0.06028	0.02924	-2.06131	0.03938
Ex_INL	-0.09161	0.03581	-2.55836	0.01058
Ex_LGEN	-0.11344	0.01273	-8.91427	< 0.0001
Ex_LLOY	-0.07390	0.02630	-2.80931	0.00500
Ex_PHNX	-0.12393	0.02714	-4.56691	< 0.0001
Ex_SEB_A	0.09446	0.01478	6.39283	< 0.0001
Ex_SYDB	-0.09155	0.03233	-2.83176	0.00467
Ex_TRYG	-0.09563	0.01309	-7.30729	< 0.0001

Tabella 5.3: Output QR standard per il Titolo Swiss Re

Anche in questo caso St. James's Place presenta forti relazioni con titoli quotati sulla Borsa di Londra (LON), in particolare viene evidenziata una forte relazione con il titolo Hargreaves Lansdown (HL): società inglese di servizi



finanziari che vende fondi, azioni e prodotti nel retail in Gran Bretagna. Questi risultati sottolineano l'importanza e l'utilità di prendere in considerazione anche driver di rischio di settori simili, come quello bancario e assicurativo. Ampliare l'analisi dei rischi anche ad altri settori consente di ottenere una visione più completa e dettagliata del rischio sistemico complessivo. Se si concentra l'attenzione ai soli titoli appartenenti al settore finanziario, la procedura di selezione individua solamente 8 dei 24 driver possibili. È interessante osservare che, come appena indicato nella tabella 5.3 per il titolo HL, anche in questo caso il coefficiente risulta essere il più influente in termini di valore assoluto. Questo legame robusto tra i due titoli sottolinea l'importanza di Hargreaves Lansdown (HL) nel contesto finanziario e suggerisce una relazione significativa che può avere implicazioni rilevanti per gli investitori e gli analisti nel settore. Sorprendente è il fatto che il titolo 3I risulti altrettanto influente quanto il titolo HL, considerando che in precedenza non era nemmeno stato selezionato come driver di rischio.

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>STJ</b>				
(Intercept)	-0.16229	0.04464	-26.03790	< 0.0001
<b>EX_3I</b>	<b>-0.27877</b>	<b>0.03415</b>	<b>-8.16270</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
EX_ABRDN	-0.17450	0.05130	-3.40166	0.00068
EX_AZM	-0.17939	0.04505	-3.98231	< 0.0001
<b>EX_HL</b>	<b>-0.28484</b>	<b>0.08307</b>	<b>-3.42885</b>	<b>0.00062</b>
EX_IGG	-0.02996	0.01228	-2.44076	0.01473
EX_INDU_A	-0.11464	0.05038	-2.27539	0.02297
EX_ICP	-0.14949	0.03369	-4.43691	< 0.0001
EX_MB	-0.09880	0.05860	-1.68593	0.09193

Tabella 5.4: Output QR standard per il Titolo St. James Place

Per quanto riguarda la stima del Value at Risk (VaR), anche per il titolo St. James's Place, si osservano risultati molto simili a quelli precedente-

mente analizzati per Barclays. In particolare, il VaR stimato considerando tutti i titoli risulta essere nuovamente più parsimonioso (2.5% sforamenti) rispetto a quello calcolato considerando solo i titoli del settore finanziario (3% sforamenti).

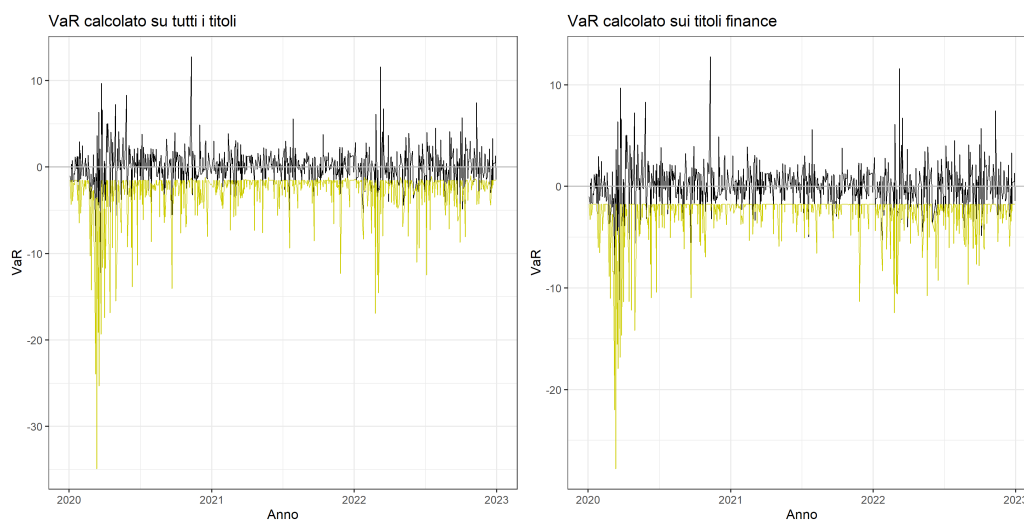


Figura 5.5: Distribuzione dei rendimenti del titolo ST.JAMES PLACE (STJ)

Questa differenza è possibile osservarla nel periodo tra il 2021 e il 2022, il VaR sinistro sembra seguire più fedelmente l'andamento dei rendimenti, indicando una maggiore precisione nella previsione del rischio finanziario.

### 5.2.3 Swiss Re - Insurance

Nel contesto della procedura in ambito assicurativo, l'analisi su Swiss Re ha rivelato prevalentemente driver di rischio provenienti da titoli dello stesso settore.

La procedura di selezione ha individuato solamente 3 titoli rilevanti non assicurativi, di cui due appartenenti al settore bancario (PEO, INL) e uno al settore finanziario (BAER), come illustrato in Tabella 5.5. È interessante notare come il rendimento ritardato del titolo risulti significativo, a differenza di quanto visto nelle due sezioni precedenti.

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>SREN</b>				
(Intercept)	-0.75810	0.02903	-26.11128	< 0.0001
SREN_1	-0.03750	0.01769	-2.11960	0.03414
Ex_AGS	-0.07314	0.02744	-2.66555	0.00774
Ex_BALN	-0.12220	0.03924	-3.11392	0.00187
Ex_BEZ	-0.06742	0.02890	-2.33279	0.01974
Ex_HNR1	-0.09880	0.01332	-7.41931	< 0.0001
Ex_HELN	-0.08351	0.02490	-3.35339	0.00081
Ex_INL	0.04253	0.02503	1.69951	0.08935
Ex_BAER	-0.07622	0.03271	-2.33004	0.01988
Ex_1MUV2	-0.30157	0.06023	-5.00676	< 0.0001
Ex_PEO	-0.05396	0.01675	-3.22246	0.00129
Ex_PRU	-0.10064	0.02646	-3.80297	< 0.0001
Ex_SCR	-0.08377	0.03760	-2.22796	0.02597
Ex_SLHN	-0.15120	0.03522	-4.29250	< 0.0001
Ex_ZURN	-0.25654	0.03290	-7.79706	< 0.0001

Tabella 5.5: Output QR standard per il Titolo Swiss Re

Di seguito vengono riportati i driver di rischio selezionati condizionandosi al settore assicurativo:

	Value	Std. Error	<i>t</i> -ratio	<i>p</i> -value
<b>SREN</b>				
(Intercept)	-0.77475	0.02833	-27.34462	< 0.0001
Ex_BALN	-0.18182	0.06647	-2.73544	0.00627
Ex_BEZ	-0.11667	0.02295	-5.08458	< 0.0001
<b>Ex_1MUV2</b>	<b>-0.33283</b>	<b>0.08745</b>	<b>-3.80568</b>	<b>&lt; 0.0001</b>
Ex_PRU	-0.14698	0.01843	-7.97495	< 0.0001
Ex_SLHN	-0.19959	0.06094	-3.27514	0.00107
Ex_TOP	-0.10539	0.05906	-1.78430	0.07450
<b>Ex_ZURN</b>	<b>-0.31184</b>	<b>0.04273</b>	<b>-7.29718</b>	<b>&lt; 0.0001</b>

Tabella 5.6: Output QR standard per il Titolo Swiss Re

Un elemento di interesse risiede nella forte relazione tra il titolo Swiss Re e altri due importanti attori del settore: Zurich Insurance Group (ZURN) e

Muenchener Ruck (1MUV2). Questa significativa connessione tra Swiss Re e Zurich Insurance può essere attribuita alla comune territorialità, essendo entrambe aziende svizzere, operanti con la stessa valuta (CHF) e sulla borsa SIX Swiss Exchange (SWX).

Per quanto riguarda Swiss Re e Muenchener Ruck, la stretta relazione può essere spiegata dalla centralità in ambito assicurativo delle due istituzioni e dalla focalizzazione di entrambe le società sulla riassicurazione, una forma assicurativa rivolta alle compagnie di assicurazione stesse. Questo legame stretto tra i titoli si inserisce nel contesto del mercato assicurativo, evidenziando l'importanza della specializzazione e del contesto geografico nelle dinamiche delle relazioni tra le aziende.

Nel contesto della stima del Value at Risk (VaR), emerge nuovamente la tendenza specificata per i due titoli precedenti: il VaR stimato su tutti i titoli risulta essere più parsimonioso (2.5% sforamenti) rispetto a quello calcolato su i titoli assicurativi (4% sforamenti).

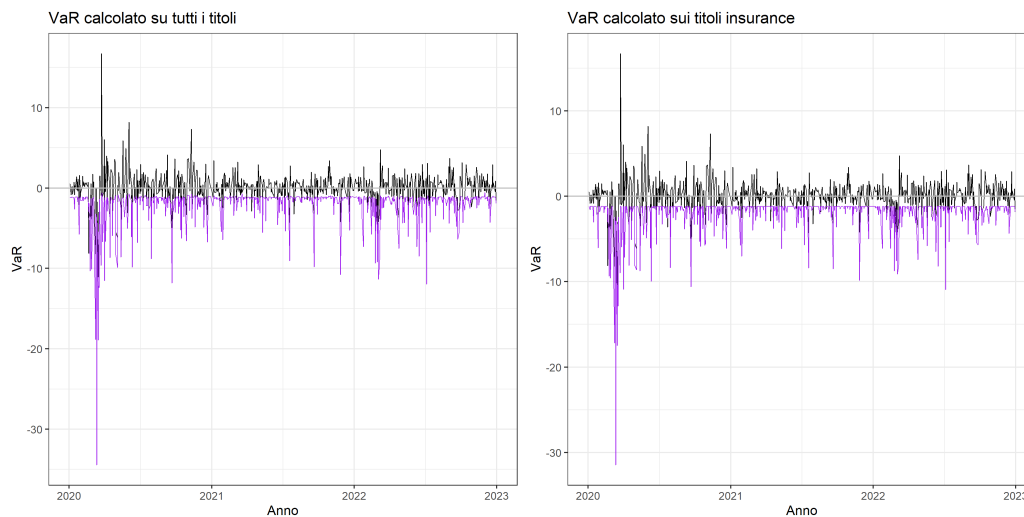


Figura 5.6: Distribuzione dei rendimenti del titolo SWISS RE (SREN)

Questo fenomeno può essere attribuito al fatto che, come nelle analisi precedenti, il numero di driver di rischio rilevanti risulta essere maggiore nel caso in cui si utilizzano tutti i titoli; ciò potrebbe aver contribuito a una maggiore accuratezza nella stima del VaR specificamente per i titoli assicurativi.

## 5.2.4 Reti per il rischio sistemico

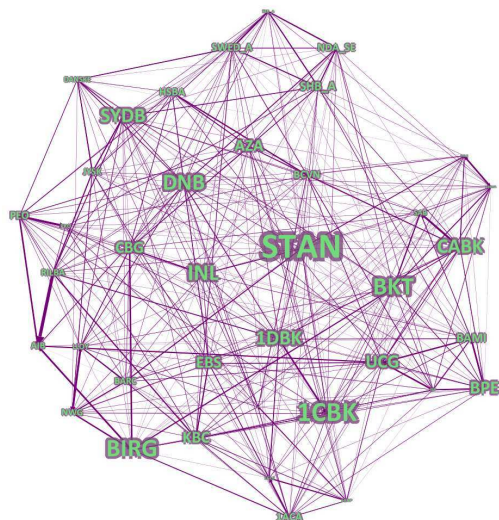
L'analisi condotta su tre titoli settoriali specifici ha rivelato una tendenza significativa: i titoli sembrano selezionare prevalentemente driver di rischio all'interno del proprio settore, ma anche al di là di esso. Questa osservazione suggerisce l'esistenza di dinamiche sottostanti che possono andare oltre i confini settoriali, influenzando le interazioni tra i singoli titoli finanziari.

Diventa ora fondamentale poter generalizzare questa tendenza osservata a tutto il portafoglio a nostra disposizione. La diversità di comportamento e le molteplici variabili in gioco richiedono un approccio più completo ed esaustivo per comprendere a pieno le complesse interconnessioni presenti nel mercato finanziario. Al fine di ottenere una visione più chiara e accurata delle relazioni tra i titoli, è stato necessario utilizzare la procedura di regressione quantilica a due step su ciascun titolo.

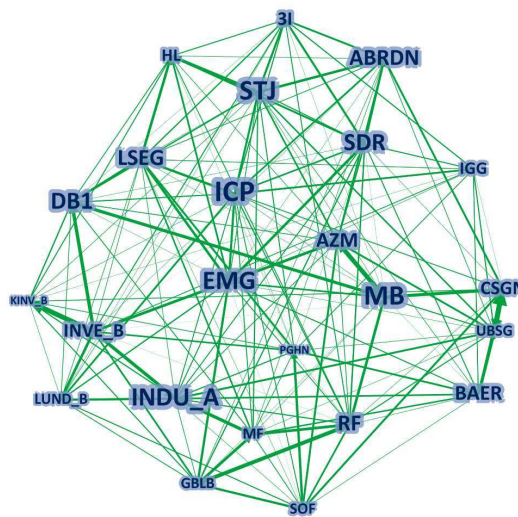
Dunque, vengono sviluppate reti per il rischio sistemico, strumenti analitici avanzati, che consentono di visualizzare e comprendere le principali e forti relazioni tra i titoli finanziari. Le reti permettono di esplorare le connessioni tra i titoli all'interno degli stessi settori, ma anche di catturare le relazioni extra-settoriali. Questo approccio ha consentito di cogliere in modo più accurato le relazioni e le influenze reciproche tra i titoli finanziari nell'Eurostoxx600, fornendo una prospettiva più completa e approfondita per orientare le decisioni di investimento e gestione del rischio.

In Figura 5.7 vengono visualizzate le interconnessioni tra i titoli nel settore bancario, finanziario e assicurativo. Queste reti sono state create utilizzando matrici di adiacenza dirette e pesate, dove il peso di ciascun collegamento è rappresentato dal valore assoluto del coefficiente ottenuto attraverso la regressione quantilica standard, come descritto nell'equazione 3.3.2. Ad esempio, se il fattore  $E_j$  viene identificato come un driver di rischio rilevante per  $VaR_i$  (Value at Risk per l'azienda  $i$ ), ciò implica un collegamento diretto da  $i$  a  $j$ . Se il fattore  $E_i$  influenza significativamente  $VaR_j$ , c'è una relazione bidirezionale, ma non necessariamente simmetrica.

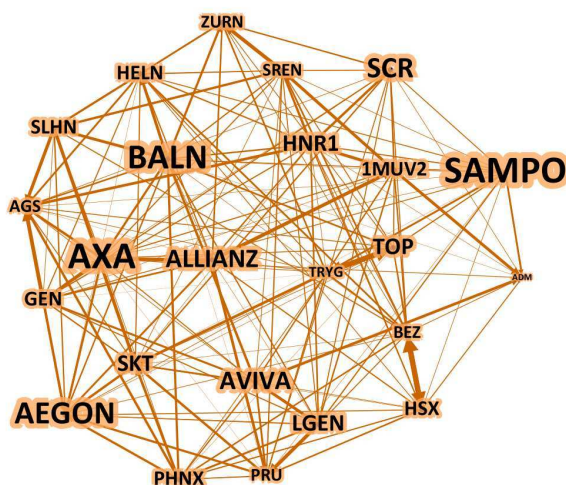
Inoltre, le etichette dei nodi sono proporzionali al grado entrante del nodo stesso, offrendo un'indicazione immediata della rilevanza di ciascun titolo nella selezione dei driver di rischio per l'intero settore.



((a)) Rete del settore bancario



((b)) Rete del settore finanziario



((c)) Rete del settore assicurativo

Figura 5.7: Reti del rischio sistemico

Le reti mostrano una densità elevata. Per tutte e tre le reti si può fare lo stesso discorso relativamente ai driver di rischio più importanti. Infatti si individuano principalmente due tipi di gruppi:

- **Gruppo 1:** comprende aziende con tante frecce in entrata e poche in uscita; quindi, tali aziende agiscono principalmente come driver di rischio

all'interno del sistema. Si tratta di istituzioni il cui fallimento potrebbe influenzare molte altre, mentre loro stesse sarebbero relativamente indenni dalle difficoltà altrui.

Tali aziende dovrebbero essere monitorate attentamente dalle autorità di vigilanza, poiché il fallimento di un'istituzione finanziaria potrebbe avere conseguenze diffuse. Un esempio è la Standard Chartered PLC (STAN) in ambito bancario, l'Intermediate Capital Group plc (ICP) nel settore finanziario e l'AXA a livello assicurativo.

- **Gruppo 2:** comprende aziende che fungono sia da riceventi che da trasmettitori di rischio, amplificando gli effetti di trasmissione del rischio in nuovi canali. A causa del loro ruolo come distributori di rischio, tali aziende sono attori chiave nei sistemi e dovrebbero essere supervisionate di conseguenza. Tendenzialmente sono aziende medio-grandi nel loro settore.

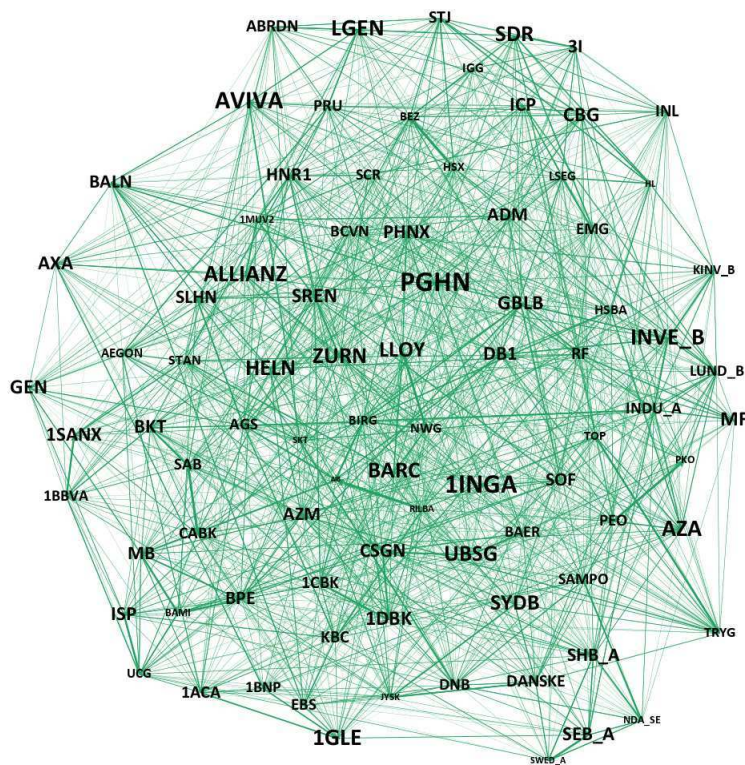


Figura 5.8: Rete del rischio sistemico dei titoli finanziari

Esplorate e comprese le dinamiche sottostanti le relazioni tra i vari titoli in diversi settori, si pone l'attenzione su la selezione dei driver di rischio principali nel macro-settore finanziario. Come evidenziato nella Figura 5.8, la rete che rappresenta le relazioni tra i diversi titoli appare densa e di difficile interpretazione.

Tuttavia, in mezzo a questa complessità, emergono chiaramente alcuni driver di rischio fondamentali nel settore finanziario globale che influenzano gli altri titoli. Tra queste spiccano aziende come ING Groep, Aviva plc e Partners Group Holding AG che sono istituzioni finanziarie leader nel proprio settore.

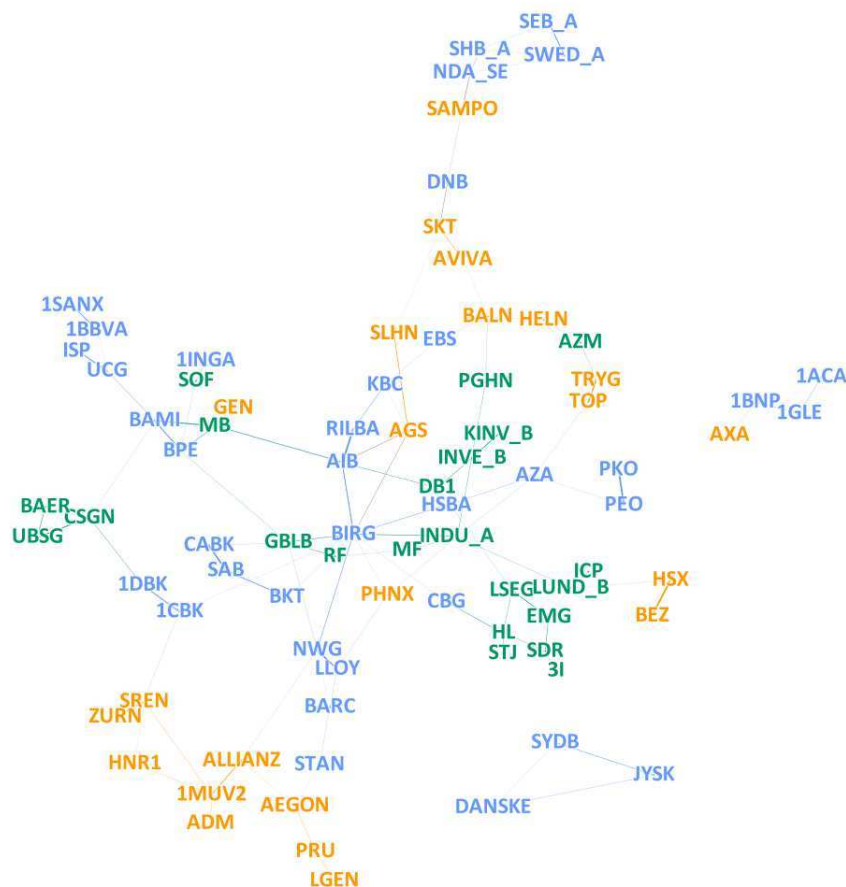


Figura 5.9: Rischio sistemico

A causa della scarsa interpretabilità, si è deciso di selezionare e raffigurare solamente il 20% dei collegamenti in ordine di grandezza, come mostrato nella Figura 5.9.



È evidente come le aziende dello stesso settore tendano a stabilire connessioni più strette tra di loro, piuttosto che allargare il raggio verso titoli di altri settori. Questa inclinazione verso l'interconnessione all'interno dello stesso settore può essere attribuita alla condivisione di sfide comuni, opportunità di mercato simili e una migliore comprensione reciproca dei rischi specifici del settore.

Compresa la complessità delle dinamiche che influenzano il rischio sistemico dei titoli finanziari dell'Eurostoxx600, diventa ora affascinante esaminare attentamente la stima congiunta delle due misure di rischio, ovvero il Value at Risk e l'Expected Shortfall.

### 5.3 Stima congiunta di VaR ed ES

Si è implementato l'approccio proposto nei Capitoli 3 e 4, che coinvolgono la massima verosimiglianza basata sulla densità AL dell'espressione 3.2.8 e le diverse funzioni punteggio per il backtesting.

Si sono considerati due modelli congiunti per VaR ed ES, ognuno dei quali coinvolge la specificazione singola del VaR come riportato nell'espressione 3.3.6, e una delle due formulazioni ES delle espressioni 3.3.7 e 3.3.8. Nelle tabelle dei nostri risultati, ci riferiremo alla formulazione ES dell'espressione 3.3.7 come *AL: ES = multiplo di VaR* e alla formulazione ES dell'espressione 3.3.8 come *AL: ES = modello AR*.

Nella procedura di ottimizzazione della massima verosimiglianza, per evitare possibili problemi di non convergenza della stima e a causa del numero relativamente grande di parametri coinvolti, si è seguito un approccio più prudente. Essendo la verosimiglianza funzione di due set di parametri, si è sviluppata una stima iterativa tra i due insiemi, ad esempio, all'iterazione M si sono stimati i parametri A condizionatamente ai parametri B stimati all'iterazione M-1, e all'iterazione M+1 si sono stimati i parametri B condizionatamente ad A stimati all'iterazione M e così di seguito. Contemporaneamente la funzione

che valuta la verosimiglianza internamente calcola il VaR e l'ES in funzione dei parametri forniti in input. I parametri sono stati stimati utilizzando la prima finestra di circa 2500 rendimenti dei titoli Barclays, St.James Place e Swiss Re.

È di interesse esaminare se le stime ottenute per i parametri dell'ES rispettano le condizioni previste per evitare il crossing tra le due misure e se la selezione dei driver di rischio e il conseguente calcolo del VaR si discostano dalla stima precedentemente sviluppata.

Di seguito riportiamo la selezione dei driver di rischio rilevanti per i titoli Barclays e St.James Place:

<b>BARC</b>			<b>STJ</b>		
Coeff	Value	Std. Error	Coeff	Value	Std.Err.
(Intercept)	-0.23672	0.02673	(Intercept)	-0.3157	0.03136
Ex_AEGON	-0.10321	0.02617	Ex_ABRDN	-0.17282	0.02134
Ex_AGS	-0.00212	0.02863	Ex_AGS	-0.07823	0.02367
Ex_GEN	-0.02394	0.02943	Ex_AVIVA	-0.12029	0.03142
Ex_1ACA	0.05989	0.02043	Ex_AZM	-0.11992	0.02962
Ex_1DBK	-0.15673	0.02759	Ex_BALN	-0.02272	0.03258
Ex_ICP	-0.23456	0.03823	Ex_EMG	-0.12463	0.03560
<b>Ex_LLOY</b>	<b>-0.32586</b>	<b>0.05728</b>	<b>Ex_HNR1</b>	<b>-0.24553</b>	<b>0.04132</b>
<b>Ex_NWG</b>	<b>-0.27432</b>	<b>0.04328</b>	<b>Ex_HL</b>	<b>-0.22384</b>	<b>0.02641</b>
Ex_PEO	-0.12467	0.2247	Ex_HSX	-0.28453	0.01953
<b>Ex_STAN</b>	<b>-0.21348</b>	<b>0.03896</b>	Ex_ICP	-0.12282	0.02485
Ex_SHB_A	-0.05673	0.02750	Ex_INL	-0.08746	0.03931
Ex_SYDB	-0.02216	0.031287	<b>Ex_LGEN</b>	<b>-0.22438</b>	<b>0.02749</b>
Ex_UBSG	-0.03919	0.02754	Ex_LLOY	-0.02324	0.03183
Ex_UCG	-0.16321	0.03048	Ex_PHNX	-0.14537	0.02653
			Ex_SDR	-0.07826	0.01874
			Ex_UBSG	-0.07453	0.02923
			Ex_MF	0.08432	0.038402

Tabella 5.7: Output AL con penalizzazione

Dalle informazioni riportate nella tabella, sembra che la penalizzazione sti-

mata attraverso il metodo della massima verosimiglianza non indichi driver di rischio significativamente diversi da quelli mostrati nella sezione precedente, anche per il titolo Swiss Re (5.8). Si osserva l'introduzione di nuovi driver di rischio, i quali però appartengono allo stesso settore di ciascun titolo finanziario. Questo conferma, ancora una volta, che titoli dello stesso settore tendono ad avere maggiori connessioni al loro interno.

<b>SREN</b>		
Coeff.	Value	Std. Error
(Intercept)	-0.58972	0.02390
Ex_AGS	-0.08367	0.03212
Ex_AZA	-0.07836	0.03263
Ex_BALN	-0.13627	0.03384
Ex_BEZ	-0.05243	0.02323
Ex_HNR1	-0.10029	0.01476
Ex_HELN	-0.07287	0.02493
Ex_ISP	0.06156	0.02873
Ex_BAER	-0.082632	0.03223
<b>Ex_1MUV2</b>	<b>-0.33298</b>	<b>0.06193</b>
Ex_PKO	-0.03981	0.03943
Ex_PRU	-0.11782	0.02932
Ex_SAMPO	-0.12998	0.02873
Ex_SCR	-0.08326	0.03394
Ex_SLHN	-0.12872	0.03409
Ex_TRYG	-0.03728	0.03829
<b>Ex_ZURN</b>	<b>-0.28398</b>	<b>0.03748</b>

Tabella 5.8: Output AL per il Titolo Swiss Re

Inoltre è evidente che i driver di rischio che hanno maggiore influenza nella stima del VaR e sono fortemente interconnessi al titolo di interesse rimangono gli stessi. Nel caso di Barclays, questi driver sono LLOY, NWG e STAN, per St. James Place sono HNR1, HL e LGEN, mentre per Swiss Re sono 1MUV2 e ZURN.

Riportiamo ora di seguito i risultati ottenuti per i parametri dell'Expected

Shortfall come multiplo del VaR:

$$\text{Titolo Barclays: } ES_t = (1 + \exp(-\frac{2.5352}{0.047}))Q_t \quad (5.3.1)$$

$$\text{Titolo St.James Place: } ES_t = (1 + \exp(-\frac{2.3726}{0.043}))Q_t \quad (5.3.2)$$

$$\text{Titolo Swiss Re: } ES_t = (1 + \exp(-\frac{2.2632}{0.029}))Q_t \quad (5.3.3)$$

Per quanto riguarda l'ES stimato come un multiplo del VaR, sono stati ottenuti coefficienti  $\gamma$  estremamente simili tra i diversi titoli. Come precedentemente indicato nella Sezione 3.3.2, per garantire il *no crossing* tra VaR ed ES, il coefficiente moltiplicativo  $(1 + \exp(\gamma))$  deve risultare positivo e maggiore di 1. Questa condizione risulta verificata, come evidenziato nei risultati riportati sopra, con il coefficiente moltiplicativo che assume valori compresi tra [1.05; 1.2].

Per questa ragione, in figura 5.10, sono presentate le serie storiche dei rendimenti, dei VaR e degli ES stimati congiuntamente per gli ultimi 3 anni. Come era prevedibile, dopo aver considerato il fattore moltiplicativo stimato, l'ES non si discosta significativamente dai valori specificati per il VaR. È interessante notare che tutti e tre i titoli presentano rendimenti e misure di rischio fortemente negative all'inizio della serie storica nell'insieme di verifica. Questi picchi di rendimento giornaliero corrispondono a marzo 2020, periodo nel quale tutti i paesi europei stavano dichiarando il lockdown nazionale. È noto che i mercati finanziari sono sensibili alle notizie e agli eventi che possono influenzare l'economia e l'andamento delle imprese. L'annuncio del lockdown ha sicuramente creato incertezza riguardo all'impatto economico sulle imprese e sulla domanda dei consumatori, il che ha portato a movimenti significativi nei prezzi dei titoli.

Inoltre, si evidenzia come il numero di eccessi oltre l'Expected Shortfall (8, 6, 8) sia diminuito notevolmente rispetto a quelli identificati in precedenza tramite il Value at Risk (18, 16, 18).

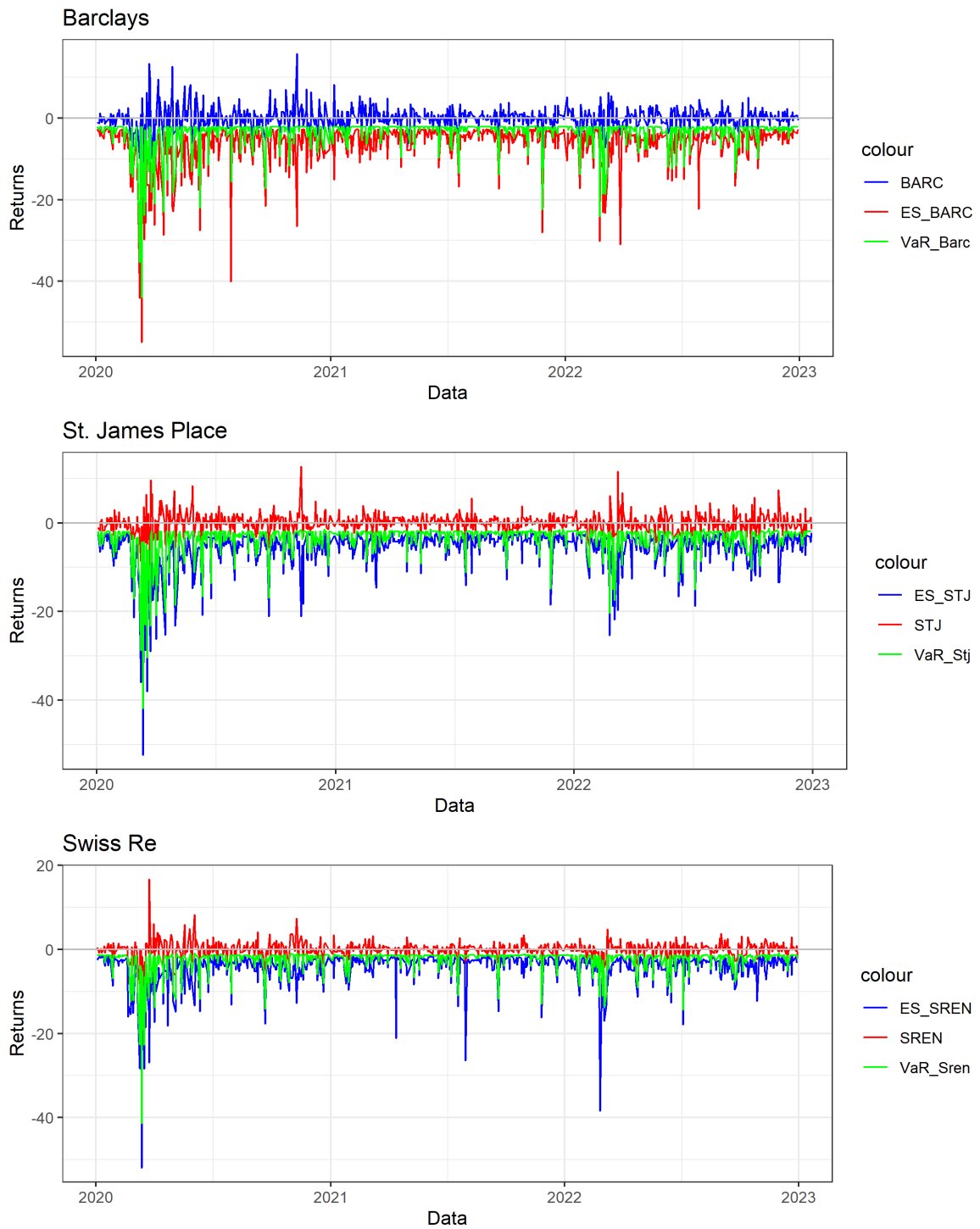


Figura 5.10: VaR ed ES moltiplicativo

Nel contesto dell'Expected Shortfall specificato come processo autoregressivo, vengono presentati i parametri stimati con i relativi errori standard all'interno delle equazioni riportate di seguito:

**Titolo Barclays:**  $ES_t = Q_t - x_t$

$$x_t = \begin{cases} 0.072532 + 0.006574(Q_{t-1} - y_{t-1}) + 0.927173x_{t-1} & \text{se } y_{t-1} \leq Q_{t-1} \\ x_{t-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.3.4)$$

**Titolo St.James Place:**  $ES_t = Q_t - x_t$

$$x_t = \begin{cases} 0.195634 + 0.009857(Q_{t-1} - y_{t-1}) + 0.894634x_{t-1} & \text{se } y_{t-1} \leq Q_{t-1} \\ x_{t-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.3.5)$$

**Titolo Swiss Re:**  $ES_t = Q_t - x_t$

$$x_t = \begin{cases} 0.057396 + 0.009382(Q_{t-1} - y_{t-1}) + 0.928328x_{t-1} & \text{se } y_{t-1} \leq Q_{t-1} \\ x_{t-1} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (5.3.6)$$

Un aspetto fondamentale da esaminare è la condizione stabilita nella Sezione 3.3.2 per verificare l'assenza di *crossing* tra le due misure di rischio. I parametri ( $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$ , e  $\gamma_2$ ) risultano essere positivi, così come lo sono sia  $x_t$  che  $Q_{t-1} - y_{t-1}$ . Quanto ottenuto garantisce, nella stima dell'Expected Shortfall ( $ES_t = Q_t - X_t$ ), l'assenza di situazioni di crossing.

Inoltre, è evidente come il coefficiente relativo alla variabile  $x_t$  si avvicini notevolmente all'unità e giochi un ruolo estremamente importante nel modello autoregressivo per tutti e tre i titoli. Come illustrato nella formula 3.3.8,  $x_t$  reagisce agli eventi di superamento del VaR, una situazione di estrema importanza nelle decisioni riguardanti la quantità di liquidità che deve essere mantenuta dall'istituzione finanziaria.

La rappresentazione grafica (5.11) di quanto appena discusso offre considerazioni immediate e chiare riguardo alle due misure di rischio.

Dalla tabella sottostante emergono le stesse considerazioni fatte in precedenza riguardo alla selezione dei driver di rischio nel caso di ES come multiplo di VaR. Ancora una volta, si osserva che i titoli tendono a scegliere driver di rischio legati al loro settore o alla stessa valuta e alla stessa borsa su cui sono quotati.

Un aspetto rilevante da notare è il cambiamento nella selezione di titoli all'interno di St.James Place, in quanto Hannover Rueck (HNR1), uno dei titoli evidenziati come maggiormente influenti per la specificazione del VaR, non risulta più incluso come riportato in Tabella 5.9.

<b>BARC</b>			<b>STJ</b>		
Coeff	Value	Std. Error	Coeff	Value	Std.Err.
(Intercept)	-0.21382	0.02475	(Intercept)	-0.32383	0.03292
Ex_AIB	-0.12339	0.02873	Ex_ABRDN	-0.18342	0.02392
Ex_AGS	-0.01827	0.02832	Ex_AGS	-0.09272	0.02837
Ex_GEN	-0.02238	0.03172	Ex_AVIVA	-0.14372	0.03328
Ex_BIRG	0.09328	0.02326	Ex_AZM	-0.10281	0.03928
Ex_1DBK	-0.13843	0.02821	Ex_BALN	-0.02930	0.02736
Ex_ICP	-0.24827	0.04271	Ex_EMG	-0.14982	0.03891
<b>Ex_LLOY</b>	<b>-0.33476</b>	<b>0.03893</b>	Ex_HSX	-0.12392	0.04342
<b>Ex_NWG</b>	<b>-0.29283</b>	<b>0.04583</b>	<b>Ex_HL</b>	<b>-0.33282</b>	<b>0.03421</b>
Ex_PEO	-0.12467	0.02247	Ex_HSX	-0.28453	0.01953
<b>Ex_STAN</b>	<b>-0.28198</b>	<b>0.03896</b>	Ex_ICP	-0.12282	0.02485
Ex_RILBA	-0.09823	0.02394	Ex_INL	-0.12834	0.04132
Ex_SHB_A	-0.09833	0.02324	<b>Ex_LGEN</b>	<b>-0.32495</b>	<b>0.02320</b>
Ex_SWED_A	-0.12938	0.02348	Ex_LSEG	-0.12921	0.033282
Ex_SYDB	-0.03383	0.02342	Ex_SAMPO	-0.13291	0.02323
Ex_UBSG	-0.12820	0.02383	Ex_SOF	-0.07826	0.02338
Ex_UCG	-0.23181	0.03209	Ex_UBSG	-0.02329	0.032189
			Ex_MF	0.020293	0.031238

Tabella 5.9: Output max. verosimiglianza AL con penalizzazione

In modo analogo, è possibile applicare le stesse considerazioni anche al titolo Swiss Re:

<b>SREN</b>		
Coeff.	Value	Std. Error
(Intercept)	-0.43819	0.02772
Ex_AGS	-0.12928	0.02983
Ex_AXA	-0.10233	0.02398
Ex_BALN	-0.13942	0.03392
Ex_BEZ	-0.03942	0.02922
Ex_HNR1	-0.11282	0.03829
Ex_HELN	-0.09287	0.04882
Ex_INL	0.09230	0.03902
Ex_BAER	-0.03829	0.02823
<b>Ex_1MUV2</b>	<b>-0.35192</b>	<b>0.05373</b>
Ex_PEO	-0.03948	0.03290
Ex_PRU	-0.12372	0.02873
Ex_SAMPO	-0.15129	0.02873
Ex_SCR	-0.03299	0.04273
Ex_SLHN	-0.17365	0.03892
Ex_TRYG	-0.09282	0.01293
<b>Ex_ZURN</b>	<b>-0.29487</b>	<b>0.03409</b>

Tabella 5.10: Output max. AL per il Titolo Swiss Re

In generale, si può concludere che la selezione dei driver di rischio ottenuta in questa sezione non si discosta in modo sostanziale da quella ottenuta nella stima del rischio sistemico nella Sezione 5.2. Tuttavia, è interessante notare che il numero di driver di rischio ritenuti rilevanti è maggiore in questo caso rispetto all'analisi precedente. Questo suggerisce una maggiore complessità nella valutazione del rischio per questa specifica configurazione, poiché un numero più ampio di fattori è stato identificato come influente.

Rispetto alla Figura 5.10, la differenza tra le previsioni del VaR e dell'ES risulta generalmente più ampia e variabile (Figura 5.11). Questo aspetto potrebbe far sembrare le previsioni dell'ES eccessivamente estreme rispetto a quelle del VaR. Per verificare quanto appena supposto, nella prossima sezione si valuterà l'accuratezza delle due misure di rischio attraverso la procedura di backtest.



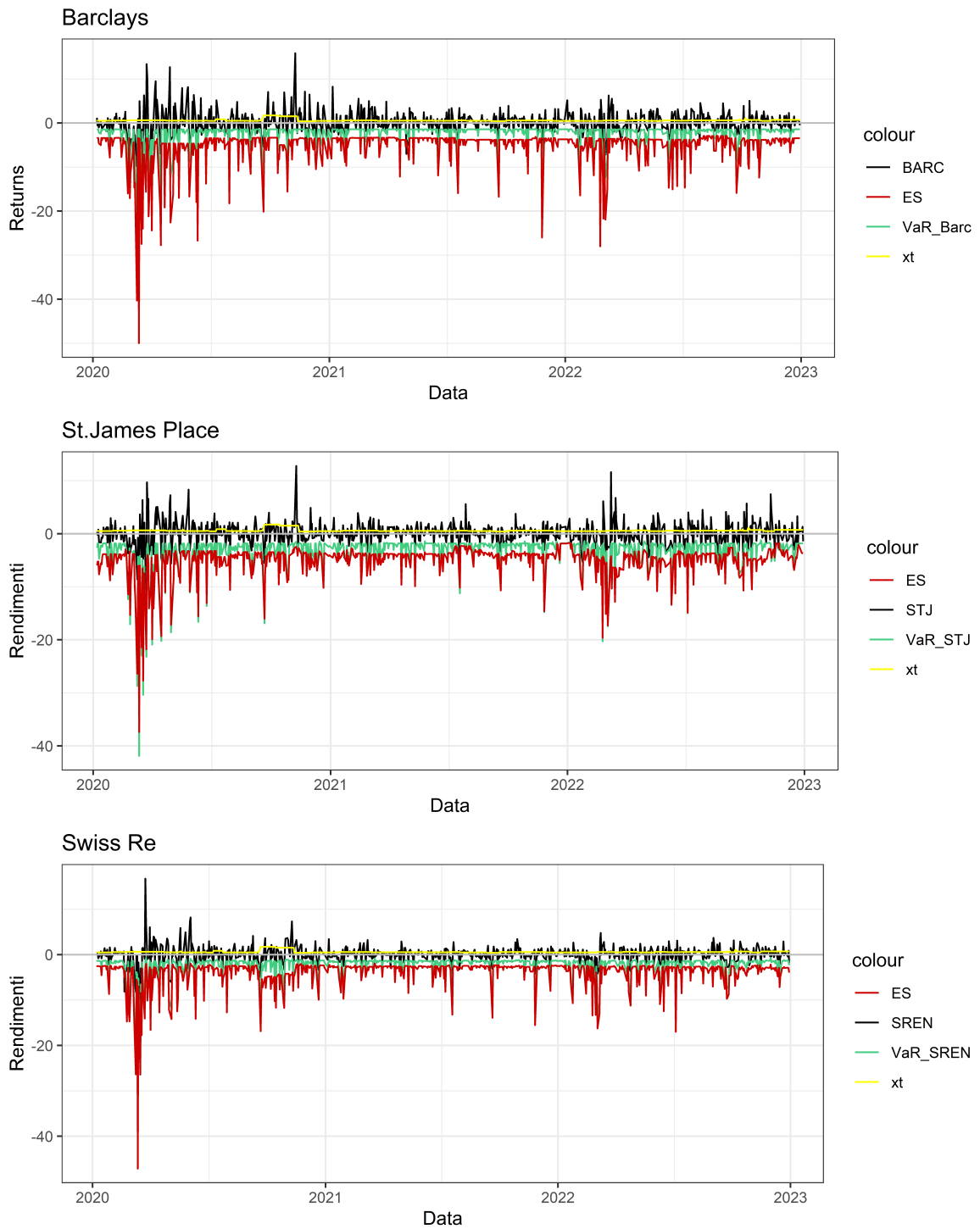


Figura 5.11: VaR ed ES autoregressivo

## 5.4 Backtesting

Nelle sezioni precedenti, si è presentata la procedura di backtesting, un processo fondamentale per valutare l'efficacia e l'affidabilità dei risultati dei modelli finanziari; sono state presentate funzioni obiettivo specifiche, che si allontanano dalle procedure di backtest classiche riportate in Sezione 4.1.1.

Per rendere il nostro confronto significativo e sensato, si sono stimati due modelli *standard* per il calcolo del rischio di mercato: il modello GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) e il modello EGARCH (Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). Prima di analizzare i risultati ottenuti attraverso il backtesting, è essenziale comprendere brevemente la natura di questi modelli.

Il modello GARCH mira a modellare la volatilità nei mercati finanziari. Questo modello assume che le variazioni di volatilità nel tempo siano eteroschedastiche, cioè cambiano nel corso del tempo. Il modello GARCH permette di prevedere la volatilità futura, rendendolo uno strumento prezioso nella gestione del rischio finanziario.

Dall'altro lato, il modello EGARCH aggiunge una dimensione interessante al concetto di eteroschedasticità condizionale. A differenza del GARCH, l'EGARCH consente di catturare gli effetti asimmetrici nella volatilità. Questo significa che il modello è in grado di distinguere tra gli impatti positivi e negativi sugli shock di volatilità, fornendo una rappresentazione più accurata delle dinamiche di mercato in risposta a eventi specifici.

Questo approccio comparativo aiuta a determinare l'accuratezza delle previsioni, ma anche a valutare se modelli avanzati, come la stima congiunta di VaR ed ES, possano effettivamente guidare decisioni più informate e migliori all'interno delle istituzioni finanziarie.

Di seguito, vengono riportate in Figura 5.12 le stime delle due misure di rischio all'1% e al 5%:

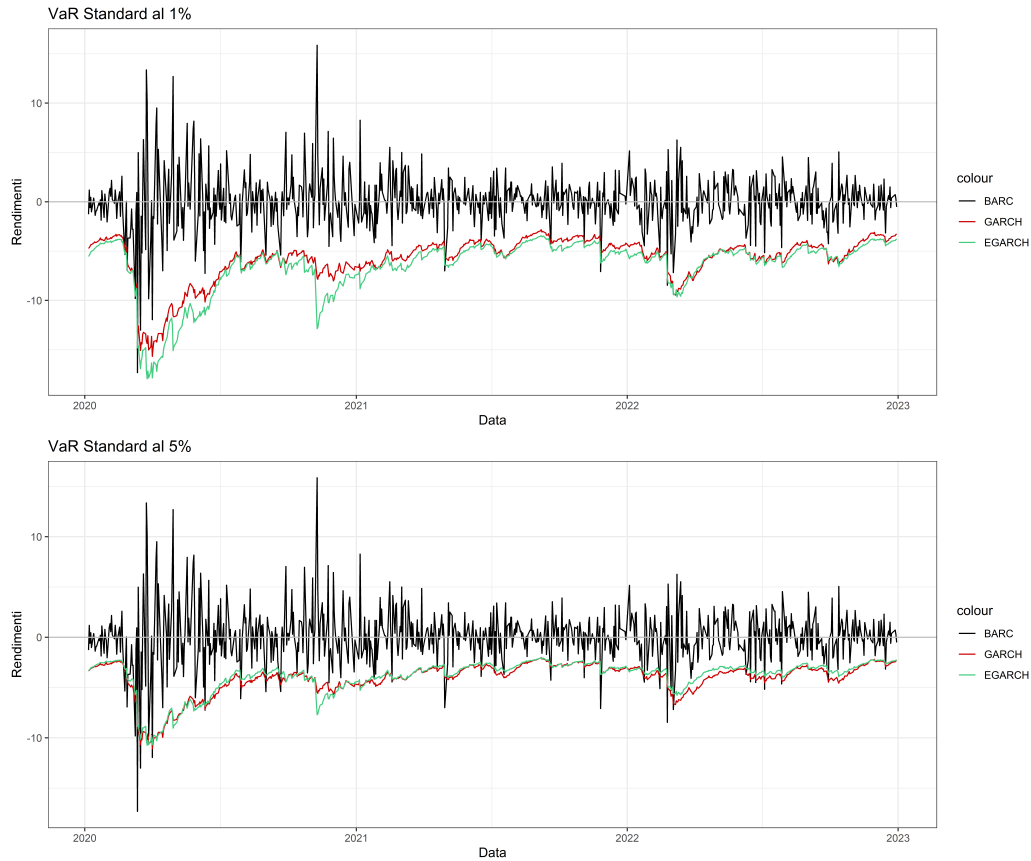


Figura 5.12: Garch e EGarch per il titolo Barclays all'1% e al 5%

Il valore stimato tramite funzione obiettivo, in termini di interpretazione, è essenzialmente uno pseudo  $R^2$  del modello presentato da Koenker e Machado (1999): valori più alti indicano una maggiore precisione.

Per riassumere le prestazioni attraverso le tre serie per ciascun livello di probabilità, si è calcolata la media geometrica dei tre punteggi dei titoli finanziari. I valori risultanti sono presentati nelle seguenti tabelle:

<b>AL Log Score 1%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	18.6	17.4	19.3	18.4
EGarch	17.7	16.5	19.0	17.7
AL: ES moltiplicativo	20.5	20.1	21.5	20.7
AL: ES autoregressivo	20.2	19.6	20.9	20.2

Tabella 5.11: Backtest con AL Log Score all'1%

<b>AL Log Score 5%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	4.5	3.3	4.9	4.2
EGarch	4.7	3.5	5.1	4.4
AL: ES moltiplicativo	5.8	4.9	6.3	5.6
AL: ES autoregressivo	5.6	4.7	5.9	5.4

Tabella 5.12: Backtest con AL Log Score al 5%

Nelle tabelle, si riporta il punteggio di abilità logaritmica AL, che si è calcolato come il rapporto tra il punteggio logaritmico AL di un metodo e quello della simulazione storica utilizzando circa 2500 osservazioni, poi da questo rapporto si è sottratto uno e moltiplicato il risultato per 100.

Nel complesso, i migliori risultati dell'AL Log Score si trovano nella penultima riga, che corrisponde al modello congiunto stimato massimizzando la verosimiglianza AL, con ES modellato come un multiplo del VaR. In ogni caso il modello GARCH e EGARCH hanno ottenuto buone prestazioni.

L'uso del punteggio logaritmico AL per valutare le previsioni del VaR e dell'ES potrebbe essere considerato come un vantaggio per i metodi stimati utilizzando la verosimiglianza logaritmica AL. Pertanto, valutiamo anche il VaR e l'ES utilizzando l'FZG Score e l'AS Score, che abbiamo descritto nella Sezione 4.1.2 e presentato nelle espressioni (4.1.9) e (4.1.10).

<b>FZG Score 1%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	33.6	25.9	37.6	32.4
EGarch	32.5	25.6	36.7	31.6
AL: ES moltiplicativo	34.9	27.8	39.7	34.1
AL: ES autoregressivo	34.1	27.4	38.7	33.4

Tabella 5.13: Backtest con FZG Score all'1%

<b>FZG Score 5%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	10.4	8.3	12.7	10.5
EGarch	10.1	8.5	11.4	10.0
AL: ES moltiplicativo	11.6	9.3	14.2	11.7
AL: ES autoregressivo	9.9	9.7	12.8	10.8

Tabella 5.14: Backtest con FZG Score al 5%

Le tabelle riportate sopra e di seguito presentano i valori dei punteggi di abilità dei quattro modelli presi in considerazione, con il metodo di riferimento nuovamente scelto come simulazione storica utilizzando 2500 osservazioni. Anche in questo caso, valori più alti sono preferibili per i punteggi di abilità.

<b>AS Score 1%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	38.9	34.8	40.4	38.0
EGarch	37.7	34.1	40.0	37.3
AL: ES moltiplicativo	41.7	35.6	45.5	40.9
AL: ES autoregressivo	40.5	32.9	43.1	38.8

Tabella 5.15: Backtest con AS Score all'1%

<b>AS Score 5%</b>				
Modello	Barclays	St. James Place	Swiss Re	Media geom.
Garch	14.6	12.8	15.7	14.4
EGarch	14.7	11.9	15.5	14.0
AL: ES moltiplicativo	17.7	14.2	18.3	16.7
AL: ES autoregressivo	17.2	13.7	17.7	16.2

Tabella 5.16: Backtest con AS Score al 5%

I risultati ottenuti sono in generale coerenti con quelli per il punteggio logaritmico AL nella Tabella 5.7, con i metodi GARCH ed EGARCH che si

comportano relativamente bene e con il modello ES multiplo del VaR che risulta essere il migliore tra tutti.

È incoraggiante constatare che i risultati ottenuti confermano come la stima congiunta di VAR ed ES si riveli il modello migliore e più preciso rispetto ai modelli standard, in tutte e tre le diverse funzioni di punteggio analizzate. Questa validazione sottolinea l'efficacia della metodologia proposta, dimostrando chiaramente che l'approccio congiunto offre non solo maggiore precisione, ma anche una capacità predittiva superiore rispetto ai tradizionali modelli standard.

# Capitolo 6

## Conclusioni

Nel corso di questo studio, si è fornito un metodo di stima delle principali misure di rischio di mercato sotto una prospettiva innovativa, allontanandosi dalla tradizionale concezione ampiamente adottata nelle istituzioni finanziarie. Questo approccio si adatta perfettamente all'andamento dinamico del settore finanziario, dove le diverse misure di rischio stanno continuamente migliorando e cambiando.

La specificazione del Value at Risk (VaR) proposta e elaborata ha consentito di sviluppare delle reti di rischio sistemico e di comprendere i collegamenti chiave tra i titoli dell'Eurostoxx600, specificamente all'interno del settore finanziario e, in modo più profondo, all'interno dei settori di appartenenza dei singoli titoli. L'analisi ha permesso di identificare quali sono i principali driver di rischio all'interno dei diversi settori e di comprendere l'importanza della regressione quantilica in ambito finanziario.

Inoltre, si è notato come i titoli che appartengono allo stesso settore o sono quotati sulla stessa borsa tendono a influenzarsi a vicenda. Questa dinamica evidenzia un'intreccio complesso tra le diverse istituzioni, suggerendo una rete intricata di relazioni finanziarie. Questo aspetto offre spunti interessanti per ulteriori indagini sul funzionamento del mercato azionario e delle interazioni tra i titoli.

In seguito, è stata introdotta e applicata una metodologia innovativa per stimare contemporaneamente l'Expected Shortfall (ES) e il Value at Risk (VaR) utilizzando la distribuzione asimmetrica Laplaciana. Questa distribuzione si è rivelata particolarmente efficace per trattare dati caratterizzati da code pe-

santi, come i rendimenti finanziari. Sono stati sviluppati due modelli di ES: l'ES moltiplicativo e l'ES autoregressivo; attraverso la procedura di backtest, tipica dell'ambito finanziario, è emerso che questa particolare stima del rischio risulta avere una maggiore precisione e affidabilità rispetto agli approcci tradizionali.

Un possibile miglioramento è esplorare nuovi modi di stimare il Value at Risk (VaR) e l'Expected Shortfall (ES) congiuntamente, in quanto potrebbe fornire una visione più chiara e precisa dei rischi coinvolti nei mercati finanziari. Ad esempio, si potrebbe stimare il VaR utilizzando la distribuzione Generalized Extreme Value (GEV) o esplorare l'Extreme Value Theory (EVT). Questi metodi alternativi ci aiuterebbero a capire meglio gli eventi estremi, offrendo previsioni di rischio più affidabili e adattabili alle situazioni di mercato in rapido cambiamento. Un ulteriore approccio che si potrebbe adottare per migliorare quanto proposto e presentato in questo elaborato, sarebbe quello di costruire e confrontare diversi modelli standard per la misura del rischio di mercato. Questo consentirebbe di mettere alla prova la capacità predittiva del nostro metodo in un contesto più ampio, aiutandoci a comprendere meglio come il nostro approccio si confronta con le metodologie convenzionali.

In conclusione, l'elaborato non solo ha ampliato la comprensione del rischio sistemico e dei legami interaziendali all'interno dell'Eurostoxx600, ma ha anche dimostrato l'efficacia di nuovi strumenti e metodologie nella misurazione del rischio. Alla luce di questi risultati, si apre la strada per ulteriori esplorazioni e approfondimenti in questo ambito in continua evoluzione.



# Appendice A

## Appendice

### A.1 Scelta del parametro di penalità LASSO specifico dell'azienda $\lambda_i$

Determiniamo  $\lambda_i$  in modo basato sui dati seguendo una procedura di tipo bootstrap, come suggerito da Belloni e Chernozhukov (2011):

**Step 1:** si eseguono  $T$  estrazioni indipendenti e identicamente distribuite da  $U[0, 1]$ , indipendenti da  $W_1, \dots, W_T$ , indicate come  $U_1, \dots, U_T$ . Condizionalmente alle osservazioni di  $W$ , si calcola il valore corrispondente della variabile casuale:

$$\Lambda^i = T \max_{1 \leq k \leq K} \frac{1}{T} \left| \sum_{t=1}^T \frac{W_{t,k} (q - I(U_t \leq q))}{\hat{\sigma}_k \sqrt{q(1-q)}} \right|. \quad (\text{A.1.1})$$

**Step 2:** si ripete lo step 1 per  $B = 500$  volte, generando la distribuzione empirica di  $\Lambda_i$ , condizionata a  $W$  attraverso  $\Lambda_1^i, \dots, \Lambda_B^i$ . Per il livello di confidenza  $\alpha \leq 1/K$ :

$$\lambda^i = c \cdot Q(\Lambda^i, 1 - \alpha \mid \mathbf{W}_t), \quad (\text{A.1.2})$$

dove  $Q(\Lambda^i, 1 - \alpha \mid \mathbf{W}_t)$  denota il quantile  $(1 - \alpha)$  di  $\Lambda^i$ , dato  $W_t$  e con  $c \leq 2$  costante.

## A.2 Sigle titoli EUROSTOXX600

Nella tabella seguente sono elencati tutti e 87 i titoli considerati per l'analisi empirica nell'intervallo temporale dal 2010 al 2023. Ogni titolo è accompagnato dalla sua sigla corrispondente, al fine di garantire una rappresentazione grafica più chiara.

<b>Titolo</b>	<b>Sigla</b>
<b>Settore banking (39)</b>	
AIB GROUP - TOT RETURN IND	AIB
AVANZA BANK HOLDING - TOT RETURN IND	AZA
BANCO BPM - TOT RETURN IND	BAMI
BANK OF IRELAND - TOT RETURN IND	BIRG
BANKINTER 'R' - TOT RETURN IND	BKT
BC VAUD N - TOT RETURN IND	BCVN
BARCLAYS - TOT RETURN IND	BARC
BBV.ARGENTARIA - TOT RETURN IND	1BBVA
BANCO DE SABADELL - TOT RETURN IND	SAB
BANCO SANTANDER - TOT RETURN IND	1SANX
BNP PARIBAS - TOT RETURN IND	1BNP
BPER BANCA - TOT RETURN IND	BPE
CAIXABANK - TOT RETURN IND	CABK
CLOSE BROTHERS GROUP - TOT RETURN IND	CBG
COMMERZBANK (XET) - TOT RETURN IND	1CBK
CREDIT AGRICOLE - TOT RETURN IND	1ACA
DANSKE BANK - TOT RETURN IND	DANSKE
DEUTSCHE BANK (XET) - TOT RETURN IND	1DBK
DNB BANK - TOT RETURN IND	DNB
ERSTE GROUP BANK - TOT RETURN IND	EBS
SOCIETE GENERALE - TOT RETURN IND	1GLE

HSBC HOLDINGS - TOT RETURN IND	HSBA
ING GROEP - TOT RETURN IND	IINGA
INTESA SANPAOLO - TOT RETURN IND	ISP
INVESTEC - TOT RETURN IND	INL
JYSKE BANK - TOT RETURN IND	JYSK
KBC GROUP - TOT RETURN IND	KBC
LLOYDS BANKING GROUP - TOT RETURN IND	LLOY
NATWEST GROUP - TOT RETURN IND	NWG
NORDEA BANK (HEL) - TOT RETURN IND	NDA_SE
BANK POLSKA KASA OPIEKI - TOT RETURN IND	PEO
PKO BANK - TOT RETURN IND	PKO
RINGKJOBING LANDBOBANK - TOT RETURN IND	RILBA
SKANDINAVISKA ENSKILDA - TOT RETURN IND	SEB_A
STANDARD CHARTERED - TOT RETURN IND	STAN
SVENSKA HANDELSBANKEN A - TOT RETURN IND	SHB_A
SWEDBANKA - TOT RETURN IND	SWED_A
SYDBANK - TOT RETURN IND	SYDB
UNICREDIT - TOT RETURN IND	UCG
<b>Settore finance (24)</b>	
3I GROUP - TOT RETURN IND	3 I
ABRDN - TOT RETURN IND	ABRDN
AZIMUT HOLDING - TOT RETURN IND	AZM
CREDIT SUISSE GROUP - TOT RETURN IND	CSGN
DEUTSCHE BOERSE (XET) - TOT RETURN IND	DB1
EURAZEO - TOT RETURN IND	RF
GBL NEW - TOT RETURN IND	GBLB
HARGREAVES LANSDOWN - TOT RETURN IND	HL
IG GROUP HOLDINGS - TOT RETURN IND	IGG

INDUSTRIVARDEN C - TOT RETURN IND	INDU_A
INTERMEDIATE CAPITAL GP. - TOT RETURN IND	ICP
INVESTOR B - TOT RETURN IND	INVE_B
JULIUS BAER GRUPPE - TOT RETURN IND	BAER
KINNEVIK B - TOT RETURN IND	KINV_B
LONDON STOCK EXCHANGE GROUP - TOT RETURN IND	LSEG
LUNDBERGFORETAGEN B - TOT RETURN IND	LUND_B
MAN GROUP - TOT RETURN IND	EMG
MEDIOBANCA BC.FIN - TOT RETURN IND	MB
PARTNERS GROUP HOLDING - TOT RETURN IND	PGHN
SCHRODERS - TOT RETURN IND	SDR
SOFINA - TOT RETURN IND	SOF
ST JAMES'S PLACE ORD - TOT RETURN IND	STJ
UBS GROUP - TOT RETURN IND	UBSG
WENDEL - TOT RETURN IND	MF
<b>Settore insurance (24)</b>	
ADMIRAL GROUP - TOT RETURN IND	ADM
AEGON - TOT RETURN IND	AEGON
AGEAS (EX-FORTIS) - TOT RETURN IND	AGS
ALLIANZ (XET) - TOT RETURN IND	ALLIANZ
ASSICURAZIONI GENERALI - TOT RETURN IND	GEN
AVIVA - TOT RETURN IND	AVIVA
AXA - TOT RETURN IND	AXA
BALOISE HOLDING - TOT RETURN IND	BALN
BEAZLEY - TOT RETURN IND	BEZ
HANNOVER RUECK (XET) - TOT RETURN IND	HNR1
HELVETIA HOLDING N - TOT RETURN IND	HELN
HISCOX DI - TOT RETURN IND	HSX

LEGAL & GENERAL - TOT RETURN IND	LGEN
MUENCHENER RUCK. (XET) - TOT RETURN IND	1MUV2
PHOENIX GROUP HDG. - TOT RETURN IND	PHNX
PRUDENTIAL - TOT RETURN IND	PRU
SAMPO 'A' - TOT RETURN IND	SAMPO
SCOR SE - TOT RETURN IND	SCR
STOREBRAND - TOT RETURN IND	SKT
SWISS LIFE HOLDING - TOT RETURN IND	SLHN
SWISS RE - TOT RETURN IND	SREN
TOP DANMARK - TOT RETURN IND	TOP
TRYG - TOT RETURN IND	TRYG
ZURICH INSURANCE GROUP - TOT RETURN IND	ZURN

## Bibliografia

- [1] Philippe Artzner et al. «Coherent measures of risk». In: *Mathematical finance* 9.3 (1999), pp. 203–228 (cit. a p. 6).
- [2] Gilbert W Bassett Jr, Roger Koenker e Gregory Kordas. «Pessimistic portfolio allocation and Choquet expected utility». In: *Journal of financial econometrics* 2.4 (2004), pp. 477–492 (cit. a p. 17).
- [3] Alexandre Belloni e Victor Chernozhukov. «1-penalized quantile regression in high-dimensional sparse models». In: (2011) (cit. a p. 26).
- [4] Berkowitz. «Testing density forecasts, with applications to risk management». In: *Journal of business & economic statistics* 19.4 (2001), pp. 465–474 (cit. a p. 31).
- [5] Nikolaus Hautsch, Julia Schaumburg e Melanie Schienle. «Financial network systemic risk contributions». In: *Review of Finance* 19.2 (2015), pp. 685–738 (cit. a p. 23).
- [6] John Hull. *Risk management and financial institutions, + Web Site*. Vol. 733. John Wiley & Sons, 2012 (cit. a p. 7).
- [7] Roger Koenker. *Quantile regression*. Vol. 38. Cambridge university press, 2005 (cit. a p. 15).
- [8] Roger Koenker e Gilbert Bassett Jr. «Regression quantiles». In: *Econometrica: journal of the Econometric Society* (1978), pp. 33–50 (cit. a p. 24).
- [9] Roger Koenker e Jose AF Machado. «Goodness of fit and related inference processes for quantile regression». In: *Journal of the american statistical association* 94.448 (1999), pp. 1296–1310 (cit. alle pp. 4, 21, 63).
- [10] Kupiec. *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*. Vol. 95. 24. Division of Research e Statistics, Division of Monetary Affairs, Federal . . . , 1995 (cit. a p. 30).

- [11] Alexander J McNeil, Rüdiger Frey e Paul Embrechts. *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*. Princeton university press, 2015 (cit. a p. 8).
- [12] Natalia Nolde e Johanna F Ziegel. «Elicitability and backtesting: Perspectives for banking regulation». In: (2017) (cit. a p. 12).
- [13] James W Taylor. «Forecasting value at risk and expected shortfall using a semiparametric approach based on the asymmetric Laplace distribution». In: *Journal of Business & Economic Statistics* 37.1 (2019), pp. 121–133 (cit. alle pp. 5, 12, 23).

## Sitografia

- [14] "*Equities - Barclays PLC*". 2023. URL: <https://markets.ft.com/data/equities/tearsheet/profile?s=BARC:LSE> (visitato il 10/10/2023) (cit. a p. 37).
- [15] "*Equities - St. James Place PLC*". 2023. URL: <https://markets.ft.com/data/equities/tearsheet/summary?s=STJ:LSE> (visitato il 10/10/2023) (cit. a p. 38).
- [16] "*Equities - Swiss Re AG*". 2023. URL: <https://markets.ft.com/data/equities/tearsheet/summary?s=SREN:SWX> (visitato il 10/10/2023) (cit. a p. 39).